Тема: «Обусловленность матрицы».

Некоторые системы линейных уравнений возникают из эксперимента, и тогда подвержены ошибкам наблюдения. А следовательно, при вычислении и ошибкам округления при решении. С точки зрения алгебраической теории, где все числа точные, система линейных алгебраических уравнений либо имеет решение, либо нет. Если определитель системы с ненулевой правой частью равен нулю, то решения не существует, а если не равен нулю – то решение существует и единственное.

При использовании решения систем численных методов ситуация может быть не так проста. Представим, что определитель равен нулю, но в процессе арифметических действий за счет округления компьютер может найти хоть и малое, но ненулевое решение. Тогда есть шанс получить решение системы, у которой его не существует. Или, наоборот, система имеет решение, но погрешности оказываются того же порядка или больше, чем сами решения. Подобные системы называются плохо *обусловленными*, или *неустойчивыми*.

Одной из причин плохой обусловленности является, может быть, большая чувствительность решения системы к малым изменениям элементов системы матрицы A или свободных членов b. Если эти элементы - числа точные, то в этом нет ничего необычного, а если они приближенные, то решение может полностью обесцениться.

При решении плохо обусловленных систем заметно проявляется длина представления мантиссы используемых вещественных чисел. Соответствующая программа отсечения заданного числа байт мантиссы позволяет моделировать ЭВМ с заданной точностью представления вещественных чисел.

Упражнения:

1) Найти решение системы:

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.80 & 0.64 \\ 1.00 & 0.90 & 0.81 \\ 1.00 & 1.10 & 1.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} erf(0.80) \\ erf(0.90) \\ erf(1.10) \end{pmatrix}.$$

Определение функции erf смотрите в ЛР1. Выведите определение обусловленности матрицы и решение x_1, x_2, x_3. Напечатайте также $x_1 + x_2 + x_3$ и сравните ее со значением $erf(1.0)$.Почему эти два числа так близки?

2) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что система $Ax = b$ имеет множество решений. Опишите их.