λ-calcolo tipato e PCF

Come si interpreta un termine XX?

$$\underset{\in\, A\to A}{X}\;\;\underset{\in\, A}{X}$$

ma non esiste alcun $A \neq \{*\}$ t.c.

$$A \simeq A \to A \quad \text{in } Set$$

Tipi semplici

$$A, B ::= \alpha \mid A \to B$$

dove $\alpha \in \{ bool, nat, \dots \}$ è atomico

fissata l'interpretazione $[\![\alpha]\!]$ (es. $[\![nat]\!] = \mathbb{N}$)

$$[\![A \to B]\!] = [\![B]\!]^{[\![A]\!]}$$
$$= \{ f \mid dom(f) = [\![A]\!],\ cod(f) = [\![B]\!] \}$$

Sistema di tipo $\Gamma \vdash M : A$ "M ha tipo A in Γ"

contesto $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ con $x_i \not\equiv x_j$ se $i \neq j$

$$\text{ax}\ \frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

$$\to E\ \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B} \qquad \to I\ \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A . M : A \to B}$$

dove $\Gamma, x : A = \Gamma \cup \{x : A\}$ e $x \notin Dom(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Esempio: $S \equiv \lambda x : ?\ \lambda y : ?\ \lambda z : ?\quad x z (y z)$

$$\Gamma = x : C \to B \to A,\ y : C \to B,\ z : C$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : C \to B \to A} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash z : C}}{\Gamma \vdash x z : B \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y : C \to B} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash z : C}}{\Gamma \vdash y z : B}}{\dfrac{\Gamma \vdash x z (y z) : A}{\vdash \lambda x : C \to B \to A . \lambda y : C \to B . \lambda z . C : (C \to B \to A) \to (C \to B) \to C \to A} \ (3 \text{ volte} \to I)}$$

Interpretazione

ρ è Γ-ambiente se $\forall x : A \in \Gamma .\ \rho x \in [\![A]\!]$

$[\![M]\!]_\rho$ def.

$$[\![x]\!]_\rho = \rho x \qquad [\![MN]\!]_\rho = [\![M]\!]_\rho \left([\![N]\!]_\rho \right)$$

$$[\![\lambda x : A . M]\!]_\rho = a \in [\![A]\!] \longmapsto [\![M]\!]_{\rho[x \mapsto a]}$$

<u>Prop</u> Se $\Gamma \vdash M : A$ è derivabile, ρ è Γ-ambiente allora $[\![M]\!]_\rho$ è def. e $[\![M]\!]_\rho \in [\![A]\!]$ $\square$

Teorema riduzione del soggetto

Con $M \to N$ si intende l'estensione di $\to_\beta$ al caso tipato, dimenticando i tipi:

$$\beta : (\lambda x : A . M) N \longrightarrow M[N/x]$$

Allora

$$\Gamma \vdash M : A \wedge M \to N \Longrightarrow \Gamma \vdash N : A$$

Lemma di sostituzione

$$\Gamma, x : A \vdash M : B \wedge \Gamma \vdash N : A \implies \Gamma \vdash M[N/x] : B$$

Dim. ind. sulla der. di $\Gamma, x : A \vdash M : B$

Caso ax: $M \equiv x$, $B \equiv A$ ma $x[N/x] \equiv N$
dunque $\Gamma \vdash N : B$ per ipotesi

Lemma di sost. (segue)

Caso $\to E$: $M \equiv PQ$ e la der. termina con

$$\to E \; \frac{\Gamma, x:A \vdash P : D \to B \qquad \Gamma, x:A \vdash Q : D}{\Gamma, x:A \vdash PQ : B}$$

ip. ind. $\Gamma \vdash P[N/x] : D \to B$

$\Gamma \vdash Q[N/x] : D$

quindi

$$\to E \; \frac{\Gamma \vdash P[N/x] : D \to B \qquad \Gamma \vdash Q[N/x] : D}{\Gamma \vdash P[N/x]\, Q[N/x] \equiv (PQ)[N/x] : B}$$

Lemma sost. (fine)

Caso $\to I$: $\quad M \equiv \lambda y : A . P$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : C \vdash P : D}{\Gamma, x : A \vdash \lambda y : C . P : C \to D}$$

quindi $x \not\equiv y$, $B \equiv C \to D$

Se $y \notin FV(N)$ allora $\Gamma \vdash N : A \Rightarrow \Gamma, y : C \vdash N : A$

ip. ind.

$$\frac{\Gamma, y : C \vdash P[N/x] : D}{\Gamma \vdash \lambda y : C . P[N/x] \equiv (\lambda y . P)[N/x] : C \to D} \to I$$

$\square$

Conseguenze ed altre proprietà

1. Se $\Gamma \vdash M : A$, $\Gamma \vdash N : A$ e $M =_\beta N$ allora

   $\forall \rho$ Γ-ambiente. $[\![M]\!]\rho = [\![N]\!]\rho$

2. se $\Gamma \vdash M : A$ allora non esistono rid. infinite

   $M \to M_1 \to M_2 \to \ldots$ ossia è SN

3. se $\Gamma \vdash M : A$ e $\Gamma \vdash N : A$ è decidibile

   se $M \overset{?}{=}_\beta N$ (il calcolo è CR e SN).

Limitazioni

1. $\vdash \underline{n} : (nat \to nat) \to nat$ ad esempio

$$\Gamma = x : nat \to nat \, , \; y : nat$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x : nat \to nat \qquad \dfrac{\Gamma \vdash x : nat \to nat \qquad \Gamma \vdash y : nat}{\Gamma \vdash xy : nat}}{\Gamma \vdash x(xy) : nat}}{x : nat \to nat \vdash \lambda y . x(xy) : nat \to nat}}{\vdash \lambda x y . x(xy) \equiv \underline{2} : (nat \to nat) \to nat \to nat}$$

<u>Limitazioni</u> (se pure)

$$N \equiv (nat \to nat) \to nat \to nat$$

<u>Teorema</u> (Schwichtenberg)

Le funzioni n-arie f ottenibili con un combinatore

$$\vdash F : \underbrace{N \to \dots \to N}_{n} \to N$$

sono esattamente le funzioni polinomiali estese, propriamente incluse nelle ric. primitive.