平面離散曲線の等角変形と離散Burgers階層 I.

Burgersおよび離散Burgers階層

梶原 健司 (九大IMI)
黒田 利信 (九大数理)
松浦 望 (福岡大理)

概　要

相似幾何の枠組みで平面曲線および平面離散曲線の等角変形はそれぞれBurgersおよび離散Burgers階層の拡張で記述される．本講演ではその準備としてBurgersおよび離散Burgers階層を導入する．

1. Burgers方程式とBurgers階層

Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u\frac{\partial u}{\partial x}$$

はCole-Hopf変換 $u = -(\log q)_x$ によって線形拡散方程式 $q_t = q_{xx}$ に帰着することはよく知られている．これを一般化し，線形方程式の族

$$\frac{\partial q}{\partial t_N} = \frac{\partial^N q}{\partial x^N}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

にCole-Hopf変換を施して得られる非線形偏微分方程式の族をBurgers階層と呼ぶ [1]．$q = e^{-\int u\,dx}$ に注意すると，Burgers階層は次のように表すことができる．

$$\frac{\partial u}{\partial t_N} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial^N}{\partial x^N} e^{-\int u\ dx}\right) e^{\int u\ dx}\right] = K_N[u],$$

$$K_1[u] = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad K_2[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u\frac{\partial u}{\partial x},\ K_3[u] = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u^2\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots.$$

また，$K_N[u]$ の間には次のような関係が成り立つことを簡単に確かめることができる．Ω はBurgers階層の再帰演算子と呼ばれ，Ω^2 は平面曲線の等角変形に自然に現れる．

$$K_N[u] = \Omega K_{N-1}[u], \quad \Omega = \partial_x - u - u_x\partial_x^{-1}.$$

2. 離散Burgers方程式と離散Burgers階層

文献 [2] で取り扱われた離散Burgers方程式

$$\frac{u_n^{m+1}}{u_n^m} = \frac{1 + \frac{\delta}{\epsilon^2}\left(u_{n+1}^m - 2 + \frac{1}{u_n^m}\right)}{1 + \frac{\delta}{\epsilon^2}\left(u_n^m - 2 + \frac{1}{u_{n-1}^m}\right)}, \quad \epsilon,\ \delta:\ \text{定数}$$

は離散Cole-Hopf変換 $u_n^m = \frac{q_{n+1}^m}{q_n^m}$ で線形差分方程式 $\frac{q_n^{m+1} - q_n^m}{\delta} = \frac{q_{n+1}^m - 2q_n^m + q_{n-1}^m}{\epsilon^2}$ に帰着する．これを一般化した次の線形差分方程式の族を考える．

$$\frac{q_n^{m+1} - q_n^m}{\delta} = L^{(N)}[q_n^m], \quad L^{(N)}[q_n^m] = \begin{cases} e^{\frac{\partial_n}{2}}\Delta^N q_n^m & N = 2l+1, \\ \Delta^N q_n^m & N = 2l, \end{cases} \qquad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

本研究は科研費 (課題番号:23340037, 245401013) の助成を受けたものである．

ただし Δ は中心差分作用素 $(e^{\frac{\partial_n}{2}}-e^{-\frac{\partial_n}{2}})/\epsilon$ で，δ, ϵ は差分間隔に相当する定数である．いくつかの $L^{(N)}[q_n^m]$ は次のようになる．

$$L^{(0)}\left[q_n^m\right]=q_n^m,\quad L^{(1)}\left[q_n^m\right]=\frac{q_{n+1}^m-q_n^m}{\epsilon},\quad L^{(2)}\left[q_n^m\right]=\frac{q_{n+1}^m-2q_n^m+q_{n-1}^m}{\epsilon^2},$$
$$L^{(3)}\left[q_n^m\right]=\frac{q_{n+2}^m-3q_{n+1}^m+3q_n^m-3q_{n-1}^m}{\epsilon^3},$$
$$L^{(4)}\left[q_n^m\right]=\frac{q_{n+2}^m-4q_{n+1}^m+6q_n^m-4q_{n-1}^m+q_{n-2}^m}{\epsilon^4}.$$

これに対して離散Cole-Hopf変換を施して得られる非線形偏差分方程式の族を離散Burgers階層と呼ぶことにする．すなわち，

$$\frac{u_n^{m+1}}{u_n^m}=\frac{1+\delta K^{(N)}\left[u_{n+1}^m\right]}{1+\delta K^{(N)}\left[u_n^m\right]},$$

$$K^{(N)}\left[u_n^m\right]=\frac{e^{\frac{\partial_n}{2}}\Delta^N\left(\prod_k^{n-1}u_k^m\right)}{\prod_k^{n-1}u_k^m}\quad(N=2l+1),\qquad\frac{\Delta^N\left(\prod_k^{n-1}u_k^m\right)}{\prod_k^{n-1}u_k^m}\quad(N=2l).$$

$$K^{(0)}\left[u_n^m\right]=1,\ K^{(1)}\left[u_n^m\right]=\frac{1}{\epsilon}\left(u_n^m-1\right),\ K^{(2)}\left[u_n^m\right]=\frac{1}{\epsilon^2}\left(u_n^m-2+\frac{1}{u_{n-1}^m}\right),$$
$$K^{(3)}\left[u_n^m\right]=\frac{1}{\epsilon^3}\left(u_{n+1}^mu_n^m-3u_n^m+3-\frac{1}{u_{n-1}^m}\right),\ldots.$$

構成から直ちに $K^{(N)}[u_n^m]$ は次の関係式を満たすことがわかる．

$$K^{(N)}[u_n^m]=\mathit{\Omega}_n\,K^{(N-1)}[u_n^m],\ \mathit{\Omega}_n=\begin{cases}\mathit{\Omega}_n^{(\mathrm{even})}=\dfrac{1}{\epsilon}\left(1-\dfrac{1}{u_{n-1}^m}e^{-\partial_n}\right) & N=2l,\\[2ex] \mathit{\Omega}_n^{(\mathrm{odd})}=\dfrac{1}{\epsilon}\left(u_n^me^{\partial_n}-1\right) & N=2l+1.\end{cases}$$

$\mathit{\Omega}_n$ を離散Burgers階層の再帰演算子と呼ぶ．また，次式で定義される $\mathit{\Omega}_n^{(2)}$

$$\mathit{\Omega}_n^{(2)}=\mathit{\Omega}_n^{(\mathrm{odd})}\mathit{\Omega}_n^{(\mathrm{even})}=\mathit{\Omega}_n^{(\mathrm{even})}\mathit{\Omega}_n^{(\mathrm{odd})}=\frac{1}{\epsilon^2}\left(u_n^me^{\partial_n}-2+\frac{1}{u_{n-1}^m}e^{-\partial_n}\right),$$

は平面離散曲線の等角変形で自然に現れ，次式が成り立つ．

$$K^{(N)}\left[u_n^m\right]=\mathit{\Omega}_n^{(2)}K^{(N-2)}\left[u_n^m\right].$$

ϵ は離散曲線の等角変形において，離散曲線のセグメント間の角度に相当し，より広いクラスの曲線を扱うには ϵ を n の任意函数に拡張する必要がある．これは，線形差分方程式を差分商（不等間隔差分）を基盤とする方程式に一般化することで可能となる．詳細は講演で述べる．

参考文献

[1] D.V. Choodnovsky and G.V. Choodnovsky, Nuovo Cimento **40B**(1977) 339–353.

[2] K. Nishinari and D. Takahashi, J. Phys. A: Math. Gen. **31**(1998) 5339–5450.