נושאים מתקדמים באלגוריתמים
הרצאה 1

5 בפברואר 2021

מתן ירושלמי

תוכן העניינים

חלק I

הרצאה 7

1 משפטים על ספקטרום של גרפים

1.1 משפט

יהי $G = (E, V)$ גרף לא מכוון. אזי G רגולרי $\Leftarrow$ מטריצת השכנויות $A = A(G)$ בעלת פירוק ספקטרלי מלא.

הוכחה מהיותו לא מכוון G סימטרי, והערכים במטריצה הם 1 או 0, ובפרט ממשיים. לכן לפי משפט הפירוק הספקטרלי מתקיים הנדרש.

1.2 משפט

$G = (E, V)$ גרף (n, d) רגולרי $\iff$ $\lambda_1(G) = d$, כאשר λ_1 הינו הערך העצמי הגדול ביותר בפירוק הספקטרלי של מטריצת השכנויות $A(G)$.

הוכחה " $\Leftarrow$ ": יהי $\vec{v}$ וקטור שכל הקורדינטות בו שוות לקבוע כלשהו $c \in \mathbb{R}$. לכל כניסה במטריצה יש בדיוק d יציאות שיש בהן 1. כלומר עבור השורה ה-i

$$[A\vec{v}]_i = \sum_{j=1}^{n(=|V|)} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n(=|V|)} a_{ij} c = dc .$$

לפיכך נקבל

$$A\vec{v} = d\vec{v}$$

" $\Rightarrow$ ": טענה 2.10 בספר

1.3 משפט

יהי $G = (E, V)$ גרף (n, d) רגולרי. אזי G קשיר $\iff$ $\lambda_2(G) < d$.

הוכחה " $\Rightarrow$ ": נראה כי אם G לא קשיר, אז $\lambda_2(G) = d$. ראשית לפי המשפט הקודם ידוע כי $\lambda_1 = d$, כלומר d הינו הערך העצמי הגדול ביותר של G. נראה כי $\lambda_2 = \lambda_1$. G לא קשיר, לכן קיימים לפחות שני רכיבי

קשירות, נקרא להם S_1, S_2, בגרף. נסדר את הקודקודים במטריצת השכנויות באופן הבא:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{v_1, \ldots, v_{|S_1|}\right\} \\ S_2 &= \left\{v_{|S_1|+1}, \ldots, v_{|S_1 \cup S_2|}\right\} \\ V \setminus (S_1, S_2) &= \left\{v_{|S_1 \cup S_2|+1}, \ldots, v_n\right\} \end{aligned}$$

כמובן שאם יש שני רכיבי קשירות בלבד אז הקבוצה בשורה האחרונה תהיה ריקה. אז מטריצת השכנויות תהיה מטריצת בלוקים מהצורה:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} S_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ \hline & & & S_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & & ? & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & ? \end{array}\right]$$

כאשר הבלוק השמאלי העליון הוא בגודל $|S_1| \times |S_1|$, הבלוק האמצעי בגודל $|S_2| \times |S_2|$, והבלוק האחרון מגודל $n - (|S_1| + |S_2|)$. ניווכח שהווקטורים u, w המוגדרים על ידי

$$u_i = \begin{cases} 1 & i \leq |S_1| \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$
$$w_i = \begin{cases} 1 & |S_1| < i \leq |S_2| \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הם וקטורים עצמיים עם ערך d. זאת משיקולים קודמים להוכחה הקודמת (ניתן להכפיל ולראות זאת). אז $\lambda_1 = \lambda_2 = d$ ובנוסף $u \perp w$ כי בכל מקום שיש 1 באחד מהם, יש 0 בשני.
" $\Leftarrow$ ": הוכחה בספר.

1.4 משפט

יהי $G = (E, V)$ גרף (n, d) רגולרי. אזי $\lambda_n(G) = -d \iff G$ דו-צדדי.

הוכחה בספר.

1.5 משפט

יהי $G=(E,V)$ גרף (n,d) רגולרי. אזי G דו-צדדי $\Longleftrightarrow$ הספקטרום של G סימטרי (כלומר $\lambda_{n+1-i}=\lambda_i$ לכל $1\leq i\leq n$).

הוכחה בספר.

2 משפט ההרחבה ומשפט הערבוב

שני המשפטים מתייחסים לגרפים (n,d) רגולריים וכך גם הפרמטרים בהם.

2.1 משפט ההרחבה

יהי $G=(E,V)$ גרף (n,d) רגולרי. אזי לכל תת-קבוצה $S\subseteq V$ מתקיים

$$.\left|E\left(S,V\backslash S\right)\right|\geq\left(d-\lambda_2\right)\left|S\right|\frac{n-\left|S\right|}{n}$$

2.1.1 ניסוח שקול

$$.\left|E\left(S,V\backslash S\right)\right|-d\left|S\right|\frac{n-\left|S\right|}{n}\geq-\lambda_2\left|S\right|\frac{n-\left|S\right|}{n}$$

2.1.2 דוגמאות להמחשה

1. במקרה שהגרף לא קשיר $\lambda_2=d$ ולכן כל מה שהמשפט אומר הוא שמכל תת-קבוצה יוצאות לפחות אפס צלעות.
2. במקרה ש-λ_2 קרוב מאוד ל-λ_1 נקבל יחס הרחבה מאוד נמוך מאוד ובמקרה שהם רחוקים נקבל יחס הרחבה גבוה.

2.2 משפט (=למת) הערבוב

יהי $G=(E,V)$ גרף (n,d) רגולרי. נסמן $\lambda=\max\left\{\left|\lambda_2\right|,\ldots,\left|\lambda_n\right|\right\}$. אזי לכל $S,T\subseteq V$ מתקיים $\left|E\left(S,T\right)\right|=d\left|S\right|\frac{\left|T\right|}{n}\pm\lambda\sqrt{\left|S\right|\left|T\right|}$.

2.2.1 ניסוח שקול למשפט הערבוב

$$\left||E\left(S,T\right)|-d\left|S\right|\frac{|T|}{n}\right|\leq\lambda\sqrt{|S|\left|T\right|}$$

הגדרה פער הספקטרלי הינו ההפרש בין $\lambda_1=d$ אל בין $\lambda=\max\left\{|\lambda_2|,\ldots,|\lambda_n|\right\}$. כלומר $\lambda_1-\lambda$.

הערה נבחין כי $\lambda=\max\left\{\lambda_2,-\lambda_n\right\}$ משום שהערכים בספקטרום ממויינים, אבל יותר נוח להסתכל על כל האחרים.

הערה שימו לב ש-S,T לאו דווקא זרות.

אינטואיציה המשפט אומר שלכל שתי קבוצות S,T, מספר הקשתות שעוברות מ-S ל-T הוא פחות או יותר מה שאנחנו מצפים ($d\left|S\right|\frac{|T|}{n}$), עם שגיאה מסויימת $\lambda\sqrt{|S|\left|T\right|}$. המשפט אומר שאם הפער הספקטרלי מספיק גדול, אז הגרף שלנו "יתערבב" יפה, כלומר לא יהיו שינויים גדולים בדלילות הגרף בחלקים שונים שלו. זאת משום שהשגיאה קטנה יותר ככל ש-λ קטן.

הבחנה נבחין כי משפט ההרחבה הוא מקרה פרטי של משפט הערבוב שבו $S=S$, $T=V\backslash S$. בנוסף נבחין כי מקרה זה מעניין במיוחד משום ש-$\partial\left(S\right)=E\left(S,V\backslash S\right)$ וזה מתקשר לנו ליחס הרחבה.

*נציין שבדרך כלל קוראים לו "למת הערבוב לגרפים מרחיבים" או באנגלית Expander Mixing Lemma.

2.3 תזכורות - אלגברה לינארית

הגדרה וקטור אינדיקטור במקרה שלנו הינו וקטור אשר מקבל 1 לכל קודקוד אשר שייך לקבוצה.

תזכורת

$$\vec{x}^tA\vec{y}=\sum_{1\leq i,j\leq n}x_iA_{i,j}y_j$$

תזכורת נורמה סטנדרטית של וקטור $v\in\mathbb{R}^n$ היא

$$\sqrt{\langle v\mid v\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$$

תזכורת נרמול של וקטור - שינוי האורך של הוקטור ל-1 על ידי חילוק כל קורדינטה בנורמה.

תזכורת אורתוגונליות - בעברית ניצבות, היא יחס בין שני וקטורים. באופן גרפי המשמעות היא שהוקטורים ניצבים אחד לשני (90 מעלות). באופן אלגברי המשמעות היא שהמכפלה הפנימית שלהם היא אפס. כלומר, בהנתן מרחב וקטורי V, $u,v\in V$, נסמן $\langle u\mid v\rangle=0\iff u\perp v$.

תזכורת בסיס אורתונורמלי - בבסיס אורתונורמלי כל שני וקטורים בבסיס ניצבים אחד לשני, והנורמה של כל וקטור היא אחד. זה מאוד נוח כי עבור בסיס אורתונורמלי $v_1,\dots,v_n$ של תת-מרחב V ממימד n נקבל

$$\langle v_i \mid v_j\rangle = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}.$$

תזכורת בהנתן בסיס $v_1,\dots,v_n$ של תת-מרחב V, לכל $u\in V$ מתקיים $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$. אם הבסיס אורתונורמלי, אז $\alpha_i=\langle u\mid v_i\rangle$. בנוסף $|u|=\sqrt{\sum(\alpha_j)^2}$.

משפט אי-שוויון קושי-שוורץ - יהיו v,u וקטורים מעל מרחב מכפלה פנימית, אז

$$|\langle u\mid v\rangle|^2\leq\langle u\mid u\rangle\cdot\langle v\mid v\rangle$$

כלומר

$$|\langle u\mid v\rangle|\leq\sqrt{\langle u\mid u\rangle}\cdot\sqrt{\langle v\mid v\rangle}$$

2.4 החצי הראשון של ההוכחה של שני המשפטים

ההוכחה של שני שני המשפטים מתחילה אותו דבר ואז מתפצלת לשניים.

הוכחה יהי $G=(E,V)$ גרף (n,d) רגולרי ותהיינה $S,T\subseteq V$. נסמן ב-$\vec{1}_S,\vec{1}_T$ את וקטורי האינדיקטורים של S ושל T. אז

$$\begin{aligned}\vec{1}_S^t A\vec{1}_T &\underset{\text{תזכורת}}{=}\sum_{u,v\in V}\left(\vec{1}_S\right)_u A_{u,v}\left(\vec{1}_T\right)_v\\ &=\sum_{u,v\in V}\begin{cases}1 & u\in S\wedge(u,v)\in E\wedge v\in T\\ 0 & \text{else}\end{cases}\\ &=|E(S,T)|\end{aligned}$$

לפי המשפטים מ-1 קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ עם ערכים עצמיים $d=\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$. עבור λ_1 נבחר את הוקטור $\vec{1}$, ואחרי נרמול (ראו תזכורת על נורמה של וקטור לעיל) הוא יהפוך להיות $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\vec{1}$.

על-כן קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ו-$\beta_1,\ldots,\beta_n$ כך שמתקיים

$$\vec{1}_S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$
$$\vec{1}_T=\sum_{i=1}^{n}\beta_j v_j$$

אז

$$\begin{aligned}
\left|E\left(S,T\right)\right|=\vec{1}_S^t A\vec{1}_T &= \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)A\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j\right)\\
\text{Linearity} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)\sum_{j=1}^{n}\beta_j A v_j\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)\sum_{j=1}^{n}\beta_j \lambda_j v_j\\
\text{Linearity} &= \sum_{1\le i,j\le n}\alpha_i\beta_i\lambda_j\left\langle v_i \mid v_j\right\rangle\\
\text{Orthonormal Basis} &= \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\lambda_j\\
&= \alpha_1\beta_1\lambda_1+\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\beta_j\lambda_j\\
&= \left\langle \vec{1}_S \mid \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\vec{1}\right\rangle\cdot\left\langle \vec{1}_T \mid \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\vec{1}\right\rangle\cdot d+\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\beta_j\lambda_j\\
\text{indicators} &= \frac{|S|}{\sqrt{n}}\cdot\frac{|T|}{\sqrt{n}}\cdot d+\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\beta_j\lambda_j\\
&= d\left|S\right|\frac{|T|}{n}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\beta_j\lambda_j
\end{aligned}$$

2.4.1 סיום הוכחת משפט ההרחבה

נותר להוכיח

$$\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\beta_j\lambda_j\ge-\lambda_2\left|S\right|\frac{n-|S|}{n}$$

עבור $T = V \backslash S$.

נבחין כי משום ש-$T = V \backslash S$ אז $\vec{1}_T = \vec{1} - \vec{1}_S$ $(*)$. אז

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \beta_j \lambda_j \underset{\text{orthonormality}}{=} & \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left\langle \vec{1}_T \mid v_j \right\rangle \lambda_j \\
(*) = & \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \alpha_j \left\langle \vec{1} - \vec{1}_S \mid v_j \right\rangle \\
= & \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \alpha_j \left[\left\langle \vec{1} \mid v_j \right\rangle - \left\langle \vec{1}_S \mid v_j \right\rangle \right] \\
(**) = & \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \alpha_j \cdot (-\alpha_j) \\
\geq & - \max \{\lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \sum_{j=2}^{n} \alpha_j^2 \\
\text{sorted} = & - \lambda_2 \sum_{j=2}^{n} \alpha_j^2 \\
= & - \lambda_2 \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right) - \alpha_1^2 \right] \\
= & - \lambda_2 \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right) - \left(\left\langle \vec{1}_S \mid \vec{v}_1 \right\rangle \right)^2 \right] = -\lambda_2 \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right) - \left(\left\langle \vec{1}_S \mid \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{1} \right\rangle \right)^2 \right] \\
\text{indicator} = & - \lambda_2 \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right) - \frac{|S|^2}{n} \right] \\
\text{תזכורת אחרונה} = & - \lambda_2 \left[\left\| \vec{1}_S \right\|^2 - \frac{|S|^2}{n} \right] \\
= & - \lambda_2 \left[\left\langle \vec{1}_S \mid \vec{1}_S \right\rangle - \frac{|S|^2}{n} \right] = -\lambda_2 \left[|S| - \frac{|S|^2}{n} \right] \\
= & - \lambda_2 \left[\frac{|S|}{n} \cdot (n - |S|) \right]
\end{aligned}
$$

כנדרש.■

$(**)$ מתקיים כי ידוע ש-$v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{1}$ הינו וקטור עצמי של λ_1, ובנוסף ידוע שלכל $i \neq 1$ מתקיים $\lambda_i \neq \lambda_1$. באלגברה לינארית יש משפט שאומר שוקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים זה מזה אורתוגונליים ולכן $\vec{1} \perp v_i$ לכל $2 \leq i \leq n$.

2.4.2 סיום הוכחת למת הערבוב

נותר להוכיח

$$\left|\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\beta_j\lambda_j\right| \le \lambda\sqrt{|S|\,|T|}.$$

נסמן לשם הנוחות $\vec{\alpha} := \begin{bmatrix}|\alpha_2| & \dots & |\alpha_n|\end{bmatrix}^t, \vec{\beta} := \begin{bmatrix}|\beta_2| & \dots & |\beta_n|\end{bmatrix}^t$ כלומר וקטורי המקדמים בערך מוחלט.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\beta_j\lambda_j\right| &\underset{\triangle\text{ inequality}}{\le} \left(\sum_{j=2}^{n}|\alpha_j\beta_j\lambda_j|\right) \\
&=\sum_{j=2}^{n}|\alpha_j|\,|\beta_j|\,|\lambda_j| \\
&\le\sum_{j=2}^{n}|\alpha_j|\,|\beta_j|\cdot\max\{|\lambda_2|,\dots,|\lambda_n|\} \\
&\overset{\text{def}}{=}\lambda\sum_{j=2}^{n}|\alpha_j|\,|\beta_j| \\
&=\lambda\left\langle\vec{\alpha}\mid\vec{\beta}\right\rangle \underset{(*)}{=} \lambda\left|\left\langle\vec{\alpha}\mid\vec{\beta}\right\rangle\right| \\
\text{schwarz cauchy}\quad &\le\lambda\sqrt{\langle\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}\rangle}\sqrt{\left\langle\vec{\beta}\mid\vec{\beta}\right\rangle} \\
\text{תזכורת אחרונה}\quad &\underset{(**)}{=}\lambda\left\|\vec{1}_S\right\|\left\|\vec{1}_T\right\| \\
&\overset{\text{def}}{=}\lambda\sqrt{\left\langle\vec{1}_S\mid\vec{1}_S\right\rangle}\sqrt{\left\langle\vec{1}_T\mid\vec{1}_T\right\rangle} \\
\text{indicator}\quad &=\lambda\sqrt{|S|\,|T|}
\end{aligned}$$

כנדרש. ■

$(*)$ ערך מוחלט של ערכים מוחלטים

$(**)$ $\forall x\in\mathbb{R}\quad \sqrt{x\cdot x}=\sqrt{|x|\cdot|x|}=|x|$