渦糸方程式の離散化

廣瀬三平　(芝浦工大教育イノベ)
井ノ口順一　(筑波大数理物質)
梶原健司　(九大IMI)
松浦望　(福岡大理)
太田泰広　(神戸大理)

1. 概要　渦糸方程式 $\dot{\gamma} = \gamma' \times \gamma''$ は, 渦糸の運動の最小限のエッセンスを抽出した方程式であり, 橋本変換を介して非線形シュレディンガー (NLS) 方程式と等価であることが知られている [1]. 我々は渦糸方程式を離散微分幾何の立場から離散化する. 半離散化については [2] をはじめとして複数の研究があるが, 離散化については [3] があるのみで, いままで離散可積分性を厳密に研究した事例はなかった. 本講演では, 離散 NLS 方程式によって可積分性が保障されるような離散曲線の離散的運動を定式化し, その特徴について述べる.

2. 離散曲線　写像 $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$, $n \mapsto \gamma_n$ についてどの連続する 3 点 $\gamma_{n-1}, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ も共線でないとき, γ を離散曲線という. 離散曲線 γ に対して

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|}, \quad N_n = B_n \times T_n, \quad B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|}$$

とおき, さらに $\langle T_{n-1}, T_n \rangle = \cos\kappa_n$, $\langle B_{n-1}, B_n \rangle = \cos\nu_n$, $\langle N_{n-1}, B_n \rangle = \sin\nu_n$ によって角 $\kappa_n \in (0, \pi)$ と角 $\nu_n \in [-\pi, \pi)$ を定める. また

$$u_n = \frac{1}{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|} \tan\frac{\kappa_n}{2} \exp\left(-\sqrt{-1} \sum_{k=-\infty}^{n} \nu_k \right)$$

とおいて, 関数 u を便宜的に γ の複素曲率とよぶ.

3. 離散渦糸方程式　長さ $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ が n によらない定数 ϵ であるような離散曲線 γ に対して, その複素曲率を u とし, 以下に述べる要領で新しい離散曲線 $\overline{\gamma}$ を作る: まず, 複素数 $a, b, \overline{u}_{-1}$ および正の実数 Γ_0 を与える. 次に, 差分方程式

$$b^* \overline{u}_{n+1} - b u_n = (a^* u_{n+1} - a \overline{u}_n)\, \Gamma_{n+1}, \quad \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} = \frac{1 + \epsilon^2 |u_n|^2}{1 + \epsilon^2 |\overline{u}_n|^2}$$

で各 $\overline{u}_n$, Γ_{n+1} を計算する. ただし星印は複素共役を表す. 最後に, 離散曲線 $\overline{\gamma}$ を

$$\overline{\gamma}_n = \gamma_n + P_n T_n + \left(Q_n \Re\frac{u_n}{|u_n|} + R_n \Im\frac{u_n}{|u_n|} \right) N_n + \left(-Q_n \Im\frac{u_n}{|u_n|} + R_n \Re\frac{u_n}{|u_n|} \right) B_n \tag{1}$$

と定める. ただし実係数 P_n, Q_n, R_n は

$$P_n = \epsilon - \frac{\epsilon}{D_n} \left(ab + a^* b^* + \frac{2|b|^2}{\Gamma_{n+1}} \right), \quad Q_n + \sqrt{-1} R_n = \frac{2\epsilon^2 b^*}{D_n} \left(-a\overline{u}_n + \frac{b u_n}{\Gamma_{n+1}} \right),$$

および $D_n = ab + a^* b^* + \left(1 + \epsilon^2 |u_n|^2\right) \left(|a|^2 \Gamma_n + |b|^2 / \Gamma_{n+1} \right) - \epsilon^2 \left(a^* b u_n \overline{u}_n^* + a b^* u_n^* \overline{u}_n \right)$ で定める. 変形 $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ の公式 (1) を離散渦糸方程式とよぶ.

命題 離散渦糸方程式 (1) は, 適切な境界条件のもとで, 等周かつ等距離な変形を与える. すなわち各 n に対して $\left|\overline{\gamma}_{n+1}-\overline{\gamma}_n\right|=\left|\gamma_{n+1}-\gamma_n\right|=\epsilon$ かつ $\left|\overline{\gamma}_n-\gamma_n\right|=\left|\overline{\gamma}_{n+1}-\gamma_{n+1}\right|$ が成立する. さらにこのとき $\overline{u}$ は $\overline{\gamma}$ の複素曲率となる.

定理 命題の境界条件をみたす初期離散曲線 γ に対して離散渦糸方程式 (1) による変形を繰り返すと, 離散曲線の等周等距離変形列 $\gamma^0=\gamma$, $\gamma^1=\overline{\gamma}$, ..., $\gamma^{m+1}=\overline{\gamma^m}$, ... ができる. さらに, 対応する複素曲率列 u^m は離散 NLS 方程式

$$b_m^* u_{n+1}^{m+1}-b_m u_n^m=\left(a_m^* u_{n+1}^m-a_m u_n^{m+1}\right)\Gamma_{n+1}^m, \quad \frac{\Gamma_{n+1}^m}{\Gamma_n^m}=\frac{1+\epsilon^2\left|u_n^m\right|^2}{1+\epsilon^2\left|u_n^{m+1}\right|^2} \tag{2}$$

をみたす.

命題と定理を証明するには, [1] で導入されたように, ユニタリ群に値をとるような複素枠を用いると計算の見通しがよい. いくつか補足を述べる.

1. 離散 NLS 方程式 (2) について.

– 適切な連続極限をとれば, 半離散 NLS 方程式を経由して, NLS 方程式を復元する.

– 可積分系理論に現れる離散 NLS 方程式はいくつかのバージョンが知られている. 離散 NLS 方程式を (2) の形に明示的に書いた文献は見当たらないが, (2) は広田と辻本 [4] によるものやアブロヴィッツとラディック [5] によるものを変数変換することで得られる. あるいはまた別の見方として, 離散ランダウ・リフシッツ方程式 [6] が等方的に退化したものと思ってもよい. これら複数の離散 NLS 方程式の間の関係は, 方程式のレベルでは単なる変数変換に過ぎないが, 解のレベルでは非自明である [7].

2. 離散渦糸方程式 (1) について.

– 上に言及したのと同一の連続極限で, 半離散渦糸方程式 [2] と渦糸方程式を復元する.

– 離散 NLS 方程式 (2) の多重ソリトン解を用いて, 離散渦糸方程式 (1) にしたがって運動する離散曲線 γ^m の位置ベクトル成分を具体的に書き下すことができる [7].

– 我々の定式化では離散 NLS 方程式に対して離散渦糸方程式が定まるため, もし異なる離散 NLS 方程式を指定すれば, 異なる離散渦糸方程式が導出される. たとえば適切な境界条件のもとで $\widehat{\gamma}_n:=\overline{\gamma}_{n+1}$ とおくと, 変形 $\gamma\mapsto\widehat{\gamma}$ は広田・辻本の離散 NLS 方程式によって記述される. 講演では数値シミュレーションの結果についても述べる.

参考文献

[1] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), pp. 477–485.

[2] A. Doliwa and P. Santini, *Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy*, J. Math. Phys. **36** (1995), pp. 1259–1273.

[3] T. Hoffmann, *Discrete Hashimoto surfaces and a doubly discrete smoke-ring flow*, Oberwolfach Semin. **38** (2008) pp. 95–115.

[4] 辻本諭, 可積分系の離散化について, 中村佳正編「可積分系の応用数理」所収, 裳華房 (2000), pp. 1–52.

[5] M. Ablowitz and J. Ladik, *A nonlinear difference scheme and inverse scattering*, Stud. Appl. Math. **55** (1976), pp. 213–229.

[6] F. Nijhoff and V. Papageorgiou, *Lattice equations associated with the Landau-Lifschitz equations*, Phys. Lett. A **141** (1989), pp. 269–274.

[7] 廣瀬三平, 井ノ口順一, 梶原健司, 松浦望, 太田泰広, 離散空間曲線の運動に対する行列式解と Pfaffian 解, 本学会無限可積分系セッションにおける講演.