# Tempo di calcolo, complessità asintotica

March 25, 2021

**Obiettivi:** introdurre le nozioni di tempo di calcolo e di confronto asintotico delle funzioni.
**Argomenti:** caso peggiore, caso migliore e caso medio, notazione asintotica e le sue caratteristiche, complessità di un problema.

Ci interessa studiare gli algoritmi per capire quante risorse utilizzano. Risorse considerate: tempo, memoria, hardware (numero di processori).

Si analizza il tempo di esecuzione per

- capire quanto tempo ci vuole per eseguire un algoritmo,
- caratterizzare la dimensione massima dell'ingresso di un'esecuzione ragionevole,
- scegliere fra i vari algoritmi che risolvono lo stesso problema,
- capire dove e come migliorare un certo algoritmo.

**Metodo di analisi**: calcoliamo il numero di operazioni elementari eseguite. Sotto certe condizioni questa misura è proporzionale al tempo di esecuzione (ed è indipendente dal tipo di computer utilizzato e dal linguaggio di programmazione scelta per l'implementazione).

Esempio visto durante lo studio degli algoritmi quadratici di ordinamento: la tabella riporta il numero di operazioni eseguite da Insertion-Sort e Selection-Sort nel caso migliore e peggiore (le costanti variano caso per caso).

| | caso migliore | caso peggiore |
|---|---|---|
| Insertion-Sort | $an + b$ | $an^2 + bn + c$ |
| Selection-Sort | $an^2 + bn + c$ | $an^2 + bn + c$ |

(Con costanti $a, b, c$ diversi caso per caso.)

Fissata la dimensione del input, il **numero di operazioni dipende** (quasi sempre) **dal input** stesso!

Denotiamo con $T'(x)$ il numero di operazioni eseguite da un algoritmo con $x$ in input.

Numero di operazioni nel **caso migliore con un input di dimensione** $n$:

$$T_{cm}(n) = \min_{\forall x:|x|=n} T'(x)$$

cioè cerchiamo il minimo considerando tutti i possibili input di dimensione $n$.

Numero di operazioni nel **caso peggiore con un input di dimensione** $n$:

$$T_{cp}(n) = \max_{\forall x:|x|=n} T'(x)$$

cioè cerchiamo il massimo considerando tutti i possibili input di dimensione $n$.

Numero di operazioni nel **caso medio con un input di dimensione** $n$:

$$T_{medio}(n) = \sum_{\forall x:|x|=n} p(x)T'(x)$$

dove $p(x)$ denota la probabilità che l'input è $x$ e quindi si calcola la media del numero di operazioni considerando tutti i possibili input di dimensione $n$.

# 1 Confronto asintotico di funzioni e il suo utilizzo a caratterizzare la complessità di algoritmi

Indichino $T_1(n)$ e $T_2(n)$ il numero di operazioni che due algoritmi devono eseguire per risolvere un certo problema nel caso di un input di dimensione $n$ (caso migliore, caso peggiore o caso medio). **Per confrontare algoritmi, dobbiamo confrontare tra loro funzioni.**

**Esempio 1.** *Consideriamo*

$$T_1(n) = \frac{n^2}{100},\ T_2(n) = 2n + 300$$

*Quale algoritmo conviene utilizzare? Dipende da $n$:*

$$T_1(n) < T_2(n) \text{ se } n < 300 \text{ e } T_1(n) > T_2(n) \text{ se } n > 300.$$

*Il primo algoritmo è conveniente in un numero finito di casi ($n < 300$). In un numero infinito di casi conviene applicare il secondo algoritmo ($n > 300$). (Con $n = 300$ i due algoritmi equivalgono.)*

**Esempio 2.** *Assumiamo di riuscire di dimezzare il numero di operazioni nel caso del primo algoritmo, cioè*

$$T_1(n) = \frac{n^2}{200},\ T_2(n) = 2n + 300$$

*Quale algoritmo conviene utilizzare? Dipende sempre da $n$:*

$$T_1(n) < T_2(n) \text{ se } n < 517 \text{ e } T_1(n) > T_2(n) \text{ altrimenti.}$$

*Quindi anche se si migliora notevolmente il primo algoritmo, comunque esso è conveniente in un numero finito di casi ($n < 517$). In un numero infinito di casi conviene applicare il secondo algoritmo ($n \geq 517$). (Non esiste un numero intero $n$ con il quale i due algoritmi equivalgono.)*

**Esempio 3.** *Sia $T(n) = 2^n$ per un certo algoritmo e sia $D$ la dimensione massima che si riesce a trattare con un certo computer dati i vincoli di tempo. Come cambia la dimensione massima trattabile se si usa un computer 4 volte più veloce? Denotiamo con $D'$ la nuova dimensione massima. Abbiamo*

$$\frac{2^{D'}}{4} = 2^D$$

*e quindi*

$$D' = \log_2 4 + D = 2 + D$$

*Quindi anche usando un computer notevolmente più potente, la dimensione massima che si riesce a trattare si sposta di poco. In questo caso, moltiplicare la velocità per un costante conta poco.*

Conviene non considerare le costanti perché

- moltiplicando per una costante la dimensione massima di un problema trattabile cambia poco,
- il tipo di crescita di una funzione non dipende dalla scelta della costante,
- la stima esatta delle costanti è molto difficile in pratica.

La **notazione** $O$ (detto o grande) si utilizza per descrivere la crescita di una funzione **trascurando costanti moltiplicative e un numero finito di valori**.

**Definizione del** $O$ (limite superiore):

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 . f(n) \leq cg(n)$$

cioè $f(n)$ è $O$ di $g(n)$ se e solo se esistono due costanti $c > 0, n_0$ tali che per ogni $n > n_0$ abbiamo $f(n) \leq cg(n)$.

$f(n) \in O(g(n))$ significa che $f(n)$ cresce, a parte un fattore costante ($c$) e trascurando un numero finito di valori (quelli $\leq n_0$), al massimo come la funzione $g(n)$.

**Esempio 4.** *Sia $T(n) = an + b$. Dimostriamo che con qualunque $a > 0$ e $b$ si ha $T(n) \in O(n)$. Applicando direttamente la definizione del $O$, dobbiamo trovare due costanti $c > 0, n_0$ tali che $\forall n > n_0 . an + b \leq cn$. Possiamo scegliere qualunque $c > a$ e $n_0 = \lceil b/(c-a) \rceil$.*

**Esempio 5.** *Sia $T(n) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0$. Dimostriamo che con qualunque $a_2 > 0, a_1, a_0$ si ha $T(n) \in O(n^2)$. Applicando direttamente la definizione del $O$, dobbiamo trovare due costanti $c > 0, n_0$ tali che $\forall n > n_0$ abbiamo $a_2 n^2 + a_1 n + a_0 \leq cn^2$. Possiamo scegliere qualunque $c > a_2$ e $n_0 = \lceil x \rceil$ dove $x$ è la soluzione maggiore dell'equazione $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = cx^2$ oppure $n_0 = 1$ se l'equazione $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = cx^2$ non ammette nessuna soluzione reale.*

Il seguente teorema è utile per dimostrare facilmente se una certa funzione $f(n)$ sia $O(g(n))$ oppure no.
**Teorema:** Se il limite

$$a = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

esiste allora

$$0 \leq a < \infty \iff f(n) \in O(g(n))$$

Utilizzando il teorema precedente è facile dimostrare che

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \in O(n^k)$$

e

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \notin O(n^{k-1}) \text{ se } a_k > 0$$

Per trovare la funzione più semplice $g(n)$ tale che $f(n)$ è $O(g(n))$ bisogna trovare il termine dominante di $f(n)$ e trascurare i termini minori e le costanti moltiplicativi.

Esempi:

| $f(n)$ | $\in$ o $\notin$ | $O(g(n))$ |
|---|---|---|
| $k$ | $\in$ | $O(1)$ |
| $85n + 123$ | $\in$ | $O(n)$ |
| $2n^2 + n + 10$ | $\in$ | $O(n^2)$ |
| $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i$ con $a_k > 0$ | $\in$ | $O(n^k)$ |
| $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i$ con $a_k > 0$ | $\notin$ | $O(n^h)$ se $h < k$ |
| $5n + \log_2 n + 5$ | $\in$ | $O(n)$ |
| $n + 25 \log_2 n + 5$ | $\notin$ | $O(\log_2 n)$ |

**Esempio 6. Base dei logaritmi.** *Cambiare la base dei logaritmi corrisponde a moltiplicare per una costante:*

$$\log_a n = \frac{1}{\log_b a} \log_b n$$

*Di conseguenza si ha*

$$\log_a n \in O(\log_b n) \quad \forall a > 1, \forall b > 1$$

*Per questo motivo* **quando si usa la notazione $O$ non si indica la base dei logaritmi, si scrive** $O(\log n)$.

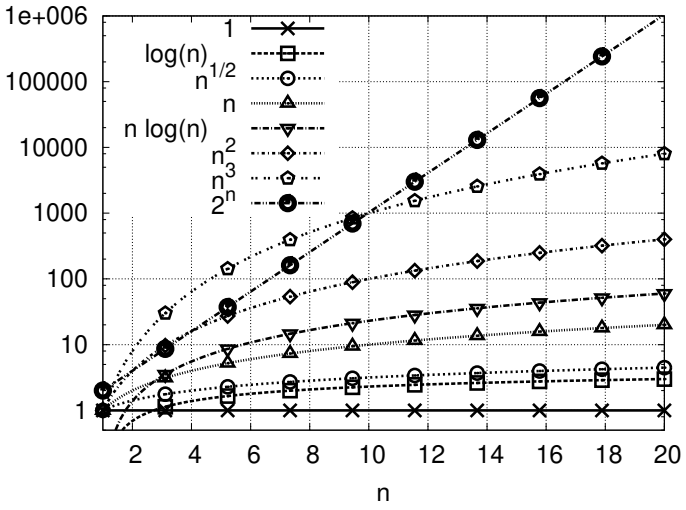
La notazione $O$ permette di confrontare le funzioni tra loro. La relazione $\lesssim$ definita come

$$f(n) \lesssim g(n) \iff f(n) \in O(g(n))$$

è un **preordine basato sulla notazione** $O$. Un preordine è una relazione riflessiva, cioè $f(n) \lesssim f(n)$, ed è transitiva, cioè $f(n) \lesssim g(n) \wedge g(n) \lesssim h(n) \implies f(n) \lesssim h(n)$. Ma non permette di mettere in relazione

qualunque coppia di funzioni. Per esempio, con $f(n) = \sin(n)+2, g(n) = \cos(n)+2$ non si ha ne $f(n) \lesssim g(n)$ ne $g(n) \lesssim f(n)$.

Si possono quindi ordinare le funzioni per velocità di crescita:




La notazione $O$ **è una notazione insiemistica**. L'insieme $O(g(n))$ indica l'insieme di funzioni che sono $O$ di $g(n)$. Per esempio, l'insieme $O(n)$ indica l'insieme di tutte le funzioni che crescono al massimo linearmente. Quindi le funzioni $k, \log_2 n, \sqrt{n}$ fanno parte dell'insieme $O(n)$.

In questa ottica insiemistica, il preordine stabilito dal $O$ dà luogo ad una **sequenza di inclusioni**. Per esempio,

$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(n^{1/2}) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^2) \subset O(n^2 \log n) \subset O(n^3) \subset O(2^n)$$

Spesso la notazione $O$ **viene utilizzata in maniere informale**:

$$2n^2 + 6n = O(n^2) \quad 3n^2 = O(n^2)$$

il che, presa alla lettera implicherebbe $2n^2 + 6n = 3n^2$ che non è vero. $f(n) = O(g(n))$ si interpreta come un'equazione "a senso unico", con cui rimpiazziamo una funzione con il suo ordine di grandezza.

Per caratterizzare in senso $O$ la complessità di algoritmi è conveniente utilizzare le seguenti regole:

$$\begin{aligned}
f(n) &\in O(f(n)) \\
cf(n) &\in O(f(n)) \quad c \text{ deve essere costante} \\
f(n) + f(n) &\in O(f(n)) \\
f(n) + g(n) &\in O(f(n) + g(n)) \\
f(n) \in O(g(n)) \implies (\ f(n) + g(n) &\in O(g(n))\ ) \\
f(n)g(n) &\in O(f(n)g(n))
\end{aligned}$$

Con la notazione informale le regole diventano

$$\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
cf(n) &= O(f(n)) \quad c \text{ deve essere costante} \\
f(n) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\
f(n) + O(g(n)) &= O(f(n) + g(n)) \\
f(n) = O(g(n)) \implies (\ f(n) + O(g(n)) &= O(g(n))\ ) \\
f(n)O(g(n)) &= O(f(n)g(n))
\end{aligned}$$

Nota bene $nf(n) \notin O(f(n))$ perché $n$ non è costante.

**Esempio 7.** *Caratterizziamo in senso $O$ la complessità del seguente algoritmo.*

```
1: ALG(n)
2: s ← 0
3: for i ← 1 to 2n do
4:     j ← 1
5:     while j ≤ n do
6:         j ← j + 1
7:         s ← s + j
8:     j ← 1
9:     while j ≤ n do
10:        j ← 2j
11:        s ← s + ij
12: return s
```

*Contiamo il numero di operazioni $T(n)$ considerando ogni riga come singola operazione.*

$$T(n) = \underbrace{1}_{r.2} + \underbrace{2n+1}_{r.3} + 2n\left(\underbrace{1}_{r.4} + \underbrace{n+1}_{r.5} + n\left(\underbrace{1}_{r.6} + \underbrace{1}_{r.7}\right) + \underbrace{1}_{r.8} + \underbrace{\lfloor \log_2 n \rfloor + 2}_{r.9} + (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)\left(\underbrace{1}_{r.10} + \underbrace{1}_{r.11}\right)\right) + \underbrace{1}_{r.12}$$

*Applicando le regole si arriva a stabilire che $T(n) \in O(n^2)$.*

Con $O$ si può dare un limite superiore per la velocità della crescita di una funzione. Questo limite non è necessariamente stretto: per esempio, $\sqrt{n} \in O(2^n)$. Per poter definire limiti stretti e limiti inferiori si introducono $\Theta$ (theta grande) e $\Omega$ (omega grande).

**Definizione del $\Theta$** (limiti stretti):

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 . c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

cioè $f(n)$ è $\Theta$ di $g(n)$ se e solo se esistono tre costanti $c_1 > 0, c_2 > 0, n_0$ tali che per ogni $n > n_0$ abbiamo $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$.

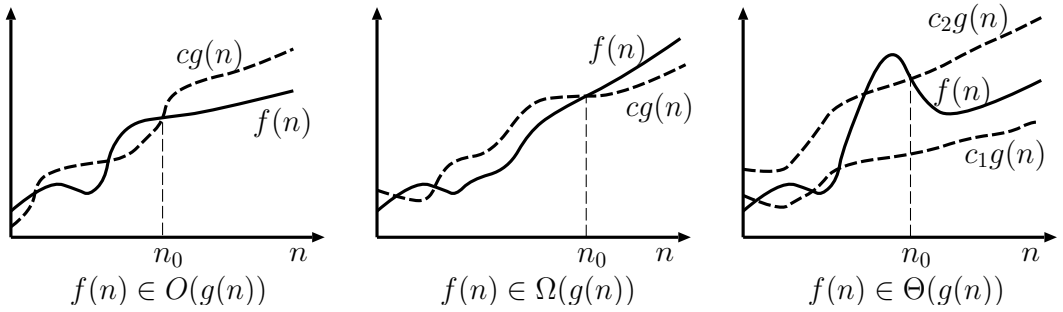
**Definizione del $\Omega$** (limite inferiori):

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 . f(n) \geq c g(n)$$

cioè $f(n)$ è $\Omega$ di $g(n)$ se e solo se esistono due costanti $c > 0, n_0$ tali che per ogni $n > n_0$ abbiamo $f(n) \geq c g(n)$.

Graficamente $O$, $\Omega$ e $\Theta$:

-



Segue direttamente dalle definizioni che

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \wedge f(n) \in O(g(n)) \iff f(n) \in \Theta(g(n))$$

Come $O$, anche $\Omega$ definisce una relazione che è un preordine:

$$f(n) \gtrsim g(n) \iff f(n) \in \Omega(g(n))$$

La notazione $\Theta$ fornisce invece una relazione di equivalenza:

$$f(n) \sim g(n) \iff f(n) \in \Theta(g(n))$$

è riflessiva, transitiva e anche simmetrica ($f(n) \in \Theta(g(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$).

Il teorema precedente esteso per $\Theta$ e $\Omega$:
**Teorema:** Se il limite

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

esiste allora

$$\begin{aligned} 0 \le a < \infty &\iff f(n) \in O(g(n)) \\ 0 < a < \infty &\iff f(n) \in \Theta(g(n)) \\ 0 < a \le \infty &\iff f(n) \in \Omega(g(n)) \end{aligned}$$

Riassumiamo qui di seguito alcune proprietà utili degli ordini di grandezza:

1. riflessività: $f(n) \in O(f(n))$; vale anche per $\Omega$, $\Theta$
2. transitività: $g(n) \in O(f(n)) \wedge f(n) \in O(h(n)) \implies g(n) \in O(h(n))$; vale anche per $\Omega$, $\Theta$
3. simmetria: $g(n) \in \Theta(f(n)) \iff f(n) \in \Theta(g(n))$; vale solo per $\Theta$
4. trasposizione: $g(n) \in O(f(n)) \iff f(n) \in \Omega(g(n))$
5. somma: $f(n) + g(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$; vale anche per $\Omega$, $\Theta$
6. prodotto: $g(n) \in O(f(n)) \wedge h(n) \in O(q(n)) \implies g(n)h(n) \in O(f(n)q(n))$; vale anche per $\Omega$, $\Theta$.

# 2 Complessità di un problema

Dato un problema si vuole caratterizzare quante operazioni servono per risolverlo.

Qual è un tempo di calcolo **sufficiente** alla risoluzione di un problema?

**Un confine superiore alla complessità di un problema** è **un confine superiore** per il tempo di calcolo (nel caso peggiore) **di un algoritmo** che risolve il problema.

Siano dati un problema $P$ e un algoritmo $A$ che lo risolve. Se il numero di operazioni richieste da $A$ nel caso peggiore è $O(g(n))$ allora $g(n)$ è un confine superiore alla complessità di $P$.

Qual è un tempo di calcolo **necessario** alla risoluzione di un problema?

**Un confine inferiore alla complessità di un problema** è **un confine inferiore** per i tempi di calcolo (nel caso peggiore) **di tutti gli algoritmi** che risolvono il problema.

Sia dato un problema $P$. Se il numero di operazioni richieste da qualunque algoritmo $A$ che risolve $P$ nel caso peggiore è $\Omega(g(n))$ allora $g(n)$ è un confine inferiore alla complessità di $P$.

Esistono confini inferiori banali:

- **Dimensione dei dati**: è spesso necessario esaminare tutti i dati in ingresso (oppure generare tutti i dati in uscita). Per esempio, la moltiplicazione di due matrici quadrate di ordine $n$ richiede l'ispezione di $2n^2 \in \Omega(n^2)$ numeri.

- **Eventi contabili**: spesso c'è un evento la cui ripetizione un numero di volte è necessaria alla soluzione del problema. Per esempio, la determinazione del massimo tra $n$ elementi richiede $n-1 \in \Omega(n)$ confronti.

Se una funzione $g(n)$ rappresenta **sia un confine inferiore sia un confine superiore** per un certo problema, allora la **complessità del problema** è $g(n)$.

Sia dato un problema e un confine inferiore alla sua complessità $g(n)$. Un algoritmo che risolve il problema nel caso peggiore con complessità $O(g(n))$, è un **algoritmo ottimo**.

**Esempio 8.** *Il problema "somma 17": dato un vettore di $n$ interi positivi decidere se ne contiene due la cui somma sia 17.*

*Si può risolvere il problema con un algoritmo che calcola la somma di tutte le coppie di numeri. Tale algoritmo è quadratico e quindi la complessità del problema è $O(n^2)$ (un confine superiore).*

*Qualunque algoritmo che risolve il problema, nel caso peggiore, deve considerare ogni numero del vettore almeno una volta. Quindi la complessità del problema è $\Omega(n)$ (un confine inferiore).*

*Un algoritmo migliore:*

1. *calcoliamo un vettore $c$ che indica quali numeri fra 0 e 17 (compresi) sono presenti nel vettore: $\forall i, 0 \leq i \leq 17, c[i] = 1$ se $i$ è presente nel vettore in input e 0 altrimenti;*
2. *dato che il vettore in input ha solo interi positivi, la risposta sarà true se e solo se esistono $i$ e $j$ tali che $0 \leq i \leq 17 \wedge 0 \leq j \leq 17 \wedge c[i] = 1 \wedge c[j] = 1 \wedge i + j = 17$.*

*Generare $c$ richiede percorrere il vettore in input una volta e quindi ha complessità $O(n)$. Dato $c$, il secondo passo può essere risolto con un ciclo for:*

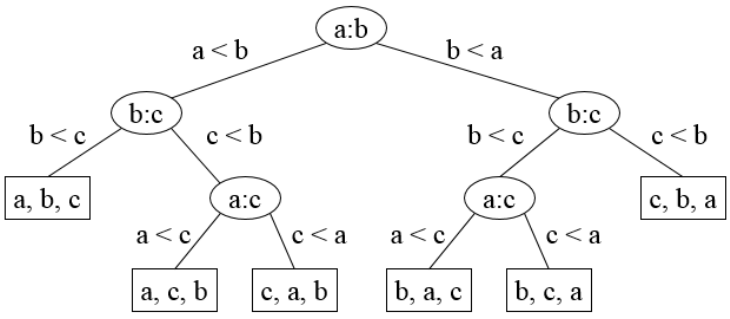
```
for i ← 0 to 8 do
    if c[i] = 1 ∧ c[17 − i] = 1 then
        return true
    end if
end for
return false
```

*Il ciclo richiede un numero costante di operazioni, ha complessità $O(1)$. Quindi in totale l'algoritmo ha complessità $O(n)$.*

*Visto che la complessità del problema è $\Omega(n)$, l'algoritmo che ha complessità $O(n)$ è un algoritmo ottimo.*

## 2.1 Complessità del problema dell'ordinamento per confronti

I confronti che si devono fare per ordinare un vettore si possono rappresentare con alberi binari di decisione in cui i nodi interni rappresentano i confronti e le foglie i possibili ordini finali. Il seguente albero rappresenta i confronti necessari per ordinare un vettore di tre elementi.




Tale albero, per un vettore di $n$ elementi, ha $n!$ foglie (tutte le possibili permutazioni devono esserci).

Con $n!$ foglie, il ramo più lungo contiene almeno $\lceil \log_2 n! \rceil$ nodi interni. (Nel caso di $n = 3$, abbiamo $\lceil \log_2 3! \rceil = 3$.)

Ciò significa che un algoritmo di ordinamento per confronti deve fare nel caso peggiore almeno $\lceil \log_2 n! \rceil$ confronti.

Secondo la formula di Stirling, per grandi valori di $n$, si può approssimare $n!$ con

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Dopo qualche algebra segue che, per grandi valori di $n$, **il numero di confronti che un algoritmo di ordinamento per confronti deve fare nel caso peggiore è proporzionale a**

$$n \log_2 n$$

Quindi la complessità del problema dell'ordinamento per confronti è almeno $n \log n$. Visto che si conoscono algoritmi che risolvono il problema del problema dell'ordinamento per confronti in tempo $O(n \log n)$, la complessità di questo problema è $n \log n$.