離散mKdV方程式と離散sine-Gordon方程式による空間離散曲線の変形

井ノ口 順一　(山形大理)
梶原 健司　(九大IMI)
松浦 望　(福岡大理)
太田 泰広　(神戸大理)

概　要

離散微分幾何学の観点から, 3次元ユークリッド空間内の離散曲線の離散時間発展を考察する. とくに捩率が一定の離散曲線に対して, 離散mKdV方程式および離散sine-Gordon方程式によって記述されるような離散時間発展を定式化する.

1. はじめに

空間曲線が弧長を保ちつつ形を変えるとき, その変形を等周変形と呼ぶ. 定捩率な空間曲線が定捩率のまま等周変形するときには捩率保存等周変形と呼ぶ. 捩率保存等周変形の仕方はいろいろあるが, とくに曲率の変化がmodified KdV (mKdV) 方程式にしたがうような捩率保存等周変形が知られている [2]. これを離散的な状況に一般化しよう. すなわち, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の '定捩率' な離散曲線がその '弧長' と '捩率' を保ちつつ離散的に動くようすを考察する. そのような離散的変形のなかでも '曲率' の変化が離散ソリトン方程式にしたがうようなものがわれわれの興味の対象である. 本講演ではとくに, 離散mKdV方程式

$$\frac{w_{n+1}^{m+1}}{2} - \frac{w_n^m}{2} = \arctan\left(\frac{b_{m+1}+a_n}{b_{m+1}-a_n}\tan\frac{w_n^{m+1}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{b_m+a_{n+1}}{b_m-a_{n+1}}\tan\frac{w_{n+1}^m}{2}\right) \tag{1}$$

および離散sine-Gordon方程式

$$\frac{w_{n+1}^{m+1}}{2} + \frac{w_n^m}{2} = \arctan\left(\frac{b_{m+1}+a_n}{b_{m+1}-a_n}\tan\frac{w_n^{m+1}}{2}\right) + \arctan\left(\frac{b_m+a_{n+1}}{b_m-a_{n+1}}\tan\frac{w_{n+1}^m}{2}\right) \tag{2}$$

によって記述されるような, 空間離散曲線の離散的等周変形について報告する. これらの差分方程式において a は n の任意函数, b は m の任意函数であり, w が従属変数である. 函数 a, b はそれぞれ n 方向と m 方向の格子間隔を意味している.

2. 空間離散曲線

写像 $\gamma\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{R}^3$, $n\mapsto\gamma_n$ について, どの連続する3点 γ_{n-1}, γ_n, γ_{n+1} も共線でないとき, γ を空間離散曲線という. 空間離散曲線 γ に対して $\epsilon_n = |\gamma_{n+1}-\gamma_n|$ とおき, 弧長函数と呼ぶ. また

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\epsilon_n}, \quad B_n = \frac{T_{n-1}\times T_n}{|T_{n-1}\times T_n|}$$

および $N_n = B_n \times T_n$ と定め, 行列値函数 $\Phi = (T, N, B) : \mathbb{Z}\to \mathrm{SO}(3)$ を γ のフルネ枠と呼ぶ. フルネ枠は, 離散的なフルネ・セレの公式 $\Phi_{n+1} = \Phi_n R_1(-\nu_{n+1}) R_3(\kappa_{n+1})$ をみたす. ただし R_1, R_3 は回転行列

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり, 函数κは$\langle T_n, T_{n-1}\rangle = \cos\kappa_n$で定義される角度, また, 函数$\nu$は$\langle B_n, B_{n-1}\rangle = \cos\nu_n$かつ$\langle B_n, N_{n-1}\rangle = \sin\nu_n$で定義される角度である. さらに函数$\lambda$を$\lambda_n = (1/\epsilon_n)\sin\nu_{n+1}$と定め, これを$\gamma$の捩率と呼ぶ. 次節では, 捩率が定数であるような空間離散曲線に対して, その離散的な等周変形を考える. 記号の便利のために

$$a_n = \left(1 + \tan^2\frac{\nu_{n+1}}{2}\right)\epsilon_n \tag{3}$$

と書いておく.

3. 空間離散曲線の等周変形

空間離散曲線が弧長函数を保ちつつ離散的に形を変えるとき, その離散的変形を等周変形と呼ぶ. いま, 捩率が一定$\lambda_n = \lambda$であるような空間離散曲線γ^0があるとする. このとき, 初期曲線γ^0を定捩率のまま等周変形して, 空間離散曲線の列γ^0, $\gamma^1, \ldots, \gamma^m, \ldots$を構成することができる. これに伴い, 接ベクトル間の角度κやフルネ枠Φはm, nの2変数函数となることに注意する.

定理 (空間離散曲線の空間上の離散mKdV流と離散sine-Gordon流) γ^0を定捩率λの空間離散曲線とする. 空間離散曲線の列$\gamma^1, \gamma^2, \ldots$を

$$\gamma_n^{m+1} = \gamma_n^m + \delta_m\left(\cos w_n^m T_n^m + \sin w_n^m N_n^m\right), \quad \delta_m = \frac{b_m}{1 + (b_m\lambda/2)^2} \tag{4}$$

と定義する. ただし函数wは差分方程式

$$w_{n+1}^m = 2\arctan\left(\frac{b_m + a_n}{b_m - a_n}\tan\frac{w_n^m}{2}\right) - \kappa_{n+1}^m \tag{5}$$

によって定める. ここでa_nは初期曲線γ^0のデータϵ, νから式(3)によって定められる数列である. また, 任意数列b_mと初期値の列w_0^mは$s_n^m := \sin\left(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m - w_{n-1}^m\right)$がすべての$n$について定符号であるように選ぶものとする*. このとき次のことが成りたつ.

1. 離散的変形(4)–(5)は, 定捩率性を保存する等周変形である.

2. フルネ枠Φは差分方程式系$\Phi_{n+1}^m = \Phi_n^m L_n^m$, $\Phi_n^{m+1} = \Phi_n^m M_n^m$をみたす. ただし行列$L_n^m$は

$$L_n^m = R_1(-\nu_{n+1})\, R_3\left(\kappa_{n+1}^m\right)$$

   であり, 行列M_n^mは各mについて次のいずれかで与えられる.

$$M_n^m = \begin{cases} R_3(w_n^m)\, R_1\left(-2\arctan\dfrac{b_m\lambda}{2}\right) R_3\left(w_{n+1}^m + \kappa_{n+1}^m\right) & \text{if } s_n^m > 0, \quad \text{(6a)} \\ R_3(w_n^m)\, R_1\left(2\arctan\dfrac{2}{b_m\lambda}\right) R_3\left(-w_{n+1}^m - \kappa_{n+1}^m\right) & \text{if } s_n^m < 0. \quad \text{(6b)} \end{cases}$$

   行列Mが(6a)のとき, 可積分条件は離散mKdV方程式(1)である. 行列Mが(6b)のとき, 可積分条件は離散sine-Gordon方程式(2)である.

3. 逆構成ができる. すなわち(1)や(2)の解から空間離散曲線の等周変形列が復元される.

4. 公式(4)–(5)で構成される空間離散曲線の列$\gamma = \gamma_n^m$は, $\mathbb{R}^3$内の離散K曲面[3]をなす.

参考文献

[1] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, and Y. Ohta, *Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves*, preprint, `arXiv:1311.4245`.

[2] G. L. Lamb, Jr., *Solitons and the motion of helical curves*, Phys. Rev. Lett. 37 (1976), 235–237.

[3] A. Bobenko and U. Pinkall, *Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation*, J. Diff. Geom. 43 (1996), 527–611.

*実際にこの条件を達成するようなb_m, w_0^mを具体的に与えることができるが, その詳細は講演で述べる.