Quantum Optics

2023 年 10 月 12 日

目次

第 I 部
量子系のダイナミクス

1　2 状態系の状態間の遷移

2 状態系の状態間の遷移を議論する際，厳密に解くか，摂動論を使うかで結果が異なる．ここでは 2 種類の方法の適用を試みる．

外部から何らかの作用が印加されたとき，古典力学では，系の初期状態から終状態への遷移の途中過程を時々刻々と追跡することできる．しかし，量子力学の場合，重ね合わせの原理によってそのような追跡は不可

能であり，知ることができるのはそれらの状態間の遷移確率である．

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \tag{1}$$

Hamiltonian$\hat{H}$ による状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ の時間発展は Schrodinger 方程式によって記述される．$|\psi(t)\rangle$ を $\hat{H}_0$ の固有状態 $\{|n\rangle\}$ で展開する：

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n |n\rangle\, a_n. \tag{2}$$

このように展開する理由は，状態 $|\psi(t)\rangle$ において，系を $\hat{H}_0$ の固有状態 $|m\rangle$ に発見する確率 $|a_m(t)|^2$ を求めることが目的だからである．これを (**??**) に代入し，$\hat{H}_0\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$ を用いて，左から $\langle m|$ を掛けると，we obtain $a_m(t)$ of the equation

$$i\hbar\frac{d}{dt}a_m(t) = E_m^{(0)}a_m(t) + \sum_n \langle m|\hat{V}|n\rangle\, a_n(t). \tag{3}$$

(**??**) で $\langle n|\hat{V}|m\rangle = v\delta_{n,m}$，すなわち，$\hat{V}$ が対角的であれば，(**??**) はそれぞれの係数 $a_m(t)$ に関する独立な方程式に分離できるため，初期状態が他の状態に遷移することはない．状態間の遷移を起こすのは，外からの作用 $\hat{V}$ が非対角項を持つときである．

1.1　2 状態系

ここで，$\hat{H}_0$ の固有状態が基底状態 $|g\rangle$ と第一励起状態 $|e\rangle$ の 2 個しかない 2 状態系を考える．すなわち，

$$\hat{H}_0\,|g\rangle = E_g^{(0)}\,|g\rangle\,,\quad \hat{H}_0\,|e\rangle = E_e^{(0)}\,|e\rangle\,,\quad E_e^{(0)} > E_g^{(0)} \tag{4}$$

とする．このとき，$|\psi(t)\rangle$ は

$$|\psi(t)\rangle = |g\rangle\, a_g(t) + |e\rangle\, a_e(t) \tag{5}$$

となり，また相互作用は

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \langle g|\hat{V}|g\rangle & \langle g|\hat{V}|e\rangle \\ \langle g|\hat{V}|e\rangle & \langle e|\hat{V}|e\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

で与えられるとする．するとこのとき，(**??**) は

$$i\hbar\frac{d}{dt}a_g(t) = E_g^{(0)}a_g(t) + va_e(t) \tag{7}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}a_e(t) = E_e^{(0)}a_e(t) + v^*a_g(t) \tag{8}$$

となる．ここで，$a_i(t) = C_i(t)\exp\left[-iE_i^{(0)}t/\hbar\right]$, $i = 1, 2$ とおくと，(**??**) は

$$i\hbar\frac{d}{dt}C_g(t) = ve^{-\omega_0 t}C_e(t) \tag{9}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}C_e(t) = v^*e^{-\omega_0 t}C_g(t) \tag{10}$$

ここで，$\omega_0 \equiv (E_e^{(0)} - E_g^{(0)})/\hbar$ である．さて，時刻 $t=0$ において，系が低エネルギー順位 $E_g^{(0)}$ の固有状態 $|g\rangle$ にあったとする．このとき，微分方程式 (**??**) の初期条件は，$C_g(0)=1$, $C_e(0)=0$，また (**??**) より

$$\frac{dC_1}{dt}(0)=0, \quad \frac{dC_2}{dt}(0)=\frac{v^*}{i\hbar} \tag{11}$$

となる．また，(**??**) から $C_g(t)$ を消去すると，

$$\frac{d^2C_2(t)}{dt^2} - i\omega_0 \frac{dC_2(t)}{dt} + \frac{|v|^2}{\hbar^2}C_2(t) = 0. \tag{12}$$

この方程式の一般解を求めるために，$C_2(t) = A\exp[i\omega t]$ とおき，これを (**??**) へ代入すると，we obtain

$$\omega^2 - \omega_0\omega - |v|^2/\hbar^2 = 0. \tag{13}$$

ω について解くと，$\omega = (1/2)[\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + 4|v||^2/\hbar^2}]$ である．したがって，(**??**) の一般解は

$$C_2(t) = e^{i\omega t/2}[k_1 e^{i\tilde{\omega}t/2} + k_2 e^{i\tilde{\omega}t/2}] \tag{14}$$

で与えられる．ここで $\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\omega_0^2 + 2|v|^2/\hbar^2}$ で，k_1 と k_2 は積分定数である．これらは，初期条件を使うと，$k_1 = -v^*/\hbar\tilde{\omega}$, $k_2 = +v^*/\hbar\tilde{\omega}$ と決まる．これより特殊解として次を得る：

$$C_2(t) = (-2iv^*/\hbar\tilde{\omega})e^{i\omega t/2}\frac{e^{i\tilde{\omega}t/2} - e^{i\tilde{\omega}t/2}}{2i} = (-2iv^*/\hbar\tilde{\omega})e^{i\omega t/2}\sin\tilde{\omega}t/2 \tag{15}$$

したがって，時刻 t に系を状態 $|e\rangle$ に発見する確率は

$$|a_2(t)|^2 = |C_2(t)|^2 = \frac{4|v|^2}{(\hbar\tilde{\omega})^2}\sin^2\left(\frac{\tilde{\omega}t}{2}\right) \tag{16}$$

で与えられ，系が基底状態 $|g\rangle$ に残留している確率は

$$|a_1(t)|^2 = 1 - |a_2(t)|^2 = 1 - \frac{4|v|^2}{(\hbar\tilde{\omega})^2}\sin^2\left(\frac{\tilde{\omega}t}{2}\right) \tag{17}$$

2 rabi 振動

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\lambda}{2}\hat{\sigma}_x = \frac{\Omega}{2}\left(\frac{\Delta}{\Omega}\hat{\sigma}_z + \frac{\lambda}{\Omega}\hat{\sigma}_x\right) \tag{18}$$

ここで，

$$\Omega \equiv \sqrt{\Delta^2 + \lambda^2} \tag{19}$$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2}\left(\cos\frac{\Omega}{2}t + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t\right) \\ -ie^{-i\omega t/2}\frac{\lambda}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$= e^{i\omega t/2}\left(\cos\frac{\Omega}{2}t + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t\right)|e\rangle - ie^{-i\omega t/2}\frac{\lambda}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t\,|g\rangle \tag{21}$$

よって，状態が $|e\rangle$, $|g\rangle$ に残っている確率はそれぞれ以下のように与えられる：

$$P_e = |\hat{P}_e \left|\psi(t)\right\rangle|^2 = \cos^2 \frac{\Omega}{2}t + \frac{\Delta^2}{\Omega^2}\sin^2 \frac{\Omega}{2}t \tag{22}$$

$$P_g = |\hat{P}_g \left|\psi(t)\right\rangle|^2 = \frac{\lambda^2}{\Omega^2}\sin^2 \frac{\Omega}{2}t \tag{23}$$

2.1 Simulation 結果とパラメータの対応関係

第 II 部
原子と光の相互作用

3 原子-光相互作用の一般論

原子系と電磁場の相互作用を考える．原子系，電磁場そして相互作用 Hamiltonian をそれぞれ $\hat{H}_{\mathrm{A}}$，$\hat{H}_{\mathrm{F}}$，$\hat{H}^{'}$ としたとき，全系の Hamiltonian は，電気双極子近似のもとで，

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{A}} + \hat{H}_{\mathrm{F}} + \hat{H}^{'} \tag{24}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{A}} = \sum_i E_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right| \tag{25}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{F}} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^{\dagger}\hat{a}_k + \frac{1}{2}\right) \tag{26}$$

$$\hat{H}^{'} = -e\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{E}} \tag{27}$$

と表される．ここで，$|i\rangle$ は原子系の i 番目のエネルギー固有値 E_i に対応する固有状態，$\hat{\boldsymbol{r}}$ はポテンシャルの中心を原点とした時の電子の位置座標演算子であり，電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}$ は原子内で一様であるとする．

相互作用 $\hat{H}^{'}$ については，原子系に演算する部分 $e\hat{\boldsymbol{r}}$ と電磁場に演算する部分 $\hat{\boldsymbol{E}}$ に分けられる．まず，演算子 $e\hat{\boldsymbol{r}}$ を固有関数系 $\{|i\rangle\}$ で展開すると，

$$e\hat{\boldsymbol{r}} = e\hat{I}\hat{\boldsymbol{r}}\hat{I} = \sum_{i,j}\left|i\right\rangle\left\langle i|\hat{\boldsymbol{r}}|j\right\rangle\left\langle j\right| = \sum_{i,j}P_{i,j}\hat{\sigma}_{i,j} \tag{28}$$

となる．ここで，$P_{i,j} \equiv e\left\langle i|\hat{\boldsymbol{r}}|j\right\rangle$ は電気双極子遷移の遷移行列要素であり，$\hat{\sigma}_{i,j} = \left|i\right\rangle\left\langle j\right|$ は，原子系の $|j\rangle$ から $|i\rangle$ へ変換する状態変換演算子である．一方，電場 $\hat{\boldsymbol{E}}$ は，原子が固定されていることにより，（電磁場の量子化を参照）を使い，

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \sum_k \tilde{\boldsymbol{e}}\mathcal{E}_k(\hat{a}_k + \hat{a}_k^{\dagger}) \tag{29}$$

と表される．ここで簡単のために，電磁場は直線偏光（ここよくわからない）としてこれらをまとめると，

$$\hat{H}^{'} = -e\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{E}} = -(\sum_{i,j}P_{i,j}\hat{\sigma}_{i,j})(\sum_k \tilde{\boldsymbol{e}}\mathcal{E}_k(\hat{a}_k + \hat{a}_k^{\dagger})) = \hbar\sum_{i,j}\sum_k g_k^{ij}\hat{\sigma}_{i,j}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^{\dagger}) \tag{30}$$

where $g_k^{ij} = -P_{i,j}\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}\mathcal{E}_k$．ここまでが一般論である．

4　Jaynes-Cummings model

2 準位系を考える．第一励起状態を $|e\rangle$, 基底状態を $|g\rangle$ とし，次のベクトル表示をとる：

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

とする．

$$\hat{H}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z \tag{32}$$

上昇演算子，下降演算子はそれぞれ次のように表される：

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

またこれらは,

$$\hat{\sigma}_\pm = \frac{\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y}{2} \tag{34}$$

4.1　問題設定

2 準位原子が，周波数 ω_0 の単一モードの電磁場と相互作用する状況を考える．このとき，2 準位原子と単一モードの電磁場との相互作用を記述する Hamiltonian は

$$\hat{H}_{\mathrm{JC}} = \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \tag{35}$$

と書ける．これは Jaynes-Cummings model と呼ばれている．

4.2　Jaynes-Cummings model の固有値問題

ここでは，Jaynes-Cummings model の固有状態および固有値を求める．そこで次の固有方程式を考える：

$$\hat{H}_{\mathrm{JC}}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \tag{36}$$

ここで，$|u,n\rangle = |u\rangle \otimes |n\rangle$, $|g,n\rangle = |g\rangle \otimes |n\rangle$ の基底で展開すると

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}_n &= (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (|e,n\rangle \langle e,n| - |g,n\rangle \langle g,n|) \\
&= - |g,0\rangle \langle g,0| + |e,0\rangle \langle e,0| - |g,1\rangle \langle g,1| + |e,1\rangle \langle e,1| + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & & & \text{\Large 0} & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{1}_2 \otimes \hat{a}^\dagger \hat{a} &= (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} n\,|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(|g,n\rangle\langle g,n| + |e,n\rangle\langle e,n|) \\
&= 0(|g,0\rangle\langle g,0| + |e,0\rangle\langle e,0|) + 1(|g,1\rangle\langle g,1| + |e,1\rangle\langle e,1|) + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & \text{\Huge 0} & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & \text{\Huge 0} & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & \text{\Huge 0} & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & \text{\Huge 0} & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_+\hat{a} &= (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} n\,|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(|g,n\rangle\langle g,n| + |e,n\rangle\langle e,n|) \\
&= 0(|g,0\rangle\langle g,0| + |e,0\rangle\langle e,0|) + 1(|g,1\rangle\langle g,1| + |e,1\rangle\langle e,1|) + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & \text{\huge 0} & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & \text{\huge 0} & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger &= (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} n\,|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(|g,n\rangle\langle g,n| + |e,n\rangle\langle e,n|) \\
&= 0(|g,0\rangle\langle g,0| + |e,0\rangle\langle e,0|) + 1(|g,1\rangle\langle g,1| + |e,1\rangle\langle e,1|) + \cdots \\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\
0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\
0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
0 & & & & & \\
& 1 & & & \text{\huge 0} & \\
& & 2 & & & \\
& & & 3 & & \\
& \text{\huge 0} & & & \ddots & \\
& & & & & \ddots
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{40}
$$

したがって，Hamiltonian $\hat{H}_{\rm JC}$ を行列表示すると，

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{\rm JC} &= \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}_N) + \hbar\omega_0(\hat{1}_2 \otimes \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\hbar\omega & & & & & \\ & \frac{1}{2}\hbar\omega & & & \text{\Large 0} & \\ & & -\frac{1}{2}\hbar\omega & & & \\ & & & \frac{1}{2}\hbar\omega & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \hbar\omega_0 & & & \text{\Large 0} & \\ & & 2\hbar\omega_0 & & & \\ & & & 3\hbar\omega_0 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}g & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}g & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\hbar\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2}\hbar\omega & g & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & g & -\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega_0 & \sqrt{2}g & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}g & -\frac{1}{2}\hbar\omega + 2\hbar\omega_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{41}
$$

よって，状態をベクトル $|e, n\rangle$ と $|g, n+1\rangle$ で張られる部分空間のブロック行列を得る：

$$
\hat{H}_{\rm JC}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega + n\hbar\omega_0 & \hbar\sqrt{n+1}g \\ \hbar\sqrt{n+1}g & -\frac{1}{2}\hbar\omega + (n+1)\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \tag{42}
$$

ただし，$n = 0, 1, 2, \ldots$ である．行列 $\hat{H}_{\rm JC}^{(n)}$ から得られる固有方程式は

$$
\begin{pmatrix} E - (\hbar\omega/2 + n\hbar\omega_0) & -\hbar\sqrt{n+1}g \\ -\hbar\sqrt{n+1}g & E - (-\hbar\omega/2 + (n+1)\hbar\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| E\hat{1}_2 - \hat{H}_{\rm JC}^{(n)} \right| &= \left| \begin{pmatrix} E - (\hbar\omega/2 + n\hbar\omega_0) & -\hbar\sqrt{n+1}g \\ -\hbar\sqrt{n+1}g & E - (-\hbar\omega/2 + (n+1)\hbar\omega_0) \end{pmatrix} \right| \\
&= [E - (\hbar\omega/2 + n\hbar\omega_0)]\,[E - (-\hbar\omega/2 + (n+1)\hbar\omega_0)] - (\hbar g)^2(n+1) = 0
\end{aligned} \tag{44}
$$

これを解くと

$$E_{\pm} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar\Delta_n}{2} \tag{45}$$

を得る．

$E = E_+$ のとき

$$\begin{pmatrix} \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{\hbar\Delta_n}{2} - (\hbar\omega/2 + n\hbar\omega_0) & -\hbar\sqrt{n+1}g \\ -\hbar\sqrt{n+1}g & \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{\hbar\Delta_n}{2} - (-\hbar\omega/2 + (n+1)\hbar\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega + \Delta_n) & -\hbar\sqrt{n+1}g \\ -\hbar\sqrt{n+1}g & -\frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega + \Delta_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{46}$$

この連立方程式を解くと

$$\frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega + \Delta_n)a - \hbar\sqrt{n+1}gb = 0 \tag{47}$$

$$a = \frac{\hbar\sqrt{n+1}g}{\frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega + \Delta_n)}b \tag{48}$$

規格化条件より $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{aligned} 1 = a^2 + b^2 &= \left(1 + \frac{\hbar^2(n+1)g^2}{\frac{\hbar^2}{4}(\omega_0 - \omega + \Delta_n)^2}\right)b^2 \\ &= \frac{\frac{\hbar^2}{4}(\omega_0 - \omega + \Delta_n)^2 + \hbar^2(n+1)g^2}{\frac{\hbar^2}{4}(\omega_0 - \omega + \Delta_n)^2}b^2 = \frac{(\omega_0 - \omega + \Delta_n)^2 + 4(n+1)g^2}{(\omega_0 - \omega + \Delta_n)^2}b^2 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\therefore b^2 = \frac{(\Delta_n - (\omega - \omega_0))^2}{(\Delta_n - (\omega - \omega_0))^2 + 4(n+1)g^2}$$

$$\therefore b = \frac{(\Delta_n - \delta)}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + 4(n+1)g^2}} \equiv \cos\theta_n \tag{50}$$

ここで，$\delta = \omega - \omega_0$ である．

$$a = \frac{2\sqrt{n+1}g}{(\omega_0 - \omega + \Delta_n)}b = \frac{2\sqrt{n+1}g}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + 4(n+1)g^2}} \equiv \sin\theta_n \tag{51}$$

ここで

$$\tan\theta_n = \frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n} = \frac{2\sqrt{n+1}g}{(\Delta_n - \delta)} \tag{52}$$

である．

よって，固有状態 $|\Psi_{\pm}\rangle$ についても

$$|\Psi_+\rangle = \sin\theta_n|e,n\rangle + \cos\theta_n|g,n+1\rangle \tag{53}$$

$$|\Psi_-\rangle = \cos\theta_n|e,n\rangle - \sin\theta_n|g,n+1\rangle \tag{54}$$

得られたエネルギー固有値から，電磁場と結合した原子のエネルギー準位が 2 つに分裂し，その差が

$$\Delta E \equiv \quad E_+ - E_- = \hbar\Delta_n = \hbar\sqrt{4g^2(n+1)+\delta} \tag{55}$$

であることがわかる．これをラビ分裂という．特に，電磁場が真空状態 $(n=0)$ の場合でさえも，原子のエネルギー準位が $\hbar\sqrt{4g^2+\delta}$ だけ分裂を起こす．これを真空ラビ分裂 (Vacume Labi Splitting) と呼ぶ．

(53),(54) のような電磁場と結合した状態にある原子は，あたかも電磁場のドレスをまとった原子のように見えるので，ドレストアトムと呼ばれる．

4.3 状態の時間発展

次に JC model における状態の時間発展について論じる．今，初期時刻 $t=0$ では原子は第一励起状態 $|e\rangle$ にあり，電磁場は光子数状態 $|n\rangle$ にあるとする．このとき初期状態は

$$|\Psi(t=0)\rangle = |e\rangle\,|n\rangle \equiv |u,n\rangle \tag{56}$$

となる．系の時間発展は，Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi(t)\rangle = \hat{H}_{\mathrm{JC}}\,|\Psi(t)\rangle \tag{57}$$

で記述される．

(57) の形式的な解は以下で与えられる：

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\mathrm{JC}}t/\hbar}\,|\Psi(0)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\mathrm{JC}}t/\hbar}\,|e,n\rangle \tag{58}$$

ここで，(53),(54) を逆に解くことで，初期状態 $|e,n\rangle$ を JC-model の固有状態 $|\Psi_+\rangle$,$|\Psi_-\rangle$ での展開した形を具体的に記述することができる：

$$\sin\theta_n\,|\Psi_+\rangle = \sin^2\theta_n\,|e,n\rangle + \sin\theta_n\cos\theta_n\,|g,n+1\rangle \tag{59}$$

$$\cos\theta_n\,|\Psi_-\rangle = \cos^2\theta_n\,|e,n\rangle - \sin\theta_n\cos\theta_n\,|g,n+1\rangle \tag{60}$$

$$|u,n\rangle = \sin\theta_n\,|\Psi_+\rangle + \cos\theta_n\,|\Psi_-\rangle \tag{61}$$

(61) を (58) へ代入すると

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}_{\mathrm{JC}}t/\hbar}(\sin\theta_n\,|\Psi_+\rangle + \cos\theta_n\,|\Psi_-\rangle \\
&= \sin\theta_n e^{-iE_+t/\hbar}\,|\Psi_+\rangle + \cos\theta_n e^{-iE_-t/\hbar}\,|\Psi_-\rangle \\
&= \sin\theta_n e^{-iE_+t/\hbar}\Big(\sin\theta_n\,|e,n\rangle + \cos\theta_n\,|g,n+1\rangle\Big) + \cos\theta_n e^{-iE_-t/\hbar}\Big(\cos\theta_n\,|e,n\rangle - \sin\theta_n\,|g,n+1\rangle\Big) \\
&= \Big(e^{-iE_+t/\hbar}\sin^2\theta_n + e^{-iE_-t/\hbar}\cos^2\theta_n\Big)\,|e,n\rangle + \sin\theta_n\Big(e^{-iE_+t/\hbar} - e^{-iE_-t/\hbar}\Big)\sin\theta_n\cos\theta_n\,|g,n+1\rangle
\end{aligned} \tag{62}$$

(70) に JC model のエネルギー固有値 (??),(??) を代入すると，

$$e^{-iE_\pm t/\hbar} = \exp\left\{-i\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar\Delta_n}{2}\right)t/\hbar\right\}$$

$$= \exp\left\{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right\}\exp\left\{\mp i\frac{\hbar\Delta_n}{2}t\right\}$$

$$= \exp\left\{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right\}\left\{\cos\frac{\Delta_n t}{2} \mp i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\right\} \tag{63}$$

より，まず

$$e^{-iE_+t/\hbar}\sin^2\theta_n + e^{-iE_-t/\hbar}\cos^2\theta_n$$

$$= \exp\left\{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right\}\left\{\left(\cos\frac{\Delta_n t}{2} - i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\right)\sin^2\theta_n + \left(\cos\frac{\Delta_n t}{2} + i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\right)\cos^2\theta_n\right\}$$

$$= e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}\left\{\cos\frac{\Delta_n t}{2}\left(\sin^2\theta_n + \cos^2\theta_n\right) - \sin\frac{\Delta_n t}{2}\left(\cos^2\theta_n - i\sin^2\theta_n\right)\right\}$$

$$= e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}\left\{\cos\frac{\Delta_n t}{2} - i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\cos 2\theta_n\right\} \tag{64}$$

次に

$$e^{-iE_+t/\hbar} - e^{-iE_-t/\hbar} = \exp\left\{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right\}\left(\cos\frac{\Delta_n t}{2} - i\sin\frac{\Delta_n t}{2} - \cos\frac{\Delta_n t}{2} - i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\right)$$

$$= \exp\left\{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right\}\left(-2i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\right) \tag{65}$$

したがって，JC model の解として次式を得る：

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}\left[\left\{\cos\frac{\Delta_n t}{2} - i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\cos 2\theta_n\right\}|e,n\rangle + \left(-i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\right)2\sin\theta_n\cos\theta_n|g,n+1\rangle\right]$$

$$= e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}\left[\left\{\cos\frac{\Delta_n t}{2} - i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\cos 2\theta_n\right\}|e,n\rangle - i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\sin 2\theta_n|g,n+1\rangle\right] \tag{66}$$

この解について考察を行う．まず，$|g,n+1\rangle$ の展開係数に含まれる

$$\sin 2\theta_n = 2\sin\theta_n\cos\theta_n = \frac{4g\sqrt{n+1}(\Delta_n-\delta)}{(\Delta_n-\delta)^2+4(n+1)g^2} \tag{67}$$

に注目すると，Detuningδ が十分大きいとき ($\delta\to\infty$),

$$\sin 2\theta_n = \frac{4g\sqrt{n+1}(\Delta_n\delta-1)}{\delta(\Delta_n/\delta-1)^2+4(n+1)g^2/\delta} \to \mathcal{O}(1/\delta) \tag{68}$$

となる．つまり，$\delta=\omega-\omega_0$ が大きくなると，原子は基底状態 $|g,n+1\rangle$ の状態へ遷移しにくくなることがわかる．

次に On resonant($\delta=0$),$\therefore\omega=\omega_0$ の場合，

$$\Delta_n = 2g\sqrt{n+1},\quad \sin 2\theta_n = 1,\quad \cos 2\theta_n = 0 \tag{69}$$

となるので，系の時間発展は次のようになる：

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}\left[\cos\left(g\sqrt{n+1}t\right)|e,n\rangle - i\sin\left(g\sqrt{n+1}t\right)|g,n+1\rangle\right] \tag{70}$$

ここから，時刻 t に原子が第一励起状態に見いだされる確率 $P_e(t)$ および基底状態に見いだされる確率 $P_g(t)$ は次のように与えられる：

$$P_e(t) = |\langle e,n\,|\,\Psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\left(g\sqrt{n+1}t\right) \tag{71}$$

$$P_g(t) = |\langle g,n+1\,|\,\Psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\left(g\sqrt{n+1}t\right). \tag{72}$$

また，時刻 t における平均光子数は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\rangle(t) &= \langle\Psi(t)|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\Psi(t)\rangle \\
&= \left(\cos\left(g\sqrt{n+1}t\right)\langle e,n| + i\sin\left(g\sqrt{n+1}t\right)\langle g,n+1|\right)(\hat{a}^\dagger\hat{a})\left(\cos\left(g\sqrt{n+1}t\right)|e,n\rangle - i\sin\left(g\sqrt{n+1}t\right)|g,n+1\rangle\right) \\
&= \left(\cos^2\left(g\sqrt{n+1}t\right)\langle e,n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|e,n\rangle - i\sin\left(g\sqrt{n+1}t\right)\cos\left(g\sqrt{n+1}t\right)\langle e,n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|g,n+1\rangle\right. \\
&\quad \left. - i\sin\left(g\sqrt{n+1}t\right)\cos\left(g\sqrt{n+1}t\right)\langle g,n+1|\hat{a}^\dagger\hat{a}|e,n\rangle + \sin^2\left(g\sqrt{n+1}t\right)\langle g,n+1|\hat{a}^\dagger\hat{a}|g,n+1\rangle\right) \\
&= n\cos^2\left(g\sqrt{n+1}t\right) + (n+1)\sin^2\left(g\sqrt{n+1}t\right) \\
&= n + \sin^2\left(g\sqrt{n+1}t\right) = n + P_g(t)
\end{aligned} \tag{73}$$

このように，原子は決まった周波数

$$\Omega_{\mathrm{Rabi}} = 2g\sqrt{n+1} \tag{74}$$

で光子の吸収と放出を繰り返す．これを Rabi 振動という．また，Δ_n や Ω_{Rabi} は Rabi 周波数と呼ばれる．特に，電磁場の初期状態が真空状態の場合，すなわち，$n=0$ の場合も原子の初期状態が第一励起状態であれば Rabi 振動が起こることがわかる．

参考文献