

Influenza e strategie di riduzione

Luca Padovani

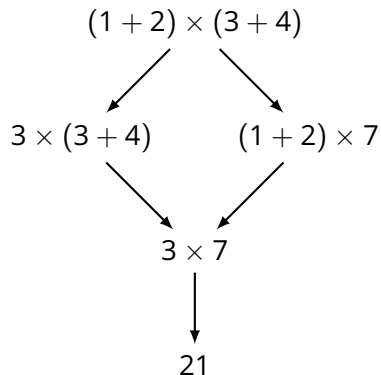
Linguaggi e Paradigmi di Programmazione

È proibito condividere e divulgare in qualsiasi forma i materiali didattici caricati sulla piattaforma e le lezioni svolte in videoconferenza. Ogni azione che viola questa norma sarà denunciata agli organi di Ateneo e perseguita a termini di legge.

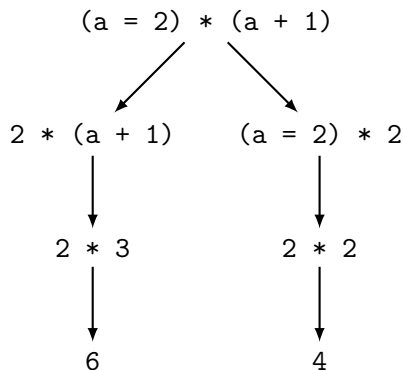
Teorema (confluenza)

Se $M \Rightarrow N_1$ e $M \Rightarrow N_2$ allora esiste N tale che $N_1 \Rightarrow N$ e $N_2 \Rightarrow N$.

Aritmetica



Java (int a = 1;)



unicità della forma normale

Definizione (forma normale)

Diciamo che M è in **forma normale** se **non può più essere ridotto**, ovvero se **non** esiste N tale che $M \rightarrow N$. **In tal caso scriviamo $M \rightarrow\!\!\rightarrow$.**

Corollario

La forma normale di M , se esiste, è unica (a meno di α -conversioni).

Dimostrazione.

Supponiamo che M abbia due forme normali N_1 ed N_2 , ovvero $M \Rightarrow N_1 \rightarrow\!\!\rightarrow$ e $M \Rightarrow N_2 \rightarrow\!\!\rightarrow$. Per il teorema di confluenza esiste N tale che $N_1 \Rightarrow N$ e $N_2 \Rightarrow N$. Siccome N_1 ed N_2 sono in forma normale, deve essere $N_1 = N = N_2$ (a meno di α -conversioni). \square

strategie di riduzione

Come scegliere il prossimo redex? Due possibilità naturali:

- 1 **redex più a sinistra e più interno** **ordine applicativo**

$$(\lambda x.x) \underline{((\lambda y.y) z)} \rightarrow \underline{(\lambda x.x) z} \rightarrow z$$

- 2 **redex più a sinistra e più esterno** **ordine normale**

$$\underline{(\lambda x.x) ((\lambda y.y) z)} \rightarrow \underline{(\lambda y.y) z} \rightarrow z$$

Strategie di riduzione e linguaggi di programmazione

- ▶ ordine applicativo \Rightarrow **applicare una funzione a un argomento**
significa prima valutare l'argomento e poi sostituire il valore ottenuto nel corpo della funzione **linguaggi "zelanti"**
- ▶ ordine normale \Rightarrow **applicare una funzione a un argomento** significa **sostituire l'argomento** (che non è necessariamente un valore) nel corpo della funzione **linguaggi "pigri"**

Le due strategie sono "equivalenti"? **NO**

un esempio in cui conviene essere pigri

Ordine applicativo

$$(\lambda x.y) (\underline{((\lambda z.z) (\lambda z.z))}) \rightarrow \underline{(\lambda x.y) (\lambda z.z)} \rightarrow y$$

Ordine normale

$$\underline{(\lambda x.y) ((\lambda z.z) (\lambda z.z))} \rightarrow y$$

Osservazioni

- ▶ l'argomento x non è **mai usato**
- ▶ l'ordine normale è più efficiente perché non lo valuta

un esempio in cui conviene essere zelanti

Ordine applicativo

$$\begin{aligned}(\lambda x.x\ x)\ ((\lambda y.y)\ (\lambda z.z)) &\rightarrow \frac{(\lambda x.x\ x)\ (\lambda z.z)}{(\lambda z.z)\ (\lambda z.z)} \\ &\rightarrow \lambda z.z\end{aligned}$$

Ordine normale

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda x.x\ x)\ ((\lambda y.y)\ (\lambda z.z))}{((\lambda y.y)\ (\lambda z.z))\ ((\lambda y.y)\ (\lambda z.z))} &\rightarrow \frac{(\lambda z.z)\ ((\lambda y.y)\ (\lambda z.z))}{(\lambda y.y)\ (\lambda z.z)} \\ &\rightarrow \lambda z.z\end{aligned}$$

Osservazioni

- ▶ l'argomento x è usato **due volte**
- ▶ l'ordine applicativo è più efficiente perché lo valuta una volta sola
- ▶ ottimizzare l'ordine normale: **salvare** il risultato della prima valutazione dell'argomento e **riusarlo** per le valutazioni successive

Teorema (normalizzazione)

Se $M \Leftrightarrow N$ ed N è in forma normale, allora c'è una riduzione in ordine normale $M \Rightarrow N$.

Conseguenze

- ▶ se la forma normale di un'espressione esiste, la posso trovare riducendo l'espressione in ordine normale
- ▶ questa proprietà **non vale** per l'ordine applicativo

Esempio

Sia $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.x x$. Abbiamo:

- ▶ $(\lambda x.y) (\omega \omega) \rightarrow (\lambda x.y) (\omega \omega) \rightarrow \dots$
- ▶ $(\lambda x.y) (\omega \omega) \rightarrow y$

ordine applicativo
ordine normale