Esercizi Logica

30 September 2021 14:41

Esercizio 2

Calcolare le tavole di verità delle proposizioni seguenti:

- $\neg(A \leftrightarrow C) \vee A$
- $C \rightarrow (\neg A \vee \neg C)$
- $(A \vee \neg(B \rightarrow C)) \wedge (\neg C \vee B)$
- $A \wedge \neg(A \rightarrow \neg(\neg A \vee A))$
- $(A \wedge B) \wedge (A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)$

a.

A	C	$\neg(A \leftrightarrow C)$	P
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

b.

A	C	$\neg(A \wedge C)$	P
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

c.

A	B	C	$\neg(B \rightarrow C)$	$\neg C \vee B$	$\neg C$	$A \vee \neg(B \rightarrow C)$	$\ldots \wedge \neg C \vee B$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	V	V	F	F

d.

A	$\neg(A \rightarrow F)$	$A \wedge \ldots$
V	V	V
F	F	F

V

e.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	P
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	F

Come and

Indicare per ciascuna delle seguenti righe se vale la relazione di conseguenza logica indicata, motivando la risposta con la corrispondente tavola di verità:

1. $\neg A \lor \neg B \models \neg A \to \neg B$
2. $A \to B \models A \lor B$
3. $\neg B \to \neg A \models \neg A \lor B$
4. $\neg A \land \neg B \models \neg A \to \neg B$
5. $A \lor B \models A$
6. $A \lor B \models B$

(1)

$\neg A$	$\neg B$	P	Q
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

→ non vale

(2)

A	B	P	q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

→ non vale

(3)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\underbrace{\neg B \to \neg A}_{p}$	$\underbrace{\neg A \lor B}_{q}$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

vale

(4) V

$\neg A$	$\neg B$	$\underbrace{\neg A \land \neg B}_{p}$	$\underbrace{\neg A \to \neg B}_{q}$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	F
V	V	V	V

vale

(5) (6) V

$\underbrace{A}_{q}$	$\underbrace{B}_{q}$	$\underbrace{A \lor B}_{p}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

non vale

V F F | F V F | V F |

non vale (x2)

Es 3

Esercizio 3

Verificare utilizzando le tavole di verità la validità del **Modus Ponens**:

$$P, P \to Q \models Q.$$

Verificare utilizzando le tavole di verità la validità delle seguenti leggi logiche:

- $P \models Q \vee \neg Q$
- $P \wedge \neg P \models Q$
- $P, Q \models P \wedge Q$
- $P \wedge Q \models P$
- $P \wedge Q \models Q$
- $P \models P \vee Q$
- $Q \models P \vee Q$

0) $P \quad P \to q \models Q$

P_1 p	q q	P_2 $p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

vale

1) $A \models B \vee \neg B$

A	$B \vee \neg B$
V	V
F	V

→ valido

3) $A, B \models A \wedge B$

P_1 A	P_2 B	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

→ valido

2) $A \land \neg A \models B$

$A \land \neg A$	B
F	V
F	F

$\to$ valida

4-5) $p \land q \models q$

$\models p$

p (q2)	q (q1)	$p \land q$ (p)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

6-7) $A \models A \lor B$ $\quad$ $B \models A \lor B$

A	B	$A \lor B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Es 4

Indicare per ciascuna delle seguenti righe se vale la relazione di equivalenza logica indicata, motivando la risposta con la corrispondente tavola di verità:

1. $\neg A \land \neg B \equiv \neg A \to \neg B$
2. $A \to B \equiv \neg A \lor B$
3. $\neg B \to \neg A \equiv \neg A \lor B$
4. $\neg(A \to B) \equiv A \land \neg B$
5. $A \to B \equiv B \to A$
6. $(A \to B) \to C \equiv A \to (B \to C)$

1) $\neg A \land \neg B \equiv \neg A \to \neg B$

$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \land \neg B$	$\neg A \to \neg B$

$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \land \neg B$	$\neg A \to \neg B$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	F
V	V	V	V

→ non vale

2) $A \to B \cong \neg A \lor B$ pr: vale

$\neg A$	A	B	$A \to B$	$\neg A \lor B$
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V

→ vale

3) $\neg B \to \neg A \equiv \neg A \lor B$ pr: no

$\neg A$	$\neg B$	B	$\neg B \to \neg A$	$\neg A \lor B$
F	F	V	V	V
F	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	V	F	V	V

→ vale
(caso mettere neg ovunque)
↳ se inverto

4) $\neg(A \to B) \equiv A \land \neg B$

$\neg(A \to B) \equiv \neg\neg A \land \neg B$

$\cancel{\neg\neg}(A \to B) \equiv \cancel{\neg}(\neg A \lor B$

$A \to B \equiv \neg A \lor B$ (cvd)

5)

$A \to B \equiv B \to A$ pr: no

A B $A \to B$ $B \to A$

V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

→ non vale

6) $(A \to B) \to C \equiv A \to (B \to C)$

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	p	q
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

→ non vale

Extra 1

$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$

A	B	C	$B \to C$	$A \wedge B$	p	q
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

vale

Es 5-6

Esercizio 5

Utilizzando le tavole di verità, dimostrare la validità delle due **leggi di De Morgan**:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \qquad \text{e} \qquad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q.$$

Esercizio 6

Utilizzando le tavole di verità, dimostrare la validità delle seguenti leggi logiche:

- $P \equiv \neg\neg P$
- $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$
- $P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
- $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
- $P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$
- $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$\boxed{\text{es 5}}$ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
V	F	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V

vero

vero

(quando ¬A posit)

$\boxed{\text{es 6}}$

1) $P \equiv \neg\neg P$

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

→ valido

2) $P \wedge q \equiv \neg(\neg P \vee \neg q)$ de morgan

$P \wedge q \equiv P \wedge q$

(cvd)

3) $P \vee q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg q)$

$P \vee q = P \vee q$

(cvd)

4) $p \to q \equiv \neg p \lor q$

p	q	$p \to q$	$\neg p \lor q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

$\to$ valido

5) $p \to q \equiv \neg(p \lor \neg q)$

$p \to q \equiv \neg p \land \neg\neg q$

$p \to q \equiv \neg p \land q$ (cvd)

6) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \leftarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

$\hookrightarrow$ valido

Metodi di dimostrazione dimostrati

D1) $p \land \neg q \models R \land \neg R$

$p \land \neg q \to R \land \neg R \models p \to q$

P	Q	$P \land \neg Q$	$R \land \neg R$	$p \to q$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

$\to$ valido

D2) $p \quad q \quad \neg p \quad \neg q \mid \neg Q \to \neg P \mid P \to Q$

D2)

p	q	¬p	¬q	¬q → ¬p	p → q
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

⇒ valido

D3)

p	q	R	p → R	R → q	p → R ∧ R → q	p → q
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

⇒ valido

D4)

P_1	P_2	Q	$P_1 \to q$	$P_2 \to Q$	… ∧ …	$P_1 \vee P_2 \to Q$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

⇒ valid

Dimostrazione complementare intersezione è unione complementari

$$C\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = x \notin \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \neg\left(x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\right)$$

$$= \neg\left(\forall_i \left(x \in A_i\right)\right) = \exists_i \mid \neg\left(x \in A_i\right) = \exists_i \mid \left(x \notin A_i\right) -$$

$$= \exists i \mid (x \in \bigcap A_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcap A_i$$

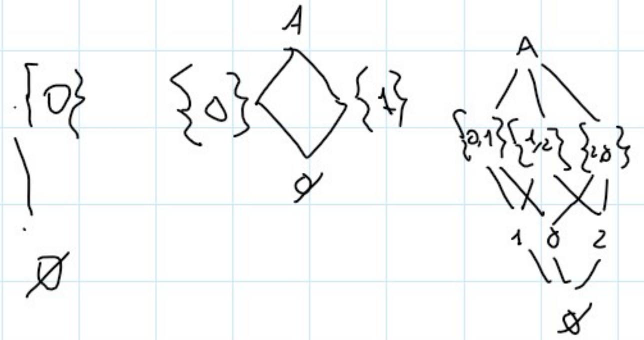
Unione meno intersezione

P	Q	A: $P \lor Q$	B: $P \land Q$	C: $P \land \neg Q$	D: $Q \land \neg P$	$A \land \neg B$	$C \lor D$	Q
V	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

es 1

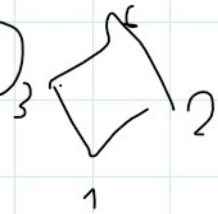
Esercizio 1

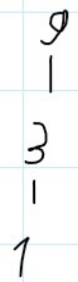
Disegnare il diagramma di Hasse degli ordini $\langle \mathcal{P}(\{0\}), \subseteq \rangle$, $\langle \mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq \rangle$ e $\langle \mathcal{P}(\{0,1,2\}), \subseteq \rangle$. In quali casi si ha un ordine lineare?

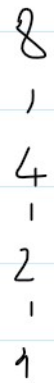


Lineare altri no

es 2

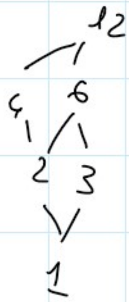






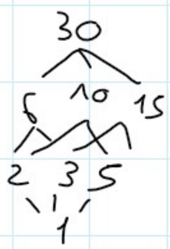
12

[1, 2, 3, 4, 6, 12]



30

1 2 3 5 6 10 15 30



Inclusione asteriscata

DIM $A \setminus B$ $\quad A\setminus C \quad B \setminus C \quad A\setminus C \vee B\setminus C$

A	B	C	$A \wedge \neg B$	$A \wedge \neg C$	...	...
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F

se sta in uno sta in altro $\quad x \in \ldots \quad x \in \ldots \quad \models$

Es 1 Cardinalità

Esercizio 1

Dimostrare che se X è finito allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme X^n è finito. Quanti elementi ha X^n?

$a_i \in X$

$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$

$|X^n| = |X|^n$

base) $n = 1 \rightarrow |X^n| = |X|$ nella forma $\langle a_1 \rangle$

Induttivo) $|X^n| = |X|^n \Rightarrow |X^{n+1}| = |X|^{n+1} = |X|^n \cdot |X|$

creo iniezione

$f: X^n \rightarrow X^{n+1} \quad \langle a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \rangle \rightarrow \langle a'_0, \ldots, a'_{n-1}, a_{(n+1)-1} \rangle$

con $a_i = a'_i \quad 0 \le i \le n-1$

e $a_{(n+1)-1} = x \in X$ fisso

restringo codominio a $a_{(n+1)-1} = x_0 \in X$ fisso

$\hookrightarrow$ biezione $\Rightarrow |X^n| = |C_\emptyset| \quad C_0 = C_1 = \ldots = C_{|X|-1}$

(⇐) biezione $\Rightarrow |X^n| = |C_\emptyset|$ $\quad C_\emptyset = C_1 = \dots = C_{|X|-1}$

$$|X^{n+1}| = \sum_{J=0}^{|X|-1} C_J = \sum_{J=0}^{|X|-1} C_0 = C_0 \cdot |X| = |X^n| \cdot |X| =$$

$$= |X|^n \cdot |X| = |X|^{n+1}$$ cvd

non inf

Dim 2

$$\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1} \rangle$$

$$X \approx I_{|X|} \Rightarrow \langle i_0, i_1, \dots i_{n-1} \rangle$$

$2^{i_0} \cdot 3^{i_1} \cdot \dots \langle p \rangle_{n-1}^{i_{n-1}}$ è finito

perché prodotto di numeri finiti

Esercizi cardinalità

es 5

Esercizio 5

Dimostrare che gli insiemi

$$In = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è iniettiva}\}$$

e

$$Su = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è suriettiva}\}$$

sono in biezione con $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Concludere che anche l'insieme

$$Bi = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è biettiva}\}$$

ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$In < \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

In $\lesssim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$
Su $\lesssim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

es 7

Esercizio 7

Dimostrare che l'insieme delle sequenze binarie finite (ovvero l'insieme di tutte le sequenze finite di 0 e 1) è un insieme numerabile.

① $2^{<\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to 2^{<\mathbb{N}}$ $\quad x \to \{\underbrace{0,0 \ldots, 0}_{x \text{ volte}}\}$ iniettiva

$\mathbb{N} \lesssim 2^{<\mathbb{N}}$

② $f: 2^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ $\quad \langle a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1} \rangle \to a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$

iniettiva in quanto

se $\quad a_s \neq a_{s_1} \Rightarrow$ stringe sono diverse

$\Rightarrow 2^{<\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{N}$

Esercizio 8

Più in generale, dimostrare che se X è finito o numerabile, allora $X^{<\mathbb{N}}$ è numerabile.

(1) uguale a sopra $\mathbb{N} \lesssim X^{<\mathbb{N}}$

(2) $X^{<\mathbb{N}}$

$$\forall_n \quad X^n \approx X \lesssim \mathbb{N}$$

per hp

Esercizio 9

Dimostrare che per ogni insieme X infinito, l'insieme

$$\{s \in X^{<\mathbb{N}} \mid s \text{ è senza ripetizioni}\}$$

è un insieme infinito. Dimostrare anche che se X è numerabile, allora anche l'insieme delle sequenze senza ripetizioni lo è.

è infinito $\quad \{\langle x \rangle : x \in X\}$ è già infinito

Principio induzione

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

passo base

$$P(0) \to \sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(1)}{2} = 0 \quad \text{cvd}$$

passo indutt

$$P(n) \to P(n+1)$$

$$P(n+1) = \sum_{i=0}^{n} i + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{[(n+1)+1][(n+1)]}{2} \qquad \text{cvd}$$

es 2

$$2^n - 2n - 1 > 0 \quad \text{con} \quad n \geq 3$$

b) $P(3) = 8 - 6 - 1 = 1 > 0$

In) $P(n) \rightarrow P(n+1) = 2^{n} \cdot 2 - 2n - 2 - 1$

$$\underbrace{2^n - 2n - 1}_{>0 \Leftarrow P(n)} + \underbrace{2^n - 2}_{2^n > 2} \quad \text{cvd}$$

$\curvearrowright$ $n > 1$ sempre valido $\times$ $n \geq 3$

es 3

$$\begin{cases} q(0) = 0 \\ q(n) = q(n) + 2n + 1 \end{cases}$$

b $q(0) = 0^2 = 0$ cvd

In $q(n+1) = \underbrace{q(n)}_{n^2} + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

es induzione

Es. Induzione

Somma dei primi n numeri dispari

Passo base $1 = 1^2$

Passo induzione

Ipot. $\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$

Dimostrare che:

$\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Tesi $\sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2i + 1}_{=(n+1)^2 \times \text{ip. ind}} + 2(n+1) + 1 =$

Dimostrazione **per induzione su** $n \in \mathbb{N}$ (equivalentemente, **su** $n \geq 0$).

$P(n)$ è $\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$.

$(n+1)^2 + 2n + 3$

Caso base $(n = 0)$

$n^2 + \ldots$

Somma dei primi n numeri dispari

passo induzio 7

Passo base $1 = 1^2$

Ipot. $\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$

tesi $\sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1 = \sum_{i=0}^{n} 2i + 1$ x ip. ind

$(n+1)^2$

Dimostrare che:

$\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione **per induzione su** $n \in \mathbb{N}$ (equivalentemente, **su** $n \geq 0$).

$P(n)$ è $\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$.

$2(n+1)+1$

$=$

$(n+1)^2 + 2n+3$

$n^2+2n+1+2n+3$

n^2+4n+4

$[(n+1)+1]$

Caso base ($n = 0$)

$P(0)$ è $\sum_{i=0}^{0} 2i + 1 = (0+1)^2$. Verifichiamo:

$$\sum_{i=0}^{0} 2i + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \quad \text{e} \quad (0+1)^2 = 1^2 = 1,$$

quindi $P(0)$ è vera.

---

2)

Dimostrare che $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

passo base $\sum_{i=0}^{0} 2i = 0 = n^2 + n$

passo induttivo

Ipotesi induttiva $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$

tesi induttiva $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1)^2 + (n+1)$

$= \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1) =$ x hp induttiva

$= n^2 + n + 2n + 2 =$

$n^2 + 2n + 1 + n + 1$

$(n+1)^2 + n + 1$ cvd

---

3)

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

Passo base

$$\sum_{i=1}^{1} (2i)^3 = 2^3 = 8 = 2 \cdot 1^2 (1+1)^2$$

$= \underline{8}$ cvd

Passo induttivo

hp ind $\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$

Tesi induttiva

$2(n+1)^2((n+1)+1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (2i)^3 =$

$\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 + (2(n+1))^3 = 2n^2(n+1)^2 + 8(n+1)^3$

x hp induttiva

$= [2n^2 + 8(n+1)](n+1)^2$

$2[n^2+4n+4](n+1)^2$

$2[n+2]^2(n+1)^2 = \underline{2(n+1)^2((n+1)+1)^2}$

cvd

4)

Dimostrare che $2^n < n!$ per ogni $n \geq 4$.

Passo base

$\underline{2^4} = 16 \underline{<} 24 = \underline{4!}$ cvd

passo ind

hp ind $n! - 2^n > 0$

tesi ind $(n+1)! - 2^{n+1} > 0$

$(n+1)\,n! - 2^n \cdot 2$

$[(n-1)n!] + 2\underbrace{[n! - 2^n]} > 0$

$$\lfloor (n-1)n! \rfloor + 2\underbrace{\lfloor n! - 2 \rfloor}_{\substack{\times \text{ ipotesi induttiva} \\ > 0}} > 0$$

$\underbrace{(n-1)n!}_{}$

> 0 in

quando $n \geq 4$

5)

Definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1. \end{cases}$$

5 V

Dimostrare che $a_n = 2^{n+1} - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per induzione su $n \geq 0$.

Passo base

$$a_0 = 2^{0+1} - 1 = \underline{1} = 1$$

cvd

Passo induttivo

ip induttiva $\quad a_n = 2^{n+1} - 1$

tesi indut $\quad a_{n+1} = \underline{2^{(n+1)+1} - 1}$

$+2-2$

$$2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 \quad \underset{\times \text{ ip induttiva}}{=} 2a_n + 1$$

$$\underset{\times \text{ definizione } a_{n+1}}{=} \underline{a_{n+1}}$$

cvd

6)

Definiamo $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per ricorsione ponendo

$$\begin{cases} g(0) = 2, \\ g(n+1) = g(n) \cdot g(n). \end{cases}$$

ipo in $g(n) = 2^{(2^n)}$

$\underset{\times \text{ ipo ind}}{=} 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)}$

$2^{(2^n + 2^n)}$

6 V

Dimostrare che $g(n) = 2^{(2^n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definiamo $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per ricorsione ponendo

$$\begin{cases} g(0) = 2, \\ g(n+1) = g(n) \cdot g(n). \end{cases}$$

6V

ipo In $g(n) = 2^{(2^n)}$

$= 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)}$ x ipo ind

$2^{(2^n + 2^n)}$

$2^{(2 \cdot 2^n)}$

$2^{(2^{n+1})}$

Dimostrare che $g(n) = 2^{(2^n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per induzione su $n \geq 0$.

Caso base: $g(0) = 2 = 2^1 = 2^{(2^0)}$ $\qquad (n = 0)$

Passo induttivo: Data $g(n) = 2^{(2^n)}$ dimostrare che $g(n+1) = 2^{(2^{n+1})}$.

$$\begin{aligned} g(n+1) &= g(n) \cdot g(n) \\ &= 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} && \text{per ipotesi induttiva} \\ &= 2^{(2^n + 2^n)} \\ &= 2^{(2 \cdot 2^n)} \\ &= 2^{(2^{n+1})} \end{aligned}$$

9)

Dimostrare per induzione che se n è dispari e $a_1, \ldots, a_n$ sono dispari, allora $\sum_{i=1}^{n} a_i$ è dispari.

Passo base $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 = \underbrace{2k_1 + 1}_{\text{dispari}}$$

cvd

$a_i = 2k_i + 1$

Passo induttivo

$\boxed{\text{hp}}$ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2m_1 + 1$

$\boxed{\text{th}}$ $\sum_{i=1}^{n+2} a_i = 2m_2 + 1 = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} + a_{n+2}$

$= 2m_1 + 1 + 2k_{n+1} + 1 + 2k_{n+2} + 1$ x ipo ind

$= 2(m_1 + k_{n+1} + k_{n+2} + 2) + 1$

$= 2m_2 + 1$ cvd

8) .

Dimostrare che ogni affrancatura da 4 centesimi o più può essere ottenuta usando solo francobolli da 2 e 5 centesimi.

Passo base $\quad 4 = 2+2$

$5 = 5$

Passo indu. forte

$$\forall m < n \quad d \cdot 2 + c \cdot 5 = m$$
$$n \geq 6$$

$$d \cdot 2 + c5 = n$$

$$d_n \cdot 2 + c_n 5 - 2 = n - 2$$

$$d_n \cdot 2 + c_n 5 - 2 = d_{n-2} 2 + c_{n-2} 5$$

$$d_n \cdot 2 + c_n 5 = (d_{n-2} + 1) 2 + c_{n-2} 5$$

$$d_n = d_{n-2} + 1 \qquad \exists d_n, c_n \mid c_n 5 + d_n 2 = 2$$
$$c_n = c_{n-2} \qquad \underline{\text{cvd}}$$

---

01) $((A) \to ((B) \vee (\neg (C))))$

P

$(A) \qquad ((B) \vee (\neg(C)))$

$(B) \qquad (\neg(C))$

(B) $\qquad (\neg(C))$

(C)

- $((A) \to ((B) \vee (\neg(C))))$ ✓
- $((\neg(A)) \wedge (B)) \vee (C))$ → parentesi errata
- $(\neg\neg((A) \to (B)))$ → $\neg\neg$
- $((((A) \to (B)) \wedge (A)) \to (B))$
- $(((\neg(A)) \wedge (B)) \vee (C))$ → manca parentesi su a
- $(\neg(\neg A))$
- $((A) \wedge (B) \wedge (C))$.

• 2) $((\neg(A)) \wedge (B)) \vee (C))$

$\wedge$

$(\neg(A))$ $\qquad (B)) \vee (C)$

not a prop

• 3 $(\neg\neg((A) \to (B)))$

no

• 4 $((((A) \to (B)) \wedge (A)) \to (B))$

$\to$

$(((A) \to (B)) \wedge (A))$ $\qquad (B)$

$\wedge$

$(A) \to (B)$ $\qquad (A)$

$\to$

(A) $\qquad (B)$

5 $((((\neg(A)) \wedge (B)) \vee (C))$

$\vee$

$((\neg(A)) \wedge (B))$ $\qquad$ (C)

$\wedge$

$(\neg(A))$ $\qquad$ (B)

(A)

7 not a prop

1. $A \to B \vee \neg C$
2. $A \wedge (\to C \vee A)$
3. $(A \to B) \wedge A \to B$
4. $A \to B \wedge A \to B$
5. $A \vee B \wedge C \to \neg A$
6. $A \wedge B \wedge C \vee \neg C$
7. $\neg\neg A$
8. $\neg A \wedge B \vee C$
9. $A \vee \neg B \to \neg A \vee B$

1) $((A) \to (B \vee \neg C))$

$((A) \to ((B) \vee \neg(C))$

$((A) \to ((B) \vee (\neg(C)))$

2) è nella forma

$\to q$ (manca proposizione a sinistra operaz. binaria)

3) $(((A \to B) \wedge (A)) \to (B))$

3) $(((A \to B) \wedge (A)) \to (B))$

$((((A) \to (B)) \wedge (A)) \to (B))$

4) $A \to (B \wedge A) \to B$

$A \to ((B \wedge A) \to B)$

$((A) \to (((B) \wedge (A)) \to (B)))$

5) $A \vee B \wedge C \to \neg A$

no priorità tra $\wedge$ e $\vee$

6)

7) $(\neg(\neg(A)))$

8) $(\neg(A)) \wedge (B) \vee (C)$

9) $A \vee (\neg B) \to (\neg A) \vee B$

$(((A) \vee (\neg(B))) \to ((\neg(A)) \vee (B)))$

Esercizio 2

Costruire l'albero sintattico delle seguenti formule (in cui sono state omesse alcune parentesi secondo le convenzioni adottate).

- $\neg A \to \neg[(B \leftrightarrow \neg(A \vee C)) \vee \neg A]$
- $(A \leftrightarrow \neg B) \to [\neg(A \wedge \neg B) \to \neg(C \wedge \neg D)]$

Calcolare anche l'altezza di ciascun albero e l'altezza della formula a cui è

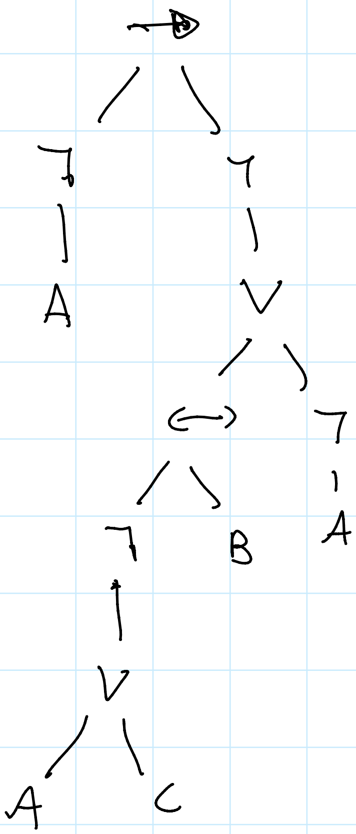
Esercizio 2

Costruire l'albero sintattico delle seguenti formule (in cui sono state omesse alcune parentesi secondo le convenzioni adottate).

- $\neg A \to \neg[(B \leftrightarrow \neg(A \vee C)) \vee \neg A]$
- $(A \leftrightarrow \neg B) \to [\neg(A \wedge \neg B) \to \neg(C \wedge \neg D)]$

Calcolare anche l'altezza di ciascun albero e l'altezza della formula a cui è associato.

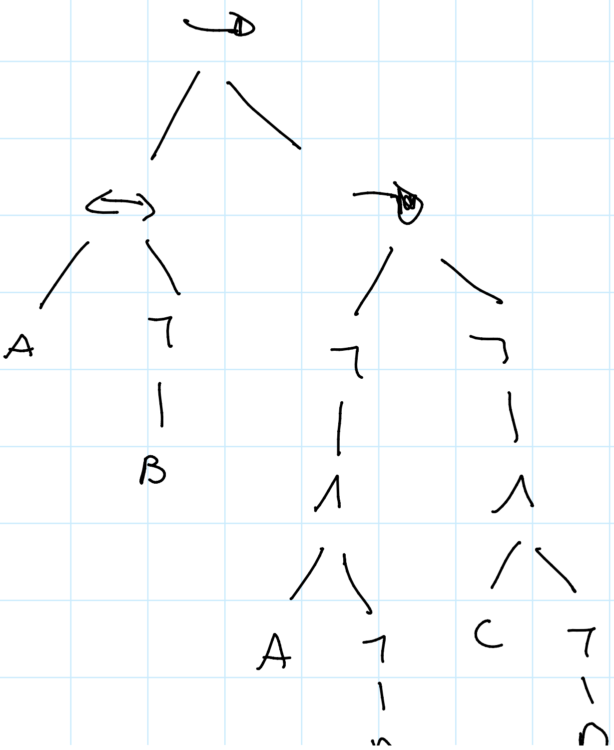
a



7 albero

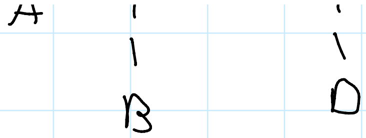
6 formula

b



6 albero

5 formula



Slide 5.2

1.
   - $f(g(a,c))$
2.
   - $h(f(x), g(f(a), y), z)$
3.
   - $h(a, b, x)$
4.
   - $g(h(x,x,x), f(x,x))$ — No
5.
   - $f(f(f(g(g(a,c), g(x,y)))))$
6.
   - $h(f(a), g(f(a), a))$

Consideriamo nuovamente il linguaggio $L = \{+, \cdot, 1\}$ dove $+$ e $\cdot$ sono simboli di funzione binari e 1 è un simbolo di costante.

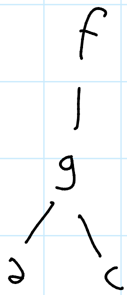
A quali polinomi corrispondono i seguenti termini?

- $+(+(+(x,x),y),\cdot(z,z))$
- $+(+(\cdot(x,\cdot(x,x)),+(x,x)),+(+(1,1),1))$
- $+(+(\cdot(+(1,1),x),x),+(1,1))$

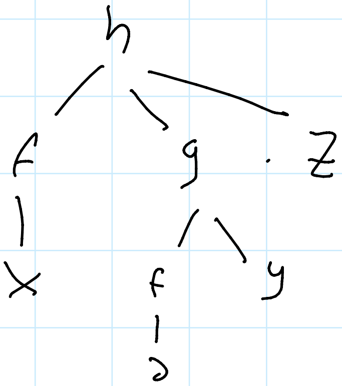
Scrivere termini del linguaggio L che rappresentino i seguenti polinomi:

- $x+y+3$
- $x+y^2+3z$
- z^2+2x

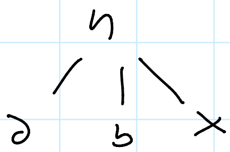
(1)



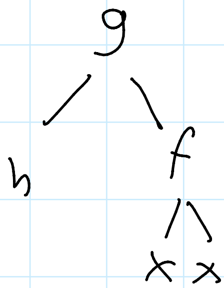
(2)



(3)

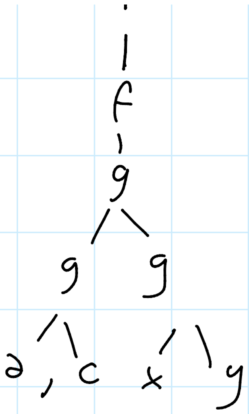


(4)

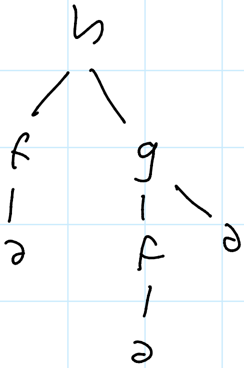


→ errore $ar(f) < 1$

(5) $f(f(f(g(g(a,c), g(x,y)))))$



(6) $h(f(a)\ g(f(a)a))$



$ht(t) = 3$

(2a) $+(+(+(xx)y)\cdot(zz))$

$2x + y + z^2$

(2b) $+(+(\cdot(x\cdot(xx)) + (xx)) + (+11)1))$

$x^3 + 2x + 3$

(2c) $+(+(\cdot(+(11)x)x) + (11))$

$3x \quad +2$

(3a) $+(x + (y + (1 + (11))))$

(3b) $+(x + (\cdot(yy)\cdot(+(1+(11))z)))$

3b) $+(x + (\cdot(y\,y) \cdot (+(1 + (1\,1))\, z)))$

3c) $+(\cdot(z\,z) \cdot (+(1\,1)\, x))$

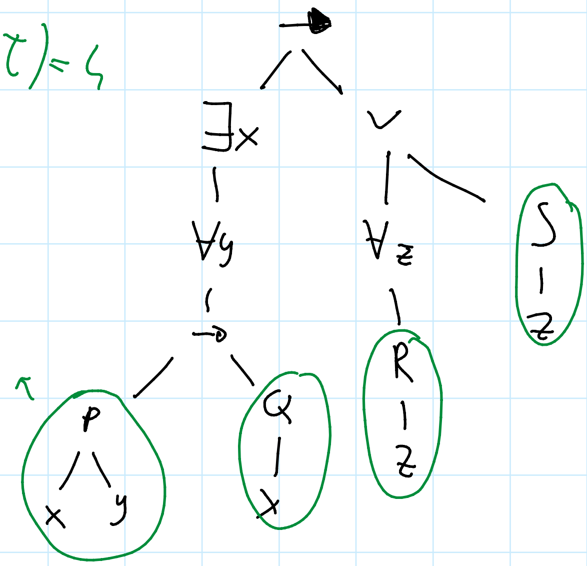
Calcolare l'albero sintattico della formula

$$((\exists x(\forall y\,((P(x,y)) \to (Q(x))))) \to ((\forall z(R(z))) \vee (S(z)))).$$

$$((\exists x\,(\forall y\,((P(x,y)) \to (Q(x))))) \to ((\forall z\,(R(z))) \vee (S(z))))$$

$ht(\tau) = 4$

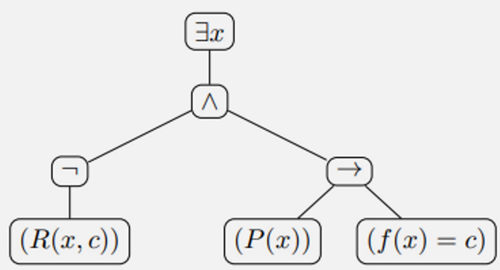
conta come 1



L'albero sintattico di

$$(\underset{1}{\exists x}((\neg(R(x,c))) \underset{2}{\wedge} ((P(x)) \to (f(x) = c))))$$

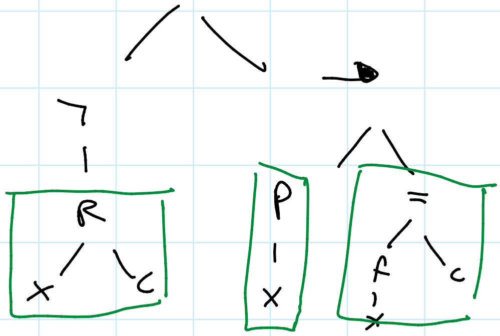
è



$\exists x$

$\downarrow$

$\wedge$



foglia

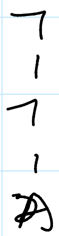
Esercizi del corso

Capitolo 4

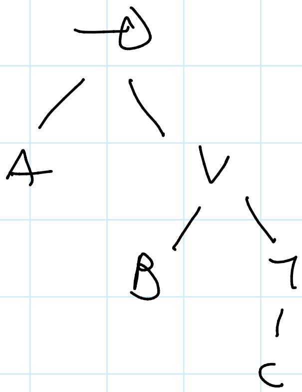
es 1 pdf

es 2

a

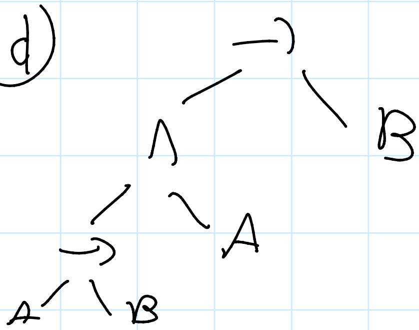


b



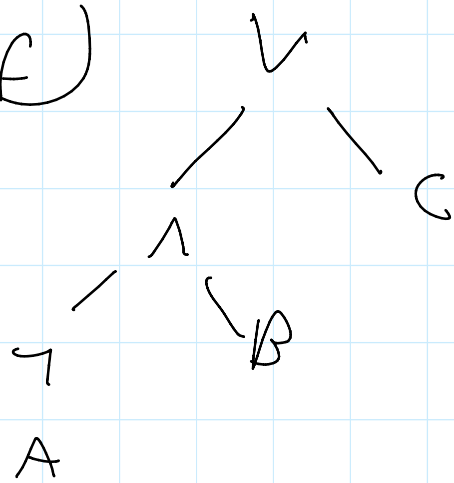
c no manca parentesi tra ¬¬

d



e No manca (

f



g due ∧