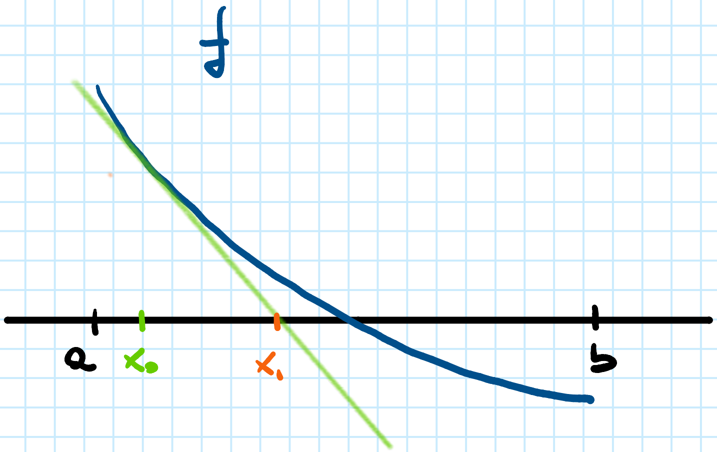
Lezione 18

In questa lezione vediamo un altro metodo per la risoluzione approssimata di equazioni:

Il metodo di Newton (o metodo delle tangenti)

Consideriamo $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile e t.c. $f(a)f(b)<0$



- Preso $x_0 \in [a,b]$, considero la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Determino lo zero della retta tangente, x_1

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Vedi notion

- Itero il procedimento, considerando la retta tangente in $(x_1, f(x_1))$ e poi calcolando il suo zero

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

- Si giunge in questo modo alla successione definita per ricorrenza

$$(*) \qquad \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

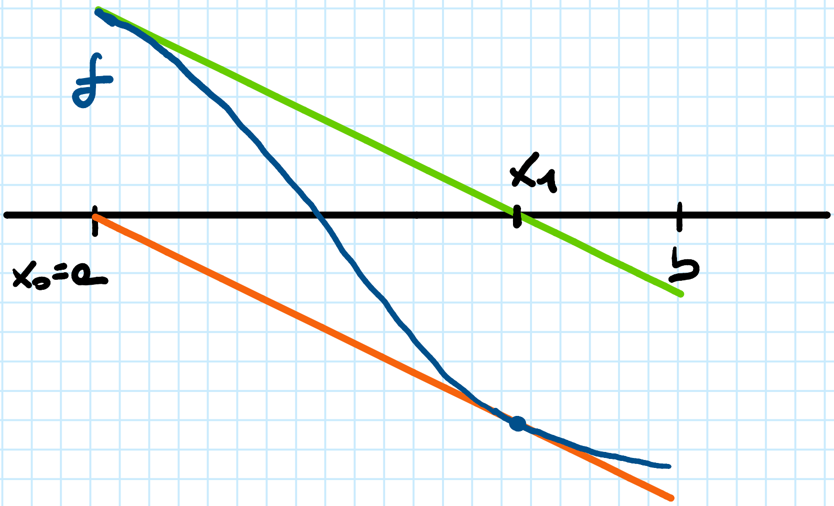
Sotto opportune ipotesi, questa successione converge ad uno zero di f

ad uno zero di f

Quali? Alcune osservazioni:

1) Affinché la formula (*) sia ben definita occorre che $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$
Quindi f è strettamente monotona e, dunque, f ha un unico zero $c \in (a,b)$

2) Anche supponendo ciò, la successione $\{x_n\}$ potrebbe non convergere



Il metodo dà luogo alla successione $x_0, x_1, x_0, x_1, \dots$

Enunciamo un teorema che assicura la convergenza del metodo di Newton

Teorema Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ due volte derivabile
Supponiamo inoltre che:

1) $f(a)f(b) < 0$
2) f' ed f'' hanno segno costante su $[a,b]$
3) $f(a)f''(a) > 0$ oppure 3') $f(b)f''(b) > 0$

2) f' ed f'' hanno segno costante su $[a,b]$

3) $f(a)f''(a)>0$ oppure 3') $f(b)f''(b)>0$

Allora esiste un unico $c\in(a,b)$ t.c. $f(c)=0$ e la successione $\{x_n\}$ definita da

$$\begin{cases} x_0=a \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad \text{se vale 3)}$$

oppure

$$\begin{cases} x_0=b \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad \text{se vale 3')}$$

converge a c.

<u>Osservazioni</u>

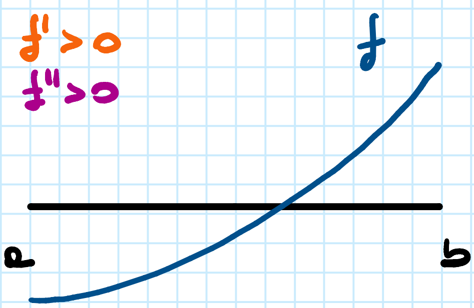
L'ipotesi 2) vuol dire che

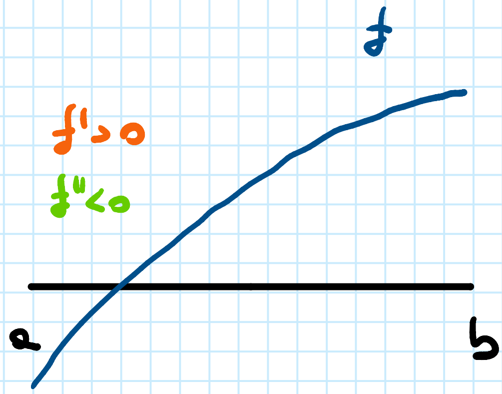
$f'>0$ o $f'<0$ su $[a,b]$

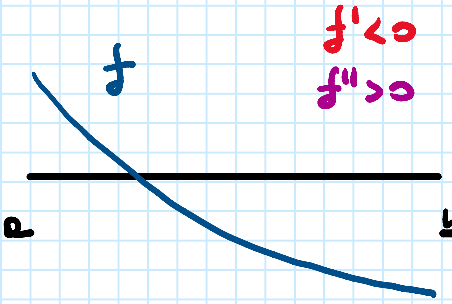
e che

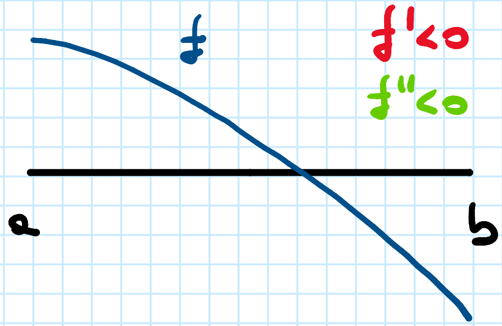
$f''>0$ o $f''<0$ su $[a,b]$

Ciascuno dei 4 casi è possibile:









1) sempre vale

Poiché vale $f(a)f(b)<0$ (ipotesi 1)
si ha che vale sempre

$$\underbrace{f(a)f''(a)>0}_{\text{ipotesi 3)}} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{f(b)f''(b)>0}_{\text{ipotesi 3')}}$$

dim si no l'ean

Vediamo la dimostrazione del teorema.

<u>dim</u> Come abbiamo già osservato, poiché $f(a)f(b)<0$ il Teorema di esistenza degli zeri assicura che esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c)=0$; inoltre poiché f' ha segno costante f è strettamente monotona e quindi tale punto c è unico.

Dobbiamo dunque dimostrare che:

A) $\{x_n\}$ è convergente

B) $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$

<u>Dimostrazione di A)</u>

Supponiamo che $f(a)>0$ e $f''(a)>0$

($\Rightarrow f$ decrescente e convessa; gli altri casi sono analoghi)

($\Rightarrow$ f decrescente e convessa; gli altri casi sono analoghi)

Si ottiene $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, c)$

Definiamo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \forall x \in [a, b]$$

e notiamo che:

- $g(c) = c$
- g è derivabile e

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x) f'(x) - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Dunque $g'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, c)$

e quindi g è strettamente crescente su $[a, c)$

Dimostreremo (per induzione) che

$$(**) \quad \boxed{x_n < x_{n+1} < c \qquad \forall n \geq 0}$$

Se $n = 0$, si ha $x_0 = a$ e

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a = x_0$$

Inoltre, essendo $x_0 < c$, dalla stretta monotonia di g su $[a, c)$ si ha $x_1 = g(x_0) < g(c) = c$

Quindi $x_0 < x_1 < c$ e la (**) è così dimostrata per $n = 0$

per $n=0$

Ora, sempre per la monotonia stretta di g su $[a,c)$

$$x_0 < x_1 < c \implies g(x_0) < g(x_1) < g(c)$$

$$\text{cioè} \quad x_1 < x_2 < c$$

che è la (**) per $n=2$

Procedendo per induzione la (**) è quindi dimostrata per ogni $n \geq 0$. Abbiamo quindi provato che la successione $\{x_n\}$ è (strettamente) crescente e limitata e dunque esiste $\beta \in (a,c]$ t.c.
$\lim_{n \to +\infty} x_n = \beta$

<u>Dimostrazione di B)</u>

Dobbiamo provare che $\beta = c$

Si ha
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \forall n \geq 0$$

Poiché f ed f' sono continue, possiamo passare al limite trovando

$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

da cui $f(\beta)=0$. Quindi, poiché f ha un unico zero, $\beta = c$ $\square$

<u>Osservazione</u> Quanto dimostrato al punto B) segue già dalla teoria delle successioni

segue già dalla teoria delle successioni definite per ricorrenza. Infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \beta \implies \beta \text{ è p.to fisso di } g$$
$$\iff g(\beta) = \beta$$
$$\iff f(\beta) = 0$$

Esempio: Verifichiamo che si può applicare il metodo all'equazione vista nella Lez 17 ovvero

$$f(x) = 0$$

con $f(x) = e^x + x - 3$ e $[a,b] = [0,3]$

Si ha infatti:

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in [0,3]$$
$$f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in [0,3]$$

Essendo $f(0) < 0 < f(3)$ dobbiamo considerare

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

trovando

$$x_1 \simeq 2,04743$$
$$x_2 \simeq 1,27063$$
$$x_3 \simeq 0,86877$$
$$x_4 \simeq 0,79408$$
$$x_5 \simeq 0,79206$$

$x_5 \simeq 0{,}79206$

$x_6 \simeq 0{,}79206$

Il metodo sembra quindi convergere piuttosto velocemente (si ricordi che il metodo di bisezione aveva bisogno di 12 iterazioni per approssimare lo zero con tolleranza di $\varepsilon = 10^{-3}$)