中心アフィン幾何における平面曲線の等積変形とその明示公式

中西 和音 [1], 梶原 健司 [2], 松浦 望 [3]
[1] 九大数理, [2] 九大 IMI, [3] 福岡大理
e-mail : ma215030@math.kyushu-u.ac.jp

1 概要

平面曲線および平面離散曲線の等積変形（面積を保つような変形）はそれぞれ KdV 方程式および離散 KdV 方程式によって記述されることが知られている．本講演では，等積変形される曲線の位置ベクトルを KdV 方程式や離散 KdV 方程式の τ 函数をもちいて明示的に構成する．

2 中心アフィン平面曲線の等積変形

面積を保つような変形を考える（したがって長さの概念は必要ない）から，等積中心アフィン幾何の枠組みにおいて議論するのが自然である．この節では，等積中心アフィン幾何における平面曲線および平面離散曲線の等積変形について，先行研究の結果を述べる．

連続曲線　曲線 $\gamma \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が $\det[\gamma', \gamma] \neq 0$ を満たすとき，γ を中心アフィン平面曲線と呼ぶ．このとき $\det[\gamma', \gamma] = 1$ となるパラメータ x がとれる．したがって $\det[\gamma'', \gamma] = 0$ だから $\gamma'' = -\kappa\gamma$ となる函数 κ（等積中心アフィン曲率）が存在し，枠 $\phi = [\gamma', \gamma] \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ は

$$\phi' = \phi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

を満たす．変形パラメータ t を導入し，曲線の変形を $\dot{\gamma} = a\gamma' + b\gamma$ と書くと，枠は

$$\dot{\phi} = \phi \begin{bmatrix} b + a' & -a\kappa + b' \\ a & b \end{bmatrix} \tag{2}$$

を満たす．したがって函数 a, b を $a' + 2b = 0$ を満たすようにとれば，係数行列が $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$ の元になるので，全ての t で $\phi \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$，すなわち面積速度一定 $\det[\gamma', \gamma] = 1$ となる．この変形を等積変形と呼ぶ．(1) と (2) の両立条件は

$$\dot{\kappa} = \Omega(-b), \quad \Omega = \partial_x^2 + 4\kappa + 2\kappa'\partial_x^{-1}$$

であり，KdV 階層の再帰作用素 Ω が自然に現れる．したがって特に $b = -\kappa'$, $a = 2\kappa$ で等積変形を定めれば，等積中心アフィン曲率 κ の変化は KdV 方程式 $\dot{\kappa} = \kappa''' + 6\kappa\kappa'$ で記述される．

離散曲線　平面離散曲線 $\gamma_n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が任意の n について $\epsilon_n := \det[\gamma_{n+1}, \gamma_n] \neq 0$ かつ $\epsilon_n + \epsilon_{n-1} \neq 0$ を満たすとき，γ を等積中心アフィン平面離散曲線（または単に平面離散曲線）と呼ぶ．このときある函数 κ_n が存在して

$$\frac{1}{\epsilon_n + \epsilon_{n-1}} \left(\frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\epsilon_n} - \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{\epsilon_{n-1}} \right) = -\kappa_n \gamma_n$$

が成り立つ．定数 δ に対して新しい曲線 $\overline{\gamma}_n$ を

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}_n &= \frac{\delta}{\epsilon_n}\gamma_{n+1} + \left(1 - \frac{\delta}{\epsilon_n}\right)\frac{1}{v_n}\gamma_n, \\
v_{n+1} &= \frac{A_n}{B_n + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\epsilon_n}\right) v_n}, \\
A_n &= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\epsilon_{n+1}}, \\
B_n &= -\frac{1}{\epsilon_n} - \frac{1}{\epsilon_{n+1}} + (\epsilon_{n+1} + \epsilon_n)\kappa_{n+1}
\end{aligned}$$

で定めれば，曲線 $\overline{\gamma}_n$ の作る面積も一定

$$\det\left[\overline{\gamma}_{n+1}, \overline{\gamma}_n\right] = \det[\gamma_{n+1}, \gamma_n] = \epsilon_n$$

となる．したがって，この構成を繰り返すと，平面離散曲線の等積変形列 $\gamma^0 = \gamma$, $\gamma^1 = \overline{\gamma}, \ldots,$ $\gamma^{m+1} = \overline{\gamma^m}, \ldots$ が得られる．曲線の枠 ϕ_n^m を

$$\phi_n^m = \left[\frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{\epsilon_n},\ \gamma_n^m\right]$$

で定義すると ϕ_n^m は差分方程式系

$$\phi_{n+1}^m = \phi_n^m \left(I + \epsilon_n X_n^m\right), \tag{3}$$

$$\phi_n^{m+1} = \phi_n^m \left(I + \delta_m Y_n^m + \delta_m X_n^m\right) \tag{4}$$

をみたす．ただし I は単位行列，および

$$\begin{aligned}
X_n^m &= \begin{bmatrix} -(\epsilon_{n+1} + \epsilon_n)\kappa_{n+1}^m & 1 \\ -(1/\epsilon_n)(\epsilon_{n+1} + \epsilon_n)\kappa_{n+1}^m & 0 \end{bmatrix}, \\
Y_n^m &= \begin{bmatrix} b_{n+1}^m & 0 \\ (1/\epsilon_n)(b_{n+1}^m - b_n^m) & b_n^m \end{bmatrix}, \\
b_n^m &= \left(\frac{1}{\delta_m} - \frac{1}{\epsilon_n}\right)\left(\frac{1}{v_n^m} - 1\right)
\end{aligned}$$

である．(3) と (4) の両立条件は離散 KdV 方程式

$$\left(\frac{1}{\delta_{m+1}}-\frac{1}{\epsilon_{n+1}}\right)\frac{1}{v_{n+1}^{m+1}}-\left(\frac{1}{\delta_m}-\frac{1}{\epsilon_n}\right)\frac{1}{v_n^m}$$
$$=\left(\frac{1}{\delta_{m+1}}+\frac{1}{\epsilon_n}\right)v_n^{m+1}-\left(\frac{1}{\delta_m}+\frac{1}{\epsilon_{n+1}}\right)v_{n+1}^m$$

である [1, 2]．函数 v_n^m は幾何学的には面積比

$$v_n^m=\frac{\det\left[\gamma_n^{m+1}-\gamma_{n+1}^m,\ \gamma_n^m\right]}{\det\left[\gamma_n^{m+1}-\gamma_{n+1}^m,\ \gamma_{n+1}^m\right]}$$

を表す．

3　明示公式

前節で述べた等積変形は以下のような明示公式をもち，この明示公式によって，等積変形する曲線を無数に構成することが可能となる．

定理　ふたつの函数 $F_n^m=F_n^m(x,t;y)$ および $G_n^m=G_n^m(x,t;y)$ が次の双線形方程式

$$\frac{1}{2}D_xD_y\ F_n^m\cdot F_n^m=-\frac{1}{C}\left(G_n^m\right)^2, \tag{5}$$
$$D_x^2\ F_n^m\cdot G_n^m=0, \tag{6}$$
$$(D_x^3+D_t)\ F_n^m\cdot G_n^m=0, \tag{7}$$
$$D_y\ F_{n+1}^m\cdot F_n^m=-\frac{\epsilon_n}{C}G_{n+1}^mG_n^m, \tag{8}$$
$$D_y\ F_n^{m+1}\cdot F_n^m=-\frac{\delta_m}{C}G_n^{m+1}G_n^m, \tag{9}$$
$$\begin{aligned}&\delta_mG_n^{m+1}F_{n+1}^m-\epsilon_nG_{n+1}^mF_n^{m+1}\\&\quad+(\epsilon_n-\delta_m)G_{n+1}^{m+1}F_n^m=0,\end{aligned} \tag{10}$$

および F と G を入れ替えた双線形方程式を満たしているとする．ただし D_x などは広田微分，C は定数である．このとき

$$\gamma_n^m(x,t;y)=\frac{1}{F_n^m}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}G_n^m\\ G_n^m\end{bmatrix} \tag{11}$$

は，変数 (x,t) に関しては平面連続曲線の等積変形を与え，変数 (n,m) については平面離散曲線の等積変形を与える．また，等積変形に付随する諸量 κ, v_n^m, κ_n^m はそれぞれ

$$\kappa=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log F,$$
$$v_n^m=\frac{F_n^mF_{n+1}^{m+1}}{F_{n+1}^mF_n^{m+1}},$$
$$\kappa_n^m=\frac{1}{\epsilon_n+\epsilon_{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{F_{n-1}^m}{F_{n+1}^m}$$

と表される．

明示公式 (11) 中の函数 F,G は，典型的には次のように与えられる．

命題　自然数 N に対して

$$\begin{aligned}\tau_n^m(s)&=\tau_n^m(x,t;y;s)\\&=\frac{\det\left[f_{s+j-1}^{(i)}\right]_{i,j=1,\ldots,N}}{e^{\left(x+\sum_{n'}^{n-1}\epsilon_{n'}+\sum_{m'}^{m-1}\delta_{m'}\right)y}}\end{aligned}$$

とおく．ただし行列成分は各 i について

$$\begin{aligned}f_s^{(i)}=&\frac{\alpha_i\,p_i^s\,e^{p_ix-4p_i^3t+\frac{1}{p_i}y}}{\prod_{n'}^{n-1}(1-\epsilon_{n'}p_i)\prod_{m'}^{m-1}(1-\delta_{m'}p_i)}\\&+\frac{\beta_i\,(-p_i)^s\,e^{-p_ix+4p_i^3t-\frac{1}{p_i}y}}{\prod_{n'}^{n-1}(1+\epsilon_{n'}p_i)\prod_{m'}^{m-1}(1+\delta_{m'}p_i)}\end{aligned}$$

とし，また $\alpha_i,\beta_i,p_i\in\mathbb{R}$ とする．このとき

$$\begin{bmatrix}F_n^m\\G_n^m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_n^m(1)\\\tau_n^m(0)\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\tau_n^m(0)\\\tau_n^m(1)\end{bmatrix}$$

はいずれも双線形方程式系 (5)–(10) を満たす．

等積中心アフィン幾何における曲線の等積変形は，ミンコフスキー平面上の曲線の等周変形 [3] と密接な関係があり，定理や命題に述べた結果はそれを援用することによって得られる．詳細は講演で述べる．

謝辞　科研費 15K04862 による支援を受けた．

参考文献

[1] N. Matsuura, *Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves*, Int. Math. Res. Not., **2012** (2012), 1681–1698.

[2] K. Kajiwara and Y. Ohta, *Bilinearization and Casorati determinant solution to the non-autonomous discrete KdV equation*. J. Phys. Soc. Japan **77** (2008) 054004.

[3] 丸野 健一，梶原 健司，井ノ口 順一，太田 泰広，Baofeng Feng，自己適合移動格子スキームとミンコフスキー平面上の離散曲線の運動について，日本応用数理学会 2014 年度年会．