Esercizi di Elettromagnetismo

svolti durante lo stesso corso per il C.d.L in Fisica nell' a.a. 2015-'16

M. Bauce

1 Elettrostatica

Esercizio 1

Due palline (m = 1 g) cariche della stessa carica q sono appese allo stesso punto O tramite un filo lungo L= 10 cm. All'equilibrio il filo di ciascuna forma un angolo $\theta = 30°$ con la verticale. Calcolare il valore della carica q.

Soluzione 1

Bilanciando le forze lungo l'asse y (verticale):

$$T\cos\theta = F_g \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{F_g}{\cos\theta}$$

e combinandolo nel bilanciamento delle forze lungo l'asse x (orizzontale):

$$T\sin\theta = F_e \qquad \Rightarrow \qquad F_g\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = F_e \ .$$

Utilizzannndo l'equazione di Coulomb per la forze elettrostatica si ha

$$mg\tan\theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0(L\sin\theta)^2}$$

da cui si può ricavare la carica

$$q^2 = mg\tan\theta 16\pi\epsilon_0 L^2\sin^2\theta = 6.3\cdot 10^{-15}\ C^2 \qquad \Rightarrow \qquad q = 7.9\cdot 10^{-8}\ C$$

Esercizio 2

Si considerino due cariche q_1 e q_2 (stesso segno di carica) di cui la prima ferma e la seconda, ad una distanza infinita dalla prima, che si muove in direzione di quella con una velocità iniziale v_∞. Si calcoli la distanza di arresto della seconda carica in funzione delle altre quantità.

Soluzione 2

Ricordando la seconda legge della dinamica, sappiamo che in questo caso

$$m\frac{d^2r}{dt^2 = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{dv}{dt} = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = mv(r)\frac{dv}{dr} = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

che si può riscrivere come

$$v(r)dv = \frac{q_2\ q_1}{\pi\epsilon_0 m}\frac{dr}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v(r)^2}{2} = -\frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r} + C$$

e fissando C all'infinito quale

$$r \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{v_\infty^2}{2}$$

si ha che

$$\frac{v(r)^2}{2} = -\frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r} + \frac{v_\infty^2}{2}\ .$$

Imponiamo che si fermi quando $v(r) = 0$ ottenendo la distanza di arresto

$$0 = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r} = \frac{v_\infty^2}{2}\frac{4\pi\epsilon_0 m}{q_1\ q_2} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{q_1\ q_2}{v_\infty^2 2\pi\epsilon_0 m}$$

Esercizio 3

Calcolare il campo elettrico lungo l'asse passante per il centro di un anello carico (spira) di raggio R.
Basandosi sul risultato ottenuto, considerare un anello di raggio a carico con $Q = 6 \cdot 10^{-8}\ C$ posto in verticale ed una carica $q = 1.5 \cdot 10^{-8}\ C$ e massa $m = 10^{-15}\ kg$ posta lungo l'asse dell'anello ad una distanza $a\sqrt{3}$, inizialmente in quiete. Trascurando la forza peso e considerando solo il moto lungo l'asse dell'anello, calcolare il modulo della velocità della carica al suo passaggio al centro del cerchio.

Soluzione 3

Per questioni di simmetria l'unica componente non nulla del campo elettrico potrà essere quella lungo l'asse dell'anello, che chiameremo x. Definendo come θ l'angolo tra la congiungente il generico punto ed il segmento di anello considerato (ricordando che $x = r \cdot \cos\theta$), vediamo che lungo l'asse il contributo di campo elettrico generato da un segmento con carica lineare λ sarà dato da

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{\lambda R\ d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{r^3}\ .$$

Applicando il principio di sovrapposizione ed integrando lungo tutto l'anello avremo

$$|E_x| = \int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\ d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{r^3} = \frac{\lambda R\ d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{2\epsilon_0}\frac{R}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}\ .$$

Nel caso specifico considerato l'anello avrà raggio a, e la carica partirà ferma ad una distanza pari a $a\sqrt{3}$. L'equazione differenziale del moto sarà quindi

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv(x)\frac{dv}{dx} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

che diventa

$$v(x)dv = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}\ dx$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m}\int\frac{-x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} + C$$

in cui, imponendo che $v(a\sqrt{3})$= 0

$$C = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad v(x)^2 = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{2a}\right] .$$

Il valore della velocità quando la carica passa per il centro dell'anello, ovvero per x=0, vale

$$v^2(0) = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad v(0) = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{2a}} = 2.84\ m/s$$

Esercizio 4

Considerare 4 cariche identiche (*positive*) disposte sul piano (x,y), nei vertici di un quadrato di lato $L = 10\ cm$. Calcolare il campo elettrico generato in un punto dell'asse y, nel caso in cui $|y| > L/2$ oppure $|y| < L/2$ e in un punto dell'asse z, ortogonale al piano in cui si trova il quadrilatero di cariche e passante per il centro di esso.

Soluzione 4

Chiamiamo l_i la distanza di ciascuna carica dal punto considerato nel calcolo del campo elettrico.

CASO A) $|y| > \frac{L}{2}$

Geometricamente si vede che

$$l_1 = l_2 = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{L}{2}\right)^2} \qquad l_3 = l_4 = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{L}{2}\right)^2}$$

da cui consegue che

$$|E_1| = |E_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{l_1^2} \qquad |E_3| = |E_4| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{l_3^2}$$

e per quel che riguarda le componenti, le uniche non nulle, per ragioni di simmetria, saranno in questo caso quelle lungo y

$$|E_{1y}| = |E_1|\cos\theta_1 = |E_1|\frac{\left||y| - \frac{L}{2}\right|}{l_1} = |E_{2y}|$$

$$|E_{3y}| = |E_3|\cos\theta_3 = |E_3|\frac{\left||y| + \frac{L}{2}\right|}{l_3} = |E_{4y}| .$$

Il modulo del campo elettrico totale lungo y sarà, per il principio di sovrapposizione

$$|E| = |E_{1y}| + |E_{2y}| + |E_{3y}| + |E_{4y}| = 2|E_{1y}| + 2|E_{3y}| =$$

$$= \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{l_1^2}\frac{\left||y| - \frac{L}{2}\right|}{l_1} + \frac{q}{l_3^2}\frac{\left||y| + \frac{L}{2}\right|}{l_3}\right] = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{\left||y| - \frac{L}{2}\right|}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{L}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{\left||y| + \frac{L}{2}\right|}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{L}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\right]$$

CASO B) $|y| < \frac{L}{2}$

Geometricamente si vede che

$$l_1 = l_2 = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2} - y\right)^2} \qquad l_3 = l_4 = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2} + y\right)^2}$$

e rispetto al caso precedente cambiano i versi, reciproci a due a due, delle componenti dei campi generati dalle 4 cariche quindi il modulo del campo elettrico totale lungo y sarà

$$|E| = ||E_{1y}| + |E_{2y}| - |E_{3y}| - |E_{4y}|| = 2\,||E_{1y}| - |E_{3y}|| =$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{\left||y| - \frac{L}{2}\right|}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2} - y\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{\left||y| + \frac{L}{2}\right|}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2} + y\right)^2\right)^{3/2}}\right]$$

CASO C) lungo zIn questo caso

$$l = \sqrt{z^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

ed il campo totale sarà pari a 4 volte le componenti dei singoli campi lungo l'asse z, ovvero

$$|E| = 4 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{l^2}\frac{|z|}{l} = \frac{q}{\pi\epsilon_0}\frac{|z|}{l^3} = \frac{q}{\pi\epsilon_0}\frac{|z|}{\left(z^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}}$$

che per $z \gg L$ diventa

$$|E| = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

come ci si poteva aspettare.

Esercizio 5 (ME.SI 1.2)

Considerare 3 cariche identiche, $q = 1\ \mu C$, disposte sui vertici di un triangolo equilatero di lato $d = 10\ cm$. Calcolare la forza elettrostatica che agisce su ciascuna di esse. Se una delle tre cariche viene lasciata libera di muoversi, calcolare l'energia che acquista tale carica quando raggiunge una distanza $r = +\infty$.

Soluzione 5

Per la simmetria del sistema la forza agente sulla carica posta su ciascun vertice del triangolo sarà diretta come la secante il lato opposto. Ad esempio, considerando le cariche 1 e 2 sull'asse x e l'asse y ortogonale a questo e passante per il punto mediano tra le due cariche, avremo che la forza sulla terza carica sarà diretta lungo l'asse y.

$$E_{1y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}\cos 30° = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad E_{2y} = E_{1y}\ .$$

Ricordando la relazione tra forza elettrostatica e campo elettrico si ha dunque che

$$F = qE_{tot} = q2E_{1y} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}\sqrt{3} = 1.55\ N\ .$$

Se la terza carica viene liberata essa si muoverà lungo l'asse y sino a raggiungere l'infinito sotto il lavoro della forza elettrostatica esercitata dalle altre due cariche

$$F = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2\right)^{3/2}} \qquad \Delta E_K = L = \int_{y_0}^{\infty} F \cdot ds$$

$$\Delta E_K = \int_{y_0}^{\infty} \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2\right)^{3/2}} \, dy = -\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2\right)^{3/2}} \right]_{\frac{\sqrt{3}d}{2}}^{\infty} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} = 0.18 \ J \ .$$

Esercizio 6

Calcolare il campo elettrico prodotto da una sfera di raggio R con densità di carica non costante, ma data da $\rho(r) = \alpha/r^2$. (Notare le eventuali differenze rispetto ad una sfera con densità di carica omogenea $\rho_0 = 3\alpha/R^2$.)

Soluzione 6

Come prima cosa si può ricavare la carica totale della sfera

$$Q = \int_0^R \rho(r) \, dV = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 \, dr = 4\pi\alpha \int_0^R \frac{r^2}{r^2} \, dr = 4\pi\alpha R$$

da cui vediamo che $\alpha = Q/(4\pi R)$.

Applicando il teorema di Gauss vediamo che, nel caso in cui $r > R$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi\alpha}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{\alpha R}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

mentre nel caso in cui $r < R$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi\alpha r}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \ .$$

Rispetto al caso di una sfera con densità omogenea vediamo che l'andamento del campo è il medesimo al di fuori della sfera, ovvero proporzionale a r^{-2}, mentre all'interno della sfera il campo decresce ora come r^{-1} mentre nel caso di densità omogenea questo sarebbe stato $E(r) \propto r$

Esercizio 7

Calcolare il rotore del campo della velocità del fluido che scorre tra due piani distanti $2h$, dato dalla parabola di Poiseuille $\vec{V} = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L}(h^2 - y^2)$.

Soluzione 7

Per far pratica sul calcolo dei rotori in coordinate cilindriche, risolviamo il quesito proposto

$$\mathrm{rot}(v(\hat{r})) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \hat{x} \cdot 0 + \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_1 - p_2}{2\mu L}(h^2 - y^2) \right) + \hat{z} \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_1 - p_2}{2\mu L}(h^2 - y^2) \right) \right] =$$

$$= -\frac{p_1 - p - 2}{2\mu L} \frac{\partial}{\partial y}(h^2 - y^2) = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L}(2y) = \frac{p_1 - p_2}{\mu L} y$$

Esercizio 8

Calcolare il campo elettrostatico prodotto da un piano infinito carico (densità di carica superficiale σ) in due modi equivalenti: applicando il principio di sovrapposizione agli elementi infinitesimi del piano ed applicando il teorema di Gauss.

Soluzione 8

Principio di sovrapposizione

Per simmetria il campo totale risultante dovrà essere ortogonale al piano, nella direzione che chiameremo x. Suddividiamo il piano in corone circolari concentriche centrate attorno ad un asse, e dividiamo queste in settori circolari. Il contributo al campo elettrico lungo x di ogni segmento di corona circolare sarà dato da

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 d^2}\cos\alpha \qquad \text{con} \qquad dq = \sigma R dR d\phi$$

ove α è l'angolo tra la congiungente porzione di piano-punto e l'asse x e ϕ è l'angolo azimutale. Per ottenere il campo totale integriamo lungo ciascuna corona e sommiamo le varie corone concentriche, ricordando che

$$R = x\tan\alpha \qquad \frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2\alpha}{x^2} \qquad dR = \frac{dx d\alpha}{\cos^2\alpha}\ ,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{\sigma R\cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma x\tan\alpha\cos\alpha}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos^2\alpha}{x^2}\frac{x d\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi/2} \sin\alpha\ d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Teorema di Gauss

Scegliendo come superficie gaussiana un cilindro ortogonale al piano, con base di raggio r e lunghezza laterale sufficientemente piccola da supporre che il campo elettrico sia ortogonale ad essa, si avrà, in base al teorema di Gauss

$$\Phi(E) = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \qquad 2\cdot E_x \cdot S = 2E_x\pi r^2 = \frac{\sigma\pi r^2}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Esercizio 9

Calcolare il campo all'interno ed all'esterno di un cilindro carico, con densità di carica (non-uniforme) data da $\rho = \rho_0(a - br)$.

Soluzione 9

Applicando il teorema di Gauss ad una superficie gaussiana cilindrica, coassiale all'asse del cilindro carico, di raggio r possiamo distinguere due casi (sia R il raggio del cilindro carico):

$r < R$

Il campo elettrico è radiale quindi nel computo del flusso è non nullo solo quello attraverso la superficie laterale

$$2\pi r L E(r) = \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r'\ dr' \frac{\rho(r')}{\epsilon_0} = \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\int_0^r \rho_0(a - br')r'\ dr' =$$

$$= \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\left[\rho_0 a\frac{r'^2}{2} - \rho_0 b\frac{r'^3}{3}\right]_0^r = \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\left[\rho_0 a\frac{r^2}{2} - \rho_0 b\frac{r^3}{3}\right]$$

da cui si ottiene il campo elettrico

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left[\frac{ar}{2} - \frac{br^2}{3}\right]$$

$\underline{r > R}$

$$2\pi r L E(r) = \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\int_0^R \rho_0(a - br')r'\,dr' = \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\left[\rho_0 a\frac{R^2}{2} - \rho_0 b\frac{R^3}{3}\right]$$

da cui

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left[\frac{aR^2}{2} - \frac{bR^3}{3}\right]\cdot\frac{1}{r}$$

che, come si può vedere, decresce come r^{-1} allontanandosi dall'asse del cilindro.

Esercizio 10

Determinare il moto di un elettrone (particella infinitesima carica negativamente) all'interno di un cilindro carico positivamente in modo omogeneo. (Considerare il moto lungo la direzione radiale, basandosi sulla forza di cui risente l'elettrone.)

Soluzione 10

All'interno del cilindro omogeneamente carico il campo elettrico si può ricavare applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica coassiale

$$2\pi r L E(r) = \pi r^2 L\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0}r\ .$$

Dalla relazione tra campo elettrico e forza elettrostatica si può studiare il moto lungo la direzione radiale, per la quale si ha

$$\frac{F}{m} = \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{e}{m}\frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{e\rho_0}{2m\epsilon_0}r$$

che, poichè è l'equazione di un moto armonico (radiale) con pulsazione

$$\omega^2 = \frac{e\rho_0}{2m\epsilon_0}$$

Esercizio 11

Si considerinino due fili infinitamente estesi, carichi della stessa carica $\lambda = 10^{-8}\ ^{C}/_{m}$, e distanti tra loro d =5 cm. Dopo aver ricavato l'espressione del campo eletrico generato in un generico punto dello spazio, calcolare la forza con cui si respingono.

Soluzione 11

Il campo elettrico generato da un filo carico infinito, diretto ortogonalmente al filo, è dato dall'espressione

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\ .$$

Se, nel piano (x,y) ortogonale ad i fili, poniamo il primo filo nella posizione (0,0) ed il secondo nella posizione (d,0) e ricaviamo, tramite il principio di sovrapposizione, il campo prodotto in un punto generico del piano, di coordinate (x,y)

$$E_x = E_{1,x} + E_{2,x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1}\cos\theta_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2}\cos\theta_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1}\cos\theta_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2}\cos(\pi-\theta_2) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{x}{r_1^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{d-x}{r_2^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{r_1^2} + \frac{x-d}{r_2^2}\right)$$

$$E_y = E_{1,y} + E_{2,y} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1}\sin\theta_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2}\sin\theta_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1}\sin\theta_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2}\sin(\pi-\theta_2) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{y}{r_1^2} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{y}{r_2^2} = \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)$$

ove

$$r_1^2 = x^2 + y^2 \qquad r_2^2 = (x-d)^2 + y^2$$

La forza che il filo 1 esercita sul filo 2 per unità di lunghezza sarà

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{dq}{d\ell}E_{1,x}(d,0) = \lambda\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} = 3.6\cdot 10^{-5}\ N/m$$

Esercizio 12

Dimostrare che, posto un dipolo elettrico in un campo elettrico uniforme E_0, parallelo al momento elettrico di dipolo, esiste una superficie equipotenziale sferica. Calcolare il campo elettrico su tale superficie.

Soluzione 12

Considerando il dipolo orientato lungo l'asse x sappiamo che in un punto generico, il potenziale è

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\ .$$

Per il campo elettrico esterno costante E_0 si può ricavare il potenziale che soddisfi

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla}V_e \equiv E_0\ \hat{x}$$

$$-\frac{dV_e}{dx} = E_0 \qquad -\frac{dV_e}{dy} = 0 = -\frac{dV_e}{dz}$$

da cui

$$V_e = \int_0^x E_0\ dx = -E_0 x + V_0$$

in cui V_0 è una costante arbitraria definita come il potenziale del campo esterno in $x = 0$. Il potenziale complessivo in un generico punto P dello spazio sarà quindi

$$V(P) = V_0 - E_0\ x + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr\cos\theta}{r^3} = V_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2}\ .$$

Cerchiamo la superficie sferica equipotenziale considerando le coordinate sferiche e considerando come ϕ l'angolo di rotazione attorno all'asse del dipolo (x). Il potenziale non dipende da ϕ ed in particolare il sistema che stiamo considerando è invariante per rotazioni in ϕ quindi possiamo considerare la sfera che vogliamo determinare come una circonferenza proiettando il problema in un piano bidimensionale con coordinate (r,θ). La superficie sferica equipotenziale sarà il luogo dei punti dello spazio che soddisfano

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dV}{d\theta} = E_0 r \sin\theta - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\sin\theta}{r^2} = \sin\theta\left(E_0 r - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{r^2}\right) = 0$$

che è soddisfatta per

$$E_0 r = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \Rightarrow \qquad r^3 = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 E_0} \qquad \Rightarrow \qquad r = \left(\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$$

Per calcolare il campo elettrico su tale superficie equipotenziale consideriamo innanzitutto che esso deve essere perpendicolare alla superficie stessa, ovvero essendo questa una sfera avrà solamente componente radiale non nulla. Questa si può calcolare come

$$\vec{E}(r_0) = \left|-\vec{\nabla}V\right|_{r_0}$$

$$E(r_r)\hat{r} = \left|E_0\cos\theta - \frac{qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\cos\theta}{r^3}\right|_{r_0} = E_0\cos\theta + \frac{qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{24\pi\epsilon_0 E_0}{qd}\cos\theta = E_0\cos\theta + 2E_0\cos\theta = 3E_0\cos\theta\,.$$

Questa superficie sferica è quella in cui la componente trasversale del campo prodotto dal dipolo (in generale non solamente radiale) compensa la componente di $\vec{E}_0$ ortogonale a $\hat{r}$ facendo risultare il campo complessivo con sola componente radiale.

Esercizio 13

Si consideri il campo eletrico generato da un anello di raggio R e di carica λ non uniforme, la cui espressione sia data da $\lambda(\phi) = \lambda_0 \sin\phi$ [1] al centro dell'anello stesso. Calcolando il momento di dipolo caratteristico di questa distribuzione di carica, si calcoli il campo elettrico prodotto ad una distanza molto maggiore del raggio dell'anello in particolare lungo i due assi y ed x.

Soluzione 13

Scegliendo gli assi cartesiani in modo convenzionale, l'espressione della densità di carica ci dice che la semicirconferenza corrispondente ad $y > 0$ sarà carica positivamente mentre quella corrispondente a $y < 0$ negativamente. La carica totale dell'anello si può ricavare integrando la carica in ogni contributo infinitesimo:

$$dq = \lambda R\, d\phi = \lambda_0 \sin\phi R\, d\phi \;\Rightarrow\; Q = \int_0^{2\pi} dq = \int_0^{2\pi} R\lambda_0 \sin\phi\, d\phi = -R\lambda_0[\cos(2\pi) - \cos 0] = 0$$

da cui si vede che l'anello ha carica totale nulla. Considerando un segmento infinitesimo di anello che si trova ad un determinato angolo ϕ rispetto all'asse x, il modulo e le componenti del campo elettrico che esso produce al centro dell'anello sono

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(\phi)R\, d\phi}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_0 \sin\phi}{R}\, d\phi$$

[1] Si consideri un sistema cartesiano con assi x ed y e l'angolo ϕ in senso antiorario a partire dall semiasse $x > 0$.

$$dE_x = |d\vec{E}|(-\cos\phi)\hat{x} \qquad dE_y = |d\vec{E}|(-\cos\phi)\hat{y}$$
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_0 \sin\phi}{R}(-\cos\phi\hat{x} - \sin\phi\hat{y})\ d\phi$$

Integrando il contributo di tutti i segmenti

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R}(-\sin\phi\cos\phi\ \hat{x} - \sin^2\phi\ \hat{y})\ d\phi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R}(\sin\phi\cos\phi\ \hat{x} + \frac{1}{2}\ \hat{y} - \frac{1}{2}(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\ \hat{y})\ d\phi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{2\pi}\ \hat{x} + \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{2}\right]_0^{2\pi}\ \hat{y}\right) = \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R}\frac{2\pi}{2}\hat{y} = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}\hat{y}$$

Data la distribuzione di carica del sistema, possiamo calcolare il momento di dipolo di questo, per poi calcolare il campo generato ad una distanza maggiore delle dimensionni dell'anello. In particolare questo si può calcolare in due modi.

Applicando la definizione teorica di momento di dipolo di un sistema (continuo) di cariche

$$\vec{p} = \int_V \vec{d}\ dq = \int_0^{2\pi} (R\cos\phi\ \hat{x} + R\sin\phi\ \hat{y})\ dq = \int_0^{2\pi} (R\cos\phi\ \hat{x} + R\sin\phi\ \hat{y})\,\lambda_0 R\sin\phi d\phi =$$
$$= \lambda_0 R^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos\phi\sin\phi\ d\phi\ \hat{x} + \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\ d\phi\ \hat{y}\right] = \lambda_0 R^2 \left[\frac{\phi}{2}\right]_0^{2\pi} = \lambda_0 R^2\pi\ \hat{y}$$

Possiamo ottenere lo stesso risultato se immaginiamo di suddividere l'anello in sezioni verticali infinitesime e considerando i due segmenti simmetrici rispetto all'asse x, che hanno la stessa quantità di carica ma di segno opposto, come un dipolo (infinitesimo), il cui momento è

$$d\vec{p} = dq \cdot \vec{d} = \lambda(\phi)R\ d\phi \cdot 2R\sin\phi\ \hat{y}$$

ed integrando tutti i dipoli infinitesimi che costituiscono l'anello

$$\vec{p} = \hat{y}\int_0^{\pi} 2\lambda R^2 \sin\phi\ d\phi = \hat{y}\int_0^{\pi} 2\lambda_0 \sin\phi R^2 \sin\phi\ d\phi = \hat{y}2\lambda_0 R^2 \int_0^{\pi} \sin^2\phi\ d\phi =$$
$$= \hat{y}2\lambda_0 R^2 \left[\frac{\phi}{2} - \sin\phi\cos\phi\right]_0^{\pi} = \lambda_0 R^2\pi\ \hat{y}$$

Per calcolare il campo elettrico lungo gli assi ricordiamo che in approssimazione di dipolo il campo in un punto dello spazio identificato dal vettore di posizione $\vec{r}$ il campo generato è

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

quindi lungo l'asse y (l'asse del dipolo)

$$\vec{E}(x=0) = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 y^3} = \frac{2\lambda_0 R^2\pi}{4\pi\epsilon_0 x^3}\ \hat{y} = \frac{\lambda_0 R^2}{2\epsilon_0 x^3}\ \hat{y}$$

mentre lungo l'asse x (trasversale al dipolo e passante per il centro di esso)

$$\vec{E}(y=0) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 x^3} = -\frac{\lambda_0 R^2\pi}{4\pi\epsilon_0 x^3}\ \hat{y} = -\frac{\lambda_0 R^2\pi}{4\pi\epsilon_0 x^3}\ \hat{y}$$

Esercizio 14

Si considerino due piani infiniti con carica superficiale σ_1 e σ_2, distanti tra loro d. Si determini campo e potenziale elettrico prodotti nelle regioni dello spazio definite dai piani. ($\sigma_1 = 17.72\ 10^{-8}$ C/m, $\sigma_2 = \sigma_1/2$, d =20 cm.)

Soluzione 14

Per un piano infinito il campo prodotto, da entrambe le parti, è in modulo $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, rivolto in direzione uscente dal piano. Nella configurazione descritta si avrà quindi

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \left(-\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\right)\hat{x} & = -\frac{3}{4}\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\hat{x} & x < -\frac{d}{2} \\ \left(\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\right)\hat{x} & = \frac{1}{4}\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\hat{x} & -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ \left(\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\right)\hat{x} & = \frac{3}{4}\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\hat{x} & x > \frac{d}{2} \end{cases}$$

quindi il potenziale nelle tre regioni vale

$$V(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}x + C_1 & x < -\frac{d}{2} \\ -\frac{1}{4}\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}x + C_2 & -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ -\frac{3}{4}\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}x + C_3 & x > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Le tre costanti vanno determinate imponendo le opportune condizioni al contorno. Arbitrariamente imponiamo

$$V(x=0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\sigma_1}{4\epsilon_0} + C_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 0$$

Imponiamo quindi la continuità del potenziale sul piano a $x = -d/2$

$$V_{x<-\frac{d}{2}}\left(-\frac{d}{2}\right) = V_{-\frac{d}{2}<x<\frac{d}{2}}\left(-\frac{d}{2}\right)$$

$$\frac{3\sigma_1}{4\epsilon_0}\left(-\frac{d}{2}\right) + C_1 = -\frac{\sigma_1}{4\epsilon_0}\left(-\frac{d}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{\sigma_1 d}{2\epsilon_0}$$

ed analogamente sul piano $x = d/2$

$$V_{-\frac{d}{2}<x<\frac{d}{2}}\left(\frac{d}{2}\right) = V_{x>\frac{d}{2}}\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$-\frac{\sigma_1}{4\epsilon_0}\left(\frac{d}{2}\right) = -\frac{3\sigma_1}{4\epsilon_0}\left(\frac{d}{2}\right) + C_3 \qquad \Rightarrow \qquad C_3 = \frac{\sigma_1 d}{4\epsilon_0}$$

ed il potenziale è quindi

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\left(\frac{3}{2}x + d\right) & x < -\frac{d}{2} \\ -\frac{\sigma_1}{4\epsilon_0}x & -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\left(\frac{d}{2} - \frac{3}{2}x\right) + C_3 & x > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Esercizio 15

Una carica puntiforme q=10^{-6} C è posta nell'origine di un sistema cartesiano. Un dipolo elettrico il cui modulo del momento è $|\vec{p}| = 10^{-15}$ Cm è posto in P, di coordinate (1,0,0). Calcolare forza e momento meccanico che si esercitano sul dipolo se: A) $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{y}$ oppure B) A) $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{x}$

Soluzione 15

Il campo elettrico prodotto dalla carica è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

mentre la forza indotta sul dipolo elettrico in un generico punto dello spazio è

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})$$

Nel caso A) $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{y}$ quindi

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E}) = \vec{\nabla}\left[|\vec{p}|\hat{y}\cdot\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})}{r^3}\right] = |\vec{p}|\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$\vec{\nabla}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)\hat{z} = -\frac{3yx}{r^5}\hat{x} + \frac{r^2-3y^2}{r^5}\hat{y} - \frac{3yz}{r^5}\hat{z}$$

da cui

$$\vec{F} = |\vec{p}|\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left[-3yx\hat{x} + (r^2-3y^2)\hat{y} - 3yz\hat{z}\right]$$

e calcolato in un punto dell'asse x o in particolare nel punto di coordinate (1,0,0) richiesto vale

$$\vec{F}(x,0,0) = |\vec{p}|\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5}r^2\hat{y} = |\vec{p}|\frac{q}{4\pi\epsilon_0|x|^3}\hat{y} \qquad \vec{F}(1,0,0) = |\vec{p}|\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\hat{y} = 0.9\ 10^{-11}N\ .$$

Il momento esercitato sul dipolo è

$$\vec{M} = -\vec{E}\times\vec{p} = -\frac{q|\vec{p}|}{4\pi\epsilon_0}\hat{z}\ .$$

Nel caso B) $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{x}$ quindi

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left[|\vec{p}|\hat{x}\cdot\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})}{r^3}\right] = |\vec{p}|\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

ed analogamente a quanto trovato prima

$$\vec{\nabla}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{r^2-3x^2}{r^5}\hat{x} - \frac{3yx}{r^5}\hat{y} + -\frac{3xz}{r^5}\hat{z}$$

da cui

$$\vec{F} = |\vec{p}|\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left[(r^2-3x^2)\hat{x} - 3yx\hat{y} - 3xz\hat{z}\right]$$

e calcolato in un punto dell'asse x o in particolare nel punto di coordinate (1,0,0) richiesto vale

$$\vec{F}(x,0,0) = |\vec{p}|\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5}(x^2-3x^2)\hat{x} = |\vec{p}|\frac{q\cdot(-2)}{4\pi\epsilon_0|x|^3}\hat{x} \qquad \vec{F}(1,0,0) = -|\vec{p}|\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\hat{y} = -1.8\ 10^{-11}N\ .$$

In questo caso il momento esercitato sul dipolo è nullo poichè $\vec{E}$ e $\vec{p}$ sono paralleli nei punti dell'asse x.

Esercizio 16

Calcolare il momento di dipolo di un sistema composto da una regione contenuta tra due semicirconferenze concentriche di raggi R_1 ed R_2 (3 cm, 5 cm) e l'asse orizzontale con densità superficiale di carica omogenea σ, ed una carica $Q' = -Q$ (ove Q sia la carica totale della regione di piano descritta prima) posta nel centro delle circonferenze. Calcolare la forza esercitata dal settore circolare carico sulla carica Q'.

Soluzione 16

La relazione tra densità di carica della regione descritta e la carica totale di questa, Q, è data da

$$\sigma = \frac{Q}{\Sigma} = \frac{Q}{\left(\frac{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}{2}\right)} = \frac{2Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{\sigma\pi(R_2^2 - R_1^2)}{2}$$

Il momento di dipolo può essere ottenuto, parametrizzando l'elemento di superficie in questione in coordinate polari, come

$$\vec{p} = \int_\Sigma d\vec{p} = \int_\Sigma \vec{d}\, dq = \int_\Sigma \vec{d}\sigma\, d\Sigma = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} (r\cos\phi\hat{x} + r\sin\phi\hat{y})\sigma\; rdr\; d\phi =$$

$$= \sigma\int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr \int_0^{2\pi}(\cos\phi\hat{x}+\sin\phi\hat{y})\sigma\, d\phi = \sigma\int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr\, [-\cos\phi\hat{y}]_0^{2\pi} = 2\sigma\left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2}\hat{y} = \frac{2\sigma}{3}(R_2^3 - R_1^3)\hat{y}$$

che numericamente vale

$$\vec{p} = 4.7\ 10^{-10} Cm\ \hat{y}$$

ed è diretto nel verso positivo dell'asse y. La carica $Q' = -Q$ in (0,0) risente della forza

$$\vec{F} = \int_\Sigma -Q\, d\vec{E} = -Q\int_\Sigma \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}(-\hat{r}) = Q\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{(r\cos\phi\hat{x} + r\sin\phi\hat{y})\sigma}{4\pi\epsilon_0 r^3}\; rdr\; d\phi =$$

$$= \frac{Q\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}\int_0^{2\pi}(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) = \frac{Q\sigma}{2\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{Q\sigma}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\hat{y}$$

Esercizio 17

Due sfere conduttrici cariche, di raggi $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 20$ cm, sono poste a distanza x, molto maggiore dei raggi delle sfere. La prima sfera è isolata ed ha una carica $q_1 = 5\ 10^{-7}$ C, la seconda è mantenuta sl potenziale costante $V_2 = 25\ 10^3$ V (rispetto all'infinito). Calcolare, in funzione di x il potenziale V_1, la carica q_2 sulla superficie della seconda sfera e la forza che agisce tra le due sfere.

Soluzione 17

L'assunzione che $x \gg R_1, R_2$ ci permette di trascurare le cariche indotte, quindi si assume che il potenziale di ciascuna sfera sia la somma del potenziale dovuto alla propria carica e al potenziale generato dall'altra sfera. La configurazione è dunque quella che risolve il sistema

$$\begin{cases} V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 x} \\ V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 x} \end{cases}$$

Questo esplicitando q_2 e sostituendolo nella seconda abbiamo

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0 x \left(V_1 - \frac{q_1}{qpeR_1} \right)$$

$$V_2 = \frac{x}{R_2}\left(V_1 - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \right) + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 x} = V_1 \frac{x}{R_2} - \frac{q_1 x}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 x}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{R_2}{x}\left(V_2 - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 x} \right) + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

e sostituendolo nell'espressione di q_2

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2 \left(V_2 - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 x} \right) = 4\pi\epsilon_0 R_2 V_2 - \frac{q_1 R_2}{x}$$

mentre

$$V_1 = \frac{R_2 V_2}{x} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{x^2} \right) \approx \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{R_2 V_2}{x}$$

ove $R_2/x^2 \to 0$ per $x >> R_2$. Analizzando le dipendenze da x delle espressioni di carica e potenziale trovati si vede che nel limite in cui le sfere siano infinitamente distanti, ovvero non interagenti tra loro, ci si riconduce al caso noto se $x \to \infty$. Nel caso numerico dato nel testo si ha

$$q_2 = 5.6\ 10^{-7} - \frac{10^{-7}}{x}\ C \qquad V_1 = 45\ 10^3 + \frac{5\ 10^3}{x}\ V$$

Esercizio 18

Una carica puntiforme q è posta a distanza d dal centro di una sfera conduttrice scarica e mantenuta a potenziale 0. La distanza d è maggiore del raggio R della sfera. Calcolare la densità di carica indotta sulla sfera.

Soluzione 18

Applicando il metodo delle immagini cerchiamo una carica equivalente q' tale che il sistema (q, q') abbia la superficie di raggio R come superficie equipotenziale a $V = 0$. Poniamo dunque una carica $q' = -y\ q$ (ove il segno meno è posto per indicare che la carica sarà quantomeno opposta a quella data, dovendo risolvere il caso specifico) sulla congiungente il centro della sfera e la carica q, ad una distanza x dal centro della sfera. Calcoliamo il potenziale che il sistema (q',q) produce in un punto della circonferenza di raggio R ed eguagliamolo a zero

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 \ell'} = 0\ .$$

Geometricamente, essendo ℓ ed ℓ' le distanze delle cariche da un punto sulla circonferenza, possiamo scrivere queste come

$$\ell^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta \qquad \ell'^2 = x^2 + R^2 - 2Rx\cos\theta$$

ove θ sia l'angolo tra il punto considerato sulla circonferenza e l'asse congiungente le due cariche. Si avrà quindi

$$0 = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta}} - \frac{qy}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx\cos\theta}} \right)$$

$$q^2\left(x^2+R^2-2Rx\cos\theta\right)=q^2y^2\left(d^2+R^2-2Rd\cos\theta\right)$$

e dovendo valere su tutta la circonferenza, ovvero $\forall\theta$, deve valere separatamente

$$x^2+R^2-y^2d^2-y^2R^2=0 \qquad \text{e} \qquad -2R(x-dy^2)\cos\theta=0$$

$$y^2=\frac{x}{d} \qquad \Rightarrow \qquad x^2-\frac{x}{d}(d^2+R^2)+R^2=x^2-x\left(d+\frac{R^2}{d}\right)+R^2$$

che ha come soluzioni

$$x=\frac{\left(d+\frac{R^2}{d}\right)\pm\sqrt{\left(d+\frac{R^2}{d}\right)^2-4R^2}}{2}=\frac{\left(d+\frac{R^2}{d}\right)\pm\sqrt{d^2+\frac{R^4}{d^2}+2R^2-4R^2}}{2}$$

$$=\frac{\left(d+\frac{R^2}{d}\right)\pm\sqrt{\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2}}{2}=\frac{d+\frac{R^2}{d}\pm\left(d-\frac{R^2}{d}\right)}{2}$$

che ha come soluzioni

$$x=d\ ,\ y=1 \qquad \text{e} \qquad x=\frac{R^2}{d}\ ,\ y=\frac{R}{d}.$$

La prima soluzione è quella in cui la carica q' è uguale e contraria a quella data, posta nella stessa posizione di quella, caso in cui il potenziale si annulla in tutto lo spazio poichè la carica totale è nulla; questa soluzione è banale e va scartata.
La seconda è la soluzione cercata, non banale, e produce il potenziale

$$V(P)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{d^2+r^2-2rd\cos\theta}}-\frac{R}{d}\frac{q}{\sqrt{\frac{R^4}{d^2}+r^2-2r\frac{R^2}{d}\cos\theta}}\right)$$

che si annulla per $r=R$ come desiderato. La componente radiale del campo elettrico sulla superficie sferica è

$$E(R)=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R}\hat{r}=\frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{\sqrt{d^2+r^2-2rd\cos\theta}}-\frac{R}{d}\frac{q}{\sqrt{\frac{R^4}{d^2}+r^2-2r\frac{R^2}{d}\cos\theta}}\right)\hat{r}$$

$$=\frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-(r-d\cos\theta)}{\left(d^2+r^2-2rdcos\theta\right)^{3/2}}-\frac{-(\frac{d^2r}{R^2}-d\cos\theta)}{\left(R^2+\frac{d^2r^2}{R^2}-2rdcos\theta\right)^{3/2}}\right)_{r=R}\hat{r}=$$

$$=\frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{d^2-R^2}{\left(d^2+R^2-2Rdcos\theta\right)^{3/2}}\right)\frac{1}{R}\hat{r}$$

da cui si può ricavare la densità di carica sulla superficie

$$\sigma=\epsilon_0E=-\frac{q}{4\pi R}\left(\frac{d^2-R^2}{\left(d^2+R^2-2Rdcos\theta\right)^{3/2}}\right)$$

che ha una dipendenza dall'angolo θ (prevedibile, poichè l'induzione non è completa e la carica q è in una posizione privilegiata).

Esercizio 19

Un conduttore sferico di raggio R, è al centro di un conduttore sferico cavo di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3. Una carica $+q$ è depositata sul conduttore interno. Calcolare il campo ed il potenziale in funzione della distanza r dal centro e studiare il caso in cui A) si colleghino i due conduttori oppure B) si ponga a potenziale zero (terra) quello esterno.

Soluzione 19

Nel sistema di conduttori considerato si instaura induzione completa quindi all'equilibrio sulle facce del conduttore cavo esterno si avrà una carica $-q$ sulla faccia interna e $+q$ su quella esterna. Le densità superficiali sono uniformi su ogni faccia ma diverse (e proporzionali a R^{-2}). Il potenziale dipende solo da r per la simmetria sferica del sistema quindi il campo elettrico avrà componente significativa solo quella radiale ($\hat{r}$). Applicando il principio di sovrapposizione ed il teorema di Gauss, sapendo che

$$V(r) = \int_r^{\infty} E(r)\, dr \;\propto\; -\frac{q}{r'}\Big|_r^{\infty}$$

per $r < R_i$ il potenziale di un conduttore è ufuale a quello sulla sua superficie.

Quindi per $\underline{0 \leq r \leq R_1}$

$$V(r) = \text{cost} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = V_1$$

ed

$$E(r) = 0 \text{ nel conduttore.}$$

Per $\underline{R_1 \leq r \leq R_2}$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + 0 + 0$$

Per $\underline{R_2 \leq r \leq R_3}$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = V_2 = cost$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + 0 = 0$$

Per $\underline{r \geq R_3}$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ove si può notare che per $r \geq R_3$ si verifiche la stessa condizione che si avrebbe se il guscio esterno non ci fosse, e questo grazie all'induzione completa.

Caso A)

Se si collegano i due conduttori si annullano le carica sulla superficie ad R_1 ed R_2, quindi il campo è nullo entro R_3 poichè la carica netta è nulla, ed il potenziale costante. Per $r \geq R_3$ si ha il solito andamento $E(r) \propto r^{-2}$ e $V(r) \propto r^{-1}$.

Caso B)
Se si pone a zero il guscio esterno questo equivale a porre $V_2 = 0$ quindi

$$R_2 \le r \le R_3 \qquad V = \mathrm{cost} = V_2 = 0 \qquad E(r) = 0$$

$$R_1 \le r \le R_2 \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r \le R_1 \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_1 \qquad E(r) = 0$$

Esercizio 20

Cinque sfere (di spessore trascurabile) conduttrici concentriche di raggi R = 1,2,3,4,5 cm, hanno inizialmente carica nulla. La seconda e la terza sono unite da un filo conduttore ed anche la quarta e la quinta. Sul conduttore più interno si deposita una carica $q = 4\ 10^{-9}\ C$. Calcolare la carica indotta su ogni sfera, la differenza di potenziale tra il più interno ed il più esterno, l'energia elettrostatica totale. (Calcolare il lavoro necessario per portare una carica puntiforme $q = 4\ 10^{-9}\ C$ da $d = 40$ cm dal centro all'infinito.)

Soluzione 20

Posta la carica q sul conduttore più interno, sugli altri per induzione completa si avrà

$$q_1 = q = q_3 = q_5 \qquad q_2 = -q = q_4$$

La differenza di potenziale tra le varie sfere, ed in particolare tra la prima e l'ultima, sarà quindi

$$\Delta V_{1,5} = \Delta V_{1,2} + \Delta V_{2,3} + \Delta V_{3,4} + \Delta V_{4,5} = \Delta V_{1,2} + \Delta V_{3,4} =$$

$$= \frac{Q}{C_{12}} + \frac{Q}{C_{34}} = q\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right] = 2100\ V\ .-$$

L'energia elettrostatica totale del sistema sarà invece

$$U = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,4} + U_{4,5} + U_5 = U_{1,2} + U_{3,4} + U_5 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{12}} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{34}} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_5} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) + \frac{1}{R_5}\right] = 3.5\ 10^{-9}\ J\ .$$

Esercizio 21

In un condensatore (Σ,h) viene inserita parallelamente alle armature una lastra conduttrice a facce piane parallele, ciascuna di area σ e spessa x. Calcolare di quanto varia la capacità del codensatore e quanto lavoro viene speso per inserire la lastra, nelle ipotesi che l'inserimento A) avvenga mantenendo costante la carica sulle armature o B) costrante la d.d.p. tra queste. (Σ=400 cm^2, h= 1 cm, x = 5mm, ΔV= 10^4 V)

Soluzione 21

Per come è costruito il sistema che stiamo considerando, quando la lastra è inserita vi è comunque induzione completa. Prima dell'inserimento la capacità si ottiene da

$$Q = C\Delta V_0 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\epsilon_0 \sigma}{h}$$

Dopo l'inserimento della lastra possiamo considerare il sistema come due condensatori in serie, quindi

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{h}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{h_1}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{h_2}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{h_1 + h_2}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{h - x}{\epsilon_0 \Sigma} \qquad \Rightarrow \qquad C_{eq} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h - x} = C_0 \frac{h}{(h - x)} > C_0$$

da cui si vede che la capacità aumenta poichè $\frac{h}{h-x} > 1$ Il lavoro si può calcolare dalla variazione dell'energia elettrostatica nei due casi considerati.

Caso A)

Consideriamo di caricare il condensatore a ΔV_0, poi lo stacchiamo dal generatore quando ha q_0,V_0,$E_0 = \frac{\Delta V_0}{h}$. L'energia elettrostatica iniziale sarà

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0^2 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \Delta V_0^2 = \epsilon_0 \Sigma h E_0^2 \ .$$

Dopo l'inserzione della lastra la carica rimane costante, quindi anche il campo elettrico rimane costante: cambia ΔV

$$\Delta V = \frac{q_0}{C_{eq}} = \frac{q_0 (h - x)}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{q_0}{C_0} \frac{(h - x)}{h} = V_0 \frac{(h - x)}{h} = E_0 (h - x)$$

che è minore di V_0 poichè $\frac{h-x}{h} < 1$. L'energia elettrostatica in questo caso varrà

$$W_A = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2} C_{eq} \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{(h - x)} \left(\frac{q_0}{\epsilon_0 \Sigma}\right)^2 (h - x)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \Sigma E_0^2 (h - x) = W_0 \frac{h - x}{h} \ .$$

Il lavoro fatto è quello che si oppone alla variazione di energia elettrostatica, quindi

$$L_A = -\Delta W = W_0 - W_A = W_0 \left(\frac{h - h + x}{h}\right) = \frac{\epsilon_0 \Sigma E_0^2 x}{2}$$

che può essere interpretata come l'energia elettrostatica contenuta nello spessore della lastra inserita.

Caso B

In questo caso il condensatore resta ad una d.d.p. costante quindi quello che cambia è la carica sulle facce del condensatore ed il campo elettrico al suo interno. Integrando (virtualmente) il campo elettrico tra le due facce del condensatore, in presenza (o assenza) della lastra abbiamo

$$\Delta V = E_0 h = E_B (h - x) \qquad \Rightarrow \qquad E_B = E_0 \frac{h}{(h - x)} > E_0$$

da cui segue che la carica deve essere variata dello stesso fattore

$$q_B = q_0 \frac{h}{(h - x)} > q_0$$

La capacità del condensatore, in questo caso è aumentata:

$$W_B = \frac{1}{2}C_{eq}\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\Sigma}{(h-x)}E_B^2(h-x)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\Sigma E_0^2\frac{h^2}{h-x} = \frac{1}{2}\epsilon_0\Sigma h E_0^2\left(\frac{h}{h-x}\right) = W_0\left(\frac{h}{h-x}\right)$$

Anche se l'aumento di energia elettrostatica sembra controintuitivo, si ricordi che in questo caso il sistema non è isolato: il generatore compie del lavoro per mantenere la d.d.p costante, che possiamo pensare come quello necessario a spostare le cariche inizialmente poste sulle facce del condensatore, da una all'altra. Questo lavoro si può scrivere come

$$L_{gen} = \Delta q\Delta V = (C_{eq} - C_0)\Delta V^2 = 2\cdot\frac{1}{2}(C_{eq} - C_0)\Delta V^2 = 2\Delta W_B$$

Il lavoro fatto per inserire la lastra sarà ottenuto considerando il lavoro speso per lo spostamento di cariche e la variazione di energia elettrostatica del sistema

$$L_{las} = L_{gen} - \Delta W_B = \Delta W_B = W_B - W_0 = W_0\left(\frac{-h+x+h}{h-x}\right) = W_0\frac{x}{h-x}$$

che vediamo essere diversa dal caso precedente. In entrambi i casi, comunque, la lastra viene attratta all'interno del condensatore.

Esercizio 22

Una carica puntiforme positiva q si trova a distanza x da un piano conduttore indefinito a potenziale zero (massa). Calcolare la forza con cui la carica è attirata dal piano e la densità di carica indotta sul piano.

Soluzione 22

Nel sistema considerato si può utilizzare il metodo della carica immagine per ricavare il campo elettrico prodotto dalla distribuzione di carica indotta e successivamente le quantità richieste. Poichè il piano è infinitamente esteso ci sarà induzione completa tra carica e piano quindi ci aspettiamo che la densità di carica indotta totale sia $-q$.

Se r è la distanza da q di un punto qualsiasi del piano, il potenziale prodotto dalla carica in tale punto sarà

$$V_q(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\ .$$

Una carica immagine q' che generi un potenziale sui punti del piano uguale ed opposto

$$V_i = -V_q(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

per ogni r, sarà una carica q'=-q posta nella posizione speculare a q rispetto al piano. (Una soluzione banale è quella di porre q' coincidente con q, annullando la carica totale del sistema e ottenendo un potenziale nullo non solo sul piano ma anche in tutto lo spazio.)

Nella configurazione non banale, la forza con cui la carica q è attratta dal piano sarà diretta verso il piano (ortogonale ad esso) ed in modulo varrà

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2}\ .$$

Se consideriamo ora il campo eletrico sui punti del piano, questo sarà la somma (vettoriale) del campo prodotto da q e q' (pr. di sovrapposizione). Le componenti del campo elettrico totale tangenti al piano sono nulle, sia per la simmetria del sistema, sia per il fatto che il piano (a V=0) rappresenta una superficie equipotenziale, ed il campo $\vec{E}$ dovrà quindi essere ortogonale ad esso. q e q' danno lo stesso contributo ad $\vec{E}$, che varrà quindi, in modulo,

$$E = 2\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2}\frac{x}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{x}{r^3}$$

ed avrà direzione entrante nel piano (guardandolo dalla posizione di q). Questo è il campo che risolve l'equazione di Poisson con la condizione richiesta che il piano sia a potenziale nullo, quindi sarà quello generato da q e dalla distribuzione di densità di carica indotta. Sulla superficie del piano deve valere

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = -\epsilon_0 E = -\frac{q}{2\pi}\frac{x}{r^3} = -\frac{q}{2\pi}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

ricordando che il campo è diretto in verso opposto alla normale (uscente) del piano $\hat{n}$ ed avendo indicato con R la coordinata radiale sul piano a partire dalla proiezione su questo di q. Si avrà quindi una densità di carica massima in corrispondenza della proiezione di q sul piano, per $R = 0$

$$\sigma_{max} = -\frac{q}{2\pi}\frac{1}{x^3} \ .$$

La carica totale indotta si può ricavare integrando sul piano la densità di carica $\sigma(R)$ in corone circolari concentriche di area $2\pi R\ dR$

$$Q' = \int_\Sigma \sigma\ d\Sigma = \int_0^\infty 2\pi R\left(-\frac{q}{2\pi}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\right)\ dR = q\left[\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\right]_0^\infty = -q$$

come ci si attendeva.

La forza totale esercitata sulla carica q dalla distribuzione di carica indotta sarà data, per ogni corona circolare del piano, da

$$dF = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma d\Sigma}{r^2}\frac{x}{r}$$

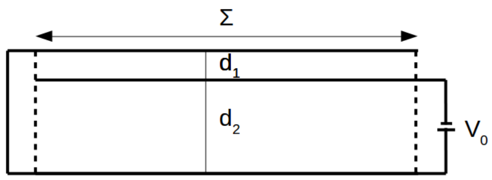
ed integrando sul piano

$$F = \int_0^\infty 2\pi R\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{r^3}\left(-\frac{q}{2\pi}\frac{x}{r^3}\right)\ dR = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty x^2\frac{y}{r^6}\ dR = \frac{q^2x^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{4(x^2+R^2)^2}\right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{(2x)^2}$$

che coincide con quanto già trovato col metodo della carica immagine.

Esercizio 23

Tre fogli conduttori piani e paralleli, di spessore trascurabile, sono collegati come in figura. Il foglio centrale, di massa m=10 g, può muoversi verticalmente restando parallelo agli altri due, la cui distanza è fissa e vale d= 8 mm. Quando la distanza dal foglio superiore è d_1= $d/4$ la carica sul foglio centrale è q=5.9 $10^{-7}C$ e le forze di campo bilanciano la forza peso. Calcolare
a) la superficie Σ,
b) il potenziale V_0 ai capi del generatore.
In seguito si porta il foglio centrale in posizione mediana, si stacca il generatore e si riporta il foglio nella posizione iniziale (d_1=$d/4$). Calcolare
c) la d.d.p finale e
d) il lavoro fatto dalle forze del campo nell'intero processo.



Soluzione 23

Il sistema è equivalente a due condensatori in parallelo con

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d_1} \qquad C_2 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d_2} \qquad C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \Sigma \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) = \frac{16}{3} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d}$$

da cui ricaviamo

$$\Sigma V_0 = \frac{3qd}{16\epsilon_0}$$

All'equilibrio, bilanciando la forza prodotta dalla pressione elettrostatica sopra e sotto il piano con la forza di gravità si ottiene

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2 \Sigma - \frac{1}{2}\epsilon_0 E_2^2 \Sigma - mg = 0 \qquad E_1 = \frac{V_0 d}{d} \qquad E_2 = \frac{V_0 3d}{d}$$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2 16\Sigma}{d^2} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2 16\Sigma}{9d^2} = mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{64\Sigma\epsilon_0 V_0^2}{9d^2} = mg \qquad \Rightarrow \qquad \Sigma V_0^2 = \frac{9mgd^2}{64\epsilon_0}$$

Combinando le espressioni trovate per ΣV_0 e ΣV_0^2 si ottiene

$$V_0 = \frac{mgd^2 9}{64\epsilon_0} \frac{16\epsilon_0}{3qd} = \frac{3mgd}{4q} = 10^3 \ V \qquad \Sigma = \frac{3qd}{16\epsilon_0 V_0} = 0.1 \ m^2 \ .$$

Spostando il piano intermedio a d.d.p. costante, cambia la capacità dei condensatori e la carica sulle loro facce

$$C' = C_1' + C_2' = \frac{4\epsilon_0 \Sigma}{d} \qquad \Rightarrow \qquad q' = C' V_0 = \frac{4\epsilon_0 \Sigma V_0}{d} = 4.4 \ 10^{-7} \ C.$$

Staccando il generatore riportando a $d1 = d/4$, $d_2 = 3d/4$ cambia la d.d.p. ma non la carica totale sul piano intermedio del condensatore (e sulle altre per induzione)

$$V'' = \frac{q'}{C''} = \frac{q'}{C} = \frac{q' 3d}{16\epsilon_0 \Sigma} = 7.45 \ 10^2 \ V \ .$$

Come visto in altri casi, il lavoro delle forze del campo in una trasformazione a d.d.p. costante è dato da $L = \Delta u$, quindi

$$U_1 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{8}{3} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} V_0^2 \qquad U_2 = \frac{1}{2} C' V_0^2 = \frac{2\epsilon_0 \Sigma}{d} V_0^2 \qquad U_3 = \frac{1}{2} C V''^2 = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} V_0^2$$

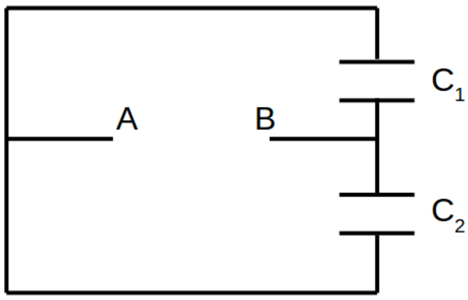
da cui

$$\Delta U_{12} = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} V_0^2 \qquad \Delta U_{23} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} V_0^2$$

$$L = \Delta U_{12} - \Delta U_{23} = -1.8 \ 10^{-5} \ J \ .$$

Esercizio 24

Due condensatori sono collegati come in figura. C_2 ha capacità 10^{-9} F mentre C_1 è un condensatore piano (Σ= 600 cm^3, h= 3 mm) avente aria per dielettrico. Un generatore (V_0= 400 V) è collegato ad A,B, carica i condensatori, e poi viene staccato. Lo spazio tra le armature di C_1 viene riempito con acqua distillata (ϵ_r= 80). Calcolare la variazione di carica sulle facce di C_1, la variazione di d.d.p. ai capi di C_2, il lavoro fatto dalle forze del campo nel processo di riempimento.



Soluzione 24

Il sistema considerato è un parallelo tra i due condensatori di capacità C_2 data e

$$C_1 = \frac{\Sigma\epsilon_0}{h} = 1.8\ 10^{-10}\ F$$

quindi

$$Q_1 = C_1V_0 = 7.1\,10^{-8}\,C \qquad Q_2 = C_2V_0 = 4.0\,10^{-7}\,C \qquad Q = Q_1{+}Q_2 = C_1{+}C_2)V_0 = 4.7\,10^{-7}\,C$$

Inserendo il dielettrico la capacità di un condensatore cambia $C_1 \to C_1'$ ma la carica totale non varia quindi

$$\frac{Q_1'}{\epsilon_r C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} \qquad \Rightarrow \qquad Q_1' = \epsilon_r \frac{C_1}{C_2} Q_2'$$

$$Q = Q_1' + Q_2' = Q_2'\left(1 + \epsilon_r \frac{C_1}{C_2}\right) = Q_2\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad Q_2' = \frac{C_1 + C_2}{C_2 + \epsilon_r C_1}$$

da cui

$$Q_2' = 7.7\,10^{-2}\,Q_2 = 3.0\,10^{-8}\,C \qquad Q_1' = 4.3\,10^{-7}\,C \qquad \Rightarrow \qquad \Delta Q_1 = Q_1'{-}Q_1 = -3.6\,10^{-7}\,C$$

Si può quindi calcolare la variazione di d.d.p.

$$V' = \frac{Q_1'}{C_1'} = 30\ V \qquad \Rightarrow \qquad \Delta V = V_0 - V' = 370\ V$$

Il lavoro fatto dalle forze del campo è pari all'opposto della variazione di energia elettrostatica del sistema quindi

$$L = -\Delta U = W{-}W' = \frac{1}{2}C_1V_0^2{+}\frac{1}{2}C_2V_0^2{-}\frac{1}{2}C_1'V'^2{-}\frac{1}{2}C_2V'^2 = \frac{1}{2}(C_1{+}C_2)V_0^2{-}\frac{1}{2}(C_1'{+}C_2)V'^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V_0^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V_0V' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V_0(V_0 - V') = 8.7\ 10^{-5}\ J\ .$$

Esercizio 25

Lo spazio tra le armature di un condensatore piano (Σ= 0.1 m^2, h= 1 cm) è riempito da un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa varia linearmente da ϵ_1= 3 a ϵ_2= 5 dall'armatura positiva a quella negativa. Calcolare la capacità del condensatore e la densità di carica di polarizzazione se ai capi del condensatore c'è una d.d.p. V_0= 10^3 V.

Soluzione 25

Scegliendo un asse x con lo 0 sulla faccia carica positivamente del condensatore, la costante dielettrica si può scrivere nella forma

$$\epsilon_r(x) = \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h}x = \epsilon_1 + \frac{\Delta\epsilon}{h}x$$

e la capacità del condensatore si può ricavare considerando il sistema come un insieme di condensatori in serie di spessore dx e capacità dipendente dal valore della costante dielettrica in x, ognuno con una capacità

$$dC(x) = \frac{\epsilon_0\epsilon_r(x)\Sigma}{dx} \ .$$

Ricordando che per condensatori in serie il reciproco della capacità è la somma dei reciproci delle capacità parziali, si ha

$$\frac{1}{C} = \int_0^h \frac{1}{dC(x)}\,dx = \int_0^h \frac{h}{\epsilon_0\epsilon_r(x)\Sigma}\,dx = \frac{1}{\epsilon_0\Sigma}\int_0^h \frac{dx}{\epsilon_1 + \frac{\Delta\epsilon}{h}x} = \frac{1}{\epsilon_0\Sigma}\frac{h}{\Delta\epsilon}\left|\ln\left(\epsilon_1 + \frac{\Delta\epsilon}{h}x\right)\right|_{x=0}^{h} =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0\Sigma}\frac{h}{\Delta\epsilon}\ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\epsilon_0\Sigma}{h}\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)} = 350\ pF$$

Sulle armature del condensatore la carica Q e la densità di carica sono rispettivamente

$$Q = CV_0 = 3.5\ 10^{-7}\ C \qquad \sigma_{libere} = \frac{Q}{\Sigma} = 3.5\ 10^{-6}\ C/m^2 \ .$$

Sapendo che $D = \sigma_{libere}$ è costante calcoliamo P che non sarà invece costante

$$P = D - \epsilon_0 E = D\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r(x)}\right) = D\left(1 - \frac{1}{\epsilon_1 + \frac{\Delta\epsilon}{h}x}\right) = D\left(\frac{h(\epsilon_1 - 1) + \Delta\epsilon x}{h\epsilon_1 + \Delta\epsilon x}\right)$$

La densità di cariche di polarizzazione sarà $|\sigma_p| = |P|$ ed in particolare, in corrispondenza delle due facce del condensatore sarà

$$\sigma_p(0) = -\frac{Q}{\Sigma}\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1} = -\frac{2}{3}\frac{Q}{\Sigma} \qquad \sigma_p(h) = \frac{Q}{\Sigma}\frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2} = \frac{4}{5}\frac{Q}{\Sigma}$$

che sono diverse non solo in segno ma anche in modulo. Il fatto che P non sia costante in x genera anche una densità di cariche di polarizzazione

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{d}{dx}P(x) = -\frac{d}{dx}\left(D\frac{h(\epsilon_1 - 1) + \Delta\epsilon x}{h\epsilon_1 + \Delta\epsilon x}\right) = -D\frac{h\Delta\epsilon}{(h\epsilon_1 + \Delta\epsilon x)^2}$$

La carica di polarizzazione totale contenuta all'interno del dielettrico è quindi

$$q_p^{(vol)} = \int_0^h \rho_p = -Dh\Delta\epsilon\int_0^h \frac{dx}{(h\epsilon_1 + \Delta\epsilon x)^2} = Dh\left|\frac{1}{h\epsilon_1 + \Delta\epsilon x}\right|_0^h = D\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right) < 0$$

Combinando i risultati trovati si può verificare che

$$\sigma_p(h) - \sigma_p(0) = -q_p^{(vol)}$$

ovvero che il dielettrico è comunque complessivamente neutro come ci si aspetta.

Esercizio 26

Due condensatori piani eguali, aventi armature quadrate di lato L= 50 cm e distanti h= 5 mm, sono connessi a due generatori, V_1= 500 V e V_2= 1000 V. Una lastra di dielettrico (χ=3, ρ= 1.0 g/cm^3) di dimensioni (50×50×0.5) cm^3 può scorrere senza attrito tra i due condensatori, mantenendo sempre un estremo dentro un condensatore e uno dentro l'altro. Calcolare in quale verso avviene il moto della lastra e il tempo che essa impiega per percorrere un tratto x= 4 cm se a t=0 è ferma. Determinare inoltre la carica di polarizzazione presente sulla lastra, specificando dove è localizzata.

Soluzione 26

In generale, quando inseriamo una lastra per una sua frazione all'interno di un condensatore cambia la capacità di questo:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 L^2}{h} \qquad \rightarrow \qquad C(\epsilon_r, x) = \frac{\epsilon_0 L(L-x)}{h} + \frac{\epsilon_0\epsilon_r Lx}{h} = \frac{\epsilon_0 L}{h}(L - x + \epsilon_r x) = \frac{\epsilon_0 L}{h}(L + \chi x)$$

mantenendo la differenza di potenziale fissata tramite un generatore l'energia elettrostatica varia da U_0 a $U(\epsilon_r, x)$

$$\Delta U = U(\epsilon_r, x) - U_0 = \frac{1}{2}V^2(C(\epsilon_r, x) - C_0) = \frac{V^2}{2}\frac{\epsilon_0 L}{h}(L + \chi x - L) = \frac{V^2}{2}\frac{\epsilon_0 L}{h}\chi x \ .$$

In questo caso sappiamo che il lavoro delle forze elettrostatiche è dato da $L = \Delta U$ (si deve tener conto del lavoro fatto dal generatore che mantiene il potenziale fissato) quindi, dalla definizione di lavoro vediamo che

$$L = \Delta U = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{d}{dx}\left(\frac{V^2 Lx}{h}\epsilon_0\chi\right) = \frac{V^2 L}{2h}\epsilon_0\chi \ .$$

Questo vale in generale nella situazione descritta e, poichè inserendo il dielettrico la capacità del condensatore e l'energia elettrostatica aumentano, il lavoro è positivo e la forze risucchia il dielettrico all'interno del condensatore.

Nel caso specifico, se orientiamo l'asse $\hat{x}$ verso il condensatore attaccato al potenziale V_2 abbiamo

$$F_{TOT} = \frac{V_2^2 L\epsilon_0\chi}{2h} - \frac{V_1^2 L\epsilon_0\chi}{2h} = \frac{L\epsilon_0\chi}{2h}(V_2^2 + V_1^2) > 0$$

quindi la lastra si muove verso il condensatore attaccato alla d.d.p. maggiore con

$$F = 1.0\ 10^{-3}\ N \ .$$

La lastra ha massa

$$m = \rho h L^2 = 1.25\ kg \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{F}{m} = 8.0\ 10^{-4}\ m/s \ .$$

Ricordando la legge oraria del moto uniformemente accelerato

$$x = \frac{1}{2}at^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = 10\ s\ .$$

Le cariche di polarizzazione compaiono sulle facce del dielettrico in ciascun condensatore (nella frazione della lastra che sta all'interno dei condensatori) e vale in modulo

$$\sigma_{p1} = \epsilon_0 \chi E_1 = \epsilon_0 \chi \frac{V_1}{h} = 2.6\ 10^{-6}\ C/m^2$$

$$\sigma_{p2} = \epsilon_0 \chi E_2 = \epsilon_0 \chi \frac{V_2}{h} = 5.3\ 10^{-6}\ C/m^2$$

Esercizio 27

Un condensatore piano ha come dielettrico due lastre di materiali diversi, di spessore x_1=4 mm e x_2=6 mm e costante dielettrica relativa ϵ_{r1}=5 e ϵ_{r2}=3, che lo riempiono completamente ($h = x_1 + x_2$). Calcolare la densità di carica di polarizzazione sulla superficie di separazione tra i due dielettrici se la d.d.p. applicata al condensatore vale V_0= 10^3 V.

Soluzione 27

Nel condensatore il campo è ortogonale alle facce ma la differente costante dielettrica lo rende diverso nei due materiali: alla superficie di separazione c'è una discontinuità. Possiamo applicare sulla superficie di separazione il teorema di Gauss per il vettore di spostamento dielettrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ che dipende dalle sole cariche libere

$$\phi(\vec{D}) = Q_{lib} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D_{n1} = D_{n2}$$

da cui

$$\epsilon_0 E_{n1} + P_{n1} = \epsilon_0 E_{n2} + P_{n2} \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon_{r1} E_{n1} = \epsilon_{r2} E_{n2}$$

ove si è specificato col pedice $_n$ la componente normale alla superficie di separazione dei vettori.

Inoltre, sappiamo che l'integrale del campo elettrico nel cammino da una faccia all'altra del condensatore deve essere pari alla d.d.p. applicata, ovvero

$$E_1 x_1 + E_2 x_2 = V_0\ .$$

Combinando le ultime due equazioni abbiamo

$$E_2 = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_1 \qquad \Rightarrow \qquad E_1 x_1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_1 x_2 = V_0$$

da cui si ricavano

$$E_1 = \frac{V_0}{x_1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} x_2} \qquad E_1 = \frac{V_0}{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} x_1 + x_2}$$

Noto il campo elettrico ricaviamo la densità di cariche di polarizzazione da

$$|\sigma_{p1}| = \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)E_1 \qquad |\sigma_{p2}| = \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E_2$$

e sulla superficie di separazione la densità totale di carica, come somma (algebrica) dei due contributi, sarà

$$\sigma_p = \sigma_{p1} - \sigma_{p2} = \epsilon_0 V_0 \left[\frac{(\epsilon_{r1} - 1)\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2} x_1 + \epsilon_{r_1} x_2} - \frac{(\epsilon_{r2} - 1)\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2} x_1 + \epsilon_{r_1} x_2} \right] = \epsilon_0 V_0 \frac{(\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})}{\epsilon_{r2} x_1 + \epsilon_{r_1} x_2}$$

assumendo ϵ_{r1} sia il dielettrico a contatto con la faccia positiva del condensatore. In questo caso sarà quindi positiva se $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$ e negativa altrimenti.

Nel caso descritto dal problema

$$\sigma_p = 2.5\ 10^{-6} - 2.1\ 10^{-6} = 0.42\ 10^{-6}\ C/m^2\ .$$

Esercizio 28

Lo spazio tra le armature di un condensatore piano poste in verticale (distanti h=2 mm) è parzialmente riempito da un liquido (ϵ_r=28) di densità ρ= 0.8 g/cm^3. Calcolare di quanto si alza il liquido se si collegano le armature ad un generatore (V_0= 2.0 10^3 V).

Soluzione 28

Definiamo un asse y orientato verticalmente, con verso positivo verso l'alto e lo 0 alla base di una faccia del condensatore. Quando il liquido arriva ad una certa quota y il condensatore si può considerare come un parallelo di condensatori che ha una capacità equivalente pari a

$$C_{TOT} = \frac{\epsilon_0 b(a-y)}{h} + \frac{\epsilon_0 b y}{h}$$

se a,b sono le dimensioni del condensatore lungo l'asse y e ortogonalmente ad esso, rispettivamente.

Applicando la d.d.p. l'energia elettrostatica del sistema è

$$U(\epsilon_r, y) = \frac{\epsilon_0 b(a-y)}{h}V_0^2 + \frac{\epsilon_0 b y \epsilon_r}{h}V_0^2 = \frac{\epsilon_0 b}{h}V_0^2[a - y + \epsilon_r y]$$

La forza con cui il dielettrico viene risucchiato all'interno del condensatore si può ricavare come variazione infinitesima di energia elettrostatica al variare di un infinitesimo Δy

$$F_y = \frac{d}{dy}U(\epsilon_r, y) = \frac{\epsilon_0 b}{h}V_0^2(\epsilon_r - 1)\ .$$

Quando il liquido si alza di una quota y, rispetto a quella di partenza y_0 la forza elettrostatica dovrà bilanciare la forza peso del volume di liquido sollevato, ovvero

$$F_y = mg \qquad \Rightarrow \qquad \rho g(y - y0)bh = \frac{\epsilon_0 b}{h}V_0^2(\epsilon_r - 1) \qquad \Rightarrow \qquad y - y_0 = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)V_0^2}{2\rho g h^2} = 15.22\, mm\ .$$

Esercizio 29

Un condensatore sferico (R_1=5 cm, R_2=10 cm) ha l'intercapedine riempita di un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa varia secondo la legge $\epsilon_r(r) = \frac{a}{r}$, con a=0.2 m. Sulla sfera interna c'è la carica q=10^{-9} C mentre l'armatura esterna è a potenziale pari a zero Calcolare il potenziale a una distanza r dal centro e determinare le densità delle cariche di polarizzazione.

Soluzione 29

Poichè E e P dipendono dalla costante dielettrica, variabile, conviene considerare inizialmente il campo $\vec{D}(r)$ che dipende dalle sole cariche libere. Per questo il teorema di Gauss ci dice che ad un generico r nell'intercapedine vale

$$4\pi r^2 D(r) = q \qquad \Rightarrow \qquad \vec{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Il campo elettrico vale invece

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon_0 \epsilon_r(r)} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r(r) r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a r}\hat{r}$$

quindi la differenza di potenziale tra le due superfici del condensatore sarà

$$V_1 - V_2 = V_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a r}\, dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Analogamente, ad un generico r il potenziale può essere calcolato come differenza rispetto al potenziale del guscio esterno, che è messo a terra

$$V(r) = \int_{r}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a r}\, dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{R_2}{r}\right)$$

La densità di carica di polarizzazione si calcola a partire dal vettore di polarizzazione

$$\vec{P}(r) = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r(r)}\right)\vec{D}(r) = \left(1 - \frac{r}{a}\right)\frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi a}\frac{a-r}{r^2}\hat{r}$$

da cui vediamo che la densità delle cariche di polarizzazione in corrispondenza delle due facce del condensatore valgono

$$\sigma_p(R_1) = -|P(R_1)| = -\frac{q}{4\pi a}\frac{a-R_1}{R_1^2} \qquad \sigma_p(R_2) = |P(R_2)| = -\frac{q}{4\pi a}\frac{a-R_2}{R_2^2}$$

ed integrate su ciascuna superficie

$$q_p(R_1) = 4\pi R_1^2 \sigma_p(R_1) = -\frac{q}{a}(a-R_1) = -0.75\, 10^{-9}\, C \qquad q_p(R_2) = 4\pi R_2^2 \sigma_p(R_2) = \frac{q}{a}(a-R_2) = 0.5\, 10^{-9}\, C\,.$$

Poichè il dielettrico non è omogeneo si induce una carica di polarizzazione all'interno del suo volume, la cui densità è data da

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 P(r) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{q(a-r)}{4\pi a r^2}$$

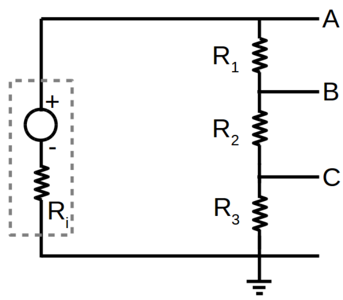
e che integrata in tutto il volume da

$$q_p^{vol} = \int_V \rho_p(r)\, dV = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho_p(r) r^2\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{a} dr = \frac{q}{a}(R_2 - R_1)$$

che si vede essere uguale ed opposta alla carica che si distribuisce sulle facce interne ed esterne dell'intercapedine di dielettrico.

Esercizio 30

Il circuito in figura è alimentato con un generatore reale, con fem V_0=100 V e una resistenza interna R_i= 10 Ω. Le altre resistenze del circuito valgono: R_1= 1.0 $k\Omega$, R_2= 1.5 $k\Omega$, R_3= 2.0 $k\Omega$. Calcolare:
a) il potenziare rispetto a terra dei punti A, B, C
b) la tensione ai capi del generatore reale



Soluzione 30

La differenza di potenziale rispetto alla terra dei punti A, B, C si ottiene ricavando innanzitutto la corrente che scorre nelle resistenze del circuito, poste in serie

$$V_0 = i(R_1+R_2+R_3+R_i) \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{V_0}{(R_1+R_2+R_3+R_i)} \approx \frac{V_0}{(R_1+R_2+R_3)} = 22.2\, mA$$

Procedendo a ritroso

$$V_C = iR_3 = V_0 \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} = 44.4\ V$$

$$V_B - V_C = iR_2 \qquad \Rightarrow \qquad V_B = V_0 \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} = 77.7\ V$$

$$V_A - V_B = iR_1 = V_0 = 100V$$

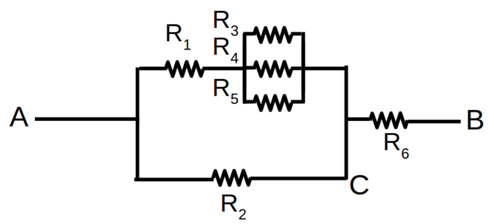
La d.d.p. ai capi del generatore è invece

$$\Delta V_{reale} = V_0 - R_i i = V_0 - V_0 \frac{R_i}{R_1+R_2+R_3} = (100 - 0.22)\ V$$

Esercizio 31

Le resistenze del circuito in figura hanno valori R_1= 3 Ω, R_2= 20 Ω, R_3= 12 Ω, R_4= 6 Ω, R_5= 4 Ω, R_6= 5 Ω e la d.d.p tra A e B è ΔV= 5.4 V.

Calcolare:
a) il valore della resistenza vista ai capi del circuito (A,B)
b) la corrente che circola in ciascuna resistenza
c) la d.d.p. su ciascuna resistenza



Soluzione 31

Ricordando le regole per combinare le resistenze in serie ed in parallelo

$$R_{serie} = R_1 + R_2 \qquad R^{-1}_{parall} = R^{-1}_1 + R^{-2}_2$$

si ha

$$R_{eq} = R_6 + \left(\frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right)^{-1} \right)^{-1} = 9\ \Omega\ .$$

La corrente che passa complessivamente tra A e B sarà quindi

$$i_{TOT} = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = 0.6\ A$$

da cui si ricava, in modo sistematico

$$i_6 = i_{TOT} = 0.6\ A \qquad \Delta V_6 = R_6 i_6 = 3V$$

$$\Delta V_2 = \Delta V - \Delta V_6 = 2.4\ V \qquad i_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2} = 0.12\ A$$

$$i_1 = i_{TOT} - i_2 = 0.48\ A \qquad \Delta V_1 = i_1 R_1 = 1.44\ V$$

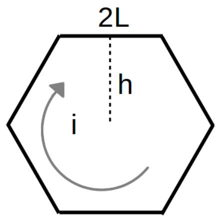
$$\Delta V_3 = \Delta V_4 = \Delta V_5 = \Delta V - \Delta V_6 - \Delta V_1 = 0.96\ V$$

$$i_3 = \frac{\Delta V_3}{R_3} = 0.08\ A \qquad i_4 = \frac{\Delta V_4}{R_4} = 0.16\ A \qquad i_4 = \frac{\Delta V_4}{R_4} = 0.24\ A$$

2 Magnetostatica

Esercizio 32

Una spira conduttrice, a forma di esagono regolare di lato $2L$=20 cm, è percorsa da una corrente i=12 A. Determinare:
1) la f.e.m. necessaria a mantenere la corrente sapendo che la spira è composta da un filo di rame di diametro d=1 mm (ρ_{Cu}=1.67$\cdot$ 10^{-8} Ωm).
2) Il campo magnetico generato al centro della spira.



Soluzione 32

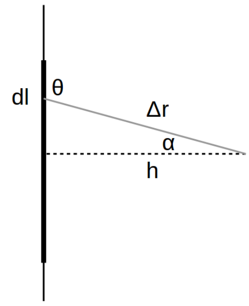
La resistenza del filo è data da

$$R = \rho_{Cu} \frac{6 \cdot 2L}{\pi(d/2)^2} = 1.67\ 10^{-8} \frac{60.2}{\pi(5\ 10^{-4})^2} = 25.5\ m\Omega\ ,$$

di conseguenza

$$V = iR = 12\ A\ 25.5\ 10^{-3}\ \Omega = 0.3\ V\ .$$

Il campo da ciascun lato è quello prodotto da un filo finito, a distanza h dal punto mediano del lato. Schematizzando il problema come in figura



$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{dl' \sin\theta}{|\Delta r|^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dl' \cos\alpha}{|\Delta r|^2}$$

che, parametrizzando,

$$\Delta r = \frac{l'}{\sin\alpha}, \qquad l' = r\tan\alpha, \qquad \Delta r = \frac{r}{\cos\alpha}, \qquad dl' = \frac{r}{\cos^2\alpha}\ d\alpha,$$

diventa

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{r\ d\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha} \frac{\cos^2\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos\alpha\ d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} (\sin\alpha)_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}$$

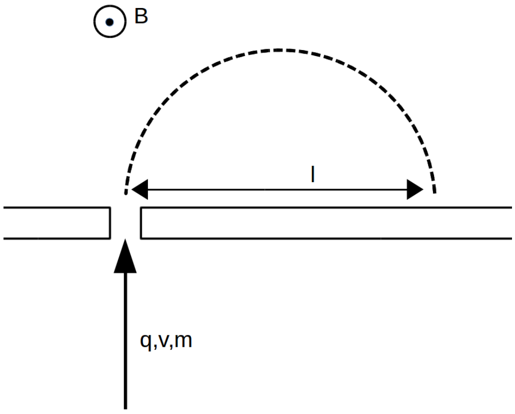
ed il campo prodotto dai 6 lati diventa quindi

$$B_6 = \frac{6\mu_0 i}{4\pi h} = \frac{\mu_0 i\sqrt{3}}{2\pi L} = 41.6\ 10^{-6}\ T,$$

in cui si è tenuto conto che per l'esagono regolare in questione $h = L\sqrt{3}$

Esercizio 33

Chiamiamo spettrometro di massa un sistema costituito da una regione di spazio in cui sia presente un campo magnetico costante, all'interno del quale possono entrare da una fessura particelle cariche che abbiano determinate m, q, $\vec{v}$. Calcolare:
a) la posizione l a cui sbattono contro la parete in funzione delle proprietà della particella
b) qual'è la discriminazione sulle variabili m, q, v in funzione della precisione con cui si determina l.



Soluzione 33

Entrando nella regione in cui è presente il campo magnetico le particelle cariche risentono della forza di Lorentz che le fa curvare nel piano ortogonale a $\vec{B}$

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \ .$$

Se $\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{B}$ il moto che ne risulta è circolare ed uniforme, in cui la forza di Lorentz è la forza centripeta, e sappiamo che per questo valgono le seguenti relazioni tra campo, velocità e raggio di curvatura

$$\vec{F}_{Lorentz} = m\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad qvB = m\frac{v^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{mv}{qB}$$

da cui risulta che la particella carica andrà a sbattere contro la parete nel punto

$$l = 2R = \frac{2mv}{qB}$$

Se ci sono due tipi di particelle con stessa carica e velocità ma diversa massa, siano queste m_1 e m_2, avremo

$$l_1 = \frac{2m_1 v}{qB} \qquad l_2 = \frac{2m_2 v}{qB} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta l = l_2 - l_1 = \frac{2v}{qB}\Delta m = \frac{l_1}{m_1}\Delta m \ .$$

Se invece queste hanno stessa carica e massa, ma diverse velocità v_1 e v_2, avremo

$$l_1 = \frac{2mv_1}{qB} \qquad l_2 = \frac{2mv_2}{qB} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta l = \frac{2m}{qB}\Delta v = \frac{l_1}{v}\Delta v \ .$$

Da ultimo, se queste hanno stessa velocità e massa, ma diverse cariche q_1 e q_2, avremo

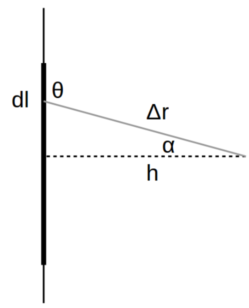
$$l_1 = \frac{2mv}{q_1 B} \qquad l_2 = \frac{2mv}{q_2 B} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta l = \frac{2mv}{B}\left(\frac{q_1 - q_2}{q_1 q_2}\right)$$

Esercizio 34

Si calcoli come estensione generale di un esercizio già visto il campo al centro di una spira di forma poligonale regolare di n lati, inscrivibile in una circonferenza di raggio R.

Soluzione 34

Il campo da ciascun lato è quello prodotto da un filo finito, a distanza h dal punto mediano del lato. Schematizzando il problema come in figura



$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{d\vec{l'} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta r|^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dl' \sin\theta}{|\Delta r|^2}$$

che, parametrizzando,

$$l' = \Delta r \sin\beta = x\tan\alpha \qquad \Rightarrow \qquad dl' = \frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha \qquad \Delta r = \frac{h}{\cos\alpha}$$

diventa

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dl'\cos\alpha}{|\Delta r|^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{h}{\cos^2\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{h^2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}}\cos\alpha\, d\alpha\ .$$

Per un poligono regolare di n lati

$$\tan\alpha_{max} = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = -\tan\alpha_{min} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_m in = \frac{\pi}{n},\ h = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\ ,$$

quindi

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi h}2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$B_n = nB_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi h}n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

che nel limite $n \to \infty$

$$\tan\left(\frac{a}{n}\right) \to \frac{a}{n} \qquad \Rightarrow \qquad B_\infty = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

che corrisponde al caso già visto del campo al centro di una spira di raggio R.

Esercizio 35

Tre conduttori rettilinei e di lunghezza infinita giacciono sullo stesso piano (x,y) con il conduttore centrale che coincide con l'asse x. La distanza tra fili contigui è d=0.1 m. Il conduttore centrale è percorso da una corrente i_1=1 A nel verso delle x crescenti, mentre i due laterali sono percorsi ciascuno da $i_2=\frac{5}{4}$ A nel verso opposto. Determinare:

a) Il campo magnetico generato dai conduttori in P_1=(0,2d,0)

b) Il campo magnetico generato dai conduttori in P_2=(0,0,2d)

c) La forza per unità di lunghezza sul conduttore centrale.

Soluzione 35

Un filo infinito percorso da corrente produce un campo magnetico che in modulo vale

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

e nel caso considerato il campo magnetico totale si può calcolare come somma dei tre contributi di fili a diversa distanza dal punto desiderato.

Nel punto P_1 il campo magnetico ha solo componente lungo $\hat{z}$

$$B(P_1) = B_z(P_1) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi 2d} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi 3d} = \frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{i_1}{2} - i - 2\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\mu_0}{2\pi d} - \frac{2}{6} = -6.7\,10^{-7}\,T\,.$$

Nel punto P_2 si può osservare che il filo posto a $y = 0$ produce un campo magnetico diretto lungo $\hat{y}$ nel verso negativo dell'asse; il filo posto in $y = -d$ produce un campo magnetico con una componente nel verso positivo dell'asse $\hat{y}$ ed una nel verso negativo dell'asse $\hat{z}$; il filo posto in $y = d$ produce un campo magnetico con una componente nel verso positivo dell'asse $\hat{y}$ ed una nel verso positivo dell'asse $\hat{z}$. Per costruzione, e per la simmetria del problema, si può vedere che le componenti lungo $\hat{z}$ dei campi magnetici prodotti dai fili in $y = -d$ ed $y = d$ sono uguali ed opposte, quindi si annullano. Per le stesse considerazioni le componenti lungo $\hat{y}$ prodotte da quei due fili sono identiche (e concordi). Come risultato, il campo totale avrà sola componente lungo $\hat{y}$

$$B(P_2) = B_y(P_2) = 2\frac{\mu_0 i_2}{2\pi\sqrt{(2d)^2 + d^2}}\cos\alpha - \frac{\mu_0 i_1}{2\pi 2d} = \frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{2i_2}{\sqrt{5}}\cos\alpha - \frac{i_2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{4i_2}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi d} = 10^{-6}\,T$$

La forza sul conduttore centrale non può che essere nulla nulla per la simmetria dei due fili esterni (si provi a fare un disegno della direzione dei contributi del campo prodotto da ciascuno dei fili esterni in un punto del filo centrale).

Esercizio 36

Tre fili conduttori rettilinei paralleli, posti nello stesso piano, sono disposti ad una distanza d= 10 cm l'uno dall'altro. Una spira quadrata di lato L=20 cm giace nel piano dei tre fili, anch'essa a distanza d dal filo più vicino. La spira ha resistenza R. I tre fili sono percorsi dalle correnti i_1 = 100 A, i_2=$i_0 e^{-t7\tau}$ con i_0=300 A e τ= 10 s, i_3= 200 A. Considerando d=10 cm, calcolare:

a) Il campo magnetico in A= centro della spira dovuto ai tre fili a $t = 0$

b) La forza per unità di lunghezze sul filo terzo filo, il più vicino alla spira, a t=0 (trascurando l'apporto della spira)

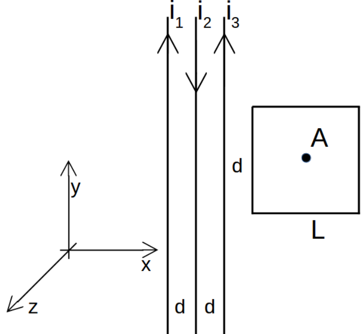
(c) La resistenza della spira sapendo che a t=0 la corrente indotta vale i_s=5.5 10^{-7} A.)

(d) La carica totale circolata nella spira.)

(e) La risultante delle forze sulla spira a t=∞.)

Soluzione 36

Risolviamo solamente i primi due quesiti, poichè i successivi richiedono conoscenze non ancora viste a lezione.



Il campo magnetico al centro della spira dovuto ai tre fili si ricava, come visto in precedenza, con il principio di sovrapposizione

$$B_A(t=0) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi 4d} + \frac{\mu_0 i_2(t=0)}{2\pi 3d} - \frac{\mu_0 i_3}{2\pi 2d} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{i_0}{3} - \frac{i_1}{4} - \frac{i_3}{2}\right) = 5.0\ 10^{-5}\ T\ .$$

Per calcolare la forze sul terzo filo a $t = 0$ calcoliamo innanzitutto il campo magnetico prodotto dagli altri due in corrispondenza di esso:

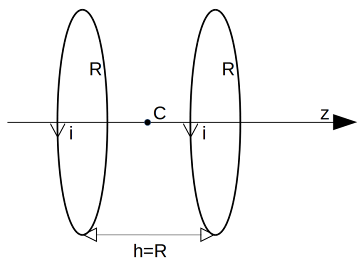
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{i_1}{2} - i_2(t=0)\right)\hat{z} = -\frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{i_1}{2} - i_0\right)\hat{z} = 5.0\ 10^{-4}\ T\ .$$

Ricordando l'espressione per la forza di cui risente un filo percorso da corrente in presenza di un campo magnetico

$$d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B} = i\ dl\ \hat{y} \times \vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\vec{F}}{dl} = -i_3\frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{i_1}{2} - i_0\right)\hat{x} = 0.1\ N/m\ vx$$

Esercizio 37

Due spire circolari identiche, di raggio R, distanti tra loro $h = R$, sono percorse da una corrente i nello stesso verso. Calcolare l'espressione del campo magnetico sull'asse delle spire, nel punto mediano C. Calcolare inoltre il campo sull'asse z sviluppandolo in serie attorno a C e considerando i primi tre termini dello sviluppo.



Soluzione 37

L'espressione del campo magnetico sull'asse di una spira percorsa da corrente è già stata ricavata, è diretto lungo l'asse di questa, e vale

$$B(z) = B_z(z) = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\ .$$

Fissando quindi l'origine del'asse della coordinate z nel punto mediano tra le due spire[2], il campo complessivamente generato dalle due spire è dato da

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2[R^2+(z+R/2)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 i R^2}{2[R^2+(z-R/2)^2]^{3/2}}$$

da cui si ricava che nel punto mediano

$$B(C) = B(z=0) = \frac{\mu_0 i R^2}{2[R^2+R^2/4]^{3/2}} + \frac{\mu_0 i R^2}{2[R^2+R^2/4]^{3/2}} = \frac{\mu_0 i 8}{R(5)^{3/2}}\ .$$

[2] La scelta è arbitraria ed il risultato a cui si arriva è identico scegliendo lo zero in qualsiasi altro punto, con le opportune modifiche consistenti alle formule.

Sviluppando ora in serie il campo magnetico attorno al punto mediano, sappiamo che

$$B(z) = B(z=0) + \left(\frac{dB}{dz}\right)_{z=0} z + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2B}{dz^2}\right)_{z=0} z^2 + \dots$$

ove il primo termine dello sviluppo è quello appena calcolato.

Per i termini successivi calcoliamo

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 i R^2}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{2(z+R/2)}{[R^2+(z+R/2)^2]^{5/2}} - \frac{3}{2}\frac{2(z-R/2)}{[R^2+(z+R/2)^2]^{5/2}}\right)$$

che calcolato in $z = 0$

$$\left.\frac{dB}{dZ}\right|_{z=0} = \frac{\mu_0 i R^2 3}{2}\left(\frac{-R/2+R/2}{[R^2+R^2/4]^{5/2}}\right) = 0\ .$$

Per il termine successivo dello sviluppo si ha

$$\frac{d^2B}{dz^2} = -\frac{\mu_0 i R^2 3}{2}\left(\frac{[R^2+(z+R/2)^2]^{5/2} - (z+R/2)^2 5[R^2+(z+R/2)^2]^{3/2}}{[R^2+(z+R/2)^2]^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{[R^2+(z-R/2)^2]^{5/2} - (z-R/2)^2 5[R^2+(z-R/2)^2]^{3/2}}{[R^2+(z-R/2)^2]^5}\right)$$

che calcolato nel punto mediano vale

$$\left.\frac{d^2B}{dz^2}\right|_{z=0} = -\frac{\mu_0 i R^2 3}{2}\left(\frac{[\frac{5}{4}R^2]^{5/2} - R^2/4\ 5[\frac{5}{4}R^2]^{3/2}}{[\frac{5}{4}R^2]^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{[\frac{5}{4}R^2]^{5/2} - R^2/4\ 5[\frac{5}{4}R^2]^{3/2}}{[\frac{5}{4}R^2]^5}\right) = 0$$

poichè si annullano entrambi i numeratori dei due addendi.

Si è visto quindi che il secondo e terzo termine dello sviluppo in serie di Taylor sono nulli e questo indica che in un intorno abbastanza largo del punto mediano, il campo magnetico risulta in buona approssimazione costante, pari in valore al valore del campo nel punto mediano.

Esercizio 38

Una sottile barra di grafite (ρ= 1.0 10^{-5} Ωm), lunga L= 200 cm ed a sezione quadrata di lato a=2 mm, è immersa in un campo magnetico $B = 0.8$ T perpendicolare ad una delle facce laterali. Le due estremità della barra sono collegate ad una d.d.p. V_0=5 V. Calcolare:

a) La potenza erogata dal generatore,

b) La forza necessaria per tenere ferma la barra,

c) La d.d.p. che si genera tra due facce opposte sapendo che nel materiale, la densità di elettroni è $N(e^-)$=0.5 10^{17} mm^{-3}

Soluzione 38

Considerando la sezione della barra come infinitesima, poichè piccola rispetto alla lunghezza, la resistenza di questa sarà

$$R = \rho\frac{L}{a^2} = 5\ \Omega$$

e la potenza erogata dal generatore per farvi passare corrente è

$$P = \frac{V_0^2}{R} = 5\ W\ .$$

La forza che il campo magnetico esterno esercita su di essa vale

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad F = \int_0^L B\ dl = iBL = \frac{V_0}{R} BL = 1.6\ N\ .$$

che è pari ed opposta a quella che è necessario applicare affinchè la barra non si muova.

Dalla definizione di corrente, assumendo che questa sia dovuta al moto degli elettroni nella barra, si ha che

$$i = \frac{dq}{dt} = eN(e^-)a^2 \frac{dx}{dt} = qN(e^-)a^2 v_d \qquad \Rightarrow \qquad v_d = \frac{i}{eN(e^-)a^2} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{eN(e^-)a^2}$$

ove v_d è la velocità di deriva delle cariche nella direzione della corrente. L'effetto Hall ci dice che le cariche che producono la corrente risentono di una forza di Lorentz che tende a separane le positive dalle negative. Una volta creatasi questa separazione, tra le distribuzioni non uniformi di cariche opposte si produce un campo elettrico che tende a riavvicinarle. La condizione di equilibrio viene raggiunta quando il campo di Lorentz bilancia quello elettrico tra le distribuzioni di cariche opposte, o equivalentemente le due forze sulle cariche in moto si bilanciano. Nella condizione di equilibrio tra le facce opposte parallele al campo magnetico si forma una differenza di potenziale data dalla condizione

$$ev_d B = eE = e\frac{\Delta V_H}{a} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta V_H = av_d B = \frac{aBV_0}{eN(e^-)Ra^2} = \frac{BV_0}{eN(e^-)Ra} = 50\ \mu V\ .$$

Esercizio 39

Un avvolgimento di N=5 10^3 spire è disposto sulla superficie di un cilindro retto, lungo d= 50 cm e di raggio R=5 cm, costituendo quello che si chiama un solenoide rettilineo. Esso è percorso dalla corrente i= 2 A.

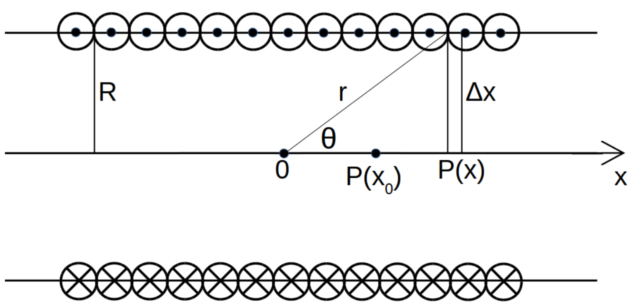
Dare l'espressione del campo magnetico nei punti dell'asse del sistema ed estendere il risultato al caso in cui d tenda all'infinito.

Soluzione 39

Innanzitutto definiamo come $n = \frac{N}{d}$ la densità di spire per unità di lunghezza sulla superficie del cilindro.

In generale, il campo prodotto da una spira sul proprio asse è pari a

$$B = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\ .$$



Nel caso considerato, il contributo al campo dalle spire contenute in un tratto di lunghezza dx del cilindro su cui sono avvolte è

$$dB = \frac{\mu_0 R^2}{2r^3} \cdot ni\ dx$$

ove con r si indica la distanza di tali spire dal punto in cui si calcola il campo magnetico. Si può sostituire

$$r\sin\theta = R \;\rightarrow\; r = \frac{R}{\sin\theta} \qquad R = (x - x_0)\tan(\theta) \;\rightarrow\; dx = -\frac{R}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

e sommando i contributi di tutti i segmenti infinitesimi abbiamo

$$B = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\mu_0 R^2}{2r^3} ni\, dx = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{\sin^3\theta}{R^3}\left(-\frac{R}{\sin^2\theta}\right) d\theta = \frac{\mu_0 in}{2}\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} (-\sin\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\mu_0 in}{2}(\cos\theta_{max} - \cos\theta_{min})$$

in cui $\theta_{min/max}$ sono gli estremi di integrazione del cilindro e valgono, per semplici considerazioni geometriche, rispettivamente

$$\cos\theta_{min} = \frac{d/2 - x_0}{\sqrt{(d/2 - x_0)^2 + R^2}} \qquad \cos\theta_{max} = -\frac{d/2 + x_0}{\sqrt{(d/2 + x_0)^2 + R^2}}$$

da cui si ricava

$$B = \frac{\mu_0 in}{2}\left[\frac{d/2 - x_0}{\sqrt{(d/2 - x_0)^2 + R^2}} + \frac{d/2 + x_0}{\sqrt{(d/2 + x_0)^2 + R^2}}\right]$$

che nel centro del cilindro (solenoide) vale

$$B(x = 0) = \mu_0 ni \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}}$$

e

$$n \rightarrow \infty \qquad \Rightarrow \qquad B(x) \rightarrow \mu_0 ni$$

come si è già trovato nel caso del solenoide infinito.

Si noti da ultimo che nel caso del solenoide finito, il valore del campo agli estremi del solenoide vale

$$B\left(\frac{d}{2}\right) = B\left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{\mu_0 ni}{2}\frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}} \rightarrow \frac{\mu_0 ni}{2} = \frac{B(0)}{2} \text{ per } d \rightarrow \infty\ .$$

Esercizio 40

Un solenoide con densità di spire n=10 spire/cm è percorso da una corrente $I =$ 12 mA, ha asse perpendicolare al campo magnetico terrestre $\vec{B}_T$. Un ago magnetico, con momento di dipolo μ=6.6 10^{-4} Am^2, massa $m =$ 10 g e lunghezza l=1 cm, si orienta a $\theta =$ 30° rispetto a $\vec{B}_T$. Calcolare:

a) B_T

b) il momento delle forze per tenere fermo il dipolo lungo $\vec{B}_T$

c) La frequenza di oscillazione del dipolo per piccole oscillazioni attorno all'equilibrio

d) il lavoro meccanico necessario per invertire la direzione del dipolo rispetto alla configurazione del punto b).

Soluzione 40

Come si è visto in altri esempi, il campo all'interno di un solenoide con densità di spire n percorse da corrente i è dato da

$$B_S = n\mu_0 i$$

quindi complessivamente il campo magnetico presente sarà, per il principio di sovrapposizione

$$\vec{B_T} = B_T\hat{y} \qquad \vec{B_S} = B_S\hat{x} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = \vec{B_T} + \vec{B_S} \ .$$

L'ago magnetico risentirà di un momento complessivo

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times (\vec{B_T} + \vec{B_S}) \ .$$

All'equilibrio, quando l'aghetto forma un angolo α con il campo $\vec{B_T}$, la componente lungo $\hat{z}$ del momento deve essere nulla, ovvero

$$M_z = \mu B_T \sin\alpha - \mu B_S \cos\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_T \sin\alpha = n\mu_0 i \cos\alpha$$

da cui

$$B_T = \frac{n\mu i}{\tan\alpha} = 2.6\ 10^{-5}\ T \ .$$

Per tenere fermo il magnete con momento parallelo a $\vec{B_T}$ serve fornire un momento esterno $\vec{M_e}$ che bilanci quello creato dai campi magnetici, ovvero

$$\vec{M_{tot}} = \vec{M_e} + \vec{\mu} \times (\vec{B_T} + \vec{B_S}) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{M_e} = -\vec{\mu} \times (\vec{B_T} + \vec{B_S}) = -\vec{\mu} \times \vec{B_S}$$

poichè $\vec{\mu} \times \vec{B_T} = 0$. Numericamente si trova

$$M_e = \mu B_s = \mu n \mu_0 i = 9.9\ 10^{-9}\ Nm$$

diretto nel verso positivo dell'asse $\hat{z}$.

Intorno alla posizione di equilibrio, la seconda legge di Newton nella sua versione angolare si può scrivere, sapendo che il momento d'inerzia di una asticella di massa m e lunga l vincolata nel suo centro vale $I_a = \frac{ml^2}{12}$

$$\vec{\mu} \times (\vec{B_T} + \vec{B_S}) = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mu B_{tot} \sin\theta = \frac{ml^2}{12}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

che per piccole oscillazioni diventa $(\sin\theta \approx \theta)$

$$\mu B_{tot}\theta = \frac{ml^2}{12}\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12\mu B_{tot}}{ml^2}}$$

dove con B_{tot} si è indicato il modulo $|\vec{B_T} + \vec{B_S}|$.

Il lavoro meccanico che serve compiere per ruotare il dipolo di 180 gradi rispetto alla posizione in cui è diretto nel verso positivo dell'asse $\hat{y}$ è dato da

$$L = \Delta U = U_f - U_i = \mu\hat{y}\vec{B_T} - (-\mu\hat{y}\vec{B_T}) = 2\mu B_T = 3.4\ 10^{-8}\ J \ .$$

Esercizio 41

Un tubo cilindrico dielettrico molto lungo, con raggio R=10 cm ha la superficie carica con densità σ= 0.5 C/m^2 e ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω= 10 rad/s. Calcolare:
a) $\vec{E}$ e $\vec{B}$ all'interno ed all'esterno del cilindro
[b) $\vec{E}$ e $\vec{B}$ all'interno ed all'esterno del cilindro se la velocità angolare aument come $\omega(t) = \alpha\ t$ con α=2 rad/s^2.]

Soluzione 41

Il campo elettrico è quello prodotto da una densità di carica superficiale costante distribuita sulla superficie del cilindro. Questa si può calcolare applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di altezza infinitesima e raggion r, per la quale deve valere, per la simmetria del sistema

$$E(r)2\pi r dl = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{dl\sigma 2\pi R}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}\frac{1}{r} \;\; \text{per r > R} \;,\; E(r) = 0 \;\; \text{per r < R} \;,$$

Il campo magnetico è invece prodotto dalla densità di carica che ruota con il guscio producendo una densità di corrente data da

$$\frac{dq}{dl\ dt} = \frac{\sigma R\ d\phi\ dl}{dl\ dt} = \sigma R\frac{d\phi}{dt} = \sigma R\omega\ ;$$

questo può essere pensato come un solenoide in cui la densità di corrente corrisponde ad una densità n di spire percorse dalla corrente I data dalla $j = nI$ quindi l'espressione del campo all'interno del solenoide è data da

$$\vec{B_s} = nI\mu_0\hat{z} \qquad \Rightarrow \qquad B = \mu_0\sigma R\omega = 6.28\ 10^{-7}\ T\ .$$

Sempre come nel caso del solenoide il campo magnetico all'esterno del cilindro è nullo (almeno in prima approssimazione).

Riassumendo, in questo caso, in cui il cilindro ruota con velocità angolare costante il campo elettrico è radiale, solo all'esterno del cilindro, mentre il campo magnetico è assiale, solo all'interno del cilindro.

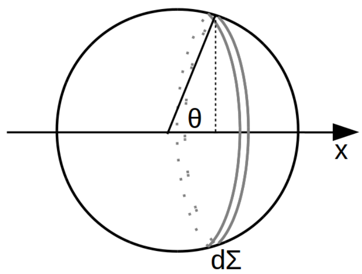
Esercizio 42

Una sfera conduttrice di raggio R=10 cm e massa m=10 Kg, carica con q=10^{-6} distribuita sulla sua superficie, ruota con velocità angolare ω=10^3 rad/s attorno ad un suo diametro. Calcolare il valore del campo magnetico nel centro della sfera, il momento magnetico ed il rapporto giromagnetico della sfera, Se questa viene immersa in un campo magnetico uniforme di modulo B'=3 T (in una direzione generica), calcolare la velocità angolare di precessione.

Soluzione 42

Per la simmetria del problema, dividiamo la superficie della sferica in strisce infinitesime come spire percorse da corrente. La densità di carica sulla superficie sferica vale

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = 7.96\ 10^{-6}\ C/m^2$$



e poichè la superficie infinitesima può essere parametrizzata come

$$d\Sigma = 2\pi R\sin\theta R\ d\theta$$

la corrente che scorre in ogni striscia può essere scritta come

$$di = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma\ d\Sigma}{T} = \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin\theta\ d\theta\omega}{2\pi} = \sigma R^2 \sin\theta\omega\ d\theta\ .$$

Il campo sull'asse di una spira ci ricordiamo valere

$$B_s = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + (x - x_0)^2\right)^{3/2}}$$

ove x rappresenta la coordinata del punto in cui si vuole calcolare il campo ed x_0 la coordinata, lungo il medesimo asse, del centro della spira. Ogni spira infinitesima, che ha centro nella posizione x dell'asse in figura, contribuisce quindi con un campo al centro della sfera, ovvero in $x = 0$ dato da

$$dB = \frac{\mu_0\ di}{2} \frac{R^2 \sin^2\theta}{\left(R^2 \sin^2\theta + R^2 \cos^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \sigma R^2 \sin\theta\omega\ d\theta \frac{R^2 \sin^2\theta}{R^3} = \frac{\mu_0}{2} \sigma R\omega \sin^3\theta\ d\theta\ .$$

Il campo totale nel centro della sfera è dunque

$$B = \int_0^\pi dB = \frac{\mu_0 \sigma R\omega}{2} \int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta = \frac{2\mu_0 \sigma R\omega}{3} = 6.47\ 10^{-10}\ T$$

poichè

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \sin\theta\ d\theta = -\cos\theta|_0^\pi + \left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^\pi = \frac{4}{3}$$

Il momento magnetico si può calcolare con lo stesso approccio, pensando che ogni striscia infinitesima, equivale ad una spira, che quindi apporta un contributo al momento magnetico

$$dm = di\pi S = \sigma R^2 \sin\theta\omega\ d\theta\pi (R\sin\theta)^2$$

che, integrato su tutta la superficie sferica, da

$$m = \int_0^\pi dm = \int_0^\pi \sigma R^2 \sin\theta\omega\pi R^2 \sin^2\theta\ d\theta = \sigma R^4 \pi\omega \int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta = \frac{4}{3} \sigma R^4 \pi\omega = 3.3\ 10^{-6}\ Am^2$$

Il momento angolare, per una sfera rigida che ruota attorno al proprio asse che ha momento d'inerzia $I_s = \frac{2}{5} m R^2$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \frac{2}{5} m R^2 \vec{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{m}{L} = \frac{4}{3} \sigma R^4 \pi\omega \frac{5}{2mR^2\omega} = \frac{10}{3} \frac{\sigma R^2 \pi}{m} = \frac{5}{3} \frac{q}{2m} = 8.3\, 10^{-8}\ C/kg\ .$$

La precessione avviene poichè l'equazione del moto angolare è data da

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}' = g\vec{L} \times \vec{B}'$$

che ci dice che il momento angolare non cambia in modulo e può solo cambiare nel tempo. Considerando quindi la componente tangenziale della variazione di $\vec{L}$ si ha

$$\frac{dL_t}{dt} = gB' L_t$$

che corrisponde ad un moto circolare uniforme nel piano ortogonale all'asse di $\vec{B}'$, ovvero una precessione, con

$$\omega_p = gB' = 2.5\ 10^{-7}\ rad/s$$

ove si può notare come $\omega_p \ll \omega$.

Esercizio 43

Un avvolgimento di N= 500 spire, percorse dalla corrente i=8 A, è disposto su di una superficie toroidale circolare a sezione quadrata di area Σ= 4 cm^2 e lunghezza media l= 132 cm, lo spazio interna a tale solenoide è completamente riempito dalla lega ferromagnetica isoperm con μ_r= 60, costante per un largo intervallo di H. Calcolare i campi B, H, M entro il solenoide nonchè il flusso totale di B, ed il valore della corrente amperiana nel ferromagnete.

Soluzione 43

Si può calcolare la circuitazione del campo H lungo un percorso che attraversa il solenoide, che, nell'approssimazione che le dimensioni della superficie siano trascurabili rispetto alla lunghezza del solenoide, e considerandone la lunghezza media l, si ha

$$H = ni = \frac{N}{l}i = \frac{500}{1.32}8 = 3.03\ 10^3\ A/m\ .$$

Da questo si può ricavare il campo di induzione magnetica, che in un mezzo ferromagnetico omogeneo è dato dall'espressione

$$B = \mu_0\mu_r H = \mu_0\mu_r\frac{Ni}{l} = 0.228\ T$$

ed il campo di magnetizzazione

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = 1.79\ 10^5\ A/m\ .$$

Il flusso del campo B attraverso la sezione del solenoide è dato, assumendo che B sia costante all'interno della sezione, da

$$\Phi_B = NB\Sigma = 4.56\ 10^{-2}\ Wb\ .$$

Per determinare le correnti amperiane consideriamo un sistema di coordinate cilindriche centrate nel centro del solenoide, in cui la direzione $\vec{\phi}$ è orientata nel verso delle linee dei campi H, B, M, tutte con sola componente tangenziale, e $\hat{z}$ è coerentemente diretto nel piano ortogonale a quello in cui giace il solenoide. Le correnti amperiane di volume sono nulle, come in tutti i materiali omogenei, cosa confermata calcolando

$$j_v = \vec{\nabla} \times \vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\mu_r - 1)j_v = 0$$

poichè non ci sono correnti *esterne* che scorrono nel materiale, oltre a quelle amperiane. Per le correnti di superfici possiamo calcolare che, considerando la direzione di $\vec{M}$ e l'opportuna direzione del vettore normale alla superficie n nelle superfici interna, esterna e laterale, che in questo sistema di coordinate (r,ϕ,z) vale

$$\vec{M} = (0, M, 0) \qquad \hat{n}_{int/ext} = (\mp 1, 0, 0) \qquad \hat{n}_{sup/inf} = (0, 0, \pm 1)$$

si ha dalla formula $j_m = \vec{M} \times \hat{n}$

$$j_s(int/ext) = \pm M\hat{z} \qquad j_s(sup/inf) = \pm M\hat{r}$$

ed in ogni caso, la corrente totale che scorre sulle superfici vale

$$I = jl = Ml = \frac{(\mu_r - 1)l}{\mu_0\mu_r}B = 2.36\ 10^4\ A\ .$$

Una soluzione alternativa (alla prima richiesta del problema) è quella che sfrutta la legge di Hopkinsons

$$\Phi_B = \frac{Ni}{R} \text{ con } \frac{1}{R} = \mu_0 \int_\Sigma \frac{\mu_r \, d\Sigma}{l}$$

che in questo caso diventa

$$\frac{1}{R}\mu_0 \int_\Sigma \frac{\mu_r \, d\Sigma}{l} = \frac{\mu_0 \mu_r \Sigma}{l} = 2.28 \; 10^{-8} \; H \qquad \Rightarrow \qquad R = 4.38 \; 10^7 \; H^{-1}$$

da cui si ricava il flusso attraverso la sezione del toro

$$\Phi'_B = \frac{Ni}{R} = 9.12 \; 10^{-5} Wb \qquad \Phi_B = N\Phi'_B = 4.56 \; 10^{-2}$$

da cui si ricava B (assunto costante) dalla

$$\Phi'_B = B\Sigma \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\Phi_B}{\Sigma} = 0.228T \; .$$

Da questo valore si può ricavare il valore di H e M con le solite formule.

Si noti che, nel caso in cui non si fosse considerata costante la lunghezza del solenoide (o della circuitazione), e di conseguenza i campi H e B, entro la sezione di esso Σ si sarebbe potuta ottenere la riluttanza del solenoide come combinazione in parallelo di infiniti solenoidi, con lunghezza variabile, identificabili come frazioni di quello di partenza, con spessore dr, collocati ad una distanza r dal centro del solenoide. Ciascuno di essi avrebbe una riluttanza infinitesima

$$d\left(\frac{1}{R}\right) = \mu_0 \mu_r \frac{d\Sigma}{l} = \mu_0 \mu_r \frac{a \; dr}{2\pi r}$$

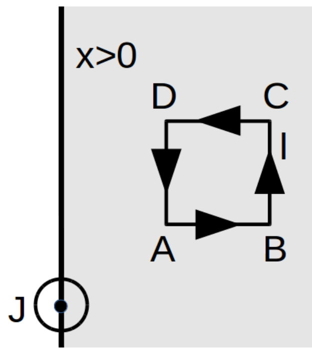
con a la larghezza della sezione del solenoide nella direzione ortogonale a quella in cui lo stiamo segmentando. La riluttanza del parallelo di queste riluttanze è quindi data da

$$\frac{1}{R} = \int d\left(\frac{1}{R}\right) = \int_{R1}^{R2} \mu_0 \mu_r \frac{a \; dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \mu_r a}{2\pi} \int_{\overline{r}-a/2}^{\overline{r}-a/2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu_r a}{2\pi} \log\left(\frac{\overline{r}+a/2}{\overline{r}-a/2}\right) = 2.28 \; 10^{-8} H$$

che da una riluttanza uguale entro qualche percento a quella trovata nell'approssimazione di lunghezza del solenoide costante.

Esercizio 44

Una lastra conduttrice piana ed infinita, giacente nel piano (y,z), è percorsa da una corrente di densità J_0 = 6.4$10^4$ A/m (uscente dal foglio). Il semispazio $x > 0$ è riempito da un materiale ferromagnetico, la cui permeabilità magnetica relativa, nelle condizioni in esame, può essere approssimata come $\mu_r(x) = 1 + k \; e^{-\frac{x}{\lambda}}$, con k=87 e λ=3.2 m. Il semispazio $x < 0$ è vuoto. Calcolare:
1) il modulo, direzione e verso di $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{M}$ in funzione di x.
2) Le correnti amperiane di volume $\vec{j}_v$ e di superficie $\vec{j}_s$.
3) La circuitazione di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ lungo il percorso ABCD indicato in figura, ove l=25 cm è il lato del quadrato ed anche la distanza di $\overline{AD}$ dall'asse $\hat{y}$.



Soluzione 44

Applicando il teorema di Ampère ad un circuito quadrato nel piano (x,y), simmetrico rispetto alla lastra, poichè per simmetria il campo H deve essere diretto lungo $\hat{y}$

$$H_y l + H_y l = J_0 l \qquad \Rightarrow \qquad H_y = H = \frac{J_0}{2} = 3.4\ 10^4\ sgn(x)\ A/m$$

ove $sgn(x)$ ci indica che H sarà rivolto lungo il verso positivo delle y per $x > 0$ e nel verso opposto per $x < 0$. Il campo $\vec{B}$ è parallelo a $\vec{H}$ e per esso vale in modulo

$$B(x) = \mu_0 H(x) = \frac{\mu_0 J_0}{2} = 4.0\ 10^-2\ T \qquad \text{per } x < 0$$

mentre

$$B(x) = \mu_0 \mu_r(x) H(x) = \frac{\mu_0 J_0}{2}(1 + ke^{-\frac{x}{\lambda}}) \qquad \text{per } x > 0\ .$$

La magnetizzazione è nulla per $x < 0$ mentre per $x > 0$

$$\vec{M(x)} = (\mu_r(x) - 1)\vec{H} \qquad \Rightarrow \qquad M(x) = ke^{-\frac{x}{\lambda}}\frac{\mu_0 J_0}{2}\ .$$

La corrente di magnetizzazione superficiale scorre sulla faccia della lastra, ovvero sul piano $x = 0$ e si può calcolare come

$$\vec{J_s} = \vec{M}(x = 0) \times \hat{n} = \vec{M}(x = 0) \times -\hat{x} = |\vec{M}(x = 0)|\hat{z}$$

e vale in modulo

$$J_s = M(x = 0) = ke^{-\frac{0}{\lambda}} H(0^+) = k\frac{J_0}{2} = 2.8\ 10^6\ A/m$$

diretta nello stesso verso di J_0. Poichè $\vec{M}$ ha componente non nulla solo lungo $\hat{y}$ e non dipende da z, calcolando le correnti amperiane di volume da

$$\vec{j_v} = \vec{\nabla} \times \vec{M} = -e^{-\frac{x}{\lambda}}\frac{kJ_0}{2\lambda}\hat{z}$$

ed è quindi antiparallela a $\vec{j_s}$. La densità di corrente totale che scorre nel volume si ottiene integrando $\vec{j_v}$

$$\int_{x=0}^{\infty} j_v\ dx = \int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{x}{\lambda}}\frac{kJ - 0}{2\lambda}\right)\ dx = \left|e^{-\frac{x}{\lambda}}\frac{kJ_0}{2}\right|_{x=0}^{\infty} = -\frac{kJ_0}{2} = -J_s\ .$$

Il percorso ABCD non concatena alcuna corrente quindi $\oint_{ABCD} H = 0$. Applicando invece il teorema di Ampère al campo $\vec{B}$, per il quale si devono considerare anche i contributi dovuti alle correnti amperiane, in questo caso di volume, di ha

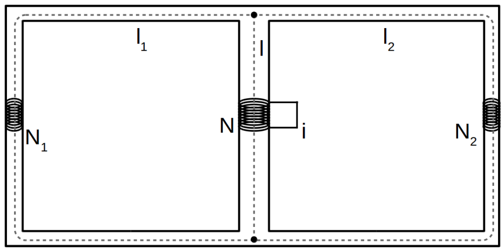
$$\oint_{ABCD} = \mu_0 \int_{\Sigma} J_v(x)\ d\sigma = \mu_0 \int_l^{2l} J_v(x) l\ dx = \mu_0 l \int_l^{2l} \left(-e^{-\frac{x}{\lambda}}\frac{kJ_0}{2\lambda}\right)\ dx =$$

$$= \mu_0 l \left|e^{-\frac{x}{\lambda}}\frac{kJ_0}{2}\right|_l^{2l} = \mu_0 l\frac{kJ_0}{2}\left(e^{-\frac{2l}{\lambda}} - e^{-\frac{l}{\lambda}}\right) = -0.061\ Wb/m\ .$$

Allo stesso risultato si può arrivare, in questo caso semplice, calcolando sui 4 lati del quadrato, le frazioni degli integrali che compongono la circuitazione, poichè si è già ricavata l'espressione analitica di $\vec{B}(x)$.

Esercizio 45

Nel circuito magnetico in figura si vuole che il flusso totale attraverso N_1 valga Φ_1=2 10^4 Wb, mentre quello attraverso N_2 valga Φ_2=3 10^4 Wb. Inoltre il coefficiente di autoinduzione deve valere L=10^3 H. Calcolare i valori di N e della corrente i (fornita da un generatore di corrente) necessari affinchè si realizzino le condizioni desiderate. I dati geometrici del circuito sono l=194 mm, l_1=300 mm, l_2=200 mm, Σ=1 cm^2, μ_r=250 ed $N_1 = N_2 = 50$.



Soluzione 45

I rami l_1 ed l_2 sono in parallelo tra loro ed in serie alla sorgente che si trova sul ramo lungo l, in cui si trova l'avvolgimento di N spire percorse dalla corrente i. Se indichiamo con R^* la riluttanza del ramo in cui si trova il generatore (ramo centrale), la riluttanza totale del circuito è

$$R = R^* + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = R^* + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

e, dalla definizione di riluttanza in un ramo lungo l' di sezione Σ

$$R = \frac{l'}{\mu_0 \mu_r \Sigma}$$

si ottiene

$$R = \frac{1}{\mu_0 \mu_r \Sigma}\left(l + \frac{l_1 l_2}{l1 + l2}\right) = 10^7 \ H^{-1} \ .$$

Il flusso attraverso la sezione in cui si trovano gli avvolgimenti N è la stessa del flusso nei due rami in parallelo, ovvero

$$\Phi' = \Phi_1' + \Phi_2' = \frac{\Phi_1}{N_1} + \frac{\Phi_2}{N_2} = 10^{-5} \ Wb$$

sostituendo i valori dati di Φ_1 e Φ_2. La legge di Hopkinsons, in questo caso ci permette di ricavare il valore di Ni

$$\Phi' = \frac{Ni}{R} \qquad \Rightarrow \qquad Ni = \Phi' R = 10^{-5} \ Wb \ 10^7 \ H^{-1} = 100 \ A \ .$$

Dalla definizione di autoflusso, mediante il coefficiente di autoinduzione otteniamo

$$\Phi = N\Phi' = Li \qquad \Rightarrow \qquad Li = \frac{N^2 i}{R} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{N^2}{R}$$

da cui si ricava

$$N = \sqrt{LR} = 100 \qquad \Rightarrow \qquad i = 1 \ A \ .$$

Per risolvere il problema utilizzando invece il teorema di Ampère si consideri che il flusso nel ramo centrale (lungo l) è la somma dei flussi negli altri due rami quindi, se la sezione del circuito magnetico è costante, non lo può essere B. In compenso deve valere

$$B = B_1 + B_2 \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = H_1 + H_2 \ .$$

La circuitazione sui due rami lunghi rispettivamente $l_1 + l$ e $l_2 + l$ da

$$H_1 l_1 + Hl = Ni = H_2 l_2 + Hl$$

che quindi definisce il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$H_1 + H_2 = H \qquad H_1 l_1 = H_2 l_2 \qquad H_i l_i + Hl = Ni$$

che ha come soluzioni per H_1 e H_2

$$H_1 = \frac{N_1 l_1}{(l_1 l_2 + l(l_1 + l_2))} \qquad H_2 = \frac{N_2 l_2}{(l_1 l_2 + l(l_1 + l_2))}\ .$$

Deve inoltre valere

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\Phi_1}{\mu_0 \mu_r N_1 \Sigma} \qquad H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\Phi_2}{\mu_0 \mu_r N_2 \Sigma}$$

e sommando a due a due le espressioni qui sopra si ottiene

$$\frac{Ni(l_1 + l_2)}{(l_1 l_2 + l(l_1 + l_2))} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r \Sigma} \left(\frac{\Phi_1}{N_1} + \frac{\Phi_2}{N_2} \right)$$

da cui si ottiene il vincolo su Ni

$$Ni = \frac{1}{\mu_0 \mu_r \Sigma} \left(\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} + l \right) \left(\frac{\Phi_1}{N_1} + \frac{\Phi_2}{N_2} \right)$$

mentre imponendo la richiesta sul valore del coefficiente di autoinduzione si ha

$$\Phi = Li = \left(\frac{\Phi_1}{N_1} + \frac{\Phi_2}{N_2} \right)$$

da cui si può ricavare N ed i separatamente.

3 Induzione elettromagnetica

Esercizio 46

Una spira di forma quadrata di lato L=1 m ruota attorno ad un asse orizzontale con una velocità angolare ω=2π rad/s. La spira è immersa in un campo magnetico uniforme B=2 T diretto lungo l'asse z, ortogonale all'asse della spira. La spira, di resistenza trascurabile, è connessa ad una resistenza di carico R=0.2 Ω. Calcolare:
1) la corrente che circola nella spira in funzione del tempo.
2) il momento massimo che agisce sulla spira
3) l'energia dissipata sulla resistenza in Δt= 10 s
4) la somma in valore assoluto delle cariche che circolano nella spira in Δt= 10 s.

Soluzione 46

Indicando con θ l'angolo tra il piano immaginario su cui giace la spira e la direzione di $\vec{B}$, ovvero tra la normale alla superficie e l'asse $\hat{z}$, il flusso si può parametrizzare con

$$\Phi(B) = L^2 B \cos\theta = L^2 B \cos(\omega t)$$

con ω la velocità angolare con cui ruota la spira (Si è scelto di considerare $t = 0$ l'istante in cui la superficie della spira è ortogonale alla direzione del campo magnetico). Dalla legge di Faraday-Neumann si ha una $f.e.m.$ indotta che produrrà un flusso di corrente nella spira

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = Ri(i)$$

da cui

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(-\frac{d\Phi(B)}{dt}\right) = \frac{L^2 B}{R}\omega \sin(\omega t) = 62.8\ A\ \sin(\omega t)\ .$$

Il momento che agisce sulla spira produce della potenza che viene dissipata per effetto Joule sulla resistenza, ovvero, ricavando dalla definizione di laovor

$$dL = M\ d\theta \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{dL}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega = Ri^2(t)$$

si ha

$$M(t) = \frac{R}{\omega} i^2(t) = \frac{RL^4B^2\omega^2}{\omega R^2}\sin^2(\omega t) = \frac{L^4B^2}{R}\omega \sin^2(\omega t)$$

da cui ricaviamo il valore massimo del momento, quando $\sin^2(\omega t) = 1$

$$M_{max} = \frac{L^4B^2\omega}{R} = 125.6\ Nm\ .$$

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando il momento magnetico della spira $\vec{m} = L^2 i(t)$ e il momento come $\vec{M}(t) = \vec{m} \times \vec{B}$.

L'energia dissipata nel tempo Δt= 10 s si ricava integrando nel tempo l'espressione della potenza dissipata per effetto Joule trovata prima

$$\Delta U = \int_{t=0}^{10} Ri^2(t)\ dt = \frac{RL^4B^2\omega}{R^2}\int_{t=0}^{10}\sin^2(\omega t)\ dt = \ldots$$

poichè l'integrale su 10 periodi di $\sin^2(\omega t)$ si può scrivere come

$$\int_{t=0}^{10}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\ dt = \frac{1}{2}|t - \sin(2\omega t)|_0^{10} = \frac{10}{2}$$

si ha

$$\Delta U = \frac{L^4B^2\omega^2}{R}5 = 3.95\ kJ$$

L'intervallo temporale Δt=10 s considerato equivale a 10 periodi. Se applichiamo la legge di Felici

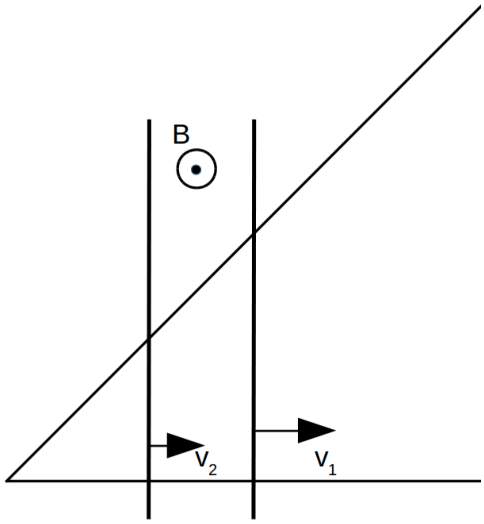
$$Q = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R} = 0$$

poichè all'istante iniziale ed in quello finale la spira si trova nella stessa posizione e quindi il flusso è identico, $\Phi_i = \Phi_f$. Quello che succede, poichè la corrente ha segno alterno, è che la carica fluisce in un verso per mezzo periodo e nel verso opposto per il successivo mezzo periodo. Equivalentemente si può immaginare che attraverso un punto del circuito fluisca una carica di un segno durante il primo mezzo periodo e, nella stessa direzione, una carica uguale ma di segno opposto nel successivo mezzo periodo. Il problema chiede di calcolare la carica totale fluita in valore assoluto, quindi questa sarà, in N periodi, a $2N$ volte la carica che fluisce in un mezzo periodo. Questa, che in un mezzo periodo ha sempre lo stesso verso, può essere ricavata dalla legge di Felici

$$Q_{T/2} = \frac{\Phi_i - \Phi_{T/2}}{R} = \frac{L^2B}{R} + \frac{L^2B}{R} = \frac{2L^2B}{R} = 20C \qquad \Rightarrow \qquad |Q|_{tot} = 20\ Q_{T/2} = 400\ C\ .$$

Esercizio 47

Due barre conduttrici, ciascuna di resistenza per unità di lunghezza ρ, appoggiano senza attrito su due binari, di resistenza nulla, orizzontali e divergenti, con angolo tra loro $\alpha = \pi/4$. Le barre possono muoversi in modo da essere sempre ortogonali ad uno dei due binari, ed inizialmente si trovano entrambe nel punto di intersezione di questi. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme B=1.2 T, perpendicolare al piano in cui si trovano binari e barre, uscente dal foglio. Le barre si muovono nel verso in cui i binari si allontanano tra loro, con velocità v_1=10 m/s e $v_2 = v_1/2$. Calcolare:
1) la resistenza per unità di lunghezza ρ se la corrente indotta nel circuito vale i=0.24 A
2) la forza che agisce sulle due barre in funzione del tempo
3) la carica che ha percorso il circuito al tempo t'=10 s .



Soluzione 47

Ad un generico istante di tempo ciascuna barra si troverà ad una distanza lungo il binario orizzontale x_i dall'incrocio dei binari e la lunghezza di barra tra i due binari sarà anch'essa $y_i = x_i \tan\alpha = x_i$ con $i = 1, 2$. Poichè le barre si muovono di moto rettilineo uniforme la loro posizione sarà $x_i = v_i\ t$. Il flusso che attraversa il circuito trapezioidale formato da barre e binari è dato da

$$\Phi(B) = B\frac{x_1^2}{2} - B\frac{x_2^2}{2} = \frac{B}{2}(v_1^2 - v_2^2)t^2$$

quindi

$$\frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{B}{2}(v_1^2 - v_2^2)\frac{d}{dt}(t^2) = B\left(v_1^2 - \frac{v_1}{2})^2\right)t = \frac{3}{4}Bv_1^2t = -f.e.m.\ .$$

La resistenza del circuito considerato cambia nel tempo poichè cambia la lunghezza di questo, secondo la legge

$$R(t) = \rho x_1(t) + \rho x_2(t) = \rho(v_1 + v_2)t = \rho\left(v_1 + \frac{v_1}{2}\right)t = \frac{3}{2}\rho v_1 t\ .$$

La corrente che scorre nel circuito ad un generico istante t vale

$$i(t) = \frac{1}{R(t)}\left(-\frac{d\Phi(B)}{dt}\right) = \frac{2}{3\rho v_1 t}\left(-\frac{3Bv_1^2t}{4}\right) = -\frac{B}{2\rho}v_1$$

che si vede essere indipendente dal tempo. Quindi, sapendo che questa vale 0.24 A si può ricavare il valore di ρ

$$\rho = \frac{Bv_1}{2i} = 25\ \Omega/m$$

La forza che agisce sulla prima sbarretta, è la forza di Lorentz, data da

$$\vec{F}_1 = i(t)\vec{dl} \times \vec{B} = i(t)x_1(x)B\hat{y} \times \hat{z} = -\frac{1}{2}\frac{B}{\rho}v_1v_1tB\hat{x} = -\frac{1}{2}\frac{B^2v_1^2t}{\rho}\hat{x}$$

mentre sulla seconda

$$\vec{F}_2 = i(t)\vec{dl} \times \vec{B} = i(t)x_2(x)B(-\hat{y}) \times \hat{z} = \frac{1}{2}\frac{B}{\rho}v_2v_2tB\hat{x} = \frac{1}{4}\frac{B^2v_2^2t}{\rho}\hat{x}$$

che complessivamente si oppongono all'allontanameno tra loro delle due barre.

La carica che passa nel circuito non può ricavarsi direttamente dalla legge di Felici poichè la resistenza del circuito R(t) varia nel tempo. Possiamo calcolare la carica passata complessivamente nel circuito integrando nel tempo la corrente

$$Q = \int_0^{t'} i(t)\ dt = i \cdot t' = -\frac{1}{2}\frac{B}{\rho}v_1t' = -2.4\ C\ ,$$

calcolo semplificato perchè la corrente è costante nel tempo.

Esercizio 48

Un solenoide toroidale in aria è costituito da N=5 10^4 spire circolari di area A=2 cm^2 ed ha un raggio a=10 cm, mentre la sua resistenza elettrica è R=50 Ω. Lungo l'asse del solenoide si muove, con velocità costante, v=10^5 m/s un pacchetto di particelle praticamente puntiforme di carica complessiva q=5 10^{-8} C. Calcolare la carica totale Q che passa nel solenoide tra l'istante iniziale in cui la carica q è molto lontana (all'infinito) e quello in cui passa per il centro O del solenoide. Nello sviluppo trascurare l'autoinduzione.

Soluzione 48

Poichè una corrente i produce ad una distanza $\vec{\Delta r}$ un campo dato dall'espressione

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\vec{dl} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3}$$

il campo generato da una carica in moto, nella posizione $\vec{r}$, per la quale

$$I\vec{dl} = \frac{dq}{dt}\vec{dl} = q\frac{\vec{dl}}{dt} = q\vec{v}\ ,$$

vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\vec{v} \times \vec{\Delta r}}{|\Delta r|^3}.$$

Le linee di $\vec{B}$ si avvolgono intorno all'asse del moto del pacchetto di particelle ($\vec{B} \propto \vec{v} \times \vec{r}$) quindi passano all'interno del solenoide chiudendosi su sè stesse. Il flusso di B attraverso le spire del solenoide è

$$\Phi(B) = NAB(t) \qquad \Rightarrow \qquad f.e.m. = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -NA\frac{dB(t)}{dt}\ .$$

Dalla legge di Felici

$$Q = \frac{\Phi_i(B) - \Phi_f(B)}{T}$$

e, poichè all'istante iniziale le cariche sono a distanza infinita, $\Phi_i(B) = 0$. Il valore di $\Phi_f(B)$ si ricava dal valore del campo quando il pacchetto di particelle si trova al centro del solenoide quindi

$$\Phi_f(B) = NAB(t_f) = NA\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\vec{v} \times \vec{r}(t_f)}{|r|^3} = \frac{NA\mu_0 qv}{4\pi a^2}$$

quindi

$$Q = -\frac{NA\mu_0 qv}{R4\pi a^2} = 10^{-8}\ C\ .$$

Esercizio 49

Un solenoide toroidale è costituito da N (=5 10^4) spire circolari di raggio a ed ha un raggio $b \gg a$ e resistenza elettrica R. Sull'asse di simmetria del toroide è posto un filo rettilineo infinito percorso da una corrente $I(t)$, con $I(t)$=0 per t≤0 e $I(t) = kt$ per t>0 con k= costante. Ricavare l'espressione della corrente che circola nel solenoide toroidale. Nota: non si trascuri l'autoinduzione in questo caso.

Soluzione 49

Si può calcolare il calore del campo magnetico generato dal filo infinito percorso da corrente dalla legge di Biot-Savard, nel particolare caso di scegliere un cammino entro la lunghezza del toroide

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc} \qquad \Rightarrow \qquad 2\pi b B(b) = \mu_0 I(t) \qquad \Rightarrow \qquad B(b) = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi b}\ .$$

Il flusso di $\vec{B}$, se assumiamo B costante entro la sezione del solenoide sarà

$$\Phi(B) = N\pi a^2 B(b) = N\pi a^2 \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi b} = \frac{Na^2\mu_0 I(t)}{2b}\ .$$

La f.e.m. indotta si ricava dalla legge di Faraday-Neumann

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(b)}{dt} = -\frac{Na^2\mu_0}{2b}\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{Na^2\mu_0 k}{2b} \qquad \text{per t} > 0\ .$$

All'interno di un solenoide percorso da corrente il campo magnetico in prima approssimazione vale $B = \mu_0 ni$ quindi si può ricavare il coefficiente di autoinduzione del flusso di quel campo

$$\Phi'(B) = N\pi a^2\mu_0 ni = N\pi a^2\mu_0\frac{N}{2\pi b}i = \frac{N^2a^2\mu_0 i}{2b} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{\Phi'(B)}{i} = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2b}\ .$$

L'equazione del circuito diventa quindi

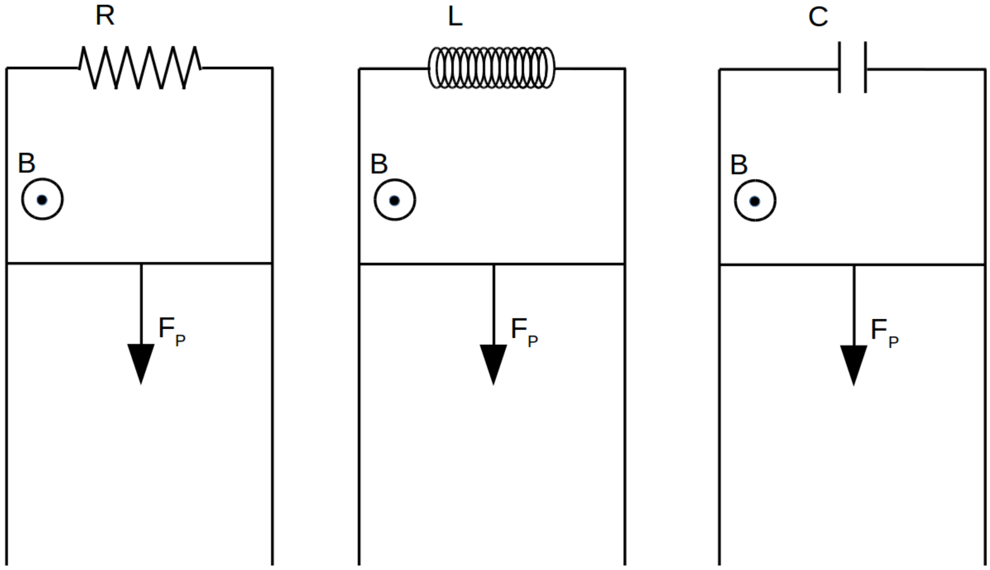
$$f_i - L\frac{di}{dt} = Ri$$

che ha come soluzione

$$i(t) = \frac{f_i}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = -\frac{\mu_0 a^2 Nk}{2bR}\left(1 - e^{-\frac{2Rb}{\mu_0 N^2 a^2}t}\right)$$

Esercizio 50

Due guide certicali parallele conduttrici, distanti b= 20 cm, possono essere chiuse ad un estremo da un resistore R, un induttore L, o un condensatore C. Lungo le guide può scorrere senza attrito una sbarretta conduttrice di massa m=10 g. Il dispositivo è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo B=1 T, ortogonale al foglio. Studiare nei 3 casi la legge con cui varia la velocità di caduta e quella con cui varia la corrente indotta. Si assuma R=4 Ω, L=10^{-2} H, C=100 μF; si trascurino le resistenze dei conduttori, l'autoinduzione del circuito (ad eccezzione di quando si considera questo chiuso su L) e la resistenza dell'aria. Si prenda come condizione iniziale $v = 0$ per $t = 0$.



Soluzione 50

Per definire l'equazione del moto della sbarretta consideriamo un asse $\hat{x}$ verticale orientato verso il basso. In presenza di gravità la seconda legge di Newton si scrive come

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} == \vec{F}_P + \vec{F}_L$$

ove $\vec{F}_P$ è la forza peso e $\vec{F}_L$ è la forza risultante sulla sbarretta quando in essa circola la corrente $i(t)$ per effetto del campo magnetico presente, la Forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = i \cdot \vec{dl} \times \vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad F_L = ibB$$

diretta verso il basso quando la corrente indotta scorre in verso antiorario nel circuito, ovvero verso l'alto quando la corrente indotta scorre in verso orario. Considerato positivo il verso del campo di induzione magnetica B, una terna destrorsa di assi di un sistema di coordinate cilindriche ha l'asse tangenziale orientato come positivo per rotazioni antiorarie nel foglio (dal punto di vista del lettore) quindi si considererà quello come orientamento positivo della corrente. L'equazione del moto diventa

$$\frac{dv(t)}{dt} = g + \frac{i(t)bB}{m}$$

Vediamo distintamente, a seconda dei casi, come sono connesse tra loro corrente e velocità con cui si muove la sbarretta, e le conseguenti dipendenze delle due dal tempo.

RESISTORE

Nel caso il cirucito sia chiuso in alto su una resistenza R si ricava la corrente che circola nel circuito dalla $f.e.m.$ indotta dalla variazione di flusso

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -Bb\frac{dx}{dt} = -Bbv$$

quindi per il circuito analizzato vale

$$Ri(t) = -Bbv(t) \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = -\frac{Bbv(t)}{R}$$

quindi, sostituendo $i(t)$ nell'equazione del moto, otteniamo

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{B^2b^2}{mR}v(t)$$

che ha come soluzione

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2b^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2b^2}{mR}t}\right)$$

ovvero una crescita della velotià sino al raggiungimento di una velocità limite (asintotica)

$$v_\infty = \frac{mgR}{B^2b^2} = 9.81\ m/2\ .$$

L'evoluzione della corrente nel circuito ha un andamento simile

$$i(t) = -\frac{Bb}{R}v(t) = -\frac{mg}{Bb}\left(1 - e^{-\frac{B^2b^2}{mR}t}\right) \qquad \Rightarrow \qquad i_\infty = \frac{mg}{Bb} = 0.49\ A$$

ove si può notare che la corrente indotta, come ci si aspetta, scorre in senso orario nel circuito, a compensare l'aumento di flusso di $\vec{B}$ quando la sbarretta scende verso il basso. Il caso limite ottenuto è quello in cui, la forza di Lorentz agente sulla sbarretta percorsa dalla corrente i_∞ è uguale ed opposta alla forza peso quindi, poichè la risultante delle forze è nulla, la sbarretta scende con velocità costante v_∞.

INDUTTORE

Nel caso in cui ci sia un'induttore l'equazione del circuito risulta

$$f.e.m. + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{di(t)}{dt} = \frac{Bb}{L}v(t)\ .$$

Derivando l'equazione del moto definita all'inizio si ottiene

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} = -\frac{Bb}{m}\frac{di(t)}{dt} = -\frac{Bb}{m}\frac{Bb}{L}v(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{B^2b^2}{mL}v(t) = 0$$

che è l'equazione di un moto armonico

$$v(t) = v_0 \sin(\omega t + \phi)$$

con $\omega^2 = \frac{B^2b^2}{mL}$. Le condizioni a contorno da imporre sono che a $t = 0$ la sbarretta abbia velocità nulla, che implica che in essa non scorra alcuna corrente e risenta solamente della forza peso verso il basso e la sua accelerazione sia pari a g

$$v(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi = 0 \qquad v'(0) = g \qquad \Rightarrow \qquad v_0\omega = g\ ,\ v_0 = \frac{g}{\omega} = \frac{g\sqrt{mL}}{Bb}$$

da cui l'andamento della sbarretta sarà

$$v(t) = \frac{g\sqrt{mL}}{Bb}\sin\left(\frac{Bb}{\sqrt{mL}}t\right) \qquad x(t) = x_0(1-\cos(\omega t)) = \frac{gmL}{B^2b^2}\left(1-\cos\left(\frac{Bb}{\sqrt{mL}}t\right)\right) \ .$$

Dalla relazione tra $i(t)$ e $v(t)$ si ha

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{Bb}{L}v(t) \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = \frac{Bb}{L}\int_0^t v(t')\ dt' = gm\left(1-\cos\left(\frac{Bb}{\sqrt{mL}}t\right)\right) \ .$$

Numericamente:

$$\omega = 20\ rad/s \qquad v_0 = 0.49\ m/s \qquad i_0 = 0.49\ A \ .$$

CONDENSATORE

Nel caso di un condensatore, la $f.e.m.$ indotta è applicata ai capi del condensatore, ed è legata alla carica sulle facce del condensatore dalla relazione

$$f.e.m. = Bbv(t) = \frac{Q}{C} \qquad \text{derivando} \qquad Bb\frac{dv(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} \ .$$

Inserendo l'espressione dell'accelerazione dall'equazione del moto trovata ad inizio esercizio ,si ha

$$Bb\left(g - \frac{i(t)Bb}{m}\right) = \frac{i}{C} \qquad i(t)\left(\frac{B^2b^2}{m} + \frac{1}{C}\right) = Bbg$$

da cui si ottiene un valore costante della corrente

$$i(t = cost. = \frac{CBbg}{\left(\frac{CB^2b^2}{m}+1\right)} = 0.2\ 10^{-3}\ A \ .$$

Sostituendo questo risultato si ottiene

$$\frac{dv(t)}{dt} \equiv a = \frac{mg}{BbC}\frac{1}{\left(Bb+\frac{m}{BbC}\right)} = \frac{g}{\left(\frac{B^2b^2C}{m}+1\right)} \leq g$$

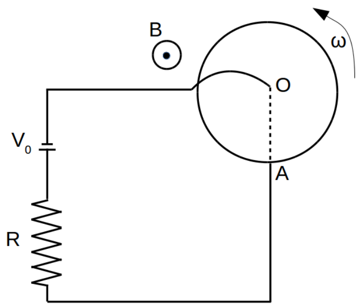
da cui si vede che il moto di caduta della sbarretta è un moto uniformemente accelerato, con accelerazione (di poco) minore di g.

Esercizio 51

Un sottile disco conduttore di raggio D=10 cm e massa m=100 g è collegato con due contatti striscianti, uno nel centro O, l'altro sul bordo A, ad un circuito costituito da un generatore (V_0=5 V) e da una resistenza R=4 Ω. Il disco è immerso in un campo ad esso ortogonale, uniforme e costante, di modulo B=1 T. In seguito al passaggio della corrente il disco entra in rotazione. Calcolare come varia la velocità angolare ω nel tempo e darne la relazione col momento rispetto all'asse di rotazione delle forze agenti. Calcolare l'energia totale spesa dal generatore. Si trascurino attrito, autoinduzione e resistenza del disco.

Soluzione 51

Il passaggio della corrente nel tratto di disco $\overline{OA}$ fa sì che quel segmento risenta di una forza di Lorentz in direzione ortogonale sia al campo di induzione magnetica B che al segmento $\overline{OA}$. Suddividendolo in segmentini infinitesimi, un tratto dr di $\overline{OA}$ risente della forza



$$d\vec{F} = i\vec{dr} \times \vec{B} \qquad dF = iB\ dr$$

ed il corrispondente momento vale

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} \qquad dM = iBr\ dr$$

Il momento totale della forza di Lorentz agente sul disco vale quindi

$$M = \int_0^D dM = \int_0^D iBr\ dr = \frac{iBD^2}{2}$$

ove si può notare che, poichè la corrente non è detto che sia costante, non lo sarà nemmeno il momento.

Il fatto che il disco ruoti genera una $f.e.m.$ indotta per la legge di Faraday-Neumann-Lenz di verso opposto a V_0. In questo caso si può immaginare questa $f.e.m.$ come somma di contributi infinitesimi del campo di Lorentz lungo $\overline{OA}$.

$$d(f.e.m.) = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{dr} \qquad \Rightarrow \qquad f.e.m. = \int_0^D \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{dr} = \int_0^D \omega Br\ dr = \frac{\omega BD^2}{2}\ .$$

L'equazione del circuito è quindi

$$V_0 - \frac{\omega BD^2}{2} = Ri \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{1}{R}\left(V_0 - \frac{\omega BD^2}{2}\right)$$

e sostituendolo nell'espressione del momento meccanico, si ottiene

$$M = \frac{BD^2}{2R}\left(V_0 - \frac{\omega BD^2}{2}\right) = \frac{BD^2 V_0}{2R}\left(1 - \frac{BD^2\omega}{2V_0}\right)\ .$$

Il momento è massimo all'inizio, quando $\omega = 0$, ovvero è speso per mettere in moto il disco da fermo. A regime si avrà

$$M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \frac{BD^2}{2V_0}\omega = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_\infty = \frac{2V_0}{BD^2}\ ,$$

e questo è il valore in cui la $f.e.m.$ indotta è uguale ed opposta a V_0 quindi smette di scorrere corrente nel circuito, $i_\infty = 0$. Risolvendo in particolare l'equazione del moto, si ha

$$M = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{BD^2V_0}{2R}\left(1 - \frac{BD^2}{2V_0}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{BD^2V_0}{2RI}\left(1 - \frac{BD^2}{2V_0}\right)$$

che ha come soluzione, sapendo che $I = mD^2/2$,

$$\omega(t) = \frac{2V_0}{BD}\left(1 - e^{-\frac{B^2D^2}{2mR}t}\right) \qquad \omega_\infty = 10^3\ rad/s \qquad \tau = \frac{2mR}{B^2D^2} = 80\ s\ .$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione della corrente e del momento meccanico si ha

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(V_0 - \frac{\omega B D^2}{2}\right) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{B^2D^2}{2mR}t}$$

$$M(t) = \frac{BD^2}{2} i(t) = \frac{BD^2 V_0}{2R} e^{-\frac{B^2D^2}{2mR}t}$$

con

$$i_0 = 1.25\ A \qquad M_0 = 6.25\ 10^{-3}\ Nm\ .$$

L'energia totale spesa è la somma di quella dissipata per effetto Joule sulla resistenza R e quella contro la $f.e.m.$ indotta: la seconda è spesa in energia cinetica rotazionale del disco quindi, a regime, vale

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega_\infty^2 = \frac{1}{4} m D^2 \omega_\infty^2$$

mentre quella spesa per effetto Joule vale

$$E_J = \int R i^2(t)\ dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{B^2D^2}{mR}t}\ dt = \frac{mV_0^2}{B^2D^2} = \frac{1}{2} I \omega_\infty^2\ .$$

L'energia totale spesa è quindi

$$E_{Tot} = \frac{1}{2} I \omega_\infty^2 + \frac{1}{2} I \omega_\infty^2 = \frac{1}{2} m D^2 \omega_\infty^2 = 500\ J\ .$$

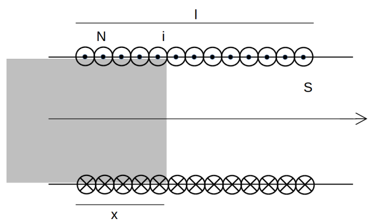
Esercizio 52

Consideriamo un solenoide di lunghezza l=10 cm, costituito da N=1000 spire di area S=1 cm^2 percorse dalla corrente I=1.0 A. Nel solenoide viene inserito un nucleo di ferro dolce; le condizioni di lavoro sono tali che il nucleo ha una caratteristica $B(H)$ approssimativamente lineare, cosicchè si può porre $B = \mu_0 \mu_r H$ con μ_r=1000. Calcolare la forza con cui il nucleo viene risucciato dentro il solenoide.

Soluzione 52

L'induttanza del solenoide vale

$$L = \frac{\Phi(B)}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r n I\ Snl}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 S l$$



con $n = N/l$ la densità di spire, e l'energia magnetica di questo si può scrivere come

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2\ .$$

Quando si inserisce il nucleo di ferro per un tratto x avremo un sistema costituito da due induttanze in serie, per il quale l'induttanza totale si può scrivere, in funzione di x come la somma delle induttande delle due porzioni, in cui è presente o no il nucleo di ferro

$$L_{TOT}(x) = \mu_0 \mu_r n^2 S x + \mu_0 n^2 S (l - x) = \mu_0 n^2 S [l + (\mu_r - 1) x]$$

da cui l'energia magnetica

$$U_m = \frac{1}{2} L_{TOT}(x) I^2 = \frac{1}{2} I^2 \mu_0 n^2 S [l + (\mu_r - 1) x]\ .$$

Se la corrente che scorre nel solenoide rimane costante vuol dire che è presente un generatore che compie lavoro per compensare la corrente indotta a causa dell'autoflusso di B

$$U_g = \int f.e.m.\, dQ = \int f.e.m. \frac{dQ}{dt}\, dt = \int f.e.m. I\, dt = -\int \frac{d}{dt}(LI)I = -I^2 \int \frac{dL}{dt}\, dt = -I^2 \Delta L$$

e vediamo che nel caso in cui la corrente di conduzione rimanga costante si ha che

$$\Delta U_{TOT} = \Delta_m + \Delta_g = \frac{1}{2} I^2 \Delta L - I^2 \Delta L = -\frac{1}{2} I^2 \Delta L = -\Delta U_m \ .$$

In particolare questo vale anche per trasformazioni infinitesime quindi ai fini di un bilancio energetico per il calcolo della forza esercitata dal solenoide sul blocco di ferro si ha

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_{TOT} = \vec{\nabla} U_m \ .$$

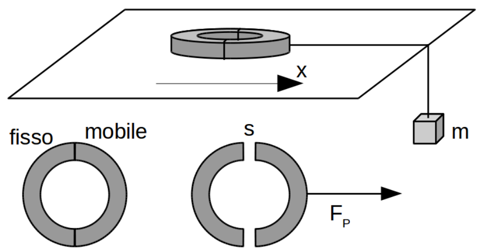
Questo resultato si può estendere in generale ai sistemi in cui la corrente è mantenuta costante da un generatore esterno, ricordando di considerare come variazione di energia totale la variazione di quella magnetica cambiata di segno. Nel caso considerato, la forza diretta lungo l'asse del solenoide vale

$$F_x = \frac{dU_m}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} I^2 \mu_0 n^2 S [l + (\mu_r - 1)x] \right) = (\mu_r - 1) \frac{I^2 \mu_0 n^2 S}{2}$$

ove si vede che il verso della forza è dato dal valore di $\chi_m = (\mu_r - 1)$. Per materiali paramagnetici e ferromagnetici questo termine è positivo quindi questi vengono risucchiati all'interno del solenoide; per materiali diamagnetici è invece negativo e questi sono espulsi dal magnete. Numericamente si ha in questo caso

$$F_x = 6.28\ N \ .$$

Esercizio 53



Un toro costituito da una lega ferromagnetica con μ_r=400 (costante), di sezione Σ=6.0 cm^2 e lunghezza media l=2.4 m, è posto su di un piano orizzontale. Il toro è tagliato trasversalmente in due puntidiametralmente opposti; uno dei due semitori è fissato al piano, il secondo può scorrere sul piano, senza attrito, lungo la direzione x, come indicato in figura. Il circuito eccitatore è un solenoide con N=1500 spire percorso dalla corrente i=1.6 A, mantenuta costante da un generatore esterno. Il secondo semitoro viene allontanato in modo da creare due traferri, ciascuno di spessore s=6.0 mm, e mantenuto in posizione tramite due spessori di permeabilità magnetica relativa unitaria, posti nello spazio tra i traferri. Al secondo semitoro è collegato un filo inestensibile di massa trascurabile a cui può essere appesa una massa m. Calcolare:
a) l'intensità di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nel materiale ferromagnetico quando i due semitori non sono separati;
b) l'intensità di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nel materiale ferromagnetico e nel traferro a separazione avvenuta;
c) la variazione di energia nell'operazione di separazione;
d) il valore minimo di m necessario per provocare il distacco del secondo semitoro dagli spessori.

Soluzione 53

a) Si calcola il valore di H dalla circuitazione su un cammino che passi all'interno dei due semitori ferromagnetici e di conseguenza il valore del campo di induzione magnetica B

$$Hl = Ni \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{Ni}{l} = 10^3\ A/m \qquad B = \mu_0\mu_r H = 0.5\ T\ .$$

b) Nel caso in cui i due semitori siano separati si può applicare ugualmente il teorema della circuitazione di H includendo i due traferri

$$H'l + H_0' 2s = Ni$$

ove abbiamo identificato le condizioni in cui i due semitori sono distanziati utilizzando l'apice $'$. Ricordando che vale

$$B' = \mu_0\mu_r H' \qquad H' = \frac{B'}{\mu_0\mu_r} = \frac{B_0'}{\mu_0\mu_r} \qquad H_0' = \frac{B_0'}{\mu_0}$$

in particolare utilizzando il fatto che per la componente normale alla superficie di transizione del materiale deve valere $B' = B_0'$. Sostituendo nell'equazione della circuitazione si ottiene

$$\frac{l}{\mu_r}B_0' + 2sB_0' = \mu_0 Ni \qquad \Rightarrow \qquad B_0' = \frac{\mu_0\mu_r Ni}{(l + 2\mu_r s)} = 0.167\ T$$

e da questo si ricavano i valori del campo magnetico nel nucleo e nel traferro

$$H' = \frac{B_0'}{\mu_0\mu_r} = \frac{Ni}{(l + 2\mu_r s)} = 3.3\ 10^2\ A/m \qquad H_0' = \frac{B_0'}{\mu_0} = \frac{\mu_r Ni}{(l + 2\mu_r s)} = 1.33\ 10^5\ A/m\ .$$

c) L'energia del sistema è data dalla densità di energia integrata su tutto il volume di interesse, ricordando che

$$u = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} \qquad U_m = \int_\tau u\ d\tau\ .$$

Quando i due semitori sono attaccati questa vale

$$U_i = \int_\tau \frac{1}{2}BH\ d\tau = \frac{1}{2}\Sigma l BH = \frac{1}{2}\Sigma l\mu_0\mu_r H^2 = \frac{\mu_0\mu_r}{2}\frac{N^2 i^2\Sigma}{l}$$

mentre dopo la separazione, integrando anche la densità di energia nel volume dei traferri

$$U_f = \int_\tau \frac{1}{2}B'H'\ d\tau = \frac{1}{2}\Sigma l B_0' H' + \frac{1}{2}\Sigma 2sB_0' H_0' = \frac{1}{2}\Sigma l\mu_0\mu_r H'^2 + \frac{1}{2}\Sigma 2s\mu_0 H_0'^2 =$$

$$= \frac{\mu_0\mu_r}{2}\frac{N^2 i^2\Sigma}{(l + 2s\mu_r)^2}l + \frac{\mu_0\mu_r}{2}\frac{N^2 i^2\Sigma}{(l + 2s\mu_r)^2}\mu_r 2s = \frac{\mu_0\mu_r}{2}\frac{N^2 i^2}{(l + 2s\mu_r)}\Sigma = U_i\frac{l}{(l + 2s\mu_r)}\ .$$

La variazione di energia magnetica è data da

$$\Delta Um = U_f - U_i = U_i\frac{l}{(l + 2s\mu_r)} - U_i = U_i\left(\frac{-2s\mu_r}{(l + 2s\mu_r)}\right) = -2.41\ J\ .$$

Si noti che questa è la variazione di energia magnetica, che è opposta in segno alla variazione di energia totale del sistema, che include l'energia spesa dal generatore che mantiene costante la corrente i. La variazione di energia totale è quindi positiva, ovvero occorre fornire energia al sistema per allontanare i due semitori (come l'esperienza ci suggerisce).

d) Se il generatore mantiene la corrente costante per allontanare i due semitori serve applicare la forza

$$F = +\frac{dU_m(x)}{dx}\left(= -\frac{dU_{TOT}(x)}{dx}\right) \qquad \text{con} \qquad U_m(x) = \frac{\mu_0\mu_r}{2}\frac{N^2 i^2 \Sigma}{(l + 2x\mu_r)}$$

analogamente a quanto ottenuto nel calcolo per il caso in cui ci fossero i due spessori s di vuoto. Si ricava

$$F_x = -\frac{\mu_0\mu_r}{2}\frac{N^2 i^2 \Sigma}{(l + 2x\mu_r)^2}$$

quindi i semitori si staccano se la forza peso del blocco è maggiore di questa forza, calcolata quando $x = s$ (ovvero la condizione in cui ci sono già gli spessori s)

$$mg > |F_x| \qquad \Rightarrow \qquad m > \frac{|F_x|}{g} = \frac{\mu_0\mu_r}{2g}\frac{N^2 i^2 \Sigma}{(l + 2s\mu_r)^2} = 13.7\ Kg\ .$$

Si noti che se i due semitori fossero stati attaccati, senza la presenza degli spessori, sarebbe stato necessario appendere una massa

$$m' > \frac{\mu_0\mu_r}{2g}\frac{N^2 i^2 \Sigma}{l^2} = 461\ Kg$$

molto maggiore della precedente. Anche se di poco, il fatto che i due semitori siano già distanziati facilita un ulteriore allontanamento poichè la forza di attrazione dipende dall'inverso della distanza tra questi (circa al quadrato).

4 Esercizi da esoneri

Esercizio 54 (es.2 esonero 23/04/2010)

Un cilindro conduttore di raggio R_1=5 mm, lunghezza L= 2 m è coassiale con due gusci cilindrici di raggio R_2=50 mm e di raggio R_3=240 mm, anch'essi conduttori e di uguale lunghezza. Il cilindro più interno è stato caricato con una carica Q_1 pari a Q=2.4 μC, l'intermedio con una carica Q_2 pari tre volte Q (Q_2= 3 Q) e l'esterno possiede una carica negativa pari a Q_3= -Q. I gusci hanno spessore trascurabile rispetto a R_1. Si calcolino:
a) le differenze di potenziale $V(R_1) - V(R_2)$ e $V(R_2) - V(R_3)$;
b) il modulo eld campo elettrico in un punto P_1 a distanza d_1=190 mm dall'asse del sistema ed in un punto P_2 a distanza d_2= 400 mm dallo stesso asse;
c) l'energia elettrostatica immagazzinata del sistema.
Questa configurazione iniziale viene poi modificata collegando un sottile filo conduttore tra il cilindro di raggio R_1 ed il guscio di raggio R_3. In questa nuova configurazione, si calcoli:
d) il valore del modulo del campo elettrico nei punti P_1 e P_2;

Soluzione 54

Esercizio 55 (es.2 esonero 12/04/2013)

Un condensatore è costituito da tre sottili gusci sferici metallici concentrici A, B, C rispettivamente di raggi a, b, c con $a < b < c$. Il guscio più interno è connesso con quello più esterno tramite un sottile filo metallico isolato che passa attraverso un puccolo foro praticato nel guscio intermedio. Una carica Q è depositata sul guscio intermedio mentre il sistema costituito dai conduttori connessi A e C ha carica totale nulla.
a) Si calcoli il rappporto fra le cariche Q_i^B e Q_e^B distribuite rispettivamente sulle superfici interna ed esterna del guscio intermedio.
b) Si ricavi l'espressione della densità di energia elettrostatica in funzione della distanza r dal centro del sistema e della carica Q, nello spazio compreso tra A e B e in quello tra B e C.
c) Si determini la condizione che devono verificare i raggi a,b e c affinchè le pressioni elettrostatiche interna ed esterna al guscio intermedio siano uguali.
d) Si calcoli la carica accumulata sul conduttore A e quella sul conduttore C, indicando il rispettivo segno, assumendo a=12 cm, b=14 cm e c=18 cm e Q=$2.0 \cdot 10^{-8}$ C.

Soluzione 55

Esercizio 56 (es.2 esonero 11/04/2014)

Un dispositivo elettrostatico è costituito da due sottili gusci sferici concentrici di raggio R_1= 4 cm e R_2=5 cm, mantenuti rispettivamente a potenziali V_1 e V_2. Una sorgente emette elettroni nel punto P dello spazio vuoto compreso tra i due gusci, a distanza R_P= 4.5 cm dal centro delle due superfici sferiche. Gli elettroni hanno una velocità iniziale, perpendicolare alla direzione radiale del sistema sferico passante per P, e un'energia cinetica pari a 1.4 keV. Si chiede di calcolare
a) il valore della differenza $V_1 - V_2$ tale da far compiere agli elettroni un'orbita circolare,
b) l'energia elettrostatica immagazzinata nel dispositivo.
(Si ricorda che la carica dell'elettrone è e=-1.6$\cdot$ 10^{-19} C.)

Soluzione 56