Semantica operazionale del λ-calcolo

Luca Padovani
Linguaggi e Paradigmi di Programmazione

È proibito condividere e divulgare in qualsiasi forma i materiali didattici caricati sulla piattaforma e le lezioni svolte in videoconferenza.
Ogni azione che viola questa norma sarà denunciata agli organi di Ateneo e perseguita a termini di legge.

variabili libere e legate

Definizione informale

- diciamo che un'occorrenza di x in M è legata se compare in sotto-termine della forma $\lambda x.N$ di M
- diciamo che un'occorrenza di x in M è libera altrimenti

Esempi

- $\lambda x.x$ — nessuna variabile libera $\Rightarrow$ termine chiuso
- $x\ y\ z$ — tutte le variabili sono libere
- $(\lambda x.x\ y)\ x$ — x occorre sia legata che libera

Definition (insieme delle variabili libere)

L'insieme delle variabili libere di un termine M, denotato da $fv(M)$, è definito induttivamente sulla struttura di M come segue:

$$fv(x) = \{x\} \qquad fv(\lambda x.M) = fv(M) \setminus \{x\} \qquad fv(M\ N) = fv(M) \cup fv(N)$$

sostituzione

Intuizione

- $M\{N/y\}$ è ottenuta sostituendo le **occorrenze libere** di y in M con N
- evitare la **cattura** delle variabili libere di N per non alterarne il senso

Definizione

$$x\{N/y\} = \begin{cases} N & \text{se } x = y \\ x & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

$$(M_1\ M_2)\{N/y\} = M_1\{N/y\}\ M_2\{N/y\}$$

$$(\lambda x.M)\{N/y\} = \begin{cases} \lambda x.M & \text{se } x = y \\ \lambda x.M\{N/y\} & \text{se } x \neq y \text{ e } x \notin fv(N) \\ \underbrace{\lambda z.M\{z/x\}\{N/y\}}_{\text{Rinomino Prima}} & \text{se } x \neq y \text{ e } x \in fv(N) \\ & \quad \text{e } z \in Var \setminus (fv(M) \cup fv(N)) \end{cases}$$

esempi di sostituzione

- $(\lambda x.x)\{y/x\} = \lambda x.x$ nessuna sostituzione
- $((\lambda x.x)\, x)\{y/x\} = (\lambda x.x)\, y$ solo occorrenze libere sono sostituite
- $(\lambda z.x)\{y/x\} = \lambda z.y$ $y \neq z$, non c’è cattura
- $(\lambda y.x\, y)\{y/x\} = \lambda z.y\, z$ y verrebbe catturata
- $(\lambda x.y)\{\lambda x.x/y\} = \lambda x.\lambda x.x$ $\lambda x.x$ è chiuso, non c’è cattura
- $(\lambda x.y)\{\lambda z.x/y\} = \lambda u.\lambda z.x$ x verrebbe catturata

α-conversione

Intuizione

- il significato di una funzione è indipendente dal nome dell'argomento

Definizione (α-conversione)

L'α-conversione $\Leftrightarrow_\alpha$ è la congruenza tra λ-espressioni tale che, se $y \notin fv(M)$, allora $\lambda x.M \Leftrightarrow_\alpha \lambda y.M\{y/x\}$.

Nota

- la condizione $y \notin fv(M)$ serve a evitare che una variabile libera in M venga catturata dalla conversione. Ciò altererebbe il significato di M

(contro)esempi di α-conversione

- $\lambda x.x \Leftrightarrow_\alpha \lambda y.y$
- $\lambda x.y \Leftrightarrow_\alpha \lambda z.y$
- $\lambda x.y \not\Leftrightarrow_\alpha \lambda y.y$ — y verrebbe catturata
- $\lambda x.\lambda y.x \Leftrightarrow_\alpha \lambda z.\lambda y.z$
- $\lambda x.\lambda y.x \Leftrightarrow_\alpha \lambda x.\lambda z.x$
- $\lambda x.\lambda y.x \not\Leftrightarrow_\alpha \lambda y.\lambda y.y$ — y verrebbe catturata

Convenzione

- da ora in avanti consideriamo uguali due espressioni α-convertibili

β-riduzione: intuizione

In matematica

- se $f(x) = x^2 + 2x + 1$, allora $f(5) = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 36$

Intuizione

- applicare una funzione $\lambda x.M$ a un argomento N significa valutare il corpo della funzione (M) in cui ogni occorrenza (libera) dell'argomento (x) è stata sostituita da N

β-riduzione: definizione

Definizione (β-riduzione)

La β-riduzione $\rightarrow_\beta$ è la relazione tra λ-espressioni tale che:

- $(\lambda x.M)\ N \rightarrow_\beta M\{N/x\}$
- *se* $M \rightarrow_\beta M'$, *allora* $M\ N \rightarrow_\beta M'\ N$
- *se* $M \rightarrow_\beta M'$, *allora* $N\ M \rightarrow_\beta N\ M'$
- *se* $M \rightarrow_\beta M'$, *allora* $\lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.M'$

Terminologia

Nella β-riduzione

$$(\lambda x.M)\ N \rightarrow_\beta M\{N/x\}$$

diciamo che:

- $(\lambda x.M)\ N$ è un β-**redex** (da "**red**ucible **ex**pression")
- $M\{N/x\}$ è il suo **ridotto**

esempi di β-riduzione

1. $(\lambda x.x)\ M \to_\beta x\{M/x\} = M$
2. $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y) \to_\beta (x\ x)\{\lambda y.y/x\} = (\lambda y.y)\ (\lambda y.y) \to_\beta \lambda y.y$
3. $(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ M \to_\beta \lambda x.M\ (M\ x)$
4. $(\lambda f.\lambda g.\lambda x.f\ (g\ x))\ M\ N \to_\beta (\lambda g.\lambda x.M\ (g\ x))\ N \to_\beta \lambda x.M\ (N\ x)$
5. $(\lambda x.\lambda y.x)\ M\ N \to_\beta (\lambda y.M)\ N \to_\beta M$
6. $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y\ y) \to_\beta (\lambda y.y\ y)\ (\lambda y.y\ y) \to_\beta \cdots$

Esercizio: ridurre la seguente λ-espressione

$$(\lambda x.y)\ ((\lambda z.(z\ z))\ (\lambda w.w))$$

Note

- ci possono essere più modi di ridurre una λ-espressione
- la riduzione di un β-redex può creare altri β-redex
- la riduzione di un β-redex può cancellare altri β-redex
- la riduzione può non terminare

la β-riduzione non esprime tutte le equivalenze volute

Esempio

Se $x \notin fv(M)$, usando la β-riduzione abbiamo

$$(\lambda x.M\,x)\,N \to_\beta (M\,x)\{N/x\} = M\{N/x\}\,N = M\,N$$

dunque

- applicando M ad N ottengo $M\,N$
- applicando $\lambda x.M\,x$ ad N ottengo $M\,N$
- due funzioni (come M e $\lambda x.M\,x$) che producono sempre lo stesso risultato se applicate allo stesso argomento dovrebbero essere equivalenti (**principio di estensionalità**), tuttavia in generale

$$M \not\twoheadrightarrow_\beta \lambda x.M\,x \qquad \lambda x.M\,x \not\twoheadrightarrow_\beta M$$

η-riduzione e riduzioni generalizzate

Definizione (η-riduzione)

L'η-riduzione $\rightarrow_\eta$ è la relazione tra λ-espressioni tale che:

- *Se $x \notin fv(M)$ allora $\lambda x.M\, x \rightarrow_\eta M$*
- *se $M \rightarrow_\eta M'$, allora $M\, N \rightarrow_\eta M'\, N$*
- *se $M \rightarrow_\eta M'$, allora $N\, M \rightarrow_\eta N\, M'$*
- *se $M \rightarrow_\eta M'$, allora $\lambda x.M \rightarrow_\eta \lambda x.M'$*

Definizione (riduzioni singole e multiple)

Scriviamo $\rightarrow$ per l'unione $\rightarrow_\beta \cup \rightarrow_\eta$ e $\Rightarrow$ per la chiusura riflessiva e transitiva di $\rightarrow$. Ovvero $\Rightarrow$ è la più piccola relazione tale che:

- *$M \Rightarrow M$*
- *se $M \rightarrow N$ allora $M \Rightarrow N$*
- *se $M \Rightarrow M'$ e $M' \Rightarrow N$ allora $M \Rightarrow N$*

convertibilità

Definizione

*Scriviamo $M \leftrightarrow N$ se $M \rightarrow N$ oppure $N \rightarrow M$ e scriviamo $\Leftrightarrow$ per la chiusura riflessiva e transitiva di $\leftrightarrow$. Diciamo che M ed N sono **convertibili** se $M \Leftrightarrow N$.*

Esempi

- $(\lambda x.\lambda y.x)\ M\ N \Leftrightarrow \lambda z.M\ z$
- $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y) \Leftrightarrow \lambda u.u$

- la relazione di convertibilità $M \Leftrightarrow N$ significa che M ed N sono uguali semanticamente, cioè rappresentano la stessa funzione