Lezione 7

Limiti finiti al finito (continuazione)

Proprietà algebriche dei limiti finiti al finito

Siano $c \in \mathbb{R}$ ed $f, g : I_r(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che: (H)
- $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$,
- $\lim_{x \to c} g(x) = m$.

Allora:
- $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$
- $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot m$
- se $m \neq 0$: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$

d/m somma

Dim. di $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \ell + m$.

La nostra tesi è: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (\ell + m)| < \varepsilon$$

$$|f(x) + g(x) - (\ell + m)| = |f(x) - \ell + g(x) - m|$$

$$\overset{(*)}{\leq} |f(x) - \ell| + |g(x) - m|$$

(*) $\boxed{|A+B| \leq |A| + |B|}$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

da (H): $\exists \delta_f > 0$ e $\delta_g > 0$ tali che:

$$\left(x \in I_{\delta_f}(c) \cap I_{\delta_g}(c)\right) \setminus \{c\}$$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon/2 \text{ e } |f(x) - m| < \varepsilon/2$$

quindi scegliendo $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$ si conclude ∎

Limiti infiniti al finito

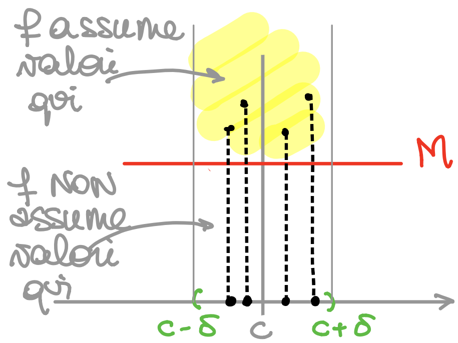
def limite 2

DEF. Data $f: I_r(c)\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ per qualche $r>0$
si dice che f ammette limite $+\infty$ per x che tende a c e si scrive

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

se: $(+\infty)_c$

$$\boxed{\forall M>0 \ \exists \delta>0 : x\in I_\delta(c)\setminus\{c\} \Rightarrow f(x) > M}$$



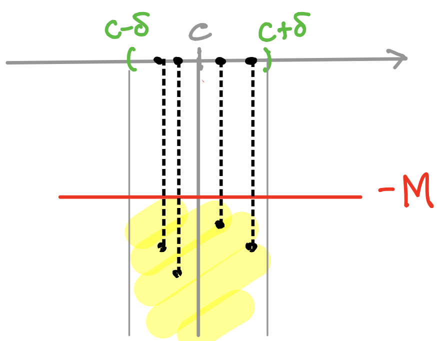
per ogni valore $M>0$, grande a piacere, posso trovare un intorno $I_\delta(c)$, con $\delta>0$, per cui prendendo $x\in I_\delta(c)\setminus\{c\}$ si ha che $f(x)>M$

DEF. Data $f: I_r(c)\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ per qualche $r>0$
si dice che f ammette limite $-\infty$ per x che tende a c e si scrive

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

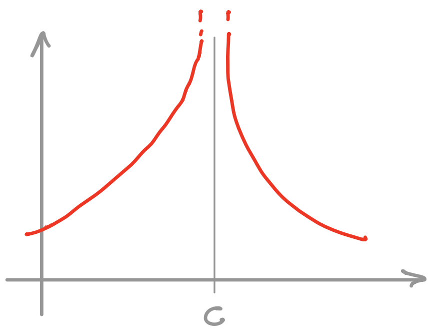
se: $(-\infty)_c$

$$\boxed{\forall M>0 \ \exists \delta>0 : x\in I_\delta(c)\setminus\{c\} \Rightarrow f(x) < -M}$$

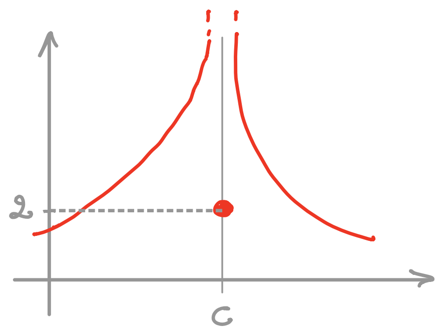


per ogni valore $M>0$, grande a piacere, posso trovare un intorno $I_\delta(c)$, con $\delta>0$, per cui prendendo $x\in I_\delta(c)\setminus\{c\}$ si ha che $f(x)<-M$

oss. (1) Anche in questo caso, il limite di f per $x \to c$ NON PRESCRIVE IL COMPORTAMENTO nel PUNTO $x = c$.



$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$
e f non definita in $x = c$



$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$
e $f(c) = 2$

(2) Quando $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ la retta $x = c$ è un ASINTOTO VERTICALE per f.

Limiti destri e sinistri

lim destro e sinistro

DEF. Si dice che f ammette limite ℓ (oppure $+\infty$ o $-\infty$) per x che tende a c da destra e si scrive

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell \quad (\text{o } +\infty \text{ o } -\infty)$$

se

$(\ell)_{c^+}$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$

Analogamente, f ammette limite ℓ per x che tende a c da sinistra e si scrive

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell$$

se

$(\ell)_{c^-}$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : -\delta < x - c < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$

Proprietà di esistenza del limite per $x \to c$

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \quad (\text{o } +\infty \ \text{ o } -\infty) \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = l = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Invers,

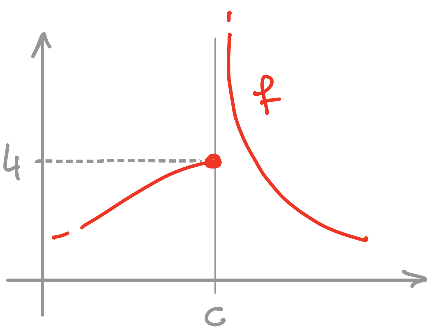
OSS. $\lim_{x\to c} f(x) \nexists$ se:

- $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

oppure

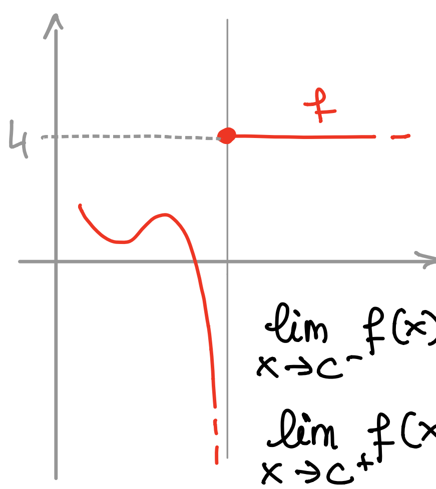
- almeno uno tra limite dx | sx non esiste

ES.



$$\lim_{x\to c^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$$

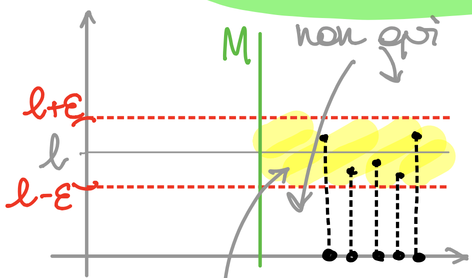
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = 4$$

→ in entrambi i casi $\nexists \lim_{x\to c} f(x)$

lim fin a inf

Limiti finiti all'infinito

DEF. Data $f: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$
si dice che f ammette limite ℓ per x che tende a $+\infty$ e si scrive
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$
se: $(\ell)_{+\infty}$
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$



per ogni $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere, posso trovare una soglia $M > 0$ per cui prendendo $x > M$ si ha che $f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$.

→ La retta $y = \ell$ si dice ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO PER f

es

ES. Verifichiamo che: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Vogliamo: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon}$

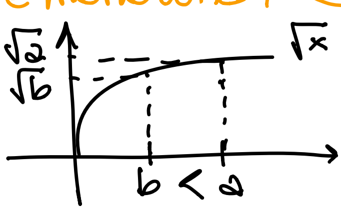
notiamo che $\left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x^2} \neq 0$ per ogni x

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow$$
equivale a $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$

ma $\frac{1}{x^2} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ e supponendo $x > 0$ (stiamo infatti facendo un limite a $+\infty$)

$a > b (>0) \iff \sqrt{a} > \sqrt{b}$ per la funzione $\sqrt{\cdot}$ è monotona ↑

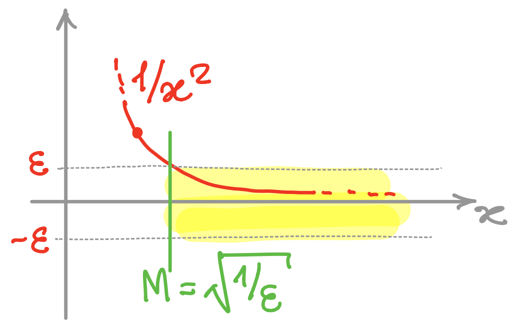
$$\iff x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$



Conclusione:

$\forall \varepsilon > 0$ se scegliamo $M = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ allora avremo che

$$x > M \Rightarrow \frac{1}{x^2} < \varepsilon$$



OSS. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ e, almeno definitivam. per $x \to +\infty$ si ha che $f(x) > l$

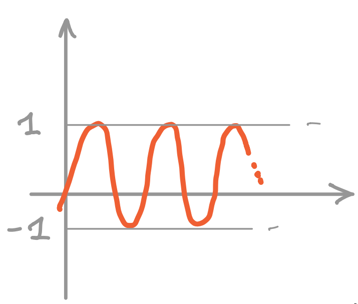
allora scriveremo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^+$ limite per eccesso

ES. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0^-$ limite per difetto

Proviamo a costruire un esempio di f.ne tale per cui

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (nè per eccesso, nè per difetto)



$\sin x$ "oscilla tra -1 e 1"
$\rightarrow$ non ha segno costante quando $x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non è zero!

$\Rightarrow$ voglio "smorzare" le oscillazioni ad esempio posso dividere per x (o per x^2)

$$\boxed{f(x) = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0} \; ?$$

Verifichiamo che: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$

vogliamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad : \quad x > M \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \underset{\substack{\text{perché} \\ x>0}}{=} \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Conclusione:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$$