離散空間曲線の運動に対する行列式解と Pfaffian 解

廣瀬 三平　(芝浦工大教育イノベ)
井ノ口 順一　(筑波大数理物質)
梶原 健司　(九大 IMI)
松浦 望　(福岡大理)
太田 泰広　(神戸大理)

空間曲線の時間的な変形の典型例として, 局所誘導近似のもとでの渦糸の運動がよく知られている. 弧長パラメータ x と時間 t について, 渦糸方程式は $\gamma_t = \gamma_x \times \gamma_{xx}$ で与えられ, 曲線 γ と Frenet 枠 (T, N, B) は,

$$\gamma = \begin{pmatrix} (H+H^*)/F \\ i(H-H^*)/F \\ x-(2\log F)_z \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{\kappa F^3}\begin{pmatrix} (f^{*2}-g^{*2})G+(f^2-g^2)G^* \\ i((f^{*2}+g^{*2})G-(f^2+g^2)G^*) \\ -2f^*g^*G-2fgG^* \end{pmatrix},$$

$$T = \frac{1}{F^2}\begin{pmatrix} gf^*+fg^* \\ i(gf^*-fg^*) \\ ff^*-gg^* \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\kappa F^3}\begin{pmatrix} -i(f^{*2}-g^{*2})G-(f^2-g^2)G^* \\ (f^{*2}+g^{*2})G+(f^2+g^2)G^* \\ i(2f^*g^*G-2fgG^*) \end{pmatrix},$$

のように τ 函数 F, G, H, f, g を用いて書かれる. ここで, * は複素共役, z は補助変数, κ は曲率であり $\kappa = 2|G|/F$ によって与えられる. 複素曲率 $u = 2G/F$ は非線形 Schrödinger(NLS) 方程式 $iu_t = u_{xx} + \frac{1}{2}|u|^2u$ に従う. 以上を離散化し, 離散空間曲線の可積分な時間発展および付随するソリトン方程式に対して, 行列式解や Pfaffian 解を構成することを目的とする.

離散曲線 γ_n の場合,

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{|\gamma_{n+1}-\gamma_n|}, \quad N_n = B_n \times T_n, \quad B_n = \frac{T_{n-1}\times T_n}{|T_{n-1}\times T_n|},$$

によって枠を定める. $|\gamma_{n+1}-\gamma_n| = 1$ の場合の典型的なソリトン解は, 二重 Wronski 行列式 $\tau_n^\nu(k)$ とゲージ因子 $\mathcal{G}_n(k)$,

$$\tau_n^\nu(k) = \begin{vmatrix} \left(p_i^{n+j-1}(1-p_i)^{-k}e^{\xi_i} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N+\nu} & \left(-(\frac{1}{p_i})^{j-1} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N-\nu} \\ \left((\frac{1}{p_i^*})^{n+j-1}(1-\frac{1}{p_i^*})^{-k}e^{-\xi_i^*} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N+\nu} & \left((p_i^*)^{j-1} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N-\nu} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{G}_n(k) = \prod_{i=1}^{N}(p_i^*)^n(1-\frac{1}{p_i^*})^k e^{\xi_i^*}, \quad \xi_i = -\frac{1+p_i}{1-p_i}\frac{z}{2} + \theta_i,$$

を用いて,

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} (H_{n+1}+H_{n+1}^*)/F_n \\ i(H_{n+1}-H_{n+1}^*)/F_n \\ n-(2\log F_n)_z \end{pmatrix}, \quad T_n = \frac{1}{F_{n+1}F_n}\begin{pmatrix} g_{n+1}f_n^*+f_ng_{n+1}^* \\ i(g_{n+1}f_n^*-f_ng_{n+1}^*) \\ f_nf_n^*-g_{n+1}g_{n+1}^* \end{pmatrix},$$

のように与えられる．ただし，

$$F_n = \tau_n^0(0)\mathcal{G}_n(0), \quad H_n = \tau_n^1(2)\mathcal{G}_n(2), \quad f_n = \tau_n^0(-1)\mathcal{G}_n(-1), \quad g_n = -\tau_n^1(1)\mathcal{G}_n(1),$$

である．ここで p_i, θ_i は $|p_i| > 1$ なる定数である．このとき複素共役条件と正則性条件,

$$\left(\tau_{n+k}^{\nu}(k)\mathcal{G}_{n+k}(k)\right)^* = (-1)^{k\nu}\tau_n^{-\nu}(-k)\mathcal{G}_n(-k), \quad F_n > 0,$$

がみたされる．θ_i に時間依存性を導入することによって, 離散曲線の時間的な変形を考えることができる．その際, 複素共役条件を満足する変形のみが許される．離散曲線の複素曲率が従う方程式として, 離散化された NLS 方程式が現れる．

離散 NLS 方程式にはいくつかのバージョンが知られている．広田-辻本による離散 NLS 方程式には行列式解があることがわかっている．一方, 広田-辻本の離散 NLS 方程式から変数変換でえられる方程式,

$$b(u_{n+1}^{t+1} - u_n^t) = a(u_{n+1}^t - u_n^{t+1})\Gamma_{n+1}^t, \quad \frac{\Gamma_{n+1}^t}{\Gamma_n^t} = \frac{1 + |u_n^t|^2}{1 + |u_n^{t+1}|^2},$$

は $u_n^t = G_n^t/F_n^t$, $\Gamma_n^t = F_n^t F_{n-1}^{t+1}/F_n^{t+1}F_{n-1}^t$ とおくことにより,

$$b(G_{n+1}^{t+1}F_n^t - G_n^t F_{n+1}^{t+1}) = a(G_{n+1}^t F_n^{t+1} - G_n^{t+1}F_{n+1}^t), \quad F_{n+1}^t F_{n-1}^t - F_n^t F_n^t = |G_n^t|^2,$$

と双線形化され, 自然に Pfaffian 解をもつ．実際, 第一の双線形方程式は離散 mBKP 階層の方程式であり, 第二の双線形方程式は複素 mKdV 階層を BKP 階層に埋め込むときに現れる一次元戸田格子方程式である．ソリトン解は Pfaffian の成分を

$$(i, j) = \sum_{\nu=1}^{2N}\sum_{\mu=1}^{2N}\frac{p_\nu - p_\mu}{p_\nu + p_\mu}\varphi_\nu^i\varphi_\mu^j, \quad (d, i) = \sum_{\nu=1}^{2N}\varphi_\nu^i,$$

$$\varphi_\nu^i = (\frac{1+\alpha p_\nu}{1-\alpha p_\nu} + \frac{1-\alpha p_\nu}{1+\alpha p_\nu})^i(\frac{1+\alpha p_\nu}{1-\alpha p_\nu})^n(\frac{1+\beta p_\nu}{1-\beta p_\nu})^t c_\nu, \quad \alpha = \frac{a+b}{2}, \quad \beta = \frac{a-b}{2},$$

と定めることにより,

$$F_n^t = \begin{cases} \mathrm{Pf}(N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{ even}, \\ \mathrm{Pf}(d, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{ odd}, \end{cases}$$

$$G_n^t = \begin{cases} \mathrm{Pf}(d, N, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{ even}, \\ \mathrm{Pf}(N, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{ odd}, \end{cases}$$

で与えられる．ここで複素共役条件と正則性条件のために $p_{N+\nu} = -p_\nu^*$ $(1 \le \nu \le N)$ ととり, さらに c_ν を適切にとる．c_ν の具体形は複雑である．

References

[1] S. Hirose, J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, Y. Ohta, dNLS flow on Discrete Space Curves, MI Lecture Note Vol.64 (Kyushu University, 2015), 93-102, arXiv: 1511.08076.

[2] 本学会幾何学分科会における松浦による講演.