FORMULARIO PER L'ESAME DI LOGICA
(CORSI A E B)

ANNO ACCADEMICO 2020–21

1. Elementi di teoria degli insiemi

1.A. **Insiemi.**

Simbolo di appartenenza: $\in$ [$x \in A$ significa che x è un elemento di A.]

Relazione di inclusione: $\subseteq$ [$A \subseteq B$ se e solo se $\forall x\,(x \in A \to x \in B)$.]

Relazione di inclusione stretta: $\subset$ oppure $\subsetneq$

Principio di estensionalità. Due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi, ovvero

$$A = B \quad \text{se e solo se} \quad \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Principio di doppia inclusione: $A = B$ se e solo se $A \subseteq B \,\wedge\, B \subseteq A$.

Insieme vuoto: $\emptyset$

Insiemi numerici: numeri naturali $\mathbb{N}$, numeri interi $\mathbb{Z}$, numeri razionali $\mathbb{Q}$, numeri reali $\mathbb{R}$

Insieme delle parti o insieme potenza di A: $\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

Intersezione: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Intersezione generalizzata: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I\,(x \in A_i)\}$

Unione: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Unione generalizzata: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I\,(x \in A_i)\}$

Differenza: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Differenza simmetrica: $A \mathbin{\triangle} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Complemento: $\complement A = \{x \mid x \notin A\}$

Identità notevoli:

- Doppia negazione: $\complement\complement A = A$
- De Morgan: $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ e $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
- De Morgan generalizzata: $\complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \complement A_i$ e $\complement\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$
- Distributività: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Prodotto cartesiano: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Prodotto cartesiano generalizzato:

$$A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_{n-1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \mid \forall i < n\, (x_i \in A_i)\}$$

Potenza n-esima di un insieme A: $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ volte}}$

1.B. **Relazioni.**

Definizione (*Relazione*)**.** Sia $n \geq 1$. Una relazione n-aria è un sottoinsieme di un prodotto cartesiano della forma $A_0 \times \ldots \times A_{n-1}$. Il suo dominio è

$$\mathrm{dom}(R) = \{a \in A \mid (a, b) \in R \text{ per qualche } b \in B\},$$

il suo range (o immagine) è

$$\mathrm{rng}(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R \text{ per qualche } a \in A\}.$$

Relazione inversa di $R \subseteq A \times B$: $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$

Proprietà delle relazioni binarie: Una relazione binaria R su A si dice

- *riflessiva* se $a\ R\ a$ per ogni $a \in A$;
- *irriflessiva* se $\neg(a\ R\ a)$ *per ogni* $a \in A$;
- *simmetrica* se da $a\ R\ b$ segue che $b\ R\ a$;
- *antisimmetrica* se da $a\ R\ b$ e $b\ R\ a$ segue che $a = b$;
- *transitiva* se da $a\ R\ b$ e $b\ R\ c$ segue che $a\ R\ c$.

Definizione (*Relazione di equivalenza*)**.** Una **relazione di equivalenza su** A è una relazione (binaria) riflessiva, simmetrica e transitiva su A. La **classe di equivalenza** di un elemento $a \in A$ rispetto ad E è $[a]_E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x\ E\ a\}$. L'**insieme quoziente** è l'insieme di tutte le classi di equivalenza: $A/E \stackrel{\text{def}}{=} \{[a]_E \mid a \in A\}$.

Definizione (*Ordine*)**.** Una **relazione d'ordine su** A (o, più semplicemente, un **ordine** o un **ordinamento** su A) è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva su A. Un ordine R su un insieme A è **lineare** o **totale** se $a\ R\ b$ o $b\ R\ a$ per ogni scelta di $a, b \in A$. Un ordine che non sia lineare si dice anche ordine **parziale**. Un elemento $a \in A$ tale che $b\ R\ a$ per ogni $b \in A$ si dice **massimo**; un elemento $a \in A$ tale che $a\ R\ b$ per ogni $b \in A$ si dice **minimo**.

Definizione (*Ordine stretto*)**.** Un **ordine stretto** su A è una relazione irriflessiva $\prec$ su A tale che la relazione $\preceq$ su A definita

$$a \preceq b \quad \text{se e solo se} \quad a \prec b \vee a = b$$

è un ordine su A (detto **ordine indotto** da $\prec$).

Definizione (*Pre-ordine o quasi ordine*)**.** Un **pre-ordine** o **quasi ordine** su A è una relazione binaria $\precsim$ su A che è riflessiva e transitiva. Se $\precsim$ è un pre-ordine su A, allora

$$a \sim b \Leftrightarrow a \precsim b \wedge b \precsim a$$

è una relazione di equivalenza su A (detta **relazione di equivalenza indotta da** $\precsim$) e la relazione su $A/{\sim}$

$$[a]_\sim \leq [b]_\sim \Leftrightarrow a \precsim b$$

è ben definita ed è un ordine (detto **ordine indotto da** $\precsim$).

1.C. **Funzioni.**

Definizione (*Funzione*)**.** Una relazione $f \subseteq A \times B$ si dice **funzione da** A **in** B se per ogni $a \in A$ c'è un $b \in B$ tale che $(a,b) \in f$ e inoltre $b_1 = b_2$ per ogni $(a,b_1) \in f$ e $(a,b_2) \in f$.

In questo caso scriviamo$f \colon A \to B$ e l'unico $b \in B$ tale che $(a,b) \in f$ si indica con $f(a)$. Se $f \colon A \to B$ è una funzione, $A = \mathrm{dom}(f)$ si dice **dominio** della funzione f, mentre B si dice **codominio**.

L'elemento $f(a)$ si dice **valore** di f su a, oppure **immagine** di a mediante f. L'insieme $\mathrm{rng}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$ è il **range** o l'**immagine** della funzione f. Dato $C \subseteq A$, l'insieme $f[C] = \{f(a) \mid a \in C\}$ si dice **immagine** di C. (In particolare, $f[A] = \mathrm{rng}(f)$.)

La **preimmagine** o **controimmagine** di un elemento $b \in B$ è l'insieme $f^{-1}[\{b\}] = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. (Con un leggero abuso di notazione, spesso so scrive $f^{-1}(b)$ invece di $f^{-1}[\{b\}]$.) Più in generale, se $D \subseteq B$ l'insieme $f^{-1}[D] = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$ è detto **preimmagine** o **controimmagine** di D.

Restrizione di una funzione $f \colon A \to B$ a $C \subseteq A$:

$$f \restriction C \colon C \to B, \qquad c \mapsto f(c)$$

Composizione di due funzioni $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to C$:

$$g \circ f \colon A \to C, \qquad a \mapsto g(f(a))$$

Proprietà: Una funzione $f \colon A \to B$ si dice

- *iniettiva* (o *iniezione*) se da $a_1 \neq a_2$ segue che $f(a_1) \neq f(a_2)$, o, equivalentemente, se da $f(a_1) = f(a_2)$ segue che $a_1 = a_2$;
- *suriettiva* (o *suriezione*) se ogni $b \in B$ è della forma $f(a)$ per qualche $a \in A$ (equivalentemente, $\mathrm{rng}(f) = B$);
- *biettiva* (o *biezione*) se è sia iniettiva che suriettiva.

Inversa di un'iniezione $f \colon A \to B$: è la funzione $f^{-1} \colon \mathrm{rng}(f) \to A$ che manda ciascun $b \in \mathrm{rng}(f)$ nell'unico elemento in $f^{-1}(b)$.

Prodotto di due funzioni $f \colon X \to Y$ e $g \colon Z \to W$:

$$f \times g \colon X \times Z \to Y \times W, \qquad (x,z) \mapsto (f(x), g(z)).$$

Stringhe finite. Una **stringa finita (su A)** è una sequenza finita di simboli provenienti da A, che in questo caso viene detto **alfabeto**. L'insieme di tutte le stringhe finite su A si indica con A^* oppure $A^{<\mathbb{N}}$. La **lunghezza** di una stringa s, denotata con $\mathrm{lh}(s)$, è il numero di simboli che vi compaiono. La stringa vuota viene indicata con ε. L'insieme delle stringhe su A di lunghezza n è il prodotto cartesiano A^n. Una stringa s non vuota viene spesso rappresentata come $\langle s_0, s_1, \dots, s_{\mathrm{lh}(s)-1} \rangle$.

Concatenazione di due stringhe $s, t \in A^*$: la stringa st di lunghezza $\mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$ ottenuta facendo seguire i simboli elencati in s dai simboli elencati in t

Stringhe infinite. Una **stringa infinita (su A)**, detta anche **successione**, è una sequenza infinita di simboli provenienti da A, di solito rappresentata come $\langle s_0, s_1, \dots, s_n, \dots \rangle$ oppure $\langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. L'insieme di tutte le stringhe infinite su A si indica con $A^{\mathbb{N}}$; in particolare, $2^{\mathbb{N}}$ è l'insieme di tutte le stringhe infinite binarie, ovvero delle successioni sull'insieme $\{0,1\}$.

[**Osservazione.** Una stringa finita $\langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ di lunghezza n su A può anche essere rappresentata come una funzione $s \colon \{0, 1, \dots, n-1\} \to A$ tale che $s(i) = s_i$ per ogni $i = 0, \dots, n-1$. Analogamente una stringa infinita $\langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ su A può anche essere rappresentata come una funzione $s \colon \mathbb{N} \to A$ tale che $s(i) = s_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.]

1.D. **Cardinalità.**

Definizione (*Cardinalità*)**.** Due insiemi X e Y hanno la stessa **cardinalità**, in simboli $X \approx Y$ oppure $|X| = |Y|$, se esiste una biezione $f\colon X \to Y$.

X **si inietta in** Y, in simboli $X \precsim Y$ oppure $|X| \leq |Y|$, se esiste una iniezione $f\colon X \to Y$. Scriveremo $X \prec Y$ (oppure $|X| < |Y|$) quando $X \precsim Y$ ma $Y \not\precsim X$.

Proposizione. Sia $X \neq \emptyset$. Allora $X \precsim Y$ se e solo se c'è una suriezione $g\colon Y \to X$.

Teorema (*Cantor-Schröder-Bernstein*)**.** Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ allora $X \approx Y$.

Definizione (*Insiemi finiti e infiniti*)**.** Un insieme si dice **finito** se e solo se è in biezione con $\{0, \ldots, n-1\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ (dove poniamo $\{0, \ldots, n-1\} = \emptyset$ quando $n = 0$). Se X è finito ed in biezione con $\{0, \ldots, n-1\}$ scriviamo $|X| = n$. Un insieme che non è finito si dice **infinito**.

Proposizione. X è infinito se e solo se $\mathbb{N} \precsim X$. In particolare $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme infinito: se X è infinito $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

Proposizione. Un insieme X è infinito se e solo se esiste $Y \subset X$ tale che $Y \approx X$.

Definizione (*Insiemi numerabili*)**.** Un insieme si dice **numerabile** se è in biezione con $\mathbb{N}$. Un insieme infinito che non sia numerabile si dice **più che numerabile**.

Proposizione. Se X è numerabile, anche $X \times X$ e le potenze cartesiane *finite* X^n di X lo sono.

Proposizione. Se X è non vuoto l'insieme $X^{<\mathbb{N}}$ è infinito. Se X è numerabile anche $X^{<\mathbb{N}}$ lo è.

Teorema (*Cantor*)**.** Per ogni insieme X non vuoto si ha $|X| < |\mathscr{P}(X)|$.

Esempi di insiemi numerabili: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Esempi di insiemi più che numerabili: $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$

2. Principio d'induzione

Principio di induzione (semplice). Data una proprietà P dei numeri naturali, se

$$\textit{vale } P(0) \textit{ e per ogni } n \in \mathbb{N} \textit{ vale } P(n) \to P(n+1),$$

allora

$$\textit{per ogni } k \in \mathbb{N} \textit{ vale } P(k),$$

ovvero la proprietà P vale per tutti i numeri naturali.

[La **base** dell'induzione è la dimostrazione di $P(0)$, mentre il **passo induttivo** è la dimostrazione dell'implicazione $P(n) \to P(n+1)$ *per un generico* $n \in \mathbb{N}$, che normalmente si articola nel modo seguente: si assume che $P(n)$ sia vera (questa è detta **ipotesi induttiva**), e si dimostra che allora vale anche $P(n+1)$ (questa viene talvolta detta **tesi induttiva**).]

Principio del minimo. Se la proprietà P è vera per qualche numero naturale, allora c'è un minimo numero naturale n per il quale vale la proprietà P.

Una proprietà P dei numeri naturali è **progressiva**, in simboli $\mathrm{Prog}(P)$, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

se la proprietà P vale per tutti gli $m < n$, allora vale anche per n.

Principio di induzione forte. Se $\mathrm{Prog}(P)$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale $P(k)$.

Principio di induzione strutturale (semplice). Sia A un insieme con una funzione $h \colon A \to \mathbb{N}$ *suriettiva*. Data una proprietà P, assumiamo che:

($\star$) $P(a)$ vale per tutti gli $a \in A$ con $h(a) = 0$.

($\star\star$) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che:

Se $P(a)$ vale per ogni a con $h(a) = n$, allora $P(a)$ vale per ogni a con $h(a) = n+1$.

Allora $P(a)$ vale per ogni $a \in A$.

Principio di induzione strutturale forte. Sia A un insieme con una funzione $h \colon A \to \mathbb{N}$ *suriettiva*. Data una proprietà P, assumiamo che

($\dagger$) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che:

Se $P(a)$ vale per ogni a con $h(a) < n$, allora $P(a)$ vale per ogni a con $h(a) = n$.

Allora $P(a)$ vale per ogni $a \in A$.

3. Logica proposizionale

3.A. **Sintassi.**

Definizione (*Proposizioni* o *formule proposizionali*)**.** Fissiamo un insieme L non vuoto i cui elementi $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \dots$ si dicono **lettere proposizionali**. L'insieme $\mathrm{Prop}(L) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Prop}_n(L)$ delle **proposizioni** (o **formule proposizionali**) su L è il sottoinsieme di

$$(L \cup \{(,), \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\})^*,$$

definito ponendo

$$\begin{aligned} \mathrm{Prop}_0(L) &= \{(\mathrm{A}) \mid \mathrm{A} \in L\} \\ \mathrm{Prop}_{n+1}(L) &= \mathrm{Prop}_n(L) \cup \{(\neg \mathrm{P}) \mid \mathrm{P} \in \mathrm{Prop}_n(L)\} \cup \\ &\qquad \cup \{(\mathrm{P} \mathbin{\square} \mathrm{Q}) \mid \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{Prop}_n(L),\ \square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\}\,. \end{aligned}$$

Le proposizioni della forma (A) (per qualche $A \in L$) si dicono **proposizioni atomiche**. Se una proposizione è invece della forma $(\neg \mathrm{P})$ o della forma $(\mathrm{P} \mathbin{\square} \mathrm{Q})$, $\neg$ e $\square$ sono rispettivamente il suo **connettivo principale**, e P e Q le **sottoproposizioni immediate**. Una proposizione non atomica P viene detta **negazione**, **congiunzione**, **disgiunzione**, **implicazione** oppure **bi-implicazione** quando il suo connettivo principale è $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ o $\leftrightarrow$, rispettivamente.

Altezza di una proposizione: l'altezza ht(P) di una proposizione P è definita da

$$\mathrm{ht}\colon \mathrm{Prop}(L) \to \mathbb{N}, \qquad \mathrm{ht}(\mathrm{P}) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{P} \in \mathrm{Prop}_n(L)\}\,.$$

Albero sintattico di una proposizione P**:** albero binario finito etichettato tale che

(1) la radice è etichettata con P;
(2) ogni nodo ha nessuno, uno o due successori immediati a seconda che la proposizione etichetta del nodo sia atomica, della forma $(\neg \mathrm{Q})$, o della forma $(\mathrm{Q} \mathbin{\square} \mathrm{R})$, rispettivamente. Nel secondo caso il successore è etichettato con Q, nel terzo caso i due successori sono etichettati rispettivamente con Q e con R.

L'altezza di P coincide con l'altezza del suo albero sintattico diminuita di una unità.

Convenzioni sulle parentesi:

- Non si scrivono le parentesi nelle proposizioni atomiche e non si scrivono le parentesi più esterne.
- Si eliminano alcune coppie di parentesi intorno ad alcune sottoproposizioni, utilizzando il criterio di priorità tra connettivi dato dalla seguente graduatoria:

$$\begin{array}{c} \neg \\ \wedge \quad \vee \\ \rightarrow \\ \leftrightarrow \end{array}$$

- Per occorrenze multiple dello stesso connettivo si conviene l'associazione a destra.

3.B. **Semantica.**

Tavole di verità dei connettivi:

P	¬P
V	**F**
F	**V**

P	Q	P ∧ Q
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

P	Q	P ∨ Q
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

P	Q	P → Q
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

P	Q	P ↔ Q
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Definizione (*Interpretazioni* e *valutazioni*)**.** Sia L un insieme di lettere proposizionali. Un'**interpretazione** è una funzione $i\colon L \longrightarrow \{0,1\}$. Una **valutazione** è invece una funzione $v\colon \mathrm{Prop}(L) \to \{0,1\}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} v((\neg \mathrm{P})) &= 1 - v(\mathrm{P}) \\ v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) &= \min\{v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\ v((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})) &= \max\{v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\ v((\mathrm{P} \to \mathrm{Q})) &= \max\{1 - v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\ v((\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q})) &= 1 - |v(\mathrm{P}) - v(\mathrm{Q})|. \end{aligned}$$

Ogni valutazione $v\colon \mathrm{Prop}(L) \to \{0,1\}$ induce un'interpretazione $i\colon L \to \{0,1\}$ definita ponendo $i(A) = v((A))$ per ogni $\mathrm{A} \in L$. Viceversa, ogni interpretazione i si estende a una valutazione i^* ponendo $i^*((\mathrm{A})) = i(\mathrm{A})$ per ogni $\mathrm{A} \in L$ e definendo $i^*(P)$ per le proposizioni P non atomiche come segue:

$$\begin{aligned} i^*((\neg \mathrm{P})) &= 1 - i^*(\mathrm{P}) \\ i^*((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) &= \min\{i^*(\mathrm{P}), i^*(\mathrm{Q})\} \\ i^*((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})) &= \max\{i^*(\mathrm{P}), i^*(\mathrm{Q})\} \\ i^*((\mathrm{P} \to \mathrm{Q})) &= \max\{1 - i^*(\mathrm{P}), i^*(\mathrm{Q})\} \\ i^*((\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q})) &= 1 - |i^*(\mathrm{P}) - i^*(\mathrm{Q})|. \end{aligned}$$

Definizioni. Sia P una proposizione.

- Se $i^*(\mathrm{P}) = 1$, si dice che P è **vera** nell'interpretazione i, o che i **soddisfa** P, o che i è un **modello** di P, e si scrive anche
$$i \models \mathrm{P}.$$
- Se esiste almeno un'interpretazione i tale che $i \models \mathrm{P}$, si dice che P è **soddisfacibile**, o **coerente**.
- Se non esiste alcun modello di P, si dice che P è **insoddisfacibile**, o **incoerente**, o **contraddittoria**, o una **contraddizione**.
- Se per ogni interpretazione i si ha $i \models \mathrm{P}$, si dice che P è (**logicamente**) **valida**, o **logicamente vera**, o una **tautologia**, e si scrive
$$\models \mathrm{P}.$$

Definizioni. Sia $\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}(L)$ un insieme (finito o infinito) di proposizioni costruite a partire dallo stesso insieme di lettere proposizionali L.

- Un'interpretazione $i\colon L \to \{0,1\}$ è un **modello** di Γ, in simboli
$$i \models \Gamma,$$
se $i \models \mathrm{P}$ per ogni $\mathrm{P} \in \Gamma$. In questo caso diciamo anche che Γ è **soddisfatto** da i, o che i **soddisfa** Γ.
- Γ si dice **soddisfacibile** (o **coerente**) se *esiste* un'interpretazione i tale che $i \models \Gamma$; in caso contrario, ovvero se $i \not\models \Gamma$ per ogni interpretazione i, si dice che Γ è **insoddisfacibile** (o **incoerente**).
- L'insieme di proposizioni Γ è **valido** se $i \models \Gamma$ *per ogni* interpretazione i. In questo caso scriviamo $\models \Gamma$.

Definizione (*Conseguenza logica*)**.** Dati $\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}(L)$ e $\mathrm{Q} \in \mathrm{Prop}(L)$, diciamo che Q è **conseguenza logica** di Γ, in simboli
$$\Gamma \models \mathrm{Q},$$
se per ogni interpretazione i, se $i \models \Gamma$ allora $i \models \mathrm{Q}$. Scriviamo $\Gamma \not\models \mathrm{Q}$ per dire che Q NON è conseguenza logica di Γ.

Quando $\Gamma = \{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}$ è un insieme finito, allora scriviamo semplicemente
$$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$$
invece di $\{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\} \models \mathrm{Q}$ e diciamo che Q è conseguenza logica delle proposizioni P_1, …, P_n. In particolare, quando $\Gamma = \{\mathrm{P}\}$ scriviamo $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e diciamo che Q è conseguenza logica di P.

Vale l'equivalenza seguente:
$$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q} \quad \text{se e solo se} \quad \models (\mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n) \to \mathrm{Q}.$$

Teorema. Siano $\mathrm{P} \in \mathrm{Prop}(L)$ e $\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}(L)$.

(1) P è valida (ovvero una tautologia) se e solo se $\neg\mathrm{P}$ è una contraddizione.
(2) P è soddisfacibile se e solo se $\neg\mathrm{P}$ non è valido,
(3) $\Gamma \models \mathrm{P}$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg\mathrm{P}\}$ è insoddisfacibile.

Definizione (*Equivalenza logica*)**.** Date $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{Prop}(L)$ si dice che P e Q sono **logicamente equivalenti**, e si scrive
$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q},$$
se per ogni interpretazione i si ha $i \models \mathrm{P}$ se e solo se $i \models \mathrm{Q}$. Scriviamo $\mathrm{P} \not\equiv \mathrm{Q}$ per dire che P e Q NON sono logicamente equivalenti.

Valgono le seguenti equivalenze:

- $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$ se e solo se $\models \mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$.
- $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$ se e solo se $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e $\mathrm{Q} \models \mathrm{P}$.
- $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$ se e solo se $i^*(\mathrm{P}) = i^*(\mathrm{Q})$ per ogni interpretazione i.

4. Logica del prim'ordine

4.A. **Sintassi.**

Vbl**:** Insieme delle variabili

Linguaggio del prim'ordine $L = \mathrm{Const} \cup \mathrm{Func} \cup \mathrm{Rel}$**:** insieme di simboli dove

- $\mathrm{Const} = \{c, d, e, \dots\}$ è l'insieme dei simboli di costante
- $\mathrm{Func} = \{f, g, h, \dots\}$ è l'insieme dei simboli di funzione
- $\mathrm{Rel} = \{P, Q, R, \dots\}$ è l'insieme dei simboli di relazione (o predicato).

Ad ogni simbolo di funzione f e di relazione P è associato un numero intero positivo detto **arietà** del simbolo, che si indica con $\mathrm{ar}(f)$ e $\mathrm{ar}(P)$, rispettivamente.

Definizione (*Termini*)**.** L'insieme $\mathrm{Term} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Term}_n$ dei **termini** (o L**-termini**) di un dato linguaggio del prim'ordine L è il sottoinsieme di

$$\Big(\{(,)\} \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const} \cup \mathrm{Func}\Big)^*$$

definito ponendo

$$\begin{aligned} \mathrm{Term}_0 &= \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}, \\ \mathrm{Term}_{n+1} &= \mathrm{Term}_n \cup \\ &\qquad \{f(t_1 \dots t_k) \mid f \in \mathrm{Func} \text{ e } t_1, \dots, t_k \in \mathrm{Term}_n \text{ e } k = \mathrm{ar}(f)\}\,. \end{aligned}$$

Scriviamo $t(x_1, \dots, x_n)$ per indicare che le variabili che occorrono nel termine t sono (alcune tra le) $x_1, \dots, x_n$.

Altezza di un termine: l'altezza $\mathrm{ht}(t)$ di un termine t è il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che $t \in \mathrm{Term}_n$.

Albero sintattico di un termine t**:** albero finito etichettato tale che

(1) la radice è etichettata con t;
(2) se un nodo è etichettato con una costante o una variabile, non ha nessun successore immediato;
(3) se un nodo è etichettato con un termine della forma $f(t_1, \dots, t_n)$ dove $\mathrm{ar}(f) = n$, allora ha n successori immediati etichettati con $t_1, \dots, t_n$, rispettivamente.

L'altezza di t coincide con l'altezza del suo albero sintattico diminuita di una unità.

Definizione (*Formule atomiche*)**.** Una **formula atomica** (nel linguaggio del prim'ordine L) è una stringa della forma

$$(R(t_1, \dots, t_n))$$

dove R è un simbolo di predicato n-ario in L e $t_1, \dots, t_n$ sono L-termini, oppure della forma

$$(t_1 = t_2)$$

dove t_1, t_2 sono L-termini.

Definizione (*Formule*)**.** L'insieme $\mathrm{Fml} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Fml}_n$ delle **formule** (o L**-formule**) di un dato linguaggio del prim'ordine L è il sottoinsieme di

$$\Big(L \cup \mathrm{Vbl} \cup \{(,), \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\Big)^*$$

definito ponendo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Fml}_0 &= \{\varphi \mid \phi \text{ è una formula atomica del linguaggio } L\}\\ \mathrm{Fml}_{n+1} &= \mathrm{Fml}_n \cup \{(\neg\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Fml}_n\} \cup\\ &\cup \{(\varphi \,\square\, \psi) \mid \varphi, \psi \in \mathrm{Fml}_n,\ \square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\} \cup\\ &\cup \{(Qx\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Fml}_n,\ Q \in \{\exists, \forall\},\ x \in \mathrm{Vbl}\}\,.\end{aligned}$$

Se una formula è della forma $(\neg\varphi)$, $(\varphi \,\square\, \psi)$ oppure della forma $(Qx\varphi)$, allora $\neg$, $\square$ o Q, rispettivamente, sono la sua **costante logica principale**; nei primi due casi parliamo anche di **connettivo principale**, nell'ultimo caso Q si dice anche **quantificatore principale** e φ è il suo **raggio d'azione**; le formule φ e ψ sono le **sottoformule principali** della formula data. Diciamo che una formula φ è una **negazione**, **congiunzione**, **disgiunzione**, **implicazione**, **bi-implicazione**, **formula esistenziale** oppure **formula universale** quando la sua costante logica principale è $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$ o $\forall$, rispettivamente.

Altezza di una formula φ: l'altezza $\mathrm{ht}(\varphi)$ di una formula φ è il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi \in \mathrm{Fml}_n$.

Albero sintattico di una formula φ: albero binario finito etichettato tale che

(1) la radice è etichettata con φ;
(2) se un nodo è etichettato con una formula del tipo $(\neg\psi)$, allora ha un unico successore immediato etichettato con ψ;
(3) se un nodo è etichettato con una formula del tipo del tipo $(\psi \,\square\, \chi)$ con $\square$ connettivo binario, allora ha due successori immediati etichettati con ψ e χ, rispettivamente;
(4) se un nodo è etichettato con una formula del tipo $(\exists x\psi)$ oppure $(\forall x\psi)$, allora ha un unico successore immediato etichettto con ψ.

L'altezza di φ coincide con l'altezza del suo albero sintattico diminuita di una unità.

Definizione (*Occorrenze libere e vincolate*)**.** Un'*occorrenza* di una variabile x in una formula φ è **vincolata** se segue un quantificatore oppure cade nel raggio d'azione di un quantificatore del tipo $\exists x$ o $\forall x$; in caso contrario, l'occorrenza in questione si dice **libera**.

Si dice che la *variabile* x **occorre libera** in φ (oppure che x è una **variabile libera di** φ) se c'è almeno un'occorrenza libera di x in φ. L'insieme delle variabili libere di φ è indicato con $FV(\varphi)$.

Scriviamo $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ per indicare che $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definizione (*Enunciati*)**.** Una formula φ si dice **enunciato** (o **L-enunciato**, o **formula chiusa**) se non contiene variabili libere, ovvero $FV(\varphi) = \emptyset$.

Convenzioni sulle parentesi:

- Si omettono le parentesi più esterne e le parentesi che racchiudono le formule atomiche.
- Si eliminano alcune coppie di parentesi intorno ad alcune sottoformule, utilizzando il criterio di priorità tra costanti logiche dato dalla seguente graduatoria:

$$\begin{gathered}\neg \quad \exists \quad \forall\\ \wedge \quad \vee\\ \rightarrow\\ \leftrightarrow\end{gathered}$$

- Per le costanti logiche di massima priorità (ovvero quelle che si applicano ad una formula sola), si conviene l'associatività a destra.
- Similmente, per occorrenze multiple dello stesso connettivo binario si conviene l'associatività a destra.

4.B. **Semantica.**

Sia $L = \mathrm{Rel} \cup \mathrm{Func} \cup \mathrm{Const}$ un linguaggio del prim'ordine.

Definizione (*Strutture*)**.** Una **L-struttura**

$$\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}}, \dots, c^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$$

consiste di

(1) un insieme non vuoto A, detto **universo** o **dominio** della struttura;
(2) un'**interpretazione** in $\mathcal{A}$ di ogni simbolo di L, definita come segue:
   - se $R \in \mathrm{Rel}$ è un simbolo relazionale n-ario, la sua interpretazione $R^{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$ è una relazione n-aria su A , ovvero $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$;
   - se $f \in \mathrm{Func}$ è un simbolo funzionale n-ario, allora $f^{\mathcal{A}} \colon A^n \to A$, ovvero $f^{\mathcal{A}}$ è una funzione n-aria con argomenti e valori in A;
   - se $c \in \mathrm{Const}$ è un simbolo di costante, la sua interpretazione in $\mathcal{A}$ consiste di un elemento $c^{\mathcal{A}} \in A$.

Definizione (*Assegnazioni*)**.** Un'**assegnazione** (nella L-struttura $\mathcal{A}$) per un insieme di variabili $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ è una funzione che associa ad ogni variabile x_i dell'insieme un elemento $a_i \in A$ (per ogni $1 \leq i \leq n$). Una tale assegnazione verrà di solito denotata con

$$x_1/a_1, x_2/a_2, \dots, x_n/a_n$$

Definizione (*Interpretazione di termini*)**.** L'**interpretazione** di un L-termine $t(x_1, \dots, x_n)$ in una L-struttura $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \dots, x_n/a_n$ si indica con

$$t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$$

ed è definita per ricorsione su $\mathrm{ht}(t)$:

- se t è la variabile x_i (per qualche $1 \leq i \leq n$), allora $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ è l'elemento a_i;
- se t è una costante c, allora $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ è l'elemento $c^{\mathcal{A}}$;
- se t è $f(t_1, \dots, t_k)$, allora $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ è l'elemento

$$f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n], \dots, t_k^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]).$$

Definizione (*Relazione di soddisfazione*)**.** Definiamo per ricorsione su $\mathrm{ht}(\varphi)$ cosa vuol dire che una L-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ **è vera in una L-struttura** $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \dots, x_n/a_n$, in simboli

$$\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n].$$

- Se φ è una formula atomica del tipo $(t = s)$ con t ed s termini, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n] = s^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$.
- Se φ è una formula atomica del tipo $(P(t_1, \dots, t_k))$ con P simbolo di relazione k-ario e t_1, …, t_k termini, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se $(t_1^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n], \dots, t_k^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]) \in P^{\mathcal{A}}$.
- Se φ è una negazione $(\neg\psi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se non è vero che $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$.
- Se φ è una disgiunzione $(\psi \vee \chi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ oppure $\mathcal{A} \models \chi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ (o entrambe).
- Se φ è una congiunzione $(\psi \wedge \chi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ e $\mathcal{A} \models \chi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$.
- Se φ è un'implicazione $(\psi \to \chi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ implica che $\mathcal{A} \models \chi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$.
- Se φ è una bi-implicazione $(\psi \leftrightarrow \chi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ implica $\mathcal{A} \models \chi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ e viceversa.

- Se φ è una formula esistenziale $(\exists y \psi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se per qualche $b \in A$ si ha che $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, y/b]$.
- Se φ è una formula universale $(\forall y \psi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se per ogni $b \in A$ si ha che $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, y/b]$.

Definizione (*Insiemi di verità*)**.** Data una L-formula φ con $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$ e una L-struttura $\mathcal{A}$, l'**insieme di verità** di φ in $\mathcal{A}$ è

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]\}.$$

Definizioni. Sia φ un L-enunciato.

- Se φ risulta vero in una struttura $\mathcal{A}$ (indipendentemente da qualunque assegnazione, visto che $FV(\varphi) = \emptyset$) scriviamo
$$\mathcal{A} \models \varphi$$
e diciamo che φ è **vero** (o **soddisfatto**) **in** $\mathcal{A}$, o che $\mathcal{A}$ è un **modello di** φ, o ancora che $\mathcal{A}$ **soddisfa** φ.
- Se esiste almeno una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$, allora si dice che φ è **soddisfacibile** o **coerente**.
- Se non esiste alcun modello di φ, si dice che φ è **insoddisfacibile**, o **incoerente**, o **contraddittorio**, o una **contraddizione**.
- Se per ogni L-struttura $\mathcal{A}$ si ha che $\mathcal{A} \models \varphi$, si dice che φ è (**logicamente**) **valido**, o **logicamente vero**, e si scrive
$$\models \varphi.$$

Definizioni. Sia Γ un insieme (finito o infinito) di L-enunciati.

- Una L-struttura $\mathcal{A}$ è un **modello** di Γ, in simboli
$$\mathcal{A} \models \Gamma,$$
se $\mathcal{A} \models \varphi$ per ogni $\varphi \in \Gamma$. In questo caso diciamo che Γ è **soddisfatto** da $\mathcal{A}$, o che $\mathcal{A}$ **soddisfa** Γ.
- Γ si dice **soddisfacibile** (o **coerente**) se $\mathcal{A} \models \Gamma$ *per qualche* L-struttura $\mathcal{A}$; in caso contrario, ovvero se $\mathcal{A} \not\models \Gamma$ per ogni L-struttura $\mathcal{A}$, si dice che Γ è **insoddisfacibile** (o **incoerente**).
- Γ si dice **valido** se $\mathcal{A} \models \Gamma$ *per ogni* L-struttura $\mathcal{A}$. In questo caso scriviamo $\models \Gamma$.

Definizione (*Conseguenza logica*)**.** Sia Γ un insieme di L-enunciati e sia φ un L-enunciato. Diciamo che φ è **conseguenza logica** di Γ, in simboli

$$\Gamma \models \varphi$$

quando per ogni L-struttura $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \models \Gamma$ allora $\mathcal{A} \models \varphi$. Scriviamo $\Gamma \not\models \varphi$ per dire che φ NON è conseguenza logica di Γ.

Quando $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ è un insieme finito, allora scriviamo semplicemente

$$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$$

invece di $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$. In particolare, quando $\Gamma = \{\psi\}$ scriviamo $\psi \models \varphi$.

Vale l'equivalenza seguente:

$$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi \qquad \text{se e solo se} \qquad \models (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi.$$

Teorema. Sia φ un L-enunciato e Γ un insieme di L-enunciati.

(1) φ è valido se e solo se $\neg\varphi$ è una contraddizione.
(2) φ è soddisfacibile se e solo se $\neg\varphi$ non è valido,
(3) $\Gamma \models \varphi$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile.

Definizione (*Equivalenza logica*)**.** Due L-enunciati φ e ψ sono **logicamente equivalenti**, in simboli $\varphi \equiv \psi$, se per ogni L-struttura $\mathcal{A}$ si ha che $\mathcal{A} \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi$. Scriviamo $\varphi \not\equiv \psi$ per dire che φ e ψ NON sono logicamente equivalenti.

Valgono le seguenti equivalenze:
- $\varphi \equiv \psi$ se e solo se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ se e solo se $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$.