5/12

Lezione 24

Confronto tra serie e integrali impropri

Già nella scorsa lezione abbiamo notato che ci sono analogie tra serie e integrali impropri.
Proviamo a riassumerle nella seguente tabella:

Serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$	Integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$
• Limite della successione delle somme parziali: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} a_n$	• Limite della f.ne di accumulazione: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$
• Se $a_n \geq 0 \ \forall n$, la serie è convergente o divergente	• Se $f(x) \geq 0 \ \forall x$, l'integrale improprio è convergente o divergente
• Valgono criteri del confronto e del confronto asintotico	• Valgono criteri del confronto e del confronto asintotico
• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$	• $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $\iff p > 1$

Osservazione Notiamo però che, mentre nel caso delle serie vale l'implicazione

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \text{ convergente} \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

$$\sum_{n=n_0} a_n \text{ convergente } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

l'analoga implicazione per gli integrali impropri non vale, cioè

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ convergente } \not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

(controesempio non banalissimo: si veda fine lezione)

Si può però dimostrare che

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ convergente } + \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Enunciamo ora un teorema che esprime, sotto opportune ipotesi, una corrispondenza "perfetta" tra serie e integrali impropri:

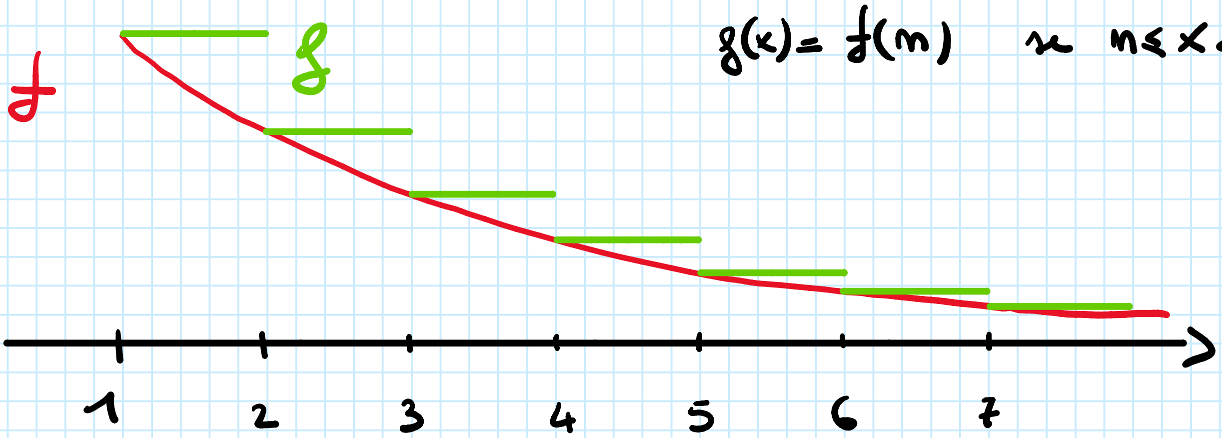
Criterio integrale per la convergenza di una serie

Sia $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua, positiva (cioè $f(x) \geq 0 \ \forall x$) e decrescente. Allora

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ convergente } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ convergente}$$

Visualizzazione geometrica

$g(x) = f(n)$ se $n \leq x < n+1$



1 2 3 4 5 6 7

- $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ è l'area sotto il grafico di f
- $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ è l'area sotto il grafico della funzione (discontinua) g (infatti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \dots \quad)$$

dim su notion

<u>dim</u> Definiamo

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \qquad x \geq 1$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) \qquad N \geq 1 \quad (N \text{ intero})$$

Poiché $f(x) \geq 0 \ \forall x \geq 1$, F è una funzione crescente e S_N è una successione crescente e dunque esistono (finiti o infiniti) $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ e $\lim_{N\to+\infty} S_N$.

Cerchiamo ora una stima che leghi F e S_N

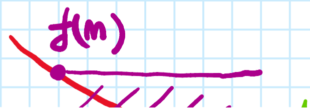
Per ogni intero $N \geq 1$, si ha

$$F(N) = \int_1^N f(t)\,dt$$

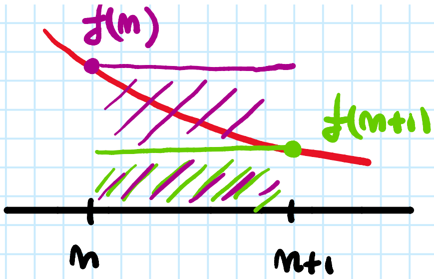
$$= \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + \dots + \int_{N-1}^N f(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

Poiché f è decrescente si ha



Poiché f è decrescente si ha



$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le f(n)$$

e dunque

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \le F(N) \le \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Essendo

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) = \sum_{k=2}^{N} f(k) = S_N - f(1)$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) = S_{N-1}$$

si ha dunque, per ogni intero $N \geq 1$,

$$\boxed{S_N - f(1) \le F(N) \le S_{N-1}}$$

Da questa stima preliminare, il risultato segue facilmente. Infatti:

- se $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ è convergente (cioè $\lim_{N\to+\infty} S_N$ è finito) allora F è superiormente limitata ($F(N) \le S_{N-1}\ \forall N$) e dunque $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ è finito, cioè $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente
- se $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente (cioè $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ è finito) allora S_N è superiormente limitata ($S_N \le F(N) + f(1)$)

allora S_N è superiormente limitata ($S_N \leq F(N) + f(1)$)
e dunque $\lim_{N\to+\infty} S_N$ è finito, cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$
è convergente. $\square$

Mediante questo criterio, è possibile dimostrare quanto abbiamo visto nella Lez 20 a proposito della serie armonica generalizzata.
Infatti, dato $\alpha > 0$, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x \geq 1$$

è continua, positiva e decrescente e dunque

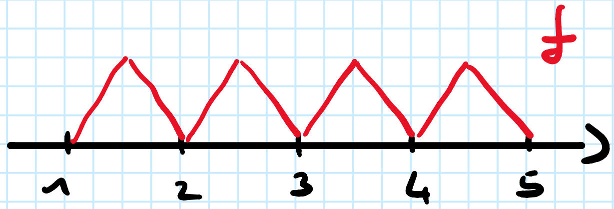
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}$$

Avendo dimostrato che l'integrale improprio converge se e solo se $\alpha > 1$, lo stesso succede per la serie

<u>Osservazione conclusiva</u>

Il criterio è falso se si rinuncia all'ipotesi che f sia decrescente. Infatti:

1)



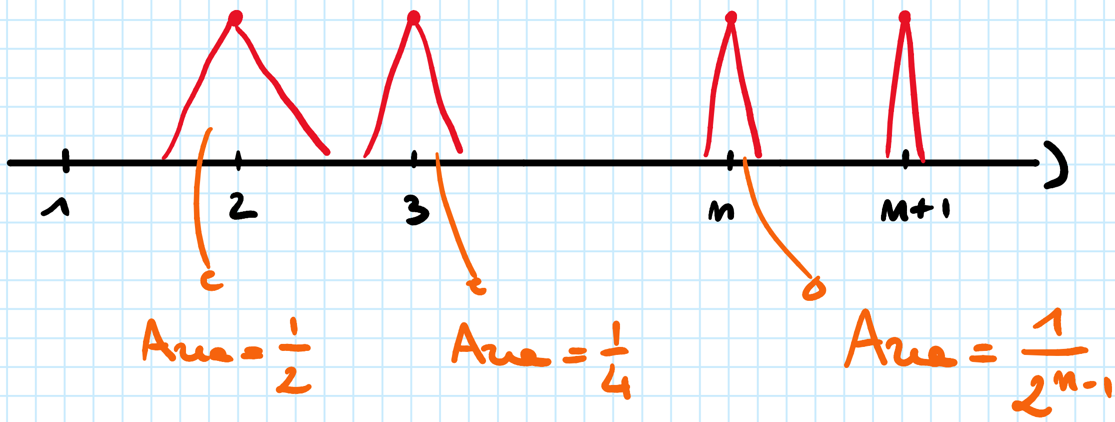
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f(n)}_{=0\ \forall n} = 0$$

Notion

2)



$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f(n)}_{=\text{costante } \forall n} = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < +\infty$$

Con ciò, abbiamo anche dato un esempio di integrale improprio convergente per cui $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$