

離散曲線の変形

松浦 望 (福岡大学)*

2015年3月21日

概 要

平面内あるいは空間内の点列を離散的に動かすことを考える．とくに，動かす方向や移動距離が離散ソリトン方程式によって統制されるような特別な変形を見つけ，その性質を調べてみたい．

1. はじめに

空間に局在した波が速さや形を変えずに伝播し，衝突しても形を保つとき，ソリトンという．ソリトンを解にもつ方程式をソリトン方程式といい，ソリトン方程式は厳密解を求めることができるという際立った特徴を備えている．代表的なものに，KdV 方程式，サイン・ゴルドン方程式，非線形シュレディンガー方程式，戸田格子方程式，箱玉系などがある．完全積分可能ハミルトン系，ソリトン方程式，パンルヴェ方程式などの研究は包括して可積分系理論とよばれている．可積分系理論と曲線や曲面の微分幾何が融合した研究分野を可積分幾何というが，可積分幾何の特徴は，特別な性質をもった曲線や曲面の構成理論を作ることにある．この講演では，ユークリッド空間内の離散曲線について，可積分幾何の立場から考察をしたい．離散曲線について述べるまえに，まずはふつうの(連続の)曲線について，可積分幾何にあらわれる代表例をいくつか挙げてみる．

曲線 γ は弧長 x で径数付けされているとする．曲線の形状を記述するのにフルネ枠

$$\Phi = [T, N, B]$$

を用いることとし，曲率を κ ，捩率を λ と書く．曲線の変形を考えるから，曲率や捩率は弧長 x と時刻 t の2変数関数となる．以後 x での微分をプライムで表し， t での微分をドットで表す．また，本稿で c と書けばそれはいつでも定数である．

例 1 (NLS) 空間における流体の運動を考える．流体の速度ベクトル場を v とするとき，渦度ベクトル場の長さ $|\text{rot } v|$ が，細い管状の領域上で大きな値をとりその外側ではほぼ零になる，という現象がよく起こる．このような細い管のことを渦糸とよぶ．これはわれわれが日常的に渦とよんでいる現象，たとえば竜巻や排水口にできる吸い込み渦などで観察することができる．管がリング状になることもあり，イルカの作る渦輪やたばこの煙の輪などが代表例である．渦糸の運動の最小限のエッセンスを抽出した発展方程式として，局所誘導方程式

$$\dot{\gamma} = \kappa B \tag{1}$$

が有名である．進む方向は渦輪が囲む面に垂直(すなわち陪法線ベクトル B の方向)で，リング半径が小さいほど(すなわち曲率が大きいほど)速い．これは確かにわれわれが経験的に知っている渦の運動をあらわしているような気がする．さて，局所誘導方程

本研究は科研費(課題番号 24540103)の助成を受けたものである．

*〒814-0180 福岡市城南区七隈 8-19-1 福岡大学理学部応用数学科

式は, (適切な境界条件をつけた) 曲線のなす空間の上の, 長さ汎関数をハミルトン関数とするハミルトン相流とみなせ ([17]), 無限個の可換な保存量, およびそれに対応する無限個の可換なハミルトン相流 (すなわち曲線の発展方程式) を構成することができる ([16]). したがって局所誘導方程式 (1) は完全積分可能ハミルトン系である. 局所誘導方程式 (1) の可積分性は, 曲率と捩率を組み合わせた複素数値関数

$$\psi = \kappa \exp \left(\sqrt{-1} \int^x \lambda dx \right) \quad (2)$$

が非線形シュレディンガー (NLS) 方程式

$$\sqrt{-1} \dot{\psi} + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi + \psi'' = 0$$

にしたがうことからわかる. 橋本変換 (2) は, 局所誘導方程式をフルネ枠でなくビショップ枠 ([1]) で記述すると自然に登場するものである. ビショップ枠は平行枠あるいは自然枠とも呼ばれる. 局所誘導方程式の可積分幾何としての取り扱いは, うえにあげた文献のほか, たとえばタンの最近のプレプリント [23] やロジャースとシーフの教科書 [20] などを参照されたい.

例 2 (mKdV) 微分の階数がもうひとつ高いものを考えよう. 曲線が

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\kappa^2}{2} - 3c^2 \right) T + \kappa' N + (\lambda - 3c) \kappa B \quad (3)$$

にしたがって動くものとする. この変形もやはり曲線の弧長を保つ. また, 関数

$$\psi = \kappa \exp \left(\sqrt{-1} \int^x (\lambda - c) dx \right)$$

の時間変化は変形コルトヴェーグ・ドフリース (mKdV) 方程式

$$\dot{\psi} - \frac{3}{2} |\psi|^2 \psi' - \psi''' = 0$$

にしたがう. とくに, もし初期曲線の捩率が定数関数 $\lambda = c$ ならば, (3) は捩率 c を保存する変形となっていて, 曲率 κ は実 mKdV 方程式

$$\dot{\kappa} - \frac{3}{2} \kappa^2 \kappa' - \kappa''' = 0 \quad (4)$$

にしたがって変化する. 定数 c は 0 でもよいから, この議論は平面曲線の場合を含んでいる. 定捩率 c の曲線は, 陪法線ベクトルを介して半径 $1/|c|$ の球面内の曲線と対応する ([15]) から, 定捩率曲線の変形を考えることは, 球面曲線の変形を考えるのとだいたい等価である. だいたいと書いたのは, もし球面曲線のほうから定捩率曲線を具体的に構成しようと思うと, 積分を実行しなくてはならないため. 変形 (3) の階層への拡張は, 平面曲線の場合にはゴールドシュタインとペトリッチ [8] を, その可積分系理論としての意味を知るには梶原と筧 [14] を参照されたい.

定捩率曲線の捩率と弧長をともに保存するような変形, という観点からすると, 実 mKdV 方程式だけでなくサイン・ゴルドン方程式によって統制されるものもある.

例 3 (サイン・ゴルドン) 定振率 c (ただし $c \neq 0$ とする) の曲線が

$$\dot{\gamma} = \cos \theta T - \sin \theta N, \quad \theta' = \kappa$$

にしたがって動くとき, 振率と弧長は保存され, 関数 θ はサイン・ゴルドン方程式

$$\dot{\theta}' = c^2 \sin \theta \quad (5)$$

にしたがって変化する. この変形によって形成される曲面に注目すると, ガウス曲率は負の定数 $-c^2$ である. 径数 (x, t) は曲面の漸近座標系となっている.

注意 1 一般に, 弧長 x で径数付けされた空間曲線 γ の変形を

$$\dot{\gamma} = pT + qN + rB$$

と書けば $p' = \kappa q$ であり, フルネ粹 Φ は微分方程式系

$$\Phi' = \Phi L, \quad \dot{\Phi} = \Phi M \quad (6)$$

をみたす. ただし

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -M_{21} & -M_{31} \\ M_{21} & 0 & -M_{32} \\ M_{31} & M_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{21} = \kappa p - \lambda r + q', \quad M_{31} = \lambda q + r', \quad M_{32} = \frac{M_{31}' + \lambda M_{21}}{\kappa}$$

である. 可積分条件 $\dot{L} - M' - [L, M] = 0$ は

$$\dot{\kappa} = M_{21}' - \lambda M_{31}, \quad \dot{\lambda} = M_{32}' + \kappa M_{31}$$

である. 係数 p, q, r を適当に定めることにより, 可積分条件としていろいろのソリトン方程式が現れる. このとき微分方程式系 (6) はそのソリトン方程式の補助線形問題とよばれる. たとえば例 3 でみた定振率曲線に対する振率保存等周変形の場合は

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -\theta' & 0 \\ \theta' & 0 & -c \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \sin \theta \\ 0 & 0 & c \cos \theta \\ -c \sin \theta & -c \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

であり, これはサイン・ゴルドン方程式に対するラックス行列とよばれる.

注意 2 負の定曲率曲面に対するベックルント変換を経由することによって, 定振率 c の曲線に対するベックルント変換

$$\bar{\gamma} = \gamma + \frac{2k}{k^2 + c^2} (\cos w T + \sin w N) \quad (7)$$

が得られる ([4]). ただし k は任意定数であり, w は微分方程式

$$w' = k \sin w - \kappa$$

の解である。この微分方程式は弧長を保つための条件である。弧長 x で径数付けされた定振率 c の曲線 γ に対して、新しい曲線 $\bar{\gamma}$ を (7) で定めると、 $\bar{\gamma}$ はふたたび弧長 x で径数付けされた定振率 c の曲線となる。ただし曲率は変化して

$$\bar{\kappa} = \kappa - 2k \sin w$$

である。したがって、ベックルント変換を繰り返すことによって、互いに合同でない速さ 1 の定振率曲線を無数に作り出すことができる。ベックルント変換によって新しい曲線を作るには積分を実行しなくてはならないように見えるが、実際には積分を回避して代数的な操作のみによってベックルント変換を実現することができる。これは、非線形重ね合わせの原理とかビアンキの可換律 (permutability) などとよばれている。

サイン・ゴールドン方程式の可積分な離散化 (解ける仕組みを保つような離散化) は広田 [9] により得られたが、現在ではサイン・ゴールドン方程式を始めとする多くのソリトン方程式の離散化が提案されている。一方、多くのソリトン方程式の解ける仕組みは微分幾何学に由来することも知られている。したがって、可積分な差分方程式に対応する「離散的な幾何学的対象」を考察してみたい。この講演ではおもに、例 3 と例 2 でみた定振率曲線の等周変形の離散化について報告する。公式 (7) とあとで出てくる離散曲線の変形公式 (9) を比較すれば分かるように

ベックルント変換の繰り返し = 離散化

となっている。これはなにも定振率曲線の場合にかぎった話ではなく、可積分系理論や可積分幾何においてはいたるところで観察される普遍的な現象である。次節以降、離散曲線の変形を考察するが、その内容は曲線や曲面の変換論として理解することもできる。

2. 離散曲線とフルネ枠

平面内あるいは空間内に点列 $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ があるとする。どの連続する 3 点 $\gamma_{n-1}, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ も同一直線上にないとき γ を離散曲線という。この節ではフルネ・セレの公式を述べる。

2.1. 平面離散曲線

平面離散曲線 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|}, \quad N_n = T_n \text{ を左回りに } 90 \text{ 度回転したもの}$$

とおく。連続する接ベクトル T_{n-1}, T_n のなす角を κ_n とする。正確には関数 $\kappa: \mathbb{Z} \rightarrow (-\pi, \pi)$ を

$$T_n = \begin{bmatrix} \cos \kappa_n & -\sin \kappa_n \\ \sin \kappa_n & \cos \kappa_n \end{bmatrix} T_{n-1}$$

によって定める。行列 $\Phi_n = [T_n, N_n]$ は

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n \begin{bmatrix} \cos \kappa_{n+1} & -\sin \kappa_{n+1} \\ \sin \kappa_{n+1} & \cos \kappa_{n+1} \end{bmatrix}$$

をみたす。また

$$T_n - T_{n-1} = \tan \frac{\kappa_n}{2} (N_n + N_{n-1})$$

が成り立つ。これは連続の場合の $T' = \kappa N$ に対応しており、したがって大体 $\tan(\kappa_n/2)$ が曲率のような役割を果たすことが期待される。実際、平面離散曲線に対して初等幾何学的にもっともらしく接触円を定めると、 $\tan(\kappa_n/2)$ が自然に登場する。ホフマン [10] は頂接触円、辺接触円、接触円 (頂接触円と辺接触円を組み合わせたもの) を定義し、接触円の半径の逆数に向きをつけた量を曲率とよんでいる。平面離散曲線についても大域的な幾何学を展開する試みはいくつかあり、たとえば凸な閉離散曲線に対する 4 頂点定理が考察されている ([19], [22])。

2.2. 空間離散曲線

空間離散曲線 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|}, \quad N_n = B_n \times T_n, \quad B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|}$$

とにおいて、行列値関数 $\Phi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{SO}(3)$, $n \mapsto \Phi_n = [T_n, N_n, B_n]$ を γ のフルネ枠という。あるいはもし、言葉のとおり主法線ベクトル N を先に決めたほうが気持ちがいならば、加速度ベクトル

$$\Delta T_n = \frac{T_n - T_{n-1}}{|T_{n+1} - T_n| + |T_n - T_{n-1}|}$$

をもちいて

$$N_n = \frac{\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n \rangle T_n}{|\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n \rangle T_n|}, \quad B_n = T_n \times N_n$$

と定めればよい。どちらで定義しても同じことであるが、はじめに書いたもののほうがずっと簡単で、初等幾何学的な意味もとらえやすいだろう。ポイントは、主法線ベクトル N_n が 2 つのベクトル T_{n-1}, T_n で張られる平面内にあることである。このことから、フルネ枠は差分方程式

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n L_n, \quad L_n = R_1(-\nu_{n+1}) R_3(\kappa_{n+1}) \quad (8)$$

をみたす。これがフルネ・セレの公式である。ただし

$$R_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{bmatrix}, \quad R_3(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、関数 $\kappa: \mathbb{Z} \rightarrow (0, \pi)$ と関数 $\nu: \mathbb{Z} \rightarrow [-\pi, \pi)$ は

$$\langle T_n, T_{n-1} \rangle = \cos \kappa_n, \quad \langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos \nu_n, \quad \langle B_n, N_{n-1} \rangle = \sin \nu_n$$

により決まる角である。空間離散曲線のフルネ枠を扱ったもっとも古い論文はおそらく [6] であり、そのため、生化学の分野では (8) をアイリングの公式とも呼ぶらしい。あるいは、公式 (8) は教科書 [21, 19–21 頁] にも見ることができる。この [21] は微分幾何の教科書だが、離散的なモデルを立てて説明したほうが分かりやすい、との考えから積極的に離散曲線や離散曲面を導入しており、差分幾何のひとつの原典ともなっている。離散的なモデルのほうが分かりやすい、という発想は薩摩のインタビュー記事 [26] でも説明されており、そこではアインシュタインのブラウン運動の話がおもしろい。

大体 $\tan(\kappa_n/2)$ のような量が曲率と思えることはすでに述べたが、以後

$$\lambda_n = \frac{\sin \nu_{n+1}}{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|}$$

とにおいて、関数 $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を空間離散曲線 γ の捩率と呼ぶことにする。

3. 可積分な離散化

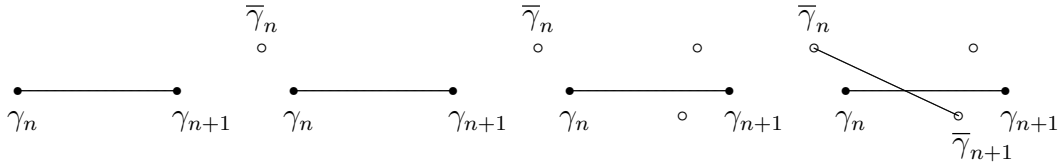
離散曲線の変形を考えるまえに、離散可積分系理論について文献を紹介しておく。離散可積分系の速成コースとしては、学部4年生や修士1年生を対象にして書かれた筈の講義録[30]、あるいは梶原[24]や辻本[29]の解説がある。離散可積分系理論ではソリトン方程式のもっている「解ける仕組み」を保存したまま独立変数を離散化する。すなわち離散可積分系理論における離散化とは、数値解析のための差分スキームの構成のことではなく、ソリトン方程式の階層を生成するようなジェネレーターの構成を指しており、専ら可積分系自体を研究することを目的に行われるものである([28])。後述の離散mKdV方程式(15)や離散サイン・ゴールドン方程式(17)がぜんぜん(4)や(5)を離散化したように見えないのはそのような事情によるが、可積分な離散化によって得られる離散ソリトン方程式は広いクラスの厳密解が求められるという著しい特徴をもつ。

4. 変形

まず平面の場合を簡単に述べてから、その拡張として空間の場合の変形を定式化する。

4.1. 平面離散曲線の等周等距離変形

変形(3)において $\lambda = c = 0$ とすれば、実mKdV方程式によって統制されるような、平面曲線の等周変形が得られる。等周変形(曲線が変形の途中で伸びたり縮んだりしない)であることに注目し、このことを離散化してみよう。すなわち頂点間の長さを保つような離散の変形を考える。そのようなもののうち、もっとも基本的なのが下図に示した等周等距離変形である。



初期曲線 γ に対してある1点 $\bar{\gamma}_n$ がすでに与えられているとしよう。このとき $\bar{\gamma}_{n+1}$ を等周 $|\bar{\gamma}_{n+1} - \bar{\gamma}_n| = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ かつ等距離 $|\bar{\gamma}_{n+1} - \gamma_{n+1}| = |\bar{\gamma}_n - \gamma_n|$ であるような位置に動かす。そのような点 $\bar{\gamma}_{n+1}$ の候補は一般に2箇所存在するが、新しい接ベクトルがもとの接ベクトルと横断的となるほうの位置を選ぶ。この変形は可積分であり、離散mKdV方程式によって統制される([18])。実際、離散mKdV方程式の多重ソリトン解や多重ブリーザー解をもちいて離散曲線の位置ベクトルを明示的に(すなわち、積分や和分を使うことなく)書き下すことができる([12])。また平面離散曲線の等周変形はホドグラフ変換に応用があつて、たとえばWKI方程式などの離散化に役立つ([7])。

平面の幾何構造をとりかえた場合にも同じような議論が展開できる場合がある。たとえばアフィン幾何や相似幾何での変形を考える場合には、長さを保つことに意味がなくなるから、かわりに、面積を保つような変形([18])を考えたり、角度を保つような変形([25])を考えたりすることになる。付随する離散ソリトン方程式も変わって、離散KdV方程式や離散バーガス方程式などが登場する。

4.2. 連続極限

上で述べた平面離散曲線の等周等距離変形(離散系)は、適当な連続極限をとることにより、平面離散曲線の等周変形(半離散系)を経て、例2で述べた平面曲線の等周変形

(連続系) へと移行する ([11]). そのような連続極限のとりかたは, たとえば三輪変換 (と呼ばれる, 独立変数の変換) をヒントにして探すとよい.

4.3. 空間離散曲線の等周等距離変形

第4.1節で述べたことは, 空間離散曲線へ拡張することができる. 本節では, 定振率 c の空間離散曲線 γ に対して, その等周等距離変形を導入する. 以後, 3点 $\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}$ を通る平面を点 γ_n における接触平面と呼ぶ. 新しい空間離散曲線 $\bar{\gamma}$ を次の要領で作る.

1. γ の任意の1点 (例えば γ_0) をその点における接触平面上の勝手な位置 $\bar{\gamma}_0$ に移動し, 移動した距離を δ とする. ただし δ は $0 < \delta < 1/c$ をみたすものとする.
2. 各点 γ_n の接触平面上に, 点 γ_n を中心として半径 δ の円周 C_n を描く.
3. 各点 γ_n を次の3条件をみたす位置 $\bar{\gamma}_n$ に動かす.
 - (a) 円周 C_n 上にある. これを等距離条件という.
 - (b) 頂点間の距離 (弧長) を保つ. これを等周条件という.
 - (c) 接触平面の下半平面 (すなわち T に関して N と反対側) にある.

この手順によって, 初期値 $\bar{\gamma}_0$ を決めれば新しい空間離散曲線 $\bar{\gamma}$ がただひとつ定まる. ところが残念なことに, 等周等距離変形 $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ は一般には振率を保存しない. したがって, 振率を保存するためには初期値 $\bar{\gamma}_0$ の位置をさらに制限する必要がある. われわれの目標は, 例2や例3の変形を離散化をすることだから, 等周等距離変形は振率を保存してほしい. 次の命題を得る.

命題 1 ([13]) 定数 b, w_0 を任意に固定する. 定振率 c の空間離散曲線 γ に対して, 新しい空間離散曲線 $\bar{\gamma}$ を

$$\bar{\gamma}_n = \gamma_n + \delta (\cos w_n T_n + \sin w_n N_n), \quad \delta = \frac{b}{1 + (bc/2)^2} \quad (9)$$

によって定める. ただし数列 w_n は差分方程式

$$w_{n+1} = -\kappa_{n+1} + 2 \arctan \frac{b + a_n}{b - a_n} \tan \frac{w_n}{2},$$

$$a_n = \left(1 + \tan^2 \frac{\nu_{n+1}}{2}\right) \epsilon_n, \quad \epsilon_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|$$

で定める. このとき, この離散時間発展 $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ は等周等距離変形である. また, この離散時間発展 $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ が振率を保つための必要十分条件は, 関数 $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1})$ がすべての n について定符号であることである.

注意 3 公式 (9) と公式 (7) を見比べよ. 定数 k, b の関係は $k = 2/b$ である.

この命題で述べた手順を繰り返すと, 定振率 c の空間離散曲線の列

$$\gamma^0 = \gamma, \quad \gamma^1 = \bar{\gamma}, \quad \gamma^2 = \overline{\gamma^1}, \quad \dots, \quad \gamma^m = \overline{\gamma^{m-1}}, \quad \dots$$

ができる. この時間発展によって, 初期曲線 γ^0 に付随する諸量 ϵ_n, ν_n, a_n がすべて保存されること, すなわちこれらの関数が時間発展の変数 m に依らないことに注意すると, つぎの定理を得る.

定理 1 ([13]) 定振率 c の空間離散曲線 γ^0 に対して, 空間離散曲線の列 $\gamma^1, \gamma^2, \dots$ を

$$\gamma_n^{m+1} = \gamma_n^m + \delta_m (\cos w_n^m T_n^m + \sin w_n^m N_n^m), \quad \delta_m = \frac{b_m}{1 + (b_m c/2)^2}, \quad (10)$$

$$w_{n+1}^m = -\kappa_{n+1}^m + 2 \arctan \frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \frac{w_n^m}{2} \quad (11)$$

によって定める. ただし数列 b_m と初期値の列 w_0^m は $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m)$ がすべての n について定符号であるように与えるものとする. このとき, 以下のことが成り立つ.

1. (等周性) すべての m について γ^m は $|\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m| = |\gamma_{n+1}^0 - \gamma_n^0| = \epsilon_n$ をみたす.
2. (振率保存性) すべての m について γ^m の振率は c である.
3. (時間発展) フルネ粹 $\Phi_n^m = [T_n^m, N_n^m, B_n^m]$ は

$$\Phi_{n+1}^m = \Phi_n^m L_n^m, \quad \Phi_n^{m+1} = \Phi_n^m M_n^m \quad (12)$$

をみたす. ただし $L_n^m = R_1(-\nu_{n+1}) R_3(\kappa_{n+1}^m)$ であり, 各 m ごとに M_n^m は次のいずれかで与えられる. もし $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m) > 0$ ならば

$$M_n^m = R_3(w_n^m) R_1(\mu_m) R_3(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m), \quad \mu_m = -2 \arctan \frac{b_m c}{2} \quad (13)$$

であり, もし $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m) < 0$ ならば

$$M_n^m = R_3(w_n^m) R_1(\mu_m) R_3(-w_{n+1}^m - \kappa_{n+1}^m), \quad \mu_m = 2 \arctan \frac{2}{b_m c} \quad (14)$$

である.

4. (両立条件) 行列 M が (13) の場合, 関数 κ, w が

$$w_{n+1}^m - w_{n-1}^m = \kappa_n^{m+1} - \kappa_{n+1}^m$$

をみたせば $L_{n+1}^m M_n^m = M_{n+1}^m L_n^m$ が成り立ち, したがって差分方程式系 (12) は一意に解ける. またこのとき (11) を用いて κ を消去すると, w は離散 mKdV 方程式

$$\frac{w_{n+1}^{m+1}}{2} - \frac{w_n^m}{2} = \arctan \left(\frac{b_{m+1} + a_n}{b_{m+1} - a_n} \tan \frac{w_n^{m+1}}{2} \right) - \arctan \left(\frac{b_m + a_{n+1}}{b_m - a_{n+1}} \tan \frac{w_{n+1}^m}{2} \right) \quad (15)$$

にしたがう. すなわち, 組 L, M は離散 mKdV 方程式のラックス行列である. 行列 M が (14) の場合は

$$w_{n+1}^m - w_{n-1}^m = -\kappa_n^{m+1} - \kappa_{n+1}^m \quad (16)$$

が可積分条件となり, このとき w は離散サイン・ゴールドン方程式

$$\frac{w_{n+1}^{m+1}}{2} + \frac{w_n^m}{2} = \arctan \left(\frac{b_{m+1} + a_n}{b_{m+1} - a_n} \tan \frac{w_n^{m+1}}{2} \right) + \arctan \left(\frac{b_m + a_{n+1}}{b_m - a_{n+1}} \tan \frac{w_{n+1}^m}{2} \right) \quad (17)$$

にしたがう. すなわち, 組 L, M は離散サイン・ゴールドン方程式のラックス行列である.

注意 4 定理1に関連していくつかの注意を述べる.

1. 関数 $\sin(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m)$ が定符号であるように数列の組 b_m, w_0^m を与えることができる. また, 逆問題 (離散 mKdV 方程式や離散サイン・ゴールドン方程式の解から等周等距離変形列を構成すること) を考える場合には, この厄介な定振率条件を気にする必要がなくなり, 数列 b_m, w_0^m は自由に与えることができるようになる. 第5節を参照されたい.
2. 定理のなかでも述べたように, 時間発展の各ステップ m について, 空間離散曲線を離散 mKdV 方程式によって変形させるか, あるいは離散サイン・ゴールドン方程式によって変形させるか, 自由に選択することができる. この自由度は, 連続系や半離散系にはない, 離散系特有のものである.
3. 空間離散曲線に対する差分間隔は振率によって変形される. 実際, 空間離散曲線に対して用いている差分間隔 ϵ_n, δ_m は, 離散 mKdV 方程式や離散サイン・ゴールドン方程式の差分間隔 a_n, b_m と

$$\epsilon_n = \frac{a_n}{1 + (a_n c/2)^2}, \quad \delta_m = \frac{b_m}{1 + (b_m c/2)^2}$$

のように関係する. 離散曲線の差分間隔と離散ソリトン方程式の差分間隔を共通にとることができるのは振率 c が0の場合に限ることが分かる.

4. 定振率 c の空間曲線は, 半径 $1/|c|$ の球面内の曲線と対応する. 空間離散曲線の場合にも同様の対応関係がある. 実際, 離散曲線 $\Gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^2(1/|c|)$ に対して

$$\gamma_n = c \sum_{k=1}^n \Gamma_{k-1} \times \Gamma_k \quad (18)$$

は \mathbb{R}^3 内の定振率 c の離散曲線を与え, 逆に \mathbb{R}^3 内の定振率 c の離散曲線 γ とその陪法線ベクトル B に対して $\Gamma_n = \pm(1/c) B_n$ は球面 $\mathbb{S}^2(1/|c|)$ 内の離散曲線を与える. したがって, 定振率の空間離散曲線 γ に対する離散時間発展 (10) から, 自動的に, 球面離散曲線 Γ に対する離散サイン・ゴールドン流 [5] が導かれる. 逆は, 式 (18) からわかるように和分を実行する必要があるため, 困難.

5. 離散サイン・ゴールドン方程式という名前の差分方程式は複数存在するが, よく知られているのは広田 [9] による

$$\sin \frac{\theta_{n+1}^{m+1} - \theta_n^{m+1} - \theta_{n+1}^m + \theta_n^m}{4} = \frac{a_n}{b_m} \sin \frac{\theta_{n+1}^{m+1} + \theta_n^{m+1} + \theta_{n+1}^m + \theta_n^m}{4} \quad (19)$$

だろう. この差分方程式は, 離散サイン・ゴールドン方程式 (17) のポテンシャル版となっている. 実際, 両立条件 (16) は

$$w_n^m = -\frac{\theta_n^{m+1} + \theta_{n+1}^m}{2}, \quad \kappa_n^m = \frac{\theta_{n+1}^m - \theta_{n-1}^m}{2}$$

なるポテンシャル θ の存在を示唆しているが, この変数変換によって, 式 (11) が広田の式 (19) を与える.

4.4. 離散 K 曲面

定理1で記述される離散曲線の等周変形列は \mathbb{R}^3 内で離散曲面をなすが, それは離散 K 曲面である. 離散 K 曲面は, 負の定曲率曲面の離散的類似として, ボベンコとピンカー [2] によって詳しく調べられた. 写像 $\gamma: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (m, n) \mapsto \gamma_n^m$ が各 m, n について次のふたつの条件をみたすとき, 離散 K 曲面という.

1. 5点 $\gamma_n^m, \gamma_{n+1}^m, \gamma_{n-1}^m, \gamma_n^{m+1}, \gamma_n^{m-1}$ が同じ平面上にある.
2. $|\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m| = |\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_n^{m+1}|$ かつ $|\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m| = |\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_{n+1}^m|$ が成り立つ.

命題 2 定理1による定振率空間離散曲線の等周等距離変形列 γ は離散 K 曲面をなす.

注意 5 ボベンコとピンカーによる離散 K 曲面は, 漸近座標系で径数表示された負の定曲率曲面を離散化したものである. このように, 曲面の離散化は座標系の取りかたに依存する. 曲率線座標系によって負の定曲率曲面を離散化する方法もある. これらふたつのクラスには共通部分が存在するが, 互いに包含関係はないことがわかっている.

5. 明示公式

ここまでは順問題について述べてきたが, この節では逆問題について考える. 定数 λ と数列 a_n, b_m, w_n^0, w_0^m に対して, 関数 $w = w_n^m$ を離散 mKdV 方程式 (15) または離散サイン・ゴルドン方程式 (17) の解として定め, さらに関数 κ を式 (11) で定める. このとき, 差分方程式系 (12) の解を ϕ とし, それを $SU(2)$ 値の写像に変換したものを ϕ とする. 最後に

$$\gamma = - \left(\frac{\partial}{\partial c} \phi \right) \phi^{-1} \quad (20)$$

とおくと γ は $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ に値をとる写像であって, 定理1で述べた定振率 c の空間離散曲線に対する振率保存等周等距離変形列を与える.

いま述べた逆問題の手順を, 離散 mKdV 方程式の多重ソリトン解によって具体的に実行してみよう. 定数 c と自然数 N , および数列 a_n, b_m を固定する. まず離散 mKdV 方程式 (15) の N ソリトン解を与える. ここでは N ソリトン解を1成分カソラチ型の τ 関数によって与え, さらに簡単のため, 自励的な場合 (すなわち差分間隔 a_n, b_m がともに定数の場合) について述べる. まず離散 mKdV 方程式の N ソリトン解は

$$w_n^m = \frac{\theta_n^{m+1} - \theta_{n+1}^m}{2}, \quad \theta_n^m = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau_N^{m,n}}{\bar{\tau}_N^{m,n}}$$

と構成できる. ただし $\tau_N^{m,n} = \det (f_{i,j-1}^{m,n})_{i,j=1,\dots,N}$ および $\bar{\tau}_N^{m,n} = \det (f_{i,j}^{m,n})_{i,j=1,\dots,N}$ であり, 成分は

$$f_{i,j}^{m,n} = \frac{c_i p_i^j}{(1 - p_i a)^n (1 - p_i b)^m} + \frac{d_i (-p_i)^j}{(1 + p_i a)^n (1 + p_i b)^m}$$

である. パラメータは各 $i = 1, \dots, N$ について c_i と p_i は実数にとり, d_i は純虚数とする. この N ソリトン解に対応するフルネ枠 Φ を $SU(2)$ 値の写像に変換したものを

$$\phi_n^m = \begin{bmatrix} \alpha_n^m & \beta_n^m \\ -(\beta_n^m)^* & (\alpha_n^m)^* \end{bmatrix}$$

と書けば, 行列 ϕ_n^m の成分が具体的に

$$\begin{bmatrix} \alpha_n^m \\ \beta_n^m \end{bmatrix} = \frac{(1+q^2a^2)^{n/2}(1+q^2b^2)^{m/2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_n^m & 0 \\ 0 & 1/Q_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{N+1}^{m,n}/\tau_N^{m,n} \\ \bar{\tau}_{N+1}^{m,n}/\bar{\tau}_N^{m,n} \end{bmatrix},$$

$$Q_n^m = q^{1/2} \exp\left(\sqrt{-1} \frac{\theta_n^m - \theta_{n+1}^m}{4}\right)$$

と構成できる. ただし星印は複素共役を意味し, パラメータ c_{N+1} , d_{N+1} , p_{N+1} は

$$c_{N+1}^2 + d_{N+1}^2 = \frac{1}{q} \prod_{i=1}^N \frac{1}{q^2 + p_i^2}, \quad p_{N+1} = \sqrt{-1}q, \quad q \in \mathbb{R}$$

をみたすものとする. これによって $\det \phi = 1$ となる. 最後に $q = (1/a) \tan(c/2)$ において ϕ を c で微分すれば, シムの公式 (20) によって, 定振率空間離散曲線の等周等距離変形列 γ が復元される.

6. おわりに

離散曲線の変形について可積分幾何の立場から述べた. 離散曲線の可積分幾何については, ホフマンの講義録 [10] や本稿と同じ調子の解説 [27] がある. 曲面の差分幾何についてはボベンコとスリスの教科書 [3] が詳しい. 今後の研究課題としては, ほかの離散ソリトン方程式について同様の定式化をすることや, 非可積分系への拡張, あるいは超離散化などなど, たくさん問題が残されている. また, 曲面の差分幾何が今後さらに進展するためには, 複素関数の離散化や楕円型偏微分方程式の離散化, およびそれらの例や厳密解を構成することが大切であって, これについても離散可積分系理論からの積極的なアプローチが不可欠と思われる.

参考文献

- [1] Richard L. Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 246–251. MR 0370377 (51 #6604)
- [2] Alexander Bobenko and Ulrich Pinkall, *Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation*, J. Differential Geom. **43** (1996), no. 3, 527–611. MR 1412677 (97m:53008)
- [3] Alexander I. Bobenko and Yuri B. Suris, *Discrete differential geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, Integrable structure. MR 2467378 (2010f:37125)
- [4] Annalisa Calini and Thomas Ivey, *Bäcklund transformations and knots of constant torsion*, J. Knot Theory Ramifications **7** (1998), no. 6, 719–746. MR 1643940 (99m:53004)
- [5] Adam Doliwa and Paolo Maria Santini, *The integrable dynamics of a discrete curve*, Symmetries and integrability of difference equations (Estérel, PQ, 1994), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 91–102. MR 1416829 (97j:58123)
- [6] Henry Eyring, *The resultant electric moment of complex molecules*, Phys. Rev. **39** (1932), 746–748.
- [7] Bao-Feng Feng, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Ken-ichi Maruno, and Yasuhiro Ohta, *Discrete integrable systems and hodograph transformations arising from motions of discrete plane curves*, J. Phys. A **44** (2011), no. 39, 395201, 19. MR 2842486 (2012j:37102)

- [8] Raymond E. Goldstein and Dean M. Petrich, *The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), no. 23, 3203–3206. MR MR1135964 (92g:58050)
- [9] Ryogo Hirota, *Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation*, J. Phys. Soc. Japan **43** (1977), no. 6, 2079–2086. MR 0460936 (57 #925c)
- [10] Tim Hoffmann, *Discrete differential geometry of curves and surfaces*, COE Lecture Note, vol. 18, Kyushu University, Faculty of Mathematics, Fukuoka, 2009, Math-for-Industry Lecture Note Series.
- [11] Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura, and Yasuhiro Ohta, *Explicit solutions to the semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves*, J. Phys. A **45** (2012), no. 4, 045206, 16. MR 2874242
- [12] ———, *Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves*, Kyushu J. Math. **66** (2012), no. 2, 303–324. MR 3051339
- [13] ———, *Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves*, J. Phys. A **47** (2014), no. 23, 235202, 26. MR 3216777
- [14] Kenji Kajiwara and Saburo Kakei, *Toda lattice hierarchy and goldstein-petrich flows for plane curves*, arXiv:1310.7080 (2013).
- [15] G. Koenigs, *Sur la forme des courbes à torsion constante*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. **1** (1887), no. 2, E1–E8. MR 1508058
- [16] Joel Langer and Ron Perline, *Poisson geometry of the filament equation*, J. Nonlinear Sci. **1** (1991), no. 1, 71–93. MR 1102831 (92k:58118)
- [17] Jerrold Marsden and Alan Weinstein, *Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids*, Phys. D **7** (1983), no. 1-3, 305–323, Order in chaos (Los Alamos, N.M., 1982). MR 719058 (85g:58039)
- [18] Nozomu Matsuura, *Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 8, 1681–1698. MR 2920827
- [19] O. R. Musin, *Curvature extrema and four-vertex theorems for polygons and polyhedra*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **280** (2001), no. Geom. i Topol. 7, 251–271, 303. MR 1879271 (2003c:51011)
- [20] C. Rogers and W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux transformations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, Geometry and modern applications in soliton theory. MR 1908706 (2003j:37120)
- [21] Robert Sauer, *Differenzgeometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1970. MR 0262939 (41 #7544)
- [22] Serge Tabachnikov, *A four vertex theorem for polygons*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), no. 9, 830–833. MR 1792415 (2002e:51010)
- [23] Chuu-Lian Terng, *Dispersive geometric curve flows*, arXiv:1411.2065 (2014).
- [24] 梶原健司, 離散可積分系の基礎, 可視化の技術と現代幾何学, 岩波書店, 2010, pp. 47–92.
- [25] 梶原健司, 黒田利信, 松浦望, 平面離散曲線の等角変形と離散 Burgers 階層 I, II, 本学会幾何学分科会における一般講演.
- [26] 薩摩順吉, 研究はバクチである, 数理科学, vol. 48, サイエンス社, 2010, pp. 55–60.
- [27] 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 日本応用数理学会論文誌 **23** (2013), no. 1, 55–107.
- [28] 太田泰広, 差分ソリトン方程式の話題, Progress in Mathematics of Integrable Systems, 数理解析研究所講究録別冊, vol. B30, 2012, pp. 137–143.
- [29] 辻本諭, 可積分系の離散化について, 可積分系の応用数理, 裳華房, 2000, pp. 1–52.
- [30] 筧三郎, 離散可積分系入門, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル, COE Lecture Note, vol. 40, Kyushu University, 2012, pp. 25–47.