平面離散曲線の等角変形と離散Burgers階層 II.
相似幾何における離散曲線の変形

梶原 健司　(九大IMI)
黒田 利信　(九大数理)
松浦 望　(福岡大理)

概　要

平面離散曲線の離散的な変形を考える. 隣接する接ベクトル間の角度を保つような変形は, 自然に離散Burgers階層によって統制されることを示す.

1. 連続曲線

平面内の曲線 $\gamma=\gamma(s)$ (s: 弧長) を考え, 曲率を κ とする. 平面には相似幾何の構造を与え, 相似変換群 $\mathrm{Sim}(2)=\mathrm{CO}(2)\ltimes\mathbb{R}^2$, $\mathrm{CO}(2)=\left\{A\in\mathrm{GL}\,(2,\mathbb{R})\;\middle|\;{}^{\mathrm{t}}AA=c^2E \text{ for } {}^{\exists}c\right\}$ による作用を考える [2, 3]. 相似不変なパラメータ x と曲率 u はそれぞれ角函数 $x=\int^s\kappa(s)ds$ と $u=\kappa^{-2}\frac{d}{ds}\kappa$ で与えられる. 曲線の変形を考えよう. 変形パラメータを t_2 とし, 曲線 $\gamma(x)$ の変形を $\gamma(x,t_2)$ と書く. また $T=\gamma'$ ($'=\partial/\partial x$) とおき, T を左回りに $\pi/2$ だけ回転したものを N とする. 曲線の変形方向を

$$\dot{\gamma}=fT+gN \tag{1}$$

と書けば, 可積分条件は, 適当な函数 $a=a(t_2)$ が存在して次式が成り立つことである.

$$f=-g'+gu+a,\quad \dot{u}=\left(\Omega^2+1\right)g'+au',\quad \Omega=\partial_x-u-u'\partial_x{}^{-1}. \tag{2}$$

ただし Ω はBurgers階層の再帰作用素 [1]. 無限個の時間変数 $t=(t_2,t_3,\ldots)$ を導入して

$$g=-1\ (k=2),\quad g=\partial_x{}^{-1}\mathit{\Omega}^{k-3}u'\ (k\geq 3) \tag{3}$$

と選ぶと, (2) は第 k 次 Burgers 方程式 $\frac{\partial u}{\partial t_k}=\left(\mathit{\Omega}^{k-1}+\mathit{\Omega}^{k-3}+a\right)u'$ となるが, これは Cole-Hopf変換 $u=-q'/q$ を通じて

$$\frac{\partial}{\partial t_k}q=\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}+\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)q \tag{4}$$

と線形化される. 逆に, 微分方程式 (4) の解 q から曲線の位置ベクトルが構成できる.

命題 1 式 (1), (2), (3) で定められる曲線の変形 $\gamma=\gamma(x,t)$ は次のように表示できる.

$$\gamma(x,t)=\int^x c\,q(x,t)\begin{bmatrix}\cos\theta(x,t)\\ \sin\theta(x,t)\end{bmatrix}dx,\quad \theta(x,t)=x+A(t),\quad \frac{\partial A(t)}{\partial t_k}=a(t). \tag{5}$$

2. 離散曲線

平面離散曲線 $\gamma\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^2$ に対して $T_n=\gamma_{n+1}-\gamma_n$ を接ベクトルと呼ぶ. 接ベクトルの長さ $|T_n|$ を q_n と書き, 隣接する接ベクトル T_{n-1}, T_n がなす角を κ_n と書く. また, 接ベ

本研究は科研費 (課題番号: 23340037, 245401013) の助成を受けたものである.

クトル T_n を左回りに $\pi/2$ だけ回転したものを N_n とし, 行列 $\phi_n = [T_n, N_n]$ を枠と呼ぶ.

命題 2 平面離散曲線 γ があるとする. 実数 a, f_0, g_0 と正数 δ および正値函数 H に対して, ふたつの数列 f, g を差分方程式

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta} \frac{q_n}{q_{n+1}} R\left(-\kappa_{n+1}\right) \begin{bmatrix} 1 + \delta f_n + H_n \cos a \\ \delta g_n - H_n \sin a \end{bmatrix} \tag{6}$$

で定める. ただし $R(\theta)$ は原点を中心とする角度 θ の回転行列. 新しい平面離散曲線 $\overline{\gamma}$ を

$$\overline{\gamma}_n = \gamma_n - \delta\left(f_n T_n + g_n N_n\right) \tag{7}$$

で定め, $\overline{\gamma}$ に付随する諸量には上線 $^-$ を付けて表す. このとき次の 2 つのことが成りたつ.

1. この変形は角 κ を保つ. すなわち各 n について $\kappa_n = \overline{\kappa}_n$ である.

2. この変形 $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ を繰り返すことによって平面離散曲線の等角変形列 $\gamma^0 = \gamma$, $\gamma^1 = \overline{\gamma}, \ldots, \gamma^m = \overline{\gamma^{m-1}}, \ldots$ ができる. 各 m, n について枠 ϕ は差分方程式系

$$\phi_{n+1}^m = \phi_n^m L_n^m, \quad L_n^m = \frac{q_{n+1}^m}{q_n^m} R\left(\kappa_{n+1}\right),$$
$$\phi_n^{m+1} = \phi_n^m M_n^m, \quad M_n^m = H_n^m R\left(a_m\right)$$

をみたし, この差分方程式系の両立条件 $L_n^m M_{n+1}^m = M_n^m L_n^{m+1}$ は次式である.

$$\frac{q_{n+1}^{m+1}}{q_n^{m+1}} \frac{q_n^m}{q_{n+1}^m} = \frac{H_{n+1}^m}{H_n^m}. \tag{8}$$

定理 3 (離散 Burgers 方程式による等角変形) 平面離散曲線 γ に付随する角 κ が定数函数 $\kappa_n = \epsilon$ であるとする. 各 m について

$$a_m = 0, \quad f_0^m = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{q_{-1}^m}{q_0^m} - \cos\epsilon\right), \quad g_0^m = \frac{\sin\epsilon}{\epsilon},$$
$$H_n^m = 1 + \frac{\delta_m}{\epsilon^2}\left(\frac{q_{n+1}^m}{q_n^m} - 2\cos\epsilon + \frac{q_{n-1}^m}{q_n^m}\right) \tag{9}$$

と与える. 正数 δ_m は (9) が正値となるように与えることができる. このとき (6) の解は

$$f_n^m = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{q_{n-1}^m}{q_n^m} - \cos\epsilon\right), \quad g_n^m = \frac{\sin\epsilon}{\epsilon}$$

であり, 変形 (7) は等角変形である. この等角変形の可積分性を保証する差分方程式 (8) は, 従属変数 $u_n^m = q_{n+1}^m / q_n^m$ についての (やや拡張された) 離散 Burgers 方程式である.

定理 3 の仮定をゆるめて κ が定数でない場合を考えると, この場合の等角変形は非自励的な離散 Burgers 方程式によって統制される. さらにその等角変形は, 非自励的な離散 Burgers 階層による等角変形へと拡張される. これらの詳細は講演で述べる.

参考文献

[1] D. V. Choodnovsky and G. V. Choodnovsky, Nuovo Cimento **40B** (1977) 339–353.

[2] K. Chou and C. Qu, Chaos, Solitons and Fractals **19** (2003) 47–53.

[3] 井ノ口順一,「曲線とソリトン」, 開かれた数学 **4**, 朝倉書店 (2010).