

空間折線の変形

松浦望（福岡大学理学部）

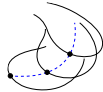
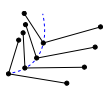

概要

空間曲線が時間とともに変形していくとき、その曲率も変化していくが、特定のルールにしたがう変形に対しては曲率の時間変化がソリトン方程式で記述されることが知られている。本稿では差分幾何の観点から、そのような変形の半離散化について述べる。

1 はじめに

差分幾何 (discrete differential geometry) は離散微分幾何や離散可積分幾何とも呼ばれ、これらの呼び名が示すように、この分野においては、離散可積分系理論に適合するような幾何学的枠組みを構築することが中心的な研究課題となっている。連続系の可積分系理論がいろいろな場面で微分幾何学と結びついていることを受けて、その離散的類似を展開すべく 1990 年代の半ばころから活発に研究されるようになった。たとえば、ソリトン方程式の代表例である KdV 方程式は曲線の変形に付随して自然に現れることが知られているが、このことから、離散 KdV 方程式によって統制されるような折線（離散曲線）の離散変形を見つけよう、という問題意識が自然に生じる。差分幾何を研究することの動機はふたつあり、ひとつは離散系のほうが連続系よりも根源的で豊富な数学的構造を持つであろうことへの期待、もうひとつは、コンピュータによる可視化を支える理論的基盤の整備である。差分幾何の文献としては、萌芽的なものはサウエル [20] があり、現代的な問題意識ではポペンコとスリスによる教科書 [1] がある。これは主としてベルリン工科大学のグループによる研究成果をまとめたもので、曲面の差分幾何についての広範なことがらを説明している。曲線の差分幾何についてはホフマンの講義録 [9] があるが、内容は限定的である。本稿ではユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の曲線の差分幾何について、最近の結果を報告する。ここに述べることは井ノ口順一（山形大理）、梶原健司（九大 IMI）、太田泰広（神戸大理）の各氏との共同研究に基づく。

曲線あるいは折線が時間とともに少しずつ形を変えていく様子を考えよう。その変形は連続的なものでも離散的なものでもよい。以下では、曲線の連続変形、折線の連続変形、折線の離散変形の 3 つを順に連続系、半離散系、離散系と呼ぶことにする。いずれの場合も曲線のフルネ枠 Φ は 2 変数の行列値関数を与える。

	連続系	半離散系	離散系
曲線	連続	離散	離散
変形	連続	連続	離散
イメージ図			
フルネ枠	$\Phi(x, t)$	$\Phi_n(t)$	Φ_n^m
方程式	$\Phi' = \Phi L$ $\dot{\Phi} = \Phi M$	$\Phi_{n+1} = \Phi_n L_n$ $\dot{\Phi}_n = \Phi_n M_n$	$\Phi_{n+1}^m = \Phi_n^m L_n^m$ $\Phi_n^{m+1} = \Phi_n^m M_n^m$
両立条件	$\dot{L} - M' - [L, M] = 0$	$\dot{L}_n - L_n M_{n+1} + M_n L_n = 0$	$L_n^m M_{n+1}^m - M_n^m L_n^{m+1} = 0$

上の表中のプライムは x に関する微分を表し、ドットは t に関する微分を表す。また、行列 L はフルネ・セレの公式によって決まるもので、微分幾何や差分幾何の観点からは‘自明’なものである。行列 M を適切に定めることによって（つまり変形の仕方を適切に定めることによって）、両立条件としていろいろのソリトン方程式が現れることが知られている。

連続系では、たとえば非線型シュレディンガー方程式や modified KdV 方程式、およびこの 2 つを出発点とする階層（局所誘導階層）などが登場する。これらについては橋本 [6] や福本と宮崎 [17]、ラム [13][14] や

ゴールドシュタインとペトリッチ [5], あるいはドリヴァとサンティニ [3] やランガー [15], 井ノ口 [22] などを参照されたい。

半離散系では, 上に述べたような方程式たちを半離散化したものが登場するが, これについてはドリヴァとサンティニ [4] やホフマンとクッツ [10], ダニエルとマニヴァンナン [2] や中山 [18] などを参照されたい. このほかにもたくさんの論文があるが, ここに挙げたものも含め, それらはいずれも方程式レベルでの半離散化を議論したものである. 方程式レベルでの半離散化にとどまらず, 付随する半離散ソリトン方程式のソリトン解までを含めて議論したものに, 半離散 modified KdV 方程式をあつかった井ノ口と梶原と筆者と太田 [11] がある.

離散系の研究はまだ始まったばかりで, 先行研究もほんのわずかしかない. 離散非線形シュレディンガー方程式についてはピンカールとスプリングボーンとワイスマン [19], あるいはホフマン [8] (これは文献の引用に混乱が見られるため, 学位論文 [7, 29–55 頁] を見たほうがよい) がある. 離散 KdV 方程式と離散 modified KdV 方程式については筆者 [16] がある. これらは方程式レベルの離散化である. 離散ソリトン方程式のソリトン解までを含めて議論したものに, 離散 modified KdV 方程式をあつかった井ノ口と梶原と筆者と太田 [12] があり, この論文では平面折線の離散変形を詳しく論じた.

以下の節ではやはり modified KdV 方程式を興味の中心に据えて, modified KdV 方程式によって統制されるような空間曲線の連続変形, および半離散 modified KdV 方程式によって統制されるような空間折線の連続変形, のそれぞれを調べる. これらの変形の幾何学的な特徴は, 曲線や折線が時間とともに動いていく際に, 伸び縮みせず, もとの弧長を保つこと (等周変形) である. なお離散系については, 現在のところ方程式レベルでの離散化すらできていない. 離散 modified KdV 方程式によって統制されるような空間折線の離散変形を定式化することは, 目下われわれの研究課題である.

2 空間曲線の等周変形

ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の曲線 $\gamma(u)$ が時間とともに変形していく様子を考える. ただし u は弧長径数とは限らない勝手な径数とする. 時刻 t における曲線を $\gamma(u, t)$ と書く. 各曲線 $\gamma(u, t)$ の速さがこの変形で保存される, すなわち函数 $|(\partial/\partial u)\gamma(u, t)|$ が t に依らないための必要十分条件は, 曲線の変形方向 $(\partial/\partial t)\gamma(u, t)$ が

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \gamma(u, t), \frac{\partial}{\partial u} \gamma(u, t) \right\rangle = 0 \quad (1)$$

をみたすことである. 条件 (1) がみたされているとき, もしはじめの曲線 $\gamma(\cdot, 0)$ がその弧長によって径数表示されているならば, どの時刻の曲線もおなじ弧長函数によって径数表示されることになる. これはもとの曲線が伸び縮みせずに変形していくことを意味する. そこで条件 (1) を等周条件と呼ぶ. 以下では等周条件をみたす変形 (等周変形) を考える. 径数 u を弧長径数 x で表示しなおしたものを $u(x)$ としたとき, 曲線の等周変形 $\gamma(u(x), t)$ をふたたび $\gamma(x, t)$ と書こう. また, 弧長径数 x に関する微分と時刻 t に関する微分をそれぞれプライムとドットで表し, 独立変数を書くのは省略する. すなわち $\gamma' = (\partial/\partial x)\gamma(x, t)$, $\dot{\gamma} = (\partial/\partial t)\gamma(x, t)$ とする. 各時刻における空間曲線 γ の接ベクトルを T , 主法線ベクトルを N , 陪法線ベクトルを B , 曲率を κ , 捩率を λ と書けば, これらはいずれも x と t の 2 変数函数となる. さて, 捩率 λ が定数函数であるとき, 等周変形の方法を

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\kappa^2}{2} - 3\lambda^2 \right) T + \kappa' N - 2\lambda \kappa B \quad (2)$$

と決める. このときフルネ枠 $\Phi = (T, N, B)$ は

$$\Phi' = \Phi \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\Phi} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & -(1/2)\kappa^3 + \lambda^2\kappa - \kappa'' & \lambda\kappa' \\ (1/2)\kappa^3 - \lambda^2\kappa + \kappa'' & 0 & -(\lambda/2)\kappa^2 + \lambda^3 \\ -\lambda\kappa' & (\lambda/2)\kappa^2 - \lambda^3 & 0 \end{pmatrix}$$

をみたし、この連立偏微分方程式系の両立条件は modified KdV 方程式

$$\dot{\kappa} = \frac{3}{2}\kappa^2\kappa' + \kappa''' \quad (3)$$

となる。等周変形の式 (2) は、 $\dot{\gamma} = fT + gN + hB$ において両立条件が modified KdV 方程式となるように函数 f, g, h を探すことで得られる。フルネ枠 Φ を $SU(2)$ 値の函数に変換したものを ϕ と書けば、 ϕ は

$$\phi' = \phi L, \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\lambda & -\kappa \\ \kappa & -\sqrt{-1}\lambda \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\dot{\phi} = \phi M, \quad M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\lambda\kappa^2 - 2\sqrt{-1}\lambda^3 & -2\kappa'' - \kappa^3 + 2\lambda^2\kappa + 2\sqrt{-1}\lambda\kappa' \\ 2\kappa'' + \kappa^3 - 2\lambda^2\kappa + 2\sqrt{-1}\lambda\kappa' & -\sqrt{-1}\lambda\kappa^2 + 2\sqrt{-1}\lambda^3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

をみたす。ただし $\mathfrak{su}(2)$ の基底

$$e_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と $\mathfrak{so}(3)$ の基底

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を $e_i \leftrightarrow E_i$ ($i = 1, 2, 3$) によって同一視した。連立方程式 (4)–(5) の両立条件は当然 modified KdV 方程式 (3) である。以上この節では modified KdV 方程式によって統制されるような空間曲線の等周変形を見た。

注意 2.1 自然数 n に対して、第 n 次 modified KdV 方程式によって統制されるような等周変形が存在する。より一般に局所誘導階層について書かれたランガー [15, Proposition 18] や川久保 [23] を参照されたい。

3 空間折線

前節の議論を離散化しよう。フルネ・セレの公式を離散化することがこの節の目標である。そのためには、折線の接ベクトルや法線ベクトルたちをどのように定義すればよいか問題となる。曲線の離散化については、サウエル [20] を始めとして、いたるところで話が展開されている。曲線それ自体の離散化はほとんど自明に近いものだから、誰が考えてもだいたい同じものが出来上がるようである。

写像 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $n \mapsto \gamma_n$ がすべての整数 n に対して $\det(\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}) \neq 0$ をみたすとき、空間折線、あるいはより詳しく正則な空間折線であるという。空間折線 γ に対して

$$a_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|, \quad T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{a_n}, \quad \Delta T_n = \frac{1}{a_n + a_{n-1}} (T_n - T_{n-1})$$

とおく。この Δ は作用素と思わずに、 ΔT でひとつの記号と理解されたい。連続系の場合は、曲線を弧長で径数表示しておけば速度と加速度が直交するため、加速度をひとつ目の法線ベクトルとして採用することができたが、離散系の場合は T_n と ΔT_n は直交せず、したがって T_n を基準とするかぎり ΔT_n を法線ベクトルとして採ることはできない。そこでシュミットの正規直交化法を適用して

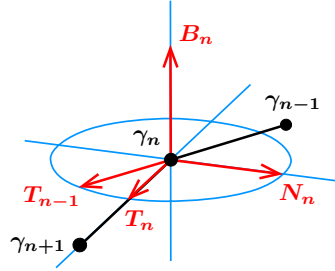
$$N_n = \frac{\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n \rangle T_n}{|\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n \rangle T_n|}, \quad B_n = T_n \times N_n$$

とおく。このとき $\Phi_n = (T_n, N_n, B_n)$ とおけば、 Φ は $SO(3)$ 値の函数となる。

注意 3.1 上では連続系の議論をなぞって主法線ベクトル N_n と陪法線ベクトル B_n を定義したが, あるいは

$$B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|}, \quad N_n = B_n \times T_n$$

を定義にしても同じことである. この定義のほうが簡単で, 絵がすぐにイメージできる利点がある. ただしこうなるともはや‘主’法線とか‘陪’法線とかいう言葉は意味をなくすかもしれない. どの式を定義と思うかはさておき, 要点は主法線ベクトルが $N_n \in \text{span}\{T_n, T_{n-1}\}$ をみたすことである. 下図を参照されたい. これと同じ図はサウエル [20, 19 頁] にもある. サウエル [20] は微分幾何の教科書だが, 対象物が連続系であっても離散的に説明するほうがずっと分かりやすいとの考えから, 離散モデルを全面に押し出して曲線と曲面の微分幾何についての基本的な概念を説明している.



次に曲率と捩率に相当するものを定義しよう. 関数 $\kappa: \mathbb{Z} \rightarrow (0, \pi)$ および $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow [-\pi, \pi)$ を

$$\langle T_n, T_{n-1} \rangle = \cos \kappa_n, \quad \langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos \lambda_n, \quad \langle B_n, N_{n-1} \rangle = \sin \lambda_n$$

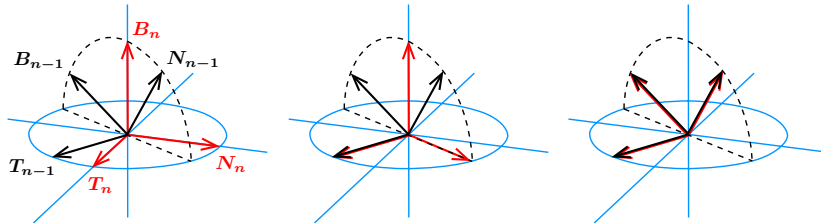
により定める. 実際 B_n は T_{n-1} と直交するから, この関係式をみたす角 λ_n は存在する. 連続系においては正則な空間曲線の曲率は正であるが, その事実の離散的類似として, いま‘離散曲率’ $\tan(\kappa_n/2)$ の値は正となっている. フルネ枠 Φ は次をみたす.

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n L_n, \quad L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_{n+1} & \sin \lambda_{n+1} \\ 0 & -\sin \lambda_{n+1} & \cos \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \kappa_{n+1} & -\sin \kappa_{n+1} & 0 \\ \sin \kappa_{n+1} & \cos \kappa_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

これが空間折線に対するフルネ・セレの公式である. 行列 L は特殊な格好をしているが, 図形的な意味を考えるには次の形が見やすい.

$$\Phi_{n-1} = \Phi_n L_{n-1}^{-1}, \quad L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_n & \sin \kappa_n & 0 \\ -\sin \kappa_n & \cos \kappa_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_n & -\sin \lambda_n \\ 0 & \sin \lambda_n & \cos \lambda_n \end{pmatrix}.$$

この意味するところを絵に描けば下図のようになる.



上の注意でも述べたとおり, ポイントは3つのベクトル T_n, T_{n-1}, N_n が同一平面上にあることである. したがってまず B_n を回転軸にして $-\kappa_n$ だけ回転させれば T_n を T_{n-1} に重ね合わせることができる. 次に T_n を回転軸にして λ_n だけ回転させれば Φ_n を Φ_{n-1} に重ね合わせることができる.

4 空間折線の等周変形

空間折線が時間とともに連続的に変形していく様子を考えよう．セグメントの長さが一定 $a_n = a > 0$ であるような空間折線 γ_n の連続的変形を $\gamma_n(t)$ とし、以下では独立変数 t を書くのは省略する．各セグメント長 $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ がこの変形で保存されるための必要十分条件は、各点の変形方向 $\dot{\gamma}_n$ が

$$\langle \dot{\gamma}_{n+1} - \dot{\gamma}_n, \gamma_{n+1} - \gamma_n \rangle = 0 \quad (7)$$

をみたすことである．条件 (7) を連続系にならって等周条件と呼ぶ．以下、等周条件をみたす変形を考える．さて‘振率’が定数であるとき、すなわち定数 λ が存在してどの時刻でも

$$\langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos \lambda, \quad \langle B_n, N_{n-1} \rangle = \sin \lambda$$

が成り立つとき、等周変形の方角を

$$\dot{\gamma}_n = \cos \lambda T_n - \cos \lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} N_n + \sin \lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} B_n \quad (8)$$

と決める．このときフルネ枠 Φ を $SU(2)$ 値の関数 ϕ に変換すると ϕ は

$$\phi_{n+1} = \phi_n L_n, \quad L_n = \pm \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}\lambda/2} \cos \frac{\kappa_{n+1}}{2} & -e^{-\sqrt{-1}\lambda/2} \sin \frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ e^{\sqrt{-1}\lambda/2} \sin \frac{\kappa_{n+1}}{2} & e^{\sqrt{-1}\lambda/2} \cos \frac{\kappa_{n+1}}{2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\dot{\phi}_n = \phi_n M_n, \quad M_n = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \sin \lambda & -e^{-\sqrt{-1}\lambda} \tan \frac{\kappa_n}{2} - \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ e^{\sqrt{-1}\lambda} \tan \frac{\kappa_n}{2} + \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} & \sqrt{-1} \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (10)$$

をみたす．連立方程式 (9)–(10) の両立条件は半離散 modified KdV 方程式

$$\dot{\kappa}_n = \frac{1}{a} \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) \quad (11)$$

である．以上この節では半離散 modified KdV 方程式 (11) によって統制されるような空間折線の等周変形を見た．

注意 4.1 あるいは、同じ仮定のもとで、等周変形の方角を

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_n &= 2 \left(\cos \lambda \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} \tan \frac{\kappa_n}{2} + \cos 2\lambda \right) T_n \\ &+ \left(\cos \lambda \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} - \tan^2 \frac{\kappa_n}{2} \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) \right) - 2 \cos 2\lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} \right) N_n \\ &+ \left(\sin \lambda \left(1 + \tan^2 \frac{\kappa_n}{2} \right) \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) + 2 \sin 2\lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} \right) B_n \end{aligned}$$

と決めれば、関数 κ は高次の半離散 modified KdV 方程式

$$\dot{\kappa}_n = \frac{1}{a} \left(\left(1 + \tan^2 \frac{\kappa_{n+1}}{2} \right) \left(\tan \frac{\kappa_{n+2}}{2} + \tan \frac{\kappa_n}{2} \right) - \left(1 + \tan^2 \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) \left(\tan \frac{\kappa_n}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-2}}{2} \right) \right)$$

にしたがう．これは半離散 modified KdV 方程式 (11) に比べて複雑だが、素直な連続極限で modified KdV 方程式 (3) を復元するという利点がある．

注意 4.2 フルネ・セレの公式 (6) に現れた行列 L_n を、どのように式 (9) の行列 L_n に変換したか述べておく．第2節で述べた記号のもと、 $SU(2)$ 値の関数 ϕ を微分し、それを $\phi' = \phi \sum_{k=1}^3 f_k e_k$ と書いておく． $SO(3)$ 値の関数 $\Phi = (\Phi_{ij})$ を

$$\Phi_{ij} = -2 \operatorname{tr} (e_i \phi e_j \phi^{-1})$$

と定めれば Φ は $\Phi' = \Phi \sum_{k=1}^3 f_k E_k$ をみたす. 函数 ϕ を

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ -\psi^* & \varphi^* \end{pmatrix}, \quad |\varphi|^2 + |\psi|^2 = 1 \quad (12)$$

と表示した場合 (ただし星印は複素共役), 函数 Φ は

$$\Phi = \begin{pmatrix} |\varphi|^2 - |\psi|^2 & 2\Re(\varphi\psi^*) & -2\Im(\varphi\psi^*) \\ -2\Re(\varphi\psi) & \Re(\varphi^2 - \psi^2) & -\Im(\varphi^2 + \psi^2) \\ -2\Im(\varphi\psi) & \Im(\varphi^2 - \psi^2) & \Re(\varphi^2 + \psi^2) \end{pmatrix}$$

と表示される. また

$$\frac{\Phi_{22} + \sqrt{-1}\Phi_{32}}{1 - \Phi_{12}} = \frac{\varphi + \psi}{\varphi^* - \psi^*}, \quad \frac{\Phi_{23} + \sqrt{-1}\Phi_{33}}{1 - \Phi_{13}} = \sqrt{-1} \frac{\varphi - \sqrt{-1}\psi}{\varphi^* - \sqrt{-1}\psi^*}$$

が成り立つから, もし先に $\text{SO}(3)$ 値の函数 Φ があった場合には, この関係式により複素数値の函数の組 φ, ψ が実数倍の差を除いて一意に定まり, したがって $\text{SU}(2)$ 値の函数 ϕ が符号の差を除いて一意に決まる.

5 明示公式と具体例

連立方程式 (4)–(5) あるいは連立方程式 (9)–(10) の解 ϕ を明示的に構成することができれば, いわゆるシムの公式を用いて, 空間曲線の等周変形, あるいは空間折線の等周変形に対する明示公式が得られる. 半離散系 (空間折線の等周変形) についてはまだ研究途中のため, この節では連続系 (空間曲線の等周変形) の明示公式についてのみ述べる. 連立方程式 (4)–(5) の解 ϕ に対して

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = -2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi \right) \phi^{-1} \quad (13)$$

とおく. 式 (13) の右辺はシムの公式 ([21]) と呼ばれ, 可積分幾何のいろいろの場面に登場する. さらに

$$\gamma = -2 \begin{pmatrix} \Im S_{11} \\ \Im S_{21} \\ \Re S_{21} \end{pmatrix} \quad (14)$$

とおくと, γ は曲率 κ , 捩率 λ の空間曲線の等周変形を表す. したがって, 式 (14) が空間曲線の等周変形についての明示公式として実質的な意味をもつためには, 行列 ϕ の成分すべてを具体的な函数を用いて構成しておく必要がある. 函数 ϕ を (12) のように表したとき, その成分 φ, ψ はたとえば次のように構成することができる.

$$\varphi = \frac{\tau_{N+1,N}}{\tau_{N,N}}, \quad \psi = \frac{\tau_{N,N+1}}{\tau_{N,N}}, \quad \kappa = 2 \frac{\tau_{N-1,N+1}}{\tau_{N,N}} = 2 \frac{\tau_{N+1,N-1}}{\tau_{N,N}}.$$

ただし N は自然数で, τ は次のように定義される函数 (いわゆる τ 函数) である.

$$\tau_{n,m} = \det \left((f_j^i)_{\substack{i=1,\dots,n+m \\ j=1,\dots,n}}, (g_j^i)_{\substack{i=1,\dots,n+m \\ j=1,\dots,m}} \right), \\ f_j^i = \alpha_i p_i^{j-1} \exp \left(p_i \frac{x}{2} + p_i^3 \frac{t}{2} \right), \quad g_j^i = \beta_i (-p_i)^{j-1} \exp \left(-p_i \frac{x}{2} - p_i^3 \frac{t}{2} \right).$$

ここで α_i, β_i, p_i ($i = 1, \dots, 2N+1$) はパラメータであり, このうち

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

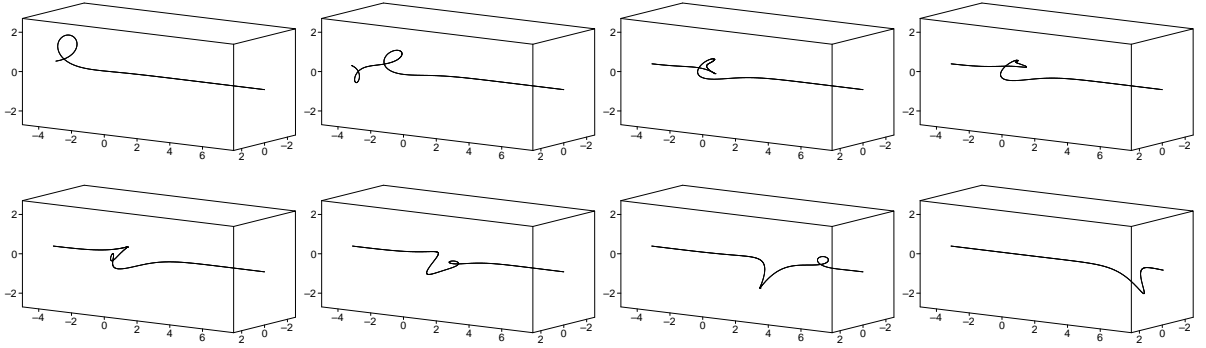
を自由なパラメータとし, 残りは

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_{N+1} \\ \vdots \\ \alpha_{2N} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_{N+1} \\ \vdots \\ \beta_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{N+1} \\ \vdots \\ p_{2N} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}, \quad p_{2N+1} = \sqrt{-1}\lambda$$

と決め, さらに α_{2N+1} と β_{2N+1} は

$$(\alpha_{2N+1}^2 + \beta_{2N+1}^2) \prod_{j=1}^N (p_j^2 + \lambda^2) = 1$$

を満たすように選んでおく. たとえば $N = 2$ とすると, 明示公式 (14) は modified KdV 方程式の 2 ソリトン解によって統制されるような振率一定の空間曲線の等周変形を与える. パラメータの値を適当に指定すると下図のようになる.



注意 5.1 上では「2成分の τ 関数」を用いて N ソリトン解を構成したが, 通常よく見る「1成分の τ 関数」を用いても, 同じように N ソリトン解や行列 ϕ の成分を構成することができる. 実際

$$\varphi = \sqrt{-1} \frac{\lambda}{2} \frac{\tau_{N+1}^s}{\tau_N^s} + \frac{\tau_{N+1}^{s+1}}{\tau_N^{s+1}}, \quad \psi = -\frac{\lambda}{2} \frac{\tau_{N+1}^s}{\tau_N^s} - \sqrt{-1} \frac{\tau_{N+1}^{s+1}}{\tau_N^{s+1}}, \quad \kappa = \frac{2}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\log \frac{\tau_N^{s+1}}{\tau_N^s} \right)$$

である. ただしこの場合の関数 τ は

$$\tau_n^s = \det (f_{s+j-1}^i)_{i,j=1,\dots,n},$$

$$f_s^i = \alpha_i p_i^s \exp(p_i x + 4p_i^3 t) + \beta_i (-p_i)^s \exp(-p_i x - 4p_i^3 t)$$

である. パラメータ α_i, β_i, p_i ($i = 1, \dots, N+1$) のうち

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} \in \sqrt{-1} \mathbb{R}^N, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

を自由に選び, 残りは

$$p_{N+1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \lambda, \quad \lambda^2 (\alpha_{N+1}^2 - \beta_{N+1}^2) \prod_{j=1}^N \left(p_j^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \right) = 1$$

をみたすように選ぶ. しかし $\lambda = 0$ のとき, すなわち空間曲線が平面曲線となるような場合は, パラメータ $\alpha_{N+1}, \beta_{N+1}$ をこのように選ぶことはできないため, 2成分の τ 関数のほうに優位性があるだろう.

注意 5.2 行列のサイズを偶数 $N = 2K$ にとり, さらにパラメータ α_i, β_i, p_i たちに課する制約を適切に変更することによって, modified KdV 方程式の K ブリーザー解, およびそれによって統制される空間曲線の等周変形も構成できる.

注意 5.3 ここまでは τ 関数を二重ロンスキー行列式やロンスキー行列式として構成したが, グラム行列式を用いることでシムの公式に頼らずに明示公式を作ることができる. 実際 modified KdV 方程式の N ソリトン解 κ によって統制される定振率 λ の空間曲線の等周変形 γ は

$$\gamma = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\tau_N} \begin{pmatrix} -\sigma_N \\ \Re \tilde{\rho}_N \\ -\Im \tilde{\rho}_N \end{pmatrix}, \quad \kappa = 2 \frac{\rho_N}{\tau_N} \exp(\sqrt{-1}(\lambda x + \zeta_0))$$

で与えられる. ただし

$$\tau_N = \det F, \quad \sigma_N = \det G, \quad \rho_N = \det H, \quad \tilde{\rho}_N = \det \tilde{H}$$

であり, F は

$$F = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{p_i + p_j^*} \exp(\xi_i + \xi_j^*) \right)_{i,j=1,\dots,N} & I_N \\ -I_N & \left(\frac{1}{p_i^* + p_j} \right)_{i,j=1,\dots,N} \end{pmatrix}, \quad \xi_i = p_i x + p_i^3 t + \frac{1}{p_i} y + \zeta_i$$

と定義される行列値関数である (I_N は単位行列). 独立変数 x, t のほかにパラメータ y が入っているとこ
ろも先と異なる. また p_i, ζ_i ($i = 1, \dots, N$) は複素パラメータであり, これらの虚部は

$$\Im p_1 = \dots = \Im p_N = \lambda, \quad \Im \zeta_1 = \dots = \Im \zeta_N = \zeta_0$$

とする. 同様に G, H, \tilde{H} は

$$G = \begin{pmatrix} F & v_1 \\ -{}^t v_1^* & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} F & u \\ -{}^t v_0^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} F & u \\ -{}^t v_2^* & 0 \end{pmatrix}$$

によって定義される行列値関数である. ただし

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_k = \begin{pmatrix} (p_1)^{-k} \exp \xi_1 \\ \vdots \\ (p_N)^{-k} \exp \xi_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおいた. ここで述べた明示公式とシムの公式との関係は現在のところ不明だが, シムの公式に比べて‘より明示的’なので計算機での処理が速く, グラフィクスを描くには適している.

6 Maple のバッドノウハウ

半離散系や離散系ではひとつひとつの式が長くなるので, ふだん実験として行う計算はほとんどすべて数式処理ソフトウェアに任せ, 時間を節約する. たとえば半離散系の等周変形の式 (8) は, そのような数式処理上の試行錯誤によって見つけたものであって, 数学的な理屈はまだ付いていない. あるいは連続系でも, たと

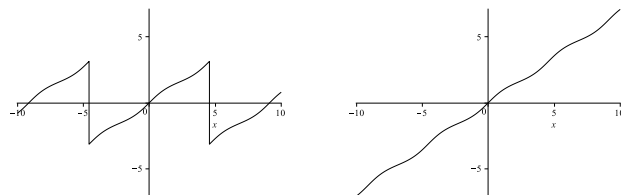
例えば η 関数の検算をするには数式処理ソフトウェアが必要だし、可視化の際にはむしろ数式処理ソフトウェアは欠かすことができない。筆者は現在 Maple のバージョン 15 を利用しているが、気付いたことをいくつかメモしておきたい。以下に述べることは、2 番目の項目を除き Maple にのみ通用することであって、たとえば Mathematica を使う方にとっては何の参考にもならないだろう。

- パラメータを含む数式の数式処理について。たとえば η 関数にはパラメータ p_1, p_2, \dots が含まれるが、これをそのまま Maple で $p(1), p(2), \dots$ あるいは $p[1], p[2], \dots$ と書くと、何度か「ワークシート全体を実行」(編集 → 実行 → ワークシート) し直すうちに、いつの間にか数式処理が正しく行われなくなり、本来あり得ない結果を返してくる場合がある。これはなかなか気付きにくく質が悪い。ポイントの問題だろうか？ 筆者は仕方なく $p(o+1), p(o+2), \dots$ と書くことにしている。オー o はゼロのつもりで、このように何か文字を入れておくと、何度「ワークシート全体を実行」し直しても正しく数式処理が行われるようだ。
- 三角関数の数式処理について。三角関数にはいろいろの表示が存在するため、こちらの望みどおりの形に処理してくれることは滅多にないし、いつまでたっても `simplify` が終わらないこともよくある。そのような時は、たとえば $\exp(\sqrt{-1}x) = z$ とおいて z の式として処理するとよい場合がある。
- 空間図形のグラフィクスを eps ファイルにエクスポートできない。これは Maple のバージョン 13, 14, 15 におけるバグで、空間図形はビットマップ形式でエクスポートされてしまう。将来のバージョンではベクターフォーマットでエクスポートするよう修正されるとのこと。簡単な対症療法は Maple のバージョン 12 を使うことだが、今から古いバージョンを用意するのは難しい(筆者もインストール CD をとっくに捨ててしまった) し、そもそも今さら古いのをを使うのは、いや。現実的な対症療法はワークシートを使わないことである。OS 別にその方法を述べる。
 - Mac OS X の場合。まず通常どおりワークシートで作業し、所望の空間図形が描けるようなプログラムを組んでおく。次に、そのワークシート内の適切な位置にコマンド `plotsetup` を書き加え、どんな形式 (eps) でどの場所 (デスクトップ等) にどのような名前前で、画像ファイルを出力するのか指定する。以下にそのようなワークシートの例を示す。


```
restart;
with(plots);
helix:=(t,a,b)->[a*cos(t),a*sin(t),b*t];
plotHelix:=(a,b)->spacecurve(helix(t,a,b),t=-3*Pi..3*Pi,scaling=constrained,
orientation=[20,70,0]);
fig:=name->plotsetup(eps,plotoutput=cat("/Users/nozomu/Desktop/",name,".eps"),
plotoptions="portrait,noborder");
fig("helix-1");
plotHelix(1,2);
fig("helix-2");
plotHelix(2,1);
```

 最後に「ファイル → エクスポート → Maple 入力」を選択してこのワークシートをスクリプトに変換し、そのスクリプトを `/Library/Frameworks/Maple.framework/Versions/15/bin/` にあるコマンド `maple` で処理する。面倒。
 - Windows の場合。Windows 版の Maple には古いグラフィクスエンジンを利用した Classic Maple というアプリケーションが同梱されているので、それを使う。
- 楕円関数がおかしい。これは本稿に述べた内容と直接には関係ないが、閉曲線を扱う場合などには避けて通れないし、気になるので書いておく。Maple ではヤコビの振幅関数 `JacobiAM` がなぜか不連続

函数となっていて、おそらくそのせいで、振幅関数の積分が絡むような場面—たとえば井ノ口 [22, 第 7 章] など参照—になるとぜんぜん ‘使えない’. ちなみに Maple で振幅関数がどのように定義されているかはコマンド `FunctionAdvisor(definition, JacobiAM)` で見ることができる. ここで試しに振幅関数のグラフを描いてみると



となる. 左のグラフは Maple の振幅関数 `JacobiAM(u, 9/10)` を $u=-10..10$ の範囲で `plot` したもので, 右のグラフは振幅関数 `am(u, 9/10)` を同じ範囲で `plot` したものである. ただし一時凌ぎに

```
am:=(u,k)->JacobiAM(u,k)+abs(signum(k))*2*round(u/(4*EllipticK(k)))*Pi;
```

と定義した. 以下余談. 振幅関数のこの不具合を始めとした Maple の楕円関数たちのおかしな挙動について, 以前サポートセンターに問い合わせたら

Maple では, あなたの言う振幅関数 `am` には `InverseJacobiAM` という名前が付いています. `InverseJacobiAM` を `plot` してみて. ほら, ちゃんと連続関数になっているでしょう.

と返され, 予想外の回答にびっくりし—これがもし「おまえの `am` は `InverseJacobiAM` の逆函数だ」という主張だったならば納得できるしそうであってほしいと願うのだけれど—, それ以上やりとりするのを止めてしまった.

参考文献

- [1] Alexander I. Bobenko and Yuri B. Suris, *Discrete differential geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, Integrable structure. MR 2467378 (2010f:37125)
- [2] M. Daniel and K. Manivannan, *On the geometric equivalence of certain discrete integrable Heisenberg ferromagnetic spin chains*, J. Math. Phys. **40** (1999), no. 6, 2560–2567. MR 1694217 (2000f:82013)
- [3] A. Doliwa and P. M. Santini, *An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve*, Phys. Lett. A **185** (1994), no. 4, 373–384. MR 1261407 (95b:58075)
- [4] Adam Doliwa and Paolo Maria Santini, *Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 3, 1259–1273. MR 1317439 (95m:58072)
- [5] Raymond E. Goldstein and Dean M. Petrich, *The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), no. 23, 3203–3206. MR MR1135964 (92g:58050)
- [6] Hidenori Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), no. 3, 477–485.
- [7] Tim Hoffmann, *Discrete curves and surfaces*, Ph.D. thesis, Technische Universität Berlin, 2000.
- [8] ———, *Discrete Hashimoto surfaces and a doubly discrete smoke-ring flow*, Discrete differential geometry, Oberwolfach Semin., vol. 38, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 95–115. MR 2405662 (2010b:37196)

- [9] ———, *Discrete differential geometry of curves and surfaces*, COE Lecture Note, vol. 18, Kyushu University, Faculty of Mathematics, Fukuoka, 2009, Math-for-Industry Lecture Note Series.
- [10] Tim Hoffmann and Nadja Kutz, *Discrete curves in \mathbb{CP}^1 and the Toda lattice*, Stud. Appl. Math. **113** (2004), no. 1, 31–55. MR MR2061648 (2005b:37170)
- [11] Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura, and Yasuhiro Ohta, *Explicit solutions to semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves*, to appear in J. Phys. A: Math. Theor.
- [12] ———, *Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves*, to appear in Kyushu J. Math.
- [13] G. L. Lamb, Jr., *Solitons and the motion of helical curves*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976), no. 5, 235–237. MR MR0473584 (57 #13250)
- [14] ———, *Solitons on moving space curves*, J. Mathematical Phys. **18** (1977), no. 8, 1654–1661. MR MR0440173 (55 #13052)
- [15] Joel Langer, *Recursion in curve geometry*, New York J. Math. **5** (1999), 25–51 (electronic). MR 1701825 (2002a:37105)
- [16] Nozomu Matsuura, *Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN.
- [17] Takeshi Miyazaki and Yasuhide Fukumoto, *N-solitons on a curved vortex filament with axial flow*, J. Phys. Soc. Japan **57** (1988), no. 10, 3365–3370. MR 974941 (89k:76027)
- [18] Kazuaki Nakayama, *Elementary vortex filament model of the discrete nonlinear Schrödinger equation*, J. Phys. Soc. Japan **76** (2007), no. 7, 074003.
- [19] Ulrich Pinkall, Boris Springborn, and Steffen Weißmann, *A new doubly discrete analogue of smoke ring flow and the real time simulation of fluid flow*, J. Phys. A **40** (2007), no. 42, 12563–12576. MR 2392889 (2009a:76031)
- [20] Robert Sauer, *Differenzengeometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1970. MR 0262939 (41 #7544)
- [21] A. Sym, *Soliton surfaces*, Lett. Nuovo Cimento (2) **33** (1982), no. 12, 394–400. MR 654311 (84g:35157)
- [22] 井ノ口順一, *曲線とソリトン, 開かれた数学*, vol. 4, 朝倉書店, 2010.
- [23] 川久保哲, *3次元空間形内の局所誘導階層について*, 福岡大学理学集報 **40** (2010), no. 2, 155–161. MR 2766405 (2011j:37142)