課題 Markov 不等式・Chebyshev 不等式

名前:松島完忠
学籍番号:t211d070
日付:6 月 27 日

演習　175 離散確率変数による Markov 不等式

確率変数$x \in \{\pm 1\}$を考える。$P[x = +1] = P[x = -1] = 0.5$とする。

1.$E[|x|] = 1$になることを数学的に証明する。

$$E[|x|] = P[x = +1] \cdot |1| + P[x = -1] \cdot |-1|$$

$P[x = +1] = P[x = -1] = 0.5$であることから

$$= 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 = 1$$

したがって、$E[|x|] = 1$となる

2.$P[|x| \geqq a] = 1[a \leq 1]$になることを数学的に証明する。

右辺$=\begin{cases} 1 \ \ if \quad a \leq 1 \\ 0 \quad if \quad a > 1 \end{cases}$

(i) $a \leq 1$の場合

$$(左辺)=P[|x| \geqq 1] = P[|x| = 1] = P[|x = 1] + P[x = -1] = 1.0 = (右辺)$$

(ii)a>1 の場合

$$(左辺)=P[x > 1] = 0 = (右辺)$$

したがって、$P[|x| \geqq a] = 1[a \leq 1]$となる

3.$a\epsilon\{0,1.5\}$に対して、$P[|x| \geqq a$および、$\frac{E[|x|]}{a}$を重ねてプロットして比較する。

$P[|x| \geqq a$および、$\frac{E[|x|]}{a}$をプロットしたものを図 1 に示す。図 1 より，等確率で±1の値をとる離散確率変数 x に対し,$a \in (0,1.5]$の範囲では，マルコフ不等式が満たされていることを確認した．また，a=1 のとき，マルコフ不等式において等号が成立していることを確認した.

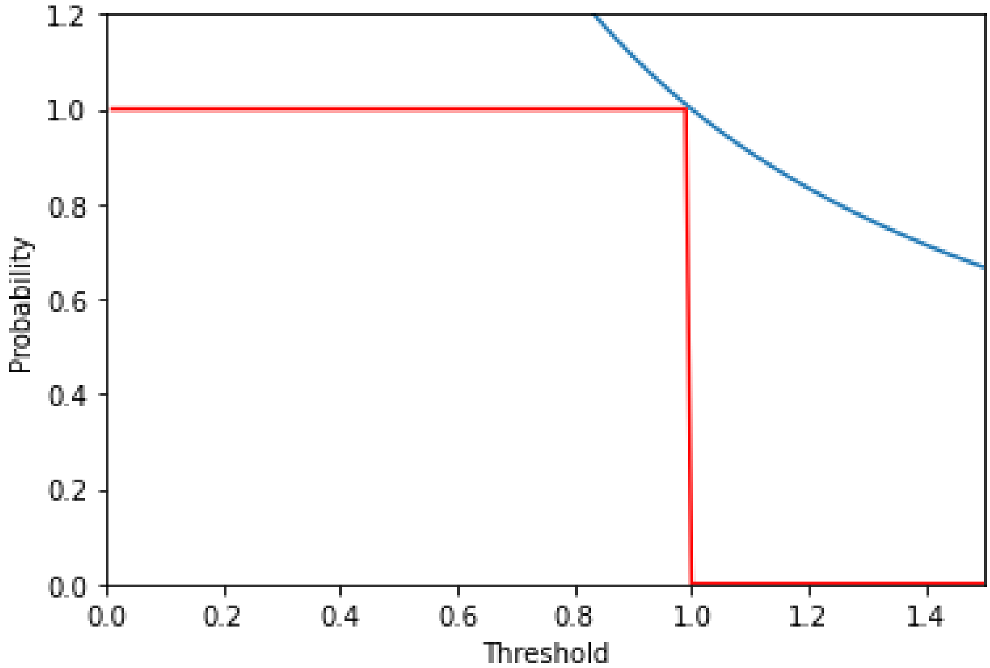

図 1: 離散確率変数に対する Markov 不等式

演習 180 連続一様分布における Markov 不等式

確率変数$x \sim U(-1,+1)$とする。

1.$E[|x|] = 0.5$になることを数学的に証明する。

$\boldsymbol{U(-1,+1)}$の確率密度関数は

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 \; if \;\; x \epsilon [-1,+1] \\ 0 \;\; if x \notin [-1,+1] \end{cases}$$

である。よって、

$$E[|x|] = \int p(x)|x|dx = \int_{-1}^{0} -p(x)xdx + \int_{0}^{1} p(x)xdx = 0.25 + 0.25 = 0.5$$

また、数値計算を計算した結果$E[|x|]$＝ 0.5004459706572796 という結果になった。

よって、$E[|x|]$ =0.5 は正しいといえる。

2.$P[|x| \geqq a] = \max\{0,1-a\}$になることを数学的に証明し、適当な$a$を使って数値計算して確認する。

$if \; a > 1$ のとき、$x\epsilon[-1,+1]$より

$$P[|x| \geqq 1] = 0 = \max\{0,1-a\} = 右辺$$

$if \; a \leq 1$のとき

$$P[|x| \geqq a] = P[|x| \leq 1] - a = 1 - a = \max\{0,1-a\} = 右辺$$

a=0.5 のとき$P[|x| \geqq 0.5] = 0.5$,a=2 のとき$P[|x| \geqq 2]\quad = 0$

よって、$P[|x| \geqq a] = \max\{0,1-a\}$は成り立つ。

3.$a\epsilon\{0.1,0.2,\ldots\ldots,1.4,1.5\}$に対して、$P[|x| \geqq a]$および、$\frac{E[|x|]}{a}$を重ねてプロットする

$P[|x| \geqq a$および、$\frac{E[|x|]}{a}$をプロットしたものを図 2 に示す。図 2 より，確率変数 $x\sim U(-1,+1)$とする x に対し,$a \in (0,1.5]$の範囲では，マルコフ不等式が満たされていることを確認した.

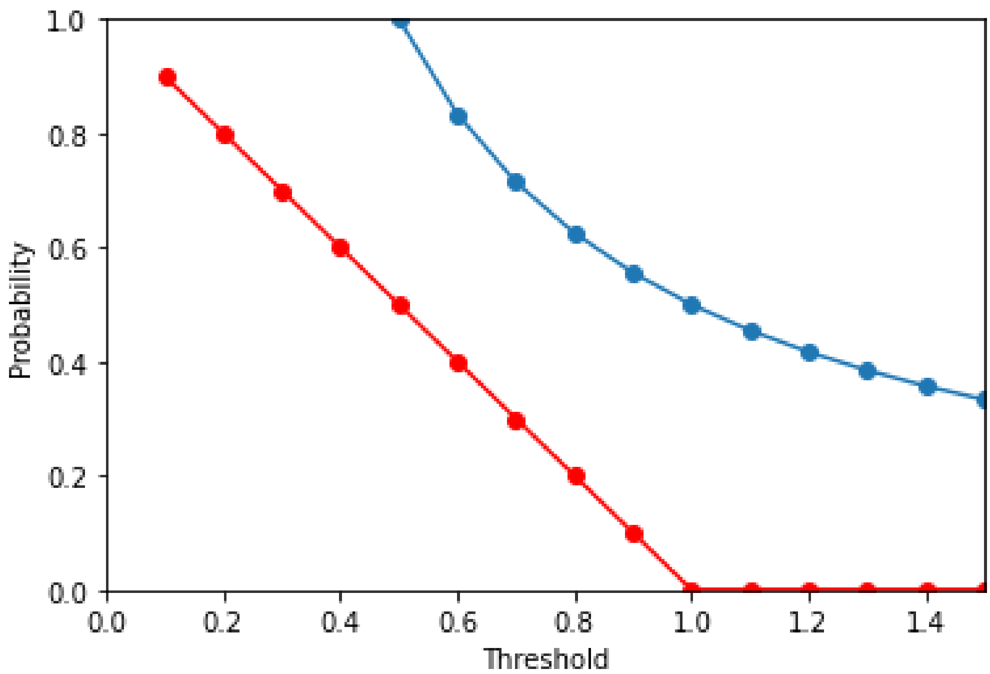

図 2:連続一様分布における Markov 不等式

[演習 190] 正規分布における Markov 不等式

1. $E[|x|]$ を数値計算によって求める。計算した結果、

$E[|x|]$ = *0.3990430483646986 という結果を求められた。*

2.$a\epsilon\{0.1,0.2,\ldots,1.4,1.5\}$に対して、P[|x|≧a]を数値計算で求め、$\frac{E[|x|]}{a}$を重ねてプロットする.

$P[|x| \geqq a$および、$\frac{E[|x|]}{a}$をプロットしたものを図 3 に示す。図 3 より，確率変数 x~N$(0, 0.5^2)$に対し，$a\epsilon\{0.1,0.2,\ldots\ldots,1.4,1.5\}$の範囲では，マルコフ不等式が満たされていることを確認した.

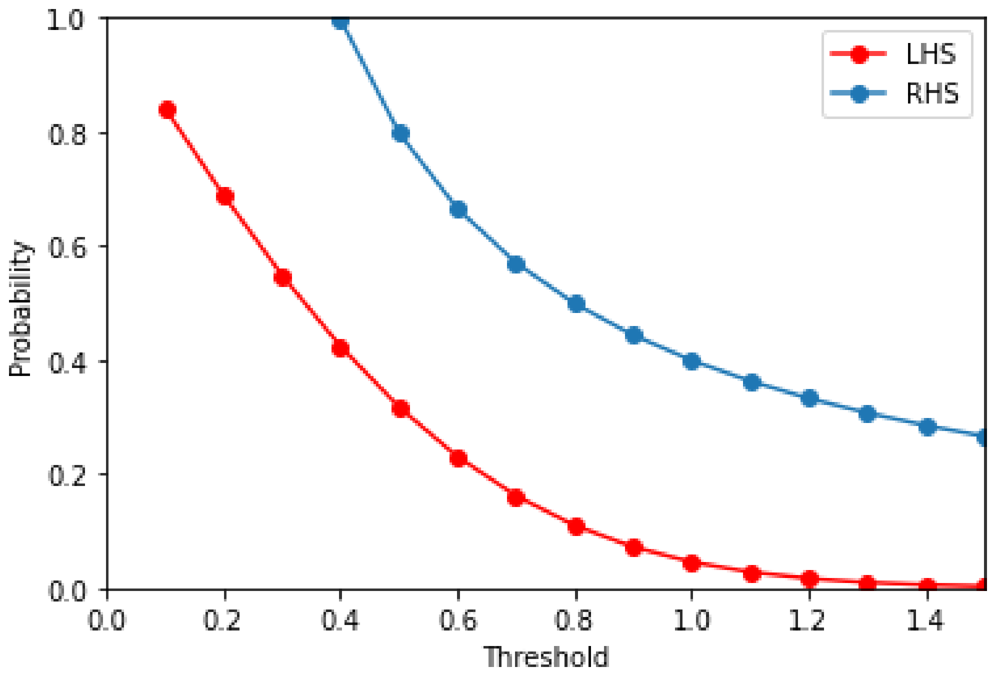

図 3: 正規分布における Markov 不等式

3.[発展問題] $P[|x| \geqq a$は,標準正規分布の累積分布関数 を使って,次のように表されることを数学的に証明する。

$$P[|x| \geqq a] = P[x \leq -a] + P[x \geqq a] = P\left[Z \leq \frac{-a}{0.5}\right] + P\left[Z \geqq \frac{a}{0.5}\right]$$

$$= P[Z \leq -2a] + P[Z \geqq 2a] = 2P[Z \leq -2a] = 2\Phi(-2a)$$

よって,$P[|x| \geqq a] = 2\phi(-2a)$

作成したプログラム

演習 175,演習 180,演習 190 を解くにあたって作成したプログラムを図 4,図 5、図 6 に示す。なお、python を用いてプログラムの作成を行った。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as norm
import matplotlib.ticker as ticker

LHS=[]
RHS=[]
X=[]

a = 0.0
fig = plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111,xlim=(0,1.5),ylim=(0,1.2))

while a<=1.5:
    a = a+10**(-2)
    RHS.append(1.0/a)
    X.append(a)
    if a<=1.0:
        LHS.append(1)
    else:
        LHS.append(0)


ax.set_xlabel('Threshold')
```

```
ax.set_ylabel(’Probability’)
plt.plot(X,LHS,color=”red”)
plt.plot(X,RHS)
```

図 4:演習 175 の作成プログラム

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as norm
import matplotlib.ticker as ticker

def E(N,e):
    n=N
    S=[]
    E=[]
    ecount=0
    Ebar = []
    std = 0

    while True:
        for i in range(5):
            S=stats.uniform.rvs(loc=-1,scale=1,size=n)
            t = 0
            for x in S:
                t=t+np.abs(x)
```

```
            E.append(float(t)/float(n))
        else:
            std = np.std(E)
            if(std<e):
                break
            else:
                n=n*10
                E.clear()
                ecount=ecount+1
                continue

    return np.average(E)


LHS=[]
RHS=[]
X=[]
E=E(10,10**(-3))

a = 0.0
fig = plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111,xlim=(0,1.5),ylim=(0,1.0))

while a<=1.5:
```

```
    a = a+0.1
    X.append(a)
    RHS.append(0.5/a)
    LHS.append(max([0,1-a]))

print(E)
ax.set_xlabel('Threshold')
ax.set_ylabel('Probability')
plt.plot(X,LHS,color="red",marker="o")
plt.plot(X,RHS,marker="o")
```

図 **5:**演習 **180** の作成プログラム

```
import numpy as np
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats
import matplotlib.ticker as ticker

def E(N,e):
    n=N
    S=[]
    E=[]
    ecount=0
    Ebar = []
```

```
    std = 0

    while True:
        for i in range(5):
            S=stats.norm.rvs(loc=0,scale=0.5,size=n)
            t = 0
            for x in S:
                t=t+np.abs(x)
            E.append(float(t)/float(n))
        else:
            std = np.std(E)
            if(std<e):
                break
            else:
                n=n*10
                E.clear()
                ecount=ecount+1
                continue

    return np.average(E)


LHS=[]
RHS=[]
```

```
X=[]
E=E(10,10**(-3))

a = 0.0
fig = plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111,xlim=(0,1.5),ylim=(0,1.0),xlabel='Threshold', ylabel='Probability')

while a<=1.5:
    a = a+0.1
    X.append(a)
    RHS.append(E/a)
    LHS.append(2*scipy.stats.norm.cdf(-2*a))

print(E)

plt.plot(X,LHS,color=”red”,marker=”o”,label=”LHS”)
plt.plot(X,RHS,marker=”o”,label=”RHS”)
ax.legend()
```
図 **6**:演習 **190** の作成プログラム