渦糸方程式の離散化

廣瀬三平 [1], 井ノ口順一 [2], 梶原健司 [3], 松浦望 [4], 太田泰広 [5]
[1] 芝浦工大教育イノベ, [2] 筑波大数理物質, [3] 九大 IMI, [4] 福岡大理, [5] 神戸大理
e-mail : hirose3@shibaura-it.ac.jp

1 概要

渦糸方程式

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} \tag{1}$$

にしたがって運動する空間曲線 γ の曲率を κ とし捩率を λ とすると, 橋本変換の名でよく知られているように, 複素曲率

$$u = \kappa \exp\left(\sqrt{-1}\Lambda\right), \quad \Lambda = \int_{-\infty}^{x} \lambda\, dx$$

は非線形シュレディンガー (NLS) 方程式

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} |u|^2 u \tag{2}$$

をみたす [1]. 空間曲線の形状は曲率と捩率で決まるから (1) と (2) は等価な方程式である. 本講演ではこのことの離散的類似として, 離散 NLS 方程式 [2] による空間離散曲線の離散的変形を考える. すなわち, 離散的な複素曲率 u_n^m を導入して, それが離散 NLS 方程式

$$\begin{aligned} &c^* u_n^{m+1} + c u_n^m \\ &= \left(u_{n+1}^m + u_{n-1}^{m+1}\right)\left(1 + \epsilon^2 \left|u_n^m\right|^2\right) \Gamma_n^m, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{\Gamma_{n+1}^m}{\Gamma_n^m} = \frac{1 + \epsilon^2 \left|u_n^m\right|^2}{1 + \epsilon^2 \left|u_n^{m+1}\right|^2} \tag{4}$$

にしたがって変化するような空間離散曲線の変形を定式化する. ここで c は複素定数

$$c = 1 + \sqrt{-1}\frac{\epsilon^2}{\delta}$$

であり, 星印は複素共役である.

2 離散曲線

写像 $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$, $n \mapsto \gamma_n$ について, どの連続する 3 点 γ_{n-1}, γ_n, γ_{n+1} も共線でないとき, γ を空間離散曲線という. このとき

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|}, \quad B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|},$$

$N_n = B_n \times T_n$ と定め, 行列 $\Phi = [T, N, B]$ を空間離散曲線 γ のフルネ枠という. また, 接ベクトル T_{n-1}, T_n のなす角を κ_n とし, 陪法線ベクトル B_{n-1}, B_n のなす角を ν_n とする. すなわち $\kappa\colon \mathbb{Z} \to (0, \pi)$ と $\nu\colon \mathbb{Z} \to [-\pi, \pi)$ を

$$\langle T_n, T_{n-1}\rangle = \cos\kappa_n, \quad \langle B_n, B_{n-1}\rangle = \cos\nu_n$$

かつ $\langle B_n, N_{n-1}\rangle = \sin\nu_n$ で定義する. また

$$|\gamma_{n+1} - \gamma_n| = \epsilon \tag{5}$$

をみたす空間離散曲線 γ に対して

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\epsilon} \tan\frac{\kappa_n}{2} \exp\left(\sqrt{-1}\Lambda_n\right), \\ \Lambda_n - \Lambda_{n-1} &= -\nu_n \end{aligned}$$

とおいて u を γ の複素曲率と呼ぶ.

3 先行研究

渦糸方程式の離散化としては, 半離散化がよく知られている. たとえば空間変数を離散化して, 性質 (5) をみたす γ に対して

$$\frac{d\gamma_n}{dt} = \frac{2}{\epsilon} \tan\frac{\kappa_n}{2} B_n \tag{6}$$

と変形を定めると, 複素曲率 u は半離散 NLS 方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{du_n}{dt} = &\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\epsilon^2} \\ &+ \left(u_{n+1} + u_{n-1}\right)|u_n|^2 \end{aligned}$$

にしたがって変化し [3], 可積分である. あるいは時間離散化として, 渦糸方程式のベックルント変換 [4] が知られている. 本講演では空間変数と時間変数をともに離散化するが, これに関する先行研究として [5] がある. 文献 [5] では, ある等周等距離変形の合成が (1) の離散化と見なせる, と文章で述べられているものの, 変形の方程式が具体的に書かれていないため, その主張を検証することができない. そこで我々は次節で述べるように, 変形の公式を具体的に与え, 離散 NLS 方程式との関係も明らかにした.

4　空間離散曲線の変形

性質 (5) をみたす空間離散曲線 γ に対してその複素曲率を u とし, 以下に述べる要領で新しい空間離散曲線 $\overline{\gamma}$ を作る．まず正定数 δ, Γ_0 と複素数 $\overline{u}_{-1}$ を固定し, 差分方程式系

$$\begin{aligned} & c^* \overline{u}_n + c u_n \\ & = (u_{n+1} + \overline{u}_{n-1}) \left(1 + \epsilon^2 |u_n|^2\right) \Gamma_n, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} = \frac{1 + \epsilon^2 |u_n|^2}{1 + \epsilon^2 |\overline{u}_n|^2} \tag{8}$$

によって複素数列 $\overline{u}$ を定める．この $\overline{u}$ を

$$\overline{u}_n = \frac{1}{\epsilon} \tan \frac{\overline{\kappa}_n}{2} \exp\left(\sqrt{-1}\, \overline{\Lambda}_n\right)$$

と分解して実数列 $\overline{\kappa}, \overline{\Lambda}$ を定め

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}_n = \gamma_n &+ \frac{2\delta^2}{\epsilon^3} (-1 + G_n) T_n \\ &+ \frac{2\delta^2}{\epsilon^3} \left(\tan \frac{\kappa_n}{2} - q_n G_n\right) N_n \\ &+ \frac{2\delta^2}{\epsilon^3} \left(\frac{\epsilon^2}{\delta} \tan \frac{\kappa_n}{2} - r_n G_n\right) B_n \end{aligned} \tag{9}$$

とおく．ただし

$$\begin{aligned} G_n &= \left(1 + \epsilon^2 |u_n|^2\right) \Gamma_n, \\ q_n &= \tan \frac{\overline{\kappa}_{n-1}}{2} \cos\left(\overline{\Lambda}_{n-1} - \Lambda_n\right), \\ r_n &= \tan \frac{\overline{\kappa}_{n-1}}{2} \sin\left(\overline{\Lambda}_{n-1} - \Lambda_n\right) \end{aligned}$$

である．この変形 $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ は次の命題に述べるような特徴がある．

命題　性質 (5) をみたす初期曲線 γ が遠方で直線状であるとする．このとき初期値 $\overline{u}_{-1}, \Gamma_0$ を適切に選べば, 差分方程式系 (7)–(8) で決まる数列 $\overline{u}, \Gamma$ のそれぞれが遠方で $\overline{u}_n \to 0$ および

$$\Gamma_n \to 1 + \frac{\epsilon^4}{\delta^2} \quad \text{または} \quad \Gamma_n \to 1$$

となるようにできる．そのとき公式 (9) は等周変形を与える．すなわち $\overline{\gamma}$ も $|\overline{\gamma}_{n+1} - \overline{\gamma}_n| = \epsilon$ をみたす．さらに $\overline{u}$ は $\overline{\gamma}$ の複素曲率となる．

定理　命題で述べた変形 $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ を繰り返すことによって, 空間離散曲線の等周変形列

$$\gamma^0 = \gamma,\ \gamma^1 = \overline{\gamma},\ \ldots,\ \gamma^{m+1} = \overline{\gamma^m},\ \ldots$$

ができるが, 対応する複素曲率列 u^m は離散 NLS 方程式 (3)–(4) をみたす．

すなわち, 変形公式 (9) は離散 NLS 方程式と等価であり, この意味で (9) は渦糸方程式の離散化とみなせる．定理の証明の概略を記す．

証明　フルネ枠の列 Φ^m は差分方程式系 $\Phi^m_{n+1} = \Phi^m_n L^m_n$, $\Phi^{m+1}_n = \Phi^m_n M^m_n$ をみたす．これらの行列 L^m_n, M^m_n はそれぞれ SO(3) に属し成分を具体的に書くことができるがここでは省略する．両立条件 $L^m_n M^m_{n+1} = M^m_n L^{m+1}_n$ は離散 NLS 方程式 (3)–(4) である．なお実際に計算する際は, [1] のように, 計算上の便宜としてユニタリ群に値をとるような複素枠を導入するとよい．　□

いくつか補足を述べる．

1) 公式 (9) において連続極限をとれば, 半離散系 (6) を経由して渦糸方程式 (1) が復元される．
2) 渦糸方程式 (1) の場合には NLS 方程式の多重ソリトン解を用いて曲線の位置ベクトルを具体的に書く公式 [6] が知られているが, 公式 (9) に対しても同様の明示公式が得られる．詳細は (9) の数値実験と比較しながら, 講演で述べる．
3) 公式 (9) は等距離変形ではない．文献 [5] との関係を明らかにすることは今後の課題である．

参考文献

[1] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972) no. 3, 477–485.

[2] M. J. Ablowitz and J. F. Ladik, *A nonlinear difference scheme and inverse scattering*, Stud. Appl. Math. **55** (1976) no. 3, 213–229.

[3] A. Doliwa and P. M. Santini, *Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy*, J. Math. Phys. **36** (1995) no. 3, 1259–1273.

[4] C. Rogers and W. K. Schief, *Intrinsic geometry of the NLS equation and its auto-Bäcklund transformation*, Stud. Appl. Math. **101** (1998) no. 3, 267–287.

[5] T. Hoffmann, *Discrete Hashimoto surfaces and a doubly discrete smoke-ring flow*, Oberwolfach Semin. **38** (2008) 95–115.

[6] Y. Fukumoto and T. Miyazaki, *N-solitons on a curved vortex filament*, J. Phys. Soc. Japan, **55** (1986) 4152–4155.