Esercitazione

Corso di **Algoritmi e strutture dati**
Corso di Laurea in **Informatica**
Docenti: Ugo de'Liguoro, András Horváth

Complessità asintotica

- **Definizione del** O (limite superiore):

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0. f(n) \le cg(n)$$

cioè, a parte un fattore moltiplicativo e un numero finito di casi (quindi asintoticamente), $f(n)$ cresce al massimo come $g(n)$

Complessità asintotica

- **Definizione del** Ω (limite inferiori):

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 . f(n) \geq cg(n)$$

cioè, a parte un fattore moltiplicativo e un numero finito di casi (quindi asintoticamente), $f(n)$ cresce almeno come $g(n)$

Complessità asintotica

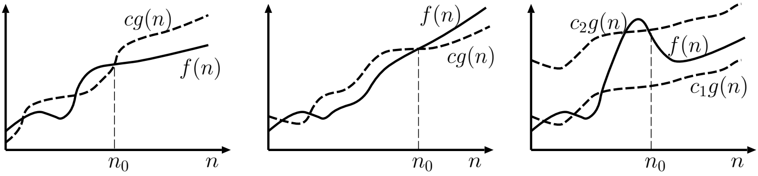
- **Definizione del Θ** (limiti stretti):

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 . c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

cioè, a parte fattori moltiplicativi e un numero finito di casi (quindi asintoticamente), $f(n)$ cresce come $g(n)$

Complessità asintotica

graficamente *O*, Ω e Θ:



$f(n) \in O(g(n))$ $\quad$ $f(n) \in \Omega(g(n))$ $\quad$ $f(n) \in \Theta(g(n))$

Complessità asintotica

Teorema: Se il limite

$$a = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

esiste allora

$$\begin{aligned}
0 \le a < \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad f(n) \in O(g(n)) \\
0 < a < \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad f(n) \in \Theta(g(n)) \\
0 < a \le \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad f(n) \in \Omega(g(n))
\end{aligned}$$

Complessità asintotica, esercizio 1

Si stabilisca, dimostrandolo formalmente, se le funzioni $2^{n-100}, 2^{\frac{1}{2}n}$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ siano $\Omega(2^n)$.

2^{n-100} :

- $2^{n-100} = 2^n/2^{100}$ dove $1/2^{100}$ è “solo” un fattore moltiplicativo e dunque $2^{n-100} \in \Omega(2^n)$
- lo stesso si può dimostrare anche usando il teorema precedente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-100}}{2^n} = \frac{1}{2^{100}}$$

e dunque $2^{n-100} \in \Omega(2^n)$

Complessità asintotica, esercizio 1

Si stabilisca, dimostrandolo formalmente, se le funzioni $2^{n-100}, 2^{\frac{1}{2}n}$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ siano $\Omega(2^n)$.

$2^{\frac{1}{2}n}$:

- usando il teorema precedente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{2}n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$$

perché $\sqrt{2} < 2$ e dunque $2^{\frac{1}{2}n} \notin \Omega(2^n)$

Complessità asintotica, esercizio 1

Si stabilisca, dimostrandolo formalmente, se le funzioni $2^{n-100}, 2^{\frac{1}{2}n}$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ siano $\Omega(2^n)$.

$\left(\frac{3}{2}\right)^n$:

- usando il teorema precedente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^n = 0$$

perché $3/2 < 2$ e dunque $\left(\frac{3}{2}\right)^n \notin \Omega(2^n)$

Complessità asintotica, esercizio 2

Si dimostri la seguente implicazione:

$$f_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in O(g_2(n)) \implies f_1(n) + f_2(n) \in O(g_1(n) + g_2(n)).$$

Dimostrazione:

- $f_1(n) \in O(g_1(n))$ implica che $\exists c_1 > 0, \exists n_1, \forall n > n_1 . f_1(n) \leq c_1 g_1(n)$
- $f_2(n) \in O(g_2(n))$ implica che $\exists c_2 > 0, \exists n_2, \forall n > n_2 . f_2(n) \leq c_2 g_2(n)$
- con $n_0 = \max(n_1, n_2)$ e $c = \max(c_1, c_2)$

$$\forall n > n_0 . f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \leq c g_1(n) + c g_2(n) = c(g_1(n) + g_2(n))$$

e quindi $f_1(n) + f_2(n) \in O(g_1(n) + g_2(n))$

Complessità asintotica, esercizio 3

Si dimostri che la seguente implicazione è falsa:

$$f_1(n) \in O(g_1(n)) \vee f_2(n) \in O(g_2(n)) \implies f_1(n) + f_2(n) \in O(g_1(n) + g_2(n))$$

- per dimostrare che l'implicazione sia falsa basta trovare un esempio con cui la "sinistra" è vere mente la "destra" è falsa
- con

  $$f_1(n) = n^2, f_2(n) = n, g_1(n) = n, g_2(n) = n$$

  è cosi

Correttezza tramite invariante

L'**invariante di ciclo** è una proposizione sul valore delle variabili dell'algoritmo:

- *inizializzazione:* la proposizione vale immediatamente prima di entrare nel ciclo
- *mantenimento:* se la proposizione vale prima di eseguire il corpo del ciclo, allora vale anche dopo aver eseguito il corpo del ciclo
- deve essere *utile*: aiuta a dimostrare la correttezza dell'algoritmo

Correttezza tramite invariante, esercizio

Dimostrare la correttezza del seguente algoritmo per calcolare il valore di un polinomio rappresentato dai suoi coefficienti $a_0, a_1, ..., a_n$ in un punto x.

$\textsc{Horner}(a_0, a_1, ..., a_n, x)$
  $y \leftarrow 0$
  $i \leftarrow n$
  while $i \geq 0$ **do**
    $y \leftarrow a_i + x \cdot y$
    $i \leftarrow i - 1$
  return y

Correttezza tramite invariante, esercizio

# esecuzioni del ciclo	i	y
0	n	0
1	$n-1$	a_n
2	$n-2$	$a_{n-1} + a_n x$
3	$n-3$	$a_{n-2} + a_{n-1} x + a_n x^2$
4	$n-4$	$a_{n-3} + a_{n-2} x + a_{n-1} x^2 + a_n x^3$
$\vdots$	$\vdots$	

La relazione fra i e y in ogni riga della tabella precedente, cioè l'invariante del ciclo, è

$$y = \sum_{k=0}^{n-(i+1)} a_{k+i+1} x^k$$

Correttezza tramite invariante, esercizio

All'uscita del ciclo si ha $i = -1$ e quindi

$$y = \sum_{k=0}^{n-(-1+1)} a_{k-1+1}x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

cioè y contiene il valore del polinomio nel punto x e quindi l'algoritmo è corretto.

Relazione di ricorrenza, esercizio

Si analizzi la complessità temporale in funzione di n del seguente algoritmo, ricavando la relazione di ricorrenza e calcolandone il Θ:

```
BUMP(n)
  if n ≤ 1 then return 5
  else
      m ← 0
      for i ← 1 to 8 do
          m ← m + BUMP(⌊n/2⌋)
      for i ← 1 to n do
          for j ← 1 to n do
              m ← m + 1
      return m
```

Relazione di ricorrenza, esercizio

- il corpo dei **for** annidati viene eseguito n^2 volte, mentre BUMP($\lfloor n/2 \rfloor$) viene eseguito 8 volte, si ottiene la ricorrenza:

$$T(n) = 8T(n/2) + n^2 \text{ se } n > 1, \quad T(1) = 1$$

- svolgendo:

$$T(n) = 8T(n/2) + n^2 = 8(8T(n/2^2) + (n/2)^2) + n^2 = 8^2 T(n/2^2) + 2n^2 + n^2 = \cdots$$

da cui in generale, quando $k \le \log_2 n$ (scritto semplicemente $\log n$ nel seguito)

- $$T(n) = 8^k T(n/2^k) + \left(\sum_{i=0}^{k-1} 2^i\right) n^2 = 8^k T(n/2^k) + (2^k - 1)n^2$$

- con $k = \log n$ e supponendo $T(1) = 1$ abbiamo

$$T(n) = 8^{\log n} + (2^{\log n} - 1)n^2 = 2n^3 - n^2 = \Theta(n^3)$$

Analisi di un algoritmo, esercizio

Si consideri il seguente algoritmo:

AUGUSTA($A[1..n]$)
  for $i \leftarrow n-1$ **down to** 1 **do**
    $j \leftarrow i$
    while $j < n$ **and** $A[j] < A[j+1]$ **do**
      scambia $A[j+1]$ con $A[j]$
      $j \leftarrow j+1$

Si risponda succintamente seguenti domande:

1. Cosa fa AUGUSTA($A[1..n]$)?
2. Si indichino l'invariante del ciclo esterno e l'invariante del ciclo interno.
3. Quali sono il caso peggiore e la sua complessità in termini di Θ?
4. Sapreste indicare un algoritmo che risolva lo stesso problema in tempo asintoticamente migliore?

Analisi di un algoritmo, esercizio

- AUGUSTA ordina in senso non crescente il vettore $A[1..n]$ con una variante dell'INSERT-SORT
- invarianti

  esterno: $A[i+1..n]$ è ordinato in senso non crescente
  interno: per ogni $h \in i..j-1$, $A[h] \geq A[j]$
- il caso peggiore si verifica quando A sia ordinato in senso crescente, e l'algoritmo è $\Theta(n^2)$
- una soluzione migliore è un'opportuna variante di un algoritmo $\Theta(n \log n)$, come il MERGE-SORT

Conoscenza di una struttura dati, esercizio

- si consideri una tabella di hash ad indirizzamento aperto $T[0, ..., 19]$, con 20 elementi, che utilizza la seguente funzione di hashing

$$h(k, i) = (k \ mod\ 20 + 3i + 2i^2) \ mod\ 20$$

- si riporti il suo contenuto dopo l'inserimento delle seguenti chiavi: 15,40,35,20
- si riporti l'algoritmo di ricerca di una chiave in una tabella hash che usa l'indirizzamento aperto

Conoscenza di una struttura dati, esercizio 1

Riportiamo dapprima l'algoritmo di inserimento (non richiesto nel testo):

HASH-INSERT(k, $T[0..m-1]$)
 for $i \leftarrow 0$ **to** $m-1$ **do**
  $j \leftarrow h(k, i)$
  if $T[j] \neq nil$ **then**
   $T[j] \leftarrow k$
   return
 error overflow

Conoscenza di una struttura dati, esercizio 1

- funzione hash: $h(k, i) = (k \ mod \ 20 + 3i + 2i^2) \ mod \ 20$
- nel caso dato $m = 20$
- all'inizio $T[j] = nil$ per ogni $j \in 0..19$
- quindi 15 viene inserito in $h(15, 0) = 15$
- 40 viene inserito in $h(40, 0) = 0$
- a questo punto $h(35, 0) = 15$, ma $T[15] = 15$
- $h(35, 1) = (15 + 5) \mod 20 = 0$, ma $T[0] = 40$
- infine $h(35, 2) = (15 + 6 + 8) \mod 20 = 9$ onde 35 viene posto in $T[9]$
- infine $h(20, 0) = 0$, ma $T[0] = 40$
- $h(20, 1) = (3 + 2) \mod 20 = 5$, onde 20 viene inserito in $T[5]$

Conoscenza di una struttura dati, esercizio 1

Infine l'algoritmo di ricerca ritorna l'elemento di T con chiave k se esiste, *nil* altrimenti:

HASH-SEARCH(k, $T[0..m-1]$)
  for $i \leftarrow 0$ **to** $m-1$ **do**
    $j \leftarrow h(k,i)$
    if $T[j] = nil$ **then**
      return *nil*
    else
      if $T[j].key = k$ **then**
        return $T[j]$
  return *nil*

Conoscenza di una struttura dati, esercizio 2

- riportare le caratteristiche di un *heap minimo*
- il seguente array rappresenta un *heap minimo*

$$(1, 2, 3, 10, 8, 9, 7, 14, 15, 16, 13)$$

- effettuare l'estrazione del minimo riportando lo heap dopo ogni scambio di elementi

Conoscenza di una struttura dati, esercizio 2

Uno heap minimo è un albero binario semi-completo sinistro, vale a dire completo sino al penultimo livello mentre ciascun vertice dell'ultimo non ha lacune alla sua sinistra; inoltre la chiave di ogni vertice padre è minore o uguale di quella dei suoi eventuali figli. (Nella rappresentazione in forma di array H l'eventuale figlio sinistro di $H[i]$ è $H[2i]$ ed il suo eventuale figlio destro è $H[2i+1]$.)

Gli stati dello heap dato successivi all'estrazione del minimo in radice durante il processo di ricostruzione dello heap sono:

$$(\underline{13}, \underline{2}, 3, 10, 8, 9, 7, 14, 15, 16)$$
$$(2, \underline{13}, 3, 10, \underline{8}, 9, 7, 14, 15, 16)$$
$$(2, 8, 3, 10, 13, 9, 7, 14, 15, 16)$$

Gli elementi sottolineati sono quelli coinvolti nello scambio che produce la riga successiva.

Grafi, visite, esercizio

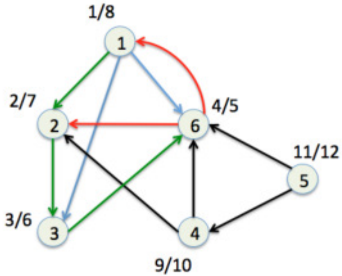
Si effettui la visita in profondità, a partire dal nodo 1, del seguente grafo di sei nodi dato tramite le liste di adiacenza:

```
1: 2, 3, 6
2: 3
3: 6
4: 2, 6
5: 4, 6
6: 1, 2
```

Si disegni la foresta generata della visita, riportando per ogni nodo i tempi di inizio e fine visita (ossia i valori degli attributi *d* ed *f*) e per ogni arco il suo tipo secondo la classificazione degli archi durante una visita in profondità.

Grafi, visite, esercizio

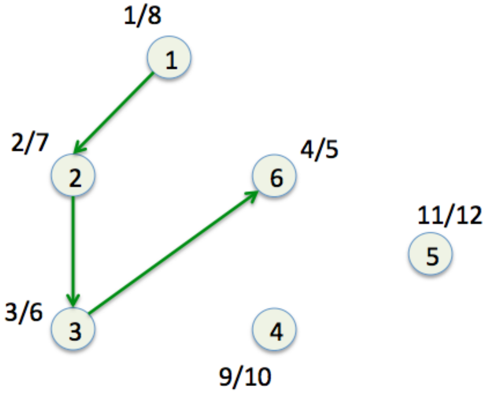
La visita DFS del grafo, con i valori d/f riportati in corrispondenza dei nodi, risulta:



Gli archi d'albero sono: $(1,2),(2,3),(3,6)$. Archi all'indietro sono $(6,1)$ e $(6,2)$. Archi in avanti sono $(1,3)$ e $(1,6)$. Gli archi trasversali sono i rimanenti: $(4,2),(4,6),(5,4),(5,6)$.

Grafi, visite, esercizio

Quindi la visita genera la foresta, in cui 4 e 5 sono alberi di un solo nodo:



Grafi, Dijkstra, esercizio

Si applichi l'algoritmo di Dijkstra al grafo riportato sotto con le liste di adiacenti a partire dal nodo A. Riportare il contenuto della coda di priorità prima di ogni estrazione.

$$\begin{array}{l} A : B(3), C(6), D(7) \\ B : C(2), E(1) \\ C : D(1) \\ D : \\ E : D(4) \end{array}$$

Grafi, Dijkstra, esercizio

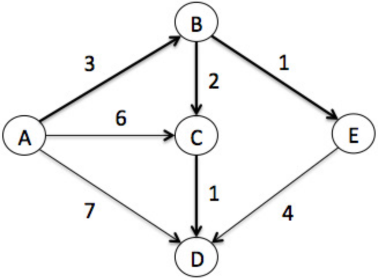
$$
\begin{aligned}
&A : B(3), C(6), D(7)\\
&B : C(2), E(1)\\
&C : D(1)\\
&D :\\
&E : D(4)
\end{aligned}
$$

Quelli che seguono sono gli stati della coda (rappresentata come uno heap minimo in forma di array) prima dell'estrazione di ciascun vertice:

$$
\begin{aligned}
&(A, 0), (B, \infty), (D, \infty), (C, \infty), (E, \infty)\\
&(B, 3), (D, 7), (C, 6), (E, \infty)\\
&(E, 4), (D, 7), (C, 5)\\
&(C, 5), (D, 7)\\
&(D, 6)
\end{aligned}
$$

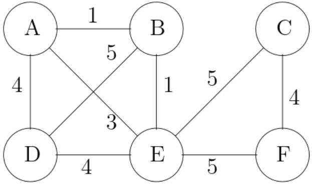
Grafi, Dijkstra, esercizio

Il grafico, in cui gli archi di maggior spessore sone quelli che compongono i cammini minimi da *A* scelti dall'algoritmo di Dijkstra, risulta:



Grafi, alb. minimo ricoprente, esercizio

Si disegnino tutti gli alberi minimi ricoprenti del grafo seguente.



Grafi, alb. minimo ricoprente, esercizio

Gli MST, il cui peso è 15, sono i seguenti: