Тема: «Вычисления с плавающей точкой. Суммирование рядов».

Вычисление машинного эпсилон.

Точность плавящей арифметики можно оценить с помощью машинного эпсилон, такого что 1⊕ε> 1.

Оно может отличаться от своего точного определения несколькими степенями двойки.

Существует несколько способов для вычисления значения (или приближенного значения) ε. Таким образом, программа может определять точность машины, на которой она выполняется, во время своего исполнения.

Пример

Важной функцией анализа является показательная функция e^x.Для любого x можно представить сходящийся бесконечный ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Предположим, что наша плавающая система характеризуется параметрами $\beta = 10$ и $t = 5$. Применим ряд для $x = -5.5$.Вот числа, которые мы получим:

$$e^{-5.5} = 1.0000 - 5.5000 + 15.125 - 27.730 + 38.129 - 41.942 +$$
$$+38.446 - 30.208 + 20.768 - 12.692 + 6.9803 - 3.4902 + 1.5997\ldots = +0.0026363$$

Мы ограничились при суммировании 25 членами, так как последующие слагаемые уже не меняют сумму. Но истинный результат $e^{-5.5} = 0.00408677$. Заметим, что некоторые члены на несколько порядков больше конечного результата. Кроме того, четыре старших разряда каждого из восьми членов, превышающих 10 по модулю потеряны. Их следовало брать с дестью значащими цифрами, чтобы получить шесть значащих в ответе. Мы получили катастрофическую потерю верных знаков.

Здесь надо сначала вычислить сумму для $x = 5.5$,а за тем взять обратное число $e^{5.5} = \frac{1}{e^{5.5}} = \frac{1}{1 + 5.5 + 15.125 + \ldots} = 0.0040865$. При таком способе ошибка снижается до 0.007%.

Реальные машинные алгоритмы используют для вычисления e^x начинают с разложения x на целую и дробную часть.

Задания

1. Ряд Тейлора для функции ошибок имеет вид: $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$. Этот ряд сходится для всех x. Напишите программу для вычисления $erf(x)$ посредством этого ряда. Возьмите членов ряда ровно столько, чтобы первый отброшенный член не менял накопленной суммы, будучи добавлен к ней в плавающей арифметике. Исследуйте влияние ошибок округления, сравнивая вычисленную сумму со значением, взятым из таблицы $erf(x)$. Попробуйте $x=0.5;1.0;5.0;10.0.$ Объясните результаты.

2. Вычислите сумму ряда $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+x)}$ для $x=0$ шаг 0.1 до 1.0 с ошибкой, не превышающей $0.5\bullet10^{-8}$. Используйте соотношение $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ для док-ва, что $\varphi(1)=1$. Затем представьте разность $\varphi(x)-\varphi(1)$ рядом, который сходится быстрее исходного ряда, определяющего $\varphi(x)$.

3. Для $|x|\prec 1$ вычислить $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^3+x}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^3-x}}$ с ошибкой по модулю меньшей, чем $e=3\times10^{-8}$.
   А) Покажите, что каждый ряд сходится.
   Б) Сколько примерно членов ряда понадобиться, чтобы просуммировать его с ошибкой по модулю меньшей e.
   В) Предполагая, что каждое слагаемое будет вычислено за 500 микросекунд, оцените сколько времени понадобится, чтобы в обоих рядах просуммировать то число членов, которое определено в пункте Б).
   Г) С помощью алгебраических манипуляций перепишите $s(x)$ так, чтобы его можно был вычислить быстрее.
   Д) Запрограммируйте ваш метод и вычислите $s(x)$ для $x=0.5$ и $x=0.999999999$.

4. Вычислите ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ с ошибкой, меньшей единицы десятого десятичного значащего разряда. *Указание*: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.