Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa
Programmazione Lineare

Andrea Grosso
Dipartimento di Informatica
Università di Torino
grosso@di.unito.it – 011-6706824

Sommario

Sommario

Sommario

Vettori

- Un *vettore* $\mathbf{v}$ a n componenti (o a n *dimensioni*) è una n-upla ordinata di numeri reali

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Vettori

- Un *vettore* $\mathbf{v}$ a n componenti (o a n *dimensioni*) è una n-upla ordinata di numeri reali

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- Le $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono dette *componenti* di $\mathbf{v}$.

Vettori

- Un *vettore* $\mathbf{v}$ a n componenti (o a n *dimensioni*) è una n-upla ordinata di numeri reali

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- Le $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono dette *componenti* di $\mathbf{v}$.
- l'insieme di tutti i vettori a n componenti è indicato con il simbolo $\mathbb{R}^n$.

Vettori

- Un *vettore* $\mathbf{v}$ a n componenti (o a n *dimensioni*) è una n-upla ordinata di numeri reali

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- Le $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono dette *componenti* di $\mathbf{v}$.
- l'insieme di tutti i vettori a n componenti è indicato con il simbolo $\mathbb{R}^n$.
- Due vettori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ sono uguali $\iff v_1 = w_1, v_2 = w_2, \ \ldots, v_n = w_n$.

Vettori

- Un *vettore* $\mathbf{v}$ a n componenti (o a n *dimensioni*) è una n-upla ordinata di numeri reali

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- Le $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono dette *componenti* di $\mathbf{v}$.
- l'insieme di tutti i vettori a n componenti è indicato con il simbolo $\mathbb{R}^n$.
- Due vettori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ sono uguali $\iff v_1 = w_1, v_2 = w_2, \ldots, v_n = w_n$.
- Il vettore

$$\underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ zeri}} = \mathbf{0}$$

è detto *vettore nullo.*

Vettori: operazioni

Somma: dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$,

Vettori: operazioni

Somma: dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$$

Vettori: operazioni

Somma: dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

Esempio. In $\mathbb{R}^3$, $(3, 7, 9) + (5, -2, 0) = (8, 5, 9)$.

Prodotto numero-vettore: dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

Vettori: operazioni

Somma: dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

Esempio. In $\mathbb{R}^3$, $(3, 7, 9) + (5, -2, 0) = (8, 5, 9)$.

Prodotto numero-vettore: dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot \mathbf{v} = (a \cdot v_1, a \cdot v_2, \dots, a \cdot v_n)$$

Vettori: operazioni

Somma: dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

Esempio. In $\mathbb{R}^3$, $(3, 7, 9) + (5, -2, 0) = (8, 5, 9)$.

Prodotto numero-vettore: dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot \mathbf{v} = (a \cdot v_1, a \cdot v_2, \dots, a \cdot v_n)$$

Esempio. In $\mathbb{R}^4$, $3 \cdot (9, 81, \frac{3}{2}, 100) = (27, 243, \frac{9}{2}, 300)$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists! - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists! - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists ! - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \; \exists! - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

---

6. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists! -\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.
6. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n\colon (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n\colon \mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists! -\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\colon \mathbf{v}+(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n\colon \mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R}\colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

---

6. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n\colon a \cdot (\mathbf{v}+\mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\colon (a+b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

---

8. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\colon a\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff a = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists! - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

---

6. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

---

8. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon a\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff a = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

---

9. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -(a\mathbf{v}) = (-a)\mathbf{v}$

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists ! - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

---

6. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

---

8. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon a\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff a = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

---

9. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -(a\mathbf{v}) = (-a)\mathbf{v}$
10. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -(a\mathbf{v}) = a \cdot (-\mathbf{v})-$

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\ \exists! -\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

---

6. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$: $a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

---

8. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $a\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff a = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

---

9. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$: $-(a\mathbf{v}) = (-a)\mathbf{v}$
10. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$: $-(a\mathbf{v}) = a \cdot (-\mathbf{v})-$
11. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$: $-\mathbf{v} = -1 \cdot \mathbf{v}$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists! - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

---

6. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

---

8. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon a\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff a = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

---

9. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -(a\mathbf{v}) = (-a)\mathbf{v}$
10. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -(a\mathbf{v}) = a \cdot (-\mathbf{v}) -$
11. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -\mathbf{v} = -1 \cdot \mathbf{v}$.

Nota. Si definisce $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$.

Vettori: operazioni (cont.)

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists! -\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

---

6. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

---

8. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon a\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff a = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

---

9. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -(a\mathbf{v}) = (-a)\mathbf{v}$
10. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -(a\mathbf{v}) = a \cdot (-\mathbf{v}) -$
11. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \colon \ -\mathbf{v} = -1 \cdot \mathbf{v}$.

Nota. Si definisce $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$.

Spazio vettoriale

Prodotto scalare

Dati $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (spazio vett.), si definisce

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

Prodotto scalare

Dati $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (spazio vett.), si definisce

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

Esempio. In $\mathbb{R}^3$,

$$(3,7,9) \cdot (1,2,-1) = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) = 3 + 14 - 9 = 8.$$

Prodotto scalare

Dati $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (spazio vett.), si definisce

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

Esempio. In $\mathbb{R}^3$,

$$(3,7,9) \cdot (1,2,-1) = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) = 3 + 14 - 9 = 8.$$

Modulo (norma) di un vettore. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$.

Prodotto scalare

Dati $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (spazio vett.), si definisce

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Esempio. In $\mathbb{R}^3$,

$$(3, 7, 9) \cdot (1, 2, -1) = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) = 3 + 14 - 9 = 8.$$

Modulo (norma) di un vettore. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$.
Se $\|\mathbf{v}\| = 1$, $\mathbf{v}$ è un *versore.*

Prodotto scalare (cont.)

Proprietà.

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\mathbf{vw} = \mathbf{wv}$.

Prodotto scalare (cont.)

Proprietà.

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\mathbf{v}\mathbf{w} = \mathbf{w}\mathbf{v}$.
- Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ risulta $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}$.

Prodotto scalare (cont.)

Proprietà.

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\mathbf{vw} = \mathbf{wv}$.
- Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ risulta $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{uv} + \mathbf{uw}$.

$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i)$$

Prodotto scalare (cont.)

Proprietà.

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\mathbf{v}\mathbf{w} = \mathbf{w}\mathbf{v}$.
- Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ risulta $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}$.

$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i)$$

Prodotto scalare (cont.)

Proprietà.

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\mathbf{v}\mathbf{w} = \mathbf{w}\mathbf{v}$.
- Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ risulta $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}$.

$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i)$$

Prodotto scalare (cont.)

Proprietà.

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\mathbf{v}\mathbf{w} = \mathbf{w}\mathbf{v}$.
- Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ risulta $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + u_i w_i \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i}_{\mathbf{u}\mathbf{v}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i w_i}_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \\
&= \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Prodotto scalare (cont.)

Proprietà.

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\mathbf{v}\mathbf{w} = \mathbf{w}\mathbf{v}$.
- Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ risulta $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + u_i w_i \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i}_{\mathbf{uv}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i w_i}_{\mathbf{uw}} \\
&= \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$ risulta $(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$.

Prodotto scalare (cont.)

Proprietà.

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\mathbf{vw} = \mathbf{wv}$.
- Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ risulta $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{uv} + \mathbf{uw}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + u_i w_i \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i}_{\mathbf{uv}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i w_i}_{\mathbf{uw}} \\
&= \mathbf{uv} + \mathbf{uw}.
\end{aligned}
$$

- Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$ risulta $(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$.
- **MA** non vale l'associatività: presi in $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1)$:

$$(\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}(\mathbf{vw}) = (1, 0).$$

Spazio vettoriale

Un insieme V sul quale siano definite operazioni *interne* di

- somma tra elementi di V, e
- prodotto tra un *numero* e un elemento di V,

è detto *spazio vettoriale* (sull'insieme dei numeri $\mathbb{R}$) se le due operazioni godono delle proprietà

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
2. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists! - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
4. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \colon 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.
6. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

$\mathbb{R}^n$, $\cancel{\mathbb{R}^{m\times n}}$ sono spazi vettoriali.

Spazio vettoriale

Esempio.

(posso anche skippare)

- $V = \{f : f(t)$ funzione di una variabile limitata e integrabile su $[0, T].\}$

intervallo

Operazioni: $f, g \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$h = f + g \iff h(t) = f(t) + g(t) \qquad \forall t \in [0, T]$$

$$h = \alpha \cdot f \iff h(t) = \alpha f(t) \qquad \forall t \in [0, T]$$

da somma a somma in ogni punto

prodotti e somme su funzioni

Spazio vettoriale

Esempio.

$$V = \{f : f(t) \text{ funzione di una variabile limitata e integrabile su } [0, T].\}$$

Operazioni: $f, g \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h = f + g \quad &\Longleftrightarrow h(t) = f(t) + g(t) \qquad \forall t \in [0, T] \\ h = \alpha \cdot f \quad &\Longleftrightarrow h(t) = \alpha f(t) \qquad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

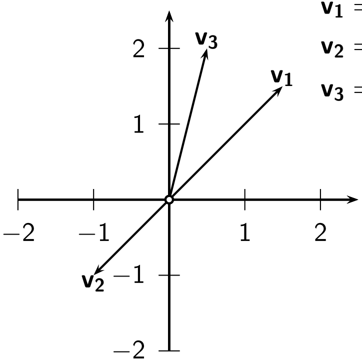
Prodotto scalare $f \cdot g$

Prodotto scalare

- $f \cdot g = \int_0^T f(t) g(t) \mathrm{d}t$
- Norma: $|f| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_0^T f^2(t) \mathrm{d}t}$

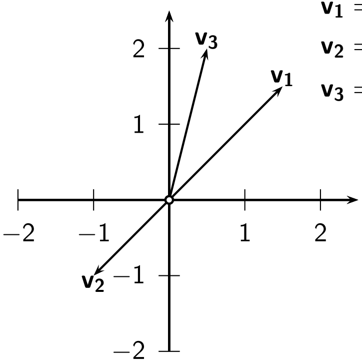
Sommario

Vettori e punti dello spazio

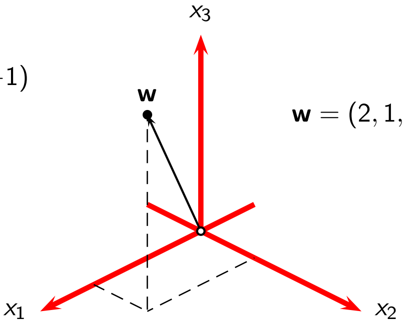


$$\mathbf{v_1} = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right)$$
$$\mathbf{v_2} = (-1, -1)$$
$$\mathbf{v_3} = \left(\tfrac{1}{2}, 2\right)$$

Vettori e punti dello spazio



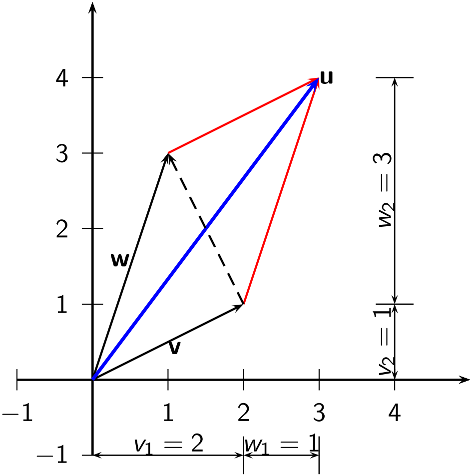
$$\mathbf{v_1} = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right)$$
$$\mathbf{v_2} = (-1, -1)$$
$$\mathbf{v_3} = \left(\tfrac{1}{2}, 2\right)$$



$$\mathbf{w} = (2, 1, 3)$$

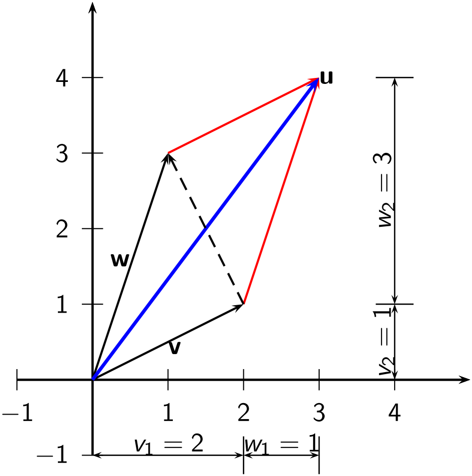
Somma vettoriale (grafica)

Regola del parallelogramma.



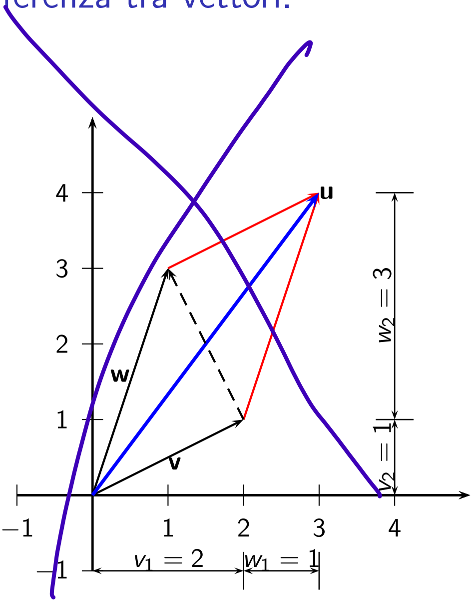
Somma vettoriale (grafica)

Regola del parallelogramma.



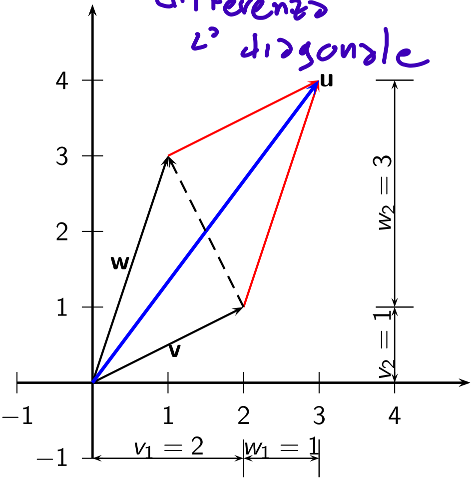
$$\mathbf{v} = (2, 1)$$
$$\mathbf{w} = (1, 3)$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = (2 + 1,\ 1 + 3).$$

Differenza tra vettori.

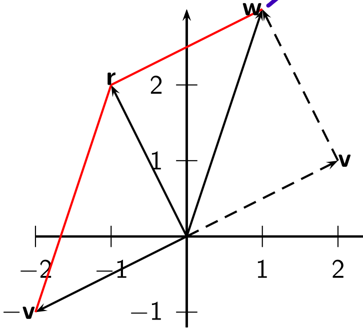


Differenza tra vettori.

differenza
2° diagonale



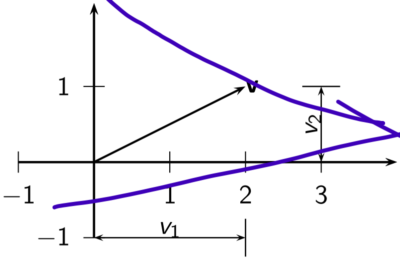
$v + (-w)$



$$\mathbf{r} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = (1-2, 3-1)$$

Modulo

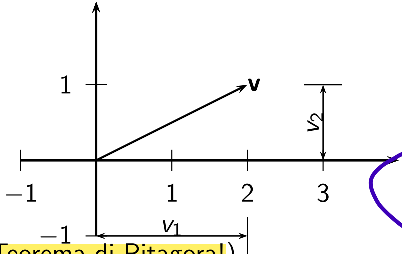
Distanza origine-punto.



$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{5}.$$

Modulo

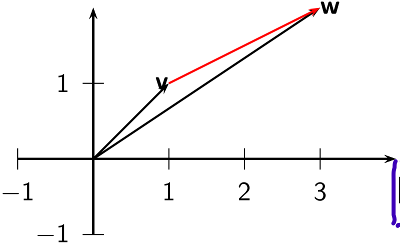
Distanza origine-punto.



$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{5}.$$

(Teorema di Pitagora!)

Distanza tra due punti



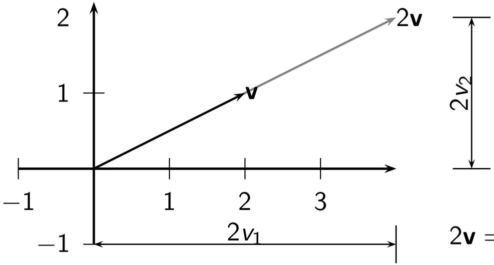
$$\boxed{|\mathbf{w}-\mathbf{v}| = \sqrt{((w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2)}}$$

Prodotto per un numero

Il vettore $a\mathbf{v}$ è un vettore con modulo pari a $|a||\mathbf{v}|$. Se $a > 0$, $a\mathbf{v}$ ha verso uguale a quello di $\mathbf{v}$, se $a < 0$ $a\mathbf{v}$ ha verso *opposto* a quello di $\mathbf{v}$.

Prodotto per un numero

Il vettore $a\mathbf{v}$ è un vettore con modulo pari a $|a||\mathbf{v}|$. Se $a > 0$, $a\mathbf{v}$ ha verso uguale a quello di $\mathbf{v}$, se $a < 0$ $a\mathbf{v}$ ha verso *opposto* a quello di $\mathbf{v}$.



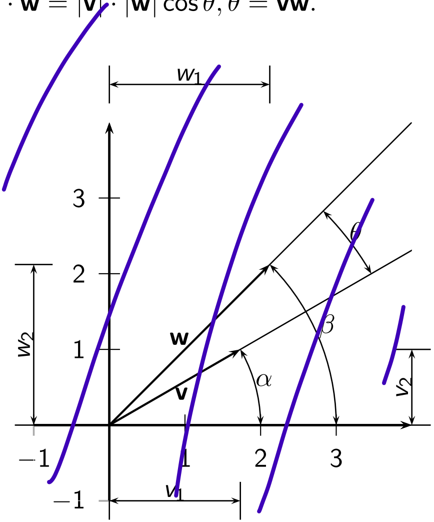
$$2\mathbf{v} = (4, 2),\ |2\mathbf{v}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Prodotto scalare

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta, \theta = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}.$$

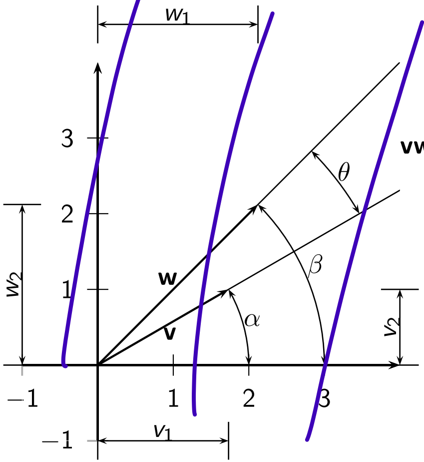
Prodotto scalare

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta, \theta = \widehat{\mathbf{vw}}.$$



Prodotto scalare

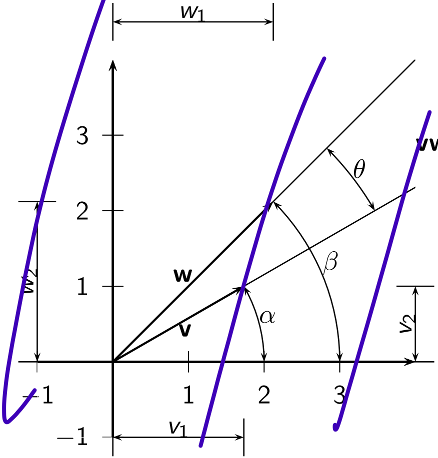
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta, \theta = \widehat{\mathbf{vw}}.$$



$$\begin{aligned}\mathbf{vw} &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \\ &= |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos\alpha \cos\beta + |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin\alpha \sin\beta\end{aligned}$$

Prodotto scalare

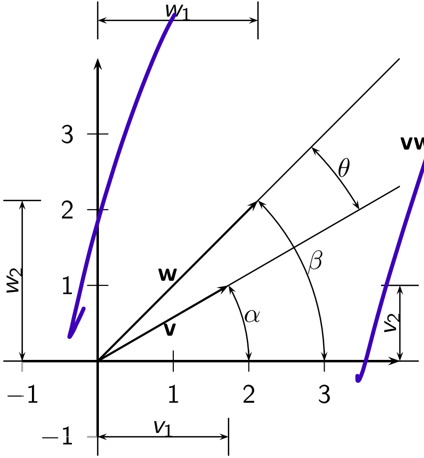
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cos\theta, \theta = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}.$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\mathbf{w} &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \\
&= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\alpha\cos\beta + |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\sin\alpha\sin\beta \\
&= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\beta-\alpha)}
\end{aligned}$$

Prodotto scalare

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cos\theta, \theta = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}.$$

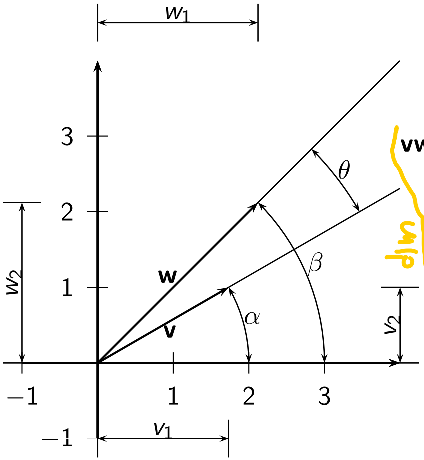


$$\begin{aligned}\mathbf{v}\mathbf{w} &= v_1 w_1 + v_2 w_2\\ &= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\alpha\cos\beta + |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\sin\alpha\sin\beta\\ &= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\beta-\alpha)}\\ &= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\theta.\end{aligned}$$

Prodotto scalare

(Se voglio salto)

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cos\theta, \theta = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$.



'' vert

componenti ort

dim

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\mathbf{w} &= v_1w_1 + v_2w_2\\
&= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\alpha\cos\beta + |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\sin\alpha\sin\beta\\
&= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\beta-\alpha)}\\
&= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Nota. Se $\mathbf{v},\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0 \iff \mathbf{v}\perp\mathbf{w}$.

Prodotto scalare (cont.)

Angolo tra due vettori. Si definisce in $\mathbb{R}^n$:

$$\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \arccos \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}.$$

Prodotto scalare (cont.)

Angolo tra due vettori. Si definisce in $\mathbb{R}^n$:

$$\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \arccos \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}.$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|.$$

Prodotto scalare (cont.)

Angolo tra due vettori. Si definisce in $\mathbb{R}^n$:

$$\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \arccos \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}.$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|.$$

Sommario

Matrici

Definizioni

Una *matrice* è una tabella di numeri indicizzata per righe e colonne:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \tag{1}$$

Matrici

Definizioni

Una *matrice* è una tabella di numeri indicizzata per righe e colonne:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \tag{1}$$

Vettori-riga e vettori-colonna

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 9 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \mathbf{A^1} \\ \mathbf{A^2} \\ \mathbf{A^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_1} & \mathbf{A_2} & \mathbf{A_3} & \mathbf{A_4} & \mathbf{A_5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{A^1} = \left(1, -\frac{1}{2}, 9, 7, 1\right) & \\ \mathbf{A^2} = (2, 9, 0, 3, 1) & \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{A_4} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{A_5} = \\ \mathbf{A^3} = (0, 1, 0, 0, 0) & \end{array}$$

Operazioni su matrici

Somma, prodotto per un numero

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Operazioni su matrici

Somma, prodotto per un numero

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Operazioni su matrici

Prodotto matriciale

$m \times \underline{k}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}$$

$\underline{k} \times n$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \iff c_{ij} = \mathbf{A^i} \cdot \mathbf{B_j} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj}.$$

Esempio

$$\underbrace{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{4 \times 3}, \quad \underbrace{\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 4}, \quad \underbrace{\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{4 \times 4}.$$

Operazioni su matrici

Trasposizione

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operazioni su matrici

Proprietà di somma matriciale e prodotto numero-matrice

Commutatività: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.
Associatività: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.
Elemento nullo per la somma: $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$.
Distributività:
$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B} \qquad (\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Annullamento del prodotto: se $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{A}=\mathbf{0} \iff \alpha=0$ o $\mathbf{A}=\mathbf{0}$.
Esistenza dell'opposto: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{0} \iff \mathbf{B}=(-1)\mathbf{A}$.

Operazioni su matrici

Proprietà del prodotto matriciale

1 **Associatività:** $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.
2 **Distributività a destra:** $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.
3 **Distributività a sinistra:** $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
4 **Prodotto per un numero:** $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$.
5 **Trasposizione:** $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Operazioni su matrici

Prodotto matriciale: non commutativo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = ?$$

Operazioni su matrici

Prodotto matriciale: non commutativo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = ?$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 6 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Operazioni su matrici

Matrice identità, matrice inversa

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad n \text{ righe} \times n \text{ colonne}$$

Operazioni su matrici

Matrice identità, matrice inversa

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad n \text{ righe} \times n \text{ colonne}$$

- Elemento neutro del prodotto matriciale.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \qquad \text{per ogni } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times n}$$
$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad \text{per ogni } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

- In $\mathbb{R}^{n \times n}$ il prodotto matriciale è interno.
- La matrice identità è l'*unica* matrice di $\mathbb{R}^{n \times n}$ per la quale vale

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad \text{per ogni } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Operazioni su matrici

Matrice identità, matrice inversa

- Data $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *se esiste* in $\mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice $\mathbf{A}^{-1}$ tale che

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I},$$

  essa è detta *matrice inversa* di $\mathbf{A}$.
- Non tutte le matrici quadrate sono invertibili.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sommario

Rette in $\mathbb{R}^n$

Rappresentazione parametrica.

Rette in $\mathbb{R}^n$

Rappresentazione parametrica. Una retta r nello spazio è identificabile per mezzo di:

- un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ appartenente a r;
- un vettore $\mathbf{v}$ parallelo a r.

Rette in $\mathbb{R}^n$

Rappresentazione parametrica. Una retta r nello spazio è identificabile per mezzo di:

- un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ appartenente a r;
- un vettore $\mathbf{v}$ parallelo a r.

L'insieme dei punti di r è

$$r = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rette in $\mathbb{R}^n$

Rappresentazione parametrica. Una retta r nello spazio è identificabile per mezzo di:

- un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ appartenente a r;
- un vettore $\mathbf{v}$ parallelo a r.

L'insieme dei punti di r è

$$r = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

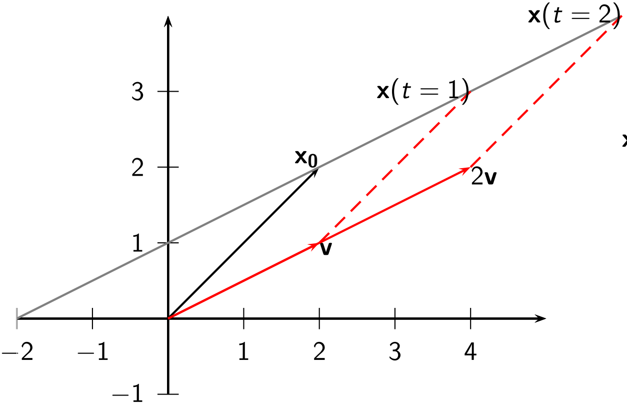
L'equazione (vettoriale)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

è l'*equazione parametrica* di r (moto rettilineo uniforme!)

Rette in $\mathbb{R}^n$ (cont.)

Esempio.



$$\mathbf{x_0} = (2, 2)$$
$$\mathbf{v} = (2, 1)$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$)

Rappresentazione cartesiana. In $\mathbb{R}^2$ basta un'equazione in x_1, x_2.

$$r = \{(x_1, x_2) \colon ax_1 + bx_2 = c\}.$$

Da una retta parametrica si può ricavare sempre la rappresentazione cartesiana eliminando il parametro dalle equazioni.

Esempio.

$$r = \{(x_1, x_2) \colon (x_1, x_2) = (2, 2) + (2, 1)t\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 2 + t \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ $(n = 2)$

Rappresentazione cartesiana. In $\mathbb{R}^2$ basta un'equazione in x_1, x_2.

$$r = \{(x_1, x_2) \colon ax_1 + bx_2 = c\}.$$

Da una retta parametrica si può ricavare sempre la rappresentazione cartesiana eliminando il parametro dalle equazioni.

Esempio.

$$r = \{(x_1, x_2) \colon (x_1, x_2) = (2, 2) + (2, 1)t\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 2 + t \end{cases} \xrightarrow{t = x_2 - 2} x_1 - 2x_2 = -2$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ $(n = 2)$

Rappresentazione cartesiana. In $\mathbb{R}^2$ basta un'equazione in x_1, x_2.

$$r = \{(x_1, x_2) \colon ax_1 + bx_2 = c\}.$$

Da una retta parametrica si può ricavare sempre la rappresentazione cartesiana eliminando il parametro dalle equazioni.

Esempio.

$$r = \{(x_1, x_2) \colon (x_1, x_2) = (2, 2) + (2, 1)t\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 2 + t \end{cases} \xrightarrow{t = x_2 - 2} x_1 - 2x_2 = -2$$

$$r = \{(x_1, x_2) \colon x_1 - 2x_2 = -2\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t + 1 \end{cases} \quad \overset{\text{ori}}{(0, 1)} \quad \overset{\text{vet}}{(2, 1)}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$, cont.)

Da rappresentazione parametrica a cartesiana. Prendere una variabile come parametro e ricavare l'altra in funzione del parametro.

$$x_1 - 2x_2 = -2$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$, cont.)

Da rappresentazione parametrica a cartesiana. Prendere una variabile come parametro e ricavare l'altra in funzione del parametro.

$$x_1 - 2x_2 = -2 \xrightarrow{x_1 = t} \begin{cases} x_1 &= 0 + t \\ x_2 &= 1 + \dfrac{1}{2} t \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$)

Forma parametrica. Richiede sempre un punto (vettore) $\mathbf{x_0}$ appartenente alla retta e un vettore $\mathbf{v}$ che specifica una direzione.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ $(n = 3)$

Forma parametrica. Richiede sempre un punto (vettore) $\mathbf{x_0}$ appartenente alla retta e un vettore $\mathbf{v}$ che specifica una direzione.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, \tfrac{1}{2}) + t(1, 3, 2)$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ $(n = 3)$

Forma parametrica. Richiede sempre un punto (vettore) $\mathbf{x_0}$ appartenente alla retta e un vettore $\mathbf{v}$ che specifica una direzione.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, \tfrac{1}{2}) + t(1, 3, 2) \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 = 1 & +t \\ x_2 = 1 & +3t \\ x_3 = \frac{1}{2} & +2t \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$, cont.)

Rappresentazione cartesiana. Richiede *due* equazioni indipendenti.

$$\begin{cases} x_1 = 1 & +t \\ x_2 = 1 & +3t \\ x_3 = \frac{1}{2} & +2t \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$, cont.)

Rappresentazione cartesiana. Richiede *due* equazioni indipendenti.

$$\begin{cases} x_1 = 1 & +t \\ x_2 = 1 & +3t \\ x_3 = \frac{1}{2} & +2t \end{cases} \xrightarrow{t = x_1 - 1} \begin{aligned} x_2 &= 1 + 3(x_1 - 1) \\ x_3 &= \frac{1}{2} + 2(x_1 - 1) \end{aligned}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$, cont.)

Rappresentazione cartesiana. Richiede *due* equazioni indipendenti.

$$\begin{cases} x_1 = 1 & +t \\ x_2 = 1 & +3t \\ x_3 = \frac{1}{2} & +2t \end{cases} \xrightarrow{t = x_1 - 1} \begin{array}{l} x_2 = 1 + 3(x_1 - 1) \\ x_3 = \frac{1}{2} + 2(x_1 - 1) \end{array} \to \begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$, cont.)

Da forma cartesiana a forma parametrica. Si sceglie una variabile come parametro.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$, cont.)

Da forma cartesiana a forma parametrica. Si sceglie una variabile come parametro.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{x_3 = t} \begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + t = -\frac{3}{2} \\ x_3 = t \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$, cont.)

Da forma cartesiana a forma parametrica. Si sceglie una variabile come parametro.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{x_3 = t} \begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + t = -\frac{3}{2} \\ x_3 = t \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$, cont.)

Da forma cartesiana a forma parametrica. Si sceglie una variabile come parametro.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{x_3 = t} \begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + t = -\frac{3}{2} \\ \underline{x_3 = t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t \\ x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$

In generale, per descrivere una retta in $\mathbb{R}^n$ abbiamo bisogno di

- un'equazione vettoriale parametrica (a n componenti)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}, \quad \text{oppure}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$

In generale, per descrivere una retta in $\mathbb{R}^n$ abbiamo bisogno di

- un'equazione vettoriale parametrica (a n componenti)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}, \quad \text{oppure}$$

- $n-1$ equazioni cartesiane *indipendenti*

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \quad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad &\cdots\cdots \\
a_{(n-1)1}x_1 + a_{(n-1)2}x_2 + \cdots + a_{(n-1)n}x_n \quad &= b_{n-1}
\end{aligned}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$

In generale, per descrivere una retta in $\mathbb{R}^n$ abbiamo bisogno di

- un'equazione vettoriale parametrica (a n componenti)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}, \quad \text{oppure}$$

- $n-1$ equazioni cartesiane *indipendenti*

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \quad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad &\dots\dots \\
a_{(n-1)1}x_1 + a_{(n-1)2}x_2 + \cdots + a_{(n-1)n}x_n \quad &= b_{n-1}
\end{aligned}$$

Nota. Non tutti gli insiemi di $n-1$ equazioni definiscono rette in $\mathbb{R}^n$.

Segmenti di retta

Dati due punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, l'insieme dei punti del segmento $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$ è descrivibile come

$$\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)t,\ 0 \leq t \leq 1\} =$$

Segmenti di retta

Dati due punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, l'insieme dei punti del segmento $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$ è descrivibile come

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)t,\ 0 \le t \le 1\} = \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2,\ 0 \le t \le 1\}.\end{aligned}$$

Definizione. Dati due vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, ogni vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ otenuto come

$$\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 \qquad \text{con } 0 \le t \le 1$$

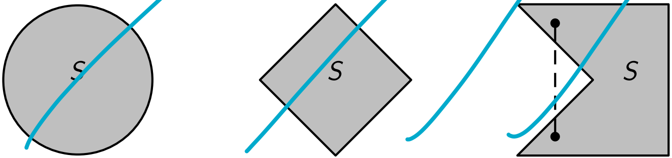
è detto *combinazione lineare convessa* di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$.

Insiemi convessi

Definizione. Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *convesso* se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ anche tutte le combinazioni lineari convesse di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ appartengono a S.

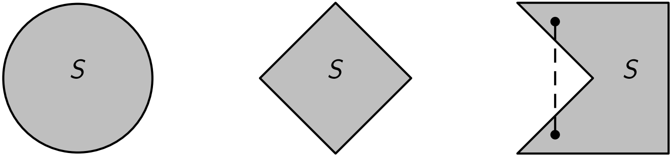
Insiemi convessi

Definizione. Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *convesso* se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ anche tutte le combinazioni lineari convesse di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ appartengono a S.



Insiemi convessi

Definizione. Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *convesso* se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ anche tutte le combinazioni lineari convesse di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ appartengono a S.



convesso convesso non convesso

Insiemi convessi (cont.)

Proprietà. Se S_1, S_2 sono insiemi convessi, anche $S_1 \cap S_2$ è un insieme convesso.

Insiemi convessi (cont.)

Proprietà. Se S_1, S_2 sono insiemi convessi, anche $S_1 \cap S_2$ è un insieme convesso. Più in generale, l'intersezione di una collezione finita di insiemi convessi $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k$ è ancora un insieme convesso.

(Iper)piani

Definizione 1. Dati un $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e un $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme di punti

$$\Pi = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \alpha \right\}$$

è un *iperpiano* in $\mathbb{R}^n$.

(Iper)piani

Definizione 1. Dati un $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e un $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme di punti

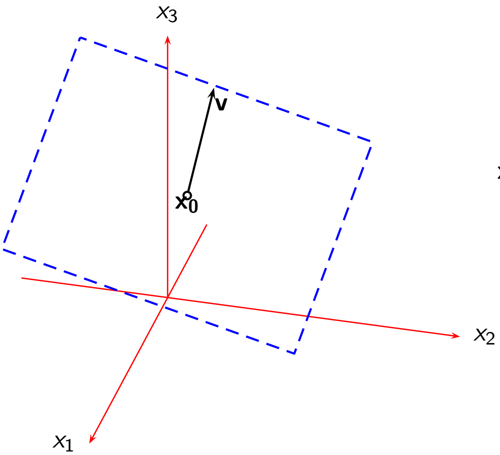
$$\Pi = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \alpha\right\}$$

è un *iperpiano* in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2. Un iperpiano Π è identificato da un punto $\mathbf{x_0}$ ad esso appartenente ed un vettore $\mathbf{v}$, ed è costituito da tutti i punti $\mathbf{x}$ tali che il vettore $(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$ è ortogonale a $\mathbf{v}$

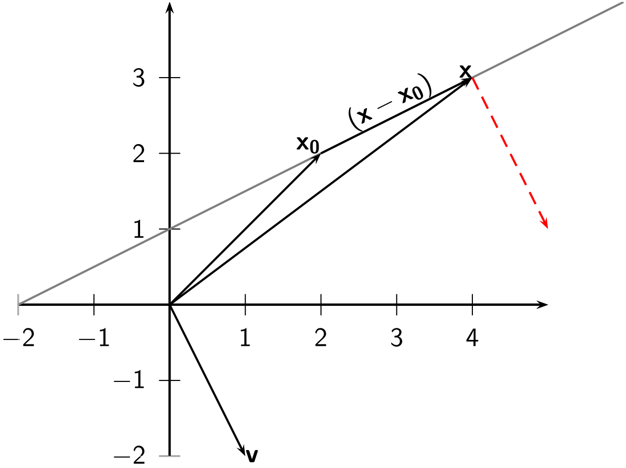
$$\Pi = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) = 0\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x_0}\right\}.$$

Iperpiani (cont.)



$$\mathbf{x_0} = (-1, 0, 1)$$
$$\mathbf{v} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 2)$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 2x_3 = \tfrac{3}{2}$$

Iperpiani (cont.)



$$\mathbf{x_0} = (2, 2)$$
$$\mathbf{v} = (1, -2)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) = 0$$
$$\iff \quad x_1 - 2x_2 = -2$$

Iperpiani (cont.)

Semispazi. Dato un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ $\mathbf{vx} = \alpha$, gli insiemi

- $\Pi^{\geq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} \geq \alpha\}$,
- $\Pi^{\leq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} \leq \alpha\}$,
- $\Pi^{>} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} > \alpha\}$,
- $\Pi^{<} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} < \alpha\}$,

sono detti *semispazi.*

Iperpiani (cont.)

Semispazi. Dato un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ $\mathbf{vx} = \alpha$, gli insiemi

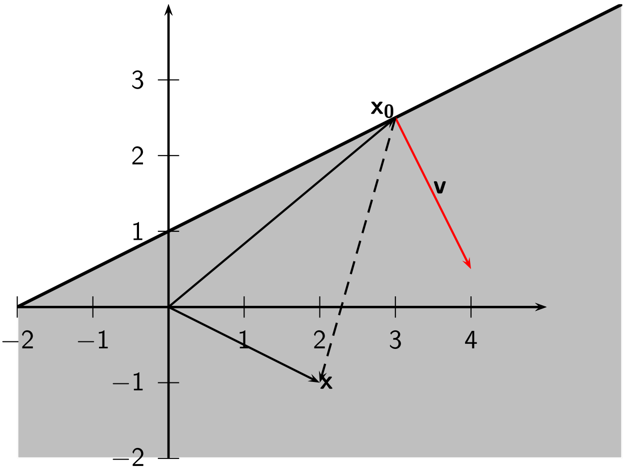
- $\Pi^{\geq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} \geq \alpha\}$,
- $\Pi^{\leq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} \leq \alpha\}$,
- $\Pi^{>} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} > \alpha\}$,
- $\Pi^{<} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} < \alpha\}$,

sono detti *semispazi.*

Ossservazione. Iperpiani e semispazi sono insiemi convessi.

Iperpiani (cont.)

Semispazi: interpretazione. Se $\mathbf{x}_0 \in \Pi$, $\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{vx} = \alpha\}$, il semispazio $\Pi^{\geq}$ è l'insieme di tutti quei punti $\mathbf{x}$ per i quali il vettore $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ forma con il vettore $\mathbf{v}$ un angolo non superiore a un angolo retto.



$\mathbf{x_0} = (3, \frac{5}{2})$

$\mathbf{v} = (1, -2)$

$x_1 - 2x_2 \geq -2$

Iperpiani in forma parametrica

In $\mathbb{R}^3$ un piano si può anche rappresentare in forma parametrica, utilizzando due parametri t_1, t_2, un punto $\mathbf{x_0}$ e due vettori *non paralleli* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Esempio.

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2} \xrightarrow[x_2=t_2]{x_1=t_1} \begin{cases} x_1 = & & t_1 & \\ x_2 = & & & t_2 \\ x_3 = \frac{3}{4} & & -\frac{1}{4}t_1 & -\frac{1}{4}t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

che corrisponde a $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$

Iperpiani in forma parametrica

In $\mathbb{R}^3$ un piano si può anche rappresentare in forma parametrica, utilizzando due parametri t_1, t_2, un punto $\mathbf{x_0}$ e due vettori *non paralleli* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Esempio.

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2} \xrightarrow[x_2=t_2]{x_1=t_1} \begin{cases} x_1 = & t_1 & \\ x_2 = & & t_2 \\ x_3 = \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}t_1 & -\frac{1}{4}t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

che corrisponde a $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$con $\mathbf{x_0} = (0, 0, \frac{3}{4})$, $\mathbf{v_1} = (1, 0, -\frac{1}{4})$ e $\mathbf{v_2} = (0, 1, -\frac{1}{4})$.

Iperpiani in forma parametrica

In $\mathbb{R}^3$ un piano si può anche rappresentare in forma parametrica, utilizzando due parametri t_1, t_2, un punto $\mathbf{x_0}$ e due vettori *non paralleli* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Esempio.

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2} \xrightarrow[x_2=t_2]{x_1=t_1} \begin{cases} x_1 = & & t_1 & \\ x_2 = & & & t_2 \\ x_3 = \frac{3}{4} & & -\frac{1}{4}t_1 & -\frac{1}{4}t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

che corrisponde a $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$con $\mathbf{x_0} = (0, 0, \frac{3}{4})$, $\mathbf{v_1} = (1, 0, -\frac{1}{4})$ e $\mathbf{v_2} = (0, 1, -\frac{1}{4})$.

In generale, un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ si può rappresentare in forma parametrica con $n-1$ vettori opportuni e altrettanti parametri indipendenti.

Geometria dei programmi lineari

- La regione ammissibile di un programma lineare

$$S_a = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq = \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

Geometria dei programmi lineari

- La regione ammissibile di un programma lineare

$$S_a = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq = \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

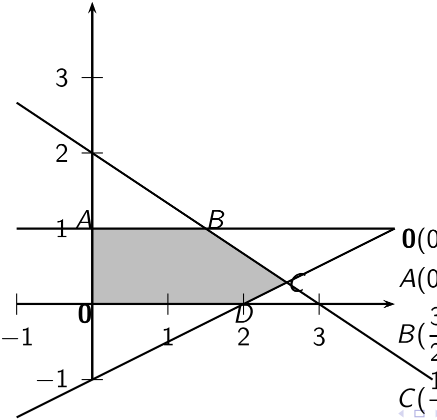
- è l'intersezione di un numero finito di iperpiani e/o semispazi.

Geometria dei programmi lineari

$$\begin{aligned}
\max \quad z = {} & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & x_1 - 2x_2 && \leq 2 \\
& 2x_1 + 3x_2 && \leq 6 \\
& x_2 && \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Geometria dei programmi lineari

$$\begin{aligned} \max \ \ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 - 2x_2 \quad \le 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \quad \le 6 \\ & x_2 \quad \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$



$\mathbf{0}(0,0)$

$A(0,1)$

$B(\frac{3}{2},1)$

$C(\frac{18}{7},\frac{2}{7})$

Geometria dei programmi lineari

$$
\begin{aligned}
\min \quad z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 && \geq 2 \\
& x_1 + 3x_2 && \geq 4 \\
& x_1 && \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$