# ミンコフスキ平面上および2次元ド・ジッター空間上の曲線から等積中心アフィン平面曲線へのある変換

黒瀬　俊　(関西学院大理工)[*1]
松浦 望　(福岡大理)

本講演では、曲線の特別な時間変化から自然に Korteweg-de Vries (KdV) 方程式と非収束型変形 KdV 方程式が現れることを用い、非収束型変形 KdV 方程式の解と KdV 方程式の解の間のミウラ変換が曲線の間の変換として幾何的に表せることを報告する。

## 1. 背景

多くの曲線論において、曲線が特別な時間変化をする時、その幾何的不変量(曲率)が可積分系方程式に従うことが知られている。

**例 1**. $\gamma(s)$ をユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ 上の曲線で $|\gamma_s(s)| \equiv 1$ を満たすものとし、$T, N$ および $\kappa$ をそれぞれ $\gamma$ の単位接ベクトル、左向き単位法ベクトルおよび曲率とする。$\gamma$ が時刻 $t$ とともに $\gamma_t = (\kappa^2/4)T + (\kappa_s/2)N$ に従って変化する時、曲率は変形 KdV 方程式 $\kappa_t = (1/2)\kappa_{sss} + (3/4)\kappa^2\kappa_s$ に従う。

**例 2**. $\mathbb{R}^2$ 上の曲線 $\widetilde{\gamma}(s)$ で $\det\bigl(\widetilde{\gamma}(s), \widetilde{\gamma}_s(s)\bigr) \equiv 1$ を満たすものを等積中心アフィン(平面)曲線という。このとき $\widetilde{\gamma}$ の中心アフィン曲率 $\tilde{\kappa}$ が $\widetilde{\gamma}_{ss} = -\tilde{\kappa}\widetilde{\gamma}$ で定義され、$\widetilde{\gamma}$ が $\widetilde{\gamma}_t = -(\tilde{\kappa}_s/2)\widetilde{\gamma} + \tilde{\kappa}\widetilde{\gamma}_s$ に従って時間変化する時、$\tilde{\kappa}$ は KdV 方程式 $\tilde{\kappa}_t = (1/2)\tilde{\kappa}_{sss} + 3\tilde{\kappa}\tilde{\kappa}_s$ に従う。

これらの現象を用いて、Hoffmann は可積分系理論でよく知られた変形 KdV 方程式の解から KdV 方程式の解を与えるミウラ変換を、曲線間の変換として次のように幾何的に表した。

**定理 (Hoffmann ('04))** $\mathbb{E}^2 \cong \mathbb{C}$ の同一視のもとで、$|\gamma_s| = 1$ を満たす $\mathbb{C}$ 上の曲線 $\gamma$ に対して、$\widetilde{\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_s}}\begin{pmatrix}1\\ \gamma\end{pmatrix}$ は($\mathbb{C}^2$ 上の)等積中心アフィン曲線であり、その等積中心アフィン曲率 $\tilde{\kappa}$ は $\gamma$ の曲率 $\kappa$ のミウラ変換: $\tilde{\kappa} = (\sqrt{-1}/2)\kappa_s + (1/4)\kappa^2$ で与えられる。さらに、$\gamma$ が $\gamma_t = (\kappa^2/4)T + (\kappa_s/2)N$ に従って時間変化する時、$\widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{\gamma}_t = -(\tilde{\kappa}_s/2)\widetilde{\gamma} + \tilde{\kappa}\widetilde{\gamma}_s$ に従って時間変化する。

また、変形 KdV 方程式は、球面や双曲平面上の曲線の時間変化からも現れることが知られている。これらの場合も、例えば球面 $S^2$ の場合は、$S^2 = SU(2)/S^1$ として $S^2$ 上の曲線の適当な $SU(2)$ への持ち上げを用いることにより、球面や双曲平面上の曲線から等積中心アフィン平面曲線への変換としてミウラ変換を幾何的に与えることができる。

## 2. 主結果

背景で述べたことの類似を、ミンコフスキ平面 $\mathbb{E}^{1,1}$ や 2 次元ド・ジッター空間 $S^{1,1}$ で考察することにより、以下の結果を得た。

本研究は科研費(課題番号:15K04861)の助成を受けたものである。
[*1] e-mail: crg31562@kwansei.ac.jp

**定理 1**. (i) $\mathbb{E}^{1,1}$ 上の速さ 1 の空間的曲線 $\gamma$ が $\gamma_t = (-\kappa^2/4)T + (\kappa_s/2)N$ に従って時間変化する時、曲率 $\kappa$ は非収束型変形 KdV 方程式 $\kappa_t = (1/2)\kappa_{sss} - (3/4)\kappa^2\kappa_s$ に従う。(ii) $\mathbb{E}^{1,1}$ をパラ複素数の空間 $\mathbb{C}' = \{x + \varepsilon y;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ $(\varepsilon^2 = 1)$ と同一視する時、$\gamma_s\overline{\gamma_s} = 1$ を満たす $\mathbb{C}'$ 上の曲線 $\gamma$ に対して、$\widetilde{\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_s}}\begin{pmatrix}1\\ \gamma\end{pmatrix}$ は ($\mathbb{C}'^2$ 上の) 等積中心アフィン曲線であり、その等積中心アフィン曲率 $\tilde{\kappa}$ は $\tilde{\kappa} = -(\varepsilon/2)\kappa_s - (1/4)\kappa^2$ で与えられる。さらに、$\gamma$ が $\gamma_t = -(\kappa^2/4)T + (\kappa_s/2)N$ に従って時間変化する時、$\widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{\gamma}_t = -(\tilde{\kappa}_s/2)\widetilde{\gamma} + \tilde{\kappa}\widetilde{\gamma}_s$ に従って時間変化する。

$S^{1,1}$ 上の曲線についても、定理 1 (i) と同様の時間変化をする時、その曲率は非収束型変形 KdV 方程式に従う。さらに、$G' = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \overline{\beta}\\ \beta & \overline{\alpha}\end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}',\ \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1\right\}$, $H' = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \overline{\alpha}\end{pmatrix};\ \alpha \in \mathbb{C}',\ \alpha\overline{\alpha} = 1\right\}$ により $S^{1,1} = G'/H'$ として、$S^{1,1}$ 上の曲線に対して適当な $G'$ への持ち上げを用いることにより、次の定理が示される。

**定理 2**. $S^{1,1}$ 上の空間的曲線のあるクラスから ($\mathbb{C}'^2$ 上の) 等積中心アフィン曲線の空間への変換 $\Phi$ が存在して、$\widetilde{\gamma} = \Phi(\gamma)$ の等積中心アフィン曲率 $\tilde{\kappa}$ は $\gamma$ の曲率 $\kappa$ から $\tilde{\kappa} = -(\varepsilon/2)\kappa_s - (1/4)\kappa^2 - 1/4$ で与えられる。さらに、$\gamma$ が $\gamma_t = -(\kappa^2/4)T + (\kappa_s/2)N$ に従って時間変化する時、$\widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{\gamma}_t = -(\tilde{\kappa}_s/2)\widetilde{\gamma} + \tilde{\kappa}\widetilde{\gamma}_s$ に従って時間変化する。

上の定理では $S^{1,1}$ 上の空間的曲線としたが、時間的曲線である場合も同様のことが成り立つ。また、定理 1 と定理 2 は別々に述べたが、実際には連続的につなげて一本化した形に書くことができる。

一方、$S^{1,1}$ の場合には、定理 2 とは異なる $G'$ への持ち上げを用いることにより、(パラ複素数が現れない) 実の範囲の変換も構成できる。

**定理 3**. $S^{1,1}$ 上の空間的曲線のあるクラスから ($\mathbb{R}^2$ 上の) 等積中心アフィン曲線の空間への変換 $\Psi$ が存在して、$\widetilde{\gamma} = \Psi(\gamma)$ の等積中心アフィン曲率 $\tilde{\kappa}$ は $\gamma$ の曲率 $\kappa$ のミウラ変換: $\tilde{\kappa} = -(1/2)\kappa_s - (1/4)\kappa^2 + 1/4$ で与えられる。さらに、$\gamma$ が $\gamma_t = -(\kappa^2/4)T + (\kappa_s/2)N$ に従って時間変化する時、$\widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{\gamma}_t = -(\tilde{\kappa}_s/2)\widetilde{\gamma} + \tilde{\kappa}\widetilde{\gamma}_s$ に従って時間変化する。