Riscritture di termini - term rewriting

$\Sigma = \{f_1, \dots, f_k\}$ $\quad ar : \Sigma \to \mathbb{N}$

es. $\Sigma_{nat} = \{zero, succ\}$ $\quad ar(zero) = 0 \quad ar(succ) = 1$

T_Σ è il più piccolo insieme t.c.

$$f \in \Sigma,\ ar(f) = n,\ t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma$$

$$T_{\Sigma_{nat}} = \{zero, succ(zero), succ(succ(zero)), \dots, succ^n(zero), \dots\}$$

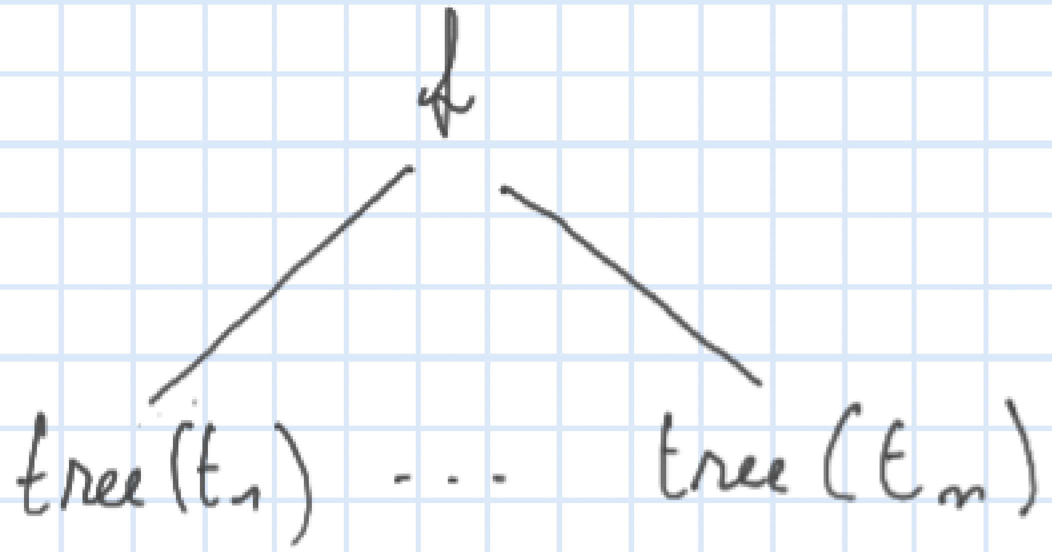
$\Sigma_{arit} = \Sigma_{nat} \cup \{+, \times\}$ $\quad ar(+) = ar(\times) = 2$

$$+(succ(zero), \times(zero, succ^2(zero))) \in T_{\Sigma_{arit}}$$

$\mathrm{tree}(t)$ = albero sintattico di t

$\mathrm{tree}(c) = c$

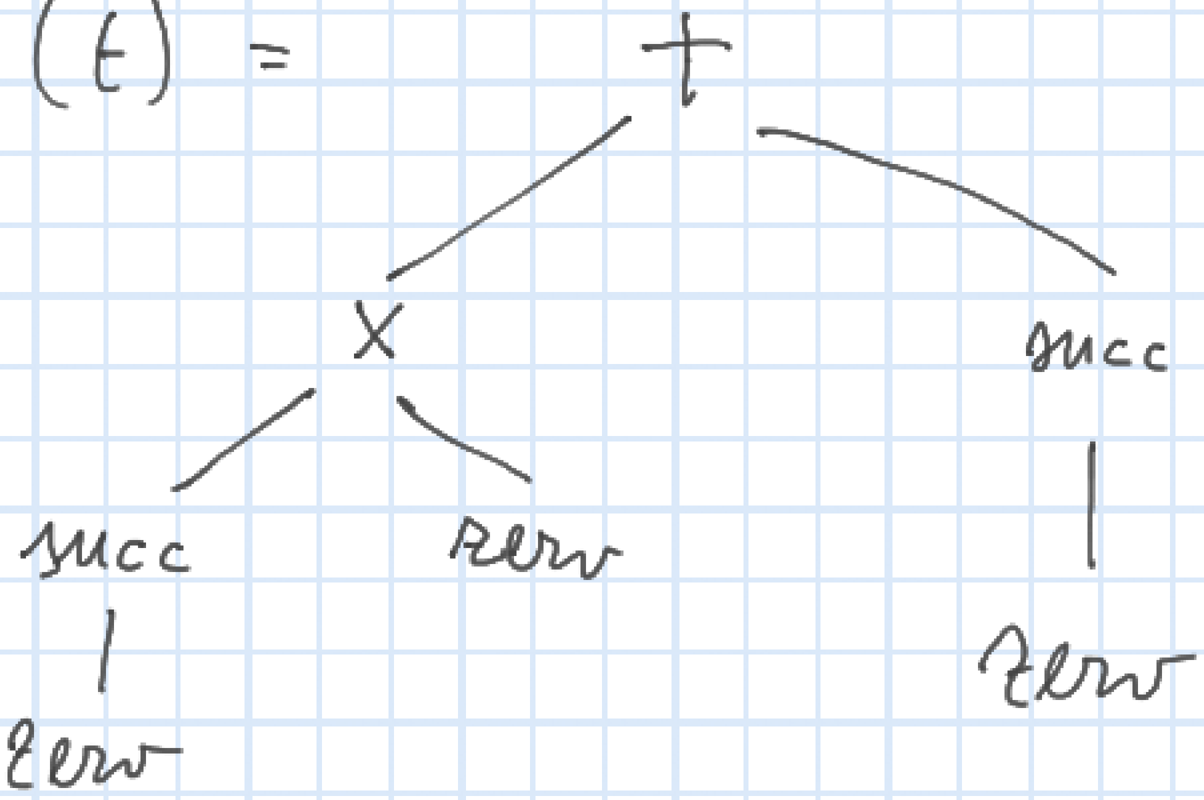
$\mathrm{tree}(f(t_1, \ldots, t_n)) =$



esempio:

$t = +(\times(\mathrm{succ}(\mathrm{zero}), \mathrm{zero}), \mathrm{succ}(\mathrm{zero}))$

$\mathrm{tree}(t) =$



Variabili

$X = \{x_0, x_1, \dots\}$ contabile

(a) $x \in X \Longrightarrow x \in T_\Sigma(X)$

(b) $f \in \Sigma,\ ar(f) = n,\ t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma(X) \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

$var(t) = \{x \in X \mid x \text{ occorre in } t\}$

$var(x) = \{x\}$ $\qquad$ $var(c) = \emptyset$

$var(f(t_1, \dots, t_n)) = var(t_1) \cup \dots \cup var(t_n)$

Se $var(t) = \emptyset$ allora $t \in T_\Sigma$ e si dice chiuso.

Sostituzione

$$\sigma : X \to T_\Sigma(X) \qquad x \in X \mapsto \sigma(x) = t \in T_\Sigma(X)$$

$t^\sigma \equiv$ il risultato delle sostituzione in t di ogni $x \in Var(t)$ con $\sigma(x)$

$$c^\sigma \equiv c \qquad x^\sigma \equiv \sigma(x) \qquad f(t_1, \dots, t_n)^\sigma \equiv f(t_1^\sigma, \dots, t_n^\sigma)$$

$$t \equiv +(x, \times(succ(y), x)) \qquad \begin{array}{l} \sigma(x) = succ(zero) \\ \sigma(y) = zero \end{array}$$

$$t^\sigma \equiv +(succ(zero), \times(succ(zero), succ(zero)))$$

Istanze e matching

$t \in T_\Sigma(X)$ allora s è un'<u>istanza</u> di t se

$$s \equiv t^\sigma \text{ per qualche } \sigma$$

Predicato

$$\text{match}(t, p) = \begin{cases} \sigma & \text{t.c. } t \equiv p^\sigma \\ \text{fail} & \text{se } t \text{ non è un'istanza di } p \end{cases}$$

$$t \equiv f(\dots) \qquad p \equiv g(\dots) \qquad f \not\equiv g$$

Algoritmo per il cacolo di match

$$match(t, x) = \{x \mapsto t\}$$

$$match(t, f(p_1, \dots, p_n)) = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_n$$

- $t \equiv f(t_1, \dots, t_n)$
- $match(t_i, p_i) = \sigma_i \neq fail$
- $\forall x \in var(t).\ \sigma_i(x) = \sigma_j(x)$ quando $i \neq j$

$match(t, f(p_1, \dots, p_n)) = fail$ altrimenti

Sistemi di riscrittura

Fissati X, Σ un sistema di riscrittura R è un insieme finito

$$R = \{ l_1 \to r_1, \dots, l_m \to r_m \} \subseteq T_\Sigma(X)^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} i) & l_i \notin X \quad (l_i \not\equiv x \text{ per ogni } x \in X) \\ ii) & var(r_i) \subseteq var(l_i) \end{array}\right\} \text{ per } i = 1, \dots, m$$

contesto $\quad C[\,] ::= [\,] \mid x \mid f(C_1[\,], \dots, C_n[\,]) \quad$ con un solo $[\,]$

es. $\quad C[\,] = +([\,], \times(zero, succ(zero)))$

$$\boxed{\begin{array}{l} \to_R \subseteq T_\Sigma(X) \quad \text{abbr. } s \to_R t \iff (s, t) \in \to_R \\ s \to_R t \text{ se } \exists C[\,], l \to r \in R. \quad s \equiv C[l^\sigma] \wedge t \equiv C[r^\sigma] \end{array}}$$

Esempio $\Sigma = \{a, f, g\}$ $ar(a) = 0$, $ar(f) = 1$, $ar(g) = 2$

$$R = \{ f(x) \to a,\ g(f(x), y) \to f(y) \}$$

$$g(f(a), f(f(a))) \equiv C[f(a)] \to_R C[a^\sigma] \equiv C[a]$$

$$C[\,] \equiv g([\,], f(f(a)))$$

$$\text{match}(f(a), f(x)) = \{x \mapsto a\} = \sigma$$

$$\text{match}(g(f(a), f(f(a))), g(f(x), y)) =$$

$$\{x \mapsto a,\ y \mapsto f(f(a))\} = \sigma'$$

$$g(f(a), f(f(a))) \to_R f(y)^{\sigma'} \equiv f(f(f(a)))$$

$\xrightarrow{*}_R$ chiusura riflessiva e transitiva di $\longrightarrow_R$

$$s \xrightarrow{*}_R t \overset{\Delta}{\iff} \exists\, t_0, \dots, t_n .\ s \equiv t_0 \longrightarrow_R t_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow_R t_n \equiv t$$

Def. R $(\longrightarrow_R)$ è *confluente* o *Church-Rosser*, CR

$$\forall s, t, t' .\ s \xrightarrow{*}_R t \wedge s \xrightarrow{*} t' \Longrightarrow \exists\, t'' .\ t \xrightarrow{*}_R t'' \wedge t' \xrightarrow{*}_R t''$$

$$\begin{tikzcd}
 & s \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
t \arrow[dr, dashed, "*"'] & & t' \arrow[dl, dashed, "*"] \\
 & t'' &
\end{tikzcd}$$

Corollario Se $\longrightarrow_R$ è CR allora ogni t ha al più una forma normale.

Logica equazionale

Fissata una segnatura Σ e un insieme num. di variabili X un'equazione è una coppia $(s,t) \in T_\Sigma(X)^2$, scritta $s \approx t$

$E = \{s_1 \approx t_1, \dots, s_n \approx t_n\} \subseteq T_\Sigma(X)^2$, def. $E \vdash s \approx t$

refl $\dfrac{}{E \vdash s \approx s}$ sym $\dfrac{E \vdash s \approx t}{E \vdash t \approx s}$ trans $\dfrac{E \vdash s \approx r \qquad E \vdash r \approx t}{E \vdash s \approx t}$

cong $\dfrac{E \vdash s_1 \approx t_1 \quad \dots \quad E \vdash s_n \approx t_n}{E \vdash f(s_1, \dots, s_n) \approx f(t_1, \dots t_n)}$ sub $\dfrac{E \vdash s \approx t}{E \vdash s^\sigma \approx t^\sigma}$

ax $\dfrac{s \approx t \in E}{E \vdash s \approx t}$

Esempio: $E = \{ a \overset{1}{\approx} b \, , \, f(x) \overset{2}{\approx} g(x) \}$

dimostriamo che $E \vdash g(b) \approx f(a)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E \vdash a \approx b}\,ax_1}{E \vdash f(a) \approx f(b)}\,cong \qquad \dfrac{\dfrac{}{E \vdash f(x) \approx g(x)}\,ax_2}{E \vdash f(b) \approx g(b)}\,sub}{\dfrac{E \vdash f(a) \approx g(b)}{E \vdash g(b) \approx f(a)}\,sym}\,tran
$$

$sym(\,tran(\,cong(\,ax_1\,),\, sub(\,ax_2\,)\,)\,) : E \vdash g(b) \approx f(a)$

Def. $s \underset{R}{\longleftrightarrow} t \overset{\Delta}{\iff} s \to_R t \ \vee \ t \to_R s$

sia $\overset{*}{\longleftrightarrow}_R$ chiusura rifl. e trans di $\longleftrightarrow$

<u>Teorema</u> Se R è CR allora

$$s \overset{*}{\longleftrightarrow} t \iff \exists r.\ s \overset{*}{\longrightarrow} r \ \wedge \ t \overset{*}{\longrightarrow} r$$

$(\Rightarrow)$ $s \equiv t_0 \leftarrow t_1 \longleftrightarrow \cdots\cdots \longleftrightarrow t_k \equiv t$ per qualche k

$$\begin{tikzcd}
s \equiv t_0 \arrow[d, dashed, "*"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{CR}"] & t_1 \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, dashed, "*"] & \cdots \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, phantom, "\text{ip. ind.}"] & t_k \equiv t \arrow[dl, dashed, "*"] \\
r' & & r \arrow[ll, dashed, "*"] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Normalizzazione (forte)

Fissati Σ e R

i) t è in forma normale se $\neg\exists t'.\ t \to_R t'$

ii) R è fortemente normalizzante se non esistono rid. infinite: $t \equiv t_0 \to_R t_1 \to_R \cdots\cdots$ (SN)

Corollario Se R è CR e SN allora $s \xleftrightarrow{*}_R t$ è decidibile.

dim. $s \xleftrightarrow{*}_R t \iff nf(s) \equiv nf(t)$

Logica equazionale vs riscrittura

Dato R sia $E_R = \{ l \approx r \mid l \to r \in R \}$

allora

Fatto: $E_R \vdash s \approx t \iff s \overset{*}{\longleftrightarrow}_R t$