離散空間曲線の等周変形と semi-discrete modified KdV 方程式

井ノ口順一（山形大理）・梶原健司（九大 IMI）
松浦望（福岡大理）・太田泰広（神戸大理）

概　　要

離散空間曲線の等周変形のうち, とくに semi-discrete modified KdV 方程式によって統制されるようなものに対して, τ 函数を用いた「等周変形の明示公式」を構成する.

1. 空間曲線の等周変形

ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内の曲線 $\gamma(u)$ が時間とともに変形していく様子を考える. ただし u は弧長径数とは限らない勝手な径数とする. 時刻 t における曲線を $\gamma(u,t)$ と書く. 各曲線 $\gamma(u,t)$ の速さがこの変形で保存される, すなわち函数 $|(\partial/\partial u)\,\gamma(u,t)|$ が t に依らないための必要十分条件は, 曲線の変形方向 $(\partial/\partial t)\,\gamma(u,t)$ が

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial u \partial t}\gamma(u,t),\ \frac{\partial}{\partial u}\gamma(u,t)\right\rangle = 0 \tag{1}$$

をみたすことである. 条件 (1) がみたされているとき, もしはじめの曲線 $\gamma(\,\cdot\,,0)$ がその弧長によって径数表示されているならば, どの時刻の曲線もおなじ弧長函数によって径数表示されることになる. これはもとの曲線が伸び縮みせずに変形することを意味する. そこで条件 (1) を等周条件と呼ぶ. 以下では等周条件をみたす変形を考える. 径数 u を弧長径数 x で表示しなおしたものを $u(x)$ としたとき, 曲線の等周変形 $\gamma(u(x),t)$ をふたたび $\gamma(x,t)$ と書こう. また, 弧長径数 x に関する微分と時刻 t に関する微分をそれぞれプライムとドットで表し, 独立変数を書くのは省略する. すなわち $\gamma' = (\partial/\partial x)\,\gamma(x,t)$, $\dot{\gamma} = (\partial/\partial t)\,\gamma(x,t)$ とする. 各時刻における空間曲線 γ の接ベクトルを T, 主法線ベクトルを N, 陪法線ベクトルを B, 曲率を κ, 捩率を λ と書けば, これらはいずれも x と t の 2 変数函数である. さて, 捩率 λ が定数であるとき, 等周変形の方向を

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\kappa^2}{2} - 3\lambda^2\right)T + \kappa' N - 2\lambda\kappa B$$

と決める. このときフルネ枠場 (T,N,B) を $\mathrm{SU}(2)$ 値の函数に変換したものを ϕ と書けば, ϕ は

$$\phi' = \phi L, \quad L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{-1}\lambda & -\kappa \\ \kappa & -\sqrt{-1}\lambda \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\dot{\phi} = \phi M, \quad M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{-1}\lambda\kappa^2 - 2\sqrt{-1}\lambda^3 & -2\kappa'' - \kappa^3 + 2\lambda^2\kappa + 2\sqrt{-1}\lambda\kappa' \\ 2\kappa'' + \kappa^3 - 2\lambda^2\kappa + 2\sqrt{-1}\lambda\kappa' & -\sqrt{-1}\lambda\kappa^2 + 2\sqrt{-1}\lambda^3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

をみたす. 連立方程式 (2)–(3) の両立条件は modified KdV 方程式

$$\dot{\kappa} = \frac{3}{2}\kappa^2\kappa' + \kappa''' \tag{4}$$

である. 以上この節では modified KdV 方程式 (4) によって統制されるような空間曲線の等周変形を見た.

2. 離散空間曲線の等周変形

写像 $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{E}^3,\ n \mapsto \gamma_n$ がすべての整数 n に対して $\det(\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}) \neq 0$ をみたすとき, 離散空間曲線, あるいはより詳しく正則な離散空間曲線であるという. 離散空間曲線 γ に対して

$$a_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|, \quad T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{a_n}, \quad \Delta T_n = \frac{1}{a_n + a_{n-1}}(T_n - T_{n-1})$$

とおく．さらにシュミットの正規直交化法を適用して

$$N_n = \frac{\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n\rangle T_n}{|\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n\rangle T_n|}, \quad B_n = T_n \times N_n$$

とおく．次に曲率と捩率に相当するものとして, 函数 $\kappa\colon \mathbb{Z} \to (0,\pi)$ および $\lambda\colon \mathbb{Z} \to [-\pi,\pi)$ を

$$\langle T_n, T_{n-1}\rangle = \cos\kappa_n, \quad \langle B_n, B_{n-1}\rangle = \cos\lambda_n, \quad \langle B_n, N_{n-1}\rangle = \sin\lambda_n$$

により定める．離散空間曲線が時間とともに変形していく様子を考えよう．セグメント長が一定 $a_n = a > 0$ であるような離散空間曲線 γ_n の変形を $\gamma_n(t)$ とし, 以下では独立変数 t を書くのは省略する．各セグメントの長さ $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ がこの変形で保存されるための必要十分条件は, 各点の変形方向 $\dot\gamma_n$ が

$$\langle \dot\gamma_{n+1} - \dot\gamma_n,\ \gamma_{n+1} - \gamma_n\rangle = 0 \tag{5}$$

をみたすことである．条件 (5) を連続系にならって等周条件と呼ぶ．以下, 等周条件をみたす変形を考える．さて '捩率' が定数であるとき, すなわち定数 λ が存在してどの時刻でも

$$\langle B_n, B_{n-1}\rangle = \cos\lambda$$

が成り立つとき, 等周変形の方向を

$$\dot\gamma_n = \cos\lambda\, T_n - \cos\lambda \tan\frac{\kappa_n}{2} N_n + \sin\lambda \tan\frac{\kappa_n}{2} B_n$$

と決める．このときフルネ枠場 (T, N, B) を $\mathrm{SU}(2)$ 値の函数 ϕ に変換すると ϕ は

$$\phi_{n+1} = \phi_n L_n, \quad L_n = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}\lambda/2}\cos\frac{\kappa_{n+1}}{2} & -e^{-\sqrt{-1}\lambda/2}\sin\frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ e^{\sqrt{-1}\lambda/2}\sin\frac{\kappa_{n+1}}{2} & e^{\sqrt{-1}\lambda/2}\cos\frac{\kappa_{n+1}}{2} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\dot\phi_n = \phi_n M_n, \quad M_n = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} -\sqrt{-1}\sin\lambda & -e^{-\sqrt{-1}\lambda}\tan\frac{\kappa_n}{2} - \tan\frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ e^{\sqrt{-1}\lambda}\tan\frac{\kappa_n}{2} + \tan\frac{\kappa_{n+1}}{2} & \sqrt{-1}\sin\lambda \end{pmatrix} \tag{7}$$

をみたす．連立方程式 (6)–(7) の両立条件は semi-discrete modified KdV 方程式

$$\dot\kappa_n = \frac{1}{a}\left(\tan\frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan\frac{\kappa_{n-1}}{2}\right) \tag{8}$$

である．以上この節では semi-discrete modified KdV 方程式 (8) によって統制されるような離散空間曲線の等周変形を見た．

注意 2.1 あるいは, 同じ仮定のもとで, 等周変形の方向を

$$\begin{aligned}\dot\gamma_n &= 2\left(\cos\lambda\tan\frac{\kappa_{n+1}}{2}\tan\frac{\kappa_n}{2} + \cos 2\lambda\right)T_n \\ &\quad + \left(\cos\lambda\left(\tan\frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan\frac{\kappa_{n-1}}{2} - \tan^2\frac{\kappa_n}{2}\left(\tan\frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan\frac{\kappa_{n-1}}{2}\right)\right) - 2\cos 2\lambda\tan\frac{\kappa_n}{2}\right)N_n \\ &\quad + \left(\sin\lambda\left(1 + \tan^2\frac{\kappa_n}{2}\right)\left(\tan\frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan\frac{\kappa_{n-1}}{2}\right) + 2\sin 2\lambda\tan\frac{\kappa_n}{2}\right)B_n\end{aligned}$$

と決めれば, 函数 κ は高次の semi-discrete modified KdV 方程式にしたがう．

3. 明示公式

連立方程式 (2)–(3) あるいは連立方程式 (6)–(7) の解 ϕ を明示的に構成することができれば, いわゆる「Sym の公式」によって, 空間曲線の等周変形あるいは離散空間曲線の等周変形に対する明示公式を与えることができる．これらについての詳細は講演で述べる．