課題Markov不等式・Chebyshev不等式

名前：松島完忠

学籍番号：t211d070

日付:6月27日

# 演習　175 離散確率変数によるMarkov不等式

確率変数を考える。とする。

1.になることを数学的に証明する。

であることから

したがって、となる

2.になることを数学的に証明する。

右辺＝

(i) の場合

(ii)a>1の場合

したがって、となる

3.に対して、および、を重ねてプロットして比較する。

および、をプロットしたものを図1に示す。図1より，等確率での値をとる離散確率変数xに対し,の範囲では，マルコフ不等式が満たされていることを確認した．また，a=1 のとき，マルコフ不等式において等号が成立していることを確認した．

図形

自動的に生成された説明

図 1： 離散確率変数に対するMarkov不等式

# 演習　180　連続一様分布におけるMarkov不等式

確率変数とする。

1.になることを数学的に証明する。

の確率密度関数は

である。よって、

また、数値計算を計算した結果­ 0.5004459706572796という結果になった。

よって、0.5は正しいといえる。

2.になることを数学的に証明し、適当なを使って数値計算して確認する。

のとき、

*のとき*

a=0.5のときa=2のとき

よって、は成り立つ。

3.に対して、および、を重ねてプロットする

および、をプロットしたものを図2に示す。図2より，確率変数とするxに対し,の範囲では，マルコフ不等式が満たされていることを確認した．

*グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明*

図 2：連続一様分布におけるMarkov不等式

# [演習 190] 正規分布におけるMarkov不等式

1. を数値計算によって求める。計算した結果、

*0.3990430483646986という結果を求められた。*

2.に対して、P[|x|≧a]を数値計算で求め、を重ねてプロットする.

および、をプロットしたものを図3に示す。図3より，確率変数に対し,の範囲では，マルコフ不等式が満たされていることを確認した．

スポーツ, スポーツゲーム, カラフル, 飛ぶ が含まれている画像

自動的に生成された説明

図 3：正規分布におけるMarkov不等式

3.[発展問題] は,標準正規分布の累積分布関数 を使って,次のように表されることを数学的に証明する。

よって,

# 作成したプログラム

演習175,演習180,演習190を解くにあたって作成したプログラムを図4,図5、図6に示す。なお、pythonを用いてプログラムの作成を行った。

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | import numpy as np |
| 2 | import matplotlib.pyplot as plt |
| 3 | import scipy.stats as norm |
| 4 | import matplotlib.ticker as ticker |
| 5 |  |
| 6 | LHS=[] |
| 7 | RHS=[] |
| 8 | X=[] |
| 9 |  |
| 10 | a = 0.0 |
| 11 | fig = plt.figure() |
| 12 | ax=fig.add\_subplot(111,xlim=(0,1.5),ylim=(0,1.2)) |
| 13 |  |
| 14 | while a<=1.5: |
| 15 | a = a+10\*\*(-2) |
| 16 | RHS.append(1.0/a) |
| 17 | X.append(a) |
| 18 | if a<=1.0: |
| 19 | LHS.append(1) |
| 20 | else: |
| 21 | LHS.append(0) |
| 22 |  |
| 23 |  |
| 24 | ax.set\_xlabel('Threshold') |
| 25 | ax.set\_ylabel('Probability') |
| 26 | plt.plot(X,LHS,color="red") |
| 27 | plt.plot(X,RHS) |

**図4：演習175の作成プログラム**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | import numpy as np |
| 2 | import matplotlib.pyplot as plt |
| 3 | import scipy.stats as norm |
| 4 | import matplotlib.ticker as ticker |
| 5 |  |
| 6 | def E(N,e): |
| 7 | n=N |
| 8 | S=[] |
| 9 | E=[] |
| 10 | ecount=0 |
| 11 | Ebar = [] |
| 12 | std = 0 |
| 13 |  |
| 14 | while True: |
| 15 | for i in range(5): |
| 16 | S=stats.uniform.rvs(loc=-1,scale=1,size=n) |
| 17 | t = 0 |
| 18 | for x in S: |
| 19 | t=t+np.abs(x) |
| 20 | E.append(float(t)/float(n)) |
| 21 | else: |
| 22 | std = np.std(E) |
| 23 | if(std<e): |
| 24 | break |
| 25 | else: |
| 26 | n=n\*10 |
| 27 | E.clear() |
| 28 | ecount=ecount+1 |
| 29 | continue |
| 30 |  |
| 31 | return np.average(E) |
| 32 |  |
| 33 |  |
| 34 | LHS=[] |
| 35 | RHS=[] |
| 36 | X=[] |
| 37 | E=E(10,10\*\*(-3)) |
| 38 |  |
| 39 | a = 0.0 |
| 40 | fig = plt.figure() |
| 41 | ax=fig.add\_subplot(111,xlim=(0,1.5),ylim=(0,1.0)) |
| 42 |  |
| 43 | while a<=1.5: |
| 44 | a = a+0.1 |
| 45 | X.append(a) |
| 46 | RHS.append(0.5/a) |
| 47 | LHS.append(max([0,1-a])) |
| 48 |  |
| 49 | print(E) |
| 50 | ax.set\_xlabel('Threshold') |
| 51 | ax.set\_ylabel('Probability') |
| 52 | plt.plot(X,LHS,color="red",marker="o") |
| 53 | plt.plot(X,RHS,marker="o") |

**図5：演習180の作成プログラム**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | import numpy as np |
| 2 | from scipy import stats |
| 3 | import matplotlib.pyplot as plt |
| 4 | import scipy.stats |
| 5 | import matplotlib.ticker as ticker |
| 6 |  |
| 7 | def E(N,e): |
| 8 | n=N |
| 9 | S=[] |
| 10 | E=[] |
| 11 | ecount=0 |
| 12 | Ebar = [] |
| 13 | std = 0 |
| 14 |  |
| 15 | while True: |
| 16 | for i in range(5): |
| 17 | S=stats.norm.rvs(loc=0,scale=0.5,size=n) |
| 18 | t = 0 |
| 19 | for x in S: |
| 20 | t=t+np.abs(x) |
| 21 | E.append(float(t)/float(n)) |
| 22 | else: |
| 23 | std = np.std(E) |
| 24 | if(std<e): |
| 25 | break |
| 26 | else: |
| 27 | n=n\*10 |
| 28 | E.clear() |
| 29 | ecount=ecount+1 |
| 30 | continue |
| 31 |  |
| 32 | return np.average(E) |
| 33 |  |
| 34 |  |
| 35 | LHS=[] |
| 36 | RHS=[] |
| 37 | X=[] |
| 38 | E=E(10,10\*\*(-3)) |
| 39 |  |
| 40 | a = 0.0 |
| 41 | fig = plt.figure() |
| 42 | ax=fig.add\_subplot(111,xlim=(0,1.5),ylim=(0,1.0),xlabel='Threshold',ylabel='Probability') |
| 43 |  |
| 44 | while a<=1.5: |
| 45 | a = a+0.1 |
| 46 | X.append(a) |
| 47 | RHS.append(E/a) |
| 48 | LHS.append(2\*scipy.stats.norm.cdf(-2\*a)) |
| 49 |  |
| 50 | print(E) |
| 51 |  |
| 52 | plt.plot(X,LHS,color="red",marker="o",label="LHS") |
| 53 | plt.plot(X,RHS,marker="o",label="RHS") |
| 54 | ax.legend() |

**図6：演習190の作成プログラム**