Corso di Logica
2.2 – Relazioni

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Ripasso...

Le n-uple sono sequenze *ordinate* $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ di lunghezza n. (Ad esempio coppie ordinate, triple, quadruple, ecc...) Nel caso delle coppie spesso scriveremo (a, b) invece di $\langle a, b \rangle$.

Il **prodotto cartesiano** degli insiemi $A_0, \dots, A_{n-1}$ è l'insieme

$$A_0 \times A_1 \times \dots A_{n-1}$$

di tutte le n-uples $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ con $x_i \in A_i$ per ogni $0 \leq i < n$.

Quando gli insiemi $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ sono tutti lo stesso insieme A, scriviamo A^n invece di $A \times A \times \dots \times A$.

Relazioni

Definizione

Sia $n \geq 1$. Una **relazione n-aria** è un sottoinsieme di un prodotto cartesiano della forma $A_0 \times \cdots \times A_{n-1}$. Se gli insiemi $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sono tutti lo stesso insieme A, parleremo di relazione n-aria **su** A.

Se $n = 1$ parleremo di **relazione unaria** o **predicato**, se $n = 2$ parleremo di **relazione binaria**, se $n = 3$ parleremo di **relazione ternaria**, ecc...

Sia $R \subseteq A_0 \times \cdots \times A_{n-1}$ una relazione n-aria. Diciamo che gli elementi $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sono in relazione R se $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R$.

Solo x
sapere
uso

Database come relazioni n-arie

I database (relazionali) sono esempi di relazioni n-arie dove:

- n è il numero di colonne;
- ogni colonna rappresenta un insieme, ovvero l'insieme degli oggetti che compaiono (o possono comparire) in tale colonna;
- il database, visto come relazione, è un sottoinsieme del prodotto cartesiano degli insiemi di cui al punto precedente;
- ogni riga costituisce una n-upla di tale prodotto cartesiamo che dichiariamo appartenere alla relazione.

In altre parole:

La tabella di un database è una rappresentazione grafica di una relazione n-aria in cui vengono esplicitamente elencati gli elementi (ovvero le n-uple) di tale relazione.

Database relazionali: esempio

Consideriamo il seguente (ipotetico) database dell'anagrafe:

Cognome	**Nome**	**Data di nascita**	**Luogo di nascita**
Rossi	Mario	5/10/1976	Bologna
Ferrari	Carla	25/1/2001	Palermo
Conti	Maria	18/11/1986	Roma
Martinelli	Lorenzo	12/12/1957	Milano

In termini di relazioni, si tratta di una relazione 4-aria

$$R \subseteq A \times B \times C \times D$$

dove (come esplicitato nella prima riga)

$A =$ insieme di tutti i cognomi $\qquad B =$ insieme di tutti i nomi

$C =$ insieme di tutte le date $\qquad D =$ insieme di tutti i comuni

Le righe forniscono l'elenco completo delle 4-uple che sono elementi di R: ad esempio,

$$\langle \text{Martinelli}, \text{Lorenzo}, 12/12/1957, \text{Milano} \rangle \in R.$$

Database relazionali: esempio

L'archivio della motorizzazione che contiene i dati di tutte le patenti italiane emesse fornisce un esempio di relazione n-aria.

Il database corrispondente sarà costituito da 9 colonne, corrispondenti ai campi che compaiono sulla patente, ovvero: Cognome, Nome, Data di nascita, Data conseguimeto patente, Data scadenza patente, Sigla dell'ufficio di rilascio, Numero patente, Indirizzo di residenza, Categoria patente.

Ogni patente corrisponderà ad una riga del database, ovvero ad una 9-upla che apparterrà alla relazione 9-aria rappresentata dal database. Ad esempio, la patente

corrisponderà alla 9-upla

$$\begin{aligned}\langle &\text{ROSSI, MARIO, } 14/01/89,\ 15/04/2000,\ 15/04/2010, \\ &\qquad \text{MCTC} - \text{GR, GR6335015A, Grosseto 23 s.Leonardo, B}\rangle.\end{aligned}$$

La tabella risultante sarà dunque un elenco degli elementi (ovvero 9-uple) della relazione 9-aria corrispondente al database dei dati delle patenti:

1.C	2.N	3.DdN	4a.DCP	4b.DSP	4c.UR	5.NP	8.R	9.CP
Rossi	Mario	14/01/89	15/04/00	15/04/10	MCTC-GR	GR6335015A	Grosseto 23 s.Leonardo	B
Bianchi	Andrea	5/10/96	8/1/15	8/1/25	MIT-UCO	MI9384746B	Milano 15 Garibaldi	B
Leone	Teresa	22/12/74	1/11/18	1/11/28	UCO	PA8273891F	Palermo 15 Mulini	B
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Relazioni binarie

Una **relazione binaria** è un sotto insieme di un prodotto cartesiano della forma $A \times B$; se $A = B$, parliamo di relazione binaria su A.

Esempio

L'usuale ordinamento $\leq$ sui numeri naturali è una relazione binaria su $\mathbb{N}$. La coppia $(2, 7)$ è un elemento di tale relazione, mentre la coppia $(5, 1)$ non lo è.

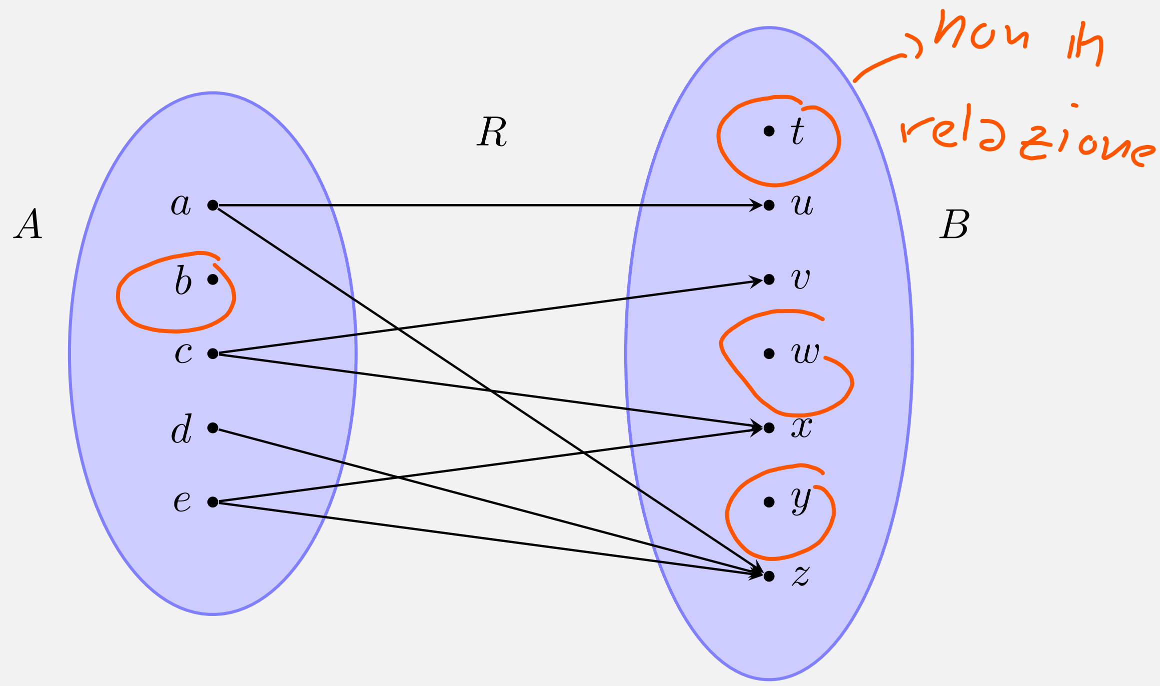
Spesso le relazioni binarie si dicono semplicemente relazioni e si scrive

$$a \, R \, b$$

invece di $(a, b) \in R$. Ad esempio, di solito scriviamo $2 \leq 3$ invece di $(2, 3) \in \leq$.

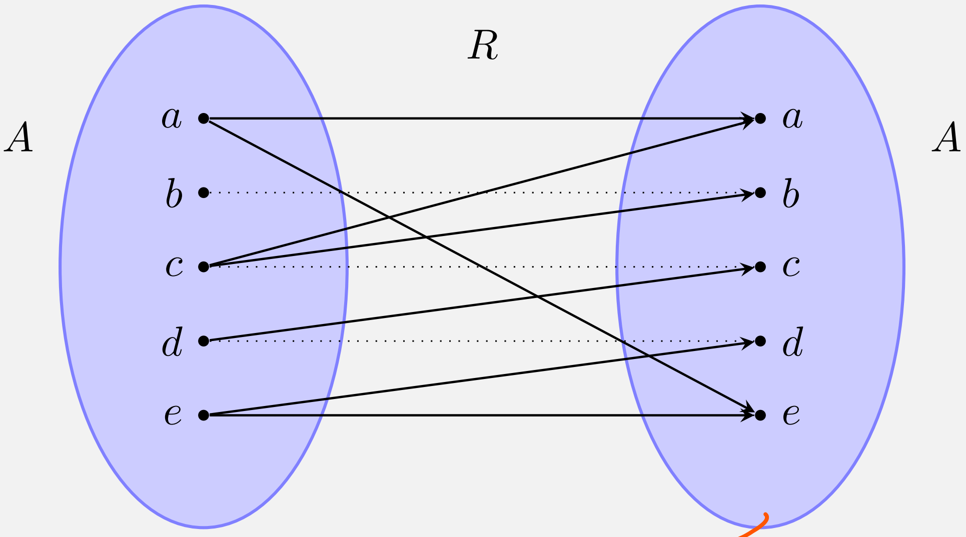
Rappresentazioni grafiche: diagrammi di Venn

Rappresentazione grafica di una relazione binaria $R \subseteq A \times B$ come insieme di frecce tra diagrammi di Venn.



Rappresentazioni grafiche: diagrammi di Venn

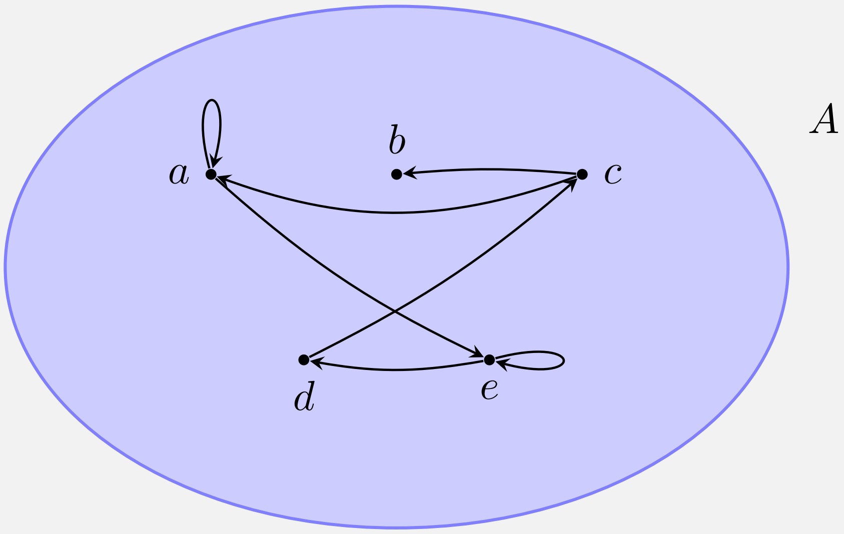
Rappresentazione grafica di una relazione binaria su un insieme A come insieme di frecce tra due copie dello stesso insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$.



2 volte

Rappresentazioni grafiche: diagrammi di Venn

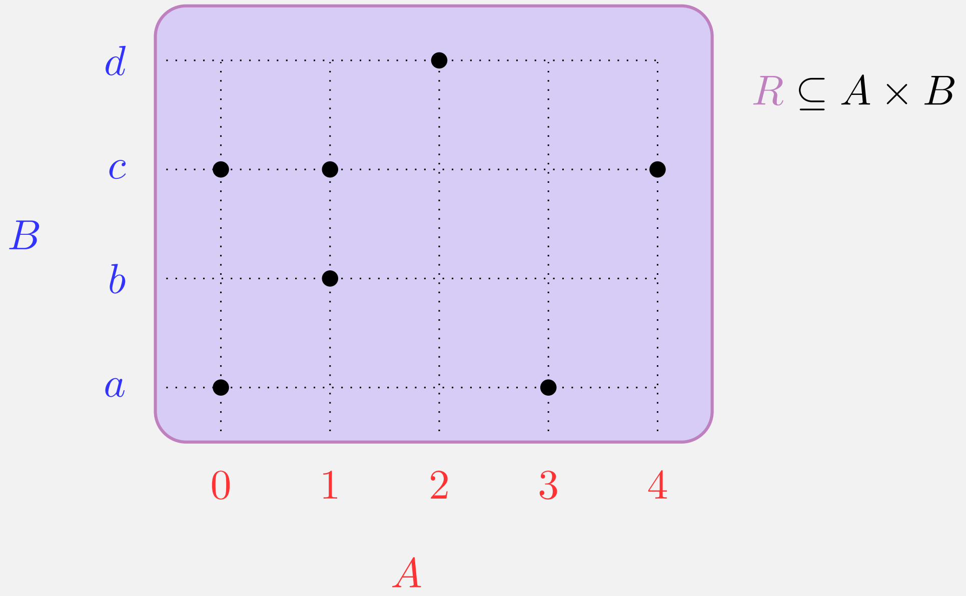
La stessa relazione binaria sull'insieme A come insieme di frecce tra i punti della stessa copia di $A = \{a, b, c, d, e\}$.



1 sola

Rappresentazioni grafiche: griglie e piano cartesiano

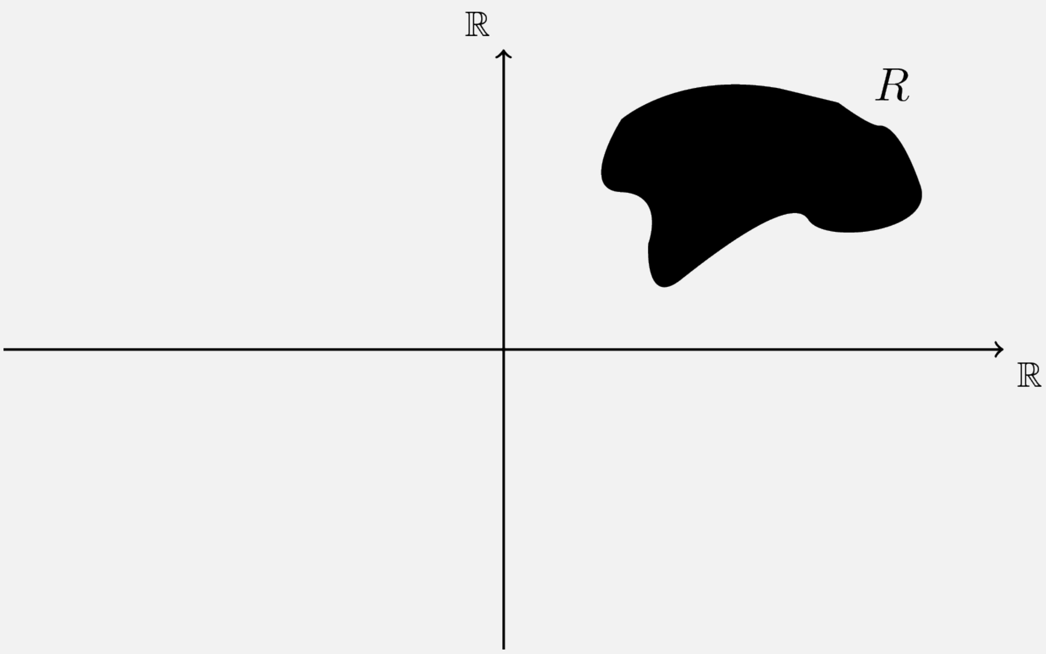
Rappresentazione grafica di $R \subseteq A \times B$, dove $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, come sottoinsieme del prodotto cartesiano.



In questo caso $R = \{(0, a), (0, c), (1, b), (1, c), (2, d), (3, a), (4, c)\}$.

Rappresentazioni grafiche: griglie e piano cartesiano

Rappresentazione grafica di una relazione binaria R su $\mathbb{R}$ come sottoinsieme di punti del piano cartesiano.



Dominio e immagine di relazioni binarie

Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione binaria.

- Il sottoinsieme di A definito da

$$\mathrm{dom}(R) = \{a \in A \mid (a, b) \in R \text{ per qualche } b \in B\}$$

  è detto **dominio** della relazione R.

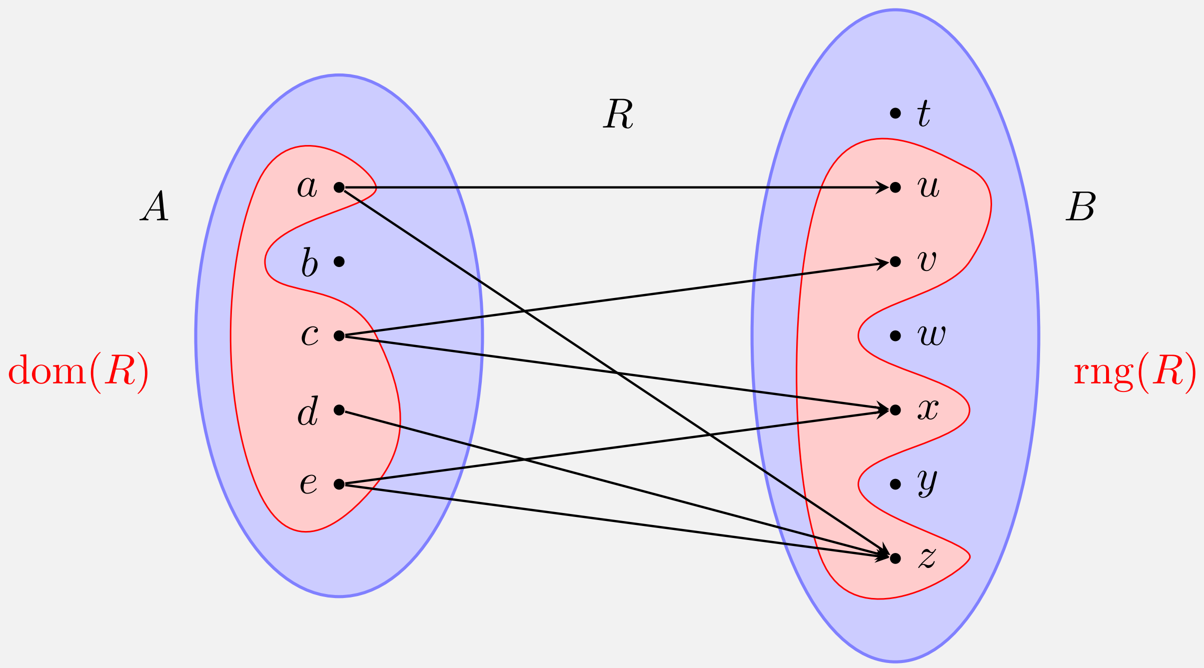
- Il sottoinsieme di B definito da

$$\mathrm{rng}(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R \text{ per qualche } a \in A\}$$

  è detto **range o immagine** della relazione R.

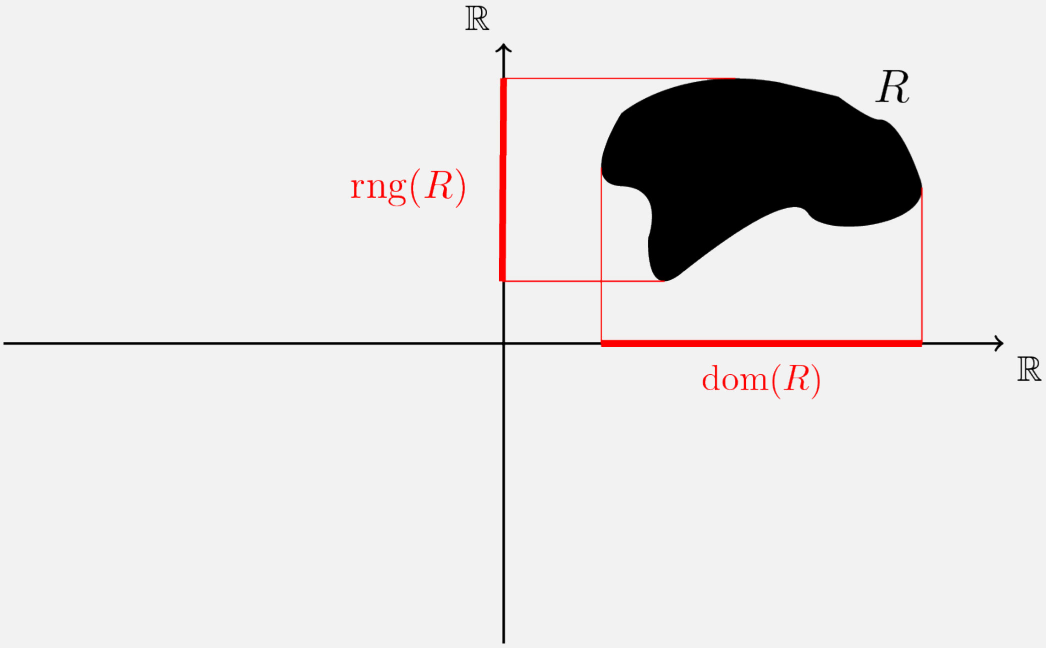
Dominio e codominio: rappresentazioni grafiche

Rappresentazione grafica del dominio e dell'immagine di una relazione binaria rappresentata tramite diagrammi di Venn.



Dominio e codominio: rappresentazioni grafiche

Rappresentazione grafica del dominio e dell'immagine di una relazione binaria su $\mathbb{R}$ come sottoinsieme di punti del piano cartesiano.



Relazione inversa

Se $R \subseteq A \times B$ è una relazione (binaria), allora la **relazione inversa** di R, che indichiamo con R^{-1} e che è ancora una relazione binaria, è il sottoinsieme di $B \times A$ definito da

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

In altre parole, per ogni $b \in B$ e $a \in A$ si ha

$$b \; R^{-1} \; a \qquad \text{se e solo se} \qquad a \; R \; b.$$

Chiaramente per ogni relazione binaria R

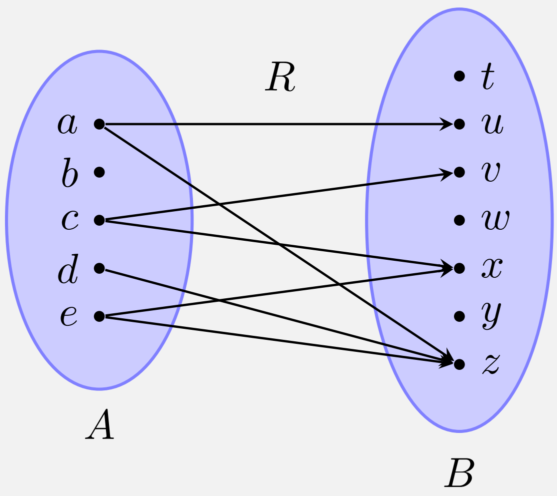
$$(R^{-1})^{-1} = R, \qquad \operatorname{rng}(R^{-1}) = \operatorname{dom}(R), \qquad \operatorname{dom}(R^{-1}) = \operatorname{rng}(R).$$

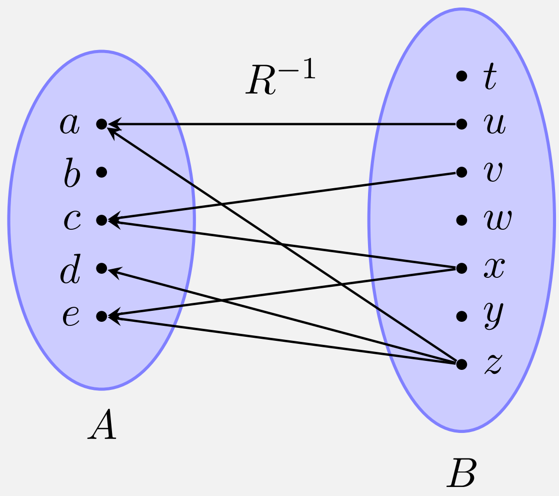
Esempio

Se R è la relazione $\leq$ di minore o uguale su $\mathbb{N}$, allora R^{-1} è la relazione $\geq$ di maggiore o uguale su $\mathbb{N}$.

Rappresentazioni grafiche di una relazione e della sua inversa

Rappresentazione grafica di una relazione $R \subseteq A \times B$ e della sua relazione inversa $R^{-1} \subseteq B \times A$.





Alcune proprietà

Definizione

Diremo che una relazione (binaria) R su un insieme A è

- **riflessiva** se $a \, R \, a$ per ogni $a \in A$;
- **simmetrica** se da $a \, R \, b$ segue che $b \, R \, a$;
- **antisimmetrica** se da $a \, R \, b$ e $b \, R \, a$ segue che $a = b$;
- **transitiva** se da $a \, R \, b$ e $b \, R \, c$ segue che $a \, R \, c$.

Osservazione: Una relazione R su un insieme A è simmetrica se e solo se $R = R^{-1}$, ovvero se per ogni $(a, b) \in A^2$

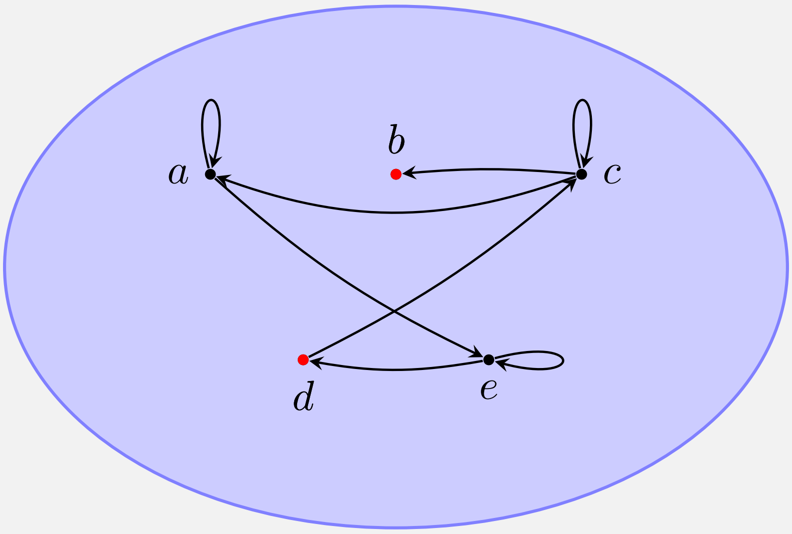
$$a \, R \, b \qquad \text{se e solo se} \qquad a \, R^{-1} \, b.$$

Inoltre, R è riflessiva/simmetrica/antisimmetrica/transitiva se e solo se R^{-1} lo è.

es.

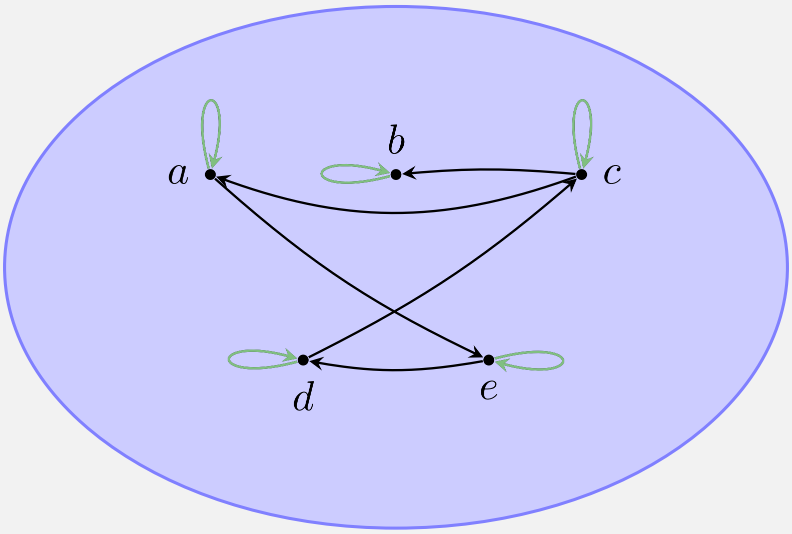
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria **non** riflessiva.



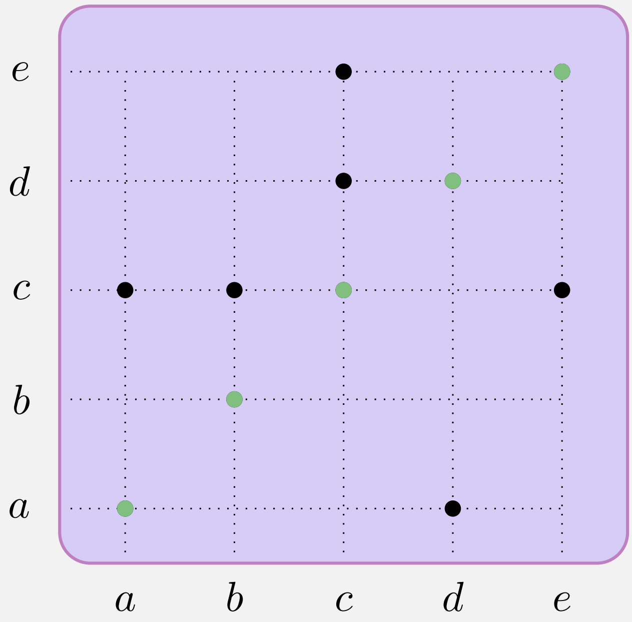
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria *riflessiva*.



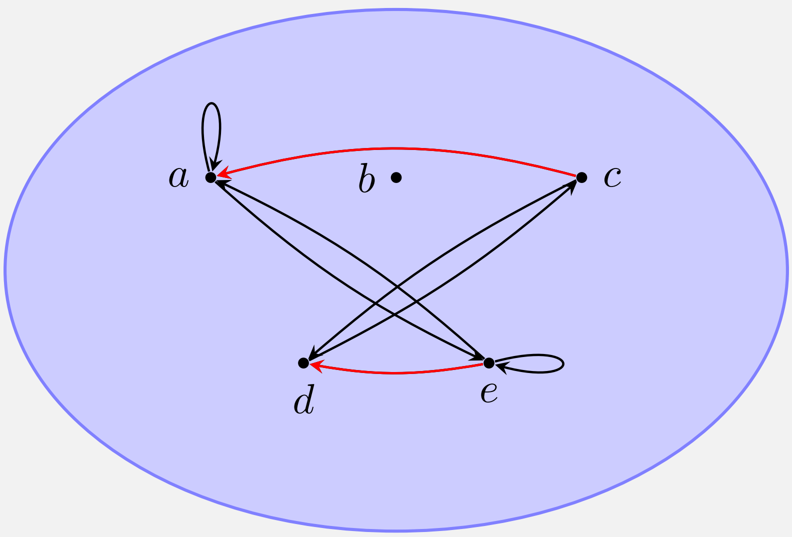
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria *riflessiva* su $A = \{a, b, c, d, e\}$.



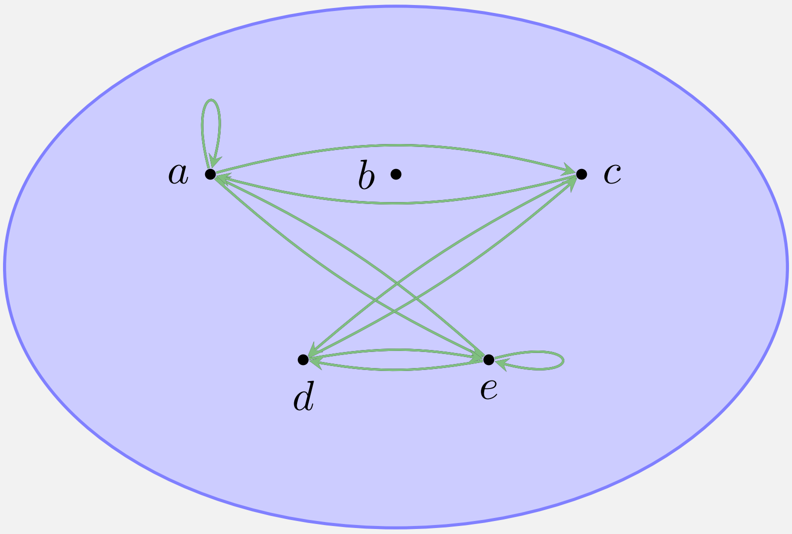
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria **non** simmetrica.



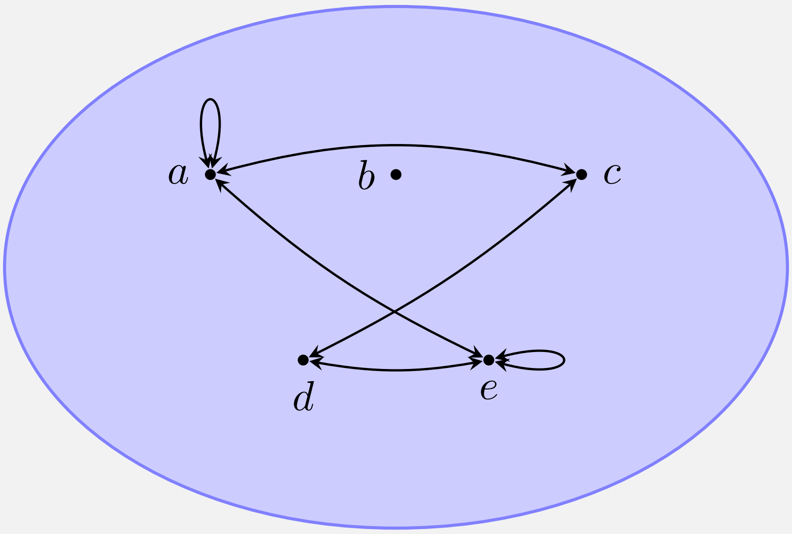
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria *simmetrica*.



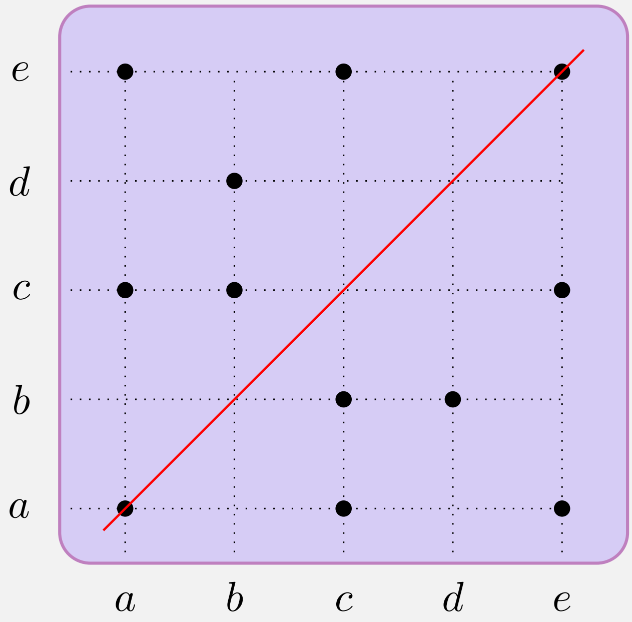
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria *simmetrica*.



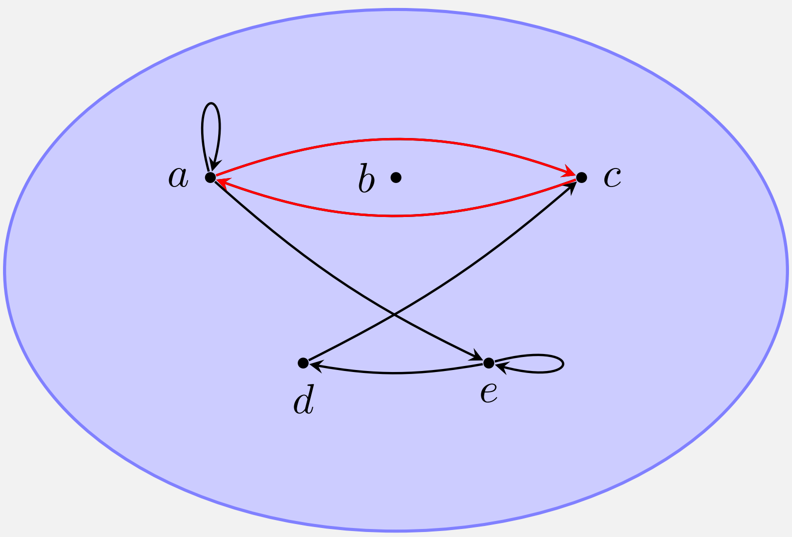
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria *simmetrica*.



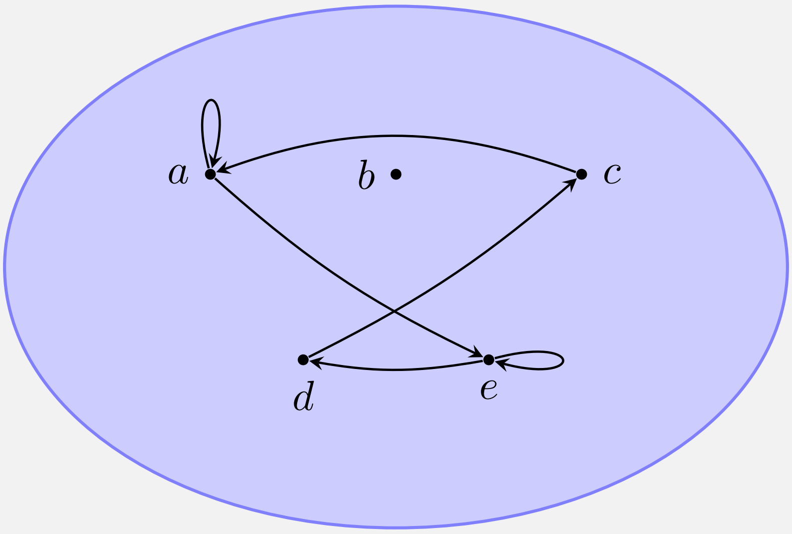
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria **non** antisimmetrica.



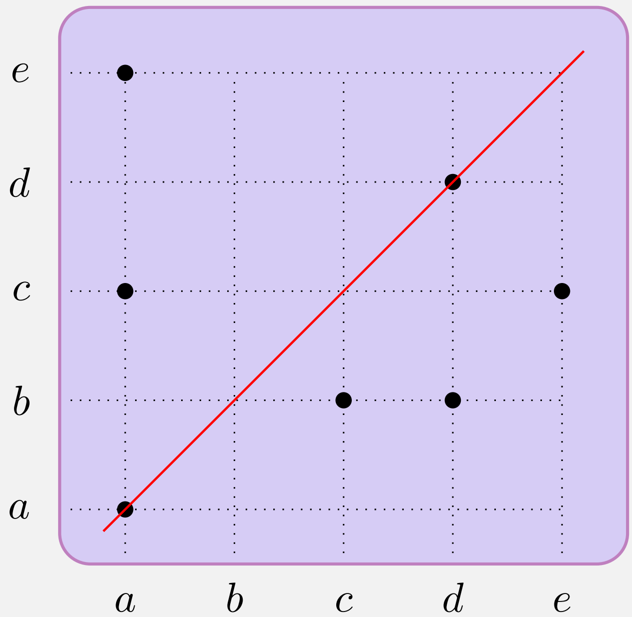
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria *antisimmetrica*.



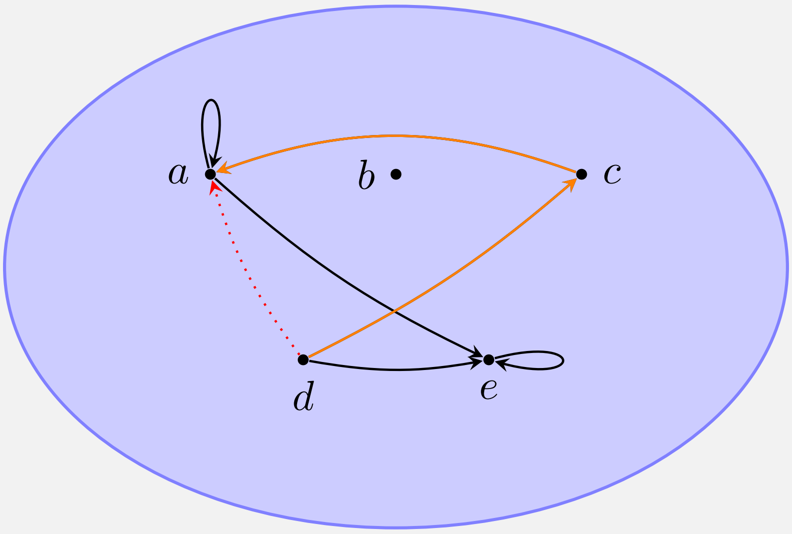
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria *antisimmetrica*.



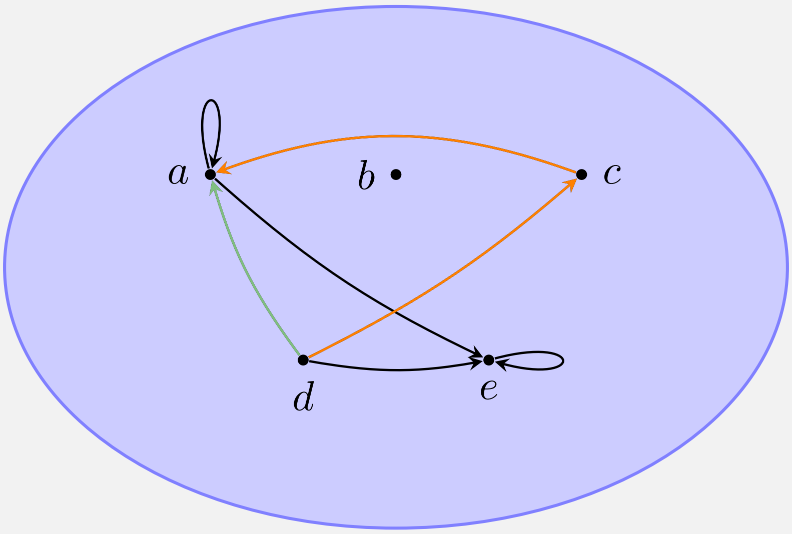
Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria **non** transitiva.



Proprietà di relazioni binarie: rappresentazioni grafiche

Relazione binaria *transitiva*.



Relazioni d'equivalenza

Definizione

Una **relazione di equivalenza su** A è una relazione (binaria) riflessiva, simmetrica e transitiva su A.

Oltre ad utilizzare lettere maiuscole come E, F, ecc..., per indicare relazioni d'equivalenza spesso useremo simboli che in qualche misura richiamano la relazione d'uguaglianza, quali ad esempio

$$\equiv \qquad \sim \qquad \simeq \qquad \cong \qquad \approx \qquad \dots$$

Quando vorremo esplicitare l'insieme A su cui è definita la relazione d'equivalenza E scriveremo $\langle A, E\rangle$.

Classi di equivalenza e insieme quoziente

Sia E una relazione di equivalenza su A. La **classe di equivalenza** di un elemento $a \in A$ rispetto ad E è

$$[a]_E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \mathrel{E} a\} .$$

Quando la relazione E è chiara dal contesto, si può scrivere solo $[a]$ invece di $[a]_E$.

L'**insieme quoziente** è l'insieme di tutte le classi di equivalenza:

$$A/E \stackrel{\text{def}}{=} \{[a]_E \mid a \in A\} .$$

L'insieme quoziente è una famiglia di sottoinsiemi di A, cioè $A/E \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Esempio: campionato di serie A

Sia X l'insieme di tutti i giocatori di squadre di serie A. Definiamo ora una relazione binaria E sull'insieme X stabilendo che $a \mathrel{E} b$ se e solo se a e b giocano nella stessa squadra.

La relazione E è chiaramente riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza su X.

- Le classi di equivalenza sono le squadre del campionato di serie A.
- Il quoziente X/E consiste nel campionato di serie A, ossia è l'insieme delle squadre che giocano in quel campionato.

Esempio: le regioni

Sia X l'insieme di tutti i comuni italiani. Definiamo ora una relazione binaria E sull'insieme X stabilendo che $a \mathrel{E} b$ se e solo se a e b si trovano nella stessa regione.

La relazione E è chiaramente riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza su X.

- Le classi di equivalenza sono le regioni italiane.
- Il quoziente X/E consiste nell'insieme di tutte le regioni italiane.

Esempio: congruenza modulo 2

Dati due interi $a, b \in \mathbb{Z}$, a **è congruente a** b **modulo** 2 se $a - b$ è un numero pari (ovvero se $a - b = 2 \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$). In questo caso scriviamo

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ 2)$$

La relazione di congruenza modulo 2 è una relazione di equivalenza:

- Riflessività: $a - a = 0$ è pari, quindi $a \equiv a \,(\mathrm{mod}\ 2)$.
- Simmetria: $b - a = -(a - b)$, quindi $a - b$ è pari se e solo se $b - a$ lo è.
- Transitività: $a - c = (a - b) + (b - c)$, per cui se $a - b$ e $b - c$ sono pari, allora anche $a - c$ lo è.

Esempio: congruenza modulo 2

Ci sono due classi di equivalenza per questa relazione:

- i numeri pari, ossia $[0] = \{n \mid n - 0 = n \text{ è pari}\}$,
- i numeri dispari, ossia $[1] = \{n \mid n - 1 \text{ è pari}\}$,

Dunque l'insieme quoziente risultante

$$\mathbb{Z}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{[0], [1]\}$$

ha esattamente 2 elementi.

Esempio: congruenza modulo n

Più in generale, dato $0 \neq n \in \mathbb{N}$ e due interi $a, b \in \mathbb{Z}$, a **è congruente a** b **modulo** n se $a - b$ è un multiplo di n (ovvero se $a - b = n \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$). In questo caso scriviamo

$$a \equiv b \pmod{n}$$

La relazione di congruenza modulo n è una relazione di equivalenza:

- **Riflessività** $a - a = 0$ è sempre multiplo di n, quindi $a \equiv a \pmod{n}$.
- **Simmetria** $b - a = -(a - b)$, quindi $a \equiv b \pmod{n}$ se e solo se $b \equiv a \pmod{n}$.
- **Transitività** $a - c = (a - b) + (b - c)$, per cui se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$ allora $a \equiv c \pmod{n}$.

Esempio: congruenza modulo n

Ciascuna classe di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza modulo n è del tipo

$$[k] = \{a \in \mathbb{Z} \mid \text{la divisione intera di } a \text{ per } n \text{ ha resto } k\}$$

per qualche $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dunque l'insieme quoziente risultante

$$\mathbb{Z}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{[k] \mid 0 \leq k \leq n-1\}$$

ha esattamente n elementi.

Proposizione

Sia E una relazione d'equivalenza su A e consideriamo $a, b \in A$. Se $a \mathrel{E} b$ allora $[a]_E = [b]_E$, mentre se $a \not\mathrel{E} b$ allora $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$. In particolare, due classi di equivalenza sono disgiunte o coincidono.

Dimostrazione.

Supponiamo $a \mathrel{E} b$. Sia $c \in [a]_E$: allora $c \mathrel{E} a$ e per la proprietà transitiva $c \mathrel{E} b$, quindi $c \in [b]_E$. Essendo c arbitrario, abbiamo dimostrato che $[a]_E \subseteq [b]_E$. Sia ora $c \in [b]_E$: allora $c \mathrel{E} b$. Per la proprietà simmetrica $b \mathrel{E} a$, da cui $c \mathrel{E} a$ per la proprietà transitiva: quindi $c \in [a]_E$. Segue che $[b]_E \subseteq [a]_E$. Per il principio della doppia inclusione abbiamo quindi $[a]_E = [b]_E$.

Supponiamo ora $a \not\mathrel{E} b$. Verifichiamo che in questo caso $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$. Supponiamo, per assurdo, che ci sia un $c \in [a]_E \cap [b]_E$. Allora $c \mathrel{E} b$, da cui $b \mathrel{E} c$ per simmetria. Inoltre $c \mathrel{E} a$, quindi $b \mathrel{E} a$ per transitività, e $a \mathrel{E} b$ per simmetria. Ma questo contraddice la nostra assunzione che $a \not\mathrel{E} b$. □

Partizioni

Definizione

Una **partizione** di un insieme $A \neq \emptyset$ è una famiglia $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi non vuoti di A, a due a due disgiunti, che ricoprono A, cioè

1. se $X \in \mathcal{C}$ allora $\emptyset \neq X \subseteq A$,
2. se $X, Y \in \mathcal{C}$ e $X \neq Y$ allora $X \cap Y = \emptyset$,
3. ogni elemento di A appartiene a qualche $X \in \mathcal{C}$.

Ad esempio, sia $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}$ la collezione degli interi pari e $\mathbb{D}$ la collezione degli interi dispari. Allora

$$\mathcal{C} = \{\mathbb{P}, \mathbb{D}\}$$

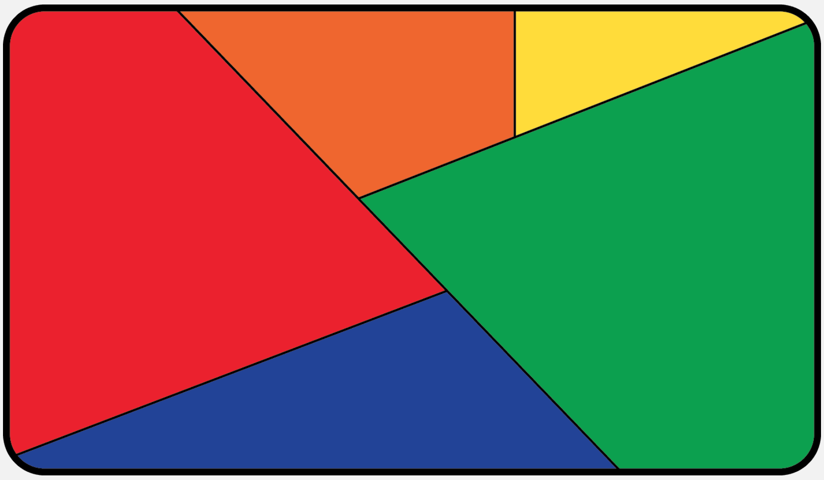
è una partizione di $\mathbb{Z}$ poiché

- $\mathbb{P} \neq \emptyset$ e $\mathbb{D} \neq \emptyset$;
- $\mathbb{P} \cap \mathbb{D} = \emptyset$;
- ogni $k \in \mathbb{Z}$ è pari o dispari, quindi $\mathbb{Z} = \mathbb{P} \cup \mathbb{D}$.

Definizione

Una **partizione** di un insieme $A \neq \emptyset$ è una famiglia $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi non vuoti di A, a due a due disgiunti, che ricoprono A, cioè

1. se $X \in \mathcal{C}$ allora $\emptyset \neq X \subseteq A$,
2. se $X, Y \in \mathcal{C}$ e $X \neq Y$ allora $X \cap Y = \emptyset$,
3. ogni elemento di A appartiene a qualche $X \in \mathcal{C}$.



Se E è una relazione di equivalenza su A, allora il quoziente A/E è una partizione di A: ogni $[a]_E \subseteq A$ è non vuota, due classi di equivalenza distinte sono disgiunte (Proposizione precedente) e per ogni $a \in A$ si ha $a \in [a]_E \in A/E$.

Viceversa, data una partizione $\mathcal{C}$ di A, la relazione E su A definita da

$$a \mathrel{E} b \text{ se e solo se } a \text{ e } b \text{ appartengono allo stesso } X \in \mathcal{C}$$

è una relazione di equivalenza su A, ovvero è riflessiva, simmetrica e transitiva (se $a, b \in X \in \mathcal{C}$ e $b, c \in Y \in \mathcal{C}$, allora $X = Y$ poiché $b \in X \cap Y$ e $\mathcal{C}$ è una partizione: perciò $a, c \in X \in \mathcal{C}$), e $A/E = \mathcal{C}$.

Quindi partizioni su A e insiemi quozienti di A (rispetto a una qualche relazione di equivalenza su A) sono la stessa cosa!

Esempio

Sia $\mathcal{C} = \{\mathbb{P}, \mathbb{D}\}$ la partizione di $\mathbb{Z}$ in numeri pari e dispari. Consideriamo la relazione di congruenza modulo 2 su $\mathbb{Z}$, e sia $\mathbb{Z}_2$ lo spazio quoziente. Allora

$$\mathcal{C} = \mathbb{Z}_2.$$

Infatti $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ e

$$[0] = \mathbb{P} \qquad \text{e} \qquad [1] = \mathbb{D}.$$

Esercizi su relazioni d'equivalenza (1)

Consideriamo la relazione E su $\mathbb{R}$ definita da

$$x \; E \; y \text{ se e solo se } |x| = |y|.$$

Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza.

Siano x, y, z elementi arbitrari di $\mathbb{R}$.

Riflessività Ovvio, $x \; E \; x$ perché $|x| = |x|$.

Simmetria Anche questo è facile: se $x \; E \; y$ allora $|x| = |y|$, quindi anche $y \; E \; x$ perché $|y| = |x|$.

Transitività Supponiamo che $x \; E \; y$ e $y \; E \; z$: vogliamo dimostrare che $x \; E \; z$. Dalla prima condizione otteniamo $|x| = |y|$, mentre dalla seconda $|y| = |z|$: quindi $|x| = |y| = |z|$, ovvero $x \; E \; z$.

Consideriamo la relazione di equivalenza E su $\mathbb{R}$ definita da

$$x \; E \; y \text{ se e solo se } |x| = |y|.$$

- Come sono fatte le classi di equivalenza di E?
  Sono del tipo $[r]_E = \{r, -r\}$ per $r \in \mathbb{R}$.
- Quanti elementi ha ciascuna di tali classi?
  Due elementi distinti se $r \neq 0$, uno solo se $r = 0$.
- Quante classi di equivalenza distinte otteniamo?
  Infinite, una per ogni $r \geq 0$.
- Com'è fatto l'insieme quoziente $\mathbb{R}/E$?
  $\mathbb{R}/E = \{\{r, -r\} \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Esercizi su relazioni d'equivalenza (2)

Consideriamo la relazione E su $\mathbb{N}$ definita da

$n \; E \; m$ se e solo se n ed m hanno lo stesso numero di cifre
(in notazione decimale).

Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza.

Siano n, m, l elementi arbitrari di $\mathbb{N}$.

Riflessività Ovvio, $n \; E \; n$ poiché ciascun numero si scrive con lo stesso numero di cifre di se stesso.

Simmetria Ovvio, se $n \; E \; m$ vuol dire che n ha lo stesso numero di cifre di m: quindi anche $m \; E \; n$, ovvero m ha lo stesso numero di cifre di n.

Transitività Se $n \; E \; m$ e, in particolare, n e m hanno entrambi k cifre, e inoltre $m \; E \; l$, ovvero m e l hanno hanno lo stesso numero di cifre, allora anche l ha k cifre, per cui $n \; E \; l$.

Consideriamo la relazione di equivalenza E su $\mathbb{N}$ definita da

$$n \; E \; m \text{ se e solo se } n \text{ ed } m \text{ hanno lo stesso numero di cifre (in notazione decimale).}$$

- Come sono fatte le classi di equivalenza di E?
  Sono del tipo $C_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ha esattamente } k \text{ cifre}\}$ per $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Più precisamente, $C_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $C_k = \{n \in \mathbb{N} \mid 10^{k-1} \leq n < 10^k\}$ se $k \geq 2$.
- Quanti elementi ha ciascuna di tali classi?
  C_k ha 10 elementi se $k = 1$, e ne ha $9 \cdot 10^{k-1}$ se $k > 1$.
- Quante classi di equivalenza distinte otteniamo?
  Infinite, una per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- Com'è fatto l'insieme quoziente $\mathbb{N}/E$?
  $\mathbb{N}/E = \{C_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Esercizi su relazioni d'equivalenza (3)

Sia
$$\mathrm{Fin} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ è finito}\}.$$
Consideriamo la relazione $\approx$ su Fin definita da

$$X \approx Y \text{ se e solo se } X \text{ e } Y \text{ hanno lo stesso numero di elementi.}$$

Dimostrare che $\approx$ è una relazione d'equivalenza.

Siano X, Y, Z arbitrari elementi di Fin.

Riflessività Ovvio, ogni X ha lo stesso numero di elementi di se stesso.

Simmetria Ovvio, se $X \approx Y$ allora X e Y hanno lo stesso numero di elementi, quindi anche $Y \approx X$.

Transitività Se X e Y hanno entrambi k elementi, e inoltre Y e Z hanno lo stesso numero di elementi, allora anche Z ha k elementi, da cui $X \approx Z$.

Sia $\mathrm{Fin} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ è finito}\}$. Consideriamo la relazione di equivalenza $\approx$ su Fin definita da

$$X \approx Y \text{ se e solo se } X \text{ e } Y \text{ hanno lo stesso numero di elementi.}$$

- Come sono fatte le classi di equivalenza di $\approx$?
  Sono del tipo $I_k = \{X \in \mathrm{Fin} \mid X \text{ ha } k \text{ elementi}\}$ per $k \in \mathbb{N}$. In particolare, $I_0 = \{\emptyset\}$, $I_1 = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $I_2 = \{\{n, m\} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$ e così via.
- Quanti elementi ha ciascuna di tali classi?
  I_0 ha un solo elemento, mentre tutte le altre classi I_k con $k \geq 1$ ne hanno infiniti.
- Quante classi di equivalenza distinte otteniamo?
  Infinite, una per ogni $k \in \mathbb{N}$.
- Com'è fatto l'insieme quoziente $\mathrm{Fin}/\approx$?
  $\mathrm{Fin}/{\approx} = \{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Ordini

Definizione

Una **relazione d'ordine su** A (o, più semplicemente, un **ordine** o un **ordinamento** su A) è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva su A.

L'esempio canonico di ordinamento è la relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$, cioè l'insieme

$$\left\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\right\}.$$

Analogamente $\leq$ è un ordinamento sugli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Per indicare relazioni d'ordine spesso useremo, oltre a $\leq$, simboli che in qualche misura gli somigliano, come

$$\preceq \qquad \trianglelefteq \qquad \precsim \qquad \sqsubseteq \qquad \dots$$

Quando vorremo esplicitare l'insieme A su cui è definito l'ordine $\preceq$ scriveremo $\langle A, \preceq\rangle$. Questa notazione è comoda per distinguere, ad esempio, l'ordine sui numeri naturali $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ dall'ordine sui numeri interi $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$.

Esempio

Sia A un insieme qualunque. La relazione di inclusione $\subseteq$ è un ordine sull'insieme $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Infatti

Riflessività Segue dal fatto che $B \subseteq B$ per ogni insieme B.

Antisimmetria Segue dal principio di doppia inclusione:

se $B \subseteq C$ e $C \subseteq B$ allora $B = C$.

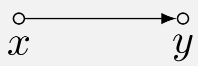
Transitività Supponiamo che $B \subseteq C \subseteq D$. Allora dato un qualunque $x \in B$ si deve avere anche $x \in C$ poiché $B \subseteq C$, quindi anche $x \in D$ poiché $C \subseteq D$. Dunque ogni elemento di B è anche un elemento di D, ovvero $B \subseteq D$.

Come disegnare (alcuni tipi di) ordini

Dato un ordine $\leq$ su A diciamo che y è un **successore immediato di** x se

$$x \leq y \wedge x \neq y \wedge \forall z (x \leq z \wedge z \leq y \to z = x \vee z = y).$$

e lo disegniamo così

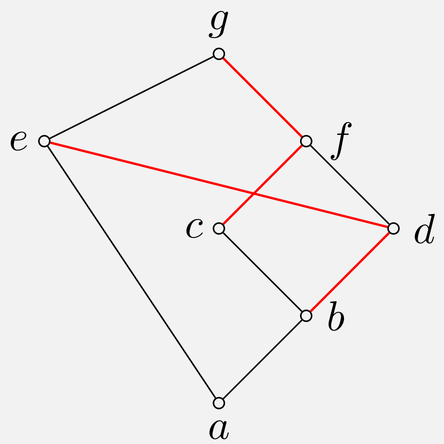


L'ordine lineare con tre elementi è descritto da

o dal **diagramma di Hasse**

Diagramma di Hasse

Quando ad esempio diciamo che il diagramma di Hasse dell'ordine $\langle A, \preceq \rangle$ è

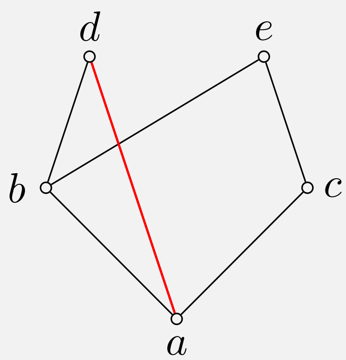


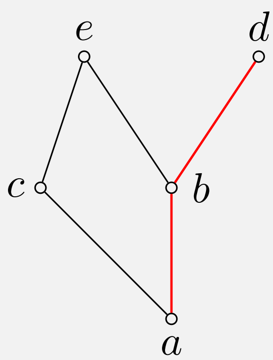
intendiamo che $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e, ad esempio, $c \preceq g$ e $b \preceq e$, ma $c \not\preceq e$ e $d \not\preceq c$, e così via.

Diagramma di Hasse

Attenzione: il diagramma di Hasse di un ordine *non* è unico!

Ad esempio, i seguenti diagrammi rappresentano lo stesso ordine:





Infatti, data una coppia di elementi qualunque si ha che essi sono in relazione rispetto al diagramma di sinistra se e solo se lo sono rispetto al diagramma di destra. Esempio: $a \preceq d$.

Ordini lineari

L'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ è un ordine lineare, dove

Definizione

Un ordine R su un insieme A è **lineare** o **totale** se $a\ R\ b$ o $b\ R\ a$ per ogni scelta di $a, b \in A$.

Abbiamo visto che per qualunque insieme A l'inclusione $\subseteq$ è un ordinamento su $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Tuttavia, se ad esempio $A = \{a, b\}$ quest'ordine non è lineare poiché $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ e $\{b\} \nsubseteq \{a\}$.

Esercizio 1

Disegnare il diagramma di Hasse degli ordini $\langle \mathcal{P}(\{0\}), \subseteq \rangle$, $\langle \mathcal{P}(\{0, 1\}), \subseteq \rangle$ e $\langle \mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \subseteq \rangle$. In quali casi si ha un ordine lineare?

Definizione

Sia $\preceq$ un ordinamento su A. Un elemento $a \in A$ si dice

- **massimo** (rispetto a $\preceq$) se $b \preceq a$ per ogni $b \in A$;
- **minimo** (rispetto a $\preceq$) se $a \preceq b$ per ogni $b \in A$.

- L'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{N}$ ha minimo (il numero 0), ma non ha massimo.
- L'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{Z}$ non ha né minimo, né massimo.
- L'ordinamento $\leq$ sull'intervallo $(0; 1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ ha massimo (il numero 1) ma non ha minimo.
- L'ordinamento $\subseteq$ su $\mathcal{P}(A)$ ha minimo (l'insieme $\emptyset$) e massimo (l'insieme A), poiché $\emptyset \subseteq B \subseteq A$ per ogni $B \subseteq A$.

Esempio: la relazione di divisibilità fra numeri naturali

Definiamo $\preceq$ su $\mathbb{N}$ come

$$n \preceq m \text{ se e solo se } m = n \cdot k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $\preceq$ è un ordine non totale su $\mathbb{N}$ che ha minimo e massimo.

Siano $n, m, l \in \mathbb{N}$ arbitrari.

Riflessività $n \preceq n$ poiché $n = n \cdot 1$.

Antisimmetria Supponiamo che $n \preceq m$ e $m \preceq n$. Allora esiste $i \in \mathbb{N}$ tale che $m = n \cdot i$ ed esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $n = m \cdot j$. Quindi $m = m \cdot j \cdot i$, da cui, dividendo per m, si ottiene $j \cdot i = 1$. Perciò $j = i = 1$, da cui $m = n \cdot 1 = n$.

Transitività Supponiamo che $n \preceq m$ e $m \preceq l$. Siano $i, j \in \mathbb{N}$ tali che $l = m \cdot i$ e $m = n \cdot j$. Allora $l = n \cdot j \cdot i$, ovvero $n \preceq l$ (basta porre $k = j \cdot i$ nella definizione).

Non totale Ad esempio, $2 \not\preceq 3$ e $3 \not\preceq 2$.

Minimo È il numero 1: si ha sempre $1 \preceq n$ poiché $n = 1 \cdot n$.

Massimo È il numero 0: si ha sempre $n \preceq 0$ perché $0 = n \cdot 0$.

La relazione di **divisibilità** spesso si denota con il simbolo $|$:

$$n \mid m \text{ se e solo se } n \text{ divide } m,$$

ovvero $m = n \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Dato $m \in \mathbb{N}$, l'insieme dei **divisori di** m è

$$\mathrm{Div}(m) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } m\}.$$

Si osservi che $\mathrm{Div}(m) \neq \emptyset$ poiché, ad esempio, 1 ed m vi appartengono. Se $m \neq 0$ l'insieme $\mathrm{Div}(m)$ è un insieme finito e contiene solo numeri compresi tra 1 ed m. Invece $\mathrm{Div}(0) = \mathbb{N}$.

Esercizio 2

Calcolare il diagrama di Hasse dei seguenti ordini: $\langle \mathrm{Div}(6), | \rangle$, $\langle \mathrm{Div}(8), | \rangle$, $\langle \mathrm{Div}(9), | \rangle$, $\langle \mathrm{Div}(12), | \rangle$ e $\langle \mathrm{Div}(30), | \rangle$. Quali di questi sono ordini lineari?

Esercizio su ordini

Definiamo $\trianglelefteq$ su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ponendo

$$n \trianglelefteq m \text{ se e solo se } m = n^k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $\trianglelefteq$ è un ordine non lineare che ha massimo ma non ha minimo.

Siano $n, m, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ arbitrari.

Riflessività $n \trianglelefteq n$ poiché $n = n^1$.

Antisimmetria Supponiamo che $n \trianglelefteq m$ e $m \trianglelefteq n$. Allora esistono $i, j \in \mathbb{N}$ tali che $m = n^i$ e $n = m^j$. Quindi $m = (m^j)^i = m^{j \cdot i}$, da cui o $m = 1$ oppure $j \cdot i = 1$. Nel primo caso, $n = m^j = 1^j = 1$, da cui $m = n$. Nel secondo caso $j = i = 1$, da cui $m = n^1 = n$.

Transitività Supponiamo che $n \trianglelefteq m$ e $m \trianglelefteq l$. Siano $i, j \in \mathbb{N}$ tali che $l = m^i$ e $m = n^j$. Allora $l = (n^j)^i = n^{j \cdot i}$, ovvero $n \trianglelefteq l$.

Non lineare Ad esempio, $\neg(2 \trianglelefteq 3)$ e $\neg(3 \trianglelefteq 2)$.

Minimo Non esiste, perché non esiste alcun n tale che $n \trianglelefteq 2$ e $n \trianglelefteq 3$.

Massimo È il numero 1: si ha sempre $n^0 = 1$, perciò $n \trianglelefteq 1$.

Ordini stretti

Una relazione R su A si dice **irriflessiva** se $\neg(a \mathrel{R} a)$ *per ogni* $a \in A$.

Definizione

Un **ordine stretto** è una relazione irriflessiva e transitiva.

Esempi: La relazione $<$ su $\mathbb{N}$ o su $\mathbb{R}$. L'inclusione stretta $\subsetneq$ (indicata anche con $\subset$) su $\mathcal{P}(A)$.

Per indicare gli ordini stretti spesso si usano i simboli per gli ordini senza la parte che richiama l'uguaglianza, ad esempio

$$< \qquad \prec \qquad \lhd \qquad \sqsubset \qquad \ldots$$

Scriveremo ad esempio $\langle A, \prec \rangle$ per indicare che $\prec$ è definito su A.

Vedremo a breve che un *ordine stretto* è esattamente la parte stretta di un *ordine*.

Esempio: discendenti e antenati

Sia A l'insieme di tutti gli esseri umani. Definiamo la relazione $\lhd$ su A ponendo

$$a \lhd b \quad \text{se e solo se} \quad a \text{ è un/una discendente di } b.$$

(Equivalentemente, $a \lhd b$ se e solo se b è un/una antenato/a di a.)

La relazione $\lhd$ è chiaramente irriflessiva, perché nessuno è discendente di se stesso.

Inoltre, se a è un discendente di b e b è un discendente di c, allora anche a è un discendente di c: quindi $\lhd$ è transitiva.

Questo mostra che $\lhd$ è un ordine stretto.

Relazione tra ordini stretti e ordini

Dato un qualunque ordine $\preceq$ su un insieme A, possiamo considerare la sua **parte stretta** $\prec$ definita da

$$a \prec b \quad \text{se e solo se} \quad a \preceq b \wedge a \neq b.$$

Si verifica facilmente che $\prec$ è ancora una relazione transitiva.

> (Supponiamo $a \prec b \prec c$. Allora $a \preceq c$ per la transitività di $\preceq$. Se per assurdo $a = c$, allora si avrebbe $a \preceq b$ e $b \preceq c = a$, quindi $a = b$ per l'antisimmetria di $\preceq$, assurdo. Segue che $a \neq c$, e quindi $a \prec c$.)

Inoltre $\prec$ è irriflessiva: per definizione non c'è *nessun* elemento $a \in A$ per cui valga $a \prec a$.

Questo mostra che, in accordo con la terminologia usata, la parte stretta di un ordine è sempre un ordine stretto.

Relazione tra ordini stretti e ordini

Viceversa, dato un ordine stretto $\prec$ su A possiamo canonicamente costruire la relazione binaria $\preceq$ su A definita da

$$a \preceq b \text{ se e solo se } (a \prec b \vee a = b).$$

Si verifica facilmente che $\preceq$ è un ordine:

Riflessività Immediato dalla definizione: $a \preceq a$ poiché ovviamente $a = a$.

Antisimmetria Supponiamo per assurdo che ci siano $a \neq b$ tali che $a \preceq b$ e $b \preceq a$. Allora per definizione di $\preceq$ si deve avere $a \prec b$ e $b \prec a$ (poiché abbiamo assunto $a \neq b$). Usando la transitività di $\prec$ concludiamo che $a \prec a$, in contraddizione con l'irriflessività di $\prec$.

Transitività Supponiamo che $a \preceq b$ e $b \preceq c$. Se $a = b$ oppure $b = c$ allora banalmente $a \preceq c$. Possiamo quindi assumere che a, b e c siano distinti. Per definizione di $\preceq$ si ha allora $a \prec b$ e $b \prec c$, da cui $a \prec c$ per transitività di $\prec$. Segue che $a \preceq c$.

Dunque ogni ordine stretto è necessariamente la parte stretta di un ordine.

Pre-ordini o quasi ordini

Definizione

Un **pre-ordine** o **quasi ordine** su A è una relazione binaria $\precsim$ su A che è riflessiva e transitiva. In questo caso diremo che $\langle A, \precsim \rangle$ è un insieme pre-ordinato o quasi ordinato.

Esempio

La *classifica del campionato di serie A* è un pre-ordine $\precsim$ (lineare) sull'insieme delle squadre X: se la squadra S ha n punti e la squadra T ha m punti, diciamo che $S \precsim T$ ("S precede T nella classifica") se e solo se $n \geq m$. Si verifica allora che la relazione $\precsim$ è:

- **riflessiva:** $S \precsim S$ per ogni $S \in X$;
- **transitiva:** per ogni $S, T, U \in X$, se $S \precsim T$ e $T \precsim U$ allora $S \precsim U$;
- **ma non è antisimmetrica:** può accadere che $S \precsim T$ e $T \precsim S$ per due squadre distinte $S, T \in X$ (S e T sono a parimerito).

Dunque si tratta di un pre-ordine e non di un ordine.

Proposizione

Se $\precsim$ è un pre-ordine su A, allora

$$a \sim b \Leftrightarrow a \precsim b \wedge b \precsim a$$

è una relazione di equivalenza su A (detta **relazione di equivalenza indotta da** $\precsim$*) e la relazione su $A/{\sim}$*

$$[a]_\sim \leq [b]_\sim \Leftrightarrow a \precsim b$$

è ben definita ed è un ordine (detto **ordine indotto da** $\precsim$*).*

Ad esempio, nella classifica del campionato di serie A (vista come pre-ordine $\precsim$), le classi di equivalenza rispetto alla relazione $\sim$ indotta da $\precsim$ sono gli insiemi di squadre a parimerito (cioè con lo stesso numero di punti). L'ordine $\leq$ indotto su tali classi di equivalenza è quella che ordina questi gruppi di squadre in base al punteggio ottenuto: l'insieme delle squadre che hanno 20 punti formano una classe di equivalenza che precede la classe di equivalenza delle squadre che hanno 19 punti, e così via.

La relazione $\sim$ definita da $a \sim b \Leftrightarrow a \precsim b \wedge b \precsim a$ è una relazione d'equivalenza.

Dimostrazione.

È evidentemente riflessiva, dato che lo è $\precsim$.

Se $a \sim b$ allora $a \precsim b \wedge b \precsim a$ e quindi $b \precsim a \wedge a \precsim b$, cioè $b \sim a$; quindi $\sim$ è simmetrica.

Se $a \sim b$ e $b \sim c$, allora $a \precsim b \wedge b \precsim a$ e $b \precsim c \wedge c \precsim b$, da cui per transitività di $\precsim$ si ha $a \precsim c \wedge c \precsim a$, cioè $a \sim c$. $\square$

La relazione su $A/\sim$
$$[a]_\sim \leq [b]_\sim \Leftrightarrow a \precsim b$$
è ben definita ed è un ordine.

Dimostrazione.

Supponiamo che $a \precsim b$ e $a' \sim a$ e $b' \sim b$: allora $a' \precsim a$ e $b \precsim b'$ quindi $a' \precsim b'$ per la transitività di $\precsim$. Ne segue che la definizione di $\leq$ su $A/\sim$ è ben posta, dato che non dipende dal rappresentante.

È immediato verificare che $\leq$ è riflessiva e transitiva, quindi è sufficiente verificare che è antisimmetrica. Se $[a]_\sim \leq [b]_\sim$ e $[b]_\sim \leq [a]_\sim$, allora $a \precsim b \wedge b \precsim a$, da cui $a \sim b$ per definizione, e quindi $[a]_\sim = [b]_\sim$. $\square$

Esempio di pre-ordine (1)

La relazione di conseguenza logica $\models$ sull'insieme di tutte le proposizioni è un pre-ordine (ma non un ordine).

Riflessività: Chiaramente $\mathrm{P} \models \mathrm{P}$ per ogni proposizione P, quindi $\models$ è riflessiva.

Transività: Assumiamo che $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e $\mathrm{Q} \models \mathrm{R}$ e dimostriamo che $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$. Costruiamo la tavola di verità di $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ su tutte le variabili proposizionali che compaiono in P o in Q o in R. Si ha che in ogni riga in cui P è vera anche Q risulta vera (poiché $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$), e che in ogni riga in cui Q è vera anche R risulta vera (poiché $\mathrm{Q} \models \mathrm{R}$). Quindi in ogni riga in cui P è vera risulterà vera anche R, cioè $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$.

Tuttavia, la relazione $\models$ non è un ordine. Infatti, $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \models \neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ e $\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \models \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ma le due proposizioni sono distinte: quindi $\models$ non è antisimmetrica. Le relazione d'equivalenza associata a $\models$ è proprio la relazione di equivalenza logica $\equiv$.

Esempio di pre-ordine (2)

Consideriamo la relazione $\preceq$ su $\mathbb{N}$ definita da

$$n \preceq m \quad \text{se e solo se} \quad m \text{ ha un numero di cifre maggiore o uguale a quelle di } n \text{ (in notazione decimale).}$$

Allora $\preceq$ è una relazione riflessiva e transitiva, ma non è antisimmetrica poiché, ad esempio, $10 \preceq 25$ e $25 \preceq 10$ (ma $10 \neq 25$). Quindi $\preceq$ è un esempio di un pre-ordine che non è un ordine.

La relazione di equivalenza associata a $\preceq$ è la relazione E ("avere lo stesso numero di cifre") della slide 48. L'ordine indotto sul quoziente $\mathbb{N}/E$ rispetto a tale relazione d'equivalenza è un ordine lineare: C_k precede $C_{k'}$ in tale ordine se e solo se $k \leq k'$, dove le C_k sono le classi di equivalenza rispetto ad E definite nella slide 49.

Esempio di pre-ordine (3)

Consideriamo la relazione $\precsim$ su $\mathrm{Fin} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ è finito}\}$ definita da

$$X \precsim Y \text{ se e solo se il numero di elementi di } X \text{ è minore o uguale al numero di elementi di } Y.$$

La relazione $\precsim$ è chiaramente riflessiva e transitiva, ma non è antisimmetrica poiché, ad esempio, $\{1,2\} \precsim \{5,14\}$ e $\{5,14\} \precsim \{1,2\}$, ma chiaramente $\{1,2\} \neq \{5,14\}$. Quindi $\precsim$ è un altro esempio di un pre-ordine che non è un ordine.

La relazione di equivalenza associata a $\precsim$ è la relazione $\approx$ ("avere lo stesso numero di elementi") della slide 50. Anche in questo caso, l'ordine indotto sul quoziente $\mathrm{Fin}/{\approx}$ rispetto a tale relazione d'equivalenza è un ordine lineare: I_k precede $I_{k'}$ in tale ordine se e solo se $k \leq k'$, dove le I_k sono le classi di equivalenza rispetto a $\approx$ definite nella slide 51.

Esempio di pre-ordine (4)

Sia $\subseteq^*$ la relazione su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definita per ogni $A, B \subseteq \mathbb{N}$ da

$$A \subseteq^* B \quad \text{se e solo se} \quad A \setminus B \text{ è finito.}$$

In altre parole, $A \subseteq^* B$ se e solo se ogni $n \in A$ appartiene anche a B *tranne che per un numero finito di tali* n.

Dimostrare che $\subseteq^*$ è un pre-ordine su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Riflessività: $A \subseteq^* A$ poiché $A \setminus A = \emptyset$ è finito.

Transitività: Siano $A \subseteq^* B \subseteq^* C$. Si ha

$$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C).$$

Infatti, sia $n \in A \setminus C$, ovvero $n \in A$ ma $n \notin C$. Distinguiamo due casi. Se $n \notin B$, allora $n \in A \setminus B$ e quindi $n \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Se invece $n \in B$, allora $n \in B \setminus C$ e quindi nuovamente $n \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Poiché $A \setminus B$ e $B \setminus C$ sono finiti, anche $A \setminus C$ lo è, ovvero $A \subseteq^* C$.

Per definizione, la relazione di equivalenza $=^*$ indotta da $\subseteq^*$ è data da

$$A =^* B \quad \text{se e solo se} \quad A \subseteq^* B \text{ e } B \subseteq^* A.$$

È facile vedere che $A =^* B$ se e solo se $A \triangle B$ è finito e che ogni classe di equivalenza rispetto alla relazione $=^*$ è infinita.

Poiché $A \triangle B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, si ha che $A \triangle B$ è finito se e solo se entrambi gli insiemi $A \setminus B$ e $B \setminus A$ sono finiti, ovvero se e solo se $A \subseteq^* B$ e $B \subseteq^* A$.

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Se A è finito, allora per ogni insieme finito $B \subseteq \mathbb{N}$ si ha che $A \triangle B$ è finito poiché $A \triangle B \subseteq A \cup B$, per cui $A =^* B$. Poiché la collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ finiti contiene infiniti elementi (ad esempio, contiene tutti gli $\{n\}$ per $n \in \mathbb{N}$), si ha che $[A]_{=^*}$ è infinita. Se invece $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ è infinito, allora posto $A_n = A \setminus \{a_n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che gli A_n sono a due a due distinti e tali che $A_n =^* A$ (infatti $A \triangle A_n = \{a_n\}$). Quindi anche in questo caso $[A]_{=^*}$ è infinita.