Lezione 17

Risoluzione approssimata di equazioni

La "maggior parte" delle equazioni (anche apparentemente "semplici"!) non si possono risolvere in modo esatto

es $e^x + x - 3 = 0$ in $\mathbb{R}$

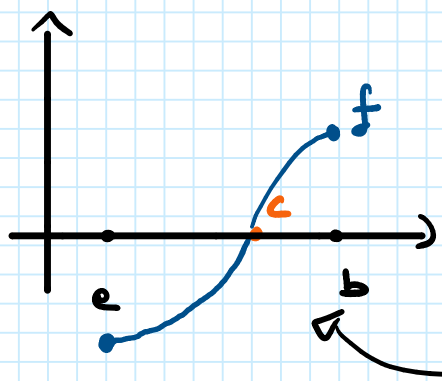
Servono dunque:

1. • **risultati teorici** che garantiscano l'esistenza di soluzioni
2. • **metodi numerici** per il calcolo **approssimato** delle soluzioni.

Iniziamo con un risultato teorico.

1. **Teorema di esistenza degli zeri**

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$



Oss Se f è strettamente crescente allora $\exists! \, c \in (a,b)$ t.c. $f(c)=0$

Si dice che c è uno **zero di f**

dim Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$

Sia c_1 il punto medio di $[a,b]$, ovvero $c_1 = \frac{a+b}{2}$

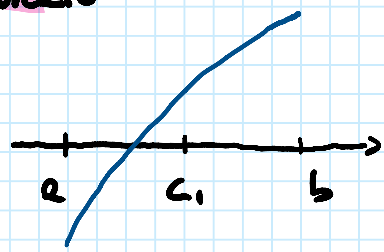
Dim (vedo nota)

Sia c_1 il punto medio di $[a,b]$, ovvero $c_1 = \frac{a+b}{2}$

Ci sono solo 3 possibilità:

1) se $f(c_1) = 0$, il teo è dimostrato

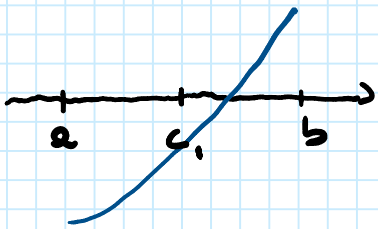
2) se $f(c_1) > 0$, si pone



$a_1 = a$

$b_1 = c_1$

3) se $f(c_1) < 0$, si pone



$a_1 = c_1$

$b_1 = b$

Nei casi 2) e 3) si è quindi costruito un intervallo $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ t.c.

$$f(a_1) < 0 < f(b_1) \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

Il procedimento può essere iterato:

$$c_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \quad \text{e si considera } f(c_2) \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$c_3 = \frac{a_2+b_2}{2} \quad \text{e si considera } f(c_3)$$

......

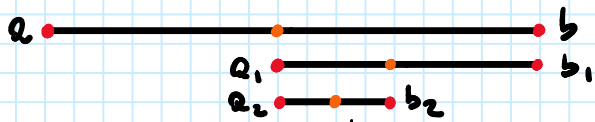
a In questo modo, possono verificarsi due possibilità:

b o in un numero finito di passi si giunge ad uno zero di f

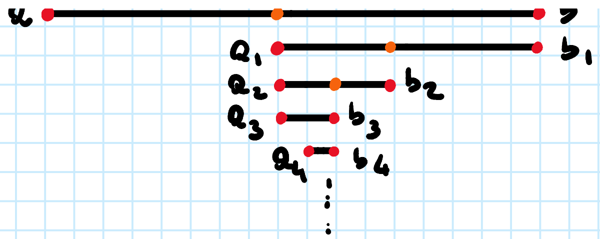
oppure si costruisce una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ t.c.

1) $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset \dots \supset [a_n,b_n] \supset \dots$

2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$



2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$



3) $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

Dal punto 1) si ha che:

- la successione $\{a_n\}$ è monotona (crescente) e limitata
- la successione $\{b_n\}$ è monotona (decrescente) e limitata

Pertanto $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono convergenti:

$$\exists\, l_1, l_2 \in [a,b] \text{ t.c. } \lim_{n\to+\infty} a_n = l_1 \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = l_2$$

Dal punto 2) si ha che

$$l_2 - l_1 = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

da cui $l_1 = l_2$

Posto dunque $l = l_1\ (= l_2)$, poiché f è continua si ha

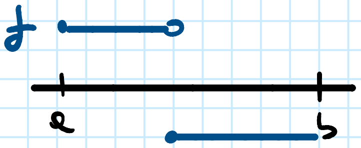
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(l) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$$

D'altro canto dal punto 3), per il teorema di permanenza del segno

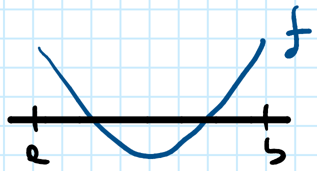
$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \implies f(l) \leq 0 \leq f(l)$$

Quindi $f(l) = 0$ e $c = l$ è lo zero cercato $\square$

Oss 1) L'ipotesi di continuità è necessaria:



2) $f(a)f(b) < 0$ è condiz. sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di uno zero

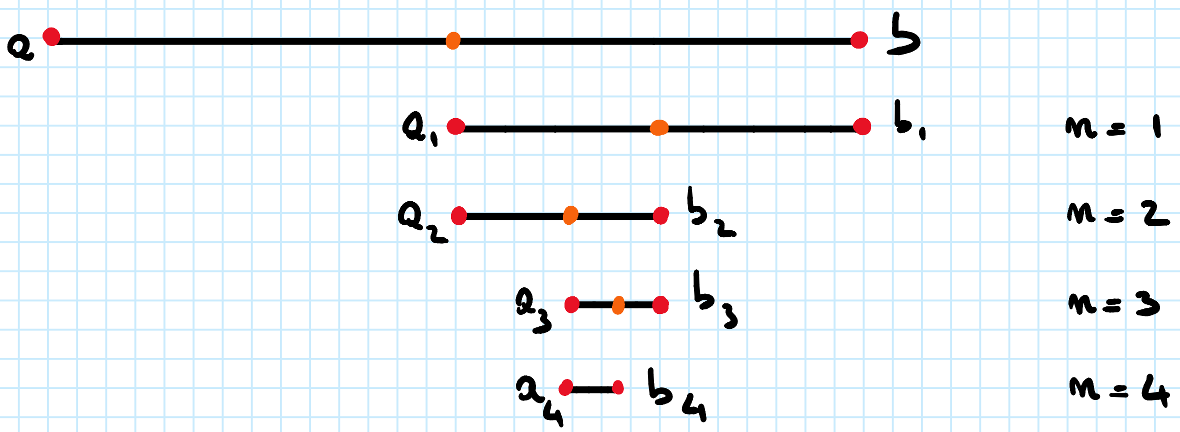


alg. bisezione e PSI)

Il procedimento descritto nella dim del teorema di esistenza degli zeri dà luogo ad un algoritmo per il calcolo approssimato della soluzione noto come algoritmo di bisezione

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'intervallo $[a_n, b_n]$ ha ampiezza $\boxed{\frac{b-a}{2^n}}$ e sicuramente contiene uno zero di f

vuol dire che ho trovato uno "zero approssimato" con errore $\leq \frac{b-a}{2^n}$



Per terminare l'algoritmo si stabilisce il

Per terminare l'algoritmo, si può stabilire il criterio d'arresto

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$$

"tolleranza": errore massimo che si vuole commettere

I "passi" (= # di iterazioni) necessari si trovano risolvendo la disequazione:

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$\iff n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

es. Per approssimare lo zero con una tolleranza di $\varepsilon = 10^{-k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ sono necessari:

$$n > \log_2\left((b-a)\,10^k\right)$$
$$= \log_2(b-a) + \log_2 10^k$$
$$= \log_2(b-a) + k \log_2 10$$

es. passi

Osservazione conclusiva

Data una eqz

$$f(x) = 0, \qquad x \in I \subset \mathbb{R} \text{ intervallo}$$

per determinare un intervallo $[a, b]$ da cui

Per "partire" il metodo di bisezione, possono essere utili dei confronti grafici.

Ad esempio, consideriamo l'eqz

$$\underbrace{e^x + x - 3}_{f(x)} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(l'avevamo fatto ieri)

scritta ad inizio lezione.

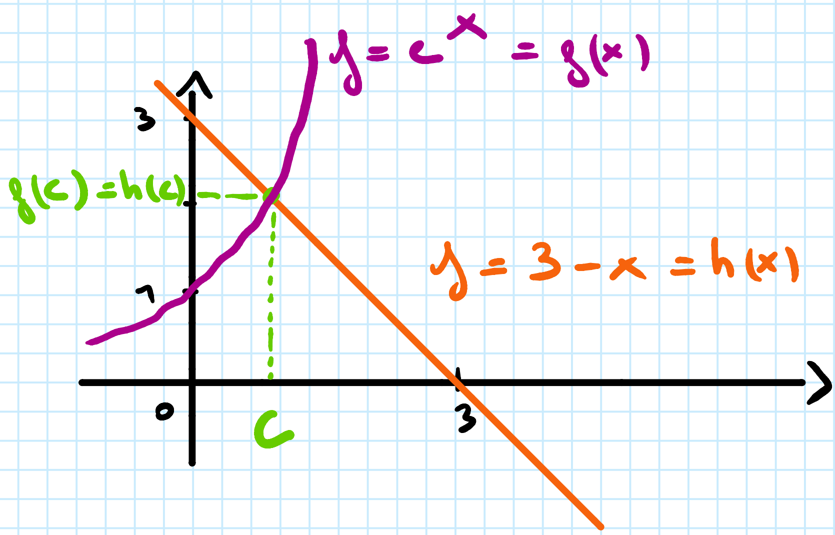
Possiamo riscriverla come:

$$\underbrace{e^x}_{g(x)} = \underbrace{3 - x}_{h(x)} \qquad (f = g - h)$$

e quindi

$$f(c) = 0 \iff g(c) = h(c)$$

$\iff$ $(c, g(c))$ è p.to di intersezione tra i grafici di $y = g(x)$ e $y = h(x)$



Da tale confronto grafico, è evidente che c è unico e $c \in [0,3]$

Dunque f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[a,b] = [0,3]$

$$f(0) = g(0) - h(0) < 0$$

$$f(3) = g(3) - h(3) > 0$$

e posso dunque far partire il metodo di bisezione da $[0,3]$ per approssimare c.

Fissata, ad esempio, una tolleranza di $\varepsilon = 10^{-3}$ $(=0{,}001)$ il metodo richiederà

$$\begin{aligned} n &> \log_2(b-a) + K \log_2 10 \\ &= \log_2 3 + 3 \log_2 10 \simeq 11{,}6 \end{aligned}$$

iterazioni (quindi $n = 12$)

<u>Oss</u> La scelta dell'intervallo iniziale non è univoca; per esempio, osservando che

$$g(1) = e \simeq 2{,}7 > 2 = h(1)$$

posso dedurre subito che $c \in [0,1]$

Ovviamente, se è più precisa la "localizzazione" iniziale saranno poi sufficienti meno iterazioni dell'algoritmo per approssimare la soluzione c con la tolleranza richiesta.

per approssimare la soluzione c con la tolleranza richiesta

es