dim su Notic !
non 94

Lezione 11

Teoremi sulla monotonia e sulla convessità di una funzione

Ora dimostriamo il risultato che avevamo chiamato "Teorema 1", che legava la monotonia di f con il segno di f'.

Teorema (Test di monotonia)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile.
Allora:

- f è monotona crescente su (a,b) $\iff$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$
- f è monotona decrescente su (a,b) $\iff$ $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$

DIM. Dimostriamo il primo asserto, il secondo è analogo.

$\Rightarrow$) Sappiamo che f è monotona crescente su (a,b) ovvero che

$$\forall x, z \in (a,b),\ x \neq z \quad \begin{cases} x < z \Rightarrow f(x) \leq f(z) \\ x > z \Rightarrow f(x) \geq f(z) \end{cases} \quad (*)$$

Allora:
$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \xrightarrow{z \to x} f'(x)$$
↳ grazie alla derivab. di f in ogni punto

Per dedurre il segno di $f'(x)$, usiamo il 2° Teorema di permanenza del segno.

Notiamo che il quoziente di Newton
$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \text{ è sempre } \geq 0$$
infatti, grazie alla monotonia (*) numeratore e denominatore hanno lo stesso segno

Il segno del rapporto quindi "permane" trasmettendosi al segno di f':

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \geq 0$$

$(\Leftarrow)$ Sappiamo che $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Vogliamo dimostrare che f è monotona crescente, ovvero che:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Se $x_1 = x_2$, è ovvio.

Se $x_1 < x_2$ allora $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ e le ipotesi del Teorema di Lagrange sono soddisfatte su $[x_1, x_2]$, quindi:

$$\exists c \in (x_1, x_2) : \quad f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

quindi, essendo $f'(c) \geq 0$ e $x_2 > x_1$, avremo:

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

ovvero la tesi. $f' \nearrow \Leftrightarrow f'' \geq 0$ $\blacksquare$

$f' \searrow \Leftrightarrow f'' \leq 0$

Corollario Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ due volte derivabile. Allora:

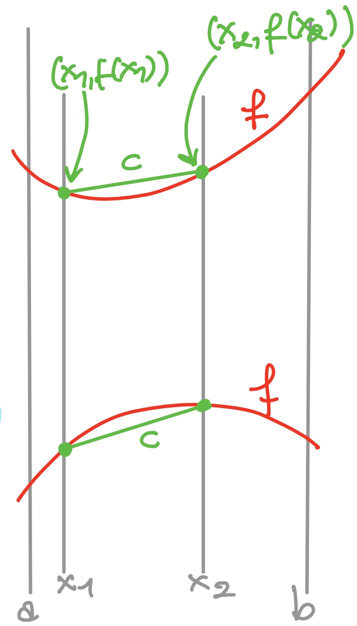
- f' è crescente $\Leftrightarrow f'' \geq 0$
- f' è decrescente $\Leftrightarrow f'' \leq 0$

Ora vogliamo collegare la convessità di f con il segno di f''.

DEF. Una funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ si dice **CONVESSA SU (a,b)** se presi $x_1,x_2\in(a,b)$ con $x_1<x_2$ si ha che per ogni $x\in[x_1,x_2]$ il valore $f(x)$ è minore (o uguale) a $c(x)$, dove c è il segmento che congiunge $(x_1,f(x_1))$ con $(x_2,f(x_2))$.

$$f(x)\le f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

con $x_1<x_2$ scelti arbitrariam. in (a,b).



DEF. f si dice invece **CONCAVA SU (a,b)** se

$$f(x)\ge f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

con $x_1<x_2$ scelti arbitrariam. in (a,b).

Teorema (test sulla concavità)

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile. Allora:

- f convessa su (a,b) $\iff$ f' è monotona crescente su (a,b)
- f concava su (a,b) $\iff$ f' è monotona decrescente su (a,b)

Corollario. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile due volte.

Allora:

- f convessa su (a,b) $\iff$ $f''(x)\ge 0$ $\forall x\in(a,b)$
- f concava su (a,b) $\iff$ $f''(x)\le 0$

DIM COROLLARIO. Segue immediatamente applicando
- test della concavità
- test di monotonia

infatti:

$$\begin{aligned} f \text{ è } \cup \ &\boxed{\Leftrightarrow} \ f' \text{ è } \uparrow \ \boxed{\Leftrightarrow} \ f'' \geq 0 \\ f \text{ è } \cap \ &\boxed{\Leftrightarrow} \ f' \text{ è } \downarrow \ \boxed{\Leftrightarrow} \ f'' \leq 0 \end{aligned}$$

test concavità

test monotonia

DIM TEOREMA. Dimostriamo che:

$$\boxed{f \text{ convessa su } (a,b) \Leftrightarrow f' \text{ è monotona crescente su } (a,b)}$$

l'altro asserto è equivalente.

Come nella definizione di funzione convessa/conc. scegliamo in modo arbitrario

$$x_1, x_2 \in (a,b) \text{ con } x_1 < x_2$$

e definiamo:
$$c(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

e
$$g(x) := f(x) - c(x)$$

per ogni $x \in [x_1, x_2]$.

La funzione g è:
- derivabile ($\Rightarrow$ continua) su $[x_1, x_2]$
- $g'(x) = f'(x) - c'(x)$
- $g(x_1) = g(x_2) = 0$

Inoltre:

$$\boxed{\begin{aligned} &f \text{ è convessa} \Leftrightarrow g \leq 0 \\ &f' \text{ è } \uparrow \Leftrightarrow g' \text{ è } \uparrow \end{aligned}}$$

(infatti $c'(x)$ è costante e non influisce sulla monotonia di g')

$\Rightarrow$) Supponiamo f convessa su (a,b), ovvero
$g(x) \le 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$
con $x_1 < x_2$ scelti arbitrariamente in (a,b).
Vogliamo dimostrare che g' è $\uparrow$.

Consideriamo i quozienti di Newton di g in x_1 e in x_2; preso $x \in (x_1, x_2)$ abbiamo:

$$0 \ge \frac{g(x) - \overbrace{g(x_1)}^{=0}}{\underbrace{x - x_1}_{>0}} \le 0 \qquad\qquad 0 \ge \frac{g(x) - \overbrace{g(x_2)}^{=0}}{\underbrace{x - x_2}_{<0}} \ge 0$$

$$\downarrow x \to x_1^+ \qquad\qquad \downarrow x \to x_2^-$$

qui si usa il 2° Teorema di Perm. Segno

$$g'(x_1) \le 0 \qquad\qquad g'(x_2) \ge 0$$

$\Rightarrow$ $g'(x_1) \le g'(x_2)$ e concludiamo che g' è $\uparrow$ grazie all'arbitrarietà di x_1 e x_2. ■

$\Leftarrow$) Supponiamo $f' \uparrow$, ovvero $g' \uparrow$.
Vogliamo dimostrare che f è convessa, ovvero che $g \le 0$, $\forall x \in [x_1, x_2]$.

Applichiamo il Teorema di Lagrange a g su $[x_1, x_2]$:

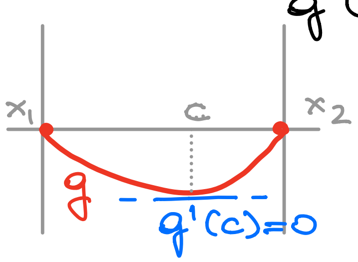
$$g(x_1) = g(x_2) = 0 \longrightarrow \exists c : g'(c) = 0$$

sapendo che $g' \uparrow$ allora

test di monotonia

$g'(x) \le 0$ su $[x_1, c)$ $\boxed{\Rightarrow}$ g è $\downarrow$ su $[x_1, c)$

$g'(x) \ge 0$ su $(c, x_2]$ $\boxed{\Rightarrow}$ g è $\uparrow$ su $(c, x_2]$



Essendo $g(x_1) = 0 = g(x_2)$, concludiamo che $g(x) \le 0$ su $[a,b]$