A completamento di quanto visto nella Lezione 15, accenniamo al caso generale, ovvero:

rip

Ricorrenze non lineari:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 \text{ assegnato} \end{cases} \qquad \text{con } g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua}$$

Abbiamo già dimostrato che

Studio Locale

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x^* \in \mathbb{R} \implies g(x^*) = x^*$$

In generale, non è possibile stabilire quale è il comportamento di una arbitraria soluzione $\{x_n\}$. Però, in molti casi è possibile farlo se $x_0 \simeq x^*$ (studio locale del sistema dinamico)

Il concetto chiave è quello di stabilità

stabilità

Def Sia $x^* \in \mathbb{R}$ p.to fisso di g. Si dice che:

- x^* è p.to di equilibrio stabile se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x_0 - x^*| < \delta \implies |x_n - x^*| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(cioè: la soluzione $\{x_n\}$ rimane arbitrariamente vicina a x^*, purché sia sufficientemente vicina a x^* la condizione iniziale x_0)

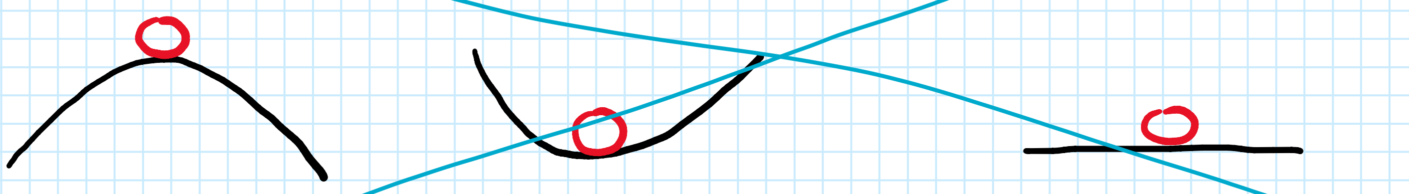
- x^* è p.to di equilibrio asintoticamente stabile se è stabile e se è stabile e se

$$\exists\, \hat{\delta} > 0 \;:\; |x_0 - x^*| < \hat{\delta} \implies \lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$$

(cioè: se la condizione iniziale x_0 è suff vicina a x^* la soluz $\{x_n\}$ converge a x^*)

- x^* è p.to di equilibrio instabile se non è stabile

Si noti l'analogia con gli "equilibri" della Fisica



OSS. su cose vecchie

Oss Nel caso lineare $g(x) = ax + b$ con $a \neq 1$ il p.to di equilibrio x^* $(= b/_{1-a})$ è

- asintotic stabile se $|a| < 1$ (e tutte le soluz $\{x_n\}$ convergono a x^*)
- instabile se $|a| > 1$ (e nessuna soluz $\{x_n\}$ diversa da x^* rimane vicina a x^*)

Il caso $g(x) = x$ $(a = 1,\, b = 0)$ dà invece luogo ad equilibri stabili ma non asintotic stabili

Vale il seguente teorema di stabilità/instabilità per linearizzazione

Teorema Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\underbrace{C^1}_{\overset{\text{def}}{=}\ g \text{ derivabile e } g' \text{ continua}}$ e sia $x^* \in \mathbb{R}$

Teorema Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e sia $x^* \in \mathbb{R}$ p.to fisso di g. Allora:

- se $|g'(x^*)| < 1$, allora x^* è asintoticamente stabile
- se $|g'(x^*)| > 1$, allora x^* è instabile

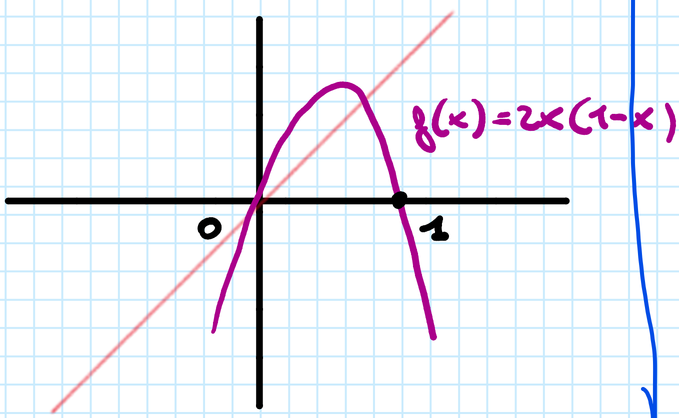
Oss 1) Il risultato è coerente con il caso lineare. Infatti se $g(x) = ax + b$ si ha $g'(x) = a$

2) Nel caso $|g'(x^*)| = 1$ il teorema non dice nulla!

Guardo su nozioni esem

Esempio $\boxed{g(x) = rx(1-x)}$ con $r > 0$ (mappa logistica)

Per ragioni applicative, ci si limita al caso $x \geq 0$



Cerchiamo i p.ti fissi:

$$x^* = rx^*(1-x^*)$$

$$x^*(1 - r + rx^*) = 0$$

e quindi $x_1^* = 0$ $\qquad x_2^* = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r}$

(notare che $x_2^* > 0 \iff r > 1$)

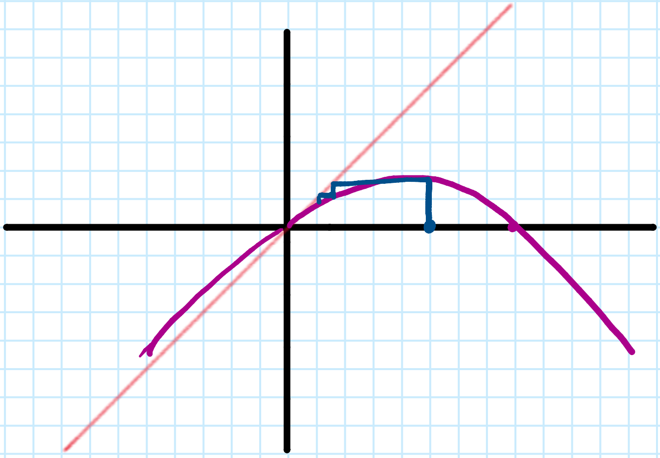
Quindi se $\boxed{0 < r < 1}$

$x_1^* = 0$ è l'unico p.to fisso.

Si ha $g'(x) = -2rx + r$

e quindi $g'(0) = r < 1$

dunque x_1^* è asintotic stabile

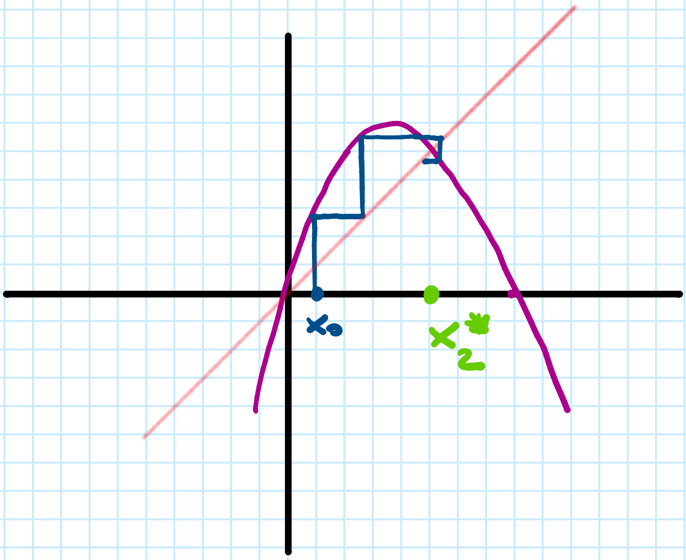


Si vede che $\forall x_0 \in [0,1]$

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

Diamo ora un occhio, per esempio, al caso $\boxed{r=2}$

Ora $g'(0) = r = 2 > 1$ e quindi $x_1^* = 0$ è instabile



Anche partendo con x_0 vicino a x_1^*, la succ $\{x_n\}$ si allontana!

(e sembra convergere a x_2^*)

In effetti se $1<r<3$

$$g'(x_2^*) = g'\left(1-\frac{1}{r}\right)$$

$$= -2r\left(1-\frac{1}{r}\right)+r$$

$$= -r+2 \in (-1,1)$$

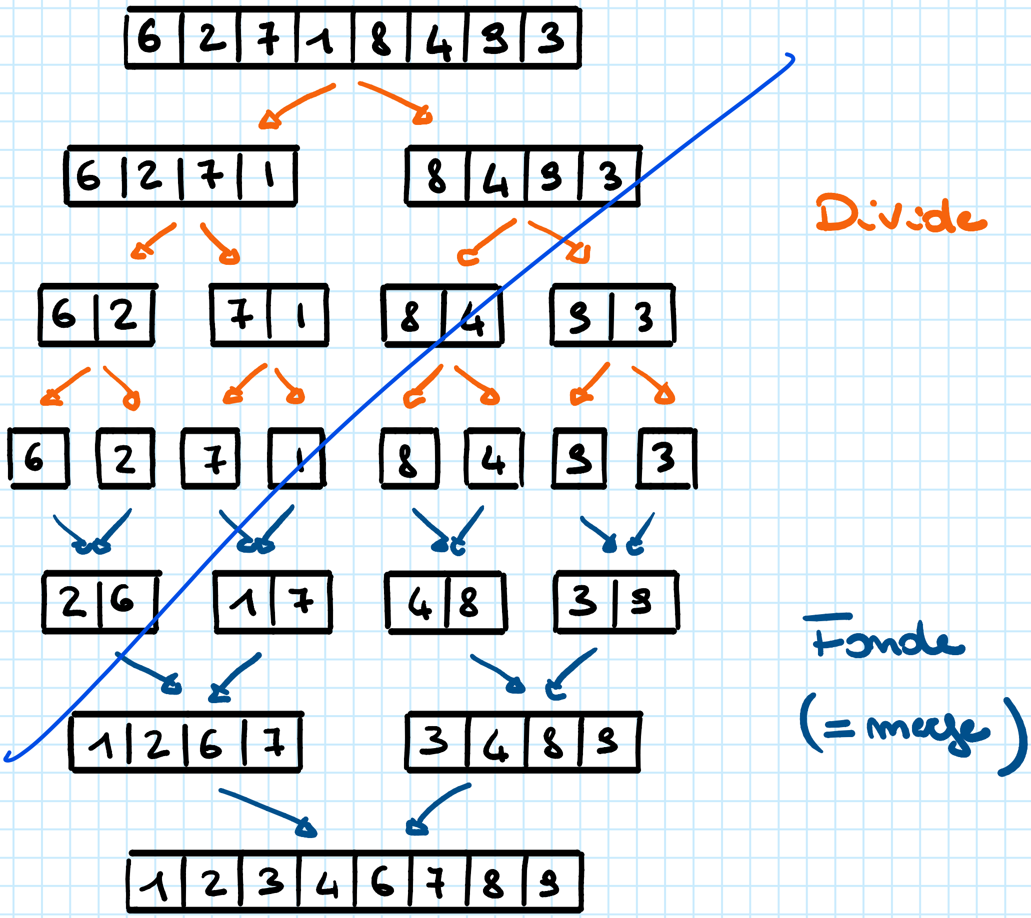
e quindi x_2^* è asint stabile

Per $r \geq 3$ si può invece verificare che sia x_1^* che x_2^* sono instabili: al crescere del parametro r, la dinamica diventa sempre più complicata (caos deterministico)

Vediamo ora un'applicazione delle successioni definite per ricorrenza di interesse per l'Informatica

Vediamo ora un'applicazione delle successioni definite per ricorrenza di interesse per l'Informatica

Analisi della complessità dell'algoritmo Mergesort



Mergesort (A) $\quad$ A = vettore di n elementi

Se $n \geq 2$ Mergesort (A_{left}) ← chiamata ricorsiva

Mergesort (A_{right})

Merge (A_{left}, A_{right}) ← procedura di fusione

Determiniamo la complessità $T(n)$ dell'algoritmo (nel caso peggiore) supponendo per semplicità

$$\boxed{n = 2^m}$$

$$\boxed{n = 2^m}$$

La procedura Merge ha costo $c \cdot n$ (c costante) dunque

$$\boxed{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n}$$

chiamata ricorsiva di Mergesort su ciascuna delle 2 metà

costo della procedura di fusione

Quindi:
$$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + c\frac{n}{2}\right) + cn$$
$$= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + cn + cn$$
$$= \overset{2^2}{4}\, T\left(\frac{n}{4}\right) + 2cn$$
$$= 4\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + c\frac{n}{4}\right) + 2cn$$
$$= \overset{2^3}{8}\, T\left(\frac{n}{8}\right) + 3cn$$
$$= 8\left(2T\left(\frac{n}{16}\right) + c\frac{n}{8}\right) + 3cn$$
$$= \overset{2^4}{16}\, T\left(\frac{n}{16}\right) + 4cn$$
$$= \ldots$$
$$= 2^m\, T\Big(\underbrace{\frac{n}{2^m}}_{=1 \text{ per ipotesi}}\Big) + mcn$$
$$= T(1)\, 2^m + c\, m\, n$$

$n = 2^m \Leftrightarrow m = \log_2 n$
$$= T(1)\, n + c \log_2 n \; n$$
$$= O(n \log n)$$

$n = 2^k \Leftrightarrow k = \log_2 n \quad = T(1)\, n + c \log_2 n \cdot n$

$$= O(n \log_2 n)$$

Il Mergesort ha dunque complessità $O(n \log_2 n)$