Lezione 23

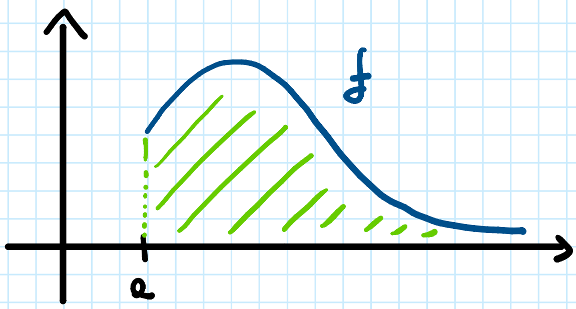
Integrali impropri

Si tratta di integrali in cui (almeno) un estremo di integrazione è infinito, ovvero

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx} \qquad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

ci concentriamo su questa tipologia; la seconda è analoga e la terza si ottiene dalle prime due $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{+\infty} \right)$

Significato geometrico



Se $f \geq 0$, si vuole definire l'area della regione illimitata sotto il grafico di f: scopriremo che, in alcuni casi, quest'area può essere finita!

Pur essendo chiaro il significato intuitivo, serve una definizione rigorosa

Def Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua (con $a \in \mathbb{R}$)

Si pone

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

purché il limite esista. Il valore di questo limite si dice integrale improprio di f su $[a, +\infty)$; inoltre diremo che:

- l'integrale è convergente se il limite è finito
- l'integrale è divergente se il limite è infinito

- ~~l'integrale è divergente se il limite è infinito~~

Osservazioni

1) Poiché f è continua, f è integrabile su $[a,b]$ $\forall b>a$ e dunque l'espressione di cui si sta facendo il limite è ben definita

2) In termini di funzioni di accumulazione:
   - abbiamo considerato la f.ne di accumulazione di base a, ovvero $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
   - ne abbiamo considerato il $\lim_{x\to+\infty} F(x) =: \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

3) Se $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$, allora la funzione $F(x)$ è monotona crescente (infatti, per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F'(x) = f(x)$) e dunque $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ esiste sempre (finito o infinito)

4) Se $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ non esiste, si dice a volte che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è indeterminato (o irregolare o oscillante)

es fond

Vediamo ora:

Esempio fondamentale

Sia $p>0$ e

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \qquad \text{su } [1,+\infty)$$

e consideriamo la f.ne di accumulazione

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^p}\,dt$$

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^p}\,dt$$

Poiché le primitive di $\frac{1}{t^p} = t^{-p}$ sono
$$\begin{cases} \frac{1}{1-p}\,\frac{1}{t^{p-1}} + c & p \neq 1 \\ \log t + c & p = 1 \end{cases}$$

per il teorema di Torricelli–Barrow si ha

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{x^{p-1}} - 1\right) & p \neq 1 \\ \log x & p = 1 \end{cases}$$

e dunque

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ +\infty & 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \ \text{è} \ \begin{cases} \text{convergente se } p > 1 \\ \text{divergente se } 0 < p \leq 1 \end{cases}}$$

Osservazioni

1) L'estremo inferiore di integrazione 1 può essere sostituito da un qualunque $a > 0$ (ma non $a = 0$, perché?)

2) In effetti, la convergenza/divergenza di un integrale improprio dipende solo dal comportamento asintotico di f per $x \to +\infty$; infatti se $a' > a$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{a'} f(x)\,dx}_{\text{integrale "usuale"}} + \int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx$$

"uncle"

3) L'esempio $f(x)=\frac{1}{x^p}$ sembra suggerire che a determinare la convergenza/divergenza di un integrale improprio sia la velocità con cui f tende a 0 quando $x \to +\infty$. Nella Lezione 20, avevamo visto che lo stesso accade per le serie: approfondiremo questa analogia nel seguito e nella prossima lezione.

Come prima conferma di questa analogia, vediamo: criteri di convergenza

1) Criterio del confronto

Siano $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continue e tali che $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$ (o almeno definitivamente per $x \to +\infty$). Supponiamo inoltre che $\boxed{f(x) \leq g(x)}$ $\forall x \geq a$ (o almeno definitivamente per $x \to +\infty$). Allora

- $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergente $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente
- $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ divergente

2) Criterio del confronto asintotico

Siano $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continue e tali che $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$ (o almeno definitivamente per $x \to +\infty$). Supponiamo inoltre che $\boxed{f(x) \sim g(x)}$ per $x \to +\infty$.

x che hanno limite

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergente}$$

$\int_e f(x)dx$ convergente $\Leftrightarrow$ $\int_e g(x)dx$ convergente

(e quindi $\int_e^{+\infty} f(x)dx$ divergente $\Leftrightarrow$ $\int_e^{+\infty} g(x)dx$ divergente)

Esempi:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+x+1}\,dx$ è divergente

Infatti: $\dfrac{x^2}{x^3+x+1} \sim \dfrac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ è divergente: si può dunque usare il criterio del confronto asintotico

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^8}+2}\,dx$ è convergente

Infatti: $$\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^8}+2} = \frac{x^{1/2}}{x+x^{8/3}+2}$$

$$\sim \frac{x^{1/2}}{x^{8/3}} = \frac{1}{x^{8/3-1/2}} = \frac{1}{x^{13/6}}$$

e $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{13/6}}\,dx$ è convergente (poiché $\frac{13}{6} > 1$)

Nota bene: non stiamo calcolando il valore degli integrali impropri, ma solo discutendo la loro convergenza

Un esempio più sofisticato

Consideriamo

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}}_{\text{funzione gaussiana}}\,dx$$

funzione gaussiana
(con opportune costanti ⇝ utile per le applicazioni in Probabilità e Statistica)

e dimostriamo che è convergente.

Come prima cosa, osserviamo che è sufficiente dimostrare che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ è convergente.

Per fare ciò, utilizziamo il criterio del confronto.

Si ha

$$\frac{x^2}{2} \geq x \qquad \forall x \geq 2$$

da cui

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^{-x} \qquad \forall x \geq 2$$

Quindi: $\int_2^{+\infty} e^{-x} dx$ convergente

$$\Downarrow$$

$$\int_2^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \text{ convergente}$$

Per dimostrare che $\int_2^{+\infty} e^{-x} dx$ è convergente possiamo fare il conto esplicito; infatti

$$\int_2^{x} e^{-t} dt = -e^{-x} - (-e^{-2}) = e^{-2} - e^{-x}$$

e dunque

$$\int_2^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} (e^{-2} - e^{-x}) = e^{-2} < +\infty$$