ESERCIZI SUPPLEMENTARI DI MODELLAZIONE

1. Problemi di mix

I seguenti sono esercizi su problemi di mix. Il primo è semplice e necessita solo di due variabili. Un programma con due sole variabili continue si può risolvere molto facilmente con una procedura grafica che verrà presto introdotta nel corso. Gli esercizi successivi, pur rimanendo nell'ambito dei problemi di mix, sono un po' più articolati di quelli esaminati a lezione.

---

1. Una gelateria produce due tipi di sorbetti, A e B, partendo dalle materie prime latte e frutta. Per produrre un Kg di sorbetto A servono 300 g di frutta e mezzo litro di latte. Per produrre un Kg di sorbetto B servono 250 g di frutta e 650 ml di latte. Sono disponibili a magazzino 300 litri di latte e 200 Kg di frutta. Nessuno dei due sorbetti può rappresentare meno del 30% della produzione totale. Il sorbetto di A garantisce un profitto netto di 10 euro/Kg, il sorbetto B garantisce un profitto di 6 euro/Kg.

Scrivere il programma lineare che permette di determinare il mix produttivo che massimizza il profitto totale, supponendo di poter vendere l'intera produzione.

Soluzione. Definendo le variabili x_A, x_B che rappresentano i chili di sorbetto A/B prodotti, si può scrivere il seguente modello.

$$\begin{aligned}
\max\ z = & 10x_A + 6x_B && (1)\\
\text{soggetto a}\ & 0.3x_A + 0.25x_B \leq 200 && (2)\\
& 0.5x_A + 0.65x_B \leq 300 && (3)\\
& x_A \geq 0.3(x_A + x_B) && (4)\\
& x_B \geq 0.3(x_A + x_B) && (5)\\
& x_A, x_B \geq 0. && (6)
\end{aligned}$$

2. In una mensa scolastica, il pasto quotidiano degli allievi deve fornire loro i seguenti nutrienti.

- Tra i 60 e gli 80 grammi di proteine.
- Non più di 70 grammi di grassi.
- Tra i 200 e i 400 grammi di carboidrati.
- Tra le 2500 e le 4000 calorie.

La mensa può acquistare (1) pasta a 2 euro/Kg, (2) carne a 12 euro/Kg, (3) pesce a 18 euro/Kg, (4) legumi a 5 euro/Kg e (5) altre verdure a 1 euro/Kg. I tenori di macronutrienti in grammi/100 gr e Cal/100 gr dei vari alimenti sono riportati in tabella.

	Pasta	Carne	Pesce	Legumi	Verdure
Proteine	4	59	17	25	10
Grassi	13	13	14	0	0
Carboidrati	83	28	0	60	5
Calorie	130	140	170	360	65

Scrivere il programma lineare che permette di determinare il mix di alimenti per comporre il pasto base che soddisfa i requisiti sui nutrienti e l'apporto calorico a costo totale minimo.

Soluzione. Si possono definire le variabili x_i = ettogrammi dell'alimento i inseriti nel pasto — la scelta di esprimerle in ettogrammi permette di usare direttamente i numeri della tabella, ma non è indispensabile.

$$\min\ z = 0.2x_1 + 1.2x_2 + 1.8x_3 + 0.5x_4 + 0.1x_5 \tag{7}$$

soggetto a

$$60 \leq 4x_1 + 59x_2 + 17x_3 + 25x_4 + 10x_5 \leq 80 \tag{8}$$

$$13x_1 + 13x_2 + 14x_3 \leq 70 \tag{9}$$

$$200 \leq 83x_1 + 28x_2 + 60x_4 + 5x_5 \leq 400 \tag{10}$$

$$2500 \leq 130x_1 + 140x_2 + 170x_3 + 360x_4 + 65x_5 \leq 4000 \tag{11}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \tag{12}$$

3. Una ditta produce due tipi di prodotti, A e B, a partire da tre tipi di componenti 1, 2 e 3. Ogni unità di prodotto A richiede per essere assemblato tre componenti di tipo 1, due di tipo 2 e cinque di tipo 3. Ogni unità di prodotto B richiede otto componenti di tipo 1, quattro di tipo 2, sette di tipo 3.

I tre tipi di componenti sono reperibili sul mercato in tre tipi di confezioni, denominati *grande, media* e *piccola,* al costo rispettivamente di 30, 20 e 10 euro l'una. Ogni confezione contiene un mix dei tre componenti, come da tabella.

Confezione	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3
Grande	20	15	2
Media	8	10	6
Piccola	5	3	2

Ogni unità di prodotto A viene venduta a 200 euro, ogni unità di prodotto B a 100 euro. Si vuole programmare la produzione del mese corrente.

Dei tre componenti $1, 2, 3$, per questo mese sono ancora disponibili in magazzino rispettivamente 1000, 3000 e 7000 unità utilizzabili.

Per questo mese non si ritiene possibile vendere più di 100000 unità complessive dei due prodotti ($A + B$). Del prodotto A sono richieste almeno 8000 unità e del prodotto B ne sono richieste almeno 10000. Comunque nessuno dei due prodotti può rappresentare, per decisione del management, più del 60% del mix prodotto.

Scrivere il programma lineare che permette di pianificare i volumi produttivi dei prodotti A e B e gli acquisti necessari di confezioni di componenti al fine di massimizzare il saldo (incasso – spese), supponendo di poter vendere l'intera produzione.

Soluzione. Definendo variabili associate alle entità che recano costi o profitti, è possibile definire

x_i =unità di prodotto i assemblate, $i = A, B$,

x_t =numero di confezioni **G**randi, **M**edie, **P**iccole acquistate, $t = G, M, P$.

Si può osservare che il numero di componenti 1, 2, e 3 acquistate è legato a x_G, x_M, x_P.

Comp. 1: $20x_G + 8x_M + 5x_P$

Comp. 2: $15x_G + 10x_M + 3x_P$

Comp. 3: $2x_G + 6x_M + 2x_P$

Il consumo di componenti 1, 2 e 3 è invece legato ai volumi produttivi:

Comp. 1: $3x_A + 8x_B$

Comp. 2: $2x_A + 4x_B$

Comp. 3: $5x_A + 7x_B$

Il modello deve prendere decisoni sul mix produttivo di A e B, a fronte di una disponibilità di componenti legata alle scorte di magazzino (disponibili a costo nullo) più gli eventuali acquisti di confezioni.

$$\begin{aligned}
\max\ z =& 200x_A + 100x_B - (30x_G + 20x_M + 10x_P) && (13)\\
\text{soggetto a}\ & x_A + x_B \le 100000 && (14)\\
& x_A \ge 8000 && (15)\\
& x_B \ge 10000 && (16)\\
& x_A \le 0.6(x_A + x_B) && (17)\\
& x_B \le 0.6(x_A + x_B) && (18)\\
& 3x_A + 8x_B \le 1000 + 20x_G + 8x_M + 5x_P && (19)\\
& 2x_A + 4x_B \le 3000 + 15x_G + 10x_M + 3x_P && (20)\\
& 5x_A + 7x_B \le 7000 + 2x_G + 6x_M + 2x_P && (21)\\
& x_A, x_B, x_G, x_M, x_P \in \mathbb{Z}_+. && (22)
\end{aligned}$$

2. Trasporto e assegnamento

4. Un comune deve smistare i rifiuti solidi urbani da quattro centri di raccolta $1, 2, 3, 4$ a tre impianti di trattamento A, B, C. Nei quattro centri di raccolta si accumulano rispettivamente 200, 500, 800 e 300 tonnellate all'anno di rifiuti. I tre impianti hanno rispettive capacità di trattamento massime di 1000, 1500 e 2000 tonnellate/anno, con costi differenti: 1000 euro/ton per l'impianto A, 600 euro/ton per l'impianto B, 1300 euro/ton per l'impianto C. A questo vanno aggiunti i costi di trasporto, in euro/ton, come da tabella seguente.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & 200 & 50 \\ 120 & 130 & 90 \\ 80 & 100 & 120 \\ 120 & 150 & 60 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Scrivere il programma lineare che permette di pianificare lo smistamento e il trattamento dei rifiuti dai centri di raccolta ai tre impianti a costo totale minimo.

5. Due tipi di carburante, **N**ormale e **S**uper, possono essere prodotti in tre impianti 1, 2, 3 che hanno diverse caratteristiche. L'impianto 1 può produrre 2 barili di Normale e 3 di Super consumando 8 barili di greggio. L'impianto 2 può produrre 3 barili di Normale e 4 di Super ogni 9 barili di greggio. L'impianto 3 può produrre 2 barili di Normale e 4 di Super ogni 10 barili di greggio.

Il greggio viene acquistato da tre fornitori A, B, C, che per il mese corrente hanno disponibilità di 50000, 150000 e 200000 barili, che possono essere forniti ai tre impianti con costi (in euro/barile) inclusivi di spese di acquisto e trasporto come da tabella.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 50 & 60 & 90 \\ 40 & 75 & 80 \\ 100 & 40 & 70 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Il carburante Normale è venduto a 120 euro al barile, il Super a 150; la direzione dell'azienda vuole produrre un mix bilanciato, perciò nessuno dei due tipi può rappresentare meno del 40% della produzione mensile.

Scrivere il programma per pianificare l'approvvigionamento di greggio dai fornitori e il mix mensile da produrre al fine di massimizzare il saldo ricavi−costi, supponendo di poter vendere l'intera produzione.

3. Problemi multiperiodali

6. Un finanziere ha a disposizione due piani di investimento A e B, disponibili all'inizio di ciascuno dei prossimi cinque anni. Ogni euro investito in A all'inizio di ogni anno dà, due anni più tardi, un profitto di 0.4 euro, e può essere immediatamente reinvestito. Ogni euro investito in B all'inizio di ogni anno dà, tre anni dopo, un profitto di 0.7 euro. In più, da un certo momento in avanti, sarà possibile sfruttare anche due altri piani di investimento C e D. In particolare, ogni euro investito in C all'inizio del secondo anno raddoppierà dopo quattro anni. Ogni euro investito in D all'inizio del quinto anno darà un profitto di 0.3 euro l'anno successivo. Anche per i piani B, C, D, vale la possibilità di reinvestimento come per il piano A.

Il finanziere ha a disposizione 100000 euro e vuole sapere quale piano di investimento massimizza il profitto maturato entro l'inizio del sesto anno.

4. Problemi max/min, min/max

7. Un certo insieme di m task $T = \{1, 2, \ldots, m\}$ deve essere smistato su un set di n processori $P = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ogni task $i \in T$ è caratterizzato da un certo consumo di memoria s_i e da un tempo di esecuzione p_{ij} che dipende dal processore $j \in P$ sul quale esso viene allocato. Ogni processore $j \in P$ dispone di una quantità limitata di memoria B_j per allocare i task. Ogni task va allocato ad un solo processore.

Scrivere il programma lineare per determinare l'allocazione di task sui vari processori al fine di minimizzare il tempo di calcolo consumato sul processore più "carico".