ESERCIZI DI ALGEBRA E GEOMETRIA

1. Considerare i seguenti vettori, organizzati per comodità in colonne di una matrice $\boldsymbol{A}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} & \boldsymbol{v_4} \end{array} \\ \boldsymbol{A} = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Effettuare su $\boldsymbol{A}$ la riduzione di Gauss-Jordan, e generare la relativa matrice di trasformazione.

(b) Determinare una base di $V = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_4}\})$.

uso gauss

(c) Determinarne una base contenente $\boldsymbol{v_4}$, se possibile.

(d) Dati i vettori $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w'} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, determinare se $\boldsymbol{w} \in V$, $\boldsymbol{w'} \in V$.

(e) Dare un'interpretazione geometrica di V in $\mathbb{R}^3$.

(f) Dato un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$, si definisce il suo *spazio ortogonale* $V^\perp$ come

è sotto?

$$V^\perp = \{\boldsymbol{w} | \boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in V\}.$$

vedo una retta

$V^\perp$ contiene tutti i vettori che sono ortogonali ad ogni vettore di V. Per V definito al punto (b), dare una descrizione dello spazio $V^\perp$, e una sua interpretazione geometrica.

calc?

$v_1 \cdot w = 0 = v_2 \cdot w$

(g) Il teorema delle alternative di Gordan stabilisce che data $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e un $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ risulta

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \neq \emptyset \iff \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \neq 0\} = \emptyset.$$

Verificare il teorema per il punto (d); la situazione suggerisce un'idea di dimostrazione.

Osservazione. Se V è lo spazio delle colonne di $\boldsymbol{A}$, la condizione $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ vuol dire $\boldsymbol{u} \in V^\perp$. Il teorema di Gordan stabilisce quindi che il sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è insolubile se e solo se il vettore $\boldsymbol{b}$ ha una proiezione ortogonale non nulla sullo spazio ortogonale alle colonne di $\boldsymbol{A}$ (graficamente, cosa vuol dire nell'esempio in esame?).

rivedo

2. Dati due sottospazi V_1, V_2 di $\mathbb{R}^n$ dire se gli insiemi $V_1 \cap V_2$ e $V_1 \cup V_2$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

3. Si consideri la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare il rango di $\mathbf{A}$.

(2) Determinare una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ che contenga la terza colonna.

(3) Determinare se il vettore

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

fa parte dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$.

4. Invertire le seguenti matrici.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

5. Data la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare:

(i) il rango di $\boldsymbol{A}$;

(ii) una base dello spazio delle colonne di $\boldsymbol{A}$ che contenga la colonna $\boldsymbol{A}_4$;

(iii) l'appartenenza o meno di $\boldsymbol{v} = (6, 5, 4)^T$ allo spazio delle colonne di $\boldsymbol{A}$.

parte da pivot

4