Sappiamo dalla scorsa lezione che ci sono esempi di serie convergenti. È possibile stabilire "a priori" (ovvero, senza calcolarne la somma) se una serie converge?

Prop

Iniziamo con la seguente

Proposizione (condizione necessaria per la convergenza)

Sia data la successione $\{a_n\}$.

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

dim Si ha, per ipotesi,

$$\lim_{n\to+\infty} S_N = S \in \mathbb{R} \qquad \text{dove} \quad S_N = a_0 + \dots + a_N$$

Dunque $\lim_{n\to+\infty} (S_{N+1} - S_N) = S - S = 0$

D'altra parte, per ogni $N \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_{N+1} - S_N &= (a_0 + \dots + a_{N+1}) - (a_0 + \dots + a_N) \\ &= a_{N+1} \end{aligned}$$

da cui $\lim_{N\to+\infty} a_{N+1} = 0$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. $\square$

contrario

In generale, invece,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente}$$

(cioè: $\lim_{n\to+\infty} a_n$ è condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$)

Per esibire un controesempio, consideriamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{serie armonica}$$

Si ha

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Per induzione si può provare che

$$s_{2^k} > 1 + \frac{k}{2} \qquad \forall k \geq 1$$

Dunque la successione $\{s_N\}$ è

- monotona crescente (poiché $a_n > 0$ $\forall n$)
- superiormente illimitata

• superiormente illimitata

Pertanto
$$\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$$
cioè
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

La serie armonica è dunque divergente, nonostante si abbia $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Nel caso di serie a termini positivi (cioè $a_n \geq 0 \ \forall n$) vedremo infatti che a determinare la convergenza/divergenza di una serie è la velocità con cui a_n tende a 0

Intuitivamente:

$a_n \to 0$ "velocemente" $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge $\quad (a_n = \frac{1}{2^n})$

$a_n \to 0$ "lentamente" $\Rightarrow \sum_n a_n$ diverge $\quad (a_n = \frac{1}{n})$

Esempio importante

Consideriamo
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{con } \alpha > 0$$
serie armonica generalizzata

Dimostreremo nell'ultima lezione del corso (L24), usando il calcolo integrale, che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ è } \begin{cases} \text{divergente} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{convergente} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}}$$

(si rifletta: al crescere di α, n^α tende a $+\infty$ sempre più velocemente e quindi $1/n^\alpha$

(si ragiona: al crescere di α, n^α tende a $+\infty$
sempre più velocemente e quindi $1/n^\alpha$
tende a 0 sempre più velocemente)

Per discutere la convergenza/divergenza di altre serie, si tenta di ricondursi a questi casi noti mediante i **criteri di convergenza** (per serie a termini positivi)

1) **Criterio del confronto**

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0\ \forall n$ (o almeno definitiv.)

Supponiamo inoltre che $\boxed{a_n \leq b_n}\ \forall n$ (o almeno definitivamente)

Allora

- $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ divergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ divergente

Osservazione: usando questo criterio possiamo dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è divergente per $\alpha \in (0,1]$; infatti

$$n^\alpha \leq n \qquad \forall n \geq 1 \qquad \text{se } \alpha \in (0,1]$$

e quindi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}\quad \forall n.$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

2) **Criterio del confronto asintotico**

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0\ \forall n$ (o almeno definitiv.)

Supponiamo inoltre che $\boxed{a_n \sim b_n}$ per $n \to +\infty$

Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ convergente}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergente

(e quindi: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ divergente $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ divergente)

Vediamo qualche esempio di utilizzo

- $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$ è divergente

  Infatti $\log n < n \quad \forall\, n \geq 2$ (si guardino i grafici di $\log x$ e x)

  da cui $\frac{1}{n} < \frac{1}{\log n}$

  Poiché $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$, concludiamo con criterio del confronto

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + \sqrt{n}}$ è convergente

  Infatti: $3^n + \sqrt{n} \sim 3^n$ per $n \to +\infty$

  e poiché $\sum_n \frac{1}{3^n}$ è convergente concludiamo con criterio del confronto asintotico

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + n^2 + 1}{4n^4 + 6}$ è divergente

  Infatti: $\frac{n^3+n^2+1}{4n^4+6} \sim \frac{n^3}{4n^4} = \frac{1}{4n}$ per $n \to +\infty$

  e poiché $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ concludiamo con criterio del confronto asintotico

es