Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa
Programmazione Lineare

Andrea Grosso
Dipartimento di Informatica
Università di Torino
andrea.grosso@unito.it – 011-6706824
unito.webex.com/meet/andrea.grosso

Sommario

Sommario

Struttura del corso

- Orari
  GIO h. 11–13, — lezioni sincrone via WebEx
  VEN h. 09–11, — lezioni sincrone via WebEx
  12 ore supplementari di esercitazione

- Modellazione (sviluppo di modelli PL, *programmi* lineari).
- ABC di algebra e geometria:
  - Sistemi di equazioni lineari;
  - Spazi vettoriali finitamente generati;
  - Indipendenza lineare, basi;
- Algebra e geometria della PL, algoritmo del simplesso.
- Cenni di PL a variabili intere.

Materiale

Testi/appunti

- Appunti (Grosso/Aringhieri).
- R. J. Vanderbei, *Linear programming: foundations and extensions*, (disponibile in rete).
- C. H. Papadimitriou,K. Steiglitz, *Combinatorial optimization: algorithms and complexity.*

Pagina del corso.

- `informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=2270`
- Unica per i corsi A/B/C con sezioni separate.
- Materiale "asincrono" in aggiunta alla registrazione delle lezioni sincrone.
- Accesso ospiti (almeno per ora).
  Password: CMRO-A-B-C-2021-2022

Esame

Se in presenza

- Scritto, più orale facoltativo (scritto ≥ 18).
- Scritto: esercizi + teoria. Da 0 a 33 punti. Sviluppo di un modello.
- Presentarsi in aula **annulla** qualunque voto precedente (anche in caso di ritiro).
- Orale (facoltativo): qualunque cosa. Fino a +3 punti.
- Possibilità di ritiro.
- Ammesse fino a tre correzioni nell'anno accademico.

Se online

- Scritto/test online.
- Orale obbligatorio in aula virtuale.
- Tutti gli appelli sono accessibili.

Sommario

Ricerca Operativa

Operations Research

- Uso ottimale di risorse scarse.
- Nata (circa) durante la II guerra mondiale.

Ricerca Operativa

Operations Research

...is the discipline of applying advanced analytical methods to help make better decisions (`www.informs.org`). Since its inception nearly 60 years ago, O.R. has contributed billions of dollars in benefits and savings to corporations, government, and the nonprofit sector.

Ricerca Operativa

...studia, progetta ed impiega modelli matematici, metodi quantitativi, strumenti software avanzati, simulazione ed altre tecniche analitiche per affrontare e risolvere problemi complessi ed identificarne le soluzioni (`www.airo.org`).

Ricerca Operativa

- La ricerca operativa si occupa di formalizzare un problema in un modello matematico e calcolare una soluzione “ottima”, quando possibile, o approssimata per esso.
- Costituisce un approccio scientifico alla risoluzione di problemi complessi, si può ricondurre all’ambito della matematica applicata ma
- presenta forti caratteristiche interdisciplinari (matematica, informatica, economia e finanza, ingegneria, . . .).

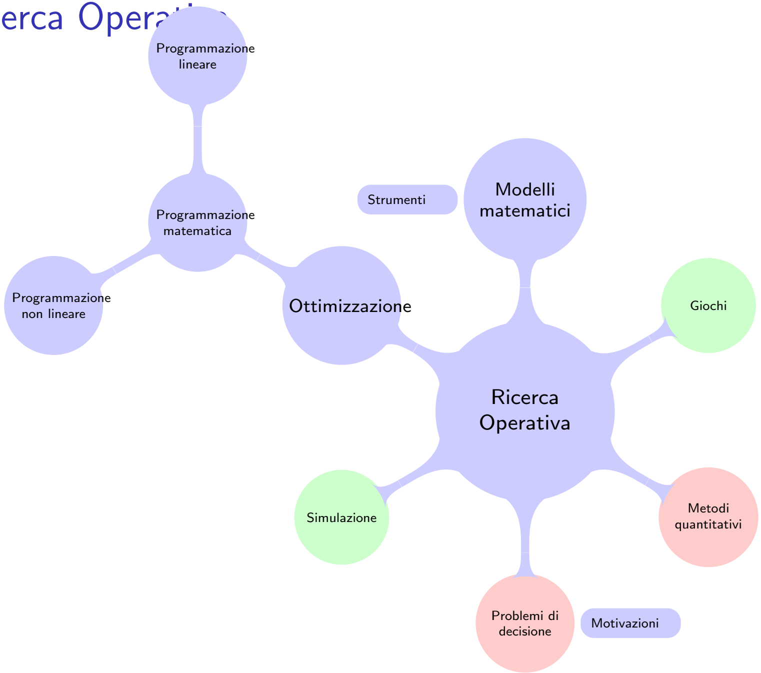
Ricerca Operativa

Metodi.

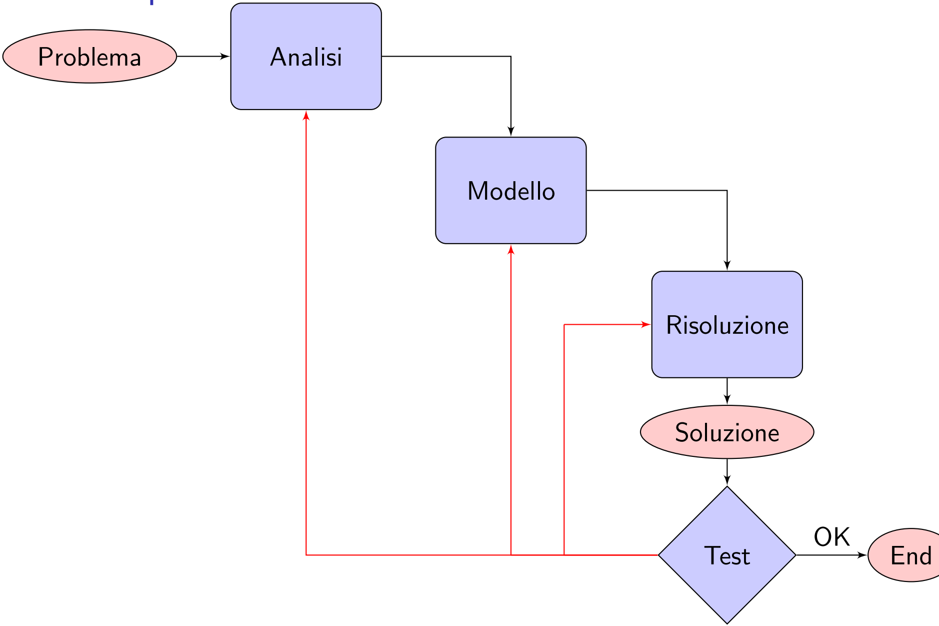
- modelli matematici (equazioni e disequazioni lineari);
- metodi algebrici e geometrici;
- algoritmi (standard o “ad-hoc”);
- programmi/librerie, linguaggi di modellazione;

Il nostro corso. Centrato sulla programmazione lineare.

Ricerca Opera



Ricerca Operativa



Ricerca Operativa

Applicazioni.

- economiche/finanziarie;
- pianificazione di infrastrutture;
- gestione di impianti produttivi;
- logistica e trasporti;
- turnazione del personale;
- militari;
- sudoku!;
- ecc.

Sommario

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{maximize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in S_a \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rl} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in S_a \end{array}}$$

- $f(x)$ =funzione obiettivo
- S_a =insieme delle soluzioni ammissibili
- S_a spesso finito, ma non enumerabile in pratica.

Idea

Idea: la funzione $f(\cdot)$ effettua un "ranking" delle soluzioni ammissibili, tra le quali si vuole scegliere la "migliore".

Problema

Come descrivere S_a.

Programmazione matematica

Problema di ottimizzazione

Scegli $x^* \in S_a$ tale che $f(x^*) = \max\{f(x) \colon x \in S_a\}$.

Programma matematico

$$\max/\min\ z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

soggetto a

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq = \geq b_1$$
$$g_2(x_1, \ldots, x_n) \leq = \geq b_2$$

$$g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq = \geq b_m$$
$$x_1 \in \mathbb{D}_1, x_2 \in \mathbb{D}_2, \ldots, x_m \in \mathbb{D}_n$$

Programmazione lineare

Programma lineare

$$\max/\min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

soggetto a

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq=\geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \leq=\geq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq=\geq b_m$$
$$x_1 \in \mathbb{D}_1, x_2 \in \mathbb{D}_2, \ldots, x_m \in \mathbb{D}_n$$

$\mathbb{D}_i = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+, \{0, 1\}$

Tecnologia matura

Tecnica generale	Problemi di grandi dimensioni
Solver evoluti e stabili	Linguaggi di modellazione.

Proprietario

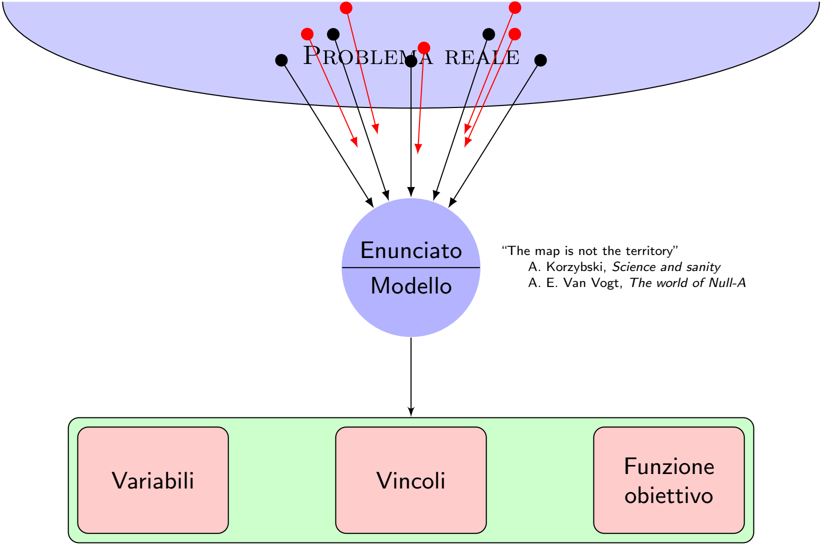
Nome	Produttore	Caratteristiche
CPLEX/OPL	IBM	Programmazione lineare e quadratica, linguaggio di modellazione.
http://www-01.ibm.com/software/websphere/products/optimization/cplex-studio-preview-edition/		
XPRESS/MOSEL	Fair Isaac Co.	Programmazione lineare e non lineare, linguaggio di modellazione molto flessibile (MOSEL).
http://www.fico.com		
GUROBI	GUROBI	Programmazione lineare e quadratica.
http://www.gurobi.com		
AMPL	AMPL	Linguaggio di modellazione interfacciabile con molti solver.
http://www.ampl.com		

Open source

Nome	Caratteristiche
GLPK	Programmazione lineare, linguaggio di modellazione.
http://www.gnu.org/software/glpk/	
LPSOLVE	Programmazione lineare.
http://sourceforge.net/projects/lpsolve/	

Ricerca Operativa/Programmazione Lineare

A word of caution



"The map is not the territory"
A. Korzybski, *Science and sanity*
A. E. Van Vogt, *The world of Null-A*

Esempio (toy problem)

Una gita in montagna

Un gruppo di amici dovendo fare una gita ha deciso di mettere cibi e bevande in un unico zaino da 10 Kg. Lo zaino può essere riempito con

- Cioccolata (conf. 500 g.)
- Succhi di frutta (bott. da 1 l.)
- Lattine di birra (da 0.33 l.)
- Panini imbottiti (da 100 g.)
- Acqua minerale (bott. da 1 l.)
- Pacchi di biscotti (conf. 500 g.)

Dopo un'indagine tra i partecipanti alla gita (si poteva dare un voto da 1 a 100 ad ogni prodotto) sono stati determinati i seguenti punteggi.

Prodotto	**Punti**
Cioccolata	10
Succhi di frutta	30
Lattine di birra	6

Prodotto	**Punti**
Panini imbottiti	20
Acqua minerale	20
Pacchi di biscotti	8

Esempio (cont.)

Per non scontentare nessuno si è deciso di portare almeno:

- 2 confezioni di cioccolata;
- 2 bottiglie di succo di frutta;
- 6 lattine di birra;
- 10 panini imbottiti;
- 2 conf. di biscotti.

Formulare il modello di Programmazione Lineare che massimizzi il punteggio totale degli oggetti caricati nello zaino, rispettandone il vincolo di capacità.

Modello

Problema dello zaino

Scelta/definizione variabili

x_i = quantità di confezioni di alimento i.
(1=cioccolata, 2=succhi frutta, ...)

Modello

Scelta/definizione variabili

x_i = quantità di confezioni di alimento i.
(1=cioccolata, 2=succhi frutta, ...)

$$\max \; z = 10x_1 + 30x_2 + 6x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 8x_6$$

soggetto a

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{10}x_4 + x_5 + \frac{1}{2}x_6 \leq 10$$

$$x_1 \geq 2 \qquad x_4 \geq 10$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_3 \geq 6 \qquad x_6 \geq 2$$

$$x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{Z}_+$$

Problema dello zaino

- Items numerati $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Profitti per item p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Pesi per item w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Limiti inf/sup al numero di esemplari di ogni item.
- Capacità contenitore W.
- Caricare il contenitore in modo "ottimo".

$$\max \; z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

soggetto a

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

$$x_i \in Z_+$$

Esempio

Problema dello zaino

Soluzione ottima

	Item	Quant.	Peso	Profitto
1.	Cioccolata	2	1.0	20
2.	Succhi fr.	2	2.0	60
3.	Birra	6	2.0	36
4.	Panini	40	4.0	800
5.	Acqua	0	0.0	0
6.	Biscotti	2	1.0	16
	Totale		10.0	932

Osservazione (miope)

I panini hanno il miglior rapporto profitto/ingombro.

Item	1	2	3	4	5	6
Profitto	10	30	6	20	20	8
Peso	0.5	1.0	0.3	0.1	1.0	0.5
Ratio	20	30	18	200	20	16

Esempio

Quattro amici pignoli

Algy, Bertie, Charlie e Digby studiano all'università e condividono un appartamento. Ogni mattina vengono recapitati al loro indirizzo quattro giornali: Financial Times, il Guardian, il Daily Express e il Sun. Ognuno dei quattro legge i quattro giornali da solo e in un suo proprio ordine come da tabella, e i quattro non vanno da nessuna parte prima che ognuno abbia letto i giornali.

Algy		**Bertie**		**Charlie**		**Digby**	
FT	60	Guardian	75	Express	5	Sun	90
Guardian	30	Express	3	Guardian	15	FT	1
Express	2	FT	25	FT	10	Guardian	1
Sun	5	Sun	10	Sun	30	Express	1

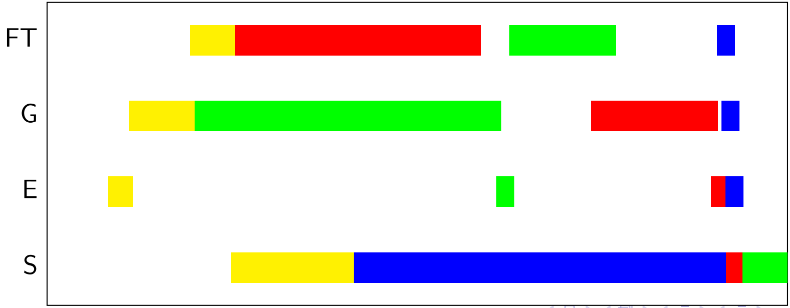
Algy si sveglia alle 8:30, Bertie e Charlie alle 8:45, Digby alle 9:30. In che ordine devono leggere i giornali per uscire di casa insieme e andare a lezione il più presto possibile?

Esempio

Quattro amici pignoli: soluzione ottima

Giornale	FT	G	E	S
Algy	45	133	163	165
Bertie	113	35	110	170
Charlie	35	20	15	45
Digby	165	166	167	75

(min. dalle 8:30)



Sommario

Modelli di mix

Un caso di approvvigionamento

L'acciaieria PLASTIK deve evadere un ordine di 1000 tonnellate di acciaio INOX. Per questa produzione servono manganese (almeno l'1% in peso), cromo (almeno il 18%) e molibdeno (almeno il 2%).
I fornitori di metalli non ferrosi vendono — per esigenze di mercato — questi prodotti in tre tipi di confezioni differenti. La prima confezione contiene 2 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 10 euro. La seconda confezione contiene 2 Kg. di manganese, 3 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 15 euro. La terza confezione contiene 1 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 5 Kg. di molibdeno e costa 20 euro.
Formulare il modello di Programmazione Lineare per minimizzare il costo di acquisto delle confezioni.

Modelli di mix

Dati del problema

Tipo conf.	Manganese	Cromo	Molibdeno	Costo
1	2	2	1	10
2	2	3	1	15
3	1	2	5	20
Fabbisogno (Kg)	10000	180000	20000	

Modelli di mix

Soluzione

Variabili

x_i = confezioni di tipo i acquistate.

$$\min \; z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 10000 \\
2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 180000 \\
x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq 20000 \\
x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

Problemi di mix

Un problema semplificato di produzione

Una ditta produce sette tipi di prodotti in legno numerati $1, 2, \ldots, 7$; ognuno dei mobili viene processato dai reparti di falegnameria, verniciatura, assemblaggio, verifica e imballaggio. Questi reparti dispongono rispettivamente di 2000, 1500, 1700, 300 e 500 ore-uomo di lavoro al mese. I prodotti richiedono lavorazioni di diversa entità, come da tabella, ed hanno ognuno il margine di profitto unitario indicato.

Prodotto	1	2	3	4	5	6	7
Falegn.	7	5	9	10	10	12	15
Vernic.	2	2	2	3	3	3	3
Assembl.	2	2	4	7	9	15	18
Verifica	1	1	1	2	1	2	2
Imball.	1	1	1	1	2	1	0
Profitto	10	18	20	25	27	28	35

(ore-uomo di lavorazione per prodotto; profitto in euro)

Problemi di mix

La produzione deve sottostare ai seguenti vincoli. Dei prodotti 1 e 2 si ritiene di non poter vendere più di 70 unità; dei prodotti 1, 2, 3 e 4 si devono produrre almeno 20 unità. Per tutti gli altri prodotti, non si pongono limiti precisi ma si vuole che nessuno rappresenti più del 35% della produzione totale.

Scrivere un programma lineare che permette di massimizzare il profitto ottenuto dalla vendita della produzione mensile.

Problemi di mix

Soluzione

Costanti:
h_{ij} = ore consumate dal prodotto j nel reparto i (tabella)
$i \in R = \{\text{Falegn.} \dots \text{Imball.}\}$, $j = 1, \dots, 7$
q_i = monte ore disponibili al reparto i
p_j = profitto unitario prodotto j.
Variabili: x_j = numero di mobili di tipo j prodotti.

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{7} p_j x_j = 10x_1 + 18x_2 + \cdots + 35x_7$$

soggetto a

$$\sum_{j=1}^{6} h_{ij} x_j \le q_i \quad i \in R \left| \begin{array}{r} 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + \cdots + 15x_7 \le 2000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 3x_7 \le 1500 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + 0x_7 \le 500 \end{array} \right.$$

Modelli di mix

$$x_i \leq 70 \qquad i = 1, 2$$

$$x_i \geq 20 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$x_i \leq 0.35 \sum_{j=1}^{7} x_j \qquad i = 5, 6, 7$$

$$x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{Z}_+$$

Problemi di mix

Costruzione (semplificata) di portafoglio

Il sig. Ibrahim Rossi vuole investire la somma di 500000 euro, con l'orizzonte temporale di un anno. A tal fine il sig. Rossi vuole ripartire il capitale in due tipi di investimenti:

(a) un conto bancario privo di rischi che paga interessi del 2%;

(b) un portafoglio azionario composto da un mix di quote di ETF descritti qui di seguito.

Gli ETF che il sig. Rossi prende in considerazione sono i seguenti.

ID	Denominazione	Settore	Rend. atteso	Max. perdita	Prezzo
1	Euro STOXX 600	Europa, globale	14%	-5%	36
2	Euro STOXX 600 HC	Europa, Health-care	20%	-10%	76
3	Euro STOXX 600 Banks	Europa, Finanziari	23%	-25%	19
4	USA S&P500	Usa, globale	12%	-4%	17
5	BRICS 50	Mercati emergenti	15%	-21%	18
6	MSCI Emerg. Marks.	Mercati emergenti	13%	-19%	27

Problemi di mix

Il sig. Rossi, per ogni ETF, ha stimato il rendimento atteso a un anno e anche una possibile massima perdita che ritiene che possa verificarsi nel caso l'ETF abbia una cattiva performance.
Il sig. Rossi vuole ripartire il suo denaro al fine di massimizzare il rendimento atteso a un anno, compatibilmente con i seguenti vincoli.

(1) Non meno di 150000 euro devono essere depositati nel conto privo di rischi.

(2) In ogni ETF non devono essere investiti più di 100000 euro.

(3) Non più del 20% della quota investita in ETF deve essere investita in mercati emergenti.

(4) Almeno il 10% della quota investita in ETF deve essere nel settore health-care.

(5) La perdita massima possibile complessiva del portafoglio ETF non deve essere superiore al 15%.

Formulare il programma lineare per risolvere il problema del sig. Rossi.

Costanti.

p_i = prezzo quota dell'ETF i $(i = 1, \ldots, 6)$
r_i = rendimento atteso in % dell'ETF i
$r_0 = 0.02$ rendimento del conto risk-free
δ_i = massima perdita dell'ETF i

Variabili.

x_i = numero di quote acquistate dell'ETF i
x_0 = denaro investito nel conto privo di rischi.

Problemi di mix

$$\begin{aligned}
\max\ \ z = & (1+r_0)x_0 + \sum_{i=1}^{6}[(1+r_i)p_i]x_i \\
\text{soggetto a}\quad & x_0 + \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = 500000 \\
& x_0 \geq 150000 \\
& p_i x_i \leq 100000 \qquad i = 1, \dots, 6 \\
& p_5 x_5 + p_6 x_6 \leq \frac{20}{100} \sum_{i=1}^{6} p_i x_i \\
& p_2 x_2 \geq \frac{10}{100} \sum_{i=1}^{6} p_i x_i \\
& \sum_{i=1}^{6} \delta_i p_i x_i \leq \frac{15}{100} \sum_{i=1}^{6} p_i x_i \\
& x_0 \geq 0 \\
& x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

Modelli di mix

Copertura di turni di lavoro.

Un motel autostradale, dovendo garantire un servizio continuato 24 ore su 24, ha bisogno di un numero minimo di inservienti per ogni ora del giorno secondo la seguente tabella.

Fascia oraria	Numero min.	Fascia oraria	Numero min.
02-06	4	14-18	7
06-10	8	18-22	12
10-14	10	22-02	4

Ciascun inserviente lavora 8 ore consecutive al giorno, coprendo due fasce orarie consecutive.
Formulare il modello di Programmazione Lineare per garantire la presenza richiesta utilizzando il minor numero possibile di inservienti.

Sommario

La casa editrice ANALFABETA pubblica un quotidiano che viene distribuito da quattro centri di smistamento S_1, S_2, S_3, S_4 che richiedono rispettivamente almeno 100000, 150000, 50000 e 75000 copie. Il giornale viene stampato in tre tipografie T_1, T_2, T_3 che producono rispettivamente al massimo 125000, 180000 e 70000 copie

I costi per la spedizione sono di 2 euro/Km. per giornale e le distanze tra le tipografie ed i centri di smistamento sono rispettivamente di 20, 25, 15 e 5 Km. per la prima tipografia, di 12, 14, 18 e 30 Km per la seconda, e di 19, 11, 40 e 12 Km per la terza.

Formulare il modello di Programmazione Lineare per pianificare le spedizioni a costo totale minimo.

Trasporto

Soluzione

Costanti: d_{ij} = distanza $T_i \to S_j$.
Variabili: x_{ij} = numero di giornali spediti $T_i \to S_j$.

$$d_{ij} = \begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 25 & 15 & 5 \\ 12 & 14 & 18 & 30 \\ 19 & 11 & 40 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \qquad x_{ij} = \begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \end{array}$$

Trasporto
Soluzione

$$
\begin{aligned}
\min \quad z = & 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} d_{ij}x_{ij} = 2[20x_{11} + 25x_{12} + \cdots + 12x_{34}] & & \\
\text{soggetto a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & \leq 125000 & \quad (T_1) \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leq 180000 & \quad (T_2) \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & \leq 70000 & \quad (T_3) \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} & \geq 100000 & \quad (S_1) \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} & \geq 150000 & \quad (S_2) \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} & \geq 50000 & \quad (S_3) \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} & \geq 75000 & \quad (S_4) \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \imath = 1, \ldots, 3, \; j = 1, \ldots, 4. & &
\end{aligned}
$$

vincolo in base a x_i

Definizioni

- Origini $1, 2, \ldots, n$, destinazioni $1, 2, \ldots, m$.
- Disponibilità $a_1, \ldots, a_n$, domande $b_1, \ldots, b_m$.
- c_{ij} = costo unitario di spedizione $i \to j$.
- x_{ij} = quantità spedita $i \to j$.

$$\min \; z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m$$

Assegnamento

Un problema di assegnamento

In un reparto di un'azienda meccanica ci sono cinque operai specializzati $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ che operano su cinque macchine $\{A, B, C, D, E\}$. Le macchine producono gli stessi pezzi, ma sono di modelli diversi, e gli operai hanno abilità differenti per ognuna di esse. Ogni combinazione operaio-macchina risulta quindi in un diverso livello di produttività, espresso in pezzi all'ora nella seguente matrice.

$$
p_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{pmatrix}
10 & 7 & 9 & 2 & 1 \\
8 & 9 & 12 & 7 & 2 \\
2 & 9 & 9 & 8 & 8 \\
9 & 18 & 2 & 4 & 3 \\
9 & 9 & 4 & 5 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Si vuole assegnare ogni operaio ad una ed una sola macchina in modo da massimizzare la produttività totale. Formulare il programma lineare corrispondente.

Assegnamento

Soluzione

$$p_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 7 & 9 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 12 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 9 & 8 & 8 \\ 9 & 18 & 2 & 4 & 3 \\ 9 & 9 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Costanti

$$x_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{1A} & x_{1B} & x_{1C} & x_{1D} & x_{1E} \\ x_{2A} & x_{2B} & x_{2C} & x_{2D} & x_{2E} \\ x_{3A} & x_{3B} & x_{3C} & x_{3D} & x_{3E} \\ x_{4A} & x_{4B} & x_{4C} & x_{4D} & x_{4E} \\ x_{5A} & x_{5B} & x_{5C} & x_{5D} & x_{5E} \end{pmatrix} \end{array}$$

Variabili

Esempio di soluzione ammissibile.

$$x_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Assegnamento

Soluzione

$$\max \ z = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=A}^{E} p_{ij} x_{ij}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=A}^{E} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \qquad j = A, \ldots, E$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \ i = 1, \ldots, 5, \ j = A, \ldots, E$$

riga e colonna (1 per)

Sommario

Un'azienda deve pianificare la produzione di un prodotto per i prossimi 4 mesi. Non ci sono giacenze in magazzino all'inizio del periodo e non ce ne devono essere alla fine dei 4 mesi. La domanda mensile prevista per il prodotto è di 120 ton., 160 ton., 300 ton. e 200 ton. rispettivamente. La capacità produttiva mensile è 140 ton., 150 ton., 140 ton. e 160 ton. rispettivamente ad un costo di 10 euro/ton.. In caso di necessità è possibile produrre in straordinario aumentando la capacità mensile di (al più) 50 ton., 75 ton., 70 ton. e 80 ton. rispettivamente.
La produzione straordinaria ha un costo addizionale di 6 euro/ton.. Le eventuali giacenze a fine mese costano 5 euro/ton..
Formulare il modello di programmazione lineare che permette di pianificare la produzione a costo minimo, garantendo di soddisfare la domanda prevista.

Modelli multiperiodo

Soluzione

Variabili

x_i	ton. prodotte con lavoro ordinario nel mese i.
s_i	ton. prodotte con lavoro straord. nel mese i.
y_i	livello magazzino a fine mese i.

$$\min \ z = 10 \sum_{i=1}^{4} x_i + 16 \sum_{i=1}^{4} s_i + 5 \sum_{i=1}^{4} y_i$$

soggetto a

$$\begin{array}{llll} x_1 \leq 140 & x_3 \leq 140 & s_1 \leq 50 & s_3 \leq 70 \\ x_2 \leq 150 & x_4 \leq 160 & s_2 \leq 75 & s_4 \leq 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} x_1 + s_1 \geq 120 & x_1 + s_1 = 120 + y_1 & \\ y_1 + x_2 + s_2 \geq 160 & y_1 + x_2 + s_2 = 160 + y_2 & \\ y_2 + x_3 + s_3 \geq 300 & y_2 + x_3 + s_3 = 300 + y_3 & \\ y_3 + x_4 + s_4 = 200 & y_3 + x_4 + s_4 = 200 + y_4 & y_4 = 0 \end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_4 \geq 0 \qquad s_1, \ldots, s_4 \geq 0 \qquad y_1, \ldots, y_4 \geq 0.$$

Piano di investimento con reinvestimento degli utili.

Un finanziere ha a disposizione due piani di investimento A e B, disponibili all'inizio di ciascuno dei prossimi cinque anni. Ogni euro investito in A all'inizio di ogni anno dà, due anni più tardi, un profitto di 0.4 euro, e può essere immediatamente reinvestito. Ogni euro investito in B all'inizio di ogni anno dà, tre anni dopo, un profitto di 0.7 euro. In più, da un certo momento in avanti, sarà possibile sfruttare anche due altri piani di investimento C e D. In particolare, ogni euro investito in C all'inizio del secondo anno raddoppierà dopo quattro anni. Ogni euro investito in D all'inizio del quinto anno darà un profitto di 0.3 euro l'anno successivo. Anche per i piani B, C, D, vale la possibilità di reinvestimento come per il piano A.
Il finanziere ha a disposizione 100000 euro e vuole sapere quale piano di investimento massimizza il profitto maturato entro l'inizio del sesto anno.

Sudoku

	4	9		6				2
8			2	1		4	9	
1				4				
				3	5		8	4
		8	1		2	3		
6	3		4	7				
				8				1
	8	4		5	1			6
7				2		9	5	

Sommario

Problemi max-min e min-max

Formazione di squadre di lavoro.

Un call-center dispone di 10 operatori da suddividere in quattro squadre. Per ogni ogni operatore è stata misurata la rapidità nell'evadere chiamate, in termini di chiamate evase al minuto (in media).

(completato)

Operat. i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocità v_i	3.5	6	7	2.8	1.5	1.5	3	4	6.5	4

Problemi max-min e min-max

Si vogliono assegnare gli operatori a quattro squadre formate da non meno di due e non più di quattro persone in modo tale che

- ogni squadra sia costituita in modo da poter evadere almeno **otto** chiamate/minuto;
- la velocità totale della squadra "più lenta" deve essere massima possibile.

Formulare il modello di programmazione lineare per suddividere in squadre gli operatori rispettando i requisiti richiesti.

Problemi max-min e min-max

Soluzione

Variabili

$x_{ij} = 1$ se assegno operatore i a squadra j, altrimenti 0.
$y =$ variabile ausiliaria.

$$\max \; z = y$$

soggetto a

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, 10$$

$$2 \leq \sum_{i=1}^{10} x_{ij} \leq 4 \qquad j = 1, \ldots, 4$$

$$\sum_{i=1}^{10} v_i x_{ij} \geq 8 \qquad j = 1, \ldots, 4$$

$$\sum_{i=1}^{10} v_i x_{ij} \geq y \qquad j = 1, \ldots, 4$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, 10, \; j = 1, \ldots, 4, \qquad y \geq 0$$

Problemi max-min e min-max

Schedulazione su macchine parallele.

In un impianto produttivo occorre evadere un lotto costituito da 10 pezzi $\{1, 2, \ldots, 10\}$ da sottoporre a lavorazione. Per eseguire le lavorazioni in questione si possono utilizzare tre macchine diverse M_1, M_2, M_3. Tutte e tre le macchine possono eseguire le stesse lavorazioni su ogni pezzo, ma a causa dei tipi di lavorazione richiesti e del tipo di tecnologia di ogni macchina, il tempo richiesto (in ore) per lavorare ogni pezzo è diverso a seconda della macchina che lo processa. I tempi sono dati dalla seguente matrice macchine-pezzi.

$$p_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 1 & 2.5 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 2 & 3.5 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1.5 & 4 & 4 & 1 & 2.5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Problemi max-min e min-max

Le macchine sono tutte disponibili dallo stesso istante (apertura del reparto), lavorano senza interruzioni e quando una macchina comincia un pezzo lo lavora senza interruzioni per il tempo previsto, portandolo a compimento. Il reparto non si occupa di altre lavorazioni fino a quando non ha terminato il lotto in questione.
Scrivere il programma lineare che permette di pianificare la lavorazione dei pezzi sulle macchine in modo da terminare il lotto il più in fretta possibile.

Variabili.
$x_{ij} = 1$ iff pezzo j assegnato a macchina i.

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = y \\
\text{soggetto a} \quad & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 && j = 1, \dots, 10 \\
& \sum_{j=1}^{10} p_{ij} x_{ij} \leq y && i = 1, 2, 3 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\},\ j = 1, \dots, 10,\ i = 1, 2, 3,\ y \geq 0.
\end{aligned}$$

Sommario

Scrivere il modello in programmazione lineare del seguente problema.
Si consideri un territorio sul quale siano localizzati 7 punti di domanda (ad es. 7 città) indicati in tabella con $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Si considerino, inoltre, 5 punti di offerta indicati in tabella con A, B, C, D, E nei quali potrebbero essere aperti dei centri vendita di un'impresa di distribuzione. Tale impresa è interessata a soddisfare la domanda sopramenzionata in modo tale che i clienti non percorrano più di 30 minuti di auto per raggiungere almeno uno dei centri vendita. In tabella, per ogni coppia di punti di domanda e di offerta, viene indicato il tempo auto necessario.
L'impresa ha inoltre fatto sapere che accetterà soluzioni che prevedano l'attivazione del centro vendita B solo se è già attivo uno dei centri C o D.
L'apertura dei centri vendita costa rispettivamente (in miliardi di lire):
$A = 310$, $B = 250$, $C = 260$, $D = 330$, $E = 280$.

Problemi con decisioni logiche

L'obiettivo dell'impresa è di minimizzare i costi di apertura dei centri vendita garantendo il fatto che che tutti i punti di domanda vengano serviti.

	A	B	C	D	E
1	41	33	24	29	58
2	25	12	22	58	41
3	21	43	34	54	18
4	21	42	39	26	18
5	11	23	24	29	53
6	47	23	19	16	31
7	37	47	51	26	19

Problemi con vincoli logici
Soluzione

Variabili.
$x_i = 1$ iff apro il centro in $i = A, B, C, D, E$.

$$
\begin{aligned}
\min\ \ z = & 310x_A + 250x_B + 260x_C + 330x_D + 280x_E \\
\text{soggetto a}\quad & x_C + x_D \geq 1 && (C \vee D) && (1)\\
& x_A + x_B + x_C \geq 1 && (A \vee B \vee C) && (2)\\
& x_A + x_E \geq 1 && (A \vee E) && (3)\\
& x_A + x_D + x_E \geq 1 && (A \vee D \vee E) && (4)\\
& x_A + x_B + x_C + x_D \geq 1 && (A \vee B \vee C \vee D) && (5)\\
& x_B + x_C + x_D \geq 1 && (B \vee C \vee D) && (6)\\
& x_D + x_E \geq 1 && (D \vee E) && (7)\\
& x_C + x_D \geq x_B && (B \implies C \vee D) && \\
& x_A, \ldots, x_E \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Problemi con vincoli logici

Modellare proposizioni logiche con variabili binarie.

$x_1 \vee x_2$	$x_1 + x_2 \geq 1$
$x_1 \vee \neg x_2$	$x_1 + (1 - x_2) \geq 1$
	$x_1 - x_2 \geq 0$
$x \implies y$	$x \leq y$
$x_1 \wedge x_2 \implies y$	$x_1 + x_2 - 1 \leq y$
$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k \implies y$	$\sum_{i=1}^{k} x_i - (k-1) \leq y$
$x_1 \vee x_2 \implies y$	$x_1 + x_2 \leq 2y$
$x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k \implies y$	$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq ky$
	oppure:
	$x_i \leq y \qquad i = 1, \ldots, k$

Problemi con vincoli logici

Produzione con costi fissi

Una ditta ha la possibilità di attivare, per l'anno corrente, la produzione di quattro tipi di prodotti A, B, C e D. Per ogni tipo di produzione, se attivata, la ditta si impegna a produrre un quantitativo minimo pari rispettivamente a 1000, 1500, 3000 e 2000 unità. La produzione di A, B, C e D richiede un costo fisso per l'attivazione delle rispettive linee di produzione ed una quantità di forza lavoro per ogni unità prodotta, ed ogni unità venduta fornisce un profitto, come specificato dalla seguente tabella (in euro).

Prodotto	**Costo fisso**	**Forza lavoro unit.**	**Profitto unit.**
A	14500	10	50
B	10000	15	60
C	8000	5	55
D	9000	14	80

Gare uma

Problemi con vincoli logici - grande M

La ditta dispone per l'anno in corso di 200000 unità complessive di forza lavoro. Inoltre i committenti per la quale essa lavora richiedono che nel caso venga attivata la produzione di A venga anche prodotto almeno uno tra C o D, almeno nei quantitativi minimi sopra indicati.
Formulare il programma lineare per decidere le produzioni da attivare e pianificarne i quantitativi al fine di massimizzare il saldo profitti-costi.

Problemi con vincoli logici – grande M

Variabili.
x_i = quantità prodotta di $i = A, B, C, D$.
$y_i = 1$ iff produco $i = A, B, C, D$ ($= 0$ altrimenti)
Costanti.
$M =$ "molto grande"

$$
\begin{aligned}
\max \ z = & 50x_A + 60x_B + 55x_C + 80x_D \\
& -14500y_A - 10000y_B - 8000y_C - 9000y_D \\
\text{soggetto a} \quad & 10x_A + 15x_B + 5x_C + 14x_D \leq 200000 \\
& y_C + y_D \geq y_A \\
& x_A \geq 1000y_A \qquad x_A \leq My_A \\
& x_B \geq 1500y_B \qquad x_B \leq My_B \\
& x_C \geq 3000y_C \qquad x_C \leq My_C \\
& x_D \geq 2000y_D \qquad x_D \leq My_D \\
& x_A, \dots, x_D \in \mathbb{Z}_+, \ y_A, \dots, y_D \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Problemi con vincoli logici - grande M

Pianificazione di coltivazioni

Un'azienda agricola produce mais, soia e grano in tre tenute A, B, C. La tenuta A dispone di 600 ettari di terreno e di una riserva di 8×10^6 m^3 di acqua. La tenuta B ha 700 ettari di terreno e 5×10^6 m^3 di acqua. La terza dispone di 450 ettari e di 6×10^6 m^3. Le produzioni di mais, soia e grano garantiscono rispettivamente profitti di 5, 7 e 6 Keuro/ettaro. I consumi di acqua sono di 20000 m^3/ha per il mais,10000 m^3/ha per la soia e 10000 m^3/ha per il grano. Le direttive della comunità europea richiedono che:

- almeno una tenuta lasci 200 ettari di terreno incolto, e
- l'estensione complessiva del terreno coltivato a soia dall'azienda non superi il 40% del totale del suolo coltivato.

Formulare il programma lineare per la massimizzazione del profitto.

Problemi con vincoli logici - grande M

Minimizzazione della total tardiness

Sono dati n lotti da lavorare numerati $i = 1, 2, \ldots, n$ su un impianto che funziona senza pause ed è disponibile dall'istante "0". Tutti i lotti sono disponibili anch'essi dall'istante 0; ogni lotto i è caratterizzato da un tempo di lavorazione (p_i *processing time*) e da una scadenza di consegna (d_i, *due date*). Se la lavorazione del lotto i viene iniziata al tempo t_i, essa prosegue senza interruzioni fino all'istante $t_i + p_i$ (istante di completamento) e nessuna altra lavorazione vi si può sovrapporre. La misura del ritardo sulla scadenza $\max(t_i + p_i - d_i, 0)$ è chiamata tardiness. Scrivere un modello di programmazione lineare che permetta di assegnare ad ogni lotto un opportuno tempo di inizio t_i in modo da minimzzare la *total tardiness*

$$\sum_{i=1}^{n} \max(t_i + p_i - d_i, 0).$$

Problemi con vincoli logici - grande M

Minimizzazione della total tardiness

Dati

- p_i = tempo di lavorazione del lotto i.
- d_i = scadenza del lotto i.

Variabili

- $x_{ij} = 1$ se il lotto i precede j, 0 altrimenti.
- t_i = tempo di inizio del lotto i.
- y_i = variabili ausiliarie.

Problemi con vincoli logici - grande M

Minimizzazione della total tardiness

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& t_i + p_i - d_i \leq y_i && i = 1, \ldots, n \\
& x_{ij} + x_{ji} = 1 && i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j \\
& t_i + p_i \leq t_j + M(1 - x_{ij}) && i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j \\
& t_i \geq 0, \quad y_i \geq 0 && i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Problemi con variabili logiche

Quattro amici pignoli (job-shop)

Algy, Bertie, Charlie e Digby studiano all'università e condividono un appartamento. Ogni mattina vengono recapitati al loro indirizzo quattro giornali: Financial Times, il Guardian, il Daily Express e il Sun. Ognuno dei quattro legge i quattro giornali da solo e in un suo proprio ordine come da tabella, e i quattro non vanno da nessuna parte prima che ognuno abbia letto i giornali.

Algy		**Bertie**		**Charlie**		**Digby**	
FT	60	Guardian	75	Express	5	Sun	90
Guardian	30	Express	3	Guardian	15	FT	1
Express	2	FT	25	FT	10	Guardian	1
Sun	5	Sun	10	Sun	30	Express	1

Algy si sveglia alle 8:30, Bertie e Charlie alle 8:45, Digby alle 9:30. In che ordine devono leggere i giornali per uscire di casa insieme e andare a lezione il più presto possibile?

Costanti.
p_{ik} = tempo della persona i su giornale k
r_i = ora di sveglia persona i
M = “big-M
Variabili.
t_{ik} = minuto in cui i comincia a leggere k
$t_{\max}$ = tempo fine lavori
x_{ijk} = 1 iff persona i precede j su giornale k.

Problemi con variabili logiche

$$
\begin{aligned}
\min\ & t_{\max} \\
\text{soggetto a}\quad & t_{\max} \geq t_{ik} + p_{ik} && \forall i, k\colon i \text{ legge } k \text{ ultimo} \\
& t_{ik} \geq r_i && \forall i, k\colon i \text{ legge } k \text{ per primo} \\
& t_{ik} + p_{ik} \leq t_{ik'} && \forall i, k, k'\colon i \text{ legge } k, k' \text{ in seq.} \\
& x_{ijk} + x_{jik} = 1 && \\
& t_{ik} + p_{ik} \leq t_{jk} + M(1 - x_{ijk}) && \forall i, j, k,\ i \neq j \\
& t_{\max}, t_{ik} \geq 0,\ x_{ijk} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Probema del commesso viaggiatore

Travelling Salesman Problem (TSP)

È data la matrice (simmetrica) delle distanze d_{ij} tra n città; un commesso viaggiatore deve predisporre un itinerario che, partendo dalla città 1, passi una e una sola volta attraverso tutte le città richiudendosi infine nella città di partenza. Scrivere un programma lineare che permetta di determinare l'itinerario di lunghezza totale minima.

Problemi con variabili logiche

i	Città
1	Amsterdam
2	Berlino
3	Bruxelles
4	Lisbona

i	Città
5	Madrid
6	Parigi
7	Roma
8	Vienna

$$d_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 685 & 200 & 2270 & 1805 & 505 & 1770 & 1180 \\ & 0 & 775 & 3065 & 2540 & 1130 & 1530 & 630 \\ & & 0 & 2070 & 1560 & 295 & 1545 & 1135 \\ & & & 0 & 660 & 1790 & 2675 & 2975 \\ & & & & 0 & 1260 & 2030 & 2450 \\ & & & & & 0 & 1440 & 1265 \\ & & & & & & 0 & 1130 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Modelli

Esercizio. Una ditta deve rifornire settimanalmente quattro punti vendita $1, 2, 3, 4$ a partire da tre magazzini A, B, C. I tre magazzini dispongono rispettivamente di scorte settimanali pari a 100, 200, 350 unità di merce. I quattro punti vendita richiedono rispettivamente 150, 80, 170 e 120 unità. Per il trasporto ci si avvale di un'azienda di trasporti che applica le seguenti tariffe, in euro/unità di merce.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 10 & 9 & 8 \\ 15 & 9 & 12 & 7 \\ 20 & 11 & 6 & 10 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Modelli

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare le spedizioni settimanali a costo totale minimo.

(b) Modificare il programma del punto (a) per tenere conto delle seguenti condizioni: su ogni tratta magazzino-punto vendita effettivamente utilizzata, oltre al costo unitario di trasporto, si paga anche un costo fisso di 10 euro, indipendente dalla quantità di merce su essa instradata (se invece su una tratta non si spedisce nulla, non ci si paga nulla).

(c) Modificare il programma del punto (a) per tenere conto delle seguenti condizioni: la ditta applica su ogni tratta la tariffa della tabella se su quella tratta si trasportano fino a 25 unità di merce; sulle unità oltre le 25 si applica uno sconto di 5 euro/unità.

Modelli

Esercizio. Un'azienda ha bisogno per i suoi processi produttivi di quantitativi di acqua variabile durante la giornata. La giornata è suddivisa in sei fasce orarie con le seguenti quantità richieste (in m^3).

Fascia	1	2	3	4	5	6
Domanda	0.95	1.50	2.50	0.75	1.00	1.25

Durante il giorno l'azienda può ottenere acqua da diverse fonti e a diversi costi (in euro/m^3) come riportato nella tabella seguente. Ogni fonte ha un limite superiore alla quantità di acqua che può fornire nell'arco di ogni singola fascia da quattro ore.

Fonte	**Costo/m^3**	**Limite**
Rete potabile	70	∞
Pozzo 1	30	0.70
Pozzo 2	20	1.00

L'acqua del pozzo 1 è meno pura, perciò tale acqua non può rappresentare più del 40% del volume totale di acqua impiegato nell'intera giornata.

Modelli

(a) Scrivere il programma lineare per determinare quali fonti usare e in che misura in ogni fascia oraria, per soddisfare tutte le domande a costo totale minimo. (8 punti)

(b) Modificare il programma per tenere conto della seguente limitazione: per la concomitanza con altre lavorazioni, il pozzo 2 non può essere usato per più di due fasce orarie consecutive (dopo due fasce consecutive di uso, se ne impone almeno una di stop). (3 punti)

Modelli

Esercizio. In un grafo (non orientato) $G(V, E)$ un sottoinsieme di nodi $S \subseteq V$ si dice *dominante* se per ogni ogni nodo $i \in V$ è vera almeno una delle due seguenti condizioni: (a) $i \in S$ oppure (b) i è adiacente ad almeno un elemento di S. Si consideri il grafo riportato in figura e si scriva il programma lineare che, risolto, permette di determinarne l'insieme dominante di cardinalità minima possibile.