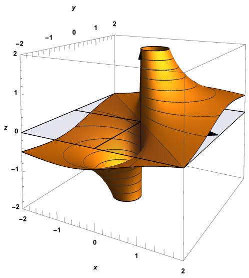
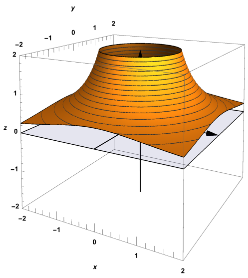
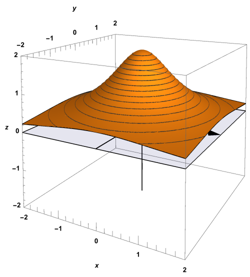
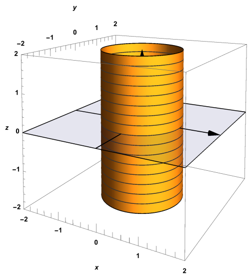
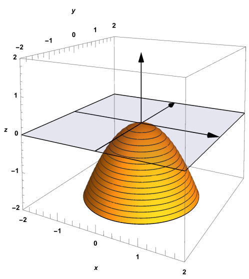
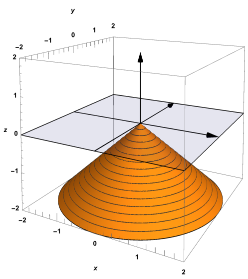
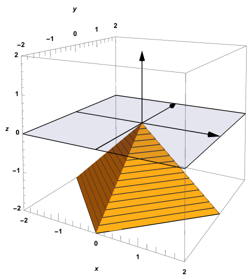
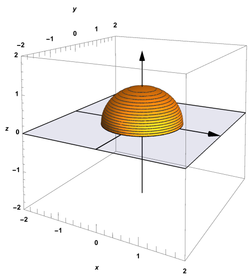
微分積分 III 中間試験　　学籍番号の下 2 桁 |　|　|　　名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿

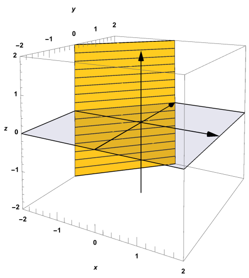
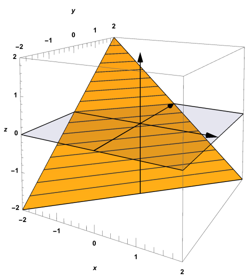
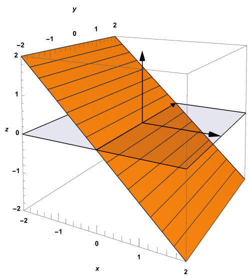
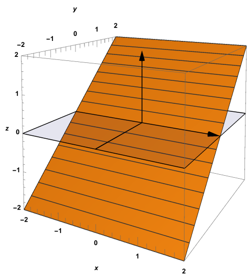
$\boxed{1}$ 次の各関数について、そのグラフ $z = f(x, y)$ をリストから選び、番号で答えよ。　(30 点)

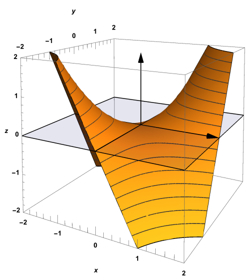
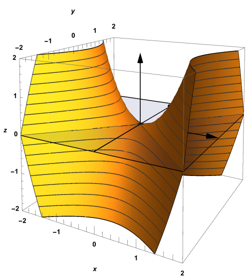
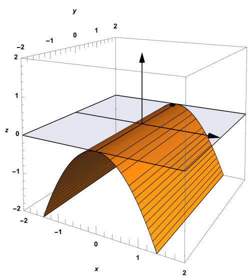
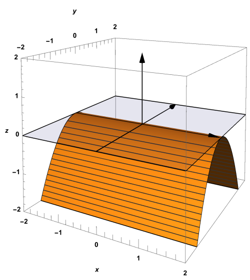
関数	グラフの番号	関数	グラフの番号
$f(x,y) = y$		$f(x,y) = -x + y - 2$	
$f(x,y) = -y^2$		$f(x,y) = -x^2 - y^2$	
$f(x,y) = xy$		$f(x,y) = x^2 - y^2$	
$f(x,y) = \dfrac{2}{1 + x^2 + y^2}$		$f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$	
$f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$		$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$	

グラフのリスト（試験監督者から補足説明あり）

①

②

③

④


⑤

⑥

⑦

⑧


⑨

⑩

⑪

⑫


⑬

⑭

⑮

⑯


$\boxed{2}$ 次の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{14}$ にもっともよく当てはまる数式や数値を入れよ。（30 点）

(x, y) 平面内の 4 点 $(0,0)$, $(3,1)$, $(5,5)$, $(2,4)$ を頂点とする平行四辺形の内部を D とする。このとき重積分

$$V = \iint_D xy\; dx\, dy$$

の値を計算したい。この重積分は、領域 D とグラフ $z = xy$ で挟まれる立体 M の体積を表している。まず累次積分で考えよう。立体 M を平面 $x = k$ で切断したとき、断面の面積は

- $0 \le k \le \boxed{1}$ のとき $\displaystyle\int_{\boxed{2}}^{\boxed{3}} \boxed{4}\, dy$
- $\boxed{1} \le k \le \boxed{5}$ のとき $\displaystyle\int_{\boxed{6}}^{\boxed{7}} \boxed{8}\, dy$
- $\boxed{5} \le k \le 5$ のとき $\displaystyle\int_{\boxed{9}}^{\boxed{10}} \boxed{11}\, dy$

となる。したがって体積はこれら断面積を積分して

$$V = \int_0^{\boxed{1}} \left(\int_{\boxed{2}}^{\boxed{3}} \boxed{4}\, dy \right) dk + \int_{\boxed{1}}^{\boxed{5}} \left(\int_{\boxed{6}}^{\boxed{7}} \boxed{8}\, dy \right) dk + \int_{\boxed{5}}^{5} \left(\int_{\boxed{9}}^{\boxed{10}} \boxed{11}\, dy \right) dk$$

と計算できる。これは簡単な定積分だが、実際に計算するのは面倒である。そこで線形変換を行う。領域 D を、(u, v) 平面内の領域

$$G = \left\{ (u, v) \;\middle|\; 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 \right\}$$

に変換する。領域 G 内の点 ${}^{\mathrm{t}}(u, v)$ を領域 D 内の点 ${}^{\mathrm{t}}(x, y)$ へ移す線形写像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \boxed{12}$$

と書けるから

$$V = \iint_D xy\; dx\, dy = \iint_G \boxed{13}\, du\, dv$$

となる。これならば計算量が比較的すくなくて済み、$V = \boxed{14}$ が得られる。

解答欄

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
12	13		14

$\boxed{3}$ μ は定数、σ は正の定数とする。定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

の値を求めよ。 （20 点）

$\boxed{4}$ 半径 a の球面について、体積 $V(a)$ と表面積 $A(a)$ を求めたうえで

$$\frac{d}{dr}V(a) = A(a)$$

が成りたつことを確かめよ。（20 点）

(1) 体積 $V(a)$

(2) 表面積 $A(a)$

(3) $\dfrac{d}{dr}V(a) = A(a)$ であることをチェック