Come calcolare il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$?

1) Calcolo approssimato

Si basa sulla definizione di integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(z_i)$$

da cui

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(z_i) \qquad \text{per } n \text{ "grande"}$$

Scelta tipica: $z_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ p.to medio di $[x_{i-1}, x_i]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}$$

formula del punto medio

Tale formula è "impreziosita" dal seguente risultato teorico per la stima dell'errore:

Teorema Sia f $\underbrace{\text{di classe } C^2}$ su $[a,b]$

$\to$ f due volte derivabile e f'' continua

Allora, posto

$$\boxed{K = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}$$

risulta

$$\Bigg|\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{valore esatto}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}_{\text{valore approssimato}}\Bigg| \leq \frac{K}{24}\,\frac{(b-a)^3}{n^2} \qquad \forall n \geq 1$$

l'errore $\to 0$

errore

se $n \to +\infty$

2) Calcolo esatto

Si basa sul

Teorema di Torricelli - Barrow (o teorema di valutazione)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua e sia F una sua primitiva

Allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

es $\int_{-1}^{2} x^4\,dx = F(2) - F(-1)$ con $F(x) = \frac{1}{5}x^5$

$= \frac{1}{5}2^5 - \frac{1}{5}(-1)^5 = \frac{32}{5} + \frac{1}{5} = \frac{33}{5}$

Osservazioni

- La quantità $F(b) - F(a)$ non dipende da quale primitiva di f viene scelta. Infatti, se G è un'altra primitiva di f sappiamo che $G(x) = F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ e dunque

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

- Determinare esplicitamente una primitiva di f non è sempre possibile

(es famoso $f(x) = e^{-x^2}$ gaussiana

)

In tali casi il calcolo esatto di $\int_a^b f(x)\,dx$ non è possibile dim

dim Dato $n \in \mathbb{N}$, consideriamo la suddivisione di $[a,b]$ in n intervalli di ampiezza $\frac{b-a}{n}$, ovvero

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Possiamo scrivere

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Per il teorema di Lagrange, per ogni $i = 1, \dots, n$ esiste $z_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tale che

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Poiché $F' = f$, si ha dunque

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= S_n(f; z_1, \dots, z_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Poiché f è integrabile su $[a,b]$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f; z_1, \dots, z_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

da cui si deduce $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ $\square$

Il teorema di Torricelli-Barrow mostra un primo collegamento tra calcolo differenziale e calcolo integrale: infatti:

calcolo di una $\rightsquigarrow$ calcolo di $\int^b f(x)dx$

calcolo di una primitiva di f $\rightsquigarrow$ calcolo di $\int_a^b f(x)dx$

$\S$

problema inverso della derivazione

c'è un secondo collegamento, più sottile:

calcolo integrale $\rightsquigarrow$ costruzione di una primitiva di f

Questo risultato va sotto il nome di

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Fissato $x_0\in[a,b]$ definiamo la funzione

$$\boxed{F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x\in[a,b]}$$

Allora F è derivabile in $[a,b]$ e risulta

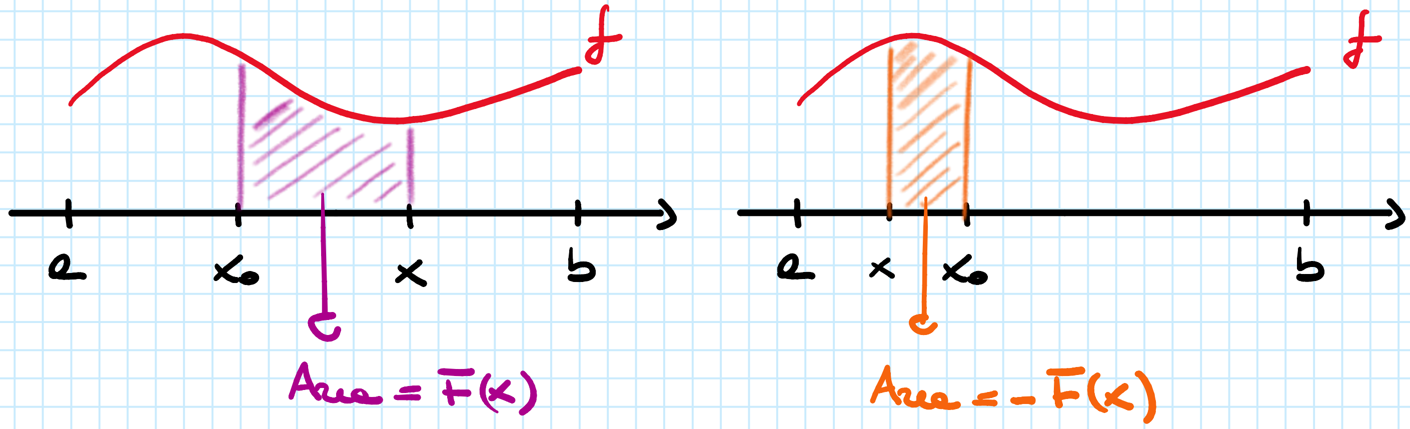
$$F'(x)=f(x) \qquad \forall x\in[a,b]$$

Osservazioni e spiegazioni:

- Nella definizione di F, il simbolo $\int$ va inteso come "integrale orientato", ovvero

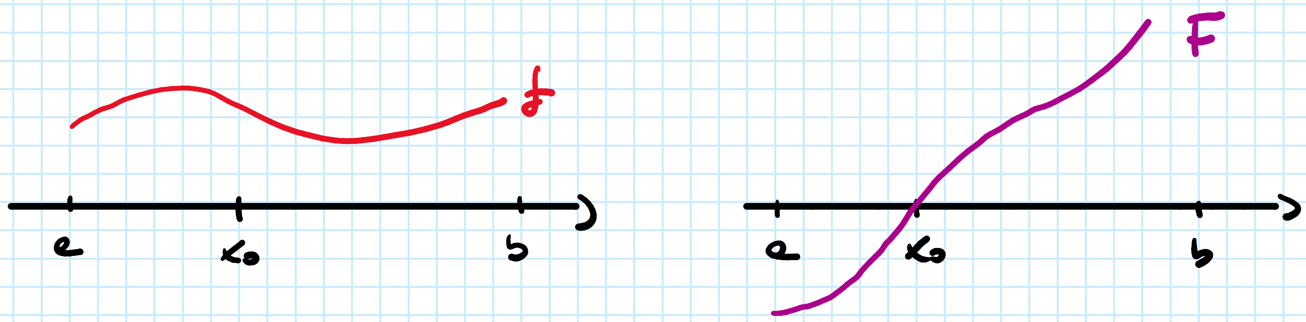
$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt & x>x_0\\ 0 & x=x_0\\ -\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt & x<x_0\end{cases}$$

(es $\int_2^1 f(t)\,dt=-\int_1^2 f(t)\,dt$

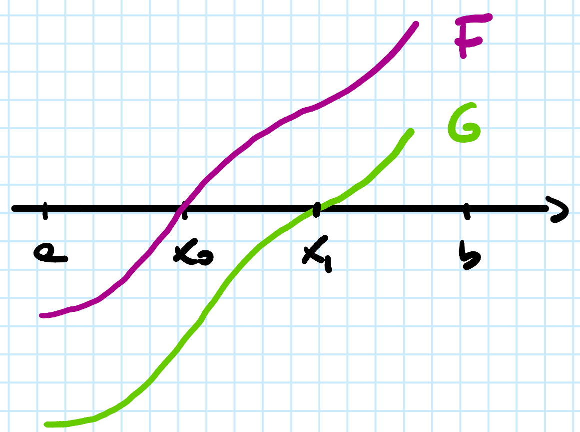


Chiamiamo F la <u>funzione di accumulazione di f di base x_0</u>

- Il teorema afferma dunque che la funzione di accumulazione di f di base x_0 è una primitiva di f. Precisamente, è la primitiva di f tale che $F(x_0) = 0$



Se cambiamo x_0, cambia la primitiva:



$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$$G(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$$

(Nella Lez 5 è stato enunciato il teorema nel caso particolare $x_0 = a$)

- Integrazione e derivazione sono dunque "procedimenti inversi", nel senso che

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, rightsquigarrow, "\int"] & F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \arrow[l, bend left, "D"] \end{tikzcd}$$

Vediamo la dimostrazione

<u>dim</u> Sia $\bar{x}$ un arbitrario punto di $[a,b]$; dobbiamo dimostrare che $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$ e cioè che

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x})$$

- Supponiamo $\bar{x} \in (a,b)$.

Se $h>0$ dalla proprietà di additività dell'integrale rispetto al dominio si ha

$$\begin{aligned} F(\bar{x}+h) - F(\bar{x}) &= \int_{x_0}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt \\ &= \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

e dunque

$$\frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt$$

Poichè f è continua, per il teorema della media integrale

Poiché f è continua, per il teorema della media integrale esiste $c_h \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$ tale che $\frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt = f(c_h)$ e dunque

$$\frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h} = f(c_h)$$

Passiamo al limite per $h \to 0^+$: si ha $c_h \to \bar{x}$ e dunque, poiché f è continua, $f(c_h) \to f(\bar{x})$.
Quindi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x})$$

Se $h<0$, si ragiona in modo simile provando che

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x})$$

Dunque, la (*) è dimostrata

- Se $\bar{x}=a$ o $\bar{x}=b$ si ragiona allo stesso modo, prendendo $h\to 0^+$ nel primo caso e $h \to 0^-$ nel secondo □

Osservazione finale

L'importanza di questo risultato è "teorica": stiamo affermando che, se f è continua, allora una primitiva di f esiste, ma non sempre la si può scrivere "esplicitamente"

es $\quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$

è una primitiva di $f(x) = e^{-x^2}$, ma non è

è una primitiva di $f(x) = e^{-x^2}$, ma non è possibile "calcolarla esplicitamente"
(perché per calcolare $\int_0^x e^{-t^2} dt$ dovremmo usare Torricelli-Barrow e quindi conoscere una primitiva di f....)