Combinazioni lineari

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$ (finitamente generati)

Sommario

Combinazioni lineari di vettori

Definizioni

- Dato
$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
- un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ è *combinazione lineare* dei vettori di S iff esistono $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{k} x_j\mathbf{v}_j.$$

Combinazioni lineari di vettori

Definizioni

- Dato
$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
- un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ è *combinazione lineare* dei vettori di S iff esistono $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{k} x_j\mathbf{v}_j.$$

$$\mathcal{L}(S) = \{\mathbf{w} \colon \mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k, \text{ con } x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

Combinazioni lineari di vettori

Definizioni

- Dato

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

se solo se

- un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ è *combinazione lineare* dei vettori di S iff esistono $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{k} x_j\mathbf{v}_j.$$

$$\mathcal{L}(S) = \{\mathbf{w} \colon \mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k,\ \text{con } x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

- Possiamo dire che $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$ se, costruendo una matrice $\mathbf{A}_S$ le cui colonne sono i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, risulta che il sistema

$$\mathbf{A}_S\mathbf{x} = \mathbf{w} \qquad \sum_{j=1}^{k} x_j\mathbf{v}_j = \mathbf{w} \qquad \mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

scritti in colonna

ammette soluzioni.

Combinazioni lineari

Esempio.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix},$$

- Preso $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ risulta $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$ se e solo se esistono $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

incognite

Combinazioni lineari

Esempio.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix},$$

- Preso $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ risulta $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$ se e solo se esistono $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = w_1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_3 = w_2 \\ x_2 + 2x_3 = w_3 \end{cases}$$

Combinazioni lineari

Esempio.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix},$$

- Preso $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ risulta $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$ se e solo se esistono $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_S} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

risolvo

w posto $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Imp

Combinazioni lineari

Indipendenza lineare

- I vettori di
$$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$
sono detti tra loro *linearmente indipendenti* iff
$$\sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$$
(altrimenti sono detti *linearmente dipendenti.*)
- Cioè: il sistema $\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha l'unica soluzione
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$$
- Cioè (2): l'unico modo per combinare linearmente i vettori di S nel vettore nullo è di usare coefficienti <u>tutti nulli</u>.
- S è detto anche *insieme libero.*

Osservazioni

Proprietà.

Vale che:

(i) Se S è un insieme libero, allora $\mathbf{0} \notin S$.

(ii) Se S è un insieme libero e $S' \subseteq S$, allora S' è un insieme libero.

(iii) Se S_1, S_2 sono insiemi liberi, $S_1 \cap S_2$ è un insieme libero.

(i) Per assurdo: se $\mathbf{0} \in S$ allora

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \qquad \text{con } x_1 \neq 0, x_2 = \cdots = x_k = 0.$$

(ii) Per assurdo: se S' non è libero esistono x'_j tali che

$$\sum_{\mathbf{v}_j \in S'} x'_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \qquad x'_j \ \underline{\text{non}} \text{ tutti nulli, } \mathbf{v}_j \in S'$$

allora: $\displaystyle\sum_{\mathbf{v}_j \in S} x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ con $x_j = \begin{cases} x_j = x'_j & \text{se } \mathbf{v}_j \in S' \\ x_j = 0 & \text{se } \mathbf{v}_j \in S \setminus S' \end{cases}$

(iii) Caso particolare di (*ii*).

Definizioni equivalenti

Proprietà. Dato $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, k_k\}$, sono condizioni equivalenti:

(i) $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$

(ii) $\mathbf{0} \notin S$, e per nessun nessun $\mathbf{v}_j$ risulta $\mathbf{v}_j \in \mathcal{L}(S \setminus \{\mathbf{v}_j\})$.

(iii) ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$ si esprime con un'unica combinazione lineare $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{k} x_j\mathbf{v}_j$ (i coefficienti x_j sono univocamente determinati).

(i) $\implies$ (ii). $\mathbf{0} \notin S$. banale

Se per assurdo $\mathbf{v}_j = \sum_{\mathbf{v}_p \in S\setminus\{\mathbf{v}_j\}} x_p\mathbf{v}_p$: Vj comb altri

$$\implies \mathbf{0} = -\mathbf{v}_j + \sum_{\mathbf{v}_p \in S\setminus\{\mathbf{v}_j\}} x_p\mathbf{v}_p.$$

---

parte da non (iii)

(ii) $\implies$ (iii). Se per assurdo $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{k} x_j\mathbf{v}_j$, $\cancel{\mathbf{w} =} \sum_{j=1}^{k} y_j\mathbf{v}_j$ con

due modi diversi

$(x_1, \dots, x_k) \neq (y_1, \dots, y_k)$ segue:

altro modo per fare 0

$$\sum_{j=1}^{k} x_j\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k} y_j\mathbf{v}_j \implies \sum_{j=1}^{k}(x_j - y_j)\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k} z_j\mathbf{v}_j = \mathbf{0}.$$

Definizioni equivalenti

$$\cancel{z_1} v_1 + \sum_{j=2}^{k} \underbrace{z_j v_j}_{z_1} = 0$$

Se per assurdo $z_1 \neq 0$:

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{j=2}^{k} -\frac{z_j}{z_1}\mathbf{v}_j \implies \mathbf{v}_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) \vee \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

contrad ipotesi !!

$\Downarrow$

Quindi $z_1 = 0$. Analogamente si dimostra $z_2, \ldots, z_k = 0$. Se $z_2 \neq 0$:

$\Longrightarrow$ faccio per ognuno $\Rightarrow$ i due modi differiscono per 0

$$\sum_{j=2}^{k} z_j\mathbf{v}_j = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_2 = \sum_{j=3}^{k} -\frac{z_j}{z_2}\mathbf{v}_j \implies \mathbf{v}_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k) \vee \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

. . . .

(iii) $\implies$ (i). Banale.

Sommario

Combinazioni lineari

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$ (finitamente generati)

- $V = \mathcal{L}(S)$ con
$$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$
- Le operazioni di somma vettoriale e di prodotto numero-vettore sono interne a V.
  (i) Se $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$, si ha ancora $(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \in V$.
  (ii) Se $\mathbf{w} \in V$, per qualunque $a \in \mathbb{R}$ si ha ancora $a\mathbf{w} \in V$.

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k} (x_j + y_j)\mathbf{v}_j$$

$$a\mathbf{w} = a \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k} (a y_j)\mathbf{v}_j$$

Sottospazi

- $\mathcal{L}(S)$ è un *sottospazio* di $\mathbb{R}^n$.
- Gli elementi di S sono detti *generatori* di V, e S è un suo *insieme generatore.*
- Uno spazio ha infiniti possibili insiemi generatori.

Sottospazi

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$, $S' = \{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$

Proprietà. Se $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{L}(S')$, allora $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S')$.

- $\mathcal{L}(S') \subseteq \mathcal{L}(S)$. → ovvia
- $\mathbf{v}_1 = \sum_{j=2}^{k} x_j \mathbf{v}_j$. 2
- Sia $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$.

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbf{v}_j =$$

$$= y_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{j=2}^{k} y_j \mathbf{v}_j =$$

2

$$= y_1 \sum_{j=2}^{k} x_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=2}^{k} y_j \mathbf{v}_j =$$

$$= \sum_{j=2}^{k} (y_1 x_j + y_j) \mathbf{v}_j \implies \mathbf{w} \in \mathcal{L}(S').$$

- Quindi $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(S')$.

Sottospazi

Concetti e risultati importanti

- Basi.

  Un insieme generatore di un sottospazio V è detto base di V *se e solo se è anche un insieme libero.*

- Tutte le (infinite) basi di un sottospazio V hanno la stessa cardinalità.
- La cardinalità delle basi di V è detta *dimensione* di V.

Osservazione. Da qualunque insieme di generatori si può sempre estrarre una base dello spazio generato. (seconda definizione)

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \qquad V = \mathcal{L}(S)$$

```
Poni B := ∅;
for ⟨ogni v_i ∈ S⟩ do
    if v_i ≠ 0 e v_i ∉ L(B) then
        Poni B := B ∪ {v_i};
    else
        Scarta v_i;
    end if
end for
return B;
```

Cardinalità delle basi

Teorema. Data una base B di $V = \mathcal{L}(B)$ e un vettore $\mathbf{w} \in V \setminus \{0\}$, esiste un <u>unico</u> elemento $\mathbf{v} \in B$ tale che

$$(B \cup \{\mathbf{w}\}) \setminus \{\mathbf{v}\}) \text{ sia una base di } V.$$

- Sia $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.
- $B \cup \{\mathbf{w}\}$ genera V: $= \mathcal{L}(B \cup \{\mathbf{w}\})$.
- Metodo degli scarti successivi su

$$\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k.$$

- $\mathbf{w}$ <u>non</u> viene scartato. in quanto primo
- Viene scartato un $\mathbf{v}_p \in B$.

↳ almeno 1 v_p scartato in quanto insieme non è più libero $\times v_p$

Cardinalità delle basi

Unicità dello scarto.

- Se per assurdo un altro $\mathbf{v}_q$ venisse scartato:

durante scarti successivi

- Risulta $\mathbf{v}_p = x_0\mathbf{w} + \sum_{j=1}^{p-1} x_j\mathbf{v}_j \quad (x_0 \neq 0).$ (a)

altrimenti non base

v_p è comb lineare

- Risulta $\mathbf{v}_q = y_0\mathbf{w} + \sum_{j=1}^{p-1} y_j\mathbf{v}_j + \sum_{j=p+1}^{q-1} y_j\mathbf{v}_j \quad (y_0 \neq 0)$ (b)

come prima

- Allora ricavo w

$$(a) \quad \mathbf{w} = \sum_{j=1}^{p-1} -\frac{x_j}{x_0}\mathbf{v}_j + \frac{1}{x_0}\mathbf{v}_p$$

$$(b) \quad \mathbf{w} = \sum_{j=1}^{p-1} -\frac{y_j}{y_0}\mathbf{v}_j + \sum_{j=p+1}^{q-1} -\frac{y_j}{y_0}\mathbf{v}_j + \frac{1}{y_0}\mathbf{v}_q$$

2 modi

ASSURDO

Cardinalità delle basi

Teorema. Tutte le basi di $V = \mathcal{L}(S)$ hanno la stessa cardinalità.

- Sia $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_q\}$.
- Per assurdo: $p < q$.
- Usando il metodo degli scarti successivi:

scelgo v_1 come scartato

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p & \to & \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \\
\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p & \to & \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \to & \mathbf{w}_p, \ldots, \mathbf{w}_1
\end{array}
$$

i w non possono essere scartati

- $\mathbf{w}_p, \ldots, \mathbf{w}_1$ base di V. ASSURDO.

Matrici di trasformazione, sottospazi e basi

- Siano $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{T}$ una matrice di trasformazione $n \times n$.

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}_S\mathbf{x} = \mathbf{w} & \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j\mathbf{v}_j = \mathbf{w} \\ \mathbf{T}\mathbf{A}_S\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{w} & \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j(\mathbf{T}\mathbf{v}_j) = \mathbf{T}\mathbf{w} \end{array}\right\} \text{equivalenti.}$$

Proprietà.

(i) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathbf{T}\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{T}\mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti.

(ii) $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\})$ se e solo se $\mathbf{T}\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\{\mathbf{T}\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{T}\mathbf{v}_k\})$.

Riduzione di Gauss Jordan e basi

Riduzione di Gauss-Jordan

$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \to \mathbf{A}_S$. L'indipendenza lineare tra colonne è legata al sistema

$$\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Nomenclatura. $\mathcal{L}(S)$ è lo *spazio delle colonne* della matrice $\mathbf{A}_S$.

$$(\mathbf{A}_S \,|\, \mathbf{0}) \to (\mathbf{A}'_S \,|\, \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right).$$

indip. / di base   dipenden. / fuori base

- Dall'esame della matrice completa (tableau) finale si deducono le dipendenze lineari e si estrae una base dello spazio delle colonne.
- La dimensione dello spazio delle colonne di una matrice $\mathbf{A}$ è detto *rango* di $\mathbf{A}$ — $\rho(\mathbf{A})$.
- $\rho(\mathbf{A})$ corrisponde anche al numero di equazioni non ridondanti/contraddittorie di ogni sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soluzioni di base di un sistema di equazioni lineari

Sistema ridotto (senza equazioni contraddittorie)

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) \to (\mathbf{A}'\,|\,\mathbf{b}') = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} & \beta_k \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_m
\end{array}\right).$$

def variabili base in base a quelle libere

$$\begin{cases}
x_1 = \beta_1 - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\
x_2 = \beta_2 - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_k = \beta_k - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{k_n} x_j
\end{cases}$$

- $x_1, \dots, x_k$ variabili di base; $x_{k+1}, \dots, x_n$ variabili fuori base.
- La soluzione

$$\begin{array}{ll} x_i = \beta_k & i = 1, \dots, k \\ x_i = 0 & i = k+1, \dots, n \end{array}$$

mette a 0

è l'unica soluzione che ha $x_{k+1}, \dots, x_n = 0$ ed è chiamata soluzione di base (associata alle colonne $1, \dots, k$) del sistema.