Hoeffding 不等式

名前:松島完忠
学籍番号:t211d070
日付:7/11

[演習 230] 離散確率変数に対する Hoeffding 不等式

離散確率変数$z_1, \dots . z_m \in \{\pm 1\}$を考える。

$P[z_i = +1] = P[z_i = -1] = 0.5$とする。$z \coloneqq z_1, \dots . {z_m}^T$とおく

1.$\forall i \in [m], E[z_i] = 0$となることを証明する。

$$E[z_i] = +1 * P[z_i = +1] - 1 * P[z_i = -1] = 1 * 0.5 -* 0.5 = 0$$

よって、$\forall i \in [m], E[z_i] = 0$

2.3. Hoeffding 不等式の右辺,左辺の値,と重ねてプロットする,

m=100,1000,10000 としたとき、プロットしら結果を図 1、図 2、図 3 に示す。

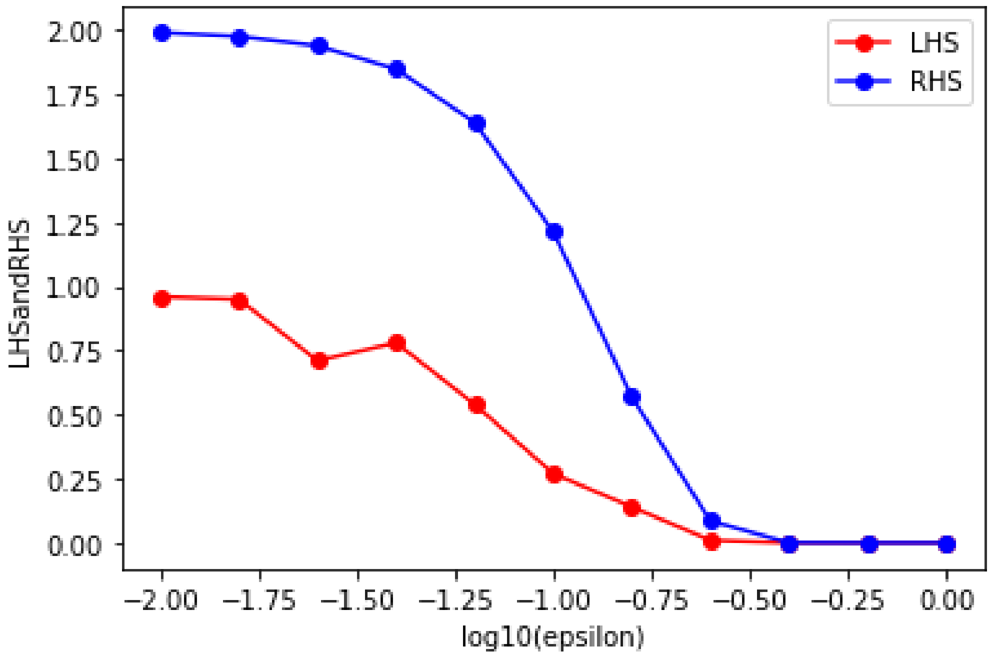

図 1: **Hoeffding 不等式のプロット(m=100)**

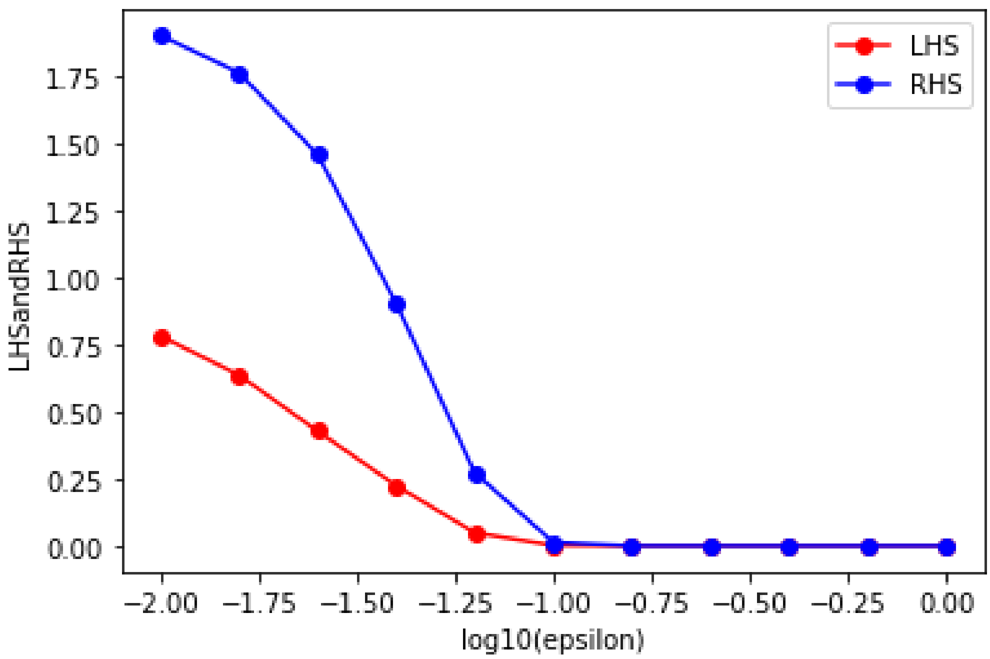

図 2: **Hoeffding 不等式のプロット(m=1000)**

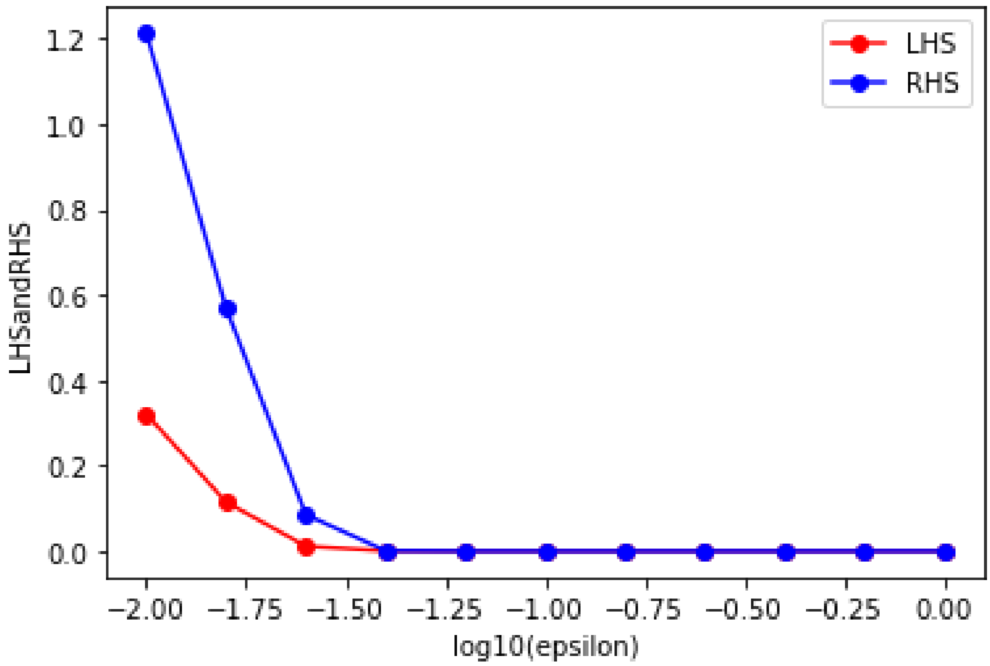

図 3:Hoeffding 不等式のプロット(m=10000)

図 1、図 2、図 3 より各mの値でも Hoeffding 不等式が成立していることがわかる。また、m が大きいほど左辺の値が小さくなり、値 0 に収束する epsilon の値が小さくなった。

作成プログラム

図 4 に本レポートで使用したプログラムを示す。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as norm
import matplotlib.ticker as ticker
import math
```

```

m = 10000
n = 10000
x=20.0
z=0
eps=[]
S=[]
LHS=[]
RHS=[]

while x>0:
    t=x/10
    eps.append(10**(-t))
    x=x-2
eps.append(10**0)

for e in eps:
    sumP = 0
    for t in range(m):
        sum=0
        S=np.random.uniform(-1,1,n)
        for zi in S:
            if zi<0:
                sum=sum-1
```

```
            else:
                sum=sum+1
        ave = abs(float(sum)/n)
        if ave>=e:
            sumP=sumP+1
    LHS.append(float(sumP)/m)
    t=(-2.0*m*e*e)/(2.0*2.0)
    RHS.append(2.0*math.exp(t))

X=[]
for x in eps:
    X.append(math.log10(x))
fig = plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111,xlabel='log10(epsilon)',ylabel='LHSandRHS')
plt.plot(X,LHS,color="red",marker="o",label="LHS")
plt.plot(X,RHS,color="blue",marker="o",label="RHS")
ax.legend()
```

図 4:作成プログラム