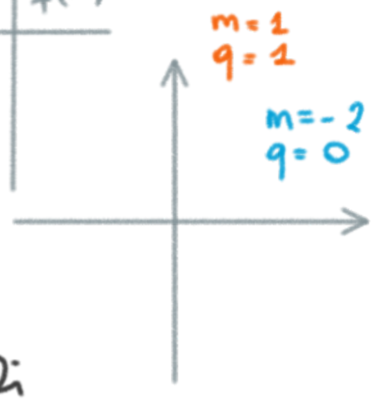
Lezione 1

Pendenza di una funzione lineare

$f(x) = mx + q, \quad m, q \in \mathbb{R}$

ES.

x	$f(x)$

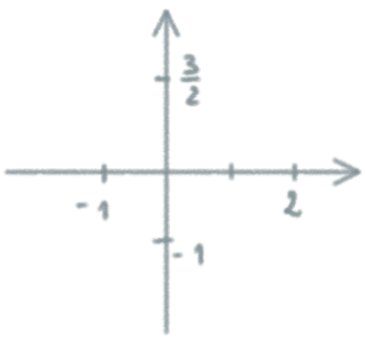


- $q = 0$: la retta passa per $(0,0)$
- questa equazione rappresenta tutte le rette del piano tranne quelle verticali
- $m = 0$: si tratta di rette orizzontali

Prendiamo $x_1 \neq x_2$ e definiamo

$\Delta x = x_2 - x_1$ INCREMENTO della x (o variazione)

$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ INCREMENTO di f nel passaggio da x_1 a x_2



ES.
$x_1 = -1 \qquad f(x_1) = 3/2$
$x_2 = +2 \qquad f(x_2) = -1$
$\Delta x = 2 - (-1) = 3$
$\Delta f = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

QUOZIENTE di NEWTON di f tra x_1 e x_2
(TASSO MEDIO di VARIAZIONE di f nel passaggio da x_1 a x_2)

ES. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{5}{6}$

Nota: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ sarebbe stato lo stesso scambiando x_1 e x_2 (sia Δf che Δx avrebbero avuto segno opposto)

Teorema. Sia $f(x)=mx+q$ con $\underset{\text{(varia)}}{x\in\mathbb{R}}$ e $\underset{\text{(fissati)}}{m,q\in\mathbb{R}}$

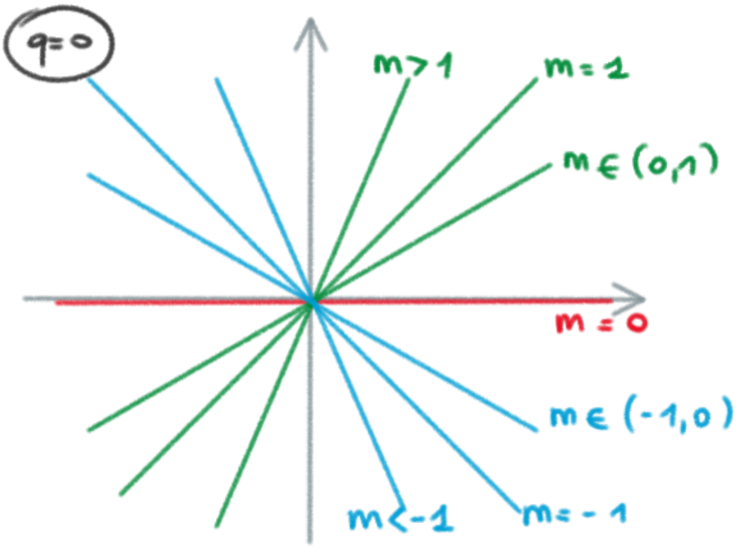
Allora: per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = m.$$

Dim. Presi $x_1 \neq x_2$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{mx_2+\cancel{q}-(mx_1+\cancel{q})}{x_2-x_1} = \frac{m\,\cancel{(x_2-x_1)}}{\cancel{x_2-x_1}} = m \qquad \blacksquare$$

def. Si dice **PENDENZA** della retta $y=mx+q$ il suo tasso di variazione medio m.



Nota. m viene anche chiamato
- coeff. angolare

o

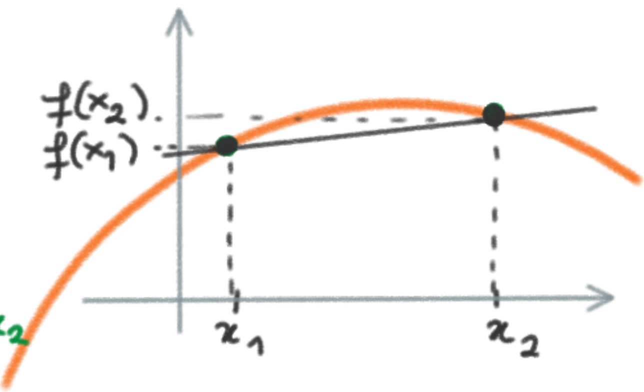
- coeff. di proporzionalità tra la variazione di f e quella di x

Pendenza di una funzione qualsiasi

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

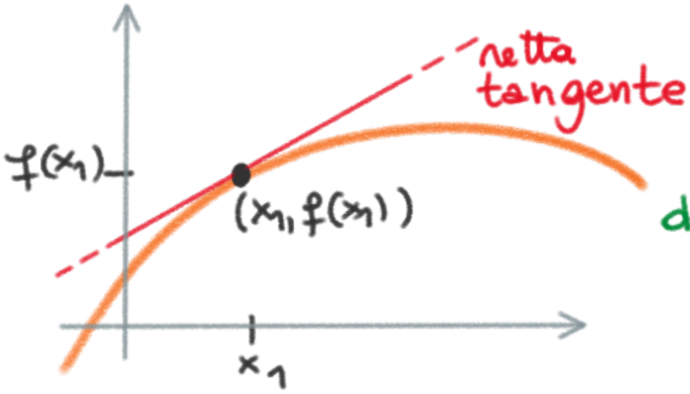
TASSO MEDIO di VARIAZIONE di f nel passaggio da x_1 a x_2

è la pendenza della retta per $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$



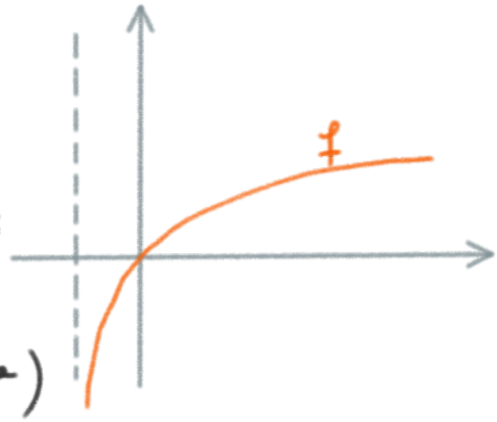
Come possiamo arrivare alla nozione di pendenza di f in x_1 ?

IDEA: $x_2 \longrightarrow x_1$
la retta tra $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ "tende" alla retta tangente al grafico di f in $(x_1, f(x_1))$



def. La pendenza di f in x_1 è la pendenza della tangente al grafico in $(x_1, f(x_1))$,

$$P_f(x_1) := \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

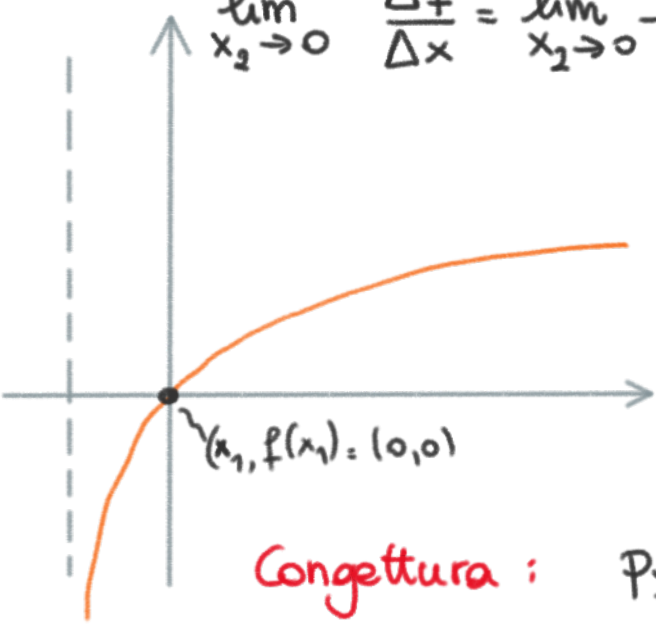


ESEMPIO. $f(x) = \ln(1+2x)$

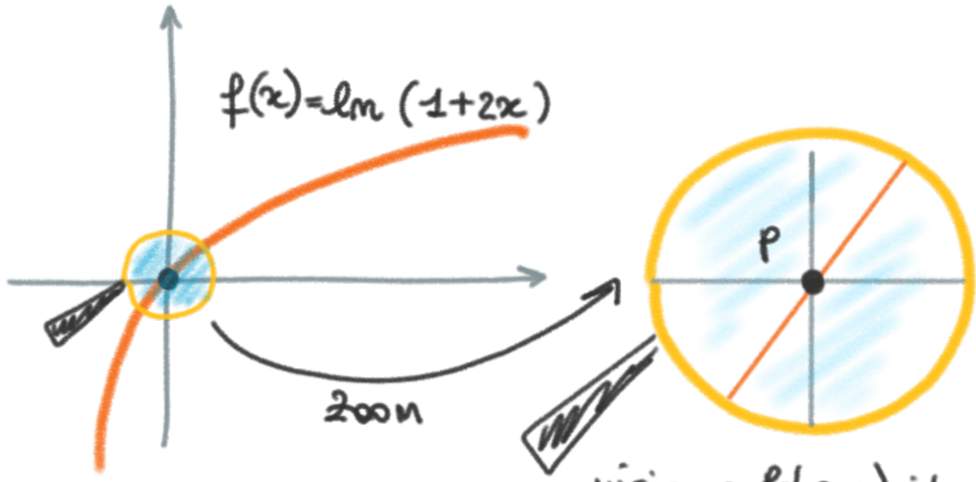
- f è definita se (e solo se) $1+2x>0$, $x>-\frac{1}{2}$
- $f(0) = \ln 1 = 0$

$P_f(0) = ?$ (ammesso che esista!!)

$$\lim_{x_2 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{f(x_2) - f(0)}{x_2 - 0} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{\ln(1+2x_2)}{x_2}$$



Congettura: $P_f(0) = 2$



vicino a $P=(0,0)$ il grafico di f "diventa" il grafico di $y=2x$

$\uparrow p_f(0)$

def. Una funzione si dice **LOCALMENTE DRITTA** vicino a $P=(x_1, f(x_1))$ se è possibile definirne la pendenza in x_1, $p_f(x_1)$. In questo caso ingrandendo il grafico di f vicino a P vediamo un grafico sempre più simile ad una retta.

def. La **RETTA TANGENTE** al grafico di f in P, se esiste, è la retta passante per P e con pendenza $p_f(x_1)$.

Attenzione. Eq. della retta tangente al grafico di f in $(x_1, f(x_1))$:

$$y = mx + q = ?$$

$$m = p_f(x_1)$$

$y = p_f(x_1)\,x + q$ imponiamo che passi per $(x_1, f(x_1))$

$$f(x_1) = p_f(x_1)\,x_1 + q \Rightarrow q = \dots$$

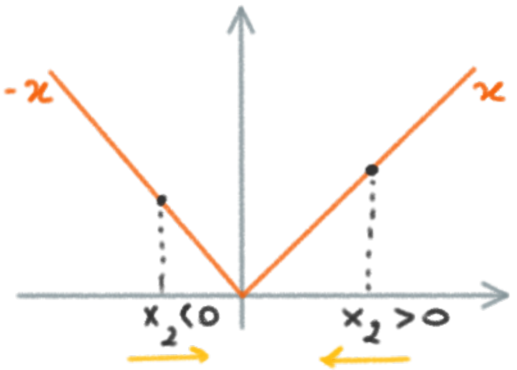
$$\Rightarrow \boxed{y = f(x_1) + p_f(x_1)(x - x_1)}$$ eq. della retta tangente al grafico di f in $(x_1, f(x_1))$

La $p_f(x_1)$ è sempre definita ?

Consideriamo:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$$

esiste $p_{|x|}(0)$?



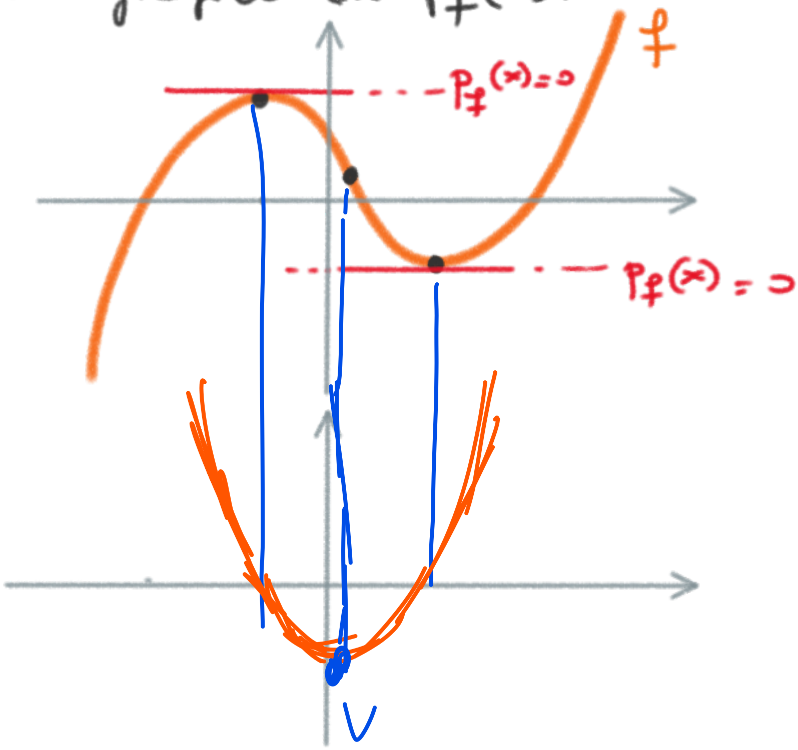
se $x_2>0$: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=+1$

se $x_2<0$: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=-1$

$\Downarrow$

$p_{|x|}(0)=-1 \neq p_{|x|}(0)=1 \Rightarrow$ la pendenza in $x_1=0$ NON è definita (non saprei se prendere 1 o -1)

ESERCIZIO. A partire dal grafico di $f(x)$, tracciare il grafico di $p_f(x)$.



abbiamo tracciato il grafico della "funzione pendenza di f" : $p_f(x)$