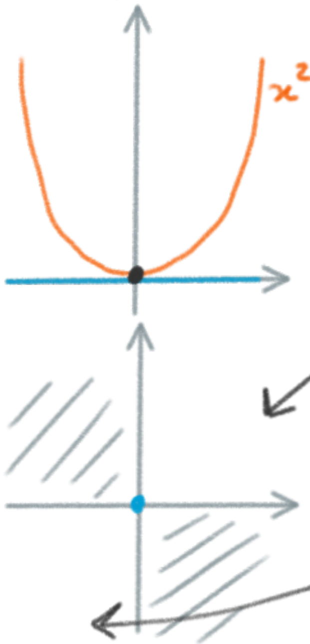
Lezione 2

ES. $f(x) = x^2$



- in $x=0$: tangente orizzontale
  $\Rightarrow P_{x^2}(0) = 0$
- se $x>0$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

se $x<0$: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} < 0$

$\boxed{\text{la monotonia di } f \text{ è legata al segno della sua pendenza}}$

Per tracciare il grafico della pendenza di x^2 possiamo tentare di scrivere il "limite" di $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

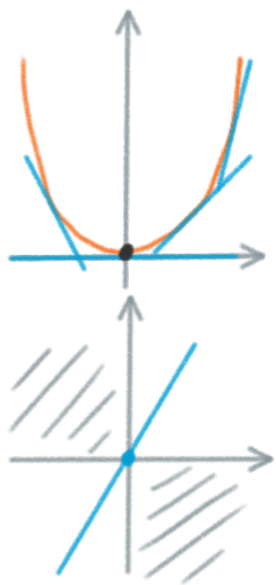
$$P_{x^2}(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(c+\Delta x)^2 - c^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{c^2} + (\Delta x)^2 + 2c\,\Delta x - \cancel{c^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(\Delta x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}} + \frac{2c\,\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2c) = 2c$$



$\Rightarrow P_{x^2}(c) = 2c$ per ogni c

Prendiamo $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo.

def. Se per ogni $c \in I$ esiste finito

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

(ovvero se f ammette unica retta tangente in ogni punto)

allora possiamo definire la funzione pendenza

$$\begin{cases} p_f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad c \longmapsto p_f(c) \end{cases}$$

teor imp

Teorema 1. (monotonia / segno della pendenza)

- f è monotona crescente* su (a,b) $\Leftrightarrow$ la pendenza di f su (a,b) è positiva (≥ 0)
- f è monotona decrescente** su (a,b) $\Leftrightarrow$ la pendenza di f su (a,b) è negativa

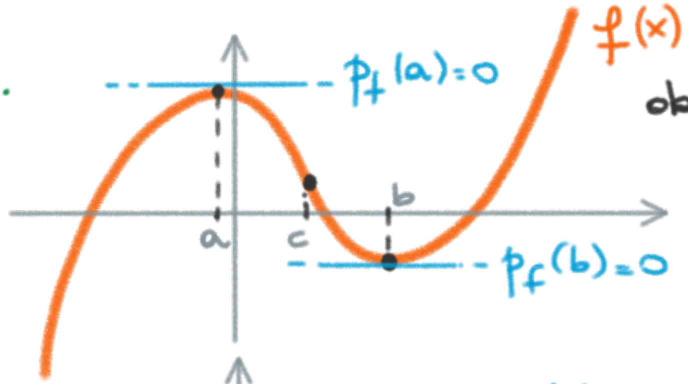
* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$

** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$

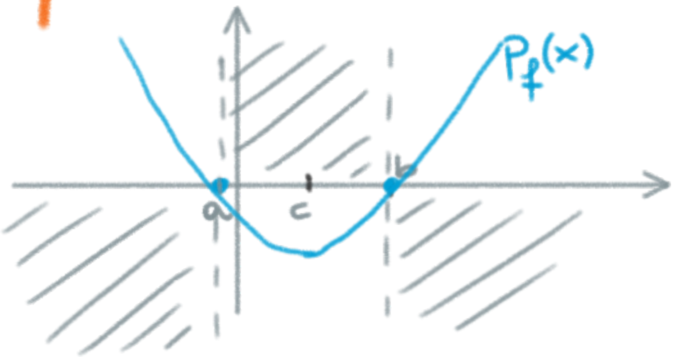
Teorema 2 (convessità / monotonia della pendenza)

- f $\smile$ (convessa) su (a,b) $\Leftrightarrow$ la pendenza di f su (a,b) è cresce
- f $\frown$ (concava) su (a,b) $\Leftrightarrow$ la pendenza di f su (a,b) è decrescente

ESERCIZIO.



dal Teorema 1 deduciamo il segno di p_f dalla monotonia di f



su (a,b) : $f \downarrow$
$\Downarrow$
$p_f \le 0$

su $(-\infty, a)$ e su $(b,+\infty)$: $f \uparrow$
$\Downarrow$
$p_f \geq 0$

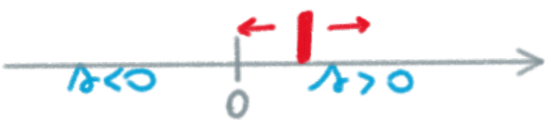
dal Teorema 2 $\begin{cases} \text{su } (-\infty, c) \; f \cap \Rightarrow p_f \downarrow \\ \text{su } (c,+\infty) \; f \cup \Rightarrow p_f \uparrow \end{cases}$

Inter

INTERPRETAZIONI (NON GEOMETRICHE) della PENDENZA

1) CINEMATICA del PUNTO : pendenza come velocità istantanea

Consideriamo un oggetto puntiforme che si muove di moto rettilineo; la sua posizione sulla retta del moto è misurata (con qualche unità di misura, metri ...) rispetto ad un punto fissato, detto origine. A destra dell'origine la posizione sarà positiva, a sinistra negativa.

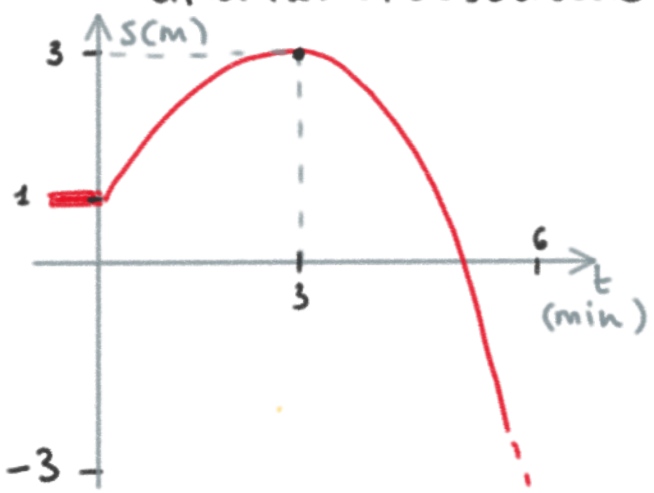


$s(t)$ posizione di ▮ al tempo t

La posizione s di ▮ viene misurata a istanti diversi, s è una funzione del tempo, t (misurato in minuti, ...)

$$\boxed{s = s(t)}$$

ES. Il grafico rappresenta il moto di un oggetto su una retta. Descriverlo.



(l'oggetto) parte da 1mt a destra dell'origine, si sposta verso destra per $t \in [0,3]$, raggiunge la distanza di 3mt e, in $t=3$, cambia direzione e va verso sinistra fino a $t=6$.

(a)

def. La <u>VELOCITÀ MEDIA</u> di ▮ nell'intervallo $[t_1, t_2]$ è

$$v_{media}([t_1,t_2]) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{s(t_1+\Delta t)-s(t_1)}{\Delta t}$$

$\Delta t := t_2 - t_1$

(b)

def. La <u>VELOCITÀ ISTANTANEA</u> di ▮ in t_1 è il "limite" della velocità media su $[t_1, t_2]$ quando $t_2 - t_1 = \Delta t$ "tende a 0":

$$v_{ist.}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1+\Delta t)-s(t_1)}{\Delta t}$$

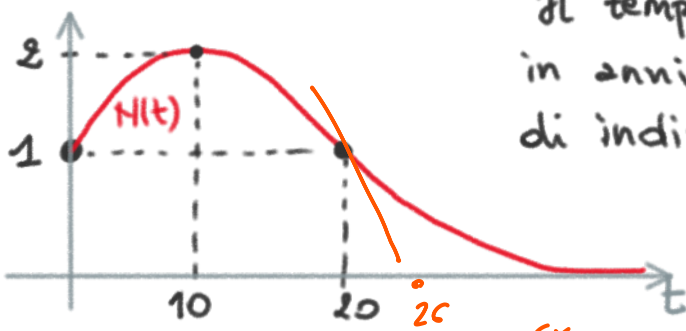
2) DINAMICA di POPOLAZIONI: tasso di crescita.

$N(t)$ = # di individui al tempo t $\quad (N(t) \geq 0)$

(a) def. $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t_2)-N(t_1)}{t_2-t_1}$ <u>tasso medio di crescita</u> nell'intervallo $[t_1, t_2]$

(b) def. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t_1+\Delta t)-N(t_1)}{\Delta t}$ <u>tasso istantaneo</u> di crescita in $t = t_1$

ESEMPIO. Supponiamo che il numero di individui di una popolazione vari nel tempo secondo il grafico seguente:



Il tempo è misurato in anni e il numero di individui in milioni.

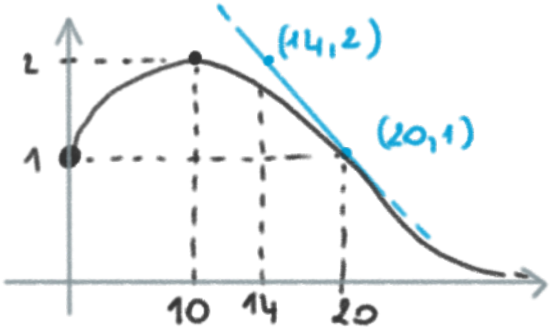
cresce da 0 a 10 e poi decresce

(i) Descrivere l'andamento della popolazione nel tempo.

(ii) Stimare il tasso istantaneo di crescita dopo 20 anni. $-1/6$

(i) La popolazione al tempo iniziale conta 1 milione di abitanti; nei primi 10 anni la popolazione aumenta fino a raddoppiare. Dopo 10 anni la popolazione inizia a diminuire; dopo altri 10 anni torna ad essere di 1 milione di individui. La popolazione continua a diminuire fino ad estinguersi.

(ii) Dobbiamo stimare la pendenza della tangente nel punto $(20,1)$; prendiamo un secondo punto sulla tangente $(14,2)$ e calcoliamo la pendenza della retta passante per $(\underset{t_1}{14},\underset{N(t_1)}{2})$ e $(\underset{t_2}{20},\underset{N(t_2)}{1})$



$$\underbrace{\text{tasso istantaneo}}_{\text{è la pendenza della retta tangente in }(20,1)} = \frac{1-2}{20-14} = -\frac{1}{6}\left[\text{milioni}/\text{anno}\right]$$

	$y=f(x)$	Oggetto che si muove di moto rettilineo, $s=s(t)$	Popolazione di $N=N(t)$ individui
variabile indipend.	x	t	t
funzione	$y=f(x)$	$s=s(t)$	$N=N(t)$
quoziente di Newton	$\Delta f/\Delta x$	$\Delta s/\Delta t$	$\Delta N/\Delta t$
lim( )	$\lim \frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\lim \frac{\Delta N}{\Delta t}$