離散数学勉強ノート

2023 年 10 月 12 日

目次

第 I 部
グラフの基礎概念

1　基本的な定義

定義 1.1（**グラフ**）　グラフ G とは**頂点集合** $V(G)$ と**辺集合** $E(G)$ からなる図形のことである．頂点集合 $V(G)$ とは**頂点 (vertex, site)** あるいは**点**と呼ばれる要素の集合である．また，辺集合 $E(G)$ とは**辺 (edge, bond)** と呼ばれる頂点の 2 元集合の集合からなるものである．辺 $e \in E(G)$ は，頂点 u, v を用いて $e = u, v$, $e = uv = vu$ で表される．ここでは，$e = u, v$ で辺を表す．

頂点集合，辺集合がともに有限集合であるグラフを**有限グラフ**という．グラフ G の頂点数 $|V(G)|$ を G の**位数 (order)**，辺数 $|E(G)|$ を G のサイズ (size) という．

グラフには，無向グラフと有効グラフの 2 種類がある．

定義 1.2（**無向グラフ**）　辺が，節点 2 要素からなる集合 $\{u,\ v\}$ で表されるとき，G は**無**

向グラフ (undirected graph) であるという．無向グラフは向きのないグラフであり，単にグラフと呼ぶ.

定義 1.3（有向グラフ）　辺に向きのあるグラフ D は，**有向グラフ (directed graph)** と呼ばれ，頂点集合 $V(D)$ と**弧 (有向辺)** と呼ばれる頂点の順序対 $\{u, v\}$ の集合 $A(D)$ (**弧集合**) からなる.

定義 1.4（端点，隣接，接続）　グラフ G の頂点 u と v が辺 e で結ばれているとき，頂点 u と v とは**隣接 (adjacent)** するという．辺 e は頂点 u, v と**接続する**といい，頂点 u, v を辺 e の**端点 (edge)** という．また，頂点 v に隣接する頂点全体の集合 v の近傍といい，$N_G(v)$ で表す．辺 e_1 と e_2 が同一の頂点 u に接続しているとき 2 辺は隣接するという.

グラフ G のある接点 v に接続する辺の個数を**次数 (degree)** といい，$\deg_G(v)$ または G が明らかなときには単に $\deg(v)$ と表す．有向グラフの頂点の次数は，入次数 (いりじすう，in-degree) と出次数 (でじすう，out-degree) に分けて定義される.

定義 1.5（入次数，出次数）　G が有向グラフであるとき，節点 v へ入る辺の個数を**入次数 (in-degree)** といい，$\deg_G^{\mathrm{in}}(v)$ または，$\deg^{\mathrm{in}}(v)$ と表す．一方，節点 v から出る辺の個数を**出次数 (out-degree)** といい，$\deg_G^{\mathrm{out}}(v)$ または，$\deg^{\mathrm{out}}(v)$ と表す．明らかに，$\deg(v) = \deg^{\mathrm{in}}(v) + \deg^{\mathrm{out}}(v)$ であり，辺の個数が保存していることがわかる.

1.1　木構造

定義 1.6　G が無閉路 (閉路を含まない) グラフは森，林という．また，G が無閉路かつ連結グラフであるとき，G を**木 (tree)** という．特に，有向グラフ G が木であるとき，G を**有向木 (directed tree)** という.

定義 1.7（根付き木，二分木）　有向木 $T = (V, E)$ が一つの接点 $r \in V$ について，入次数が 0 であり，その他の各 $v \in V - \{r\}$ について入次数が 1 であるとき，T を**根付き木 (rooted tree)** といい，r を**根 (root)** という．(これは入次数 0 の頂点をちょうど 1 個もち，ほかの頂点の入次数がすべて 1 であるということである．) 各節点 (ノード点) の出次数が高々 2 である根付き木のことを**二分木 (binary tree)** という.

参考文献