Lezione 5

L'integrale definito della velocità

Riprendiamo che si muove su una retta:

$s(t) :=$ posizione di al tempo t

$v(t) :=$ velocità istantanea di al tempo t

$$\boxed{\text{Che cosa rappresenta: } \int_a^b v(t)\,dt \ ?}$$

- Dimensionalmente: $F \to [Y]$, $x \to [X]$ $\Rightarrow \int_a^b F(x)\,dx \ [Y \cdot X]$

$$\int_a^b v(t)\,dt \quad [m/s \cdot s] = [m]$$

$\Rightarrow$ l'integrale definito della velocità è (dimensionalmente) uno spostamento!

$$\boxed{\text{Di quale spostamento si tratta?}}$$

RIP

$$\int_a^b v(t)\,dt = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} v(z_i)\,\frac{b-a}{N}$$

dove: $z_i =$ punto in $[t_{i-1}, t_i)$

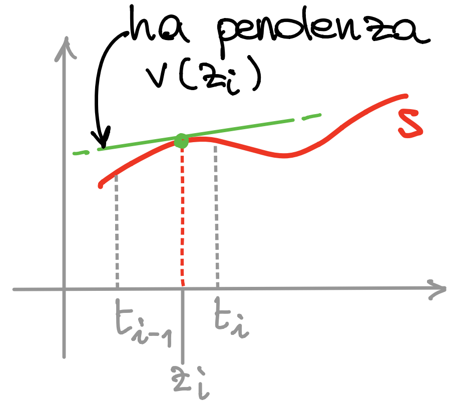
$a = t_0 < t_1 < \dots t_{N-1} < t_N = b$

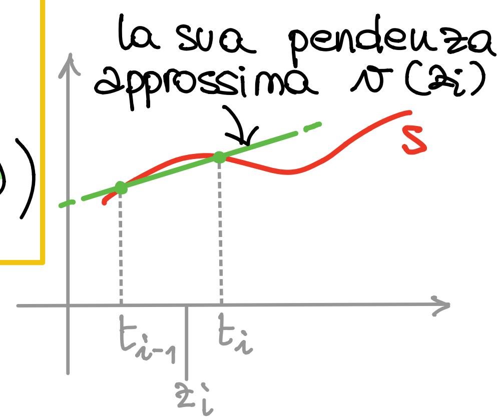
$v(z_i) =$ velocità istantanea in z_i

$v(z_i)$ è la pendenza della retta tongente al grafico di s nel punto $(z_i, s(z_i))$

$\approx$

pendenza della retta che congiunge $(t_{i-1}, s(t_{i-1}))$ con $(t_i, s(t_i))$





ovvero:

$$v(z_i) \approx \frac{s(t_i) - s(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

$$= \frac{s(t_i) - s(t_{i-1})}{\frac{b-a}{N}} \rightarrow \underbrace{v(z_i) \cdot \frac{b-a}{N}}_{\text{è il termine delle somme } S_N} \approx s(t_i) - s(t_{i-1})$$

Quindi:

$$\int_a^b v(t)\,dt = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} v(z_i) \frac{b-a}{N}$$

$$\underset{N \text{ grande}}{\approx} \sum_{i=1}^{N} v(z_i) \frac{b-a}{N} = \sum_{i=1}^{N} \left[s(t_i) - s(t_{i-1}) \right]$$

$$= \cancel{S(t_1)} - S(t_0) + \cancel{S(t_2)} - \cancel{S(t_1)} + \cancel{S(t_3)} - \cancel{S(t_2)}$$

$$\dots + S(t_N) - \cancel{S(t_{N-1})}$$

$$= S(t_N) - S(t_0) = S(b) - S(a)$$

Conclusione: $\displaystyle\int_a^b v(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \underbrace{S(b) - S(a)}$

non dipende da N!

è lo **SPOSTAMENTO NETTO tra il tempo a e il tempo b**

$$\boxed{\int_a^b v(t)\,dt = S(b) - S(a)}$$

Abbiamo quindi dedotto che:

$$\int_a^b S'(t)\,dt = S(b) - S(a)$$

e semplicemente cambiando nome agli oggetti potevamo dedurre

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

o anche: Prendo primitiva $F'(x) = f(x)$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \quad \text{con } F'(x) = f(x)}$$

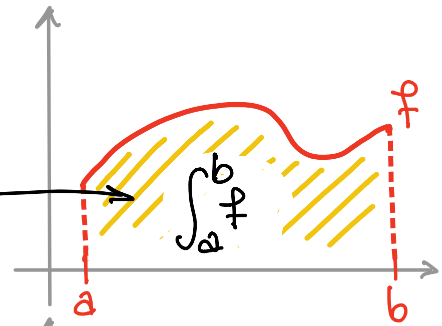
Teorema di Torricelli-Barrow

o Teorema di Valutazione

- Se $f \geq 0$ su $[a,b]$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

rappresenta l'area

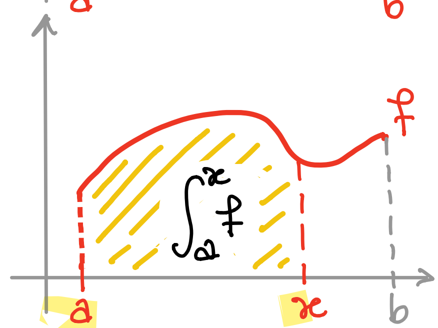


- Possiamo ora sostituire b con un qualsiasi $x \in [a,b]$ e considerare solo una porzione di quest'area

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

in quanto positiva

↑ primitiva di f

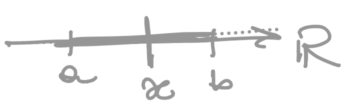


Definiamo ora $\boxed{G(x) := \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)}$

↑ G è una FUNZIONE INTEGRALE

e notiamo che:

- $G(a) = 0$
- G è una primitiva di f, infatti $G'(x) = F'(x) + 0$



la pendenza della costante $F(a)$ è nulla

Arriviamo quindi al seguente risultato:

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

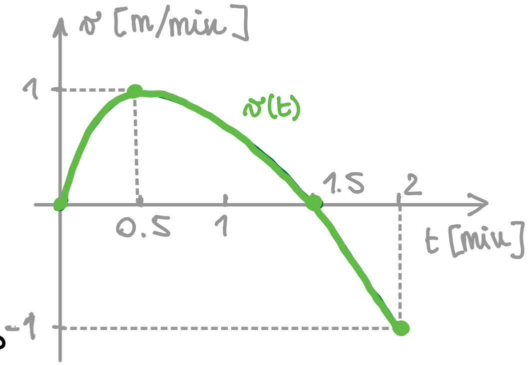
Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che → tale che...

sia $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$.

Allora G è derivabile e $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

es)

ESEMPIO Il grafico rappresenta la velocità di un oggetto che si muove su una retta. Stimare la posizione dell'oggetto quando $t=2$ sapendo che $s(0)=2$.

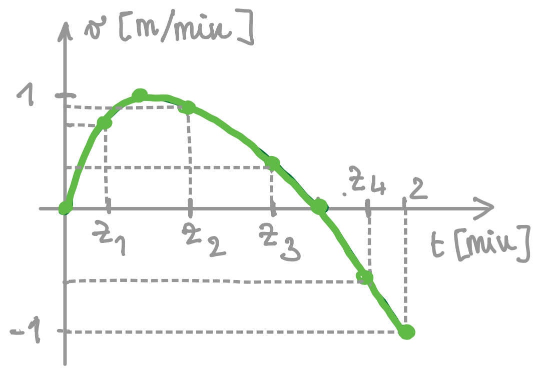


Ora sappiamo che: $\int_0^2 v(t)\,dt = s(2)-s(0)$

$$\Rightarrow s(2) = s(0) + \int_0^2 v(t)\,dt$$

e possiamo stimare $\int_0^2 v(t)\,dt$ con una somma del tipo: $\sum_{i=1}^{N} v(z_i)\,\frac{b-a}{N}$

Scegliamo $N=4$, determiniamo x_i, z_i e $v(z_i)$:

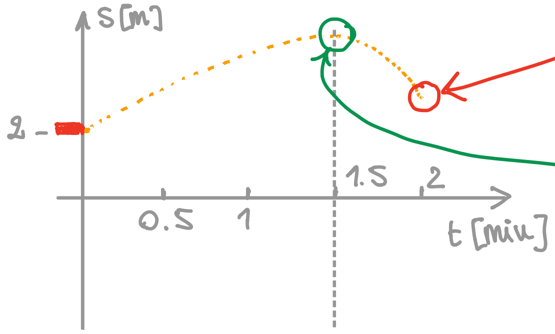


a	b	N	(b-a)/N
0	2	4	0,5

i	x_{i-1}	x_i	z_i	$v(z_i)$
1	0	0,5	0,25	0,650
2	0,5	1	0,75	0,900
3	1	1,5	1,25	0,340
4	1,5	2	1,75	-0,570

$$s(2) \approx s(0) + \sum_{i=1}^{4} v(z_i)\,\frac{2-0}{4}$$

$$= 2 + 0{,}66 = 2{,}66$$



è questa altezza

provare a stimare questa altezza con lo stesso procedimento

(suggerimento: scegliendo $N = 3$ si usano i dati della tabella $\rightsquigarrow$ si ottiene $s(1.5) \approx 2.95$)

Media Integrale

$$\boxed{\text{Sia } f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}. \text{ Cos'è la sua media?}}$$

- Dati N numeri, $x_1 \dots x_N$, la loro media è
$$m = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$
ovvio

- Prendiamo N valori assunti dalla f su $[a,b]$ e facciamo la media di questi valori: $z_1 \dots z_N \in [a,b]$

$$\boxed{\text{media}(f; [a,b]) \approx \frac{f(z_1) + \dots + f(z_N)}{N}}$$

1) quali z_i prendiamo?

2) quanto grande prendiamo N?

2) più grande è N, più è precisa l'appross.

1) come nella costruzione dell'integrale!

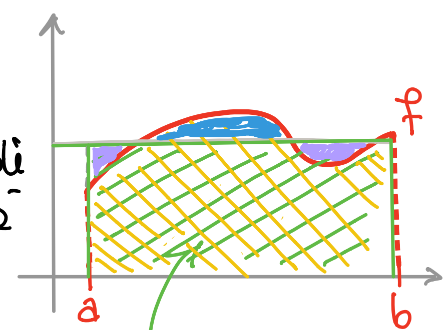
$$\text{media}(f; [a,b]) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(z_i)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{N} f(z_i) \frac{b-a}{N}$$

$$\boxed{\text{media}(f; [a,b]) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt}$$

Media integrale

se $\boxed{f \geq 0}$: la media di f su $[a,b]$ è il numero che moltiplicato per la lunghezza di $[a,b]$ ci fornisce l'area $\int_a^b f$



questa area è equivalente a quella tra l'asse x e il grafico di f.