

# Linguaggi Formali e Traduttori

## 3.4 Automi a pila

- Sommario
- Esempio informale
- Automi a pila
- Esempio: riconoscitore di stringhe  $a^n b^n$
- Descrizioni istantanee
- Mosse di un automa a pila
- Esempio
- Linguaggio accettato da un automa a pila
- Esempio: riconoscitore di stringhe  $ww^R$
- Esercizi

È proibito condividere e divulgare in qualsiasi forma i materiali didattici caricati sulla piattaforma e le lezioni svolte in videoconferenza: ogni azione che viola questa norma sarà denunciata agli organi di Ateneo e perseguita a termini di legge.

# Sommario

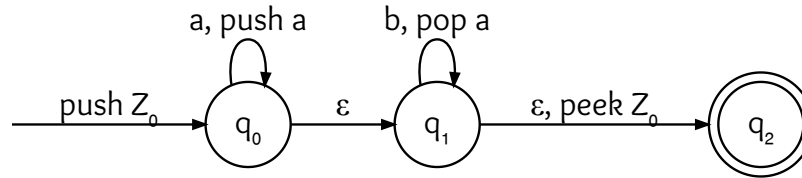
## Motivazione

- Le grammatiche libere forniscono un approccio generativo per la descrizione di linguaggi liberi.

## In questa lezione

- Studiamo un approccio riconoscitivo – gli **automi a pila** – per la descrizione di linguaggi liberi.
- Definiamo due nozioni di linguaggio riconosciuto da un automa a pila, il linguaggio riconosciuto **per stato finale** ed il linguaggio riconosciuto **per pila vuota**.
- Mostriamo che le due nozioni sono equivalenti.

# Esempio informale



## Inizializzazione

- La pila contiene un unico simbolo  $Z_0$  usato come “sentinella” ( $Z_0$  = la pila finisce qui).

## Stato $q_0$ : conteggio delle $a$ .

- L'automa accumula sulla pila le  $a$ .
- L'automa può “scommettere” di aver letto tutte le  $a$  e passare a  $q_1$ .

## Stato $q_1$ : conteggio delle $b$ .

- L'automa controlla che, per ogni  $b$  della stringa, vi sia una  $a$  sulla pila e la rimuove.
- Se l'automa vede la sentinella  $Z_0$  sulla pila deve aver raggiunto la fine della stringa e passa a  $q_2$ .

## Stato $q_2$ : accettazione.

# Automi a pila

## Definizione

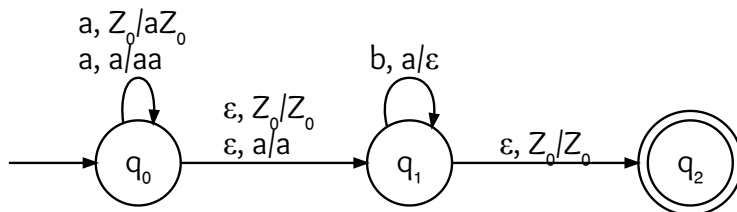
Un **automa a pila** (detto anche **PDA**, da **PushDown Automaton**) è una settupla  $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  dove:

- $Q$  è un insieme **finito** di **stati**
- $\Sigma$  è l'**alfabeto di input** (simboli che possono comparire nella stringa da riconoscere)
- $\Gamma$  è l'**alfabeto della pila** (simboli che possono comparire sulla pila)
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \wp(Q \times \Gamma^*)$  è la **funzione di transizione**
- $q_0 \in Q$  è lo **stato iniziale**
- $Z_0 \in \Gamma$  è il **simbolo iniziale** presente sulla pila all'inizio del riconoscimento
- $F \subseteq Q$  è l'insieme di **stati finali**

Interpretazione di  $(p, \gamma) \in \delta(q, \alpha, Z)$

- Quando l'automa si trova nello stato  $q$  e il simbolo in cima alla pila è  $Z$  ...
- ... l'automa può leggere il simbolo  $\alpha$  dalla stringa (o nulla se  $\alpha = \varepsilon$ ) ...
- ... spostandosi nello stato  $p$  ...
- ... rimuovendo (pop)  $Z$  dalla cima della pila ...
- ... e inserendo (push) tutti i simboli  $\gamma$  sulla pila.

# Esempio: riconoscitore di stringhe $a^n b^n$



Definiamo il PDA  $(\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{a, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$  dove

Transizione	Etichetta	Azione sulla pila
$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$	$a, Z_0/aZ_0$	push $a$
$\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\}$	$a, a/aa$	push $a$
$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$	$\varepsilon, Z_0/Z_0$	—
$\delta(q_0, \varepsilon, a) = \{(q_1, a)\}$	$\varepsilon, a/a$	—
$\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$	$b, a/\varepsilon$	pop $a$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$	$\varepsilon, Z_0/Z_0$	—

# Descrizioni istantanee

## Definizione

Dato un automa a pila  $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , una **descrizione istantanea** di  $P$  (talvolta abbreviata con **D.I.**) è una tripla  $(q, w, \alpha)$  in cui:

- $q \in Q$  è lo stato in cui si trova l'automato
- $w \in \Sigma^*$  è ciò che rimane da riconoscere della stringa di input
- $\alpha \in \Gamma^*$  è il contenuto della pila dalla cima (sinistra di  $\alpha$ ) al fondo (destra di  $\alpha$ )

## Intuizione

La descrizione istantanea è intesa a specificare completamente la configurazione di un automa a pila in un momento durante il processo di riconoscimento di una stringa.

# Mosse di un automa a pila

## Definizione

Dato un automa a pila  $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , definiamo la relazione  $\vdash_P$  come segue

$$\begin{aligned}(q, aw, X\beta) &\vdash_P (p, w, \alpha\beta) && \text{se } (p, \alpha) \in \delta(q, a, X) \\ (q, w, X\beta) &\vdash_P (p, w, \alpha\beta) && \text{se } (p, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, X)\end{aligned}$$

e diciamo che  $P$  fa una **mossa** da  $I$  a  $J$  (dove  $I$  e  $J$  sono descrizioni istantanee) se  $I \vdash_P J$ .

## Definizione

Scriviamo  $\vdash_P^*$  per la chiusura riflessiva e transitiva di  $\vdash_P$ . Ovvero,  $\vdash_P^*$  è la relazione tale che

- $I \vdash_P^* I$
- se  $I \vdash_P K$  e  $K \vdash_P^* J$ , allora  $I \vdash_P^* J$

## Convenzione

Scriviamo semplicemente  $\vdash$  e  $\vdash^*$  laddove l'automa  $P$  di riferimento è chiaro dal contesto.

# Esempio

Tutte le mosse dell'automa in [slide 5](#) partendo dalla descrizione istantanea  $(q_0, aabb, Z_0)$ :

$$\begin{array}{c} (q_0, aabb, Z_0) \vdash (q_1, aabb, Z_0) \vdash (q_2, aabb, Z_0) \\ \top \\ (q_0, abb, aZ_0) \vdash (q_1, abb, aZ_0) \\ \top \\ (q_0, bb, aaZ_0) \vdash (q_1, bb, aaZ_0) \\ \top \\ (q_1, b, aZ_0) \\ \top \\ (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \end{array}$$

## Note

- Le mosse “verticali” ( $\top$ ) corrispondono alla lettura di un simbolo dalla stringa di input.
- Le mosse “orizzontali” ( $\vdash$ ) corrispondono a transizioni spontanee.
- C'è una **sequenza di mosse** che porta alla consumazione completa dell'input ***aabb***.



# Linguaggio accettato da un automa a pila

## Definizione

Dato  $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , il linguaggio accettato da  $P$  per stato finale è

$$L(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \varepsilon, \alpha), q \in F\}$$

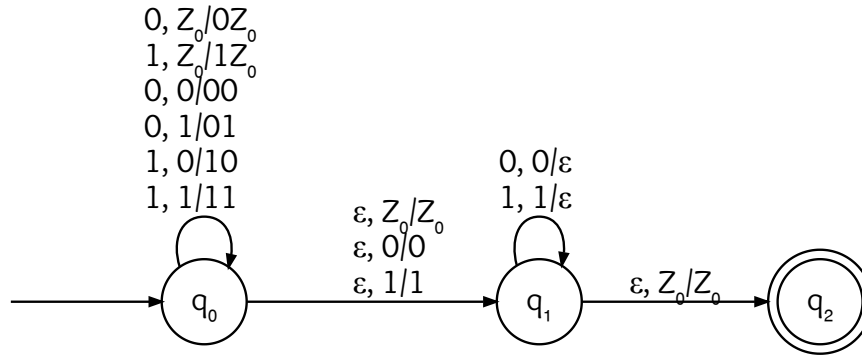
mentre il linguaggio accettato da  $P$  per pila vuota è

$$N(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

## Note

- Nell'accettazione per stato finale, il contenuto della pila nella D.I. finale è irrilevante.
- Nell'accettazione per pila vuota, lo stato nella D.I. finale può non essere finale.
- In entrambi i casi, la stringa di input deve essere consumata completamente.

# Esempio: riconoscitore di stringhe $ww^R$



# Esercizi

1. Definire PDA per riconoscere i seguenti linguaggi. Usare l'accettazione per stato finale o per pila vuota, a seconda di cosa è più conveniente.
  1.  $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$
  2.  $\{a^{2n} b^n \mid n \geq 0\}$
  3.  $\{a^m b^n \mid 0 \leq m \leq n\}$
  4.  $\{a^m b^n \mid 0 \leq n \leq m\}$
  5.  $\{w2w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
2. Determinare tutte le mosse possibili dell'automa mostrato in [slide 10](#) a partire dalla D.I.  $(q_0, 0110, Z_0)$ . Usare uno schema analogo a quello della [slide 8](#).