Lezione 13

Successioni numeriche

Def Una successione (numerica) è una funzione

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

(o più in generale $a : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$)

Si utilizza solitamente la notazione $a_n = a(n)$

e si denota con $\{a_n\}$ (o anche $\{a_n\}_n$)

la successione

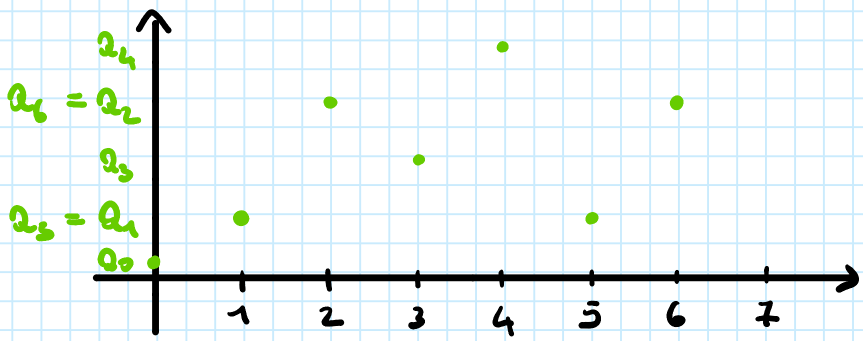


Grafico di una successione

Oss Rispetto alle f.ni reali di variabile reale, la variabile indipendente (n) varia solo in un insieme discreto. Possibili "applicazioni" sono le seguenti:

- riproduzione cellulare

  n generazione $\to$ a_n = numero di cellule alla n-esima generazione

  (in contrasto con $N(t)$ = # individui al tempo $t \in \mathbb{R}$)

- complessità di un algoritmo

  n dimensione "array" $\to$ a_n = numero di operazioni per eseguire l'algoritmo in dimensione array → x_n = numero di operazioni per eseguire l'algoritmo (es: ordinare l'array)

2	7	4	6

$n = 4$

Osserviamo inoltre che, nelle prime lezioni del corso, è già apparsa una successione: si tratta di:

$$a_n = S_n(f; z_1, \dots, z_n) \qquad \text{somma di Riemann}$$

n → # di suddivisioni dell'intervallo $[a,b]$

Tipicamente, ci sono 2 modi per assegnare una successione:

1) mediante una formula esplicita

es $\quad a_n = \dfrac{1}{n+1} \qquad a_n = (-1)^n \qquad a_n = n!$

2) mediante una relazione ricorsiva

es $\quad \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \end{cases}$

da cui $\quad a_0 = 3 \qquad a_1 = a_0^2 - a_0 = 3^2 - 3 = 6$

$a_2 = a_1^2 - a_1 = 6^2 - 6 = 30$

$a_3 = \dots$

car (avie) che evo à vere

Vediamo ora alcune definizioni:

- una successione $\{a_n\}$ si dice
  - monotona crescente se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- monotona crescente se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- monotona decrescente se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- una successione $\{a_n\}$ si dice
  - inferiormente limitata se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - superiormente limitata se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - limitata se $\exists m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- una successione $\{a_n\}$ si dice
  - convergente a $l \in \mathbb{R}$ se

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = l}$$

ovvero se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon > 0$ t.c. $n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

  - divergente a $+\infty$ $(-\infty)$ se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad (-\infty)$$

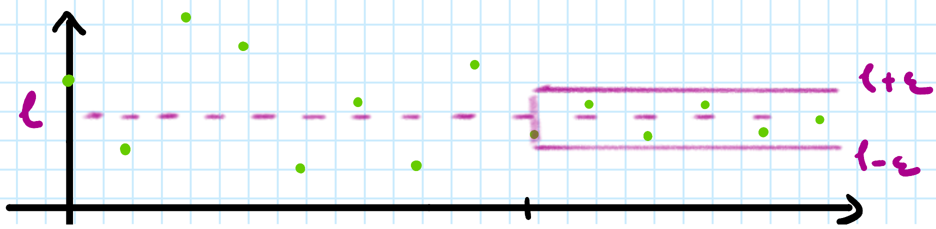
ovvero se $\forall M > 0 \ \exists N_\varepsilon > 0$ t.c. $n > N_\varepsilon \Rightarrow a_n > M$ $(a_n < -M)$

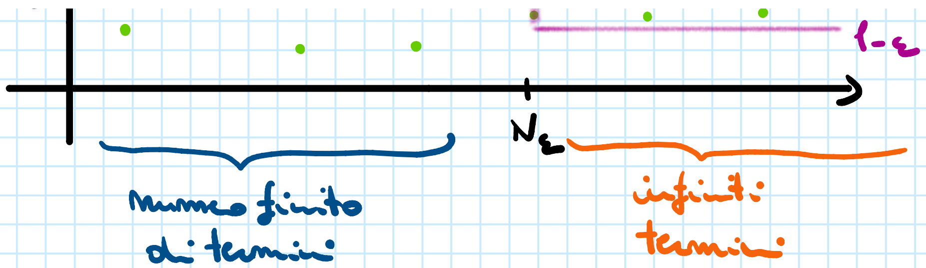
  - indeterminata se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ non esiste

Valgono allora i seguenti teoremi:

teorema 1

1) Se $\{a_n\}$ è convergente allora $\{a_n\}$ è limitata





Si noti che non vale il viceversa:

$a_n = (-1)^n$ è limitata $(-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n)$

ma $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ non esiste

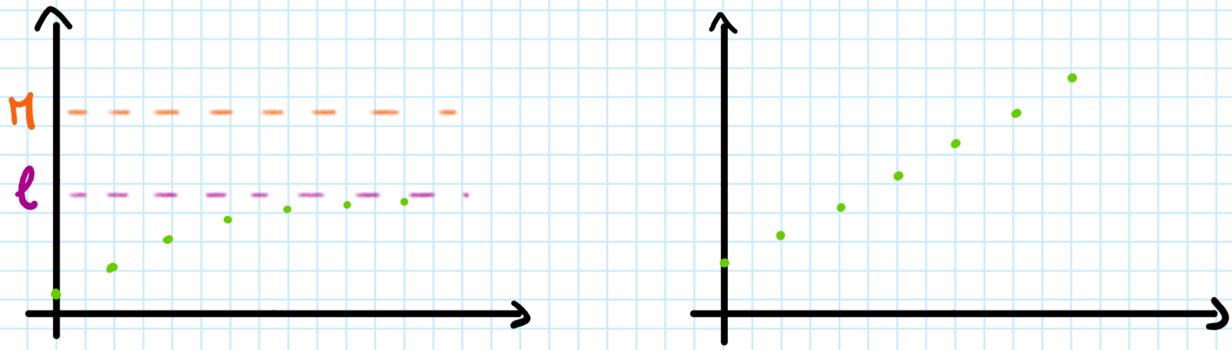
teorema 2

2) Se $\{a_n\}$ è monotona allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ esiste.

Precisamente:

- $\{a_n\}$ crescente e sup limitata $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente
  (decrescente) (inf) (convergente)

- $\{a_n\}$ crescente e sup illimitata $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ divergente a $+\infty$
  (decrescente) (inf) (divergente a $-\infty$)



es

Vediamo ora un esempio importante:

la successione geometrica

Def Una successione $\{a_n\}$ si dice geometrica se esiste $q \in \mathbb{R}$ tale che $\boxed{a_{n+1} = q \cdot a_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Il numero q si dice ragione della successione

$q \in \mathbb{R}$ tale che $\boxed{a_{n+1} = q \cdot a_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Il numero q si dice ragione della successione

$\square$ è una relazione ricorsiva

$a_0 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

$a_0 \neq 0 \Rightarrow a_1 = q \cdot a_0$

$$a_2 = q \cdot a_1 = q \cdot q \cdot a_0 = q^2 a_0$$

$$a_3 = q \cdot a_2 = q \cdot q^2 \cdot a_0 = q^3 a_0$$

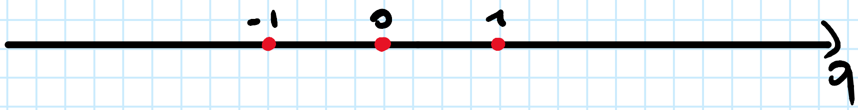
$$\vdots$$

$$a_n = q^n a_0 \qquad \text{(formula esplicita)}$$

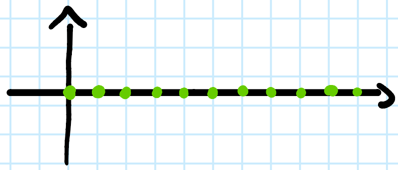
Fissiamo $a_0 = 1$ e studiamo

$$\boxed{a_n = q^n}$$

Ci saranno vari casi al variare di $q \in \mathbb{R}$

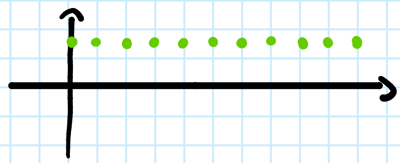


$\boxed{q=0}$ $\quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$



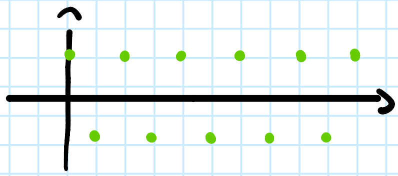
$\{a_n\}$ è
- limitata
- costante
- convergente a 0 $\quad \left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 \right)$

$\boxed{q=1}$ $\quad a_n = 1 \quad \forall n \geq 0$



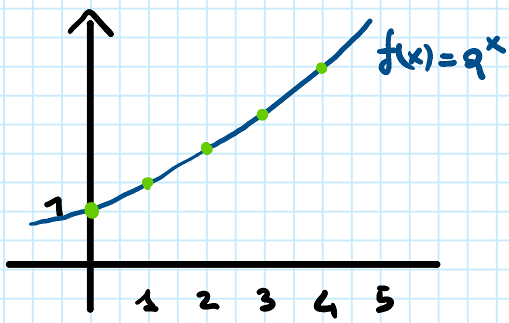
$\{a_n\}$ è
- limitata
- costante
- convergente a 1 $\quad \left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1 \right)$

$\boxed{q=-1}$ $\quad a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$



$\{a_n\}$ è: limitata; non monotona; indeterminata ($\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste)

$\boxed{q>1}$ $\quad a_n = q^n$ è la restrizione ai numeri naturali della funzione $f(x) = q^x$ (f.ne esponenziale)



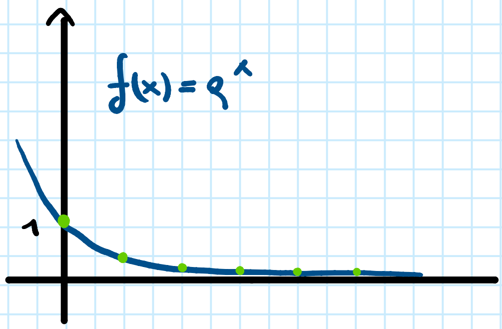
$\{a_n\}$ è: illimitata (superiormente); crescente; divergente a $+\infty$ $\left(\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\right)$

$\boxed{\text{es}}$ $\quad a_n = 2^n \Rightarrow a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8 \ldots$

$\boxed{0<q<1}$

$\boxed{\text{es}}$ $\quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{8}, \ldots$

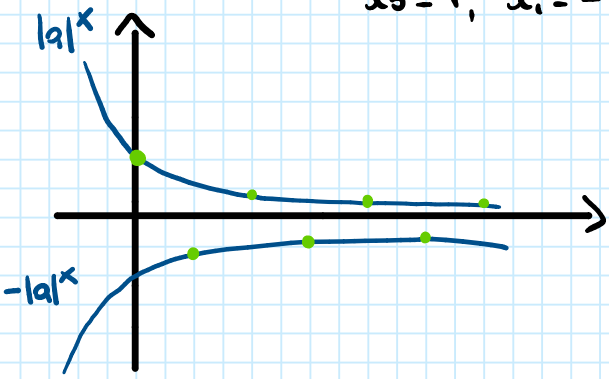
$\{a_n\}$ è sempre la restrizione della f.ne esponenziale $f(x) = q^x$ (si ricordi che, se $q \in (0,1)$, f è decrescente!)



$\{a_n\}$ è: limitata; decrescente; convergente a 0 $\left(\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\right)$

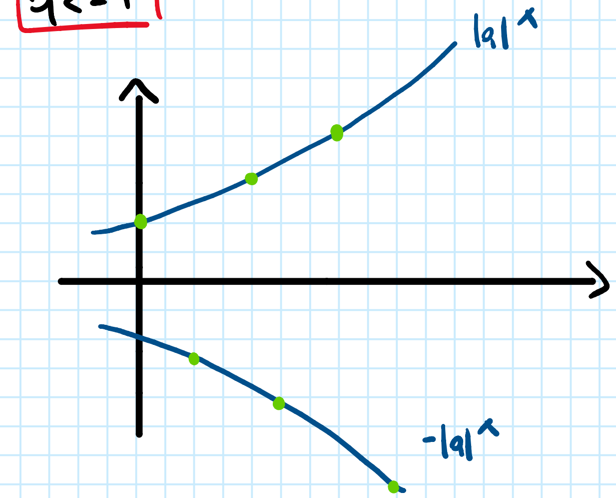
$\boxed{-1<q<0}$ es $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = -\frac{1}{8}, \dots$



$\{a_n\}$ è:
- limitata
- non monotona
- convergente a 0 $\left(\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\right)$

$\boxed{q<-1}$



es $a_n = (-2)^n$

$a_0 = 1$

$a_1 = -2$

$a_2 = 4$

$a_3 = -8$ ...

Quindi $\{a_n\}$ è:
- illimitata (sia inferiormente che superiormente)
- non monotona
- indeterminata $\left(\lim_{n\to+\infty} a_n \text{ non esiste}\right)$

Riassumendo:

q	limitatezza	monotonia	limite
$q > 1$	no	crescente	$+\infty$
$q = 1$	sí	costante	1
$0 < q < 1$	sí	decrescente	0
$-1 < q < 0$	sí	non monotona	0
$q = -1$	sí	non monotona	$\nexists$
$q < -1$	no	non monotona	$\nexists$