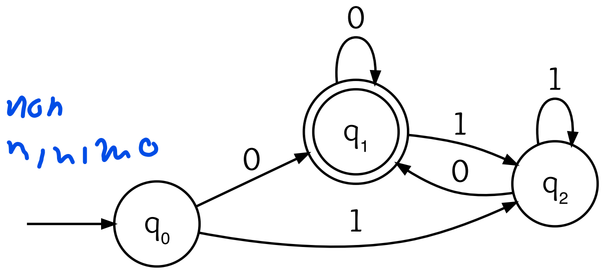
Linguaggi Formali e Traduttori

2.7 Minimizzazione di automi a stati finiti deterministici

Sommario

Motivazione

es.



- Osservando attentamente questo DFA ci accorgiamo c'è una **ridondanza**
- Una stringa accettata partendo da q_0 è accettata anche partendo da q_2 e viceversa
- Possiamo "fondere" q_0 e q_2 senza alterare il linguaggio riconosciuto dall'automa

Problema

- In generale, è desiderabile lavorare con DFA "piccoli"
- Avendo a disposizione un DFA, è possibile individuarne gli stati ridondanti e "minimizzarlo"?

In questa lezione

- Definiamo un algoritmo che costruisce il DFA **minimo** (cioè con il più piccolo numero di stati) che riconosce un certo linguaggio regolare.

Stati (in)distinguibili

Definizione

Dato un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, diciamo che $p, q \in Q$ sono **indistinguibili** se

$$\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$$

per ogni $w \in \Sigma^*$.

Nota

Affinché p e q siano indistinguibili **non è necessario** che $\hat{\delta}(p, w)$ e $\hat{\delta}(q, w)$ siano lo stesso stato per ogni w, ma solo che siano entrambi finali o entrambi non finali per ogni w.

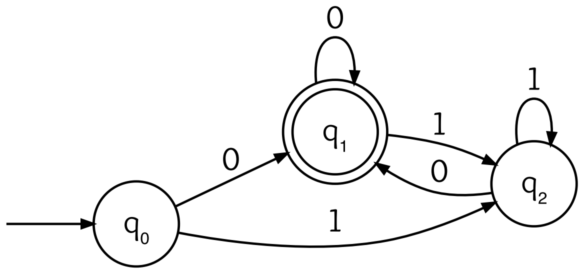
Definizione

Diciamo che due stati $p, q \in Q$ sono **distinguibili** se esiste $w \in \Sigma^*$ tale che solo uno tra $\hat{\delta}(p, w)$ e $\hat{\delta}(q, w)$ appartiene a F. Diciamo che una stringa w con questa proprietà **distingue** p da q.

Nota

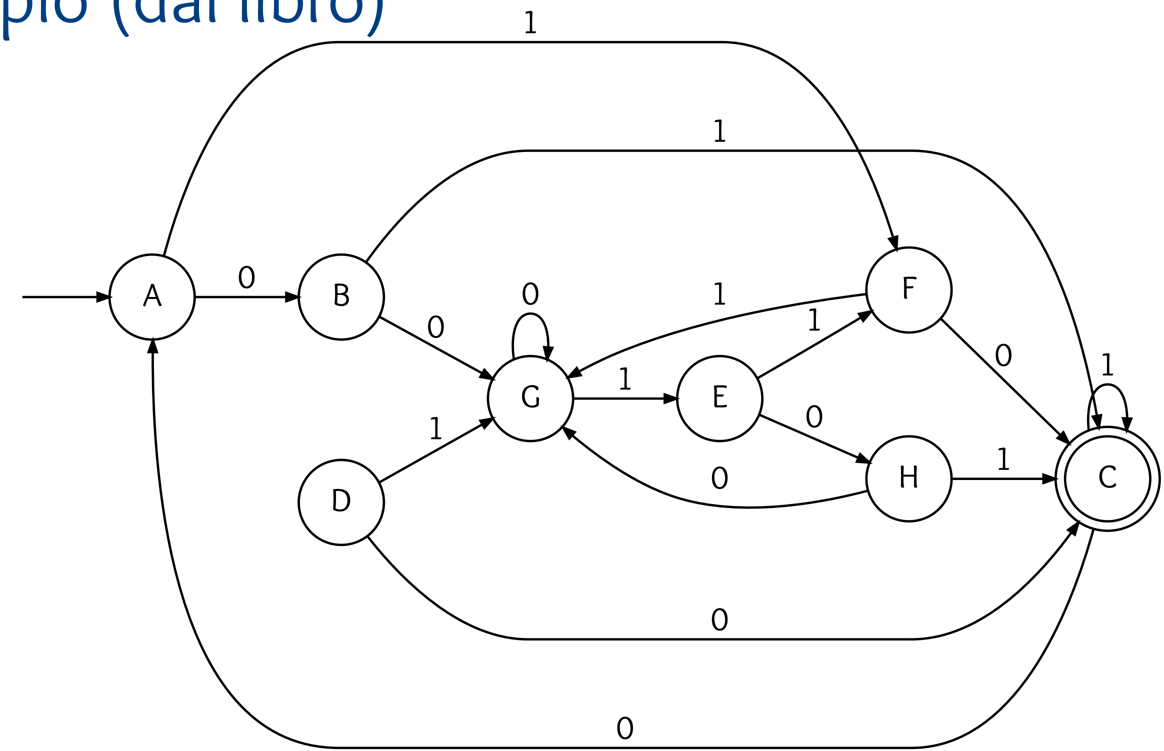
In generale ci possono essere molte stringhe che distinguono due stati.

Esempio



- La stringa ε distingue q_0 e q_1, in quanto q_1 è finale mentre q_0 no.
- Per lo stesso motivo, la stringa ε distingue q_1 e q_2.
- q_0 e q_2 sono indistinguibili, infatti:
  - sono entrambi non finali, dunque ε non li distingue;
  - la stringa `0` non li distingue, poiché li porta entrambi in q_1;
  - la stringa `1` non li distingue, poiché li porta entrambi in q_2;
  - dopo uno `0` o un `1`, q_0 e q_2 confluiscono nello stesso stato e da lì in avanti il loro percorso è lo stesso. Dunque, non può esistere alcuna stringa che li distingua.

Esempio (dal libro)



- A e G sono distinti da `01` ma non da `0` né da ε
- A ed E sono indistinguibili (confluiscono dopo `1`, `00` e `01`)

Algoritmo per trovare stati distinguibili

Input

Un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Output

L'insieme di tutte e sole le coppie di stati distinguibili di A.

Algoritmo

1. All'inizio nessuna coppia di stati è marcata come distinguibile.
2. Si marcano come distinguibili tutte le coppie $\{p, q\}$ in cui $p \in F$ e $q \notin F$.
3. Se esistono $p, q \in Q$ e $a \in \Sigma$ tali che $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ è marcata come distinguibile, si marca anche $\{p, q\}$ come distinguibile.
4. Si ripete il passo 3 fintantoché vengono marcate **nuove** coppie distinguibili.

Come eseguire l'algoritmo

- Si crea una **tabella triangolare** le cui righe sono etichettate con gli stati <u>dal secondo all'ultimo</u> e le cui colonne sono etichettate con gli stati dal <u>primo al penultimo</u>.
- Si marca con ✓ ogni casella corrispondente a una coppia distinguibile (passi 2 e 3).
- Si itera il passo 3 considerando tutte le caselle non marcate fintantoché possibile.

Esempio

Seguono le tabelle corrispondenti ai passi 1–3 dell'algoritmo eseguito sul DFA della slide 5.

Esempio

es

Seguono le tabelle corrispondenti ai passi 1–3 dell'algoritmo eseguito sul DFA della slide 5.

	A	B	C	D	E	F	G
B							
C							
D							
E							
F							
G							
H							

	A	B	C	D	E	F	G
B							
C	✓	✓					
D			✓				
E			✓				
F			✓				
G			✓				
H			✓				

	A	B	C	D	E	F	G
B	✓						
C	✓	✓					
D	✓	✓	✓				
E		✓	✓	✓			
F	✓	✓	✓		✓		
G	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
H	✓		✓	✓	✓	✓	✓

Note

- Iterando ancora una volta il passo 3 dell'algoritmo non si marcano altre coppie come distinguibili, dunque l'algoritmo termina.
- In generale possono servire più iterazioni del passo 3 prima che l'algoritmo termini.

L'indistinguibilità come equivalenza

Proposizione

L'indistinguibilità è una relazione di equivalenza, ovvero è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Notazione

Fissato un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, introduciamo la seguente notazione:

- Indichiamo con $\sim$ la **relazione di indistinguibilità** tra stati di A, ovvero $p \sim q$ se e solo se $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$ per ogni $w \in \Sigma^*$.
- Scriviamo $[p]$ per la **classe di equivalenza** di p, ovvero $[p] = \{q \in Q \mid p \sim q\}$.
- Scriviamo $X/\sim$ per l'**insieme quoziente** di X rispetto a $\sim$, cioè $X/\sim = \{[p] \mid p \in X\}$.

Costruzione dell'automa minimo

Algoritmo

Dato un DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, nel quale si assume di aver eliminato gli stati irraggiungibili dallo stato iniziale, l'**automa minimo** corrispondente è l'automa

$$(Q/\sim, \Sigma, \delta', [q_0], F/\sim)$$

in cui

$$\delta'([p], a) = [\delta(p, a)]$$

per ogni $p \in Q$ ed $a \in \Sigma$.

Teorema

Per ogni DFA A, non esiste un DFA equivalente il cui numero di stati è strettamente inferiore a quello dell'automa minimo corrispondente ad A costruito secondo l'algoritmo qui sopra.

Dimostrazione (facoltativa)

Si veda la Sezione 4.4.4 del libro.

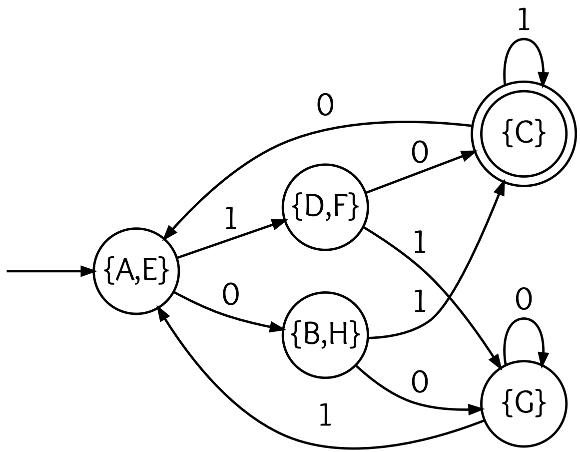
Esempio

Nell'automa della slide 5 gli stati diversi ma indistinguibili sono

$$A \sim E \qquad B \sim H \qquad D \sim F$$

pertanto l'automa minimo, illustrato sotto, ha come insieme degli stati

$$\{\{A, E\}, \{B, H\}, \{C\}, \{D, F\}, \{G\}\}$$



Equivalenza di automi

L'algoritmo riempi-tabella può essere usato per decidere se due automi sono **equivalenti**.

Input

Due DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ in cui possiamo assumere, senza perdere in generalità, che $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Output

Vero se $L(A_1) = L(A_2)$ e **falso** altrimenti.

Algoritmo

1. Si crea l'unione dei due DFA $A = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, q_1, F_1 \cup F_2)$ dove

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

   La scelta di eleggere q_1 come stato iniziale è fatta solo perché uno stato iniziale deve esserci.

2. Si esegue l'algoritmo riempi-tabella su A.
3. A_1 ed A_2 sono equivalenti se e solo se q_1 e q_2 sono indistinguibili in A.

Esercizi di minimizzazione

1. Costruire il DFA minimo equivalente ai seguenti automi (esercizi 4.4.1 e 4.4.2 del libro di testo):

	0	1
→A	B	A
B	A	C
C	D	B
*D	D	A
E	D	F
F	G	E
G	F	G
H	G	D

	0	1
→A	B	E
B	C	F
*C	D	H
D	E	H
E	F	I
*F	G	B
G	H	B
H	I	C
*I	A	E

2. Costruire il DFA minimo equivalente all'espressione regolare a^*b^*.

Esercizi di equivalenza

1. Dimostrare che i seguenti automi sono equivalenti