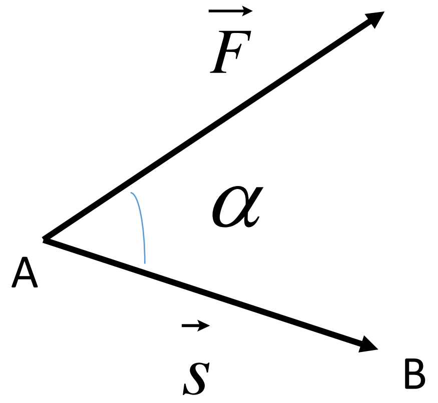
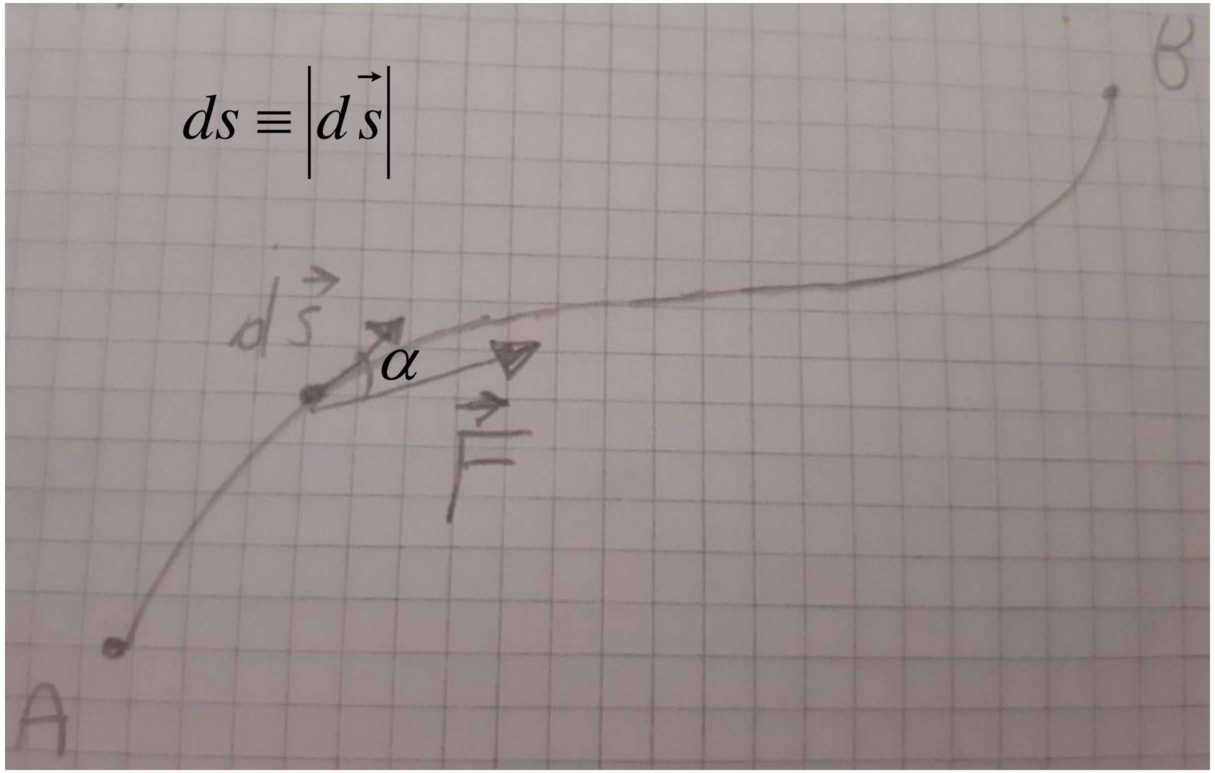
Lavoro di una forza



$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cos\alpha$$

Unità di misura: $\mathrm{N\,m} \equiv \mathrm{J}$

In generale, lo spostamento non è rettilineo e la forza può variare da punto a punto



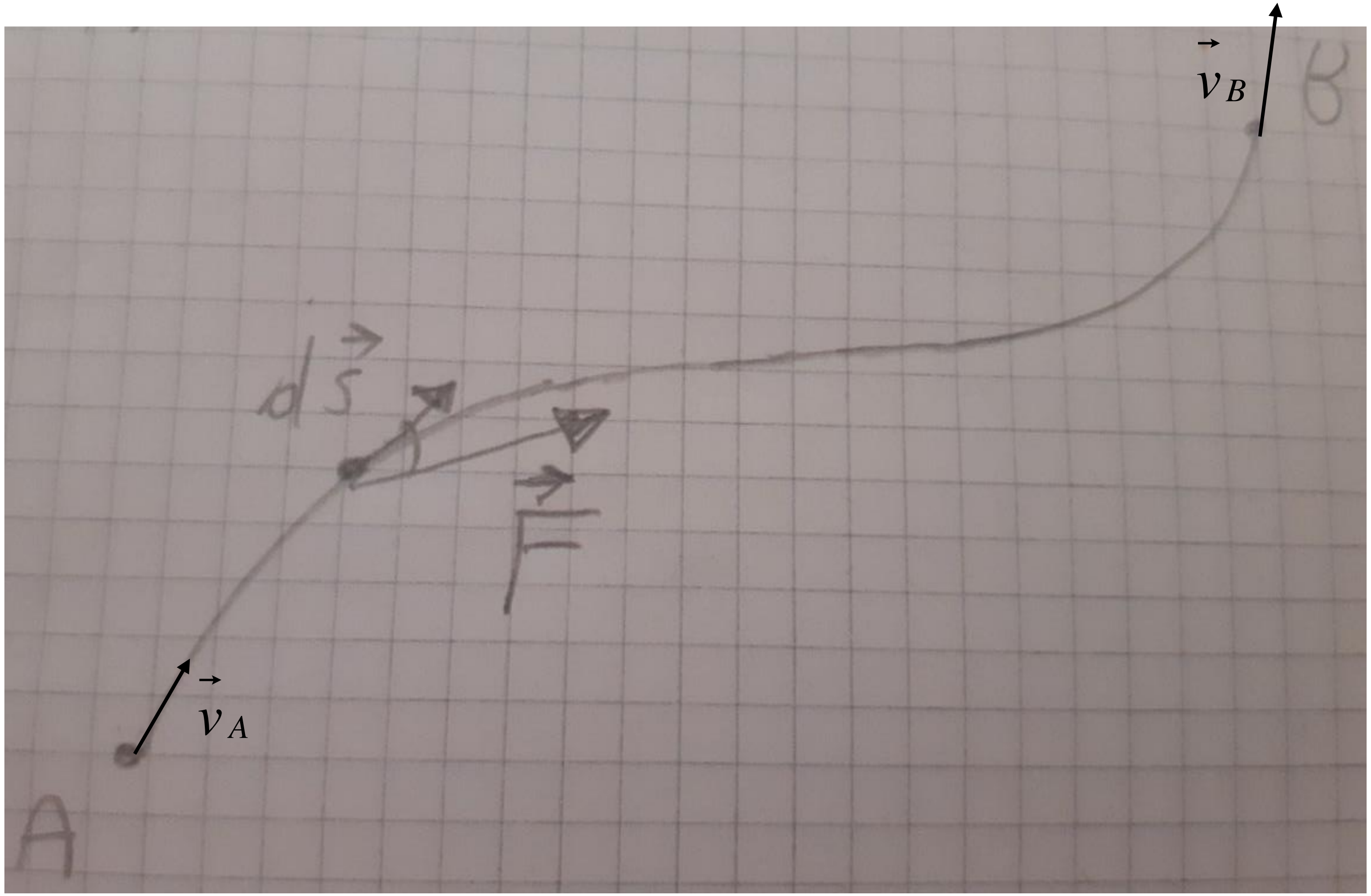
$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int_A^B \left|\vec{F}\right| ds \cos\alpha$$

Energia cinetica

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{s} =$$

$$= \frac{1}{2} m |\vec{v}_{\mathrm{B}}|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_{\mathrm{A}}|^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}{}^2 - \frac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}{}^2$$



Energia cinetica: $E_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2} m v^2$

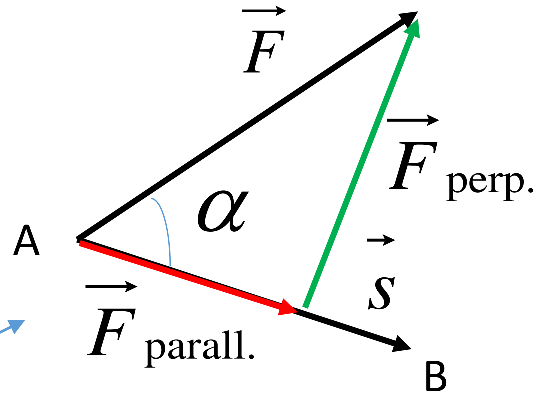
$$L_{\mathrm{AB}} = E_{\mathrm{K,B}} - E_{\mathrm{K,A}} = \Delta E_{\mathrm{K}}$$

Nota: per brevità, uso qui la notazione per cui $|\vec{v}_{\mathrm{B}}| = v_{\mathrm{B}}$, $|\vec{v}_{\mathrm{A}}| = v_{\mathrm{A}}$

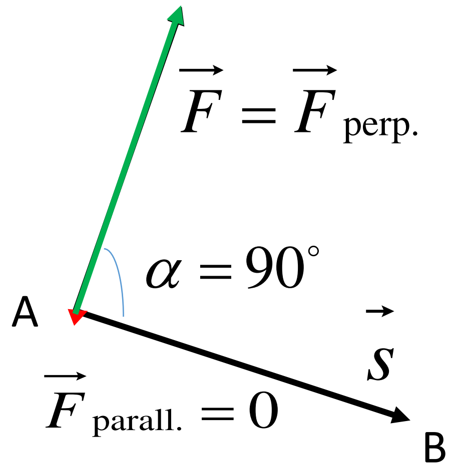
Lavoro e variazione di energia cinetica

$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cos\alpha = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}{}^{2} - \frac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}{}^{2}$$

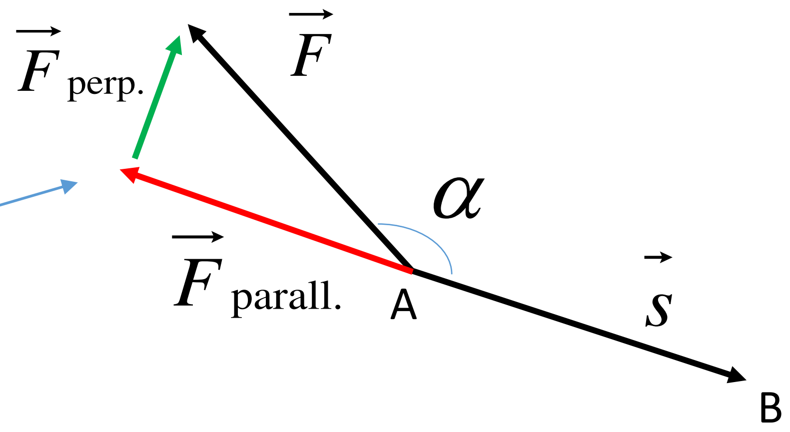
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \rightarrow L_{AB} > 0 \rightarrow v_B > v_A$$



$$\alpha = 90^\circ \rightarrow L_{AB} = 0 \rightarrow v_B = v_A$$



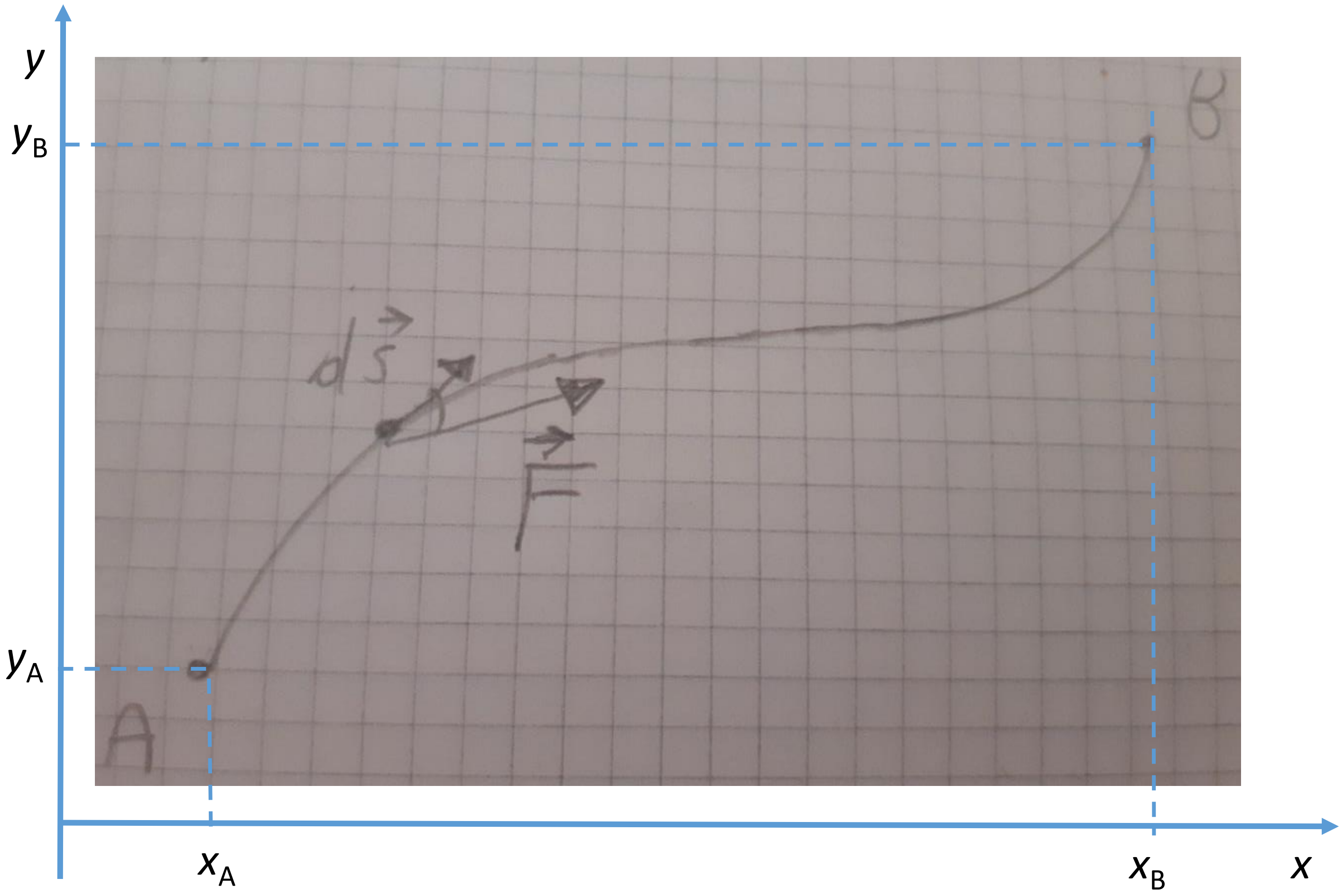
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow L_{AB} < 0 \rightarrow v_B < v_A$$



Forze conservative – Energia potenziale

Forza conservativa: esiste una funzione energia potenziale *U*(*x*,*y*,*z*) tale che:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}{}^2 - \frac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}{}^2 =$$
$$= U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B) = -\Delta U$$



Proprietà delle forze conservative:

- Il lavoro tra A e B non dipende dal percorso, solo dalla posizione iniziale e finale
- Il lavoro su un percorso chiuso (A = B) è nullo

Conservazione dell'energia meccanica

- Energia meccanica: $$E = U + E_{\mathrm{K}} = U(x, y, z) + \frac{1}{2}mv^2$$
- Per una forza conservativa:

$$L_{AB} = \Delta E_{\mathrm{K}} = -\Delta U$$
$$\rightarrow E_{\mathrm{K,B}} - E_{\mathrm{K,A}} = -(U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}}) = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}}$$
$$\rightarrow E_{\mathrm{K,B}} + U_{\mathrm{B}} = E_{\mathrm{K,A}} + U_{\mathrm{A}}$$
$$\rightarrow E_{\mathrm{B}} = E_{\mathrm{A}}$$

→ l'energia meccanica totale rimane costante (l'energia si può trasformare da cinetica a potenziale e viceversa, ma la loro somma non varia)

- Esempi di forze conservative: forza-peso, forza elettrostatica
- Esempi di forze non conservative: forze di attrito, forza elettrica indotta

1. Un satellite orbita intorno a un pianeta. In un certo punto dell'orbita (situazione 1), il satellite si muove con velocità $v = 385$ m/s, l'energia potenziale del sistema vale -120 MJ, l'energia totale del sistema vale -100 MJ.

- Calcolare la massa del satellite;
- calcolare la velocità del satellite in un punto dell'orbita in cui l'energia potenziale vale -450 MJ (situazione 2);
- calcolare il lavoro compiuto dalla forza di gravità sul satellite nel passare dalla situazione 1 alla situazione 2.

$$E = -100\,\mathrm{MJ} = E_{\mathrm{K},1} + U_1 = E_{\mathrm{K},2} + U_2$$

$$E_{\mathrm{K},1} = E - U_1 = 20\,\mathrm{MJ} = \frac{1}{2}mv^2$$

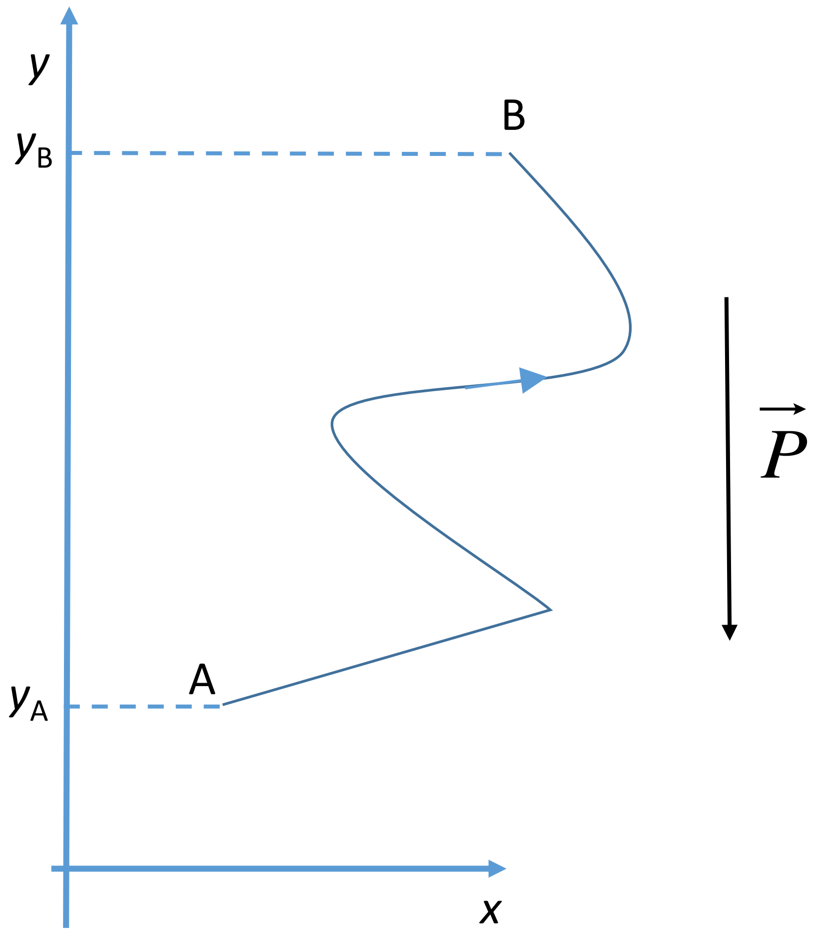
$$\boxed{m = \frac{2E_{\mathrm{K},1}}{v^2} \approx 270\,\mathrm{kg}}$$

$$E_{\mathrm{K},2} = E - U_2 = 350\,\mathrm{MJ} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{K},2}}{m}} \approx 1610\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$\boxed{L_{12} = E_{\mathrm{K},2} - E_{\mathrm{K},1} = U_1 - U_2 = 330\,\mathrm{MJ}}$$

Energia potenziale della forza-peso



Per qualunque coppia di punti A e B e indipendentemente dal percorso:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = mgy_A - mgy_B$$

Quindi la forza peso è conservativa e si ha:

$$L_{AB} = mgy_A - mgy_B = U_A - U_B$$

$$\rightarrow U(y) = mgy + \text{cost.}$$

La scelta della costante è arbitraria. Se la scegliamo tale che $U(y = 0) = 0$:

$$U(y) = mgy$$

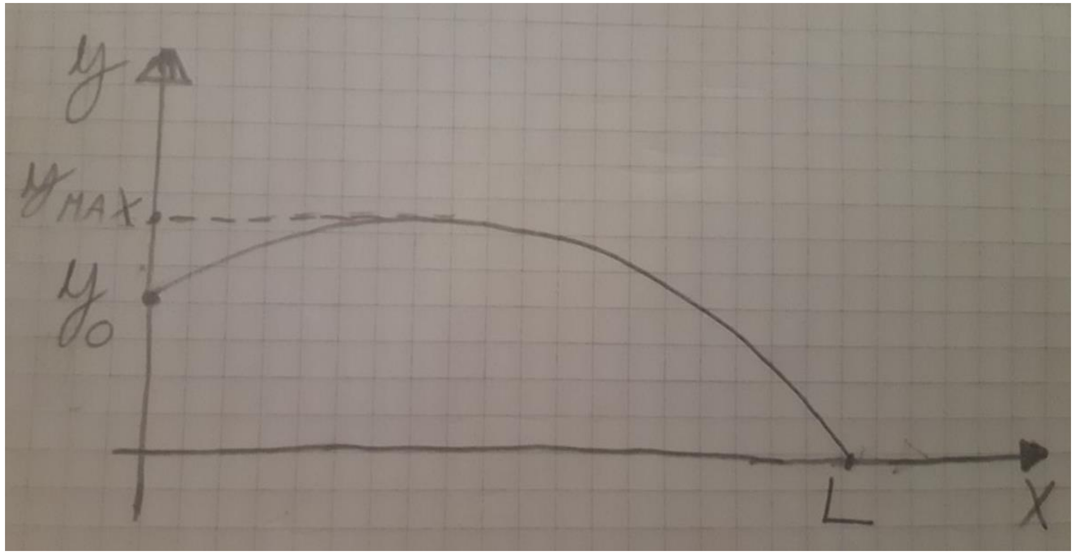
Moto uniformemente accelerato in 2 dimensioni

3. Un corpo viene lanciato a t = 0 da un'altezza di 20 m dal suolo, con una velocità iniziale di 12 m/s e direzione che forma un angolo di 30° verso l'alto con il suolo.

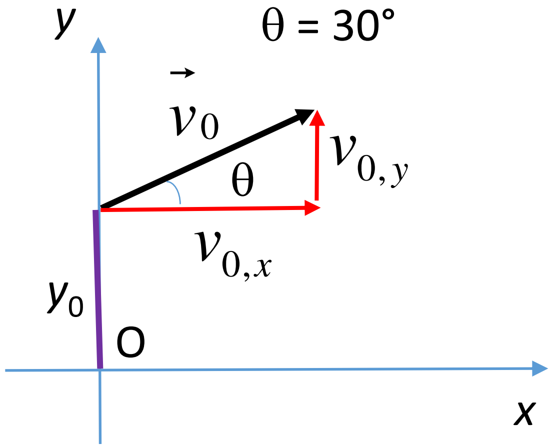
- calcolare la massima quota raggiunta;

- calcolare la velocità del corpo subito prima di toccare terra.

- Calcolare il lavoro compiuto sul corpo dalla forza-peso in funzione della massa *m* del corpo



3. Un corpo viene lanciato a t = 0 da un'altezza di 20 m dal suolo, con una velocità iniziale di 12 m/s e direzione che forma un angolo di 30° verso l'alto con il suolo.



- Calcolare dopo quanto tempo il corpo raggiunge la massima quota;
- calcolare la massima quota raggiunta;

$$v_0 \equiv \left|\vec{v}_0\right| = 12\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{0,x} = v_0 \cos 30^\circ \approx 10.4\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{0,y} = v_0 \sin 30^\circ = 6\ \mathrm{m/s}$$

$$a_x = 0; \quad a_y = -g$$

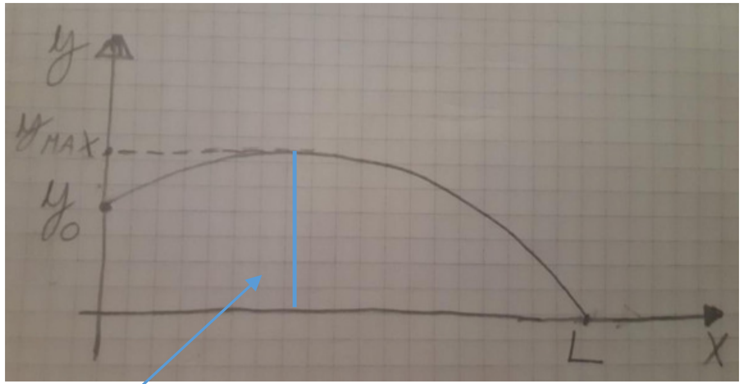
$$x_0 = 0; \quad y_0 = 20\ \mathrm{m}$$

$$x = x_0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = v_{0,x}t$$

$$v_x = v_{0,x} + a_x t = v_{0,x}$$

$$y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_{0,y} + a_y t = v_{0,y} - gt$$



Alla max quota: $v_y = 0 \rightarrow v_{0,y} - gt_{\max} = 0 \rightarrow \boxed{t_{\max} = \frac{v_{0,y}}{g} \approx 0.61\ \mathrm{s}}$

$$y_{\max} = y_0 + v_{0,y}t_{\max} - \frac{1}{2}gt_{\max}^2 = y_0 + \frac{v_{0,y}^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{0,y}^2}{g^2} = \boxed{y_0 + \frac{v_{0,y}^2}{2g} \approx 21.8\ \mathrm{m}}$$

- calcolare la massima quota raggiunta

Energia potenziale: $U(y) = mgy$

Energia cinetica: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Conservazione dell' energia:

$$U_\mathrm{i} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 = U_\mathrm{f} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2$$

$\rightarrow mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy_\mathrm{max} + \frac{1}{2}mv_{0,x}^2$ (perché alla quota massima la velocità verticale si annulla)

$$\rightarrow mgy_0 + \frac{1}{2}mv_{0,x}^2 + \frac{1}{2}mv_{0,y}^2 = mgy_\mathrm{max} + \frac{1}{2}mv_{0,x}^2$$

$$v_0^2 = v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2$$

$$\rightarrow y_0 + \frac{1}{2g}v_{0,y}^2 = \boxed{y_\mathrm{max} \sim 21.8\ \mathrm{m}}$$

- calcolare dopo quanto tempo il corpo tocca terra;

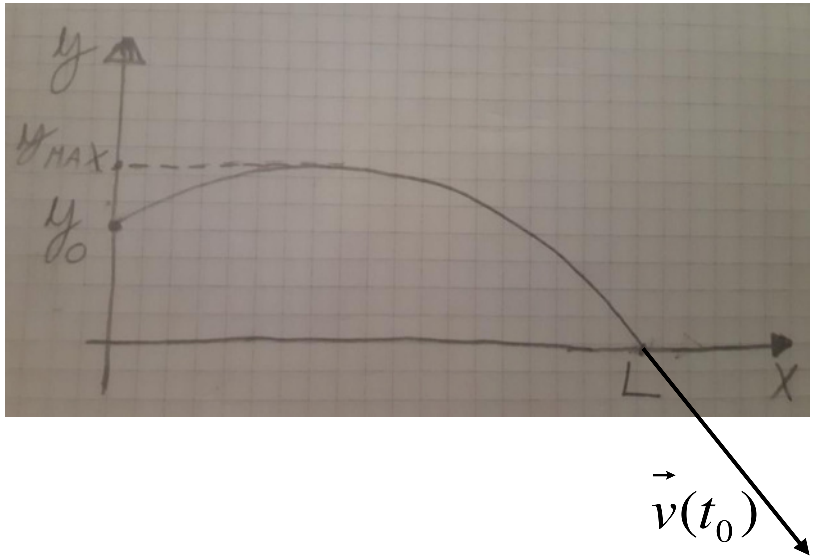
$$y=0 \rightarrow y_0+v_{0,y}t_0-\frac{1}{2}gt_0^{\ 2}=0 \rightarrow t_0=\frac{-v_{0,y}\pm\sqrt{v_{0,y}^{\ 2}+2gy_0}}{-g}=$$

$$\cancel{t_0=\frac{-v_{0,y}+\sqrt{v_{0,y}^{\ 2}+2gy_0}}{-g}<0}$$

$$t_0=\frac{-v_{0,y}-\sqrt{v_{0,y}^{\ 2}+2gy_0}}{-g}>0$$

$$\rightarrow \boxed{t_0=\frac{-v_{0,y}-\sqrt{v_{0,y}^{\ 2}+2gy_0}}{-g}\approx 2.72\,\mathrm{s}}$$

- calcolare la velocità del corpo subito prima di toccare terra.



$$\vec{v}(t_0)=\left(v_x(t_0),v_y(t_0)\right)$$

$$v_x(t_0)=v_{0,x}$$

$$v_y(t_0)=v_{0,y}-gt_0=v_{0,y}-g\,\frac{-v_{0,y}-\sqrt{v_{0,y}^{\ 2}+2gy_0}}{-g}=-\sqrt{v_{0,y}^{\ 2}+2gy_0}$$

$$\left|\vec{v}(t_0)\right|=\sqrt{v_x^{\ 2}(t_0)+v_y^{\ 2}(t_0)}=\sqrt{v_{0,x}^{\ 2}+v_{0,y}^{\ 2}+2gy_0}=\boxed{\sqrt{v_0^{\ 2}+2gy_0}\approx 23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

- calcolare la velocità del corpo subito prima di toccare terra.

Energia potenziale: $U(y) = mgy$

Energia cinetica: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Conservazione dell' energia:

$$U_{\mathrm{i}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}}^2 = U_{\mathrm{f}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2$$

$$\rightarrow mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\cdot 0 + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 \rightarrow gy_0 + \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v_{\mathrm{f}}^2 \rightarrow \boxed{v_{\mathrm{f}} = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0} \approx 23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

- Calcolare il lavoro compiuto sul corpo dalla forza-peso in funzione della massa *m* del corpo

$$L = \Delta E_{\mathrm{K}} = E_{\mathrm{K,f}} - E_{\mathrm{K,i}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}}^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + 2gy_0 - v_0^2\right) = \boxed{mgy_0}$$

oppure

$$L = -\Delta U = U_{\mathrm{i}} - U_{\mathrm{f}} = mgy_0 - mg\cdot 0 = \boxed{mgy_0}$$

1. Un corpo di massa m = 1.25 kg viene lanciato verso l'alto. La sua energia cinetica iniziale vale 30 J e la sua energia potenziale iniziale vale 4 J. L'energia potenziale al suolo vale 0 J.

   Calcolare:

   - l'energia meccanica del corpo;
   - l'altezza iniziale del corpo (rispetto al suolo);
   - l'altezza massima raggiunta dal corpo (rispetto al suolo);
   - l'energia cinetica del corpo quando arriva al suolo;
   - la velocità del corpo quando arriva al suolo.

1. Un corpo di massa m = 1.25 kg viene lanciato verso l'alto. La sua energia cinetica iniziale vale $E_{k,0}$ = 30 J e la sua energia potenziale iniziale vale U_0 = 4 J. L'energia potenziale al suolo vale 0 J.

Calcolare:

$$U(y) = mgy + \text{cost.} = mgy + U(0)$$
$$U(0) = 0 \rightarrow U(y) = mgy$$

- l'energia meccanica del corpo; $\boxed{E = U_0 + E_{k,0} = 34 \text{ J}}$

- l'altezza iniziale del corpo (rispetto al suolo); $\boxed{U_0 = mgh \rightarrow h = \frac{U_0}{mg} = 32.6 \text{ cm}}$

- l'altezza massima raggiunta dal corpo (rispetto al suolo);

Nel punto di massima quota, $E_k = 0 \rightarrow U_{max} = E \rightarrow$ $\boxed{h_{max} = \frac{U_{max}}{mg} = \frac{E}{mg} = 2.77 \text{ m}}$

- l'energia cinetica del corpo quando arriva al suolo;

Al suolo, $U = 0 \rightarrow$ $\boxed{E_{k,suolo} = E = 34 \text{ J}}$

- la velocità del corpo quando arriva al suolo.

$$\boxed{E_{k,suolo} = \frac{1}{2} m v_{suolo}^2 \rightarrow v_{suolo} = \sqrt{\frac{2E_{k,suolo}}{m}} = 7.38 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Un corpo di massa m = 1.25 kg sale lungo un piano inclinato a 30 °C rispetto all'orizzontale. La sua energia cinetica iniziale vale $E_{k,0}$ = 30 J e la sua energia potenziale iniziale vale U_0 = 4 J.
Il corpo percorre d = 2.2 m lungo il piano inclinato.

Calcolare:

- la reazione vincolare del piano;
- il lavoro compiuto dalla forza peso sul corpo durante lo spostamento;
- l'energia cinetica finale del corpo;
- la velocità finale del corpo;
- l'energia potenziale finale del corpo.

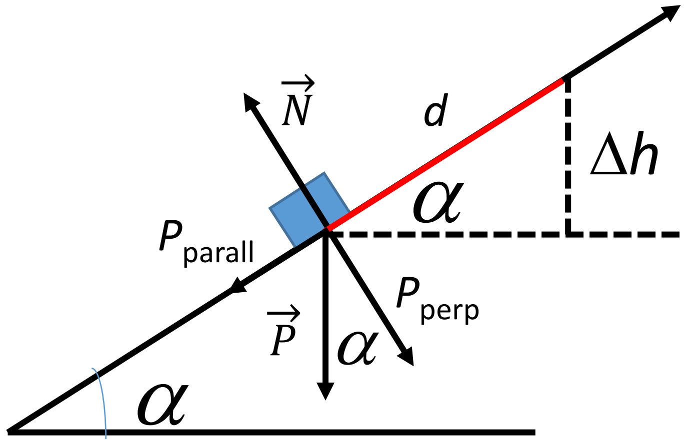
1. Un corpo di massa m = 1.25 kg sale lungo un piano inclinato a un angolo α = 30 °C rispetto all'orizzontale. La sua energia cinetica iniziale vale $E_{k,0}$ = 30 J e la sua energia potenziale iniziale vale U_0 = 4 J.
Il corpo percorre d = 2.2 m lungo il piano inclinato.

Calcolare:

- la reazione vincolare del piano; $\boxed{\left|\vec{N}\right| = \left|P_{\text{perp}}\right| = mg\cos 30^\circ = 10.6\ \text{N}}$

- il lavoro compiuto dalla forza peso sul corpo durante lo spostamento;

$$\boxed{L_P = -\Delta U = -mg\Delta h = -mgd\sin 30^\circ = -13.5\ \text{J}}$$



- l'energia cinetica finale del corpo; $\boxed{E_{k,f} = E_{k,0} + L_P = 16.5\ \text{J}}$

- la velocità finale del corpo; $\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2E_{k,f}}{m}} = 5.14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

- l'energia potenziale finale del corpo. $\boxed{U_f = U_0 + \Delta U = 17.5\ \text{J}}$

1. Un satellite di massa m = 2.3x10^4 kg orbita attorno a un pianeta. Al tempo t_1, il satellite si muove alla velocità v_1 = 340 km/h, con accelerazione pari a 4 volte quella di gravità terrestre, e la sua energia potenziale vale U_1 = -90 MJ. Calcolare:

- il modulo della forza esercitata dal satellite sul pianeta;

$$\vec{F}_{\text{pian} \to \text{sat}} = -\vec{F}_{\text{sat} \to \text{pian}} \to |\vec{F}_{\text{sat} \to \text{pian}}| = |\vec{F}_{\text{pian} \to \text{sat}}| = ma = 4mg = \boxed{9.03\text{x}10^5\ \text{N}}$$

- direzione e verso della forza esercitata dal satellite sul pianeta;

lungo la congiungente pianeta-satellite, diretta verso il satellite

- l'energia meccanica totale del satellite;

$$\boxed{E = U_1 + E_{k,1} = U_1 + \frac{1}{2} m v_1^2 = 12.6\ \text{MJ}}$$

- la velocità del satellite al tempo t_2, quando l'energia potenziale vale U_2 = -400 MJ;

$$E = U_2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \to v_2 = \sqrt{\frac{2(E - U_2)}{m}} = \boxed{189.4\ \text{m/s}}$$

- assumendo che l'energia potenziale sia proporzionale all'inverso della distanza del satellite dal pianeta, calcolare la velocità del satellite quando questo si trova a distanza infinita dal pianeta.

- \- assumendo che l’energia potenziale sia proporzionale all’inverso della distanza del satellite dal pianeta, calcolare la velocità del satellite quando questo si trova a distanza infinita dal pianeta.

$$E = U + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{K}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$se\ r \rightarrow \infty, E = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \boxed{33.1\ \mathrm{m/s}}$$

Backup

Un corpo di massa m = 23 g si muove con accelerazione costante, in presenza della forza di gravità e di una forza esterna costante. Alla partenza il corpo si trova fermo nell'origine.
Dopo un tempo Δt = 15 s, il vettore posizione del corpo vale $y_1\vec{\jmath}$, dove $\vec{\jmath}$ indica il versore dell'asse y (verticale) e $y_1 = -27$ m. Calcolare:

- il vettore accelerazione del corpo;

$$y_0 = v_0 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = \frac{1}{2}a\Delta t^2 \rightarrow a = \frac{2y_1}{\Delta t^2} = -0.24\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \rightarrow \boxed{\vec{a} = a\vec{\jmath} = -0.24\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ \vec{\jmath}}$$

- il modulo della forza esterna che agisce sul corpo;

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\mathrm{tot}} = \vec{F}_{\mathrm{est}} + \vec{P} \rightarrow \vec{F}_{\mathrm{est}} = \vec{F}_{\mathrm{tot}} - \vec{P} = ma\vec{\jmath} + mg\vec{\jmath} \rightarrow \left|\vec{F}_{\mathrm{est}}\right| = |\mathrm{m}(a+g)| = \boxed{0.22\ \mathrm{N}}$$

- la variazione di energia potenziale gravitazionale (dopo 15 s); $\Delta U = mg(y_1 - y_0) = mgy_1 = \boxed{-6.09\ \mathrm{J}}$

- il lavoro compiuto sul corpo dalla forza-peso (dopo 15 s); $L = -\Delta U = \boxed{6.09\ \mathrm{J}}$

- il vettore velocità del corpo (dopo 15 s). $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t = \vec{a}\Delta t = \boxed{-3.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \vec{\jmath}}$

Un corpo di massa m = 23 g si muove con accelerazione costante. Alla partenza il corpo si trova nell'origine e il vettore velocità vale $v_0\vec{\imath}$, con v_0 = 3 m/s. Dopo un tempo Δt = 15 s, il vettore velocità vale $v_1\vec{\imath}$, con v_1 = −4 m/s. Calcolare:

- la variazione di energia cinetica del corpo; $\Delta E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \boxed{0.081\ \mathrm{J}}$

- il lavoro compiuto sul corpo nei primi 15 s del moto; $L = \Delta E_\mathrm{K} = \boxed{0.081\ \mathrm{J}}$

- il vettore accelerazione del corpo; $\vec{a} = \frac{v_1\vec{\imath} - v_0\vec{\imath}}{\Delta t} = \boxed{-0.47\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ \vec{\imath}} \equiv a\vec{\imath}$

- il modulo della forza che agisce sul corpo; $\left|\vec{F}\right| = m|\vec{a}| = \boxed{0.011\ \mathrm{N}}$

- il vettore posizione del corpo dopo 15 s. $\vec{x}_1 = \left(x_0 + v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2\right)\vec{\imath} = \boxed{-7.5\ \mathrm{m}\ \vec{\imath}}$

Moto uniformemente accelerato in 2 dimensioni

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = \text{cost.}$$

$$\rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$x = x_0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_x = v_{0,x} + a_x t$$

$$v_y = v_{0,y} + a_y t$$

$$\vec{r} = (x, y)$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0,x}, v_{0,y})$$

- I moti lungo l'asse x e y sono indipendenti
- Il moto in presenza di forza-peso è un moto uniformemente accelerato con $\vec{a} = (0, -g) = \text{cost.}$