Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa
Programmazione Lineare

Andrea Grosso
Dipartimento di Informatica
Università di Torino
grosso@di.unito.it – 011-6706824

Sommario

Sistemi di equazioni lineari

Definizioni

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \vdots \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

Sistemi di equazioni lineari

Definizioni

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Sistemi di equazioni lineari

Definizioni

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}
$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

Sistemi di equazioni lineari

Definizioni

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}
$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

Sistemi di equazioni lineari
Definizioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b}$$

Sistemi di equazioni lineari

Definizioni

- Dato

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Sistemi di equazioni lineari

Definizioni

- Dato

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- risolverlo significa

identificare in modo non ambiguo l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}.$$

- Metodo: ridurre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a un sistema più semplice/leggibile

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$$

equivalente: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'\}$.

- Esempio: riduzione di Gauss.

Sistemi di equazioni lineari

Riduzione di Gauss

$$\begin{cases} \quad\;\; - 2x_2 \qquad\;\; + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ \;\; x_1 \qquad\;\; + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sistemi di equazioni lineari

Riduzione di Gauss

$$\begin{cases} \quad\; - 2x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 \qquad\;\; + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + \frac{7}{8}x_4 = \frac{11}{8} \\ \quad x_2 \qquad - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \\ \qquad\quad x_3 + \frac{1}{8}x_4 = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Sistemi di equazioni lineari

Riduzione di Gauss

$$\begin{cases} - 2x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{8}x_4 = \frac{11}{8} \\ x_2 - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \\ x_3 + \frac{1}{8}x_4 = \frac{5}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{11}{8} - \frac{7}{8}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 \end{cases} \quad (x_4 \in \mathbb{R}), \text{ libera.}$$

Proprietà

Siano $E_1, \dots, E_m$ le equazioni del sistema. Le soluzioni del sistema non cambiano se:

(i) due equazioni E_p, E_q vengono permutate $(\underline{E_p \leftrightarrow E_q})$; scambio

(ii) una equazione E_p

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \qquad (E_p)$$

viene sostituita da λE_p, con $\underline{\lambda \neq 0}$ $(E_p \leftarrow \lambda E_p)$: moltiplica

$$\lambda a_{p1}x_1 + \lambda a_{p2}x_2 + \cdots + \lambda a_{pn}x_n = \lambda b_p.$$

(iii) considerate due equazioni E_p, E_q

$$\begin{aligned} a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n &= b_p \qquad (E_p) \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \cdots + a_{qn}x_n &= b_q \qquad (E_q) \end{aligned}$$

si sostituisce E_q con $\underline{E_q + \lambda E_p}$ $(E_q \leftarrow E_q + \lambda E_p)$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$: comb. lineare

$$\begin{aligned} a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n &= b_p \\ (a_{q1} + \lambda a_{p1})x_1 + (a_{q2} + \lambda a_{p2})x_2 + \cdots + (a_{qn} + \lambda a_{pn})x_n &= (b_q + \lambda b_p) \end{aligned}$$

Sistemi di equazioni lineari

Trasformazioni elementari (sulle righe)

Equazioni		Righe di $\mathbf{A}$	Componenti di $\mathbf{b}$
$E_p \leftrightarrow E_q$		$\mathbf{A}^p \leftrightarrow \mathbf{A}^q$	$b_p \leftrightarrow b_q$
$E_p \leftarrow \lambda E_p$	$(\lambda \neq 0)$	$\mathbf{A}^p \leftarrow \lambda \mathbf{A}^p$	$b_p \leftarrow \lambda b_p$
$E_q \leftarrow E_q + \lambda E_p$		$\mathbf{A}^q \leftarrow \mathbf{A}^q + \lambda \mathbf{A}^p$	$b_q \leftarrow b_q + \lambda b_p$.

Sistemi di equazioni lineari

Riduzione di Gauss-Jordan

- Idea: finalizzare le riduzioni a diagonalizzare una porzione della matrice.

$$\begin{array}{ccc} & & \vert \\ r & - & a_{rs} \quad — \\ & & \vert \\ i & - & a_{is} \quad — \end{array}$$

- Idea: finalizzare le riduzioni a diagonalizzare una porzione della matrice.

for $p = 1, \ldots, m$ **do**
    if $\langle$almeno uno tra $\mathbf{A}^p, \ldots, A^m$ è $\neq \mathbf{0}\rangle$ **then**
        Scegli $a_{rs} \neq 0$ con $r \geq p$ e *s minimo possibile.*;
        for $i = 1, \ldots, m,\ i \neq r$ **do**
            Poni $\mathbf{A}^i \leftarrow \mathbf{A}^i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} \mathbf{A}^r$; $b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} b_r$; → per forzare $a_{is} = 0$ } el. colonna
        end for
        Poni $\mathbf{A}^r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} \mathbf{A}^r$; $b_r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} b_r$; → ultimo porta a $\underline{1}$
        Scambia $\mathbf{A}^p \leftrightarrow \mathbf{A}^r$; $b_p \leftrightarrow b_r$;
    end if
end for

↳ estetica

Sistemi di equazioni lineari

Riduzione di Gauss-Jordan

• a

• molt n

• scambio

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{3} & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow \frac{1}{3} E_2 \\ E_1 \leftrightarrow E_2}]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 + 0 E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{3} E_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

"fissa" →

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 \leftarrow -\frac{1}{2} E_2]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 + \frac{1}{6} E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{6} E_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{array}\right)$$

"fissa" →

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{4}{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[E_1 \leftarrow E_1 + \frac{1}{4} E_3]{\substack{E_2 \leftarrow E_2 + 0 E_3 \\ E_3 \leftarrow \frac{3}{4} E_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right)$$

↳ INF SOLUZIONI

Operazione di pivot (su $a_{rs} \neq 0$)

for $i = 1, \ldots, m$, $i \neq r$ **do**
  $\mathbf{A}^i \leftarrow \mathbf{A}^i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} \mathbf{A}^r$;
end for
$\mathbf{A}^r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} \mathbf{A}^r$;

Operazione di pivot (su $a_{rs} \neq 0$)

for $i = 1, \ldots, m,\ i \neq r$ **do**
  $\mathbf{A}^i \leftarrow \mathbf{A}^i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} \mathbf{A}^r$;
end for
$\mathbf{A}^r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} \mathbf{A}^r$;

Effetto sulla colonna $\mathbf{A}_s$ ...

$$\mathbf{A}_s \xrightarrow{\text{diventa}} \mathbf{A}'_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{“1” su riga } r).$$

Sistemi di equazioni lineari

Riduzione di Gauss-Jordan

Identità Fattori rimanenti B

$$
(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \to (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}') =
\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} & \beta_k \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n
\end{array}\right). \tag{1}
$$

eliminati

- Dall'esame della matrice completa (tableau) finale si deduce la risolvibilità del sistema, quantità di soluzioni, ...

Sistemi di equazioni lineari

Riduzione di Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 \quad - x_2 \qquad = 3 \\ \qquad x_2 - \frac{2}{5}x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-5} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Sistemi di equazioni lineari

Riduzione di Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-5} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{7}{5} \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{1}{5} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$\to$ imp

Applicazione: inversione di matrici quadrate

- Data $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la sua <u>inversa</u> $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (se esiste) garantisce

$$\mathbf{A}A^{-1} = A^{-1}A = I.$$

- Caso $n = 3$ per fissare le idee.
- Data

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- esiste una

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

tale che

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Applicazione: inversione di matrici quadrate

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Applicazione: inversione di matrici quadrate

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Applicazione: inversione di matrici quadrate

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Applicazione: inversione di matrici quadrate

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Tre sistemi con <u>la stessa</u> matrice dei coefficienti **A**.
- I termini noti non determinano le riduzioni, le subiscono.
- Risolviamo i tre sistemi in parallelo.

Applicazione: inversione di matrici quadrate

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1° 2° 3° risoluzione e

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}).$$

Ecco id

quindi prendo

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifica!

Sommario

Sistemi di equazioni lineari

Matrici di trasformazione

Matrici di trasformazione

Permutazione e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici di trasformazione

Permutazione e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici di trasformazione

Permutazione e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1$$

Matrici di trasformazione

Riscalamento di riga e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

Matrici di trasformazione

Riscalamento di riga e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{T}_2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrici di trasformazione

Riscalamento di riga e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{T}_2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2$$

Matrici di trasformazione

Combinazione e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Matrici di trasformazione

Combinazione e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}''' = \mathbf{T}_3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrici di trasformazione

Combinazione e prodotto di matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}''' = \mathbf{T}_3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3$$

Matrici di trasformazione

Sequenze di trasformazioni

$$T_1\colon\ E_1 \leftrightarrow E_2,$$
$$T_2\colon\ E_4 \leftarrow \tfrac{1}{2}E_4,$$
$$T_3\colon\ E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3.$$

Matrici di trasformazione

Sequenze di trasformazioni

$$
\begin{aligned}
T_1 &: E_1 \leftrightarrow E_2, \\
T_2 &: E_4 \leftarrow \tfrac{1}{2} E_4, \\
T_3 &: E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3.
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4}
$$

$$
\xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}'
$$

Matrici di trasformazione

Sequenze di trasformazioni

$$T_1 : E_1 \leftrightarrow E_2,$$
$$T_2 : E_4 \leftarrow \tfrac{1}{2} E_4,$$
$$T_3 : E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3.$$

Matrici di trasformazione

Sequenze di trasformazioni

$$T_1 : E_1 \leftrightarrow E_2,$$
$$T_2 : E_4 \leftarrow \tfrac{1}{2} E_4,$$
$$T_3 : E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3.$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{A} = \mathbf{T}_3(\mathbf{T}_2(\mathbf{T}_1\mathbf{A})) = \mathbf{PA}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1 \leftrightarrow E_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matrici di trasformazione

Sequenze di trasformazioni

$$T_1 :\ E_1 \leftrightarrow E_2,$$

$$T_2 :\ E_4 \leftarrow \tfrac{1}{2} E_4,$$

x associativa

$$T_3 :\ E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3.$$

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)\mathbf{A} = \mathbf{T}_3(\mathbf{T}_2(\mathbf{T}_1\mathbf{A})) = \mathbf{PA}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1 \leftrightarrow E_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}'$$

Matrici di trasformazione

Sequenze di trasformazioni

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{I}$$

- Basta trasformare l'identità.

Matrici di trasformazione

Sequenze di trasformazioni

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{I}$$

- Basta trasformare l'identità.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4}$$

$$\xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{P}.$$

- Se $\mathbf{P}$ è la matrice della sequenza di trasformazioni che riducono $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{equivale a} \quad \underbrace{\mathbf{PA}}_{\mathbf{A}'}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{Pb}}_{\mathbf{b}'}.$$

- Risolvendo per l'inversione di matrice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, ad es.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$$

Matrici di trasformazione

Riduzione di un sistema

- Se $\mathbf{P}$ è la matrice della sequenza di trasformazioni che riducono $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{equivale a} \quad \underbrace{\mathbf{PA}}_{\mathbf{A}'}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{Pb}}_{\mathbf{b}'}.$$
- Risolvendo per l'inversione di matrice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, ad es.
$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) =$$
$$= (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$$

  la $\mathbf{X}$ calcolata, oltre a garantire $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ è anche la matrice di trasformazione che trasforma $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{I}$
- quindi si ha anche $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$, e la $\mathbf{X}$ calcolata è proprio l'inversa.