Prove d'esame di CMRO
Periodo 2012–2019

Roberto Aringhieri – Andrea Grosso

18 settembre 2019

Questa raccolta mette assieme i testi con le tracce di soluzione delle prove di esame di "*Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa*", a partire dagli appelli dell'Anno Accademico 2012–2013.

Due osservazioni importanti.

La **prima** è che le prove si riferiscono al programma svolto in quell'anno accademico.

La **seconda** è che le tracce d'esame possono contenere errori di battitura. Di conseguenza tutti i testi vanno considerati con **estremo spirito critico**.

Anno Accademico 2011-12

- Duale
- Teoria
- Se es. ottimo forse esiste ottimo!

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 31/01/2012

Esercizio 1. (10 punti) Il gatto Purrer deve organizzare lo smaltimento giornaliero dei rifiuti di Catville. I rifiuti di Catville sono giornalmente raccolti in quattro punti identificati come A, B, C, D e poi smistati a quattro centri di trattamento fuori città, identificati come $1, 2, 3, 4$. I punti di raccolta A, B, C, D producono rispettivamente 200, 150, 180 e 70 quintali al giorno di spazzatura. I quattro centri di trattamento $1, 2, 3, 4$ possono processare giornalmente $100, 200, 250$ e 180 quintali di spazzatura al giorno, rispettivamente. Per smistare i rifiuti la città paga ad un'impresa un costo di trasporto per ogni quintale di spazzatura. Il costo è diverso per ogni coppia punto di raccolta/centro di smistamento, secondo la seguente tabella. Purrer può pianificare quale quantità di rifiuti inviare da ogni punto di raccolta a ogni centro di smaltimento.

$$
\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \;1\; & \;\;2\; & \;3\; & \;\;4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
12 & 7 & 2 & 9 \\
3 & 2 & 8 & 1 \\
10 & 4 & 9 & 2 \\
5 & 11 & 7 & 10
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

(1) Formulare il programma lineare che serve al gatto Purrer per garantire lo smaltimento completo dei rifiuti al minimo costo giornaliero. (6 punti)

(2) Se la ditta appaltatrice, per limitazioni sui mezzi di trasporto, non può coprire più di 7 tratte punto di raccolta/centro di trattamento, come occorre modificare il programma lineare? (4 punti)

Soluzione suggerita. Siano: i indice su A, B, C, D; j indice su $1, 2, 3, 4$; c_{ij} il costo di trasporto dal punto di raccolta i al centro di smistamento j. Il problema al punto 1 richiede di decidere la quantità di materiale da trasportare da i a j. Posto quindi x_{ij} variabile in $\mathbb{Z}^+$ che rappresenta la quantità trasportata da i a j, il problema al punto 1 può essere formulato come segue.
La funzione obiettivo risulta

$$\min z = \sum_{i=A}^{D} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}.$$

I vincoli da rappresentare sono di due tipi. Il primo prevede che tutto il materiale nei punti di raccolta sia trasportato ai centri di smistamento mentre il secondo prevede che la capacità massima dei singoli centri non sia superata.

Per il primo tipo di vincolo abbiamo che

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} = 200$$
$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} = 150$$
$$x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} = 180$$
$$x_{D1} + x_{D2} + x_{D3} + x_{D4} = 70$$

mentre per il secondo risulta

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} + x_{D1} \leq 100$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + x_{D2} \leq 200$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} + x_{D3} \leq 250$$
$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} + x_{D4} \leq 180$$

Per il problema posto invece al secondo punto è necessario modellare la scelta delle (al più) 7 tratte. Per fare questo si introduce la variabile binaria z_{ij} uguale a 1 se viene coperta la tratta da i a j, 0 altrimenti. I vincoli da aggiungere al modello appena presentato seguono.
Per modellare la scelta di coprire al più 7 tratte occorre scrivere che

$$\sum_{i=A}^{D} \sum_{j=1}^{4} z_{ij} \leq 7$$

mentre quello che segue modella il legame tra variabili z e x, ovvero

$$x_{ij} \leq M z_{ij}, \qquad \forall i, j$$

utilizzando il concetto di *big M*.
Una stima di M può essere data studiando i valori massimi che possono essere trasportati da i a j senza eccedere la capacità di j. Ad esempio, il massimo che può essere trasportato da A a 1 è dato dal minimo tra 200 e 100. Replico lo stesso ragionamento per ogni coppia (i, j) ed ottengo che $M = 200$. □

corto e duale

Esercizio 2. (13 punti) Si consideri il seguente programma lineare, dove α è un parametro reale.

$$\max\ (1+\alpha)x_1 + 3x_2$$

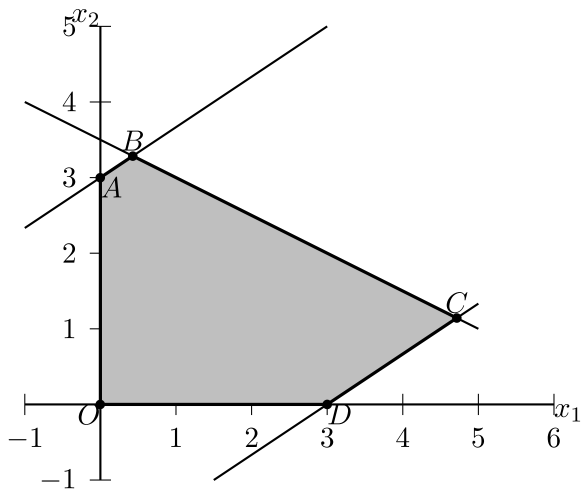
soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(1) Rappresentare la regione ammissibile S_a del programma. (2 punti)
(2) Per $\alpha = 0$ determinarne una soluzione ottima. (1 punto)
(3) Identificare le soluzioni ammissibili di base (variabili in base e loro valori) del problema. Qual è la base ottima (per $\alpha = 0$)? Ci sono basi degeneri? (3 punti)
(4) Scrivere la forma standard e il duale del programma lineare. (2 punti)

(5) Determinare la soluzione ottima duale. (2 punti)
(6) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la base ottima determinata ai punti (2)–(3) rimane ottima? (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile è rappresentata in figura.



L'ottimo per $\alpha = 0$ si trova (studiando le curve di livello oppure calcolando la funzione obiettivo nei vertici, trattandosi di regione chiusa e limitata) nel punto B, di coordinate $x_1^* = \frac{3}{7}, x_2^* = \frac{23}{7}$.
Il programma in forma standard è

$$
\begin{aligned}
\max\ z = &(1+\alpha)x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\
& 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6 \\
& -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 9 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Le soluzioni ammissibili di base sono associate ai vertici O, A, B, C, D; i valori delle variabili di slack si deducono sostituendo le corrispondenti coordinate x_1, x_2 nei vincoli. Risultano quindi (elencando solo le variabili in base) le seguenti basi ammissibili.

Vertice	Variabili di base			
O	$x_3 = 7$	$x_4 = 6$	$x_5 = 9$	
A	$x_2 = 3$	$x_3 = 1$	$x_4 = 15$	
B	$x_1 = \frac{3}{7}$	$x_2 = \frac{23}{7}$	$x_4 = 15$	(ottima)
C	$x_1 = \frac{33}{7}$	$x_2 = \frac{8}{7}$	$x_5 = 15$	
D	$x_2 = 3$	$x_3 = 1$	$x_5 = 15$	

Non risultano basi degeneri.

chiedo

Il programma duale (scritto sempre per $\alpha = 0$) risulta come segue.

$$\begin{aligned} \min \ z = & 7u_1 + 6u_2 + 9u_3 \\ \text{soggetto a} \quad & u_1 + 2u_2 - 2u_3 \geq 1 \\ & 2u_1 - 3u_2 + 3u_3 \geq 3 \\ & u_1 \geq 0 \\ & u_2 \geq 0 \\ & u_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Avendo nella soluzione ottima primale $x_1, x_2, x_4 > 0$ le condizioni di complementarietà primale-duale richiedono che all'ottimo duale valgano le condizioni

$$\begin{cases} u_1^* + 2u_2^* - 2u_3^* = 1 \\ 2u_1^* - 3u_2^* + 3u_3^* = 3 \\ u_2^* = 0 \end{cases} \implies u_1^* = \frac{9}{7}, u_2^* = 0, u_3^* = \frac{1}{7}.$$

La riformulazione del programma (in forma standard) rispetto alla base ottima risulta essere

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{3}{7} - \tfrac{3}{7}x_3 + \tfrac{2}{7}x_5 \\ x_4 &= 15 \qquad\quad - x_5 \\ x_2 &= \tfrac{23}{7} - \tfrac{2}{7}x_3 - \tfrac{1}{7}x_5 \\ z &= \left(\tfrac{72}{7} + \tfrac{3}{7}\alpha\right) + \left(-\tfrac{3}{7}\alpha - \tfrac{9}{7}\right)x_3 + \left(\tfrac{2}{7}\alpha - \tfrac{1}{7}\right)x_5 \end{aligned}$$

I costi ridotti di x_3, x_5 sono ≤ 0 per $-3 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. □

Esercizio 3. (4 punti) Per la seguente matrice $\mathbf{A}$, determinare quanto richiesto.

(1) Il rango $\rho(\mathbf{A})$. (2 punti)
(2) Una base dello spazio delle righe. (1 punto)
(3) Dire se il vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ appartiene allo spazio delle colonne. (1 punto)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Soluzione suggerita. Con una riduzione della matrice completa $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{v})$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi $\rho(\mathbf{A}) = 3$, una base dello spazio delle righe è formata da tutte e tre le righe della matrice, e $\mathbf{v}$ appartiene allo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$. □

Esercizio 4. (3 punti) Dato il seguente problema in forma standard

$$\max\ -7x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 &&= 2\\ &-5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &&= 1\\ &x_1, \dots, x_6 \geq 0, \end{aligned}$$

dire se esiste una soluzione di base ammissibile

Soluzione suggerita. Non avendo una base ammissibile immediatamente disponibile, occorre risolvere il problema di prima fase

$$\max\ -s_1$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 + s_1 &&= 2\\ &-5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &&= 1\\ &x_1, \dots, x_6, s_1 \geq 0. \end{aligned}$$

In questo caso solo una variabile artificiale s_1 è strettamente necessaria, in quanto si vede che $B^0 = \{s_1, x_6\}$ forma già una base ammissibile. Procedendo si ottiene

$$\mathbf{T}(B^0) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{4} & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ -5 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} s_1 = 2 - 4x_1 - 3x_2 - 2x_4 + x_5\\ x_6 = 1 + 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$z = -2 + 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5$$

$$x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0$$

Facendo pivot sul coefficiente $\alpha_{11} = 4$ si ottiene $B^1 = B^0 \cup \{x_1\} \setminus \{s_1\}$, ovvero

$$\mathbf{T}(B^1) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}s_1\\ x_6 = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}x_2 - x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 - x_6 - \frac{5}{4}s_1 \end{cases}$$

CRVCO

$$z = 0 - s_1$$

$$x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0$$

Considerato che il programma di prima fase termina con una soluzione ottima $z^* = 0$ si può affermare che esiste una soluzione di base ammissibile per il problema originario. □

Rifaccio

Esercizio 5. (3 punti) Si consideri un generico insieme

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\},$$

dove $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, e si dimostri che

> se $\mathbf{x} \in S$ è un vertice di S, allora l'insieme di vettori-colonna $\{\mathbf{A}_j \colon x_j > 0\}$ è un insieme libero.

Soluzione suggerita. La dimostrazione è reperibile sugli appunti. □

T2

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 17/02/2012

Esercizio 1. (10 punti) Il sig. Ibrahim Rossi vuole impegnare del denaro in alcuni fondi di investimento. A tal fine ha selezionato cinque fondi, dei quali conosce il prezzo unitario delle quote, il rendimento atteso a un anno e un indice numerico di rischio (più alto il numero, maggiore il rischio). La situazione è rappresentata nella seguente tabella,

Fondo	Prezzo quota	Rendim.	Rischio
1	1000	5%	2.5
2	700	9%	3.2
3	2500	11%	4
4	300	2.5%	1
5	2000	4%	4.5

Per ogni fondo si può solo acquistare un numero intero di quote. Il sig. Rossi dispone di 200000 euro (non è necessario che siano tutti investiti) e vuole

- differenziare l'investimento, investendo in ogni fondo non più del 30% del capitale impegnato;
- investire almeno il 40% del capitale impegnato in fondi con indice di rischio ≤ 3.5;
- ottenere un indice medio pesato di rischio non superiore a 2.8 per l'investimento complessivo.

Insieme al suo fedele gatto Purrer, il sig. Rossi scrive il modello di programmazione lineare per pianificare i suoi investimenti ottenendo il massimo rendimento atteso.

(1) Scrivere il modello lineare sviluppato dal sig. Rossi e da Purrer. (6 punti)
(2) Se il sig. Rossi vuole un piano di investimento che usi al più tre fondi su cinque, come deve modificare il modello? (4 punti)

Soluzione suggerita. Introduciamo la variabile decisione $x_i \in \mathbb{Z}^+$ che modella la scelta di quante quote acquistare del fondo i, con $i = 1, \dots, 5$. Denotiamo poi con c_i, r_i e q_i rispettivamente il prezzo per quota, il rendimento ed il rischio dell'investimento $i = 1, \dots, 5$.
Per quanto riguarda il punto (1) abbiamo i seguenti risultati.
La funzione obiettivo può essere scritta come

$$\max z = \sum_{i=1}^{5} (r_i \, c_i) x_i$$

dove $r_i \, c_i$ rappresenta il rendimento in denaro per ogni singola quota.
Per prima cosa occorre determinare il capitale investito che denotiamo con C:

$$\sum_{i=1}^{5} c_i x_i = C.$$

Successivamente si possono scrivere gli altri vincoli come segue:

$$
\begin{aligned}
&C \leq 200000, && \text{il capitale investito non può superare quello disponibile,}\\
&c_i x_i \leq \frac{3}{10}C,\ i = 1,\dots,5, && \text{differenziare l'investimento,}\\
&c_1x_1 + c_2x_2 + c_4x_4 \geq \frac{2}{5}C, && \text{almeno il 40\% con rischio} \leq 3.5,\\
&\sum_{i=1}^{5} q_i x_i \leq 2.8 \sum_{i=1}^{5} x_i, && \text{rischio medio pesato.}
\end{aligned}
$$

L'ultimo vincolo definisce una media pesata sul numero di quote; volendo mediare sul capitale si può usare

$$\sum_{i=1}^{5} q_i c_i x_i \leq 2.8C$$

(entrambe le scelte sono corrette: si tratta di interpretazione del testo).
Per quanto riguarda invece il punto (2), occorre innanzitutto introdurre un'ulteriore variabile decisionale binaria per modellare la scelta di investimento o meno su un certo fondo, ovvero z_i che assumerà valore 1 se si sceglie di investire nel fondo i, 0 altrimenti, con $i = 1,\dots,5$.
Il primo vincolo modella la volontà di investire su al più 3 fondi

$$\sum_{i=1}^{5} z_i \leq 3$$

mentre il secondo lega la decisione inerente l'investimento su un certo fondo con l'acquisto delle quote, ovvero

$$x_i \leq M_i z_i, \qquad i = 1,\dots,5.$$

Si osserva che M_i può esser facilmente stimato per ogni singolo fondo, ovvero

$$M_i = \frac{200000}{c_i} + 1, \qquad i = 1,\dots,5.$$

□

Esercizio 2. (11 punti) È dato il seguente programma lineare.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 + x_2 + x_3\\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 4\\
& -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(1) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(2) ~~Scriverne il duale~~. (2 punti)
(3) Per mezzo della fase 1 del simplesso, determinare una base ammissibile del programma primale. (2 punti)
(4) Risolvere il duale col metodo grafico (attenzione nel disegnare la regione ammissibile duale!). (2 punti)
(5) Determinare la base ottima del primale. (2 punti)

(6) Se i termini noti dei due vincoli fossero, anzichè 4 e 8, rispettivamente $4+t$ e $8-\frac{1}{2}t$, per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la base determinata al punto precedente rimarrebbe ottima e ammissibile? (2 punti)

Soluzione suggerita. Il problema in forma standard risulta:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ & -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Determiniamo ora una base ammissibile primale usando il simplesso di prima fase sulla seguente riformulazione:

$$\begin{aligned} \max \quad & \xi = -s_1 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + s_1 = 4 \\ & -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Si osserva che è stato sufficiente aggiungere una sola variabile artificiale. La base $B^0 = \{s_1, x_5\}$ forma una base ammissibile. Procedendo si ottiene:

$$\mathbf{T}(B^0) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{2} & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} s_1 = 4 - 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_5 = 8 + x_1 - 3x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$\xi = -4 + 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4$$

$$x_1, \ldots, x_5, s_1 \geq 0$$

Facendo pivot sul coefficiente $\alpha_{11} = 4$ si ottiene $B^1 = B^0 \cup \{x_1\} \setminus \{s_1\}$, ovvero

$$\mathbf{T}(B^1) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}s_1 \\ x_5 = 10 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}s_1 \end{cases}$$

$$\xi = -s_1$$

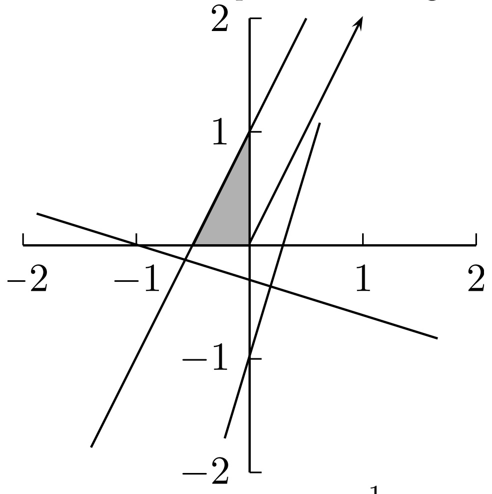
$$x_1, \ldots, x_5, s_1 \geq 0$$

Considerato che il programma di prima fase termina con una soluzione ottima $\xi^* = 0$ si può affermare che la base B^1 è una base ammissibile per il problema primale.

Il duale del problema in forma standard risulta:

$$
\begin{array}{llr}
 & \min & w = 4u_1 + 8u_2 \\
(1) & \text{soggetto a} & 2u_1 - u_2 \geq -1 \\
(2) & & u_1 + 3u_2 \geq -1 \\
(3) & & -3u_1 + u_2 \geq -1 \\
(4) & & -u_1 \geq 0 \\
(5) & & u_2 \geq 0.
\end{array}
$$

La regione ammissibile del duale è riportata nella figura



ed individuata dal politopo di vertici $(0,0)$, $(-\frac{1}{2},0)$ e $(0,1)$.

Col metodo grafico si individua come punto di ottimo il vertice $(-\frac{1}{2},0)$ che determina un valore ottimo $w^* = -2$.
Sul punto di ottimo sono attivi (= soddisfatti con l'uguaglianza) i vincoli (1) e (5) corrispondenti alle variabili x_1 e x_5 del primale. Gli altri vincoli sono invece non attivi per cui le corrispondenti variabili del primale sono necessariamente poste a 0, ovvero $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ per soddisfare le condizioni di complementarietà.
Eliminando le variabili a 0 nei vincoli del primale, otteniamo facilmente che la soluzione ottima primale è individuata da $x_1^* = 2$, $x_5^* = 10$ mentre $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ per un valore $z^* = -2$.
Infine, per quanto riguarda l'ultimo punto dell'esercizio, si può ripetere il conto appena effettuato per verificare l'ammissibilità rispetto il parametro t ottenendo $x_1 = 2 + \frac{1}{2}t$ e $x_5 = 10$. Di conseguenza, l'ammissibilità è garantita ponendo $x_1 \geq 0$, e questo succede per $t \geq -4$.
Per quanto riguarda invece l'ottimalità si può osservare che nella funzione obiettivo non entra il parametro t. Quindi nella riformulazione, t entrerà solo come coefficiente di termini noti e mai a moltiplicare una variabile fuori base. Di conseguenza, al variare di t, ogni soluzione di base ammissibile è anche ottima. Ai fini puramente esplicativi, si possono recuperare per la riformulazione i conti fatti per il simplesso di prima fase con l'accortezza di

sostituire i termini noti in funzione del parametro t. Si ottiene infatti:

$$\mathbf{T}(B^*) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 2+\frac{1}{2}t \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = 10 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

$$z = -x_1 - x_2 - x_3 = -2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

□

Esercizio 3. (4 punti) Si consideri la seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare il rango di $\mathbf{A}$. (2 punti)

(2) Determinare una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ che contenga la terza colonna. (1 punto)

(3) Determinare se il vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

fa parte dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$. (1 punto)

Soluzione suggerita. Con una riduzione della matrice completa $(\mathbf{A} \mid \mathbf{v})$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Dalla riduzione si può quindi affermare che il rango di $\mathbf{A}$ è uguale a 2 ovvero pari al numero di righe non nulle nella matrice ridotta. Inoltre si osserva che il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene allo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ in quanto la riduzione evidenzia una inconsistenza nella terza riga.
Infine, per ottenere una base dello spazio delle colonne che contenga la terza colonna basta fare pivot su uno dei due 1 nella terza colonna della matrice ridotta. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 4. (4 punti) Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi e quali no, motivando le risposte.
(1) $S_1 = \{(x_1, x_2)\colon 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.
(2) $S_2 = \{(x_1, x_2)\colon (x_1, x_2) = (1, -2) + t(\frac{3}{2}, -3)\}$.
(3) $S_1 \cup S_2$.
(4) $S_1 \cap S_2$.

Soluzione suggerita. I primi due sottospazi sono rette passanti per l'origine e quindi sono degli sottospazi in quanto verificano le 3 proprietà che definiscono, appunto, un sottospazio.
L'unione non e' un sottospazio in quanto, ad esempio, non mantiene la proprietà della somma. Al contrario si mostra facilmente che lo e' l'intersezione. □

Esercizio 5. (4 punti) Si consideri un programma lineare $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}\colon \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+\}$. Dimostrare che, se $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ è una soluzione ottima di tale problema, allora non può esistere un vettore $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ che soddisfi simultaneamente le seguenti condizioni:

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{c}^T\mathbf{y} > 0$$
$$y_j \geq 0 \qquad \text{per ogni } j \text{ tale che } x_j = 0.$$

Soluzione suggerita. La dimostrazione è reperibile sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 18/06/2012

Esercizio 1. (10 punti) Il gatto Purrer è sempre alle prese con lo smaltimento dei rifiuti urbani di Catville. L'amministrazione deve appaltare il trasporto periodico di rifiuti solidi urbani da tre centri di raccolta C_1, C_2, C_3 a quattro centri di smaltimento S_1, S_2, S_3, S_4 . I tre centri di raccolta concentrano rispettivamente, 100, 200 e 350 tonnellate di rifiuti da trasportare. I quattro centri di smaltimento hanno ognuno la capacità di lavorare 200 tonnellate, e non vanno sovraccaricati. Per il trasporto dei rifiuti sono disponibili due ditte A e B, che per ogni tratta $C_i - S_j$ applicano differenti tariffe di trasporto in euro/tonnellata, specificate di seguito.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 7 & 9 & 2 \\ 8 & 3 & 7 & 1 \\ 11 & 2 & 2 & 21 \end{pmatrix} \end{array} \\ \text{Ditta } A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 1 \\ 12 & 3 & 2 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \\ \text{Ditta } B \end{array}$$

La ditta B ha fatto sapere che accetterà tratte in appalto solo se le verrà garantito il trasporto complessivo di almeno 200 tonnellate di rifiuti.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare l'assegnazione delle tratte a costo complessivo minimo. (6 punti)

(b) Se ogni tratta $C_i - S_j$ può essere appaltata ad una sola delle due ditte (se vi lavora A non vi lavora B, e viceversa), come va modificato il modello per tenere in considerazione questo requisito? (4 punti)

Soluzione suggerita. Introduciamo le variabili decisionali $x_{ij}^A \in \mathbb{Z}^+$ e $x_{ij}^B \in \mathbb{Z}^+$ che modellano la quantità di rifiuto trasportata dalla ditta A e B da C_i verso S_j. Denotiamo poi con c_{ij}^A e c_{ij}^B il costo per tratta della ditta A e B.

Per quanto riguarda il punto (a) abbiamo il seguente modello di PL.

La funzione obiettivo è data dalla somma dei costi di trasporto delle due ditte, ovvero:

$$\min z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} \left(c_{ij}^A x_{ij}^A + c_{ij}^B x_{ij}^B \right).$$

I vincoli che seguono modellano il trasporto dei rifiuti dai centri di raccolta a quelli di smaltimento. Abbiamo quindi

$$\sum_{i=1}^{3} \left(x_{ij}^A + x_{ij}^B \right) \leq 200 \qquad j = 1, \ldots, 4$$

per i centri di smaltimento, e

$$\sum_{j=1}^{4} \left(x_{ij}^A + x_{ij}^B\right) = \begin{cases} 100 & i = 1 \\ 200 & i = 2 \\ 350 & i = 3 \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, 3$$

per i centri di raccolta. Infine il vincolo sulle richieste della ditta B si scrive come

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}^B \geq 200w$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}^B \leq Mw$$

dove $w \in \{0, 1\}$ vale 1 se e solo se si sceglie di utilizzare la ditta B su qualche tratta. Si osserva che, potenzialmente, esiste un'interpretazione del testo alternativa, ovvero quella per la quale si è deciso a priori di assegnare delle tratte a B. In questo caso abbiamo il seguente vincolo:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}^B \geq 200.$$

Per quanto riguarda invece il punto (b) abbiamo le seguenti modifiche al modello precedente.
Introduciamo una variabile binaria y_{ij} che assume valore 1 se la tratta è assegnata alla ditta A, 0 se assegnata alla ditta B. Supposto di avere una valutazione superiore M del carico trasportato dal generico centro di raccolta i al generico centro di smaltimento j, i vincoli risultano i seguenti:

$$x_{ij}^A \leq M y_{ij}\ , \quad x_{ij}^B \leq M(1 - y_{ij})\ , \qquad \forall i \forall j.$$

Un modo **alternativo** ed **equivalente** è quello che prevede l'uso di due tipi di variabili binarie y_{ij}^A e y_{ij}^B che assumono valore 1 se la tratta $i - j$ è appaltata alla ditta A e B, rispettivamente; 0, altrimenti. I vincoli sono i seguenti:

$$x_{ij}^A \leq M y_{ij}^A\ , \quad x_{ij}^B \leq M y_{ij}^B\ , \quad y_{ij}^A + y_{ij}^B = 1\ , \qquad \forall i \forall j.$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{lrrl} \max\ z = & -x_1 + 2x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 + & x_2 \leq & 5 \\ & -4x_1 + & 6x_2 \leq & 15 \\ & x_1 & \leq & 3 \\ & & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$

(i) Rappresentare la regione ammissibile del problema nel piano (x_1, x_2). (2 punti)
(ii) Trasformare il problema in forma standard. (1 punto)

(iii) Dire quante sono, e quali sono, le basi ammissibili del problema (le basi vanno espresse rispetto alla forma standard. (3 punti)

(iv) Il punto ($x_1 = 3, x_2 = 0$) corrisponde ad una base ammissibile del problema. Partendo da tale base, determinare la soluzione ottima del problema utilizzando l'algoritmo del simplesso. (3 punti)

(v) Scrivere il duale del problema e determinarne la soluzione ottima. (3 punti).

Soluzione suggerita. Il problema in forma standard è

$$
\begin{array}{llrrrl}
\max & z = & -x_1 + 2x_2 & & & \\
\text{soggetto a} & & x_1 + & x_2 + x_3 = & 5 & \\
 & & -4x_1 + & 6x_2 + x_4 = & 15 & \\
 & & x_1 & + x_5 = & 3 & \\
 & & & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & &
\end{array}
$$

La regione ammissibile è rappresentata in Figura 1.

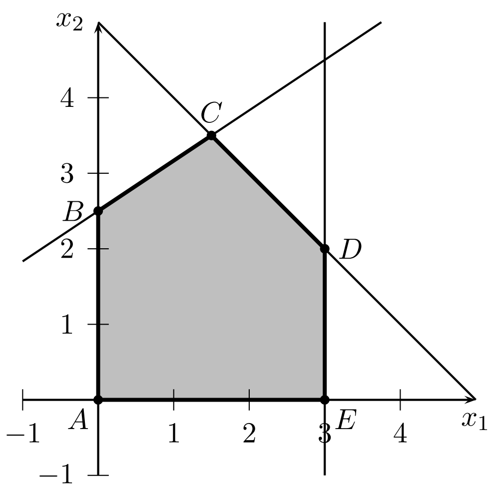


FIGURA 1. Regione ammissibile per l'esercizio 2.

Le soluzioni ammissibili di base corrispondono ai vertici $A, \dots, E$, rispettivamente: $\{x_3, x_4, x_5\}$, $\{x_2, x_3, x_5\}$, $\{x_1, x_2, x_5\}$, $\{x_1, x_2, x_4\}$, $\{x_1, x_3, x_4\}$. Partendo dalla base $\{x_1, x_3, x_4\}$ il simplesso itera come segue.

$$\begin{array}{rrrr} \max & z = & -3 & +2x_2 & +x_5 \\ & x_1 = & 3 & & -x_5 \\ & x_4 = & 27 & -6x_2 & -4x_5 \\ & x_3 = & 2 & -x_2 & +x_5 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1,\dots,x_5 \geq 0} \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr} \max & z = & 1 & -2x_3 & +3x_5 \\ & x_1 = & 3 & & -x_5 \\ & x_4 = & 15 & +6x_3 & -10x_5 \\ & x_2 = & 2 & -x_3 & +x_5 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1,\dots,x_5 \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{11}{2} & -\frac{1}{5}x_2 & -\frac{3}{10}x_5 \\ & x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}x_2 & +\frac{1}{10}x_4 \\ & x_5 = & \frac{3}{2} & +\frac{3}{5}x_3 & -\frac{1}{10}x_4 \\ & x_2 = & \frac{7}{2} & +\frac{2}{5}x_3 & -\frac{1}{10}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1,\dots,x_5 \geq 0} \end{array}$$

Il duale del problema è il seguente.

$$\begin{aligned} \max\ & z = 5u_1 + 15u_2 + 3u_3 \\ \text{soggetto a}\quad & u_1 - 4u_2 + u_3 \geq -1 \\ & u_1 + 6u_2 \geq 2 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Soluzione ottima duale $u_1^* = \frac{1}{5}, u_2^* = \frac{3}{10}, u_3^* = 0$. □

Esercizio 3. (5 punti) Data la seguente matrice, $\mathbf{A}$, determinare

(1) il rango, (2 punti)
(2) una base dello spazio delle righe, (1 punto)
(3) una base dello spazio delle colonne che contenga la quarta colonna $\mathbf{A}_4$.(2 punti)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soluzione suggerita. La matrice ha rango 2: si può verificare facilmente che $\mathbf{A}^1$ e $\mathbf{A}^2$ sono linearmente indipendenti, mentre $\mathbf{A}^3 = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2)$. Quindi $\{\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2\}$ è una base dello spazio delle righe. Per generare una base dello spazio delle colonne contenente la quarta colonna basta accostare a $\mathbf{A}_4$ un'altra colonna linearmente indipendente da essa. Ad esempio, $\{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$ va bene. □

Esercizio 4. (6 punti) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale della programmazione lineare.

Soluzione suggerita. La dimostrazione è reperibile sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 02/07/2012

Esercizio 1. (12 punti) Il gatto Purrer è diventato selezionatore arbitrale per il campionato australiano di calcio sul fango. Oltre all'insieme degli arbitri R ed all'insieme di partite M, sono note le seguenti informazioni per ogni arbitro $r \in R$ rispetto la partita $m \in M$:

- la matrice delle incompatibilità
$$I = [i_{r,m}] = \begin{cases} 1 & \text{se arbitro } r \text{ incompatibile con partita } m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$
- la matrice delle distanze
$$D = [d_{r,m}] = \text{distanza percorsa da arbitro } r \text{ per partita } m.$$

Compito del gatto Purrer è quindi quello di assegnare uno ed un solo arbitro ad ogni partita evitando assegnamento incompatibili. Nota che gli arbitri disponibili sono più delle partite da giocare, ovvero $|M| < |R|$.

(1) Scrivere il programma lineare per aiutare il gatto Purrer a minimizzare le distanze complessive percorse. (6 punti)

Dopo un anno di polemiche sugli arbitraggi, la federazione australiana ha deciso di modificare la selezione in modo da assegnare ad ogni partita una coppia di arbitri (r^e, r^p) pescando r^e ed r^p rispettivamente dall'insieme degli arbitri esperti R^e e da quello dei principianti R^p tali che $R = R^e \cup R^p$. Gli arbitri in cambio hanno richiesto di armonizzare le distanze percorse dalle coppie di arbitri.

(2) Scrivere il programma lineare per aiutare il gatto Purrer a minimizzare la massima distanza percorsa complessivamente da ogni coppia di arbitri. (6 punti)

Soluzione suggerita. Si tratta quindi di decidere quali arbitro $r \in R$ assegnare alla partita $m \in M$. Per modellare tale decisione, introduciamo la seguente variabile decisionale:
$$x_{rm} = \begin{cases} 1 & \text{se assegno arbitro } r \text{ a partita } m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad r \in R, \quad m \in M.$$

Considerato il punto (1), abbiamo i seguenti vincoli:
$$\sum_{r \in R} x_{rm} = 1, \qquad m \in M, \tag{1}$$
$$\sum_{m \in M} x_{rm} \leq 1, \qquad r \in R, \tag{2}$$
$$\sum_{r \in R} i_{rm} x_{rm} = 0, \qquad m \in M. \tag{3}$$

I primi due insiemi di vincoli modellano l'assegnamento in modo che ogni partita abbia un arbitro. Nota che il secondo vincolo deve essere con $\leq$ in quanto il numero di arbitri è maggiore delle partite da arbitrare. Infine, il terzo vincolo modella le incompatibilità tra arbitri e partite: per ogni coppia (r, m) incompatibile $i_{rm} = 1$ deve risultare $x_{rm} = 0$ affinché il vincolo sia soddisfatto; viceversa, quando $i_{rm} = 0$ le variabili corrispondenti a coppie non incompatibili posso assumere entrambi i valori 0 e 1. La funzione obiettivo è la seguente:

$$\min z = \sum_{r \in R} \sum_{m \in M} d_{rm} x_{rm}.$$

Per quanto riguarda il punto (2), si osserva che cambiano solo gli insiemi di riferimento degli arbitri, ovvero $R^e \cup R^p = R$. Per quanto riguarda i vincoli (1)–(3), si modificano "duplicando" i vincoli per via dello "sdoppiamento" di R:

$$\sum_{r \in R^e} x_{rm} = 1, \qquad m \in M, \tag{4}$$

$$\sum_{r \in R^p} x_{rm} = 1, \qquad m \in M, \tag{5}$$

$$\sum_{m \in M} x_{rm} \leq 1, \qquad r \in R^e, \tag{6}$$

$$\sum_{m \in M} x_{rm} \leq 1, \qquad r \in R^p, \tag{7}$$

$$\sum_{r \in R^e} i_{rm} x_{rm} = 0, \qquad m \in M. \tag{8}$$

$$\sum_{r \in R^p} i_{rm} x_{rm} = 0, \qquad m \in M. \tag{9}$$

Per modellare invece la nuova funzione obiettivo si introduce la seguente variabile y che misura la massima distanza percorsa dagli arbitri assegnati ad un match $m \in M$. Abbiamo quindi il seguente nuovo vincolo

$$\sum_{r \in R^e} d_{rm} x_{rm} + \sum_{r \in R^p} d_{rm} x_{rm} \leq y, \qquad m \in M.$$

La nuova funzione obiettivo risulta quindi

$$\min z = y.$$

<u>Nota</u>: una soluzione che sdoppia anche le variabili x_{rm} in x^e_{rm} e x^p_{rm} è da considerarsi comunque valida; nella soluzione proposta non si è scelta questa strada in quanto lavorando con indici appartenenti ad insiemi non risulta necessario (ad esempio, se $R = \{1, 2, \dots, 10\}$ gli arbitri esperti possono essere quelli con indice pari e gli altri i principianti).

$\square$

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \min\ z = & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 4x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Disegnare la regione ammissibile nel piano (x_1, x_2). (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (2 punti)
(iii) Dire quante e quali sono le basi ammissibili del programma (esprimere le basi rispetto alle variabili della forma standard). (2 punti)
(iv) Il punto $A(x_1 = 3, x_2 = 0)$ nel piano (x_1, x_2) corrisponde ad una base ammissibile della forma standard. Partendo da tale base, determinare la soluzione ottima utilizzando l'algortimo del simplesso. (3 punti)
(v) Scrivere il duale del programma e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile è rappresentata in Figura 1. Il problema

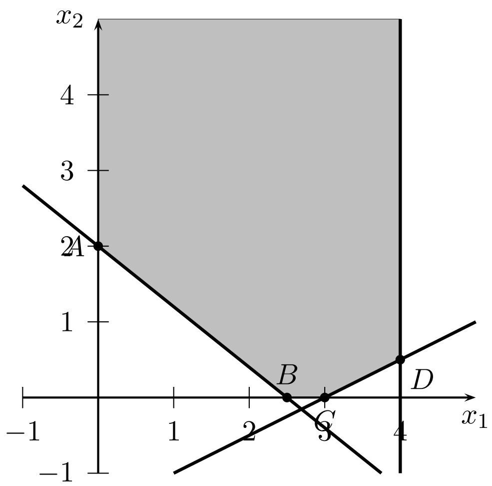


FIGURA 1. Regione ammissibile per l'esercizio 2.

in forma standard è il seguente.

$$\begin{aligned} \max\ z = & -x_1 - x_2 \\ \text{subject to}\quad & 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1 + x_5 = 4 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Le basi ammissibili del problema corrispondono ai vertici

$$A(x_2 = 2, x_4 = 7, x_5 = 4) \qquad C(x_1 = 3, x_3 = 2, x_5 = 1)$$
$$B(x_1 = \tfrac{5}{2}, x_4 = \tfrac{1}{2}, x_5 = \tfrac{3}{2}) \qquad D(x_1 = 4, x_2 = \tfrac{1}{2}, x_3 = \tfrac{17}{2})$$

Il punto indicato dal testo corrisponde al vertice C. Riformulando rispetto alla base $\{x_1, x_3, x_5\}$ e applicando l'algoritmo del simplesso si ottiene quanto segue.

$$
\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & -3 & -3x_2 & +x_4 \\
 & x_1 = & 3 & +2x_2 & -x_4 \\
 & x_3 = & 2 & +13x_2 & -4x_4 \\
 & x_5 = & 1 & -2x_2 & +x_4
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & -\frac{5}{2} & +\frac{1}{4}x_2 & -\frac{1}{4}x_3 \\
 & x_1 = & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4}x_2 & +\frac{1}{4}x_3 \\
 & x_4 = & \frac{1}{2} & +\frac{13}{4}x_2 & -\frac{1}{4}x_3 \\
 & x_5 = & \frac{3}{2} & +\frac{5}{4}x_2 & -\frac{1}{4}x_3
\end{array}
\rightarrow
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & -2 & -\frac{1}{5}x_1 & -\frac{1}{5}x_3 \\
 & x_2 = & 2 & -\frac{4}{5}x_1 & +\frac{1}{5}x_3 \\
 & x_4 = & 7 & -\frac{13}{5}x_1 & +\frac{3}{5}x_3 \\
 & x_5 = & 4 & -x_1 &
\end{array}
$$

Il duale del problema è

$$
\begin{aligned}
\min \ w = & 10u_1 + 3u_2 + 4u_3 \\
\text{soggetto a} \quad & 4u_1 + u_2 + u_3 \geq -1 \\
& 5u_1 - 2u_2 \geq -1 \\
& -u_1 \geq 0 \\
& u_2 \geq 0 \\
& u_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

con soluzione ottima (condizioni di complementarietà)

$$
\begin{aligned}
u_1^* &= -\frac{1}{5} \\
u_2^* &= 0 \\
u_3^* &= 0.
\end{aligned}
$$

□

Esercizio 3. (5 punti) Data la seguente matrice, $\mathbf{A}$, determinare

(1) il rango, (2 punti)
(2) una base dello spazio delle righe, (1 punto)
(3) una base dello spazio delle colonne che contenga la quinta colonna $\mathbf{A}_4$. (2 punti)

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Soluzione suggerita. Riducendo la matrice $\mathbf{A}$ si ottiene

$$
\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Risulta quindi che la matrice $\mathbf{A}$ ha rango pari a 2 ed una base dello spazio delle righe è composta dalle prime 2 righe di $\mathbf{A}$. Per ottenere una base dello spazio delle colonne che contiene $\mathbf{A}_5$ basta un'operazione di pivot su $\mathbf{A}_5$. Ad esempio, con pivot su $a_{1,5}$ otteniamo

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow A'' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

otteniamo una base per lo spazio delle colonne composta da $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_5$. □

Esercizio 4. (4 punti) Enunciare la condizione di ottimalità di una soluzione di base. Dimostrare l'enunciato proposto.

Soluzione suggerita. La dimostrazione è reperibile sugli appunti alla voce "Proprietà 4.2". □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA
APPELLO DEL 11/09/2012

Esercizio 1. (11 punti)
(**Parte A**: 5 punti) Alla luce di garantire una copertura assistenziale 24 ore al giorno, 7 giorni su 7, è necessaria una riorganizzazione territoriale dei medici di base riunendoli in ambulatori di quartiere. Immaginiamo quindi che Torino venga divisa in m quartieri, ciascuno con una popolazione pari a P_j persone, $j = 1, \dots, m$. Per servire gli m quartieri, sono stati aperti n ambulatori di quartiere, ciascuno con capacità di servizio pari a C_i persone, $i = 1, \dots, n$. Sono date infine le distanze d_{ij} tra ogni coppia "ambulatorio i – quartiere j".
Scrivere il programma lineare per assegnare la popolazione dei quartieri agli ambulatori in modo da minimizzare la distanza totale dell'assegnamento.
(**Parte B**: 6 punti) La soluzione del problema precedente determina un carico di lavoro L_i, in termini di numero di persone da assistere, per ogni ambulatorio i. Sono disponibili k medici, ciascuno con uno stipendio mensile s_h ed una capacità di lavoro, in termini di pazienti, ℓ_h, $h = 1, \dots, k$.
Considerato che un medico può prestare servizio in un unico ambulatorio, scrivere il programma lineare per assegnare tutti i medici disponibili agli ambulatori in modo da garantire l'assistenza alla popolazione assegnata minimizzando il massimo costo dell'intero monte stipendi dei medici assegnati ad un ambulatorio.

Soluzione suggerita. Il problema descritto nella **Parte A** consiste nell'assegnare tutti o parte dei pazienti di un quartiere ad uno o più ambulatori. A tale scopo introduciamo la seguente variabile decisionale:

$$x_{ij} \equiv \text{numero di pazienti del quartiere } j \text{ assegnati all'ambulatorio } i$$

con $x_{ij} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. La funzione obiettivo è la seguente:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} x_{ij}$$

mentre i vincoli che modellano l'assegnamento dei pazienti sono:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = P_j, \qquad j = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq C_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

La soluzione del problema della Parte A determina il carico di lavoro di ogni ambulatorio, ovvero $L_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$. Il problema della **Parte B** consiste nell'assegnare i medici disponibili in modo da garantire la copertura del carico di lavoro di ogni ambulatorio. A tale scopo introduciamo la seguente variabile decisionale:

$$y_{ih} = \begin{cases} 1 & \text{se medico } h \text{ è assegnato all'ambulatorio } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \; i = 1, \dots, n \text{ e } h = 1, \dots, k.$$

Il modello è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\min \quad z &= w \\
\sum_{h=1}^{k} s_h y_{ih} &\leq w && i = 1, \ldots, n \\
\sum_{i=1}^{n} y_{ih} &= 1 && h = 1, \ldots, k \\
\sum_{h=1}^{k} \ell_h y_{ih} &\geq L_i && i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

La funzione obiettivo ed il primo vincolo modellano il fatto che si intende minimizzare il massimo costo degli stipendi dei medici assegnati ad un ambulatorio ($\sum_{h=1}^{k} s_h y_{ih}$). Il secondo dice che un medico può essere assegnato ad un unico ambulatorio. Il terzo infine modella la copertura del carico di lavoro dell'ambulatorio.

□

Esercizio 2. (13 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{aligned}
\max \ z &= x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & -2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
& x_1 + 4x_2 \leq 16 \\
& x_1 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(i) Risolvere il programma lineare col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma lineare in forma standard. (1 punto)
(iii) Impostare e risolvere il programma della fase 1 del simplesso. (3 punti)
(iv) Determinare le basi ammissibili del programma (esprimere le basi rispetto alle variabili della forma standard). Sul grafico in 2D, individuare il punto corrispondente alla base determinata come soluzione della fase 1. (4 punti)
(v) Scrivere il duale del programma di fase 1 e risolverlo con le condizioni di complementarietà. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del programma è rappresentata in Figura 1. I vertici hanno coordinate $A(x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2})$, $B(1, \frac{5}{2})$, $C(1, \frac{15}{2})$, $D(0, 4)$. L'ottimo si trova nel vertice C. Il problema in forma standard è

$$
\begin{aligned}
\max \ z &= x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 16 \\
& x_1 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

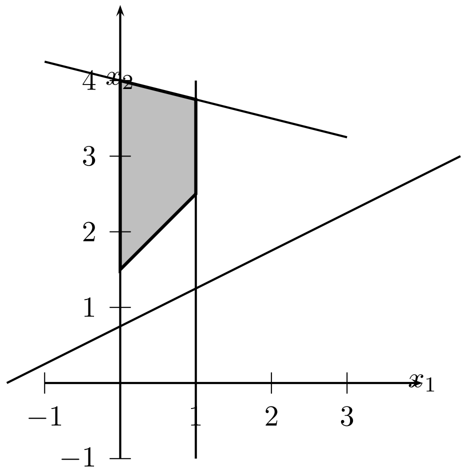


FIGURA 1. Regione ammissibile per l'esercizio 2.

La fase 1 del simplesso prevede di risolvere (volendo usare il minimo numero di variabili artificiali)

$$\begin{aligned} \max\ z &= -s_1 \\ \text{soggetto a}\quad & -2x_1 + 2x_2 - x_3 + s_1 = 3 \\ & x_1 + 4x_2 + x_4 = 16 \\ & x_1 + x_5 = 1 \\ & x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Partendo dalla base $\{s_1, x_4, x_5\}$ si ottiene

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & z = & -3 & -2x_1 & +2x_2 & -x_3 \\ & s_1 = & 3 & +2x_1 & -2x_2 & +x_3 \\ & x_4 = & 16 & -x_1 & -4x_2 & \\ & x_5 = & 1 & -x_1 & & \end{array} \to \begin{array}{rrrrrr} \max & z = & 0 & & -s_1 & \\ & x_2 = & \frac{3}{2} & +x_1 & -\frac{1}{2}s_1 & +\frac{1}{2}x_3 \\ & x_4 = & 10 & -5x_1 & +2s_1 & -2x_3 \\ & x_5 = & 1 & -x_1 & & \end{array}$$

Le basi ammissibili corrispondono ai vertici $A(x_2, x_4, x_5)$, $B(x_1, x_2, x_4)$, $C(x_1, x_2, x_3)$, $D(x_2, x_3, x_5)$. La base A è quella ritornata dalla fase 1.
Il duale del problema della fase 1 è

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3u_1 + 16u_2 + u_3 \\ \text{soggetto a}\quad & -2u_1 + u_2 + u_3 \geq 0 \\ & 2u_1 + 4u_2 \geq 0 \\ & -u_1 \geq 0 \\ & u_2 \geq 0 \\ & u_3 \geq 0 \\ & u_1 \geq -1 \end{aligned}$$

Sfruttando le condizioni di complementarietà e la soluzione ottima della fase 1, si deve avere all'ottimo duale:

$$\begin{aligned} x_2^* > 0 &\implies 2u_1^* + 4u_2^* = 0 \\ x_4^* > 0 &\implies u_2^* = 0 \\ x_5^* > 0 &\implies u_3^* = 0, \end{aligned}$$

quindi l'ottimo duale è $u_1^* = u_2^* = u_3^* = 0$. □

Esercizio 3. (4 punti) Si dica se le seguenti affermazioni sono "vere" o "false" giustificando la risposta.

(1) Se V_1 e $V_2 \in \mathbb{R}^n$ sono due rette passanti per l'origine, $V_1 \cap V_2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. (1 punto)
(2) Se V_1 e $V_2 \in \mathbb{R}^n$ sono due rette passanti per l'origine, $V_1 \cup V_2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. (1 punto)
(3) Se V_1 non è un sottospazio mentre V_2 lo è, allora $V_1 \cup V_2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. (1 punto)
(4) Se V_1 non è uno sottospazio mentre V_2 lo è, allora $V_1 \cap V_2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. (1 punto)

Soluzione suggerita.

(1) Vero. Le rette passanti per l'origine sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$; inoltre se $V_1 \neq V_2$ si ha $V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2$ che è un sottospazio per ipotesi; se $V_1 \neq V_2$ allora $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, il sottospazio banale.
(2) Falso. Si consideri in $\mathbb{R}^2$ il caso di due rette ortogonali passanti per l'origine: la somma vettoriale non è operazione interna (facile generare esempi sul grafico).
(3) Falso. Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la retta passante per l'origine a 45^o $V_1 = \{(x_1, x_2) \colon x_2 = x_1\}$ e il segmento teso tra i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$. In $V_1 \cup V_2$ la somma vettoriale e il prodotto per un numero non sono operazioni interne.
(4) Falso. Nello stesso esempio precedente, l'intersezione non contiene lo zero vettore.

$\square$

Esercizio 4. (5 punti) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale della programmazione lineare.

Soluzione suggerita. L'enunciato del teorema e la sua dimostrazione sono reperibili sugli appunti. $\square$

Anno Accademico 2012-13

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 31/01/2013

Esercizio 1. (10 punti)
L'Assessore alla Sanità della Regione di Estasia è costretto a ridurre il budget a sua disposizione chiudendo alcuni servizi forniti dal suo assessorato. La Regione di Estasia è composta di 5 province, ciascuna delle quali fornisce, mediamente, servizi di base e specialistici a p_i persone ad un costo unitario pari a c_i^b e c_i^s con $i = 1, \ldots, 5$. La tabella che segue riporta i valori dei parametri (i costi sono espressi in centinaia di euro).

p_i	500	700	800	450	300
c_i^b	3	2	3	6	5
c_i^s	9	11	7	8	10

Il piano di ristrutturazione prevede che rimangano aperti i servizi di base per almeno $P = 1500$ persone residenti in almeno 3 province.
Per quanto riguarda invece i servizi specialistici, il piano prevede il mantenimento del servizio in una sola provincia e l'attivazione di un sistema di trasporto dei pazienti dalle altre province. Si vuole fare in modo che la distanza complessiva percorsa – dalle altre province verso la provincia che mantiene aperto il servizio – non sia superiore ad $L = 15$ chilometri. La tabella riporta le distanze d_{ij} tra le province espresse in chilometri.

$$D = [d_{ij}] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 4 & 7 & 2 & 11 \\ \hline 4 & 0 & 5 & 2 & 9 \\ \hline 7 & 5 & 0 & 10 & 7 \\ \hline 2 & 2 & 10 & 0 & 3 \\ \hline 11 & 9 & 7 & 3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(1) Scrivere il modello di programmazione lineare per massimizzare il risparmio dovuto alla chiusura dei servizi nelle province rispettando i vincoli del piano di ristrutturazione. (8 punti)

(2) Modificare il modello proposto per considerare i seguenti casi:
- se rimane aperto il servizio specialistico della provincia 3, allora deve rimanere aperto almeno un servizio di base tra quelli delle province 1 e 5 (1 punto)
- se si chiudono il servizio di base della provincia 2 e quello specialistico della provincia 3, allora deve rimanere aperto il servizio di base nella provincia 4. (1 punto)

Soluzione suggerita. La decisione che il modello deve rappresentare è quella che prevede la chiusura del servizio di base e quello specialistico in ciascuna provincia. Per rappresentare questa decisione, introduciamo due variabili $0-1$ con il seguente significato:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se si chiude il servizio di base nella provincia } i \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases},$$

e

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se si chiude il servizio specialistico nella provincia } i \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

La funzione obiettivo deve tenere in considerazione i risparmi dovuti alla chiusura dei servizi. Abbiamo quindi:

$$\max z = \sum_i p_i \left(c_i^b x_i + c_i^s y_i \right).$$

I vincoli sui servizi di base sono

$$\sum_i p_i (1 - x_i) \geq P$$

per la popolazione, e

$$\sum_i (1 - x_i) \geq 3$$

per il numero minimo di servizi di base.
I vincoli sui servizi specialistici invece sono, per il numero di servizi,

$$\sum_i (1 - y_i) = 1$$

mentre sulle distanze, sfruttando il fatto che $d_{ij} = 0$ per $i = j$, risulta:

$$\sum_{j=1}^{5} d_{ij} y_j \leq L(1 - y_i) + M_i y_i, \qquad i = 1, \dots, 5$$

con M_i valore molto grande. Una sua possibile stima può essere data da $M_i = 1 + \sum_j d_{ij}$. E' soluzione altrettanto valida quella di usare un singolo M anziché tanti M_i. In questo caso una possibile stima di M è pari a $1 + \sum_i \sum_j d_{ij}$.

Per quanto riguarda le modifiche al modello abbiamo nel primo caso:

$$(1 - y_3) \leq (1 - x_1) + (1 - x_5)$$

mentre nel secondo

$$x_2 + y_3 \leq (1 - x_4) + 1.$$

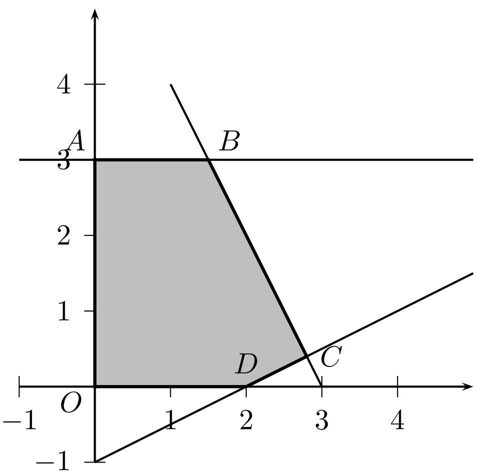
□

Esercizio 2. (13 punti)
Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma lineare in forma standard applicando il metodo del simplesso. (3 punti)
(v) Scrivere il duale del programma in forma standard, e determinarne la soluzione ottima. (4 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del programma la seguente.



I vertici sono $O(x_1 = 0, x_2 = 0)$, $A(0,3)$, $B(\frac{3}{2},3)$, $C(\frac{14}{5},\frac{2}{5})$, $D(2,0)$. Tracciando le isoprofitto o anche calcolando direttamente il valore dei vertici (il programma non pu essere illimitato) si determina l'ottimo nel vertice B, con valore $z^* = \frac{21}{2}$.
La forma standard del programma

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Le basi ammissibili corrispondono ai vertici della regione ammissibile, e rispetto alla forma standard sono

Vertice	Base
O	$x_3.x_4, x_5$
A	x_2, x_3, x_4
B	x_1, x_2, x_3
C	x_1, x_2, x_5
D	x_1, x_4, x_5

Applicando l'algoritmo del simplesso partendo dalla base x_3, x_4, x_5 si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{lrrrr}
\max & z = & 0 & +x_1 & +3x_2 \\
 & x_3 = & 2 & -x_1 & +2x_2 \\
 & x_4 = & 6 & -2x_1 & -x_2 \\
 & x_5 = & 3 & & -x_2 \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_5 \geq 0}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{lrrrr}
\max & z = & 9 & +x_1 & -3x_5 \\
 & x_3 = & 8 & -x_1 & -2x_5 \\
 & x_4 = & 3 & -2x_1 & +x_5 \\
 & x_2 = & 3 & & -x_5 \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{lrrrr}
\max & z = & \frac{21}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{7}{2}x_5 \\
 & x_3 = & \frac{13}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{5}{2}x_5 \\
 & x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_5 \\
 & x_2 = & 3 & & -x_5 \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_5 \geq 0.}
\end{array}$$

Il duale del problema

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 2u_1 + 6u_2 + 3u_3 \\
\text{soggetto a} \quad & u_1 + 2u_2 \geq 1 \\
& -2u_1 + u_2 + u_3 \geq 3 \\
& u_1 \geq 0 \\
& u_2 \geq 0 \\
& u_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Applicando le condizioni di complementariet primale-duale alla soluzione ottima ottenuta col simplesso si hanno le implicazioni

$$\begin{aligned}
x_1^* > 0 &\implies u_1^* + 2u_2^* = 1 \\
x_2^* > 0 &\implies -2u_1^* + u_2^* + u_3^* = 3 \\
x_3^* > 0 &\implies u_1^* = 0.
\end{aligned}$$

Quindi $u_1^* = 0$, $u_2^* = \frac{1}{2}$, $u_3^* = \frac{5}{2}$. □

Esercizio 3. (5 punti)

Data la seguente matrice, **A**, determinare

(1) il rango, (2 punti)

(2) una base dello spazio delle righe, (1 punto)
(3) una base dello spazio delle colonne che contenga la quinta colonna $\mathbf{A}_4$.(2 punti)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione suggerita. Riducendo la matrice $\mathbf{A}$ si ottiene

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta quindi che la matrice $\mathbf{A}$ ha rango pari a 2 ed una base dello spazio delle righe è composta dalle prime 2 righe di $\mathbf{A}$. Per ottenere una base dello spazio delle colonne che contiene $\mathbf{A}_5$ basta un'operazione di pivot su $\mathbf{A}_5$. Ad esempio, con pivot su $a_{1,5}$ otteniamo

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow A'' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

otteniamo una base per lo spazio delle colonne composta da $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_5$. □

Esercizio 4. (5 punti)
Enunciare e dimostrare le condizioni di complementarietà primale-duale.

Soluzione suggerita. L'enunciato e la dimostrazione sono reperibili sugli appunti a pagina 77. Riportiamo per completezza.

Teorema 1 (Condizioni di complementarietà primale-duale)**.** Siano $x^* \in S_a$ e $u^* \in D_a$ sono soluzioni ottime per il primale e il duale rispettivamente se e solo se risulta

$$(\mathbf{u}^{*T}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T)\mathbf{x}^* = 0.$$

Dimostrazione. Dal Teorema della dualit forte risulta, per gli ottimi $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{u}^{*T}\mathbf{b} = \mathbf{u}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{x}^*$$

e quindi $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{u}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{x}^*$, cio $(\mathbf{u}^{*T}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T)\mathbf{x}^* = 0$. □

□

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 13/02/2013

Esercizio 1. (11 punti)
Un'azienda ha bisogno per i suoi processi produttivi di quantitativi di acqua variabile durante le ventiquattro ore della giornata. La giornata è suddivisa in sei fasce orarie da quattro ore, con le seguenti quantità richieste (in m^3).

Fascia	1	2	3	4	5	6
Domanda	0.95	1.50	2.50	0.75	1.00	1.25

Durante il giorno l'azienda può ottenere acqua da diverse fonti e a diversi costi (in euro/m^3) come riportato nella tabella seguente. Ogni fonte ha un limite superiore alla quantità di acqua che può fornire nell'arco di ogni singola fascia da quattro ore.

Fonte	**Costo/m^3**	**Limite**
Rete potabile	70	∞
Pozzo 1	30	0.70
Pozzo 2	20	1.00

L'acqua del pozzo 1 è meno pura, perciò tale acqua non può rappresentare più del 40% del volume totale di acqua impiegato nell'intera giornata.

(a) Scrivere il programma lineare per determinare quali fonti usare e in che misura in ogni fascia oraria, per soddisfare tutte le domande a costo totale minimo. (8 punti)

(b) Modificare il programma per tenere conto della seguente limitazione: per la concomitanza con altre lavorazioni, il pozzo 2 non può essere usato per più di due fasce orarie consecutive (dopo due fasce consecutive di uso, se ne impone almeno una di stop). (3 punti)

Soluzione suggerita. Sia x_{ij} la variabile che rappresenta la quantità di acqua spillata dalla fonte $i = 1, 2, 3$ durante la fascia oraria $j = 1, \dots, 6$. Il modello base si può scrivere come segue.

$$\min \; z = 70 \sum_{j=1}^{6} x_{1j} + 30 \sum_{j=1}^{6} x_{2j} + 20 \sum_{j=1}^{6} x_{3j}$$

soggetto a

(soddisfacimento delle domande)

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 0.95 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 1.50 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 2.50 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 0.75 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} &\geq 1.00 \\
x_{16} + x_{26} + x_{36} &\geq 1.25
\end{aligned}
$$

(limiti delle sorgenti)

$$
\begin{aligned}
x_{2j} &\leq 0.70 \qquad && j = 1, \ldots, 6 \\
x_{3j} &\leq 1.00 \qquad && j = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

(non più del 40% dal pozzo 1)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{6} x_{2j} \leq 0.4 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} x_{ij} \\
&x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \; j = 1, 2, \ldots, 6.
\end{aligned}
$$

Per la seconda parte, si possono usare variabili binarie $y_1, \ldots, y_6$ con il significato $y_j = 1$ se e solo se il pozzo 2 è in uso durante la fascia j.

$$
\begin{aligned}
&y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\
&y_2 + y_3 + y_4 \leq 2 \\
&y_3 + y_4 + y_5 \leq 2 \\
&y_4 + y_5 + y_6 \leq 2 \\
&y_5 + y_6 + y_1 \leq 2 \\
&y_6 + y_1 + y_2 \leq 2 \\
&x_{3j} \leq M y_j \qquad && j = 1, \ldots, 6. \\
&y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, 6.
\end{aligned}
$$

□

Esercizio 2. (12 punti)
Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = -2x_1 - x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

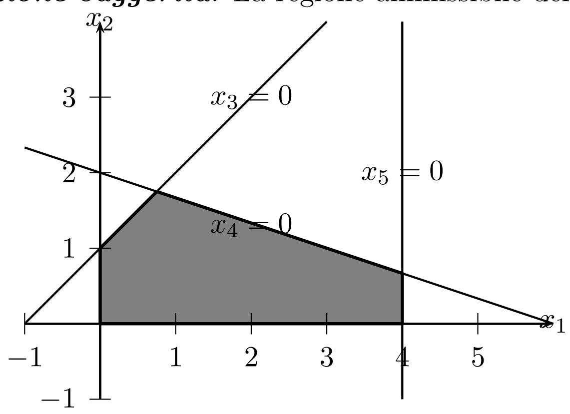
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Determinare la base ottima del programma in forma standard. (2 punti)

(iv) Scrivere il programma duale e determinarne la soluzione ottima. (4 punti)

(v) Trasformare il duale in forma standard; dire se la soluzione ottima determinata al punto precedente è una soluzione di base del duale, e perché. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del programma è la seguente.



L'ottimo di valore $z^* = -\frac{26}{3}$ si trova nel punto di coordinate $(x_1^* = 4, x_2^* = \frac{2}{3})$. Per la forma standard

$$\begin{aligned} &\max\ z = 2x_1 + x_2 \\ &\text{soggetto a} \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ &\qquad x_1 + x_5 = 4 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

La base ottima $B^* = \{x_1, x_2, x_3\}$ è quella corrispondente al vertice ottimo individuato con il metodo grafico. Il programma duale è

$$\begin{aligned} &\min\ w = u_1 + 6u_2 + 4u_3 \\ &\text{soggetto a} \quad -u_1 + u_2 + u_3 \geq 2 \\ &\qquad u_1 + 3u_2 \geq 1 \\ &\qquad u_1 \geq 0 \\ &\qquad u_2 \geq 0 \\ &\qquad u_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Applicando le condizioni di complementarietà, l'ottimo primale con $x_1^*, x_2^*, x_3^* > 0$ implica all'ottimo duale

$$\begin{aligned} -u_1^* + u_2^* + u_3^* &= 2 \\ u_1^* + 3u_3^* &= 1 \\ u_1^* &= 0 \end{aligned}$$

e quindi $u_1^* = 0, u_2^* = \frac{1}{3}, u_3^* = \frac{5}{3}$. Il duale si può trasformare in forma standard, come qualunque programma lineare: utilizzando due variabili di surplus v_1, v_2 si ottiene

$$\begin{aligned} \max\ & z = -u_1 - 6u_2 - 4u_3 \\ \text{soggetto a}\quad & -u_1 + u_2 + u_3 \quad -v_1 = 2 \\ & u_1 + 3u_2 \qquad\quad -v_2 = 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \\ & v_1, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarietà usate in precedenza implicano $v_1^* = v_2^* = 0$ (i primi due vincoli $\geq$ sono saturi). Le variabili positive all'ottimo sono quindi solo u_2, u_3. Le colonne di u_2 e u_3 sono tra loro linearmente indipendenti (facile verifica) e quindi l'ottimo duale trovato è un ottimo di base. □

Esercizio 3. (4 punti)
Per la seguente matrice $\mathbf{A}$, determinare quanto richiesto.

(1) Il rango $\rho(\mathbf{A})$. (2 punti)

(2) Una base dello spazio delle colonne. (1 punto)

(3) Dire se il vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ appartiene allo spazio delle colonne. (1 punto)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Soluzione suggerita. Con una riduzione della matrice completa $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{v})$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi $\rho(\mathbf{A}) = 3$, una base dello spazio delle righe è formata da tutte e tre le righe della matrice, e $\mathbf{v}$ appartiene allo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$. □

Esercizio 4. (6 punti)
Enunciare (2 punti) e dimostrare (2 punti) il teorema fondamentale della programmazione lineare. Si discuta inoltre l'importanza del teorema in relazione allo sviluppo di un generico algoritmo per la soluzione di un programma lineare in forma standard (2 punti).

Soluzione suggerita. La dimostrazione è reperibile sugli appunti. L'importanza del teorema è legata all'identificazione di un sottoinsieme di soluzioni *di cardinalità limitata* nel quale cercare una soluzione ottima, in contrapposizione all'intera regione ammissibile che ha invece la potenza del continuo. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 12/06/2013

Esercizio 1. (11 punti)
E' tempo di elezioni nella regione di Estasia. La legge elettorale prevede la vittoria della lista che raccoglie il maggior numero di voti. La regione è divisa in 5 collegi elettorali ($j = 1, \ldots, 5$). Ogni collegio prevede una soglia di sbarramento S_j di voti minimi che, qualora non venisse superata, determina la perdita (ovvero il non conteggio) di tutti i voti ottenuti il quel collegio. In ogni collegio, ogni lista può presentare al più 2 candidati.

La lista McGillicuddy Serious Party (McGSP) deve decidere dove candidare i suoi 10 ($i = 1, \ldots, 10$) candidati basandosi sui sondaggi che assegnano v_{ij} voti a ciascuno dei 10 candidati nei possibili 5 collegi.

Scrivere il modello di programmazione lineare che permetta alla lista McGSP di raccogliere il maggior numero di voti. (6 punti).

La lista dispone di un budget che può coprire le spese della campagna elettorale in al più 3 collegi elettorali. Si stima che l'investimento in nel collegio elettorale j possa portare un maggior numero di voti pari a h_j se e solo se la somma dei voti dei due candidati non eccede del 10% la soglia minima S_j. In caso contrario, non porta nessun voto in più. Modificare il modello di programmazione lineare per tenere in considerazione le spese della campagna elettorale. (5 punti).

Soluzione suggerita. Introduciamo la variabile decisionale x_{ij} che assume valore 1 se il candidato i è presentato nel collegio j. Il primo vincolo consiste nell'assegnare tutti candidati ad almeno un collegio:

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots 5.$$

Il secondo vincolo afferma che in ogni collegio non possono essere proposti al più 2 candidati:

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 2, \qquad i = 1, \ldots, 10.$$

Il terzo vincolo garantisce il superamento della soglia di sbarramento in ogni collegio:

$$\sum_{i=1}^{10} v_{ij} x_{ij} \geq S_j, \qquad j = 1, \ldots 5.$$

La funzione obiettivo è quella di massimizzare il numero di voti raccolti, secondo i sondaggi, dalla McGSP:

$$\max z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} v_{ij} x_{ij}.$$

Per la seconda parte dell'esercizio, introduciamo una variabile decisionale y_j che modella la decisione di investire parte del budget in campagna elettorale nel collegio j ($y_j = 1$) oppure no ($y_j = 0$).

Il modello precedente viene di conseguenza modificato come segue.

Si introduce il vincolo che modella la scelta dei collegi, in numero:

$$\sum_{j=1}^{5} y_j \leq 3,$$

e rispetto la misura dei voti attesi:

$$\sum_{i=1}^{10} v_{ij} x_{ij} \leq y_j(1,1S_j) + (1 - y_j)M_j,$$

con M_j più grande della somma dei due più grandi v_{ij}[1].

La funzione obiettivo viene modificata aggiungendo il computo dei voti h_j, ovvero:

$$\max z = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} v_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{5} h_j y_j.$$

□

Esercizio 2. (12 punti)
Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max \quad z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il problema col metodo grafico. (3 punti)

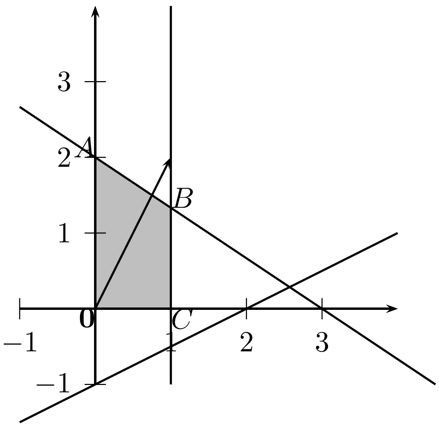
(ii) Trasformare il problema in forma standard. (1 punto)

(iii) Risolvere il problema col metodo del simplesso. (4 punti)

(iv) Scrivere il duale e determinarne la soluzione ottima. (4 punti)

[1] Nota che nel vincolo $1,1S_j$ significa $1,1$ che moltiplica S_j.

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del problema è la seguente.



La soluzione del problema si trova nel vertice $A = (0, 2)$ con $z^* = 4$. Nota che il vertice B **non** è soluzione ottima in quanto il punto di coordinate $(1, \frac{4}{3})$ con valore pari a $\dfrac{11}{3} < 4$ della funzione obiettivo. Il problema in forma standard è

$$
\begin{aligned}
\max\ \ z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & x_1 - 2x_2 \quad +x_3 = 2 \\
& 2x_1 + 3x_2 \quad +x_4 = 6 \\
& x_1 \qquad\qquad +x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Associando le basi ammissibili ai vertici, le basi da considerare sono $\mathbf{0} = (x_3, x_4, x_5)$, $A = (x_2, x_3, x_5)$, $B = (x_1, x_2, x_3)$, $C = (x_1, x_3, x_4)$. Il simplesso parte dalla base A, compie una sola iterazione per andare nella base ottima A determinando quindi la soluzione ottima $x_2^* = 2, x_3^* = 6, x_5^* = 1$ di valore $z^* = 4$. Il duale del problema è

$$
\begin{aligned}
\min\ \ w = & 2u_1 + 6u_2 + u_3 \\
\text{soggetto a}\quad & u_1 + 2u_2 + u_3 \quad \geq 1 \\
& -2u_1 + 3u_2 \qquad \geq 2 \\
& u_1, u_2, u_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

L'ottimo duale, ricavato come al solito con le condizioni di complementarietà, è $u_1^* = 0$, $u_2^* = \frac{2}{3}$, $u_3^* = 0$ con $w^* = 6\dfrac{2}{3} = 4$.

$\square$

Esercizio 3. (5 punti) Si consideri la seguente matrice

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

(1) Determinare il rango di $\mathbf{A}$. (2 punti)

(2) Determinare una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ che contenga la terza colonna. (2 punti)

(3) Determinare se il vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

fa parte dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$. (1 punto)

Soluzione suggerita. Con una riduzione della matrice completa $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{v})$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Dalla riduzione si può quindi affermare che il rango di $\mathbf{A}$ è uguale a 2 ovvero pari al numero di righe non nulle nella matrice ridotta. Inoltre si osserva che il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene allo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ in quanto la riduzione evidenzia una inconsistenza nella terza riga.

Infine, per ottenere una base dello spazio delle colonne che contenga la terza colonna basta fare pivot su uno dei due 1 nella terza colonna della matrice ridotta. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 4. (5 punti)
Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa giustificando la risposta.

(i) Dato un programma lineare $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, se $S_a \neq \emptyset$ e nessun vertice di S_a è ottimo, allora il programma in oggetto è illimitato. (2 punti)

(ii) Un programma lineare con S_a illimitato può avere una soluzione ottima (non necessariamente unica) che non è una soluzione ottima di base. (1 punto)

(iii) Sia

(P) $\qquad \max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

un programma lineare e

(D) $\qquad \max\{w = \mathbf{u}^T\mathbf{b} \colon \mathbf{u}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T\}$

il suo duale. Se (P) ha un ottimo finito, è possibile scegliere $\mathbf{b}' \neq \mathbf{b}$ tale che $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}',\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ sia un programma illimitato. (2 punti)

Soluzione suggerita.

(i) **Vero**. Un programma lineare può avere solo tre esiti: (a) nessuna soluzione ammissibile, (b) programma illimitato, (c) ottimo finito. L'affermazione esclude il caso (a). Se ci fosse un ottimo finito dovrebbe anche esserci un vertice ottimo, per il teorema fondamentale. Quindi si esclude anche il caso (c). Rimane (b).

(ii) **Vero**. Ad esempio

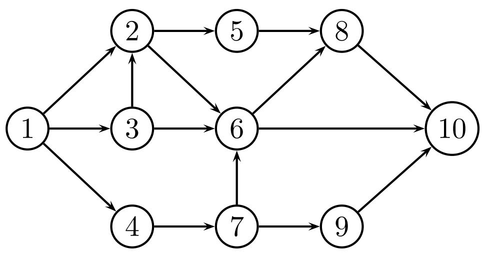
$$\max\{z = x_2 : x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 2 \quad x_, x_2 \geq 0.$$

(iii) **Falso**. Il duale del programma è $\min\{w = \mathbf{u}^T\mathbf{b} : \mathbf{u}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T\}$, e l'affermazione implica, per la dualità forte, che esso abbia un ottimo finito, quindi sicuramente $D_a \neq \emptyset$. Cambiando $\mathbf{b}$ in $\mathbf{b}'$ si vede che D_a non cambia, quindi le soluzioni duali continuano ad esistere e limitano superiormente anche la funzione obiettivo del programma primale modificato.

□

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 16/07/2013

Esercizio 1. (11 punti) Il sig. Ibrahim Rossi possiede una società di ingegneria che deve gestire un progetto complesso costituito da una serie di attività interconnesse tra loro. Il seguente grafo illustra le precedenze che devono essere garantite tra tali attività: ogni arco $i \to j$ indica che l'attività i deve essere completamente conclusa prima di cominciare la j.



Il calendario è espresso in giorni lavorativi numerati a partire da 0. Il progetto comincia con l'inizio dell'attività 1 e termina con la conclusione dell'attività 10. Le attività iniziate non vengono interrotte fino alla loro conclusione. Ogni attività ha una durata (in giorni) specificata dalla seguente tabella, una eventuale data di rilascio prima della quale non può cominciare e una eventuale scadenza entro la quale deve improrogabilmente terminare.

Att.	**Durata**	**Rilascio**	**Scad.**	**Costo**	**Att.**	**Durata**	**Rilascio**	**Scad.**	**Costo**
1	3				6	8	28		2
2	4			2	7	2		45	
3	7	15	30	4	8	8			5
4	6	25		2	9	3			
5	5		40	3	10	1			

(a) Con il suo fedele gatto Purrer, il signor Rossi elabora un programma lineare che permette di determinare i giorni di inizio delle attività per terminare il progetto il più presto possibile. Scrivere il programma lineare elaborato dal signor Rossi. (6 punti)

(b) Per alcune attività è specificato anche un costo del lavoro straordinario espresso in migliaia di euro al giorno (ultima colonna della tabell). Per queste attività, è possibile ridurne la durata di un numero intero di giorni, allocando loro forza lavoro straordinaria al costo giornaliero specificato. Ad esempio l'attività 6, che dura 8 giorni, potrebbe essere compressa alla durata di 6 giorni pagando 4000 euro di lavoro straordinario. Nessuna attività può comunque essere ridotta a meno di due giorni. Il signor Rossi ha un budget per il lavoro straordinario limitato a 30000 euro. Come può modificare il modello per fargli decidere a quali attività allocare lo straordinario e in che misura? (5 punti)

Soluzione suggerita. Per la parte (a) introduciamo la seguente variabile decisionale,

$$x_i \equiv \text{giorno di inizio attività } i \text{ con } i = 1, \ldots, 10.$$

Descriviamo prima i vincoli più semplici, ovvero quelli sul rilascio e sulle scadenze delle varie attività.

$$\text{Rilascio: } x_3 \geq 15, \quad x_4 \geq 25, \quad x_6 \geq 28.$$

$$\text{Scadenza: } x_3 + 7 \leq 30, \quad x_5 + 5 \leq 40, \quad x_7 + 2 \leq 45.$$

Introduciamo i vincoli di precedenza, ovvero quei vincoli che determinano l'inizio di un'attività soltanto dopo la conclusione dell'attività (o delle attività) che la precedono. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
\text{attività 2:} \quad & x_2 \geq x_1 + 3, \quad x_2 \geq x_3 + 7 \\
\text{attività 3:} \quad & x_3 \geq x_1 + 3 \\
\text{attività 4:} \quad & x_4 \geq x_1 + 3 \\
\text{attività 5:} \quad & x_5 \geq x_2 + 4 \\
\text{attività 6:} \quad & x_6 \geq x_2 + 4, \quad x_6 \geq x_3 + 7, \quad x_6 \geq x_7 + 2 \\
\text{attività 7:} \quad & x_7 \geq x_4 + 6 \\
\text{attività 8:} \quad & x_8 \geq x_6 + 8 \\
\text{attività 9:} \quad & x_9 \geq x_7 + 2 \\
\text{attività 10:} \quad & x_{10} \geq x_6 + 8, \quad x_{10} \geq x_8 + 8, \quad x_{10} \geq x_9 + 3.
\end{aligned}$$

Infine la funzione obiettivo risulta:

$$\min z = x_{10}$$

visto che minimizzare il momento di inizio dell'ultima attività corrisponde anche a minimizzare il momento di fine di tutte le attività. Nota che si potrebbe anche fissare il valore di $x_1 = 0$.

Per la parte (b), introduciamo un'ulteriore variabile decisionale, ovvero

$$y_i \equiv \text{numero di giorni di compressione dell'attività } i \text{ con } i = 1, \ldots, 10.$$

Ponendo il parametro t_i uguale alla durata delle corrispondenti attività, il vincolo

$$y_i \leq t_1 - 2, \qquad i = 1, \ldots, 10$$

modella il fatto che ogni attività non può essere ridotta a meno di 2 giorni. Ponendo il parametro c_i uguale al costo dello straordinario delle corrispondenti attività, il vincolo

$$\sum_{i=1}^{10} c_i y_i \leq 30000$$

modella il vincolo di budget. Infine, tutti i vincoli di precedenza devono considerare i giorni risparmiati grazie all'acquisto dello straordinario. Per esempio, i vincoli per le attività 2 e 3 diventano

$$\begin{aligned}
\text{attività 2:} \quad & x_2 \geq x_1 + 3 - y_1, \quad x_2 \geq x_3 + 7 - y_3 \\
\text{attività 3:} \quad & x_3 \geq x_1 + 3 - y_1.
\end{aligned}$$

In pratica, in ogni vincolo si sottrae la corrispondente variabile y_i. La funzione obiettivo rimane invariata perché l'attività 10 ha durata inferiore a 2 e quindi non può essere compressa. Di conseguenza, per la funzione obiettivo vale il ragionamento fatto per la prima parte. □

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned}
\max\ z = & 3x_1 - x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(i) Risolvere il problema col metodo grafico. (3 punti)

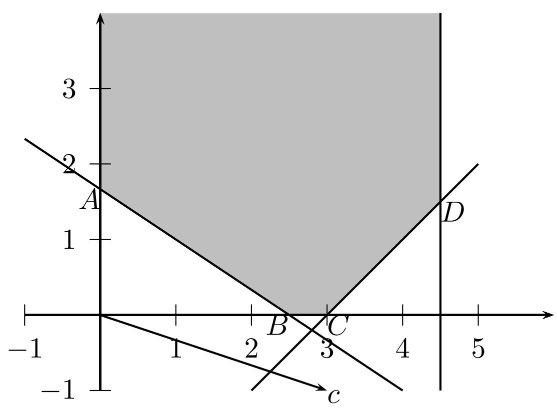
(ii) Trasformare il problema in forma standard. (1 punto)

(iii) Il punto ($x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0$) corrisponde ad una soluzione ammissibile di base. Partendo da tale base, risolvere il programma utilizzando il metodo del simplesso. (3 punti)

(iv) Identificare sul grafico 2D le soluzioni visitate dal simplesso al punto precedente. (2 punti)

(v) Scrivere il duale del programma e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del problema è la seguente.



La soluzione del problema si trova nel vertice $D = (\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ con $z^* = 12$.

Il problema in forma standard è

$$\begin{aligned}
\max\ z = & 3x_1 - x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 && = 5 \\
& x_1 - x_2 + x_4 && = 3 \\
& 2x_1 + x_5 && = 9 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Al punto $B = (\frac{5}{2}, 0)$ corrisponde la soluzione di base ammissibile $x_B = (\frac{5}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 4)$ di valore $z = \frac{15}{2}$. Il simplesso parte dalla soluzione di base x_B, transita per $x_C = (3, 0, 1, 0, 3)$ per terminare la sua esecuzione nella base ottima $x_D = (\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{17}{2}, 0, 0)$.

Il duale del problema è

$$\begin{aligned}
\min\ w = & 5u_1 + 3u_2 + 9u_3 \\
\text{soggetto a}\quad & 2u_1 + u_2 + 2u_3 && \geq 3 \\
& 3u_1 - u_2 && \geq -1 \\
& -u_1, u_2, u_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

L'ottimo duale, ricavato come al solito con le condizioni di complementarietà, è $u_1^* = 0$, $u_2^* = 1$, $u_3^* = 1$ con $w^* = 12$. □

Esercizio 3. (6 punti) Dati due sottospazi V_1, V_2 di $\mathbb{R}^n$, si dica quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi a loro volta e quali no, motivando la risposta.

(i) $V_1 \cap V_2$.

(ii) $V_1 \cup V_2$.

(iii) $V_1^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\ \forall \mathbf{x} \in V_1\}$.

Soluzione suggerita. (i) Vero. Sia $\mathbf{x} \in V_1, \mathbf{y} \in V_2, a \in \mathbb{R}$. Si possono verificare i tre requisiti della definizione di sottospazio.

(a) $\mathbf{0} \in V_1, \mathbf{0} \in V_2 \implies \mathbf{0} \in V_1 \cap V_2$.

(b) $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2, \mathbf{y} \in V_1 \cap V_2$ implica $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V_1$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V_2$ quindi $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \in V_1 \cap V_2$.

(c) Se $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$: $a\mathbf{x} \in V_1$, quindi $(a\mathbf{x}) \in V_1$; $a\mathbf{x} \in V_2$, quindi $(a\mathbf{x}) \in V_2$; allora $(a\mathbf{y}) \in V_1 \cap V_2$.

(d) Falso. Constroesempio: due rette passanti per l'origine (non coincidenti) in $\mathbb{R}^2$.

(e) Vero. Verifica dei tre requisiti. Ad es. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1^\perp$ implica per ogni $\mathbf{x} \in V_1$: $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 + 0 = 0$ e quindi $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \in V_1^\perp$. Ecc...

□

Esercizio 4. (4 punti) Sia dato un programmnma lineare generico $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se essa è vera o falsa, motivando la risposta.

(i) La regione ammissibile non può mai contenere un'intera retta.

(ii) La regione ammissibile non può mai contenere un'intera semiretta.

(iii) Se il programma ammette due soluzioni ottime distinte, ne ammette infinite altre.

(iv) Se esiste $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tale che $\mathbf{y}^T\mathbf{A} > \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0$ allora il programma è privo di soluzioni ammissibili.

Soluzione suggerita. (i) Vero. Le coordinate di una retta, se si considera una forma parametrica devono spaziare da $-\infty$ a ∞, e quindi uscire dal primo ortante $\mathbb{R}^n_+$.

(ii) Falso. Come controesempio,qualunque programma illimitato va bene.

(iii) Vero, per la convessità di della regione ammissibile e la linearità della funzione obiettivo: l'intero segmento che congiunge le due soluzioni è fatto di punti ottimi e ammissibili.

(iv) Vero. Il vettore $\mathbf{y}$ permette di combinare le equazioni $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in una equazione $(\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{b}$, i cui coefficienti sono le componenti della riga $\mathbf{y}^T\mathbf{A} > 0$, e il termine noto $\mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0$. Unita alle condizioni $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, l'equazione è assurda.

$\square$

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 10/09/2013

Esercizio 1. (11 punti)
Un possibile sistema di valutazione della ricerca di un dipartimento può essere il seguente. Si consideri un dipartimento con n docenti. Nell'intervallo di tempo preso in considerazione, ciascun docente ha registrato m_i *prodotti della ricerca* nel catalogo d'ateneo, con $i = 1, \dots n$. Si denoti con m la somma di tutti i prodotti del dipartimento, ovvero $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Ad ogni prodotto è assegnato un valore v_j definito in base all'importanza del prodotto stesso, con $j = 1, \dots m$.

Il sistema di valutazione prevede la selezione di k prodotti distinti per ciascun docente. Un prodotto con più autori dello stesso dipartimento può essere selezionato da uno ed uno soltanto di questi. A tale scopo, si consideri la matrice C^h relativa al docente $h = 1, \dots n$ e composta di elementi $\left[c_{ij}^h\right]$ di valore 1 se il docente i è autore del prodotto j assieme al docente h, 0 altrimenti.

(1) Scrivere il modello di PL per individuare i k prodotti per ciascun docente in modo da massimizzare il valore complessivo della selezione. (6 punti)

(2) Modificare il modello precedente in modo che il valore totale dei k prodotti selezionati per ciascun docente siano molto simili tra loro. (5 punti)

Soluzione suggerita. Introduciamo la seguente variabile decisionale:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se prodotto } j \text{ è selezionato per il docente } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il primo insieme di vincoli impone che ogni prodotto sia selezionato al più una volta:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad j = 1, \dots m.$$

Il secondo insieme di vincoli impone che siano selezionati al più k prodotti per ogni docente:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq k \qquad i = 1, \dots n.$$

rispettando il numero massimo di prodotti disponibili per docente:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m_i \qquad i = 1, \dots n.$$

Il terzo ed ultimo garantisce che la selezione del singolo prodotto sia unica in caso di più coautori:

$$\sum_{i=1, i\neq h}^{n} c_{ij}^{h} x_{ij} \leq 1 \qquad h = 1, \dots n \quad j = 1, \dots m.$$

Infine, la funzione obiettivo vuole massimizzare il valore dei prodotti selezionati:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_j x_{ij}.$$

Nel secondo caso, la richiesta che il valore totale dei k prodotti selezionati per ciascun docente siano molto simili tra loro può significare cercare di fare in modo che sia minima la differenza tra il valore massimo ed il valore minimo dei prodotti selezionati per un generico docente.
Si introducono quindi 3 nuove variabili, ovvero y, $y^{\max}$ e $y^{\min}$ nello stesso dominio di v_j. Introduciamo inoltre due insieme di vincoli.
Il primo insieme di vincoli impone che $y^{\max}$ assuma il valore massimo tra quelli ottenuti selezionando k prodotti per un docente:

$$\sum_{j=1}^{m} v_j x_{ij} \geq y^{\max} \qquad i = 1, \dots n.$$

Il secondo insieme di vincoli impone che $y^{\min}$ assuma il valore massimo tra quelli ottenuti selezionando k prodotti per un docente:

$$\sum_{j=1}^{m} v_j x_{ij} \leq y^{\min} \qquad i = 1, \dots n.$$

Per rappresentare l'obiettivo, introduciamo il vincolo

$$y \geq y^{\max} - y^{\min}$$

e la funzione obiettivo diventa quindi:

$$\min z = y.$$

Nota: un'altra interpretazione era possibile ed era quella che tendeva a massimizzare (o minimizzare) il punteggio minimo (o massimo) che l'assegnamento dei prodotti determina per ciascun docente.

□

Esercizio 2. (12 punti)
Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{rrrl} \max & z = -x_1 + 2x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & -4x_1 & +2x_2 & \leq 3 \\ & & 3x_2 & \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

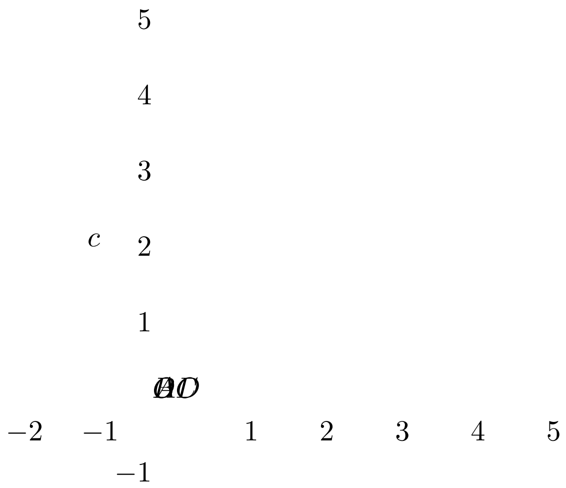
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)

(iv) Risolvere il programma lineare in forma standard applicando l'algoritmo del simplesso. (3 punti)

(v) Scrivere il duale del programma in forma standard, e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. Si offre una traccia delle soluzioni.
La regione ammissibile del problema è la seguente:



La soluzione del problema si trova nel vertice $B = (\frac{7}{12}, \frac{8}{3})$ con $z^* = \frac{19}{4}$.

Le basi ammissibili corrispondono ai vertici della regione ammissibile, e rispetto alla forma standard sono le seguenti

Vertice	Base	Valore
O	$x_3.x_4, x_5$	$(4, 3, 8)$
A	x_2, x_3, x_5	$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$
B	x_1, x_2, x_3	$\left(\frac{7}{12}, \frac{8}{3}, \frac{17}{12}\right)$

mentre le basi corrispondenti ai vertici C e D sono lasciate per esercizio.

Il problema in forma standard è

$$\begin{array}{llllllll}
\max & z = -x_1 + 2x_2 & & & & & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 4 \\
& -4x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 3 \\
& & 3x_2 & & & +x_5 & = 8 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0. & & & & &
\end{array}$$

Il simplesso parte dalla base ottima individuata dal vertice O, transita per la base assiciata al punto A e termina con successo nella base relativa al punto di ottimo B con $z^* = \frac{19}{4}$.

Il duale del problema è

$$\begin{array}{lllll}
\min & w = 4u_1 + 3u_2 + 8u_3 & & & \\
\text{soggetto a} & u_1 & -4u_2 & & \geq -1 \\
& u_1 & +2u_2 & +3u_3 & \geq 2 \\
& u_1, u_2, u_3 \geq 0. & & &
\end{array}$$

L'ottimo duale, ricavato come al solito con le condizioni di complementarietà, è $u_1^* = 0$, $u_2^* = \frac{1}{4}$, $u_3^* = \frac{1}{2}$ con $w^* = \frac{19}{4}$.

□

Esercizio 3. (6 punti) Dati due sottospazi V_1, V_2 di $\mathbb{R}^n$, si dica quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi a loro volta e quali no, motivando la risposta.

(i) $V_1 \cap V_2$.

(ii) $V_1 \cup V_2$.

(iii) $V_1^{\perp} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \ \forall \mathbf{x} \in V_1\}$.

Esercizio 4. (5 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale della programmazione lineare.

Soluzione suggerita. L'enunciato e la dimostrazione sono reperibili sugli appunti. □

Anno Accademico 2013-14

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 31/01/2014

Esercizio 1. (11 punti)
Un'azienda deve rifornire di materia prima quattro stabilimenti $1, 2, 3, 4$ che ne richiedono rispettivamente 120, 200, 150 e 80 tonnellate. La materia prima in questione è stoccata in tre magazzini A, B, C che dispongono rispettivamente di 150, 160 e 180 tonnellate. Il trasporto del materiale ha un costo/tonnellata dato dalla seguente tabella.

$$c_{ij} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 10 & 9 & 7 \\ 12 & 6 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il budget per le spedizioni è limitato a 2500 euro. Nell'impossibilità di rifornire adeguatamente tutti gli stabilimenti, la direzione ha stimato che la mancanza di materia prima causerà nei quattro stabilimenti perdite per 100, 50, 120 e 200 euro per ogni tonnellata mancante.

(a) Scrivere il programma lineare che serve a pianificare il trasporto del materiale rispettando il vincolo di budget e minimizzando le perdite complessive. (8 punti)

(b) Si supponga inoltre che, per limitazioni dovute al numero di veicoli nella flotta, non si possa spedire materiale (in qualunque quantità) su più di 7 tratte magazzino-stabilimento. Come occorre modificare il modello per tenere conto di questa ulteriore limitazione? (3 punti)

Soluzione suggerita. Si tratta di (una variante di) un problema di trasporto. Dette x_{ij} le variabili che rappresentano la quantità spedite su ogni tratta $i \to j$, e fissate le costanti

$a_1 = 150$,	$a_2 = 160$,	$a_3 = 180$		(disponibilità magazzini)
$b_1 = 120$,	$b_2 = 200$,	$b_3 = 150$,	$b_4 = 80$	(domande stabilimenti)
$p_1 = 100$,	$p_2 = 50$,	$p_3 = 120$,	$p_4 = 200$	(perdite/tonnellata)

il modello si può scrivere come

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{4} p_j \Big(b_j - \sum_{i=A}^{C} x_{ij} \Big)$$

soggetto a

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq a_i \qquad i = A, B, C$$
$$\sum_{i=A}^{C} x_{ij} \leq b_j \qquad j = 1, 2, 3, 4$$
$$\sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \leq 2500$$
$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = A, B, C, \; j = 1, 2, 3, 4.$$

La domanda (b) si può gestire utilizzando un set di variabili binarie y_{ij}, con $y_{ij} = 1$ se nella soluzione si ha $x_{ij} > 0$. Il vincolo addizionale

$$\sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} y_{ij} \leq 7$$

limita il numero di tratte utilizzabili. Per correlare le x_{ij} con le rispettive y_{ij} si possono poi aggiungere vincoli di tipo "grande M"

$$x_{ij} \leq M y_{ij} \qquad i = A, B, C \; j = 1, 2, 3, 4.$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \min \; z = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

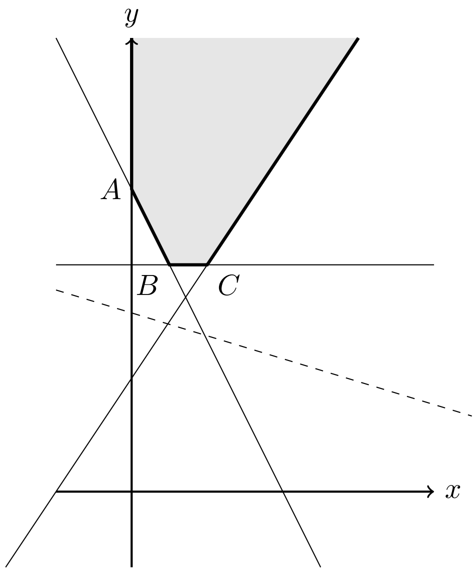
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)

(iv) Partendo dalla base ammissibile $B_0 = \{x_2, x_4, x_5\}$, determinare la base ottima applicando l'algoritmo del simplesso. (3 punti)

(v) Scrivere il duale del programma in forma standard, e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile S_a del problema (illimitata verso l'alto) è la seguente.



Dallo studio delle rette isocosto (una è tratteggiata nel disegno) si deduce che l'ottimo è nel punto $B(x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = 3)$. Il programma in forma standard è

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & z = -2x_1 - 3x_2 \\
\text{soggetto a}\ \ & 2x_1 + x_2 \qquad -x_3 = 4 \\
& -3x_1 + 2x_2 \quad -x_4 = 3 \\
& \qquad\quad x_2 \quad -x_5 = 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Le basi ammissibili sono tre, corrispondenti ai vertici del disegno.

Vertice	Variabili di base		
A	$x_2 = 4$	$x_4 = 5$	$x_5 = 1$
B	$x_1 = \frac{1}{2}$	$x_2 = 3$	$x_4 = \frac{3}{2}$
C	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 1$

La riformulazione rispetto alla base B_0 è

$$
\begin{array}{lrrrr}
\max & z = & -12 & +4x_1 & -3x_3 \\
& x_2 = & 4 & -2x_1 & +x_3 \\
& x_4 = & 5 & -7x_1 & +2x_3 \\
& x_5 = & 1 & \mathbf{-2}x_1 & +x_3
\end{array}
\xrightarrow[\text{entra } x_1]{\text{esce } x_5}
\begin{array}{lrrrr}
\max & z = & -10 & -2x_5 & -x_3 \\
& x_2 = & 3 & +x_5 & \\
& x_4 = & \frac{3}{2} & +\frac{7}{2}x_5 & -\frac{3}{2}x_3 \\
& x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & +\frac{1}{2}x_3
\end{array}
$$

Il duale del problema in forma standard è

$$\begin{aligned} \min\ \ w = &4u_1 + +3u_2 + 3u_3 \\ \text{soggetto a } &2u_1 - 3u_2 &\geq -2 \\ &u_1 + 2u_2 + u_3 &\geq -3 \\ &u_1, u_2, u_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

L'applicazione delle condizioni di complementarietà permette di ottenere $u_1^* = -1, u_2^* = 0, u_3^* = -2$. ☐

Esercizio 3. (6 punti) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

determinare:

(i) il rango di $\mathbf{A}$; (2 punti)

(ii) una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ che contenga la colonna $\mathbf{A}_5$; (2 punti)

(iii) l'appartenenza o meno di $\mathbf{v} = (5, 4, 6)^T$ allo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$. (2 punti)

Soluzione suggerita. Riducendo la matrice $(\mathbf{A}|\mathbf{v})$ si ottiene

$$(\mathbf{A}'|\mathbf{v}') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{4} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Risulta quindi che la matrice $\mathbf{A}$ ha rango pari a 3. Il vettore v inoltre appartiene allo spazio delle colonne. Per ottenere una base dello spazio delle colonne che contiene $\mathbf{A}_5$ basta un'operazione di pivot su $\mathbf{A}'_5$. Ad esempio, con pivot su $a_{3,5}$ otteniamo

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

otteniamo una base per lo spazio delle colonne composta da $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_5$. ☐

Esercizio 4. (4 punti)
Dimostrare che, data una base $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ di uno spazio vettoriale V e un vettore non nullo $\mathbf{w} \in V$, esiste un $\mathbf{v}_j \in B$ tale che $(B \cup \{\mathbf{w}\}) \setminus \{\mathbf{v}_j\}$ sia ancora una base di V.

Soluzione suggerita. Si tratta della Proprietà 2.5 sugli appunti del corso. ☐

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 17/02/2014

Esercizio 1. (11 punti)
Un'azienda produce tre tipi di mangimi A, B, C a partire da due tipi di componenti 1 e 2. I due componenti sono disponibili in quantità pari a 300 e 400 tonnellate. Il mangime A è composto per il 40% in peso dal componente 1 e per il 60% dal componente 2. Il mangime B è composto per il 50% di 1 e per il 50% di 2 e il mangime C è composto per il 70% di 1 e 30% di 2. I tre tipi di mangimi danno margini di profitto rispettivamente di 1000, 1500 e 900 euro/tonnellata. Di A, B e C è necessario produrre, per esigenze di mercato, almeno 50, 70 e 90 tonnellate. Inoltre i mangimi A e B insieme non devono rappresentare insieme più del 45% della produzione totale.

(a) Scrivere il programma lineare per determinare le quantità da produrre al fine di massimizzare i profitti (supponendo di poter vendere tutto), rispettando i vincoli sul mix e la disponibilità di risorse. (8 punti)

(b) Estendere il modello tenendo conto del seguente requisito: di almeno uno dei tre mangimi, non vanno prodotte più di 150 tonnellate. (3 punti)

Soluzione suggerita. Definendo le variabili

$$x_i = \text{tonnellate di mangine } i \text{ prodotte} \qquad (i = A, B, C)$$

si può scrivere il modello come segue.

$$\min \ z = 1000x_A + 1500x_B + 900x_C$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&0.4x_A + 0.5x_B + 0.7x_C \leq 300\\
&0.6x_A + 0.5x_B + 0.3x_C \leq 400\\
&x_A \geq 50\\
&x_B \geq 70\\
&x_C \geq 90\\
&x_A + x_B \leq 0.45(x_A + x_B + x_C)\\
&x_A, x_B, x_C \geq 0.
\end{aligned}$$

Per la parte (b), si possono introdurre tre variabili logiche y_A, y_B, y_C dove $y_i = 1$ implica che il prodotto i subisce la limitazione a 150 tonnellate. Si introducono quindi i vincoli

$$\begin{aligned}
&y_A + y_B + y_C \geq 1\\
&x_i \leq 150y_i + M(1 - y_i) \qquad i = A, B, C\\
&y_i \in \{0, 1\} \qquad i = A, B, C.
\end{aligned}$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max\ z = & x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

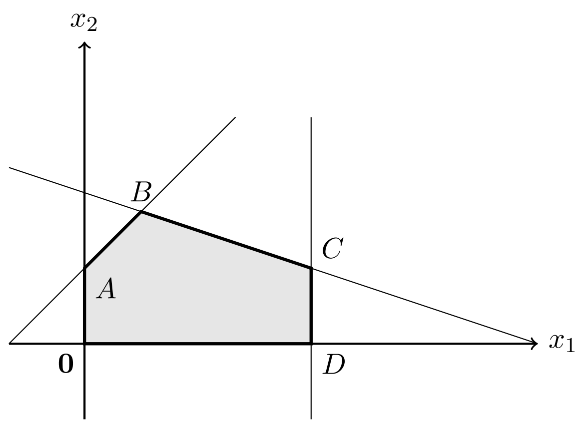
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)

(iv) Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso. (3 punti)

(v) Scrivere il duale del programma in forma standard, e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile è rappresentata in figura.



$\mathbf{0}(0,0)$
$A(0,1)$
$B(\frac{3}{4},\frac{7}{4})$
$C(3,1)$
$D(3,0)$

La soluzione ottima si trova nel vertice B, con valore $z^* = \frac{31}{4}$. Le basi ammissibili sono associate ai vertici.

Vertice	Variabili di base		
$\mathbf{0}$	$x_3 = 6$	$x_4 = 1$	$x_5 = 3$
A	$x_2 = 1$	$x_3 = 3$	$x_5 = 3$
B	$x_1 = \frac{3}{4}$	$x_2 = \frac{7}{4}$	$x_5 = \frac{9}{4}$
C	$x_1 = 3$	$x_2 = 1$	$x_4 = 3$
D	$x_1 = 3$	$x_3 = 3$	$x_4 = 5$

L'algoritmo del simplesso si può applicare a partire dalla base $\{x_3, x_4, x_5\}$ ottenendo quanto segue.

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 0 & +x_1 + 4x_2 & \\ & x_3 = & 6 & -x_1 & -3x_2 \\ & x_4 = & 1 & +x_1 & -\mathbf{1}x_2 \\ & x_5 = & 3 & -x_1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrr} \max & z = & 4 & +5x_1 & -4x_4 \\ & x_3 = & 3 & -\mathbf{4}x_1 & +3x_4 \\ & x_2 = & 1 & +x_1 & -x_4 \\ & x_5 = & 3 & -x_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{31}{4} & -\frac{5}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & x_1 = & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}x_3 & +\frac{3}{4}x_4 \\ & x_2 = & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & x_5 = & \frac{9}{4} & +\frac{1}{4}x_3 & -\frac{3}{4}x_4 \end{array}$$

Il problema duale è

$$\min\ z = 6u_1 + u_2 + u_3$$

soggetto a

$$u_1 - u_2 + u_3 \geq 1$$
$$3u_1 + u_2 \geq 4$$
$$u_1, u_2, u_3 \geq 0,$$

e le condizioni di complementarietà permettono di ottenere le componenti dell'ottimo duale $u_1^* = \frac{5}{4}$, $u_2^* = \frac{1}{4}$, $u_3^* = 0$. □

Esercizio 3. (5 punti) Data la seguente matrice, $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

determinare

(1) il rango, (2 punti)

(2) una base dello spazio delle righe, (1 punto)

(3) una base dello spazio delle colonne che contenga la quarta colonna $\mathbf{A}_4$.(2 punti)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione suggerita. Riducendo la matrice $\mathbf{A}$ si ottiene

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dalla quale si evince che:

(1) il rango della matrice è 2 considerato che due sono le righe non nulle;

(2) una base dello sazio delle righe è composta dalle righe $\mathbf{A}^1$ e $\mathbf{A}^2$.

Infine, operando un'operazione di pivot su a'_{14} otteniamo

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

il che individua una base dello spazio delle colonne come richiesto dal terzo punto.

□

Esercizio 4. (5 punti)
Dato un programma lineare nella sua forma standard e supponendo di avere una soluzione ottima primale $\mathbf{x}^*$ ad n componenti, si dimostri la relazione

$$x_j^* > 0 \Longrightarrow \mathbf{u}^{*T}\mathbf{A}_j - c_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

dove $\mathbf{u}^*$ è una soluzione duale.

Soluzione suggerita. La dimostrazione deriva dall'applicazione del Teorema della dualità forte 3.10 come mostrato nel Corollario 3.11. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 10/06/2014

Esercizio 1. (11 punti) Un'azienda produce tre modelli 1, 2 e 3 di un certo prodotto. Ciascun modello richiede tre tipi di materiali grezzi A, B, C di cui sono disponibili rispettivamente 8000, 6000 e 3000 unità. In particolare, per produrre una unità del modello 1 sono necessarie 2 unità di A, 3 unità di B, 4 di C; per una unità del modello 2 sono necessarie 2 unità di A, 2 unità di B, 1 di C; per una unità del modello 3 sono necessarie 3 unità di A, 6 di B, 8 di C. Il settore marketing dell'azienda ha reso noto che la domanda minima per ciascun modello è rispettivamente di 200, 400 e 350 unità. La direzione comunque vuole che nessun modello rappresenti da solo più del 40% del volume totale della produzione. Il profitto unitario dei tre modelli è di 30, 20 e 50 Euro, rispettivamente.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare la produzione giornaliera massimizzando il profitto. (7 punti)

(b) Modificare il programma tenendo conto del seguente ulteriore vincolo: il consumo di almeno una delle tre risorse deve essere limitato all'80% della disponbilità in magazzino. (4 punti)

Soluzione suggerita. Per il punto (a), si introducono 3 variabili decisionali, x_1, x_2 e x_3 che misurano rispettivamente la quantità dei modelli 1, 2 e 3 da produrre.

La funzione obiettivo è quindi la seguente:

$$\max \quad z \quad = \quad 30x_1 + 20x_2 + 50x_3.$$

Il vincolo di richiesta minima si esprime come segue:

$$x_1 \geq 200, \quad x_2 \geq 400, \quad x_3 \geq 350,$$

mentre il vincolo del 40% si può esprimere come segue

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= T \\ x_1 &\leq 0.4T \\ x_2 &\leq 0.4T \\ x_3 &\leq 0.4T \end{aligned}$$

Infine i vincoli sulle risorse sono:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 8000 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\leq 6000 \\ 4x_1 + 1x_2 + 8x_3 &\leq 3000 \end{aligned}$$

Per il punto (b), occorre introdurre una variabile decisionale di tipo binario che modelli quale delle tre risorse limitare. Abbiamo quindi

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se la risorsa } i = A, B, C \text{ è limitata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

E' necessario quindi introdurre il seguente vincolo

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$

per rappresentare il fatto che almeno una produzione è limitata. Occorre poi mettere in relazione i due livelli decisionali, ovvero quelli rappresentato dalle variabili x ed y modoficando i vincoli di risorsa come segue:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 8000(1 - y_1) + 0.8\,8000y_1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\leq 6000(1 - y_2) + 0.8\,6000y_2 \\ 4x_1 + 1x_2 + 8x_3 &\leq 3000(1 - y_3) + 0.8\,3000y_3 \end{aligned}$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max\ z = & 2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

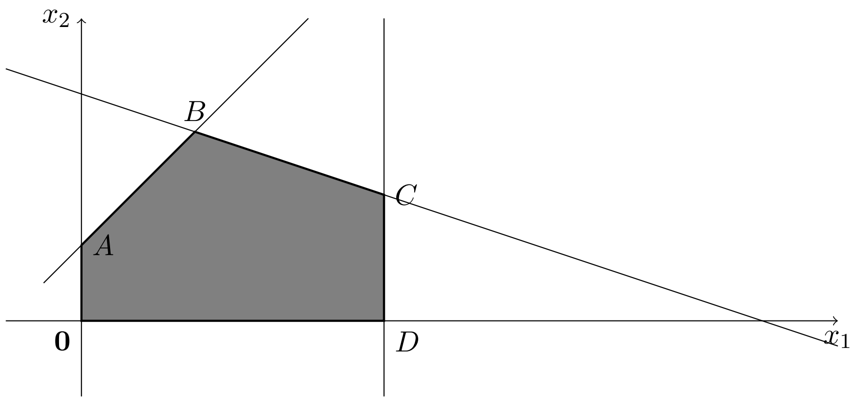
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)

(iv) Determinare la soluzione ottima applicando l'algoritmo del simplesso. (3 punti)

(v) Scrivere il duale del programma in forma standard, e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile è rappresentata in figura, con ottimi nel punto C, $z(C) = .\frac{29}{3}$.



$\mathbf{0}(0,0)$
$A(0,1)$
$B(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$
$C(4,\frac{5}{3})$
$D(4,0)$

Il problema in forma standard è

$$\begin{aligned}
\max \ z = & 2x_1 + x_2 \\
\text{soggetto a } & x_1 + 3x_2 \quad +x_3 \leq 9 \\
& -x_1 + x_2 \quad +x_4 \leq 1 \\
& x_1 \qquad\qquad +x_5 \leq 4 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Le basi corrispondenti ai vertici sono

Vertice	Base
$\mathbf{0}$	x_3, x_4, x_5
A	x_2, x_4, x_5
B	x_1, x_2, x_5
C	x_1, x_2, x_4
D	x_1, x_3, x_4

L'algoritmo del simplesso visita le basi $\mathbf{0}$, D, C. Il duale è

$$\begin{aligned}
\min w = & 9u_1 + u_2 + 4u_3 \\
\text{soggetto a } & u_1 - u_2 + u_3 \geq 2 \\
& 3u_1 + u_2 \geq 1 \\
& u_1 \geq 0 \\
& u_2 \geq 0 \\
& u_3 \geq 0
\end{aligned}$$

La soluzione ottima duale, ricavata con le condizioni di complementarietà, risulta avere $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = 0$, $u_3 = \frac{5}{3}$. □

Esercizio 3. (5 punti) Per la seguente matrice $\mathbf{A}$, determinare quanto richiesto.

(1) Il rango $\rho(\mathbf{A})$. (2 punti)

(2) Una base dello spazio delle righe. (1 punto)

(3) Dire se il vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ appartiene allo spazio delle colonne. (2 punti)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Soluzione suggerita. Con una riduzione della matrice completa $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{v})$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi $\rho(\mathbf{A}) = 3$, una base dello spazio delle righe è formata da tutte e tre le righe della matrice, e $\mathbf{v}$ appartiene allo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$. $\square$

Esercizio 4. (5 punti)
Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa giustificando la risposta.

(i) Dato un programma lineare $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, se $S_a \neq \emptyset$ e nessun vertice di S_a è ottimo, allora il programma in oggetto è illimitato. (2 punti)

(ii) Un programma lineare con S_a illimitato può avere una soluzione ottima (non necessariamente unica) che non è una soluzione ottima di base. (1 punto)

(iii) Sia

(P) $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

un programma lineare e

(D) $\max\{w = \mathbf{u}^T\mathbf{b} \colon \mathbf{u}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T\}$

il suo duale. Se (P) ha un ottimo finito, è possibile scegliere $\mathbf{b}' \neq \mathbf{b}$ tale che $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}',\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ sia un programma illimitato. (2 punti)

Soluzione suggerita.

(i) **Vero**. Un programma lineare può avere solo tre esiti: (a) nessuna soluzione ammissibile, (b) programma illimitato, (c) ottimo finito. L'affermazione esclude il caso (a). Se ci fosse un ottimo finito dovrebbe anche esserci un vertice ottimo, per il teorema fondamentale. Quindi si esclude anche il caso (c). Rimane (b).

(ii) **Vero**. Ad esempio

$$\max\{z = x_2 : x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 2 \quad x_, x_2 \geq 0.$$

(iii) **Falso**. Il duale del programma è $\min\{w = \mathbf{u}^T\mathbf{b} : \mathbf{u}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T\}$, e l'affermazione implica, per la dualità forte, che esso abbia un ottimo finito, quindi sicuramente $D_a \neq \emptyset$. Cambiando $\mathbf{b}$ in $\mathbf{b}'$ si vede che D_a non cambia, quindi le soluzioni duali continuano ad esistere e limitano superiormente anche la funzione obiettivo del programma primale modificato.

□

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 09/07/2014

Esercizio 1. (11 punti) In un piccolo ospedale ci si pone il problema di organizzare il piano operatorio settimanale, ovvero il problema di come selezionare un certo numero di pazienti dalla lista di attesa.

Supponiamo quindi di avere un insieme di pazienti P. A ciascun paziente $p \in P$ è associata una durata stimata dell'intervento d_p espressa in minuti ed un costo c_p che misura il costo sociale di **non** operare il paziente nella settimana in questione.

Supponiamo inoltre di poter disporre di un insieme S di sale operatorie che lavorano 5 giorni alla settimana. Ciascuna sala operatoria $s \in S$ può operare per non più di 480 minuti al giorno. Le sale operatorie sono 3, ovvero $|S| = 3$

Il problema consiste quindi nel selezionare un certo numero di pazienti dalla lista di attesa assegnandoli ad una ed una sola sala operatoria in uno dei 5 giorni disponibili in modo che la durata totale degli interventi assegnati alla sala operatoria (in ciascuno dei giorni disponibili) non ecceda il tempo massimo a disposizione. Denotiamo con t i giorni da 1 a 5.

L'obiettivo è quello di minimizzare il costo sociale dei pazienti non operati.

Suggerimento: la decisione deve tenere in considerazione le tre dimensioni, ovvero paziente, sala operatoria s e giorno di intervento.

(a) Scrivere il programma lineare per determinare il piano operatorio. (8 punti)

(b) Modificare il programma tenendo conto del fatto che ogni giorno almeno una sala operatoria non può operare più di 300 minuti al fine di lasciare spazio libero per gestire pazienti provenienti dal pronto soccorso. (3 punti)

Soluzione suggerita. Come suggerito, la decisione consiste nel selezionare un paziente p dalla lista per assegnarlo ad una sala operatoria s in uno dei giorni di apertura t. Sia quindi

$$x_{pst} = \begin{cases} 1 & \text{se paziente } p \text{ è assegnato alla sala operatoria } s \text{ nel giorno } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il primo vincolo

$$\sum_{st} x_{pst} \leq 1 \qquad \forall p$$

dice che ogni paziente p può essere selezionato ed assegnato al più una volta. Il secondo vincolo

$$\sum_{p} d_p x_{pst} \leq 480 \qquad \forall s,\ \forall t$$

garantisce che la somma dei tempi operatori dei pazienti assegnati alla sala operatoria s in un dato giorno t non eccedano la soglia massima di 480 minuti. Infine, la funzione obiettivo è la seguente:

$$\min \sum_{pst} c_p \left(1 - x_{pst}\right).$$

Per la seconda parte, occorre introdurre una ulteriore variabile decisionale, ovvero

$$y_{st} = \begin{cases} 1 & \text{se sala operatoria } s \text{ nel giorno } t \text{ lavora al più 300 minuti} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il primo vincolo garantisce che ogni giorno una sala operatoria lavora a regime ridotto, ovvero

$$\sum_{s} y_{st} \geq 1 \qquad \forall t$$

mentre il secondo vincolo garantisce la relazione tra i due livelli decisionali, ovvero

$$\sum_{p} d_p x_{pst} \leq 480 \left(1 - y_{st}\right) + 300 y_{st} \qquad \forall s, \, \forall t$$

modificando il secondo vincolo della prima parte dell'esercizio. □

Esercizio 2. (11 punti)
Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{array}{lrrl} \max & z = & -x_1 + 2x_2 & \\ \text{soggetto a} & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & -4x_1 & +2x_2 & \leq 3 \\ & & 3x_2 & \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

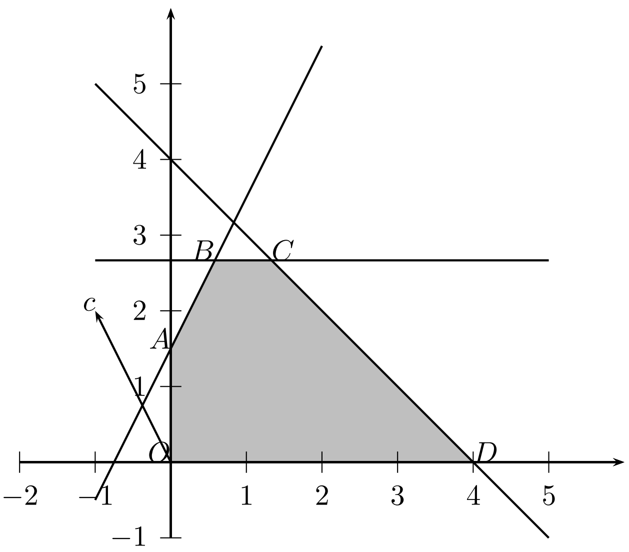
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (2 punti)

(iv) Risolvere il programma lineare in forma standard applicando l'algoritmo del simplesso. (3 punti)

(v) Scrivere il duale del programma in forma standard, e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. Si offre una traccia delle soluzioni.
La regione ammissibile del problema è la seguente:



La soluzione del problema si trova nel vertice $B = (\frac{7}{12}, \frac{8}{3})$ con $z^* = \frac{19}{4}$.

Le basi ammissibili corrispondono ai vertici della regione ammissibile, e rispetto alla forma standard sono le seguenti

Vertice	Base	Valore
O	$x_3.x_4, x_5$	$(4, 3, 8)$
A	x_2, x_3, x_5	$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$
B	x_1, x_2, x_3	$\left(\frac{7}{12}, \frac{8}{3}, \frac{17}{12}\right)$

mentre le basi corrispondenti ai vertici C e D sono lasciate per esercizio.

Il problema in forma standard è

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\max\ z = & -x_1 + 2x_2 & & & & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 4 \\
& -4x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 3 \\
& & 3x_2 & & & +x_5 & = 8 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0. & & & & &
\end{array}
$$

Il simplesso parte dalla base ottima individuata dal vertice O, transita per la base assiciata al punto A e termina con successo nella base relativa al punto di ottimo B con $z^* = \frac{19}{4}$.

Il duale del problema è

$$
\begin{array}{rllll}
\min\ w = & 4u_1 & + 3u_2 & + 8u_3 & \\
\text{soggetto a} & u_1 & -4u_2 & & \geq -1 \\
& u_1 & +2u_2 & +3u_3 & \geq 2 \\
& u_1, u_2, u_3 \geq 0. & & &
\end{array}
$$

L'ottimo duale, ricavato come al solito con le condizioni di complementarietà, è $u_1^* = 0$, $u_2^* = \frac{1}{4}$, $u_3^* = \frac{1}{2}$ con $w^* = \frac{19}{4}$.

□

Esercizio 3. (6 punti)
Dati due sottospazi V_1, V_2 di $\mathbb{R}^n$, si dica quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi a loro volta e quali no, motivando la risposta.

(i) $V_1 \cap V_2$.

(ii) $V_1 \cup V_2$.

(iii) $V_1^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\ \forall \mathbf{x} \in V_1\}$.

Soluzione suggerita. (i) Vero. Sia $\mathbf{x} \in V_1, \mathbf{y} \in V_2, a \in \mathbb{R}$. Si possono verificare i tre requisiti della definizione di sottospazio.

(a) $\mathbf{0} \in V_1, \mathbf{0} \in V_2 \implies \mathbf{0} \in V_1 \cap V_2$.

(b) $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2, \mathbf{y} \in V_1 \cap V_2$ implica $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V_1$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V_2$ quindi $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \in V_1 \cap V_2$.

(c) Se $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$: $a\mathbf{x} \in V_1$, quindi $(a\mathbf{x}) \in V_1$; $a\mathbf{x} \in V_2$, quindi $(a\mathbf{x}) \in V_2$; allora $(a\mathbf{y}) \in V_1 \cap V_2$.

(d) Falso. Constroesempio: due rette passanti per l'origine (non coincidenti) in $\mathbb{R}^2$.

(e) Vero. Verifica dei tre requisiti. Ad es. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1^\perp$ implica per ogni $\mathbf{x} \in V_1$: $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 + 0 = 0$ e quindi $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \in V_1^\perp$. Ecc...

□

Esercizio 4. (5 punti)
Enunciare (2 punti) e dimostrare (2 punti) il teorema fondamentale della programmazione lineare. Si discuta inoltre l'importanza del teorema in relazione allo sviluppo di un generico algoritmo per la soluzione di un programma lineare in forma standard (1 punti).

Soluzione suggerita. La dimostrazione è reperibile sugli appunti. L'importanza del teorema è legata all'identificazione di un sottoinsieme di soluzioni *di cardinalità limitata* nel quale cercare una soluzione ottima, in contrapposizione all'intera regione ammissibile che ha invece la potenza del continuo. □

Anno Accademico 2014-15

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 02/02/2015

Esercizio 1. (12 punti) Una fabbrica produce due modelli di giocattoli identificati con A e B. Entrambi i modelli fanno uso di tre tipi di componenti $1, 2, 3$ utilizzati in quantità diverse. Ogni unità del modello A richiede tre componenti di tipo 1, uno di tipo 2 e 5 di tipo 3. Ogni unità del modello B richiede un componente di tipo 1, tre di tipo 2 e tre di tipo 3. I fornitori vendono i tre componenti impaccati in tre tipi di confezioni I, II, III, ognuna delle quali contiene i tre componenti in differenti quantità ed ha un diverso costo.

Tipo	**Comp. 1**	**Comp. 2**	**Comp. 3**	**Costo**
I	2	3	5	20
II	4	8	2	15
III	4	4	3	30

La fabbrica deve approvvigionarsi di componenti al fine di assicurare la produzione di almeno 5000 unità complessive di giocattoli $(A + B)$, e nel mix produttivo nessuno dei due tipi deve rappresentare meno del 30% del totale prodotto.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare le quantità di giocattoli da produrre ed i relativi acquisti di componenti a costo minimo. (8 punti)

(b) Modificare il modello precedente per tenere in considerazionei il fatto che la direzione acquisti ha inoltre deciso che l'acquisto di almeno uno dei tre tipi di confezioni deve essere limitato a non più di 500 unità. (4 punti)

Soluzione suggerita. Le decisioni richieste dal problema riguardano sia gli acquisti di confezioni che i volumi produttivi di giocattoli A e B — queste ultime sono inevitabili in quanto determinano le quantità da approvvigionare dei singoli componenti. Si possono quindi usare due variabili x_A, x_B per le quantità di giocattoli e tre variabili $x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{III}}$ per le quantità di confezioni di tipo I, II, III acquistate.

Allora la funzione obiettivo del modello si scrive semplicemente come segue:

$$\min z = 20x_{\mathrm{I}} + 15x_{\mathrm{II}} + 30x_{\mathrm{III}} \tag{1}$$

Bisogna produrre almeno 5000 giocattoli, dove sia A che B non rappresentano meno del 30% del totale.

$$x_A + x_B \geq 5000 \tag{2}$$

$$x_A \geq 0.3(x_A + x_B) \tag{3}$$

$$x_B \geq 0.3(x_A + x_B). \tag{4}$$

Bisogna inoltre approvvigionarsi dei componenti nelle quantità richieste. In base al testo, con volumi produttivi pari a x_A e x_B occorreranno almeno $(3x_A + x_B)$ componenti di tipo 1, $(x_A + 3x_B)$ di tipo 2 e $(5x_A + 3x_B)$ di tipo 3. Quindi:

$$2x_{\mathrm{I}} + 4x_{\mathrm{II}} + 4x_{\mathrm{III}} \geq 3x_A + x_B \tag{5}$$

$$3x_{\mathrm{I}} + 8x_{\mathrm{II}} + 4x_{\mathrm{III}} \geq x_A + 3x_B \tag{6}$$

$$5x_{\mathrm{I}} + 2x_{\mathrm{II}} + 3x_{\mathrm{III}} \geq 5x_A + 3x_B. \tag{7}$$

Tutte le x_i sono di tipo intero. Per quanto riguarda il punto (b), introduciamo la seguente variabile binaria

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se viene limitato l'acquisto della confezione di tipo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il primo vincolo modella la decisione di quale confezione limitarne l'acquisto

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \tag{8}$$

mentre il secondo vincolo mette in relazione tale decisione con le quantità da acquistare

$$x_i \leq 500y_i + M(1 - y_i), \qquad i = \mathrm{I, II, III}. \tag{9}$$

Il "Big-M" è necessario per lasciare libertà di acquisto nel caso $y_i = 0$. □

Esercizio 2. (11 punti)
Si consideri il seguente programa lineare.

$$\begin{aligned} \max\ z = & x_1 \\ \text{soggetto a } & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)

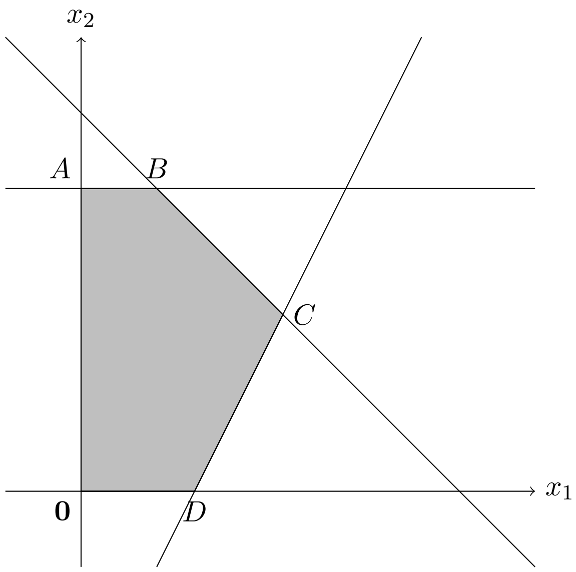
(iv) Risolvere il problema per mezzo dell'algoritmo del simplesso. (3 punti)

(v) Rispetto alla forma standard, scrivere il programma duale e determinarne la soluzione ottima. (2 punti)

Soluzione suggerita. Il programma in forma standard è

$$
\begin{aligned}
\max\ z = & x_1 \\
\text{soggetto a } & x_1 \quad + x_2 + x_3 = 5 \\
& 2x_1 \quad - x_2 + x_4 = 3 \\
& \qquad x_2 + x_5 = 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

La regione ammissibile è la seguente, con ottimo localizzato nel punto $C(x_1{*} = \frac{8}{3}, x_2^* = \frac{7}{3})$.



Le basi ammissibili corrispondono ai vertici.

Punto	**Base**
$\mathbf{0}$	$\{x_3, x_4, x_5\}$
A	$\{x_2, x_3, x_4\}$
B	$\{x_1, x_2, x_4\}$
C	$\{x_1, x_2, x_5\}$
D	$\{x_1, x_3, x_5\}$

Partendo dalla base iniziale $\{x_3, x_4, x_5\}$ il simplesso arriva alla base ottima corrispondente a C in due iterazioni.

Il programma duale è

$$
\begin{aligned}
\min\ w = & 5u_1 + 3u_2 + 4u_3 \\
\text{soggetto a } & u_1 + 2u_2 \qquad \geq 1 \\
& u_1 - u_2 + u_3 \ \geq 0 \\
& u_1, u_2, u_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Applicando le condizionidi complementarietà primale duale si ottengono le condizioni per l'ottimo duale:

$$\begin{cases} u_1^* + 2u_2^* & = 1 \\ u_1^* - u_2^* + u_3^* & = 0 \\ u_3 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow u_1^* = \frac{1}{3}, u_2^* = \frac{1}{3}, u_3^* = 0.$$

□

Esercizio 3. (5 punti)
Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con ilmetodo fi Gauss-Jordan avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte ad ogni passaggio.

$$\begin{cases} \quad\; - x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{8}{5} \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + \frac{4}{5}x_4 & = \frac{6}{5} \\ \qquad x_2 \qquad - x_4 & = -1 \\ \qquad\qquad x_3 - \frac{7}{5}x_4 & = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

che si risolve per ispezione, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6}{5} - \frac{4}{5}x_4 \\ x_2 = -1 + x_4 \qquad (x_4 \in \mathbb{R}), \text{ libera.} \\ x_3 = -\frac{8}{5} + \frac{7}{5}x_4 \end{cases}$$

□

Esercizio 4. (5 punti)
Dato un programma lineare nella sua forma standard e supponendo di avere una soluzione ottima primale $\mathbf{x}^*$ ad n componenti, si dimostri la relazione

$$x_j^* > 0 \Longrightarrow \mathbf{u}^{*T}\mathbf{A}_j - c_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

dove $\mathbf{u}^*$ è una soluzione ottima duale.

Soluzione suggerita. La dimostrazione deriva dall'applicazione del Teorema della dualità forte 3.10 come mostrato nel Corollario 3.11. $\square$

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 20/02/2015

Esercizio 1. (12 punti) Un'industria chimica deve approvvigionarsi di tre tipi di liquidi $1, 2, 3$ per evadere gli ordini del mese corrente. I tre liquidi sono acquistati da tre fornitori A, B, C che li forniscono alle seguenti condizioni.

(A) Il fornitore A vende il liquido 1 a 30 euro/litro e il liquido 2 a 40 euro/litro. Non vende il liquido 3.

(B) Il fornitore B vende il liquido 2 a 25 euro/litro e il liquido 3 a 50 euro/litro. Non vende il liquido 1.

(C) Il fornitore C vende il liquido 1 a 15 euro/litro e il liquido 3 a 30 euro/litro. Non vende il liquido 1.

Nessuno dei fornitori accetta ordini di un solo liquido, ma pretende di fornire un mix dove ognuno dei due liquidi che tratta non rappresenta meno del 30% dell'ordine. Inoltre nessuno dei tre accetta ordini per meno di 2500 litri complessivi.

La ditta ha bisogno per il mese corrente di almeno 10000, 15000 e 18000 litri dei tre componenti.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare gli acquisti da effettuare presso i tre fornitori al fine di approvvigionare la ditta a costo minimo.

(b) Il fornitore B è disposto a fare uno sconto di 10000 euro a fronte di un ordine complessivo di almeno 5000 litri. Modificare il modello in modo da tenerne conto.

Soluzione suggerita. Il modello può essere scfritto usando 6 variabili continue non negative x_{ij} che rappresentano il numero di litri di liquido j fornito da i, con $(i, j) \in \{(A, 1), (A, 2), (B, 2), (B, 3), (C, 1), (C, 3)\}$. L'obiettivo è

(1) $\quad \min\ z = 30x_{A1} + 40x_{A2} + 25x_{B2} + 50x_{B3} + 15x_{C1} + 30x_{C3}.$

Una serie di vincoli impone il rispetto del mix chiesto dai fornitori:

(2) $\quad x_{A1} \geq 0.3(x_{A1} + x_{A2})$

(3) $\quad x_{A2} \geq 0.3(x_{A1} + x_{A2})$

(4) $\quad x_{B2} \geq 0.3(x_{B2} + x_{B3})$

(5) $\quad x_{B3} \geq 0.3(x_{B2} + x_{B3})$

(6) $\quad x_{C1} \geq 0.3(x_{C1} + x_{C3})$

(7) $\quad x_{C3} \geq 0.3(x_{C1} + x_{C3}).$

Un'altra serie impone l'acquisto di almeno 2500 litri da ciascun fornitore (c'è un'interpretazione più complessa ma questa è accettabile).

(8) $x_{A1} + x_{A2} \geq 2500$

(9) $x_{B2} + x_{B3} \geq 2500$

(10) $x_{C1} + x_{C3} \geq 2500$

Infine una serie di vincoli impone il soddisfacimento del fabbisogno:

(11) $x_{A1} + x_{C1} \geq 10000$

(12) $x_{A2} + x_{B2} \geq 15000$

(13) $x_{B3} + x_{C3} \geq 18000.$

La parte (b) si gestisce con una variabile logica y che vale 1 se si decide di approfittare dello sconto del fornitore B, modificando l'obiettivo in

$$\min\ z = 30x_{A1} + 40x_{A2} + 25x_{B2} + 50x_{B3} + 15x_{C1} + 30x_{C3} - 10000y$$

e inserendo l'ulteriore vincolo

$$x_{B2} + x_{B3} \geq 5000y.$$

□

Esercizio 2. (11 punti)
Si consideri il seguente programa lineare.

$$\begin{aligned} \max\ z =& -x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a}\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)

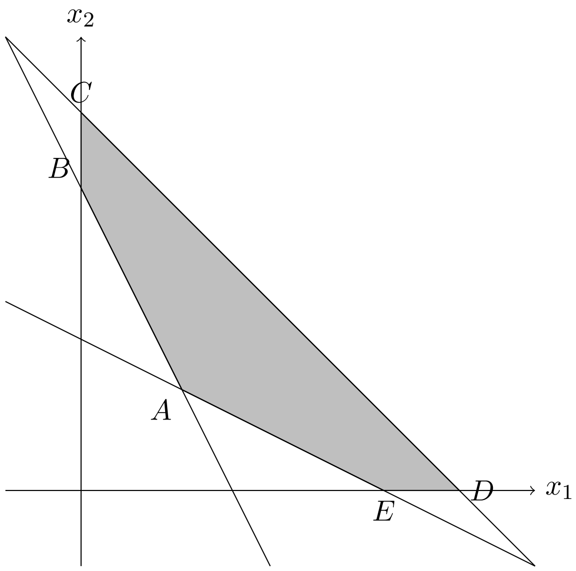
(iv) Risolvere il problema per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice ($x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$) della regione ammissibile. (3 punti)

(v) Rispetto alla forma standard, scrivere il programma duale e determinarne la soluzione ottima. (2 punti)

Soluzione suggerita. Il programma in forma standard è

$$\begin{aligned} \max\ \ z = & -x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } & x_1 \quad +x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 \quad +x_2 - x_4 = 3 \\ & x_1 \quad +2x_2 - x_5 = 4 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

La regione ammissibile è la seguente, con ottimo localizzato nel punto $C(x_1* = 0, x_2^* = 5)$.



Le basi ammissibili corrispondono ai vertici.

Punto	**Base**
A	$\{x_1, x_2, x_3\}$
B	$\{x_2, x_3, x_5\}$
C	$\{x_2, x_4, x_5\}$
D	$\{x_1, x_4, x_5\}$
D	$\{x_1, x_3, x_4\}$

Partendo dalla base iniziale $\{x_1, x_2, x_3\}$ il simplesso arriva alla base ottima corrispondente a C in due iterazioni.

Il programma duale è

$$\begin{aligned} \min\ w = & 5u_1 + 4u_2 + 4u_3 \\ \text{soggetto a } & u_1 + 2u_2 + u_3 && \geq -1 \\ & u_1 + u_2 + 2u_3 && \geq 1 \\ & u_1 && \geq 0 \\ & u_2 && \leq 0 \\ & u_3 && \leq 0 \end{aligned}$$

Applicando le condizionidi complementarietà primale duale si ottengono le condizioni per l'ottimo duale:

$$\begin{cases} u_1^* + u_2 + 2u_3^* = 1 \\ u_2^* = 0 \\ u_3^* = 0 \end{cases} \implies u_1^* = 1, u_2^* = 0, u_3^* = 0.$$

□

Esercizio 3. (5 punti)
Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte ad ogni passaggio.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = \frac{2}{3} \\ \qquad x_2 \qquad = \frac{4}{3} \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad \text{(ridondante)} \end{cases}$$

che si risolve per ispezione, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

□

Esercizio 4. (5 punti)
Dimostrare che k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono tra loro linearmente indipendenti se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri.

Soluzione suggerita. La dimostrazione è reperibile sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 10/06/2015

Esercizio 1. (12 punti) Un cassiere ha a disposizione 10 banconote da 100 €, 100 banconote da 50 €, 200 banconote da 20 €, 500 banconote da 10 €e 1000 banconote da 5 €.

(a) Scrivere il programma lineare per determinare quante e quali banconote deve usare il cassiere per ottenere l'importo T con il numero minimo di banconote necessarie. (**5 punti**)

(b) Modificare il modello in modo da tenere in considerazione il seguente vincolo aggiuntivo: se si utilizza almeno una banconota da 20 €, allora si deve utilizzare almeno una banconota da 10 €. (**4 punti**)

(c) Modificare il modello in modo da tenere in considerazione un secondo vincolo aggiuntivo: se si utilizzano banconote da 50 €, allora non si possono utilizzare banconote da 20 €. (**3 punti**)

Soluzione suggerita. Siano N l'insieme di tagli di banconote disponibili, un valore v_i per ogni banconota di tipo $i \in N$ e un numero b_i di banconote disponibili per un dato taglio $i \in N$.

Si introduce la seguente variabile decisionale, ovvero

$$x_i \equiv \text{ numero di banconote usate per ciascun taglio } i \in N.$$

Allora la funzione obiettivo è la seguente:

$$\min z = \sum_{i \in N} x_i.$$

Il primo vincolo impone che si possano usare solo le banconote disponibile per ciascun taglio

$$x_i \leq b_i \quad i \in N$$

mentre il secondo vincolo garantisce il raggiungimento dell'importo richiesto

$$\sum_{i \in N} v_i x_i = T.$$

Per il punto (b) è necessario introdurre un vincolo che impone l'uso di almeno una banconota da 10 € (il taglio numero 4 dei 5 possibili) quando viene usata almeno una banconota da 20 € (il taglio numero 3). A tale scopo è necessario introdurre delle variabili binarie z_i a valori in 1 se la banconota di tipo $i \in N$ viene utilizzata, 0 altrimenti, e sostituire i vincoli $x_i \leq b_i$ con il seguente

$$x_i \leq b_i z_i \quad i \in N$$

. L'uso della banconota da 10 € viene quindi imposta dal vincolo

$$x_4 \geq z_3.$$

Nota che la soluzione proposta per il punto (b) è un pelino più generale di quella effettivamente richiesta nell'esercizio.

Infine, per il punto (c) basta imporre il seguente vincolo logico:

$$1 - z_2 \geq z_3.$$

□

Esercizio 2. (11 punti)
Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max\ z = & 2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a}\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)

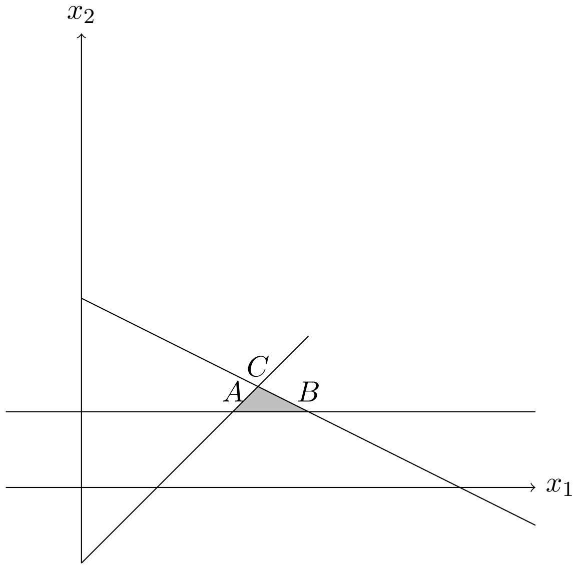
(iv) Risolvere il problema per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice $(x_1 = 2, x_2 = 1)$ della regione ammissibile. (3 punti)

(v) Rispetto alla forma standard, scrivere il programma duale e determinarne la soluzione ottima. (2 punti)

Soluzione suggerita. Il programma in forma standard è

$$\begin{aligned} \max\ z = & 2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a}\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ & x_2 - x_5 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

La regione ammissibile è la seguente, con ottimo localizzato nel punto $B(x_1^* = 3, x_2^* = 1)$.



Le basi ammissibili corrispondono ai vertici.

Punto	**Base**
A	$\{x_1, x_2, x_3\}$
B	$\{x_1, x_2, x_4\}$
C	$\{x_1, x_2, x_5\}$

Partendo dalla base iniziale $\{x_1, x_2, x_3\}$ (vertice A) il simplesso arriva alla base ottima corrispondente a B in una iterazione.

Il programma duale è

$$\begin{aligned} \min\ \ w = & 5u_1 + u_2 + u_3 \\ \text{soggetto a } & u_1 + u_2 && \geq 2 \\ & 2u_1 - u_2 + u_3 && \geq 1 \\ & u_1 && \geq 0 \\ & u_2 && \leq 0 \\ & u_3 && \leq 0 \end{aligned}$$

Applicando le condizioni di complementarietà primale duale si ottengono le condizioni per l'ottimo duale:

$$\begin{cases} u_1^* + u_2^* + u_3^* = 2 \\ 2u_1^* - u_2 + u_3^* = 1 \\ u_2^* = 0 \end{cases} \Longrightarrow u_1^* = 2, u_2^* = 0, u_3^* = -3.$$

□

Esercizio 3. (5 punti)
Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte ad ogni passaggio.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \quad \text{(contraddizione)} \end{cases}$$

che individua una contraddizione e quindi il sistema non ha soluzione. □

Esercizio 4. (5 punti)
Enunciare (2 punti) e dimostrare (2 punti) il teorema fondamentale della programmazione lineare. Si discuta inoltre l'importanza del teorema in relazione allo sviluppo di un generico algoritmo per la soluzione di un programma lineare in forma standard (1 punti).

Soluzione suggerita. La dimostrazione è reperibile sugli appunti. L'importanza del teorema è legata all'identificazione di un sottoinsieme di soluzioni *di cardinalità limitata* nel quale cercare una soluzione ottima, in contrapposizione all'intera regione ammissibile che ha invece la potenza del continuo. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 09/07/2015

Esercizio 1. (12 punti) Un'azienda meccanica necessita, per le sue lavorazioni, di tre tipi di componenti A, B, C in quantità pari a 2000, 3000 e 6000 unità rispettivamente. L'azienda si rifornisce presso tre fornitori F_1, F_2, F_3, che praticano i prezzi in euro/componente riportati in tabella.

	A	B	C
F_1	50	20	30
F_2	40	40	35
F_3	20	5	30

Il fornitore F_1 può fornire fino a 1500, 2500 e 4000 componenti di tipo A, B, C, rispettivamente. Il fornitore F_2 ne può fornire fino a 2000, 4500 e 5000 unità. Il fornitore F_3 può fornire fino a 5000, 2500, 3000 unità.

Per problemi logistici, il fornitore F_2 non può consegnare più di due tipi di componenti su tre. Inoltre il fornitore F_3 accetta solo ordini che comprendano almeno 600 unità di A, altrimenti non fornisce nulla.

Scrivere il programma lineare per effettuare l'approvvigionamento di componenti nelle quantità richieste, a costo totale minimo.

Soluzione suggerita. Si possono definire le variabili x_{ij} che rappresentano le quantità di componente j acquistate dal fornitore i ($i = 1, 2, 3,\ j = A, B, C$). Inoltre servono variabili logiche y_{2j} poste a 1 se F_2 consegna componenti di tipo j ($j = A, B, C$) e una y_3 che stabilisce se le condizioni per attivare la fornitura presso F_3 sono soddisfatte o no. Il modello si può scrivere con queste variabili come segue.

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=A}^{C} c_{ij} x_{ij} \qquad \text{le costanti } c_{ij} \text{ sono le entry della tabella dei costi.}$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq q_j && j = A, B, C \qquad q_j = 2000, 3000, 6000) \\
&x_{ij} \leq u_{ij} && i = 1,2,3,\ j = A,B,C \qquad u_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1500 & 2500 & 4000 \\ 2000 & 4500 & 5000 \\ 5000 & 2500 & 3000 \end{pmatrix} \end{array} \\
&\sum_{j=A}^{C} y_{2j} \leq 2 \\
&x_{2j} \leq M y_{2j} && j = A, B, C \\
&x_{3A} \geq 600 y_3 \\
&\sum_{j=A}^{C} x_{3j} \leq M y_3 \\
&x_{ij} \geq 0 && i = 1,2,3,\ j = A,B,C \\
&y_1, y_{2A}, y_{2B}, y_{2C} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

□

Esercizio 2. (11 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 4 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

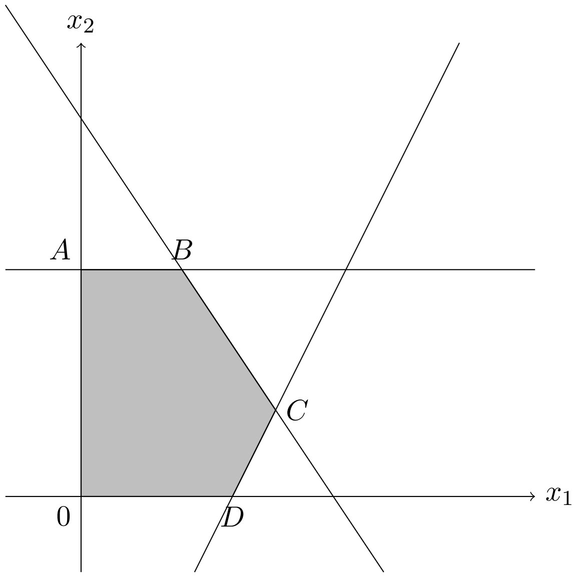
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del problema in forma standard. (3 punti)

(iv) Determinare la base ottima del programma in forma standard. (2 punti)

(v) Scrivere il programma duale e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del programma è rappresentata in figura.



Il programma in forma standard è

$$\begin{array}{lll} \max & z = x_1 + x_2 & \\ \text{soggetto a} & 3x_1 + 2x_2 & +x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 & +x_4 \leq 4 \\ & \quad x_2 & +x_5 \leq 3 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & \end{array}$$

Le basi ammissibili corrispondono ai vertici della regione ammissibile come da tabella.

Vertice	**Base**
0	(x_3, x_4, x_5)
A	(x_2, x_3, x_4)
B	(x_1, x_2, x_4)
C	(x_1, x_2, x_5)
D	(x_1, x_3, x_5)

L'ottimo si trova nel vertice $B(x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 3)$ con $z = \frac{13}{3}$.

Il duale del programma è

$$\begin{array}{ll} \min w = & 10u_1 + 4u_2 + 3u_3 \\ \text{soggetto a} & 3u_1 + u_2 \qquad \geq 1 \\ & 2u_1 - u_2 + u_3 \quad \geq 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \qquad \geq 0 \end{array}$$

Dalla base ottima (x_1, x_2, x_4) e applicando le condizioni di complementarietà si ottiene che l'ottimo duale deve soddisfare

$$\begin{cases} 3u_1^* + 2u_2^* &= 1 \\ 2u_1^* - u_2^* + u_3^* &= 1 \\ u_2^* &= 0 \end{cases} \implies u_1^* = \frac{1}{3}, u_2^* = 0, u_3^* = \frac{1}{3}.$$

□

Esercizio 3. (5 punti)
Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte ad ogni passaggio.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 2 \\ \qquad x_2 \qquad = \frac{2}{3} \\ \qquad\qquad x_3 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad \text{(eq. ridondante)} \end{cases}$$

che si risolve per ispezione ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{3} \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

□

Esercizio 4. (5 punti)
Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa giustificando la risposta.

(i) Dato un programma lineare $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, se $S_a \neq \emptyset$ e nessun vertice di S_a è ottimo, allora il programma in oggetto è illimitato. (2 punti)

(ii) Sia

(P) $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

un programma lineare e

(D) $\max\{w = \mathbf{u}^T\mathbf{b} \colon \mathbf{u}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T\}$

il suo duale. Se (P) ha un ottimo finito, è possibile scegliere $\mathbf{b}' \neq \mathbf{b}$ tale che $\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}',\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ sia un programma illimitato. (3 punti)

Soluzione suggerita.

(i) **Vero**. Un programma lineare può avere solo tre esiti: (a) nessuna soluzione ammissibile, (b) programma illimitato, (c) ottimo finito. L'affermazione esclude il caso (a). Se ci fosse un ottimo finito dovrebbe anche esserci un vertice ottimo, per il teorema fondamentale. Quindi si esclude anche il caso (c). Rimane (b).

(ii) **Falso**. Il duale del programma è $\min\{w = \mathbf{u}^T\mathbf{b} : \mathbf{u}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T\}$, e l'affermazione implica, per la dualità forte, che esso abbia un ottimo finito, quindi sicuramente $D_a \neq \emptyset$. Cambiando $\mathbf{b}$ in $\mathbf{b}'$ si vede che D_a non cambia, quindi le soluzioni duali continuano ad esistere e limitano superiormente anche la funzione obiettivo del programma primale modificato.

□

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 18/09/2015

Esercizio 1. (11 punti) Il sig. Ibrahim Rossi vuole investire la somma di 500000 euro, con l'orizzonte temporale di un anno. A tal fine il sig. Rossi vuole ripartire il capitale in due tipi di investimenti:

(a) un conto bancario privo di rischi che paga interessi del 2%;
(b) un portafoglio azionario composto da un mix di quote di ETF (=fondi scambiati in borsa) descritti qui di seguito.

Gli ETF che il sig. Rossi prende in considerazione sono i seguenti. Si possono solo acquistare numeri interi di quote, al costo unitario indicato in tabella.

ID	Denominazione	Settore	Rend. atteso	Max. perdita	Prezzo
1	Euro STOCKS 600	Europa, globale	14%	-5%	36
2	Euro STOCKS 600 HC	Europa, Health-care	20%	-10%	76
3	Euro STOCKS 600 Oil&Gas	Europa, Petroliferi	23%	-25%	32
4	USA S&P500	Usa, globale	12%	-4%	17
5	BRICS 50	Mercati emergenti	15%	-21%	18
6	MSCI Emerg. Marks.	Mercati emergenti	13%	-19%	27

Il sig. Rossi, per ogni ETF, ha stimato il rendimento atteso a un anno e anche una possibile massima perdita che ritiene che possa verificarsi nel caso l'ETF abbia una cattiva performance.
Il sig. Rossi, nello strutturare il suo portafoglio, si pone queste condizioni.

(1) Non meno di 150000 euro devono essere depositati nel conto privo di rischi.
(2) In ogni ETF non devono essere investiti più di 100000 euro.
(3) Non più del 20% della quota investita in ETF deve essere investita in mercati emergenti.
(4) Almeno il 10% della quota investita in ETF deve essere nel settore health-care.

Il sig. Rossi vuole pianificare i suoi investimenti minimizzando la massima perdita possibile, garantendosi nel contempo un rendimento atteso non inferiore al 5%.

(a) Formulare il programma linare corrispondente. (7 punti)
(b) Modificare il modello per tenere presente la seguente condizione: se si investono più di 50000 euro nel settore petrolifero, allora se ne devono investire almeno 60000 nel settore health-care. (4 punti)

Soluzione suggerita. Si possono definire le seguenti variabili:

x_0 =denaro investito nel conto corrente;

x_i =numero di quote dell'ETF i acquistate ($i = 1, \ldots, 6$).

Con queste variabili il problema si modella come segue. Siano p_i, d_i, r_i costanti che rappresentano rispettivamente il prezzo di ogni quota, la massima perdita percentuale e il rendimento atteso per ogni ETF.

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{6} d_i p_i x_i$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_0 + \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = 500000 \\
& x_0 \geq 150000 \\
& p_i x_i \leq 100000 \qquad i = 1, \dots 6 \\
& p_5 x_5 + p_6 x_6 \leq 0.2 \sum_{i=1}^{6} p_i x_i \\
& p_2 x_2 \geq 0.1 \sum_{i=1}^{6} p_i x_i \\
& 0.02 x_0 + \sum_{i=1}^{6} r_i p_i x_i \geq 1.05 \left(x_0 + \sum_{i=1}^{6} p_i x_i \right) \\
& x_0 \geq 0,\ x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Per gestire i vincoli addizionali della parte (b), si può utilizzare una variabile logica y, dove si pone $y = 1$ se e solo se non si investono più di 50000 euro in petroliferi. È allora sufficiente aggiungere i seguenti vincoli.

$$\begin{aligned}
& p_3 x_3 \leq 50000 y + M(1 - y) \\
& p_2 x_2 \geq 40000(1 - y) \\
& y \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

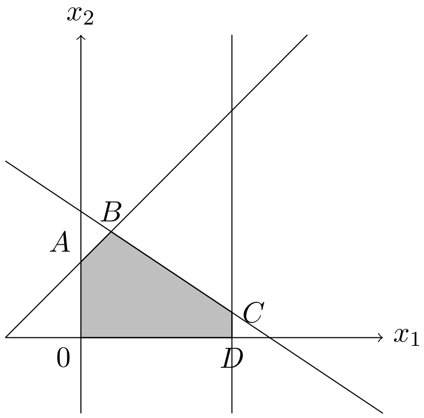
$$\begin{aligned}
\max\ z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)

(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)

(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard (giustificare i risultati). (3 punti)
(iv) Risolvere il programma lineare in forma standard applicando l'algoritmo del simplesso. (3 punti)
(v) Scrivere il duale del programma in forma standard, e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del problema è riportata nella figura seguente.



L'ottimo risulta essere nel punto B.
Il problema in forma standard è

$$\begin{aligned} \max\ \ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Le basi ammissibili corrispondono ai vertici $\mathbf{0}(x_3, x_4, x_5)$, $A(x_2, x_3, x_5)$, $B(x_1, x_2, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_4)$, $D(x_1, x_3, x_4)$. Partendo dalla base iniziale $\mathbf{0}$ il simplesso visita i vertici A e B, fermandosi nell'ottimo B.
Il programma duale è il seguente.

$$\begin{aligned} \min\ \ w = & 5u_1 + u_2 + 2u_3 \\ \text{soggetto a}\ & 2u_1 - u_2 + u_3 \geq 1 \\ & 3u_1 + u_2 \geq 2 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Dalle condizioni di complementarietà si ottiene che l'ottimo duale deve soddisfare le condizioni

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 + u_3 = 1 \\ 3u_1 + u_2 = 2 \\ u_3 = 0 \end{cases} \implies u_1 = \frac{3}{5}, u_2 = \frac{1}{5}, u_3 = 0.$$

□

Esercizio 3. **(5 punti)** Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 15 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = -7 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{24}{5} \\ x_2 + x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{9}{5} \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Risulta quindi privo di soluzioni. □

Esercizio 4. **(5 punti)** Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se essa è vera o falsa <u>motivando</u> la risposta.

(i) Se un programma lineare ha regione ammissibile illimitata, allora non ha soluzioni ottime. (1 punto)
(ii) Il duale del programma ausiliario della fase 1 del simplesso può essere privo di soluzioni ammissibili. (2 punti)
(iii) Il programma ausiliario della fase 1 può avere regione ammissibile illimitata.(2 punti)

Soluzione suggerita. (i) Falso. Ad esempio $\min\{x_1 + x_2 \colon x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1, x_2 \geq 0\}$ ha regione ammissibile illimitata ma ottimo finito.
(ii) Falso. Il programma ausiliario ha sempre per costruzione un ottimo finito, quindi per la dualità forte deve averlo anche il suo duale.
(iii) Vero. Ad esempio se il programma iniziale ha regione ammissibile illimitata, è illimitata anche la regione ammissibile del programma ausiliario, poiché la regione ammissibile dell'ausiliario è un superinsieme di quella del programma originale.

□

Anno Accademico 2015-16

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA –
APPELLO DEL 01/02/2016

Esercizio 1. (11 punti) Un'azienda tessile vorrebbe smistare la lavorazione di dieci lotti su tre impianti A, B, C. Ogni lotto può essere lavorato indifferentemente da uno qualunque dei tre impianti, in tempi differenti (espressi in ore) come indicato dalla seguente matrice.

$$p_{ij} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tutti gli impianti sono disponibili fin dallo stesso istante e lavorano in continuazione per una giornata di otto ore consecutive. Ogni impianto dispone inoltre di 30 unità di detergente utilizzato per ripulire l'impianto dopo ogni lavorazione; ogni lotto j consuma una specifica quantità di detergente q_j secondo la seguente tabella.

Lotto j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quant. q_j	8	5	7	2	2	2	10	6	3	1

Tutti i lotti cominciati devono necessariamente concludersi entro le otto ore (= non si possono lasciare lotti a metà per riprenderli il giorno dopo). Il refrigerante degli impianti viene caricato solo a inizio giornata, poi non può più essere rabboccato.

(a) Formulare il programma lineare per selezionare i lotti da lavorare e assegnarli agli impianti in modo da massimizzare il numero di lotti lavorati entro le 8 ore della giornata corrente (infatti non è detto che si possano lavorare tutti!). (7 punti)

(b) Modificare il programma per tenere presente la seguente condizione. Per ragioni tecnologiche sono specificate relazioni di incompatibilità tra i lotti: se i lotti j e k sono incompatibili, essi non devono essere lavorati dallo stesso impianto. Le coppie di lotti incompatibili sono specificate dall'insieme $I = \{\{2,3\},\{4,5\},\{3,1\},\{1,2\},\{6,9\}\}$. (4 punti)

Soluzione suggerita. Si possono definire le seguenti variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lotto } j \text{ è lavorato dall'impianto } i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Con le variabili date, si può scrivere il seguente modello.

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{10} x_{ij}$$

soggetto a

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leq 1 \qquad j = 1, \ldots, 10$$
$$\sum_{j=1}^{10} p_{ij} x_{ij} \leq 8 \qquad i = 1, 2, 3$$
$$\sum_{j=1}^{10} q_j x_{ij} \leq 30 \qquad i = 1, 2, 3$$
$$x_i j \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, \ldots, 10.$$

Per gestire la parte (b), si possono inserire i seguenti vincoli addizionali.

$$x_{ij} + x_{ik} \leq 1 \qquad \{j, k\} \in I,\ i = 1, 2, 3$$

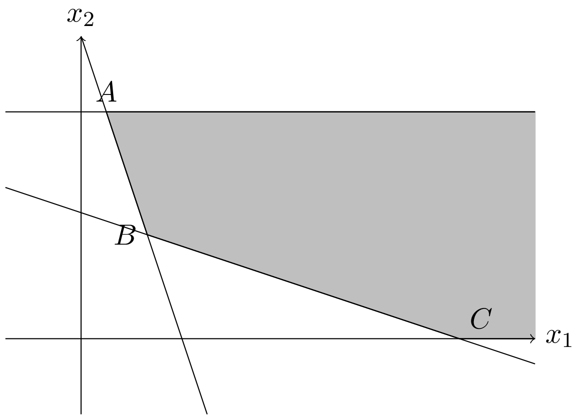
□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned}
\min\ z = {} & x_1 + x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\
& 3x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard (giustificare i risultati). (3 punti)
(iv) Risolvere il programma lineare in forma standard applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice di coordinate ($x_1 = 5, x_2 = 0$). (3 punti)
(v) Scrivere il duale del programma in forma standard, e determinarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del problema è riportata nella figura seguente.



L'ottimo risulta essere nel punto $B(x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{11}{8})$.
Il problema in forma standard è

$$\begin{aligned}
\max\ z = & -x_1 - x_2 \\
\text{soggetto a}\ & x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\
& 3x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\
& x_2 + x_5 = 2 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Le basi ammissibili corrispondono ai vertici $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(x_1, x_2, x_5)$, $C(x_1, x_4, x_5)$. La base iniziale specificata è quella corrispndente al vertice C. Il simplesso raggiunge l'ottimo in B in una sola iterazione.
Il programma duale è il seguente.

$$\begin{aligned}
\min\ w = & 5u_1 + 4u_2 + 3u_3 \\
\text{soggetto a}\ & u_1 + 3u_2 \geq -1 \\
& 3u_1 + u_2 + u_3 \geq -1 \\
& -u_1 \geq 0 \\
& -u_2 \geq 0 \\
& u_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Dalle condizioni di complementarietà si ottiene che l'ottimo duale deve soddisfare le condizioni

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 = -1 \\ 3u_1 + u_2 + u_3 = -1 \\ u_3 = 0 \end{cases} \implies u_1 = -\frac{1}{4}, u_2 = -\frac{1}{4}, u_3 = 0.$$

$\square$

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \quad\quad - 2x_4 = 1 \\ \quad 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 \quad\quad + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_4 = 3 \\ \quad x_2 \quad\quad = 5 \\ \quad\quad x_3 + 2x_4 = -7 \end{cases}$$

che si risolve per ispezione, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_4 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -7 - 2x_4 \end{cases} \quad (x_4 \in \mathbb{R}), \text{ libera.}$$

□

Esercizio 4. (5 punti) Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se essa è vera o falsa motivando la risposta.

(i) Il duale del programma ausiliario della fase 1 del simplesso può essere privo di soluzioni ammissibili. (1 punto)

(ii) Dato un programma primale $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ avente ottimo finito, è possibile determinare una perturbazione additiva $\Delta\mathbf{c}$ del vettore dei coefficienti della funzione obiettivo tale che il programma perturbato $\max\{(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c})^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ abbia un duale illimitato. (2 punti)

(iii) Dato un insieme di quattro vettori $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, da esso si può certamente estrarre una base dello spazio $\mathbb{R}^3$. (2 punti)

Soluzione suggerita. (i) Falso. Il programma ausiliario della fase 1 ha sempre un ottimo finito (vedere gli appunti per dettagli). Per il teorema della dualità forte quindi anche il suo duale ha sempre ottimo finito.

(ii) Falso. Sia $\mathbf{x}^*$ l'ottimo del primo programma (non perturbato). Siccome questa soluzione è almeno soluzione ammissibile del programma perturbato (la perturbazione avviene solo sulla funzione obiettivo), il programma perturbato non può avere regione ammissibile vuota, come invece sarebbe implicato dalla presenza di un duale illimitato.

(iii) Falso. Non è detto, in generale, che i quattro vettori siano in grado di generare l'intero $\mathbb{R}^3$, e quindi neanche una base da essi estratta. Si consideri ad esempio il caso dove $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (4, 4, 4)$.

$\square$

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 19/02/2016

Esercizio 1. (11 punti) Una ditta deve spostare materie prime da tre magazzini A, B, C a quattro siti di lavorazione $1, 2, 3, 4$. I magazzini hanno disponibilità rispettivamente di 100, 200 e 250 tonnellate di materia prima, mentre i quattro siti ne richiedono rispettivamente 80, 250, 100 e 100 tonnellate. Il trasporto della materia prima è però condizionato sia dai costi che dalle capacità di trasporto della flotta veicoli della ditta. In particolare, ogni unità di merce trasportata dal magazzino i al sito j ha un costo (in keuro) c_{ij} specificato nella tabella (i). Il budget per il trasporto è di 7000 keuro. Inoltre per ogni tratta magazzino-sito è possibile spostare al massimo u_{ij} tonnellate di merce, come da tabella (ii)

$$c_{ij} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 & 5 \\ 8 & 12 & 21 & 9 \\ 12 & 14 & 30 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad u_{ij} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 45 & 30 & 10 \\ 40 & 100 & 50 & 15 \\ 20 & 70 & 30 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

(i) (ii)

(a) Sapendo di non poter soddisfare le richieste di tutti i siti, scrivere il programma lineare per decidere quante tonnellate di merce trasportare su ogni tratta in modo da spostare il maggior quantitativo di merce possibile, rispettando il budget per il trasporto e le capacità delle tratte. (7 punti)

(b) Modificare il modello tenendo in conto il seguente vincolo addizionale: non è comunque possibile spostare merce su più di 8 delle 12 tratte.

Soluzione suggerita. Definendo le variabili x_{ij} = tonnellate di merce instradate sulla tratta $i \to j$ il problema si può formulare come segue.

$$\max\ z = \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}$$

soggetto a

$$\sum_{j=1}^{4} x_{Aj} \leq 100$$
$$\sum_{j=1}^{4} x_{Bj} \leq 200$$
$$\sum_{j=1}^{4} x_{Cj} \leq 250$$
$$\sum_{i=A}^{C} x_{i1} \leq 80$$
$$\sum_{i=A}^{C} x_{i2} \leq 250$$
$$\sum_{i=A}^{C} x_{i3} \leq 100$$
$$\sum_{i=A}^{C} x_{i4} \leq 100$$
$$\sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \leq 600$$
$$x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \text{per ogni } i = A, B, C,\ j = 1, 2, 3, 4.$$
$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{per ogni } i = A, B, C,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

La parte (b) si può gestire con 12 variabili binarie $y_{ij} = 1$ see solo se la tratta $i \to j$ viene utilizzata. Si aggiungono i vincoli

$$\sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{4} y_{ij} \leq 8$$
$$x_{ij} \leq u_{ij}y_{ij} \qquad \text{per ogni } i = A, B, C,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

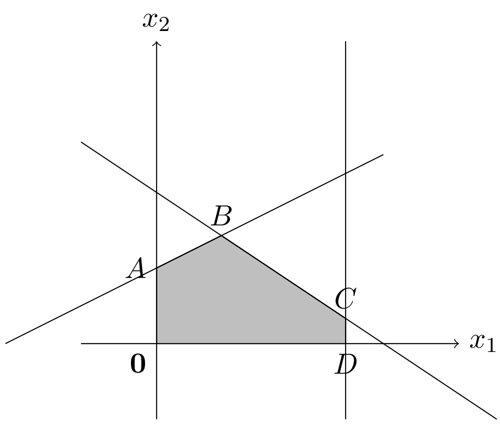
□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{aligned}
\max\ \ z = & x_1 + x_2 \\
\text{soggetto a } & 2x_1 + 3x_2 \quad \le 6 \\
& -x_1 + 2x_2 \quad \le 2 \\
& 2x_1 \qquad\quad\ \ \le 5 \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(x_1 = 0, x_2 = 0)$. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del programma è la seguente.



L'ottimo si trova nel punto $C(\frac{5}{2}, \frac{1}{3})$, con valore $\frac{17}{6}$. Il problema in forma standard è

$$
\begin{aligned}
\max\ \ z = & x_1 + x_2 \\
\text{soggetto a } & 2x_1 + 3x_2 \quad +x_3 \le 6 \\
& -x_1 + 2x_2 \quad +x_4 \le 2 \\
& 2x_1 \qquad\qquad +x_5 \le 5 \\
& x_1, \dots, x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Le basi corrispondono ai vertici $\mathbf{0}(x_3, x_4, x_5)$, $A(x_2, x_3, x_5)$, $B(x_1, x_2, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_4)$, $D(x_1 x_3, x_4)$. Il simplesso parte dal vertice A e raggiunge l'ottimo C passando per la base intermedia D (nota: in questo caso alla prima iterazione si può anche far entrare in base x_2 anziché x_1, nel qual caso il percorso diventa $\mathbf{0} \to A \to B \to C$.

Il programma duale è

$$\begin{aligned} \min\ w =& 6u_1 + 2u_2 + 5u_3 \\ \text{soggetto a } & 2u_1 - u_2 + 2u_3 && \geq 1 \\ & 3u_1 + 2u_2 && \geq 1 \\ & u_1 && \geq 0 \\ & u_2 && \geq 0 \\ & u_3 && \geq 0. \end{aligned}$$

Le condizioni di complemetarietà richiedono, all'ottimo primale e duale:

$$\begin{cases} x_1 > 0 \implies & 2u_1 - u_2 + 2u_3 = 1 \\ x_2 > 0 \implies & 3u_1 + 2u_2 = 1 \\ x_4 > 0 \implies & u_2 = 0 \end{cases} \implies u_1 = \frac{1}{3},\ u_2 = 0,\ u_3 = \frac{1}{6}.$$

□

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo una soluzione unica pari a

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{3} \\ x_3 = -1 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti) Dimostrare le seguenti:

(i) $x^* \in S_a$ e $u^* \in D_a$ sono soluzioni ottime per il primale e il duale rispettivamente se e solo se risulta $\left(\mathbf{u}^{*T}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T\right)\mathbf{x}^* = 0$ (3 punti)

(ii) Se $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un insieme di vettori risulta $\sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ se e solo se nessun $\mathbf{v}_j$ è combinazione lineare degli altri elementi di S. (2 punti)

Soluzione suggerita. Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 10/06/2016

Esercizio 1. (11 punti) Un'azienda dolciaria produce tre tipi di dolci A, B, C. Per prepararli servono uova, burro, farina e zucchero in varie proporzioni. Ogni unità di dolci di tipo A richiede una unità di uova, una di zucchero, una di farina e una di burro. Ogni unità di dolce di tipo B richiede due unità di uova. una di zucchero e 0.5 di farina. Ogni unità di dolce di tipo C richiede quattro unità di farina, due di burro, una di uova e 1.5 di zucchero.
Il magazzino nel mese corrente dispone di 6000, 3000, 4000 e 7000 unità di uova, burro, farina e zucchero rispettivamente.
Ogni unità di dolce A, B, C garantisce rispettivamente un margine di profitto di 10, 20 e 15 euro. La direzione vuole mantenere una produzione bilnciata, quindi ogni dolce deve rappresentare non meno del 20% e non più del 40% della produzione totale.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare la produzione del mese corrente al fine di massimizzare il profitto, tenendo conto del magazzino e dei vincolisul mix produttivo. (7 punti)

(b) Modificare il modello tenendo in conto il seguente vincolo addizionale: per almeno un ingrediente tra burro e farina occorre limitarne l'utilizzo al 50% della disponibilità a magazzino.

Soluzione suggerita. Definendo le variabili x_i = unità di dolci prodotte ($i = A, B, C$) il problema si può formulare come segue.

$$\max \; z = 10x_A + 20x_B + 15x_C$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_A + 2x_B + x_C \leq 6000 \\
& x_A + 2x_C \leq 3000 \\
& x_A + 0.5x_B + 4x_C \leq 4000 \\
& x_A + x_B + 1.5x_C \leq 7000 \\
& x_i \geq 0.2(x_A + x_B + x_C) \qquad i = A, B, C \\
& x_i \leq 0.4(x_A + x_B + x_C) \qquad i = A, B, C \\
& x_i \geq 0 \qquad \text{per ogni } i = A, B, C.
\end{aligned}$$

La parte (b) si può gestire con 2 variabili binarie y_j (j = burro (1), farina (2)) dove $y_j = 1$ se solo se l'ingrediente j viene limitato. Si aggiungono i vincoli

$$\begin{aligned}
& y_1 + y_2 \geq 1 \\
& x_A + 2x_C \leq 1500y_1 + 3000(1 - y_1) \\
& x_A + 0.5x_B + 4x_C \leq 2000y_2 + 4000(1 - y_2)
\end{aligned}$$

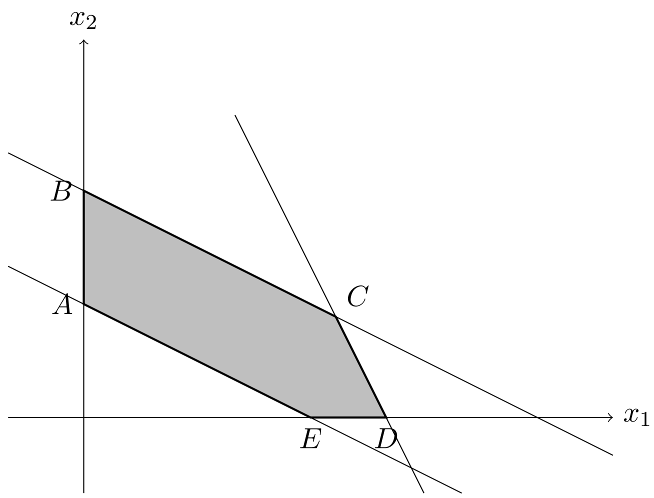
(questi possono anche sostituire i precedenti vincoli su burro e farina). □

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned}
\min\ z =& x_1 + 4x_2 \\
\text{subject to } & x_1 \quad +2x_2 \quad \leq 6 \\
& 2x_1 \quad +x_2 \quad \leq 8 \\
& x_1 \quad +2x_2 \quad \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile è riportata in figura. Le basi corrispondono ai punti A (base x_2, x_3, x_4), $B(x_2, x_4, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_5)$, $D(x_1, x_3, x_5)$, $E(x_1, x_3, x_4)$. Il vertice ottimo è $E(x_1 = 3, x_2 = 0)$.



La forma standard del problema è

$$\begin{aligned}
\max\ z =& -x_1 - 4x_2 \\
\text{subject to } & x_1 \quad +2x_2 \quad +x_3 \quad = 6 \\
& 2x_1 \quad +x_2 \quad +x_4 \quad = 8 \\
& x_1 \quad +2x_2 \quad -x_5 \quad = 3 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

In mancanza di una base ammissibile iniziale si imposta la fase 1 del simplesso, con il problema ausiliario

$$\begin{aligned}
\max\ z =& -s_1 \\
\text{subject to } & x_1 \quad +2x_2 \quad +x_3 \qquad = \quad 6 \\
& 2x_1 \quad +x_2 \quad +x_4 \qquad = \quad 8 \\
& x_1 \quad +2x_2 \quad -x_5 \quad +s_1 = 3 \\
& x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0.
\end{aligned}$$

Si noti che basta una variabile ausiliaria. La fase 1 termina con la base ammissibile (x_2, x_3, x_4) (vertice A) e una successiva iterazione di simplesso porta alla base ottima. Il programma duale è

$$\begin{aligned}
\min\ w =& 6u_1 + 8u_2 + 3u_3 \\
\text{soggetto a } & u_1 + 2u_2 + u_3 \quad \geq -1 \\
& 2u_1 + u_2 + 2u_3 \quad \geq -4 \\
& u_1 \qquad\qquad \geq 0 \\
& u_2 \qquad\qquad \geq 0 \\
& u_3 \qquad\qquad \leq 0.
\end{aligned}$$

Avendo in base ottima primale x_1, x_3, x_4 (non degenere) le condizioni di complementarietà richiedono per l'ottimo duale

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = -1 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases} \implies u_1 = u_2 = 0, u_3 = -1.$$

□

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss-Jordan riduce il sistema a

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad - \frac{7}{5}x_3 \quad + \frac{2}{5}x_4 &= -\frac{13}{5} \\
x_2 + \frac{3}{5}x_3 \quad - \frac{3}{5}x_4 &= \frac{17}{5} \\
0 &= -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

che non ammette soluzione. □

Esercizio 4. (5 punti) Si considerino una matrice $\mathbf{A}$, un vettore $\mathbf{b}$ di dimensioni opportune e un insieme convesso $S = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Dimostrare che un punto $\mathbf{x}$ è un vertice di S se e solo se le colonne in $\{\mathbf{A}_j \colon x_j > 0\}$ sono tra loro linearmente indipendenti.

Soluzione suggerita. Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. $\square$

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 08/07/2016

Esercizio 1. (11 punti) Una cloud farm è caratterizzata dal dover allocare un insieme V di macchine virtuali ad un insieme S di possibili server. Ogni macchina virtuale $v \in V$ è caratterizzata da una richiesta di memoria m_v e cpu time t_v. Ogni server $s \in S$ ha una capacità di memoria M_s e di calcolo C_s. I server differiscono per consumo elettrico: è stato stimato che una macchina virtuale $v \in V$ determini un consumo elettrico diverso a seconda del server $s \in S$ sul quale v viene allocato, e tale consumo è denotato con c_{vs}.

(a) Scrivere il programma lineare per allocare tutte le macchine virtuali ad un qualche server, rispettandone le capacità massime, facendo in modo da minimizzare il consumo complessivo di elettricità. (7 punti)

(b) Un server, anche scarico, consuma una quantità minima di energia R_s. Se l'allocazione lo lascia vuoto (=nessuna macchina virtuale allocata), lo si può spegnere risparmiando anche la quota R_s. Modificare il modello tenendo in conto della nuova specifica. (4 punti)

Soluzione suggerita. Si supponga di introdurre una variabile decisionale di tipo x_{vs} uguale a 1 se la macchina virtuale $v \in V$ è allocata al server $s \in S$. La funzione obiettivo sarebbe la seguente:

$$\min z = \sum_{v \in V} \sum_{s \in S} c_{vs} x_{vs}.$$

La prima famiglia di vincoli garantisce l'allocazione di tutte le macchine virtuali ad un unico server:

$$\sum_{s \in S} x_{vs} = 1, \qquad v \in V.$$

Le due famiglie di vincoli seguenti invece garantiscono di non eccedere le capacità dei server in termini di memoria e tempo di calcolo

$$\sum_{v \in V} m_v x_{vs} \leq M_s,\ s \in S \quad \text{e} \quad \sum_{v \in V} t_v x_{vs} \leq C_s,\ s \in S.$$

Per la seconda parte è utile introdurre una variabile binaria ausiliaria y_s che assume valore 0 se al server $s \in S$ non viene allocato nessuna macchina virtuale, 1 altrimenti. La funzione obiettivo diventa quindi

$$\min z = \sum_{v \in V} \sum_{s \in S} c_{vs} x_{vs} - \sum_{s \in S} R_s (1 - y_s)$$

ed i due vincoli di capacità si modificano nella sola parte destra aggiungendo la variabile ausiliaria y_s, ovvero

$$\sum_{v \in V} m_v x_{vs} \leq M_s y_s,\ s \in S \quad \text{e} \quad \sum_{v \in V} t_v x_{vs} \leq C_s y_s,\ s \in S.$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max z =& 3x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a } & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & 2x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare, calcolandone esplicitamente almeno 1, le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. In 2D la regione ammissibile è il poligono di vertici $\mathbf{0}(0,0)$, $A(3,0)$, $B(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$, $C(\frac{5}{2}, 1)$, $D(3,0)$. Il vertice B è ottimo, con $z(B) = \frac{51}{4}$. La forma standard del problema è

$$\begin{aligned} \max\ z =& 3x_1 + 4x_2 \\ \text{subject to } & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ & 2x_1 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Le basi ammissibili corrispondono ai vertici: $\mathbf{0}(x_3, x_4, x_5)$, $A(x_2, x_3, x_5)$, $B(x_1, x_2, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_3)$, $D(x_1, x_3, x_4)$.
Il simplesso, partendo dalla base (x_3, x_4, x_5), in due passi arriva alla base ottima (x_1, x_2, x_5).
Il programma duale è

$$\begin{aligned} \max\ w =& 6u_1 + 9u_2 + 5u_3 \\ \text{soggetto a } & 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 \geq 3 \\ & u_1 + 3u_2 \geq 4 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarietà richiedono, all'ottimo duale:

$$\begin{aligned} x_1 > 0 &\implies 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 3 \\ x_2 > 0 &\implies u_1 + 3u_2 = 4 \\ x_5 > 0 &\implies u_3 = 0 \end{aligned}$$

e quindi $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = 0.$ □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{92}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{92}{5} - \frac{2}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{28}{5} + \frac{3}{5}x_4 \\ x_3 = 15 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti) Dimostrare le seguenti:

(i) Se B è una base ammissibile, condizione sufficiente perché $\mathbf{x}(B)$ sia ottima è che risulti
$$r_j \leq 0 \qquad \text{per ogni variabile } x_j \text{ fuori base.}$$
(2 punti)

(ii) I vettori di un insieme $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri. (3 punti)

Soluzione suggerita. Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. In particolare, la (i) è la proprietà 4.2 mentre per la (ii) si cerchi in sezione 2.2.2. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 14/09/2016

Esercizio 1. (11 punti) Il programma ministeriale la `#bonasquola` prevede l'assegnazione di docenti a cattedre sparse sul territorio nazionale. Sia P l'insieme dei docenti e sia S l'insieme delle sedi in ciascuna delle quali sono state individuate esattamente r_s cattedre da assegnare, con $s \in S$. Supponiamo che valga $|P| = \sum_{s\in S} r_s$.
Ad ogni docente $p \in P$ è stato assegnato un punteggio di graduatoria pari a g_p, normalizzato in $[0, 1]$: un valore di g_p vicino a 1 significa essere alti in graduatoria. Sia inoltre data la matrice $D = [d_{ps}]$ delle distanze tra residenza del docente $p \in P$ e la sede $s \in S$. Sia quindi infine $k_{ps} = g_p\, d_{ps}$ una distanza pesata rispetto ai valori dei docenti in graduatoria.

(a) Scrivere il programma lineare per assegnare tutti i docenti alle cattedre rispettando il vincolo di cardinalità di ciascuna sede in modo da minimizzare la somma totale delle distanze pesate. (6 punti)
(b) Modificare il modello (a) in modo tale la distanza pesata del docente assegnato alla sede più lontana sia minimizzata. (2 punti)
(c) Si supponga infine di avere una matrice $C = [c_{pt}]$ a valore 1 quando i docenti $p \in P$ e $t \in P$ devono essere assegnati alla stessa sede. Modificare il modello (a) in modo da tenere in considerazione di questo ulteriore vincolo. (3 punti)

Soluzione suggerita. Si introduce una variabile binaria x_{ps} che assume valore 1 se il docente p viene assegnato alla sede s, 0 altrimenti.
L'assegnamento di tutti i docenti ad una cattedra è garantito dal seguente vincolo

$$\sum_{s\in S} x_{ps} = 1\,, \qquad p \in P$$

mentre

$$\sum_{p\in P} x_{ps} = r_s\,, \qquad s \in S$$

garantisce la copertura numerica delle cattedre in ciascuna sede.
La funzione obiettivo è la seguente:

$$\min \quad z = \sum_{s\in S}\sum_{p\in P} k_{ps}\, x_{ps}.$$

Il punto (b) si ottiene modificando il modello (a) come segue. Si introduce una variabile ausiliaria $H \in \mathbb{R}$, ed il seguente vincolo [1]

$$\sum_{s\in S} k_{ps}x_{ps} \le H\,, \qquad p \in P.$$

[1] Si osserva che la sommatoria avrà un unico addendo, ovvero quello per cui $x_{ps} = 1$. Si osserva inoltre che il vincolo poteva essere anche scritto come $k_{ps}x_{ps} \le H$ con $p \in P, s \in S$.

La nuova funzione obiettivo sarà

$$min \quad z = H.$$

Il punto (c) si ottiene modificando il modello (a) aggiungendo una serie di vincoli

$$x_{ps} = x_{ts}, \qquad p, t \in P \text{ con } c_{pt} = 1, s \in S.$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max z = & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } & 3x_1 + 2x_2 \quad \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \quad \leq 4 \\ & 2x_1 \qquad\qquad \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare, calcolandone esplicitamente almeno 1, le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. In 2D la regione ammissibile è il poligono di vertici $\mathbf{0}(0,0)$, $A(0,2)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$, $C(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$, $D(\frac{3}{2}, 0)$. Il vertice B è ottimo, con $z(B) = \frac{11}{4}$. La forma standard del problema è

$$\begin{aligned} \max z = & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } & 3x_1 + 2x_2 \quad +x_3 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \quad +x_4 = 4 \\ & 2x_1 \qquad\qquad +x_5 = 3 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Le basi corrispondenti ai vertici sono $\mathbf{0}(x_3, x_4, x_5)$, $A(x_2, x_4 x_5)$, $B(x_1, x_2, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_4)$, $D(x_1, x_3, x_4)$.
Il simplesso parte dalla base iniziale $\{x_3, x_4, x_5\}$ e arriva all'ottimo in due o tre iterazioni (ci sono due esecuzioni possibili).
Il duale del problema è

$$\begin{aligned} \min \ w = & 6u_1 + 4u_2 + 3u_3 \\ \text{soggetto a } & 3u_1 - u_2 + 2u_3 \quad \geq 1 \\ & 2u_1 + 2u_2 \qquad\quad \geq 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarietà primale-duale, visto l'ottimo primale, richiedono per l'ottimalità duale:

$$\begin{aligned} 3u_1 - u_2 + 2u_3 &= 1 \\ 2u_1 + 2u_2 \qquad &= 1 \\ u_3 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi la soluzione ottima duale è $u_1 = \frac{3}{8}$, $u_2 = \frac{1}{8}$, $u_3 = 0$. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} + x_4 \\ x_2 = \frac{2}{5} - 4x_4 \\ x_3 = 0 - 3x_4 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Dimostrare che condizione sufficiente affinché la funzione obiettivo sia illimitata superiormente è che nella riformulazione rispetto a una base B risulti

$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_k \leq \mathbf{0}, \quad r_k > 0 \qquad \text{per almeno una variabile } x_k \text{ fuori base.}$$

(3 punti)

(ii) Dare una definizione di costo ridotto ed una sua interpretazione geometrica all'interno dell'algoritmo del simplesso (2 punti)

Soluzione suggerita. Le risposte sono reperibili sugli appunti. In particolare, la (i) è la proprietà 4.3 mentre per la (ii) si cerchi a pagina 79 e sezione 4.2.6. □

Anno Accademico 2016-17

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 01/02/2017

Esercizio 1. (11 punti) La caffetteria/ristorante "Dal Vecio" deve approvvigionarsi di verdura per le prossime settimane. Le verdure servite dal Vecio sono cavoli, melanzane, fagioli e pomodori. I fornitori del Vecio (sono un po' particolari) non vendono le varie verdure singolarmente ma in "pacchi" preconfezionati, di quattro tipi, come da tabella

Tipo	Contenuto (Kg)				Costo
	Cavoli	Melanzane	Fagioli	Pomodori	
1	5	7	5	2	12
2	9	0	5	4	15
3	2	4	7	3	20
4	8	2	0	2	11

Lo chef ritiene di aver bisogno per il prossimo periodo di almeno 100 Kg e non più di 140 Kg complessivi di verdura. Inoltre, sulla base delle richieste passate dei clienti, ritiene che le verdure acquistate debbano essere così ripartite.

- Almeno il 25% in peso di cavoli.
- Almeno il 20% e non più del 30% di melanzane.
- Non più del 35% di fagioli.
- Almeno il 15% e non più del 30% di pomodori.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare l'acquisto delle confezioni di verdura a costo minimo, rispettando i vincoli sul mix posti dallo chef. (7 punti)

(b) Modificare il modello per tenere in considerazione la seguente condizione: il Vecio vuole acquistare non più di tre tipi di confezioni. (4 punti)

Soluzione suggerita. Come primo passo, si osserva che i pacchi di verdura portano 19, 18, 16 e 12 chili di verdura. La decisione da rappresentare all'interno del modello è quella di quanti pacchi di verdura acquistare, a seconda del tipo. Introduciamo la seguente variabile decisionale, ovvero

$x_i \equiv$ numero di pacchi di tipo i acquistati, con $i = 1, \dots, 4$, ed a valori in $\mathbb{Z}_+$.

La funzione obiettivo vuole minimizzare il costo di acquisto dei pacchi:

$$\min z \quad \equiv \quad 12x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 11x_4 \,.$$

Introduciamo una variabile decisionale di supporto P che misura il peso della verdura acquistata, ovvero

$$P = 19x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 12x_4 \,.$$

Allora, i vincoli sul minimo e massimo peso di verdura da acquistare si scrivono come

$$P \leq 140 \qquad \text{e} \qquad P \geq 100\,.$$

I vincoli di mix invece si scrivono come:

$$\text{cavoli:} \qquad 5x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 8x_4 \geq 0.25P\,,$$

$$\text{melanzane:} \qquad 0.2P \leq 7x_1 + 4x_3 + 2x_4 \leq 0.3P\,,$$

$$\text{fagioli:} \qquad 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 0.35P\,,$$

$$\text{pomodori:} \qquad 0.15P \leq 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 0.3P\,.$$

Per la seconda parte si introduce invece una ulteriore variabile decisionale

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se acquisto pacchi di tipo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \text{con } i = 1, \ldots, 4.$$

I vincoli che modellano la condizione del Vecio sono

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 3$$

per modellare il tipo di pacchi da acquistare, e

$$x_i \leq My_i\,, \qquad i = 1, \ldots, 4\,.$$

per limitare a zero il numero dei pacchi del tipo non scelto.

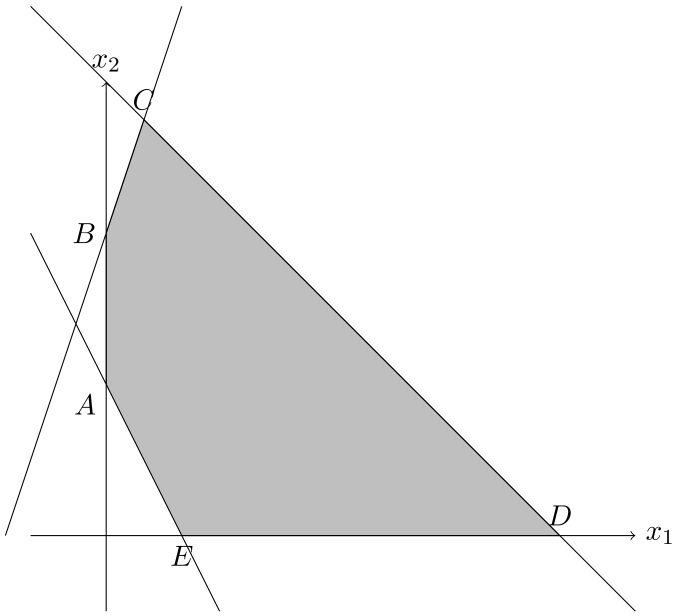
□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max \ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -3x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare, calcolandone esplicitamente almeno 1, le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(0, 2)$. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del problema è riportata in figura.



$A(0,2)$
$B(0,4)$
$C(\frac{1}{2},\frac{11}{2})$
$D(6,0)$
$E(1,0)$

La foprma standard del programma è

$$
\begin{aligned}
\max\ z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & -3x_1 + x_2 \quad +x_3 = 4 \\
& x_1 + x_2 \qquad +x_4 = 6 \\
& 2x_1 + x_2 \qquad -x_5 = 2 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

L'ottimo si trova nel punto C, con obiettivo $z = \frac{23}{2}$. I vertici della figura corrispondono alle basi $A(x_2, x_3, x_4)$, $B(x_2, x_4, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_5)$, $D(x_1, x_3, x_5)$, $E(x_1, x_3, x_4)$.
L'algoritmo del simplesso, partendo dalla base del vertice A, visita le basi A, B, C.
Il duale è

$$
\begin{aligned}
\min\ w = & 4u_1 + 6u_2 + 2u_3 \\
\text{soggetto a}\quad & -3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1 \\
& u_1 + u_2 + u_3 \geq 2 \\
& u_1 \geq 0 \\
& u_2 \geq 0 \\
& -u_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Dalle condizioni di complementarietà primale-duale, l'ottimo duale deve soddisfare le condizioni

$$\begin{aligned} x_1 > 0 &\implies -3u_1 + u_2 + 2u_3 = 1 \\ x_2 > 0 &\implies u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ x_5 > 0 &\implies -u_3 = 0 \end{aligned}$$

e quindi $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{7}{4}$, $u_3 = 0$, con $w^* = \dfrac{23}{2}$. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 = 1 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 \qquad + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - x_4 = 3 \\ \qquad x_2 \qquad\qquad = 5 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = -7 \end{cases}$$

che si risolve per ispezione, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_4 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -7 - 2x_4 \end{cases} \qquad (x_4 \in \mathbb{R}), \text{ libera.}$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vettori <u>non</u> linearmente indipendenti, e $\mathbf{w}$ un vettore tale che $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i$ per opportuni coefficienti $x_1, \ldots, x_k$. Dimostrare che, se $\mathbf{v}_k$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$, esistono anche $y_1, \ldots, y_{k-1} \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k-1} y_i \mathbf{v}_i$. (2 punti)

(ii) Enunciare e dimostrare la proprietà della dualità debole. (3 punti)

Soluzione suggerita. Per il punto (i) si veda l'osservazione 2.3 come suggerimento. Per il punto (ii) si veda la proprietà 3.12 degli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 16/02/2017

Esercizio 1. (11 punti) La caffetteria/ristorante "Dal Vecio" ha attivato un servizio di cene a domicilio ed offre tre tipi di menù: (1) "*Aliento de Fuego*", (2) "*Mañana digesto*" e (3) "*Soy un pensionado*". Il primo menù permette un guadagno – dato dalla differenza tra prezzo e costo – pari a 6€, il secondo pari a 8€, il terzo pari a 7€.
A tale guadagno va anche detratto il costo di trasporto. La cena infatti si ordina entro le 10 e la sua consegna avviene dalle 18 alle 20 utilizzando i 3 mezzi a disposizione, ovvero (A) una bicicletta, (B) uno scooter e (C) un'auto. In media, nelle due ore previste, la bicicletta consegna 5 cene, lo scooter 12, l'auto 23. Il costo di trasporto di una cena è pari a 1€ se fatto in bicicletta, 3€ in scooter e 4€ in auto.
Per oggi sono arrivate 40 prenotazioni: 10 di "*Aliento de Fuego*", 17 di "*Mañana digesto*" e 13 di "*Soy un pensionado*".

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare il trasporto delle cene in modo da massimizzare il guadagno rispettando i vincoli di capacità. (7 punti)
(b) Modificare il modello per tenere in considerazione la condizione aggiuntiva: "*Aliento de Fuego*" deve essere consegnato ai clienti utilizzando un unico mezzo di trasporto. (4 punti)

Soluzione suggerita. La decisione da rappresentare è quella relativa al trasporto delle cene con uno dei tre mezzi di trasporto. Introduciamo quindi la variabile decisionale

$$x_{ij} \equiv \text{numero di cene di tipo } i \text{ trasportate col mezzo } j$$

con $x_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ e $i = 1, \ldots, 3$ e $j = 1, \ldots, 3$.
I vincoli che modellano il trasporto sono quindi i seguenti:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = \begin{cases} 10 & \text{per } i = 1 \\ 17 & \text{per } i = 2 \\ 13 & \text{per } i = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = \begin{cases} 5 & \text{per } j = 1 \\ 12 & \text{per } j = 2 \\ 23 & \text{per } j = 3 \end{cases}.$$

La funzione obiettivo è invece la seguente:

$$\begin{aligned} \max z \quad \equiv \quad & (6-1)x_{11} + (6-3)x_{12} + (6-4)x_{13} + \\ & (8-1)x_{21} + (8-3)x_{22} + (8-4)x_{23} + . \\ & (7-1)x_{31} + (7-3)x_{32} + (7-4)x_{33} \end{aligned}$$

Per modificare il modello si introducono le variabili decisionali

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se consegno "\textit{Aliento de Fuego}" con mezzo } j = 1,2,3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il vincolo

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

modella la decisione del veicolo, mentre i vincoli

$$x_{1j} \leq 10y_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

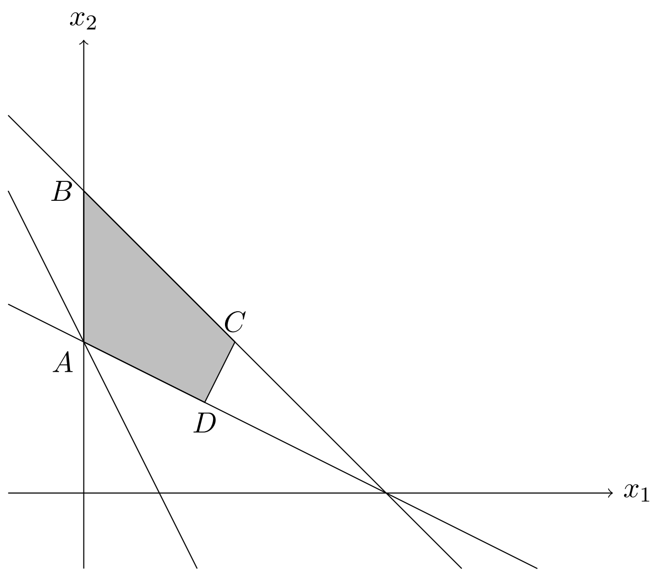
mettono in relazione le quantità trasportate con la decisione sul veicolo. Si osserva che in realtà la bicicletta, per questioni di capacità massima, non può trasportare tutti le ordinazioni di "*Aliento de Fuego*". Quindi nella definizione della variabile y_j e nei vincoli susseguenti si può omettere il caso $j = 1$ e considerare solo $j = 2, 3$. □

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max\ z = & 4x_1 - x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare, calcolandone esplicitamente almeno 1, le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(0, 2)$. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammissibile del problema è riportata in figura. L'ottimo si trova nel punto C, con valore $z(C) = 6$.



$A(0, 2)$
$B(0, 4)$
$C(2, 2)$
$D(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$

La forma standard del programma è

$$\begin{aligned}
\max\ z = & 4x_1 - x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & x_1 + 2x_2 \quad -x_3 = 4 \\
& 2x_1 - x_2 \quad +x_4 = 2 \\
& x_1 + x_2 \quad +x_5 = 4 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

I vertici della figura corrispondono alle basi $A(x_2, x_4, x_5)$, $B(x_2, x_3, x_4)$, $C(x_1, x_2, x_3)$, $D(x_1, x_2, x_5)$.
L'algoritmo del simplesso, partendo dalla base del vertice A, visita in sequenza le basi A, D, C.
Il duale è

$$\begin{aligned}
\min\ w = & 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 \\
\text{soggetto a}\ & u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 4 \\
& 2u_1 - u_2 + u_3 \geq -1 \\
& -u_1 \geq 0 \\
& u_2 \geq 0 \\
& u_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dalle condizioni di complementarietà primale-duale, l'ottimo duale deve soddisfare le condizioni

$$\begin{aligned}
x_1 > 0 &\implies u_1 + 2u_2 + u_3 = 4 \\
x_2 > 0 &\implies 2u_1 - u_2 + u_3 = -1 \\
x_3 > 0 &\implies -u_1 = 0
\end{aligned}$$

e quindi $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{5}{3}$, $u_3 = \frac{2}{3}$, con $w^* = 6$. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. L'algoritmo di Gauss-Jordan riduce il sistema a

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad - \frac{7}{5}x_3 \quad + \frac{2}{5}x_4 &= -\frac{13}{5} \\
x_2 + \frac{3}{5}x_3 \quad - \frac{3}{5}x_4 &= \frac{17}{5} \\
0 &= -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

che non ammette soluzione. □

Esercizio 4. (5 punti) Dimostrare le seguenti:

(i) Se B è una base ammissibile, condizione sufficiente perché $\mathbf{x}(B)$ sia ottima è che risulti

$$r_j \leq 0 \qquad \text{per ogni variabile } x_j \text{ fuori base.}$$

(3 punti)

(ii) I vettori di un insieme $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri. (2 punti)

Soluzione suggerita. Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. In particolare, la (i) è la proprietà 4.2 mentre per la (ii) si cerchi in sezione 2.2.2. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA –
APPELLO DEL 06/06/2017

Esercizio 1. (11 punti) La caffetteria/ristorante "Dal Vecio" ha deciso di organizzare una cena a menù fisso in modo alternativo, associando a ciascuno degli n tavoli un diverso menù. Il numero totale di posti per ogni tavolo j è pari a M_j (con $j = 1, \ldots, n$). Al momento della prenotazione, ciascun avventore i (con $i = 1, \ldots, m$) esprime una preferenza p_{ij} per ciascun tavolo/menù j (con $j = 1, \ldots, n$) dando un voto da 1 a 10.

(a) Scrivere il programma lineare per selezionare e assegnare ai tavoli gli $M \geq \sum_j M_j$ avventori in modo da massimizzare la somma delle preferenze degli avventori selezionati. (7 punti)

(b) Modificare il modello in modo da distribuire equamente le preferenze tra ciascun tavolo/menù (*hint*: massimizzare [minimizzare] il tavolo con la somma delle preferenze più basse [alte]). (4 punti)

Soluzione suggerita. La decisione da rappresentare è quella di selezionare un avventore assegnandolo ad un tavolo. A tale scopo introduciamo la seguente variabile decisionale binaria, ovvero

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se avventore } i \text{ è assegnato al tavolo } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il vincolo

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m$$

garantisce che ogni avventore, se scelto, venga assegnato ad un solo tavolo mentre il vincolo

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq M_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

garantisce la selezione di al più M avventori. La funzione obiettivo è quindi

$$\max z \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}.$$

Per la modifica al modello, consideriamo l'ipotesi di massimizzare le preferenze del tavolo che ha somma totale minima. Introduciamo quindi una variabile *dummy* $y \in \Re$ e modifichiamo la funzione obiettivo del precedente modello in

$$\max z \equiv y.$$

Dobbiamo inoltre aggiungere dei vincoli affinché y assuma il valore minimo tra le somme delle preferenze di ciascun tavolo, ovvero

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_{ij} \geq y, \quad j = 1, \dots, n$$

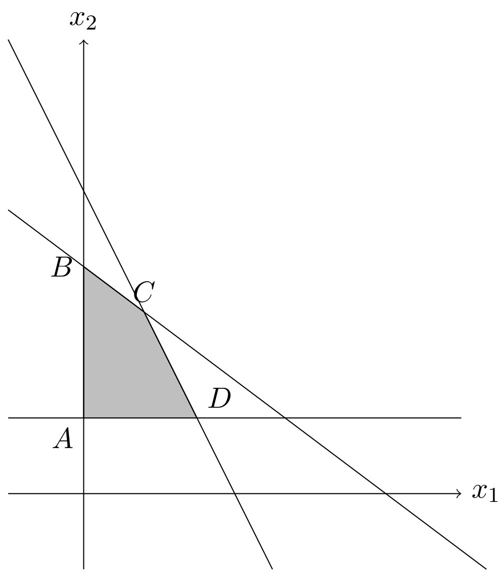
$\square$

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max \ z = & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare, calcolandone esplicitamente almeno 1, le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(0, 1)$. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammmissibile del programma è rappresentata in figura, con vertici $A(0, 1)$, $B(0, 3)$, $C(\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$, $D(\frac{3}{2}, 1)$. La soluzione ottima si trova nel vertice C, con valore ottimo $z^* = \frac{16}{5}$. Le basi ammissibili associate ai vertici sono $A(x_2, x_3, x_4)$, $B(x_2, x_3, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_5)$, $D(x_1, x_2, x_3)$.



La forma standard del programma è

$$\begin{aligned}
\max\ \ z =& x_1 + x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & 3x_1 + 4x_2 \quad +x_3 = 12 \\
& 2x_1 + x_2 \quad +x_4 = 4 \\
& \quad\ x_2 \quad -x_5 = 1 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Rispetto al vertice di partenza indicato (A), il programma si riformula come

$$\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & 1 & +x_1 & +x_5 \\
& x_2 = & 1 & & +x_5 \\
& x_3 = & 8 & -3x_1 & -4x_5 \\
& x_4 = & 3 & -2x_1 & -x_5 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & &
\end{array}$$

Il simplesso genera le riformulazioni corrispondenti ai vertici $A \to D \to C$ (anche $A \to B \to C$ è possibile). Il programma duale è dato da

$$\begin{aligned}
\min\ \ z =& 12u_1 + 4u_2 + u_3 \\
\text{soggetto a}\ & 3u_1 + 2u_2 \qquad \geq 1 \\
& 4u_1 + u_2 + u_3 \quad \geq 1 \\
& u_1 \qquad\qquad \geq 0 \\
& u_2 \qquad\qquad \geq 0 \\
& -u_3 \qquad\quad\ \geq 0.
\end{aligned}$$

Avendo in base ottima (x_1, x_2, x_5), le condizioni di complementarietà primale-duale impopngono all'ottimo

$$\begin{cases}
3u_1 + 2u_2 & = 1 \\
4u_1 + u_2 + u_3 & = 1 \\
-u_3 & = 0
\end{cases}$$

da cui segue l'ottimo duale $u_1^* = \frac{1}{5}, u_2^* = \frac{1}{5}, u_3^* = 0$. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases}
2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\
3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1
\end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} + x_4 \\ x_2 = \frac{2}{5} - 4x_4 \\ x_3 = 0 - 3x_4 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Enunciare e dimostrare le condizioni di complementarietà primale-duale (3 punti)

(ii) I vettori di un insieme $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se ogni loro combinazione lineare $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i$ si esprime con un unico set di coefficienti $\{x_i\}$. (2 punti)

Soluzione suggerita. Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 04/07/2017

Esercizio 1. (11 punti) La caffetteria/ristorante “Dal Vecio”$^{(TM)}$ si espande e apre locali a marchio “Dal Vecio” in tutte le sette province del Piemonte. Il Vecio può aprire fino a 12 locali in 20 possibili locazioni candidate $1, 2, \ldots, 20$, distribuite come segue: $1, 2, 3, 4 \to$TO, $5, 6 \to$VC, $7, 8 \to$AL, $9, 10, 11 \to$NO, $12, 13, 14 \to$AT, $15, 16, 17, 18 \to$CN, $19, 20 \to$VB. Ogni locale può essere dimensionato come piccolo medio o grande con diversa capacità di coperti/giorno e diversa spesa, come da tabella seguente.

Dimen.	**Spesa**	**Capacità**
Piccolo	300000	200
Medio	400000	500
Grande	500000	700

Il Vecio vuole soddisfare i seguenti requisiti:

- aprire almeno un locale (di qualunque dimensione) in ogni provincia;
- aprire almeno tre locali in provincia di Torino, e non meno di due in provincia di Cuneo.
- capacità complessiva (su tutta la regione) di almeno 5000 coperti/giorno;
- per le province di Alessandria e Asti, capacità complessiva non superiore ai 1000 pasti/giorno.

(a) Scrivere il programma lineare che permette al vecio di pianificare dove aprire i locali a costo totale minimo. (7 punti)

(b) Introdurre nel modello il seguente requisito addizionale: se si aprono almeno due locali in provincia di Asti, allora se ne apre uno solo a Verbania. (4 punti).

Soluzione suggerita. Utilizzando variabili binarie $x_{ij} = 1$ iff si apre un locale nel posto i con dimensione j ($i = 1, \ldots, 20$, $j = P, M, G$) si può formulare il seguente modello.

$$\min\ z = 300000 \sum_{i=1}^{20} x_{iP} + 400000 \sum_{i=1}^{20} x_{iM} + 500000 \sum_{i=1}^{20} x_{iG}$$

soggetto a

$$\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \leq 12$$

$$\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, 20$$

$$\text{(TO)} \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \geq 3$$

$$\text{(VC)} \quad \sum_{i=5}^{6}\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \geq 1$$

$$\text{(AL)} \quad \sum_{i=7}^{8}\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \geq 1$$

$$\text{(NO)} \quad \sum_{i=9}^{11}\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \geq 1$$

$$\text{(AT)} \quad \sum_{i=12}^{14}\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \geq 1$$

$$\text{(CN)} \quad \sum_{i=15}^{18}\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \geq 3$$

$$\text{(VB)} \quad \sum_{i=19}^{20}\sum_{j=P}^{G} x_{ij} \geq 1$$

$$200\sum_{i=1}^{20} x_{iP} + 500\sum_{i=1}^{20} x_{iM} + 700\sum_{i=1}^{20} x_{iG} \geq 50000$$

$$200\sum_{i=7,8,12,13,14} x_{iP} + 500\sum_{i=7,8,12,13,14} x_{iM} + 700\sum_{i=7,8,12,13,14} x_{iG} \leq 10000$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Nota: nella descrizione dei parametri ci sono due errori di battitura, ovvero i 50000 coperti/giorno sono in realtà 5000 come i 10000 sono invece 1000. Per evitare confusione in fase di autovalutazione abbiamo lasciato il testo invariato. Le soluzioni con 50000 o 5000 e 10000 o 1000 sono comunque corrette ai fini dell'esame. Si osserva che nella pratica reale, nel primo caso, il modello non ammetterebbe nessuna soluzione ammissibile.

Per la parte (b), si può usare una variabile logica y che va posta a 1 se si aprono almeno due locali in provincia di Cuneo.

$$2y \geq \sum_{i=12}^{14} \sum_{j=P}^{G} x_{ij} - 1$$

$$\text{(VB)} \quad \sum_{i=19}^{20} \sum_{j=P}^{G} x_{ij} \leq 2 - y$$

□

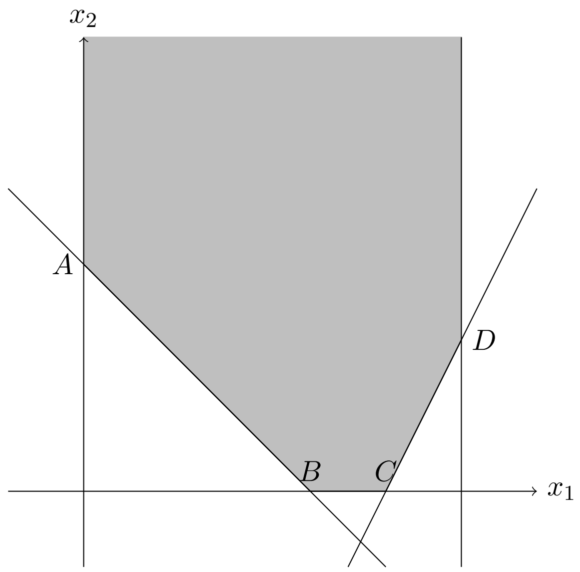
Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \min\ z = &3x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare, calcolandone esplicitamente almeno 1, le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(4, 0)$. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammmissibile del programma è rappresentata in figura, con vertici $A(0, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 0)$, $D(5, 2)$. La soluzione ottima si trova nel vertice A, con valore ottimo $z^* = 6$. Le basi ammissibili associate ai vertici sono $A(x_2, x_4, x_5)$,

$B(x_1, x_4, x_5)$, $C(x_1, x_3, x_5)$, $D(x_1, x_2, x_3)$.



La forma standard del programma è

$$
\begin{aligned}
\max\ z = & -3x_1 - 2x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & x_1 + x_2 \quad -x_3 = 3 \\
& 2x_1 - x_2 \quad +x_4 = 8 \\
& x_1 \quad +x_5 = 5 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Rispetto al vertice di partenza indicato (C), il programma si riformula come

$$
\begin{array}{lrrrr}
\max & z = & -12 & -\frac{7}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_4 \\
& x_1 = & 4 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_4 \\
& x_3 = & 1 & +\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_4 \\
& x_5 = & 4 & -\frac{3}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_4 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Il simplesso genera le riformulazioni corrispondenti ai vertici $C \to B \to A$. Il programma duale è dato da

$$
\begin{aligned}
\min\ z = & 3u_1 + 8u_2 + 5u_3 \\
\text{soggetto a}\ & u_1 + 2u_2 + u_3 \geq -3 \\
& u_1 - u_2 \geq -2 \\
& u_1 \leq 0 \\
& u_2 \geq 0 \\
& u_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Avendo in base ottima (x_2, x_4, x_5), le condizioni di complementarietà primale-duale impopngono all'ottimo

$$\begin{cases} u_1 - u_2 & = -2 \\ u_2 & = 0 \\ u_3 & = 0 \end{cases}$$

da cui segue l'ottimo duale $u_1^* = -2, u_2^* = 0, u_3^* = 0$. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo una soluzione unica pari a

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{3} \\ x_3 = -1 \end{cases} .$$

□

Esercizio 4. (5 punti) Dimostrare le seguenti:

(i) Enunciare e dimostrare la proprietà della dualità debole. (3 punti)

(ii) I vettori di un insieme $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri. (2 punti)

Soluzione suggerita. Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. In particolare, per il punto (i) si veda la proprietà 3.12 mentre per per la (ii) si cerchi in sezione 2.2.2. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 15/09/2017

Esercizio 1. (11 punti) La caffetteria/ristorante "Dal Vecio"$^{(TM)}$ deve produrre almeno 30 Kg del fortissimo condimento piccante del Vecio. Per produrlo, il Vecio mischia tipicamente diverse varietà di peperoncini: (1) habanero, (2) naga morich, (3) Cayenna, (4) malese. La ricetta del Vecio prevede un mix con le seguenti caratteristiche (percentuali in peso):

- almeno il 25% di Cayenna;
- almeno il 25% di habanero;
- non più del 40% di naga morich;
- non più del 50% di malese;
- Cayenna e naga morich insieme non possono superare il 50%.

Essendo passata la stagione dei peperoncini, anziché usare quelli autoprodotti il Vecio sfrutta un mix di condimenti piccanti confezionati che reperisce sul mercato. Sono reperibili quattro tipi di confezioni A, B, C, D con le seguenti caratteristiche.

Tipo	**Peso tot.**	**Costo**	**%Habanero**	**%Naga morich**	**%Cayenna**	**%Malese**
A	2	20	30	30	20	20
B	3	15	25	30	40	–
C	2.5	18	–	40	40	20
D	3	25	25	25	25	25

Il Vecio vuole acquistare e usare interamente numeri interi di confezioni, e per farlo è anche disposto a produrre più di 30 Kg di salsa, ma comunque non più di 40.

(a) Scrivere il programma lineare che permette al Vecio di produrre la salsa a costo minimo, nelle quantità specificate. (7 punti)

(b) Modificare il programma lineare in modo che il Vecio utilizzi solo tre tipi di confezioni sulle quattro disponibili. (4 punti)

Soluzione suggerita. Utilizzando le variabili x_i = numero di confezioni di tipo i utilizzate ($i = A, B, C, D$) il modello si può scrivere come segue.

$$\min \ 20x_A + 15x_B + 18x_C + 25x_D$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&0.2x_A + 0.4x_B + 0.4x_c + 0.25x_D \geq 0.25(x_A + x_B + x_C + x_D)\\
&0.3x_A + 0.25x_B + 0.25x_D \geq 0.25(x_A + x_B + x_C + x_D)\\
&0.3x_A + 0.3x_B + 0.4x_C + 0.25x_D \leq 0.4(x_A + x_B + x_C + x_D)\\
&0.2x_A + 0.2x_C + 0.25x_d \leq 0.5(x_A + x_B + x_C + x_D)\\
&0.5x_A + 0.7x_B + 0.8x_C + 0.5x_D \leq 0.5(x_A + x_B + x_C + x_D)\\
&x_A + x_B + x_C + x_D \geq 30\\
&x_A + x_B + x_C + x_D \leq 40\\
&x_A, x_B, x_C, x_D \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

Per la parte (b), è sufficiente utilizzare variabili logiche $y_i = 1$ se si utilizza la confezione i, 0 altrimenti e aggiungere i vincoli

$$
\begin{aligned}
&y_A + y_B + y_C + y_D \leq 3\\
&x_A \leq My_A\\
&x_B \leq My_B\\
&x_C \leq My_C\\
&x_D \leq My_D.
\end{aligned}
$$

□

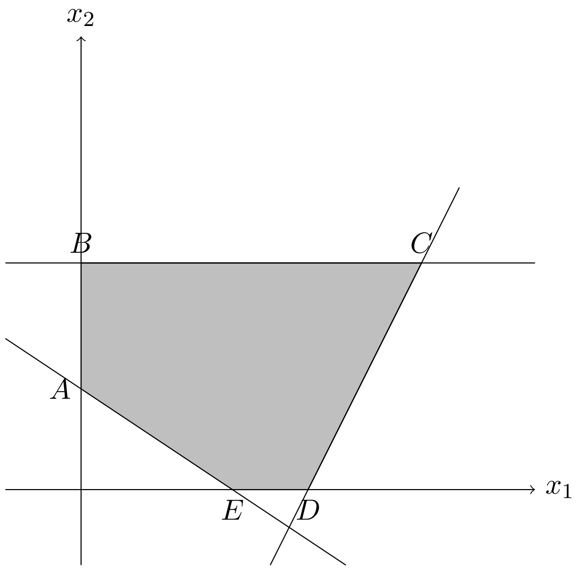
Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{aligned}
\max\ z = {} & x_1 + 2x_2\\
\text{soggetto a}\quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 4\\
& 2x_1 - x_2 \leq 6\\
& x_2 \leq 3\\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare, calcolandone esplicitamente almeno 1, le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(0, \frac{4}{3})$. (3 punti)
(v) Scrivere il programma duale e ricavarne la soluzione ottima. (3 punti)

Soluzione suggerita. La regione ammmissibile del programma è rappresentata in figura, con vertici $A(0, \frac{4}{3})$, $B(0, 3)$, $C(\frac{9}{2}, 3)$, $D(3, 0)$, $E(2, 0)$. La soluzione ottima si trova nel vertice C, con valore ottimo $z^* = \frac{21}{2}$. Le basi ammissibili associate ai vertici sono

$A(x_2, x_4, x_5)$, $B(x_2, x_3, x_4)$, $C(x_1, x_2, x_3)$, $D(x_1, x_3, x_5)$, $E(x_1, x_4, x_5)$.



La forma standard del programma è

$$
\begin{array}{rll}
\max & z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a} & & 2x_1 + 3x_2 \quad -x_3 = 4 \\
& & 2x_1 - x_2 \quad +x_4 = 6 \\
& & \quad x_2 \quad +x_5 = 3 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

Rispetto al vertice di partenza indicato (A), il programma si riformula come

$$
\begin{array}{lrrrr}
\max & z = & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_3 \\
& x_2 = & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_3 \\
& x_4 = & \frac{11}{3} & -\frac{8}{2}x_2 & +\frac{1}{3}x_3 \\
& x_5 = & \frac{5}{3} & +\frac{2}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_3 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Il simplesso genera la sequenza di soluzioni $A \to B \to C$.
Il programma duale è

$$
\begin{array}{rll}
\min & z = & 4u_1 + 6u_2 + 3u_3 \\
\text{soggetto a} & 2u_1 + 2u_2 & \geq 1 \\
& 3u_1 - u_2 + u_3 & \geq 2 \\
& u_1 & \leq 0 \\
& u_2 & \geq 0 \\
& u_3 & \geq 0.
\end{array}
$$

Avendo in base ottima (x_1, x_2, x_3), le condizioni di complementarietà primale-duale impopngono all'ottimo

$$\begin{cases} 2u_1 + 2u_2 & = 1 \\ 3u_1 - u_2 + u_3 & = 2 \\ u_1 & = 0 \end{cases}$$

da cui segue l'ottimo duale $u_1^* = 0, u_2^* = \frac{1}{2}, u_3^* = \frac{5}{2}$. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} + x_4 \\ x_2 = \frac{2}{5} - 4x_4 \\ x_3 = 0 - 3x_4 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Dimostrare che condizione sufficiente affinché la funzione obiettivo sia illimitata superiormente è che nella riformulazione rispetto a una base B risulti

$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_k \leq \mathbf{0}, \quad r_k > 0 \qquad \text{per almeno una variabile } x_k \text{ fuori base.}$$

(3 punti)

(ii) Dare una definizione di costo ridotto ed una sua interpretazione geometrica all'interno dell'algoritmo del simplesso (2 punti)

Soluzione suggerita. Le risposte sono reperibili sugli appunti. In particolare, la (i) è la proprietà 4.3 mentre per la (ii) si cerchi a pagina 79 e sezione 4.2.6. □

Anno Accademico 2018-19

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 05/02/2018

Esercizio 1. (12 punti) Un'azienda alimentare si deve rifornire di farine di quatro tipi diversi, $1, 2, 3, 4$, da tre fornitori A, B, C che praticano i seguenti prezzi in euro/ tonnellata.

$$c_{ij} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 & 400 & 500 \\ 450 & 250 & 300 & 600 \\ 420 & 300 & 350 & 400 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dei quattro tipi di farina sono necessari quantitativi minimi pari rispettivamente a 50, 70, 90 e 30 tonnellate. I fornitori A, B, C dispongono delle quattro farine i quantità praticamente illimitata ma per limitazioni dei mezzi di trasporto non possono consegnare più di 100, 150 e 200 tonnellate complessive di farina.
Per mantenere una diversificazione dei fornitori, la direzione ha imposto che da ogni fornitore si debba acquistare almeno il 20% della fornitura totale.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare gli acquisti di farina dai vari fornitori a costo totale minimo. (8 punti)

(b) Modificare il programma per tenere in conto il seguente requisito: i fornitori B e C offrono entrambi uno sconto di 2000 euro se ricevono un ordine complessivo di almeno 50 tonnellate — il programma deve decidere se utilizzare lo sconto o no. (4 punti)

Soluzione suggerita. Utilizzando le variabili x_{ij} = tonnellate di farina tipo j acquistate dal fornitore i il modello si può scrivere come segue, con $(a_j) = (50, 70, 90, 30)$, $(b_i) = (100, 150, 200)$.

$$\min \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\sum_{i=A}^{C} x_{ij} \geq a_j \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq b_i \qquad i = A, B, C$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \geq 0.2 \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \qquad i = A, B, C$$

$$x_{ij} \geq 0 \; i = A, B, C, \; j = 1, 2, 3, 4.$$

Per la parte (b), si possono usare due variabili logiche y_B, y_C, poste a 1 se si intende usufruire dello sconto. L'obiettivo va modificato in

$$\min \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} - 2000 y_B - 2000 y_C$$

e servono i vincoli

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \geq 50 y_i \qquad i = B, C.$$

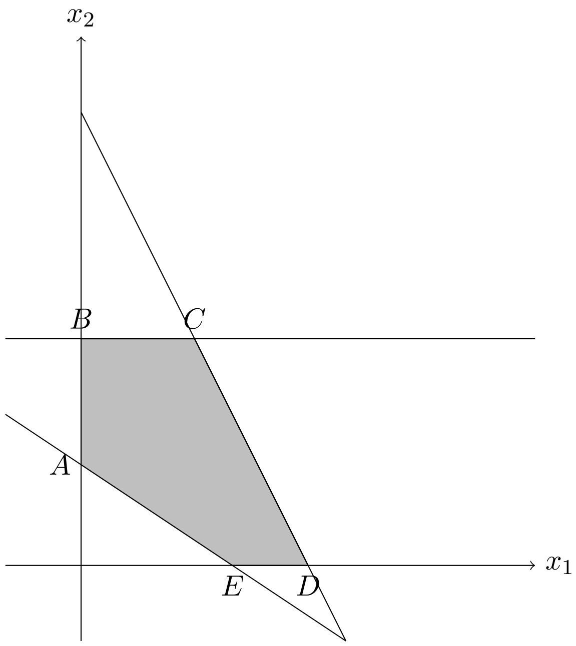
$\square$

Esercizio 2. (11 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned}
\max\ z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare, calcolandone esplicitamente almeno 1, le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(0, \frac{4}{3})$. (3 punti)
(v) Dire se la base finale risulta ottima cambiando la z in $4x_1 + x_2$. (2 punti)

Soluzione suggerita. (Traccia) La regione ammmissibile del programma è rappresentata in figura, con vertici $A(0, \frac{4}{3})$, $B(0, 3)$, $C(\frac{3}{2}, 3)$, $D(3, 0)$, $E(2, 0)$. La soluzione ottima si trova nel vertice C, con valore ottimo $z^* = \frac{15}{2}$. Le basi ammissibili associate ai vertici sono $A(x_2, x_4, x_5)$, $B(x_2, x_3, x_4)$, $C(x_1, x_2, x_3)$, $D(x_1, x_3, x_5)$, $E(x_1, x_4, x_5)$.



La forma standard del programma è

$$\begin{aligned}
\max\ \ z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & 2x_1 + 3x_2 \quad -x_3 = 4 \\
& 2x_1 + x_2 \quad\ \ +x_4 = 6 \\
& \qquad\ \ x_2 \quad\ \ +x_5 = 3 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Rispetto al vertice di partenza indicato (A), il programma si riformula come

$$\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_3 \\
& x_2 = & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_3 \\
& x_4 = & \frac{14}{3} & -\frac{4}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 \\
& x_5 = & \frac{5}{3} & +\frac{2}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_3 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0.}
\end{array}$$

Il simplesso genera la sequenza di soluzioni $A \to B \to C$ (dettagli omessi).
La riformulazione finale è

$$\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & \frac{15}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{3}{2}x_5 \\
& x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_5 \\
& x_2 = & 3 & & -x_5 \\
& x_3 = & 8 & -x_4 & -2x_5 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0.}
\end{array}$$

Per verificare se questa base è ottima rispetto alla funzione obiettivo modificata basta riformulare l'obiettivo

$$\begin{aligned} z =& 4x_1 + x_2 = \\ & 9 - 2x_4 + x_5, \end{aligned}$$

quindi si perde l'ottimalità.

□

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 8 \\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 = 12 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione effettuata con l'algoritmo di Gauss Jordan porta alla seguente matrice ridotta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_3 \in \mathbb{R}$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 \\ x_2 = 3 - 2x_3 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Dimostrare che se B è una base ammissibile, condizione sufficiente affinché $\mathbf{x}(B)$ sia ottima è che risulti $r_j \leq 0$ per ogni variabile x_j fuori base. (3 punti)

(ii) Dare una interpretazione del concetto di costo ridotto all'interno dell'algoritmo del simplesso (2 punti)

Soluzione suggerita. Le risposte sono reperibili sugli appunti. In particolare, la (i) è la proprietà 4.2 mentre per la (ii) si cerchi a pagina 81. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 22/02/2018

Esercizio 1. (12 punti) Siete diventati amministratori della *WowCloud* S.r.L., azienda che fornisce servizi cloud alle PMI del Piemonte. Per convincere il Consiglio di Amministrazione che sia necessario cambiare la politica di gestione dei vostri server, rispolverate le conoscenze di quell'esame fatto al primo anno quando eravate studenti di Informatica a Torino. I vostri tecnici vi hanno fornito la lista degli n contratti che dovete gestire il prossimo mese. Per ciascun contratto di servizio $i = 1, \ldots, n$ avete a disposizione la richiesta di memoria m_i, la richiesta di potenza di calcolo p_i e il ricavo in euro r_i. Sapete inoltre di avere a disposizione m servers e, per ciascun server $j = 1, \ldots, m$, conoscete la sua capacità massima in termini di memoria M_j e di potenza di calcolo P_j. Inoltre sappiamo che allocare un contratto i ad un certo server j determina un consumo stimato di energia elettrica pari a e_{ij}, e di avere a disposizione un ammontare di energia pari ad E.

(a) Scrivere il programma lineare per allocare i contratti ai server in modo da massimizzare il ricavo totale (8 punti)

(b) Modificare il programma per tenere in conto il seguente requisito: un server senza contratti ad esso allocati può essere spento permettendo quindi un risparmio pari a s_j. (4 punti)

Soluzione suggerita. Introduciamo una variabile decisione x_{ij} che assume valore pari a 1 quando il contratto i è assegnato al server j, 0 altrimenti.
Il primo vincolo modella il fatto che ogni contratto di servizio possa essere eseguito, se selezionato, da un solo server:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1\,, \qquad \forall i\,.$$

I due seguenti vincoli modellano l'assegnamento dei contratti ai server rispettando le loro rispettive capacità massime:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_{ij} \leq M_j\,, \qquad \forall j$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \leq P_j\,, \qquad \forall j\,.$$

Il seguente vincolo invece modella il budget sulla corrente elettrica:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} x_{ij} \leq E\,.$$

La funzione obiettivo è quindi

$$\max \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} x_{ij} \,.$$

Per la seconda parte, introduciamo un'ulteriore variabile decisionale y_j che assume valore 1 se il server j può essere spento, 0 altrimenti.
I vincoli sulle capacità dei server sono modificati come segue:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_{ij} \leq M_j(1 - y_j) \,, \qquad \forall j$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \leq P_j(1 - y_j) \,, \qquad \forall j$$

mentre la funzione obiettivo diventa

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} s_j y_j \,.$$

□

Esercizio 2. (11 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

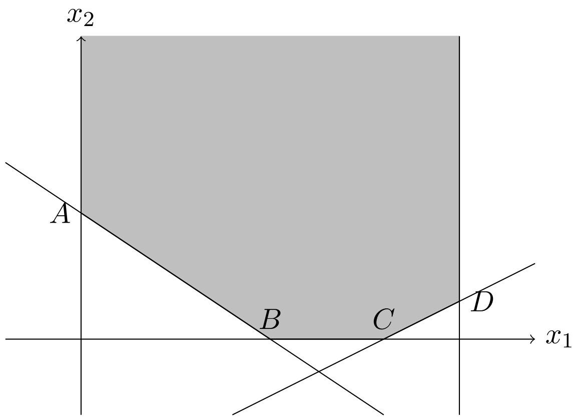
$$\begin{aligned} \min \ & z = -x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard riportando anche il valore che ogni variabile assume in quella base. Inoltre, calcolarne esplicitamente almeno una di esse (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(0, \frac{5}{3})$. (3 punti)
(v) Dire se la base finale risulta ancora ottima cambiando la funzione obiettivo in

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2.$$

Se non risultasse ottima, qual è la nuova base ottima, se esiste? (2 punti)

Soluzione suggerita. (Traccia) La regione ammmissibile del programma è rappresentata in figura, con vertici $A(0, \frac{5}{3})$, $B(\frac{5}{2}, 0)$, $C(4, 0)$, $D(5, \frac{1}{2})$. Le soluzioni ottime si trovano sul segmento $\overline{CD}$, con valore ottimo $z^* = -4$. Le basi ammissibili associate ai vertici sono $A(x_2, x_4, x_5)$, $B(x_1, x_4, x_5)$, $C(x_1, x_3, x_5)$, $D(x_1, x_2, x_3)$.



La forma standard del programma è

$$\begin{aligned} \max\ z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 2x_1 + 3x_2 \quad -x_3 = 5 \\ & x_1 - 2x_2 \quad +x_4 = 4 \\ & x_1 \quad\quad +x_5 = 5 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Rispetto al vertice di partenza indicato (A), il programma si riformula come

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & -\frac{10}{3} & +\frac{7}{3}x_1 & -\frac{2}{3}x_3 \\ & x_2 = & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_3 \\ & x_4 = & \frac{22}{3} & -\frac{7}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_3 \\ & x_5 = & 5 & -x_1 & \\ & & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. & & \end{array}$$

Il simplesso genera la sequenza di soluzioni $A \to B \to C$ (dettagli omessi).
La riformulazione finale è

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 4 & & -x_4 \\ & x_1 = & 4 & -2x_2 & -x_4 \\ & x_3 = & 3 & +7x_2 & -2x_4 \\ & x_5 = & 1 & -x_2 & +x_4 \\ & & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. & & \end{array}$$

Per verificare se questa base è ottima rispetto alla funzione obiettivo modificata basta riformulare l'obiettivo

$$\begin{aligned} z = & 2x_1 + x_2 = \\ & 8 + 5x_2 - 2x_4, \end{aligned}$$

quindi si perde l'ottimalità. Si noti che il problema diventa illimitato, quindi non esiste più una base ottima. Questo si prova con un'ulteriore iterazione di simplesso, oppure con considerazioni sulla risoluzione grafica. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 = 3 \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + \ x_2 - \dfrac{2}{3}x_3 \qquad = 2 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione effettuata con l'algoritmo di Gauss Jordan porta alla seguente matrice ridotta

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Il sistema ha infinite soluzioni. □

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Dimostrare che condizione sufficiente affinché la funzione obiettivo sia illimitata superiormente è che nella riformulazione rispetto a una base B risulti $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_k \leq \mathbf{0}$, $\quad r_k > 0$ per almeno una variabile x_k fuori base. (3 punti)

(ii) Dare una interpretazione geometrica della condizione di illimitatezza. Si prenda ad esempio il caso di funzione obiettivo max $z = x_1 + 5x_2$ applicato al metodo grafico del secondo esercizio, punto (i). (2 punti)

Soluzione suggerita. La risposta al punto (i) è reperibile sugli appunti (dimostrazione della proprietà 4.3. Per il secondo punto si osserva che con la nuova funzione obiettivo, il fascio di rette isoprofitto cresce nel primo quadrante senza mai uscire dalla regione ammissibile. Questo significa che non sarà mai possibile determinare un ottimo finito e, di conseguenza, il problema, risulta illimitato. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 22/02/2018

Esercizio 1. (12 punti) Un'azienda deve rifornire tre stabilimenti A, B, C di olio combustibile, che acquista presso tre fornitori $1, 2, 3$, ai seguenti prezzi in euro/litro, inclusivi di trasporto.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

I tre stabilimenti hanno necessità rispettivamente di 10000, 15000 e 25000 litri di olio. I tre fornitori possono fornire rispettivamente 20000, 30000 e 25000 litri al massimo. Per non legarsi ad un produttore particolare, la direzione ha deciso che ogni fornitore riceverà almeno il 20% della commessa totale.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare l'acquisto dei quantitativi di olio da ogni fornitore, minimizzando il costo totale della fornitura.
(b) Modificare il programma per tenere conto del seguente fatto: sia il fornitore 1 che il 2 effettuano uno sconto di 2000 euro sul totale fornito se ricevono un ordine superiore a 7000 litri.

Soluzione suggerita. Sia x_{ij} = litri di olio combustibile recapitato dal fornitore $i = 1, 2, 3$ allo stabilimento $j = A, B, C$. Se c_{ij} sono i costi della matrice del testo, il modello si può scrivere come segue.

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=A}^{C} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 10000 \\
& x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \geq 15000 \\
& x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \geq 25000 \\
& x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20000 \\
& x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 30000 \\
& x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 25000 \\
& \sum_{j=A}^{C} x_{ij} \geq 0.2 \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=A}^{C} x_{kj} \qquad i = 1, 2, 3 \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ j = A, B, C.
\end{aligned}$$

Per la parte (b) si possono usare due variabili binarie y_1, y_2 poste a 1 se si intende sfruttare lo sconto del venditore $1, 2$. La funzione obiettivo diventa

$$z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=A}^{C} c_{ij} x_{ij} - 2000 y_1 - 2000 y_2.$$

Occorre, per coerenza, inserire i vincoli tipo "big-M"

$$\sum_{j=A}^{C} x_{ij} \geq 7000 y_i \qquad i = 1, 2.$$

□

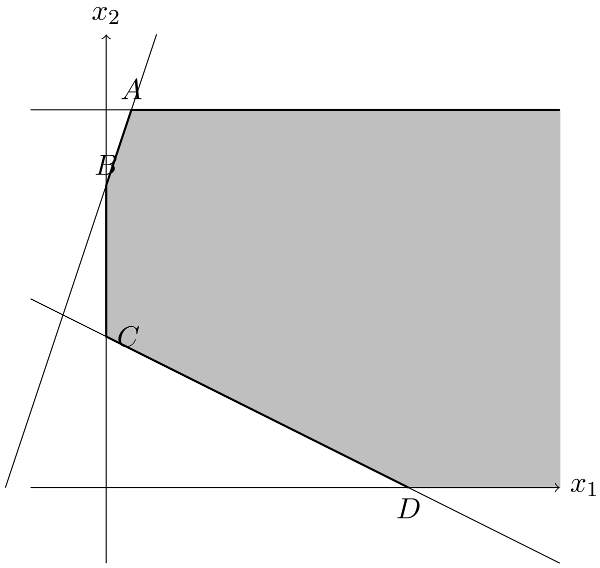
Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \min\ z = &2x_1 - 1x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma lineare in forma standard applicando l'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(x_1 = 0, x_2 = 2)$. (3 punti)
(v) Dire (senza ripetere il simplesso) se la base ottima identificata risulta ancora ottima se si vuole minimizzare la funzione obiettivo $z = x_1 - x_2$. (3 punti)

Soluzione suggerita. (Traccia) La regione ammissibile del problema è riportata in figura, con vertici $A(\frac{1}{3}, 5)$, $B(0, 4)$, $C(0, 2)$, $D(4, 0)$. L'ottimo si trova nel vertice A

$(z = -\frac{13}{3})$.



La forma standard del problema è

$$\begin{array}{rl} \max & z = -2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} & x_1 + 2x_2 \quad -x_3 \geq 4 \\ & -3x_1 + x_2 \quad +x_4 \leq 4 \\ & x_2 \quad +x_5 \leq 5 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{array}$$

I vertici corrispondono alle basi $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(x_2, x_3, x_5)$, $C(x_2, x_4, x_5)$, $D(x_1, x_4, x_5)$. La base iniziale specificata corrisponde al vertice C, Il simplesso arriva all'ottimo in tre iterazioni, $C \to B \to A$ (dettagli omessi). La riformulazione ottima è

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{13}{3} & -\frac{2}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 \\ & x_1 = & \frac{1}{3} & +\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 \\ & x_2 = & 5 & & -x_5 \\ & x_3 = & \frac{19}{3} & +\frac{1}{3}x_4 & -\frac{7}{3}x_5. \end{array}$$

Se la funzione obiettivo fosse $z = -x_1 + x_2$ (cambo di segno per standardizzare), sarebbe riformulata rispetto alla base (x_1, x_2, x_2) come

$$z = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5.$$

La base è quindi ottima anche per la funzione obiettivo modificata. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 & & -x_3 + 3x_4 & -x_5 = 3 \\ & x_2 & +2x_3 - x_4 & = 4 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 & & +\frac{1}{2}x_3 + x_4 & -\frac{1}{2}x_5 = 3 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss-Jordan riduce il sistema a

$$\begin{cases} 2x_1 & - & \frac{1}{2}x_3 + & \frac{3}{2}x_4 - & \frac{1}{2}x_5 = & \frac{3}{2} \\ & x_2 + & 2x_3 - & x_4 & = & 4 \\ & & & & 0 = & -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione. □

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti tra loro se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri. (2 punti)

(ii) Dato un programma lineare in forma standard $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, dimostrare che se una soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ è una soluzione di base, allora essa è anche un vertice della regione ammissibile. (3 punti)

Soluzione suggerita. Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 11/07/2018

Esercizio 1. (12 punti) Siete diventati consulenti della squadra di calcio *Youth F.C.* e del suo allenatore Max Cheerfulness! L'allenatore vuole studiare una nuova formazione tipo per la prossima stagione cercando di sfruttare i dati sui giocatori della rosa, raccolti nei precedenti mitici 7 anni.
I giocatori della rosa sono divisi in 3 insiemi T_D, T_C e T_A per identificate rispettivamente i difensori, i centrocampisti e gli attaccanti.
Le caratteristiche di ogni giocatore $g \in T_r$ (con $r = D, C, A$) sono sintetizzate da due indici a_g e d_g che ne misurano rispettivamente la capacità di attacco e di difesa. Tali indici permettono di quantificare la forza dei tre reparti difesa (D), centrocampo (C) ed attacco (A). La forza del reparto $r = D, C, A$ è misurata come

$$F_r = \alpha_r \left(\sum_{\text{giocatori } g \text{ scelti per reparto } r} a_g \right) + (1 - \alpha_r) \left(\sum_{\text{giocatori } g \text{ scelti per reparto } r} d_g \right).$$

(a) Considerato che l'allenatore ha indicato necessaria la presenza di almeno 3 difensori, 3 centrocampisti e 2 attaccanti, scrivere il programma lineare per selezionare gli 11 giocatori della nuova formazione tipo in modo da ottenere 3 reparti la cui forza F_r sia bilanciata [**Suggerimento**: massimizzare la forza del reparto con valore di forza minima]. (8 punti)

(b) Sia $I = [i^r_{hk}]$ (con $r = D, C, A$) la matrice delle incompatibilità tecniche tra giocatori dello stesso reparto: se $i^r_{hk} = 1$ allora i giocatori h e $k \in T_r$ sono incompatibili e non possono stare nella formazione tipo. Aggiungere al programma lineare del punto (a) i vincoli che garantiscono il rispetto delle incompatibilità tra giocatori dello stesso reparto. (4 punti)

Soluzione suggerita. Introduciamo la seguente variabile decisionale

$$x^r_g = \begin{cases} 1 & \text{se giocatore } g \in T_r \text{ è stato selezionato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

I vincoli sulla composizione della squadra e dei reparti sono i seguenti:

$$\sum_{g \in T_D} x^D_g + \sum_{g \in T_C} x^C_g + \sum_{g \in T_A} x^A_g = 11,$$

e

$$\sum_{g \in T_D} x^D_g \geq 3, \quad \sum_{g \in T_C} x^C_g \geq 3, \quad \sum_{g \in T_A} x^A_g \geq 2.$$

Il bilanciamento dei reparti è modellato dai seguenti vincoli

$$F_{\min} \leq \alpha_r \left(\sum_{g \in T_r} a_g x^r_g \right) + (1 - \alpha_r) \left(\sum_{g \in T_r} d_g x^r_g \right), \quad r = D, C, A.$$

e funzione obiettivo

$$\max z = F_{\min}$$

dove $F_{\min}$ è una variabile reale non negativa di supporto.

Per il punto (b) occorre scrivere il seguente vincolo per ogni giocatore, ovvero

$$\sum_{k \in T_r} i^r_{hk} x^r_k \leq 11(1 - x^r_h), \quad r = D, C, A \text{ e } h \in T_r.$$

□

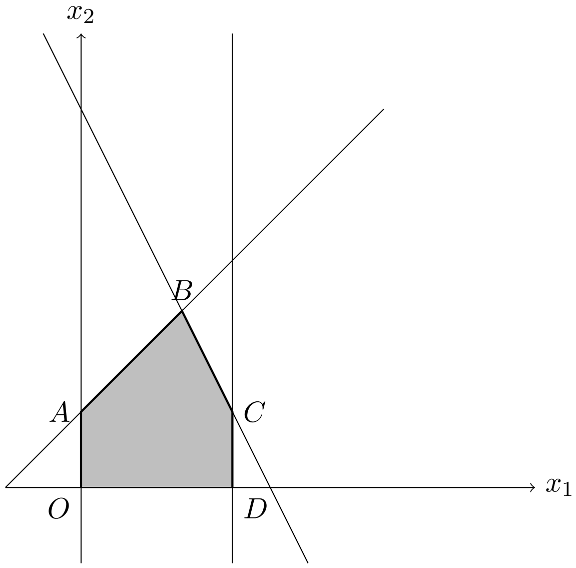
Esercizio 2. (11 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned}
\max\ z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard riportando anche il valore che ogni variabile assume in quella base. Inoltre, calcolarne esplicitamente almeno una di esse (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(2, 0)$. (3 punti)
(v) Dire se la base finale risulta ancora ottima cambiando la funzione obiettivo in

$$\max\ z = 2x_1 - x_2.$$

Soluzione suggerita. (Traccia) La regione ammmissibile del programma è rappresentata in figura, con vertici ($O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, $C(2, 1)$, $D(2, 0)$. La soluzione ottima si trova sul vertice B, con valore ottimo $z^* = 6$. Le basi ammissibili associate ai vertici sono $O(x_3, x_4, x_5)$, $A(x_2, x_3, x_5)$, $B(x_1, x_2, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_4)$, $D(x_1, x_3, x_4)$.



La forma standard del programma è

$$\begin{aligned} \max\ \ z = {} & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 \quad +x_3 = 5 \\ & -x_1 + x_2 \quad +x_4 = 1 \\ & x_1 \qquad\qquad +x_5 = 2 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Rispetto al vertice di partenza indicato (D), il programma si riformula come

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 2 & +2x_2 & -x_5 \\ & x_1 = & 2 & & -x_5 \\ & x_3 = & 1 & -x_2 & +2x_5 \\ & x_4 = & 3 & -x_2 & -x_5 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_5 \geq 0.} \end{array}$$

Il simplesso genera la sequenza di soluzioni $D \to C \to B$ (dettagli omessi).
La riformulazione finale è

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 6 & -x_3 & -x_4 \\ & x_1 = & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{1}{3}x_4 \\ & x_2 = & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{2}{3}x_4 \\ & x_5 = & \frac{2}{3} & +\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_5 \geq 0.} \end{array}$$

Per verificare se questa base è ottima rispetto alla funzione obiettivo modificata basta riformulare l'obiettivo

$$\begin{aligned} z = {} & x_1 - 2x_2 = \\ & -\frac{10}{3} - x_3 + \frac{5}{3}x_4, \end{aligned}$$

quindi si perde l'ottimalità. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \quad - 2x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 \quad + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_4 = 3 \\ x_2 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = -7 \end{cases}$$

che si risolve per ispezione, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_4 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -7 - 2x_4 \end{cases} \qquad (x_4 \in \mathbb{R}), \text{ libera.}$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Dimostrare che se $\mathbf{x}$ è una soluzione ammissibile di base di un programma lineare in forma standard, allora, essa è ance un vertie della regione ammissibile. (3 punti)

(ii) Dimostrare che k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se ogni loro combinazione lineare $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i$ si esprime con un unico set di coefficienti. (2 punti)

Soluzione suggerita. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 20/09/2018

Esercizio 1. (11 punti) Una fabbrica produce due modelli di giocattoli identificati con A e B. Entrambi i modelli fanno uso di tre tipi di componenti $1, 2, 3$ utilizzati in quantità diverse. Ogni unità del modello A richiede tre componenti di tipo 1, uno di tipo 2 e 5 di tipo 3. Ogni unità del modello B richiede un componente di tipo 1, tre di tipo 2 e tre di tipo 3. I fornitori vendono i tre componenti impaccati in tre tipi di confezioni I, II, III, ognuna delle quali contiene i tre componenti in differenti quantità ed ha un diverso costo.

Tipo	**Comp. 1**	**Comp. 2**	**Comp. 3**	**Costo**
I	2	3	5	20
II	4	8	2	15
III	4	4	3	30

La fabbrica deve approvvigionarsi di componenti al fine di assicurare la produzione di almeno 5000 unità complessive di giocattoli $(A + B)$, e nel mix produttivo nessuno dei due tipi deve rappresentare meno del 30% del totale prodotto.

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare le quantità di giocattoli da produrre ed i relativi acquisti di componenti a costo minimo. (8 punti)

(b) Modificare il modello precedente per tenere in considerazionei il fatto che la direzione acquisti ha inoltre deciso che l'acquisto di almeno uno dei tre tipi di confezioni deve essere limitato a non più di 500 unità. (3 punti)

Soluzione suggerita. Le decisioni richieste dal problema riguardano sia gli acquisti di confezioni che i volumi produttivi di giocattoli A e B — queste ultime sono inevitabili in quanto determinano le quantità da approvvigionare dei singoli componenti. Si possono quindi usare due variabili x_A, x_B per le quantità di giocattoli e tre variabili $x_{\text{I}}, x_{\text{II}}, x_{\text{III}}$ per le quantità di confezioni di tipo I, II, III acquistate.
Allora la funzione obiettivo del modello si scrive semplicemente come segue:

$$(1) \qquad \min z \quad = \quad 20x_{\text{I}} + 15x_{\text{II}} + 30x_{\text{III}}$$

Bisogna produrre almeno 5000 giocattoli, dove sia A che B non rappresentano meno del 30% del totale.

$$(2) \qquad x_A + x_B \geq 5000$$

$$(3) \qquad x_A \geq 0.3(x_A + x_B)$$

$$(4) \qquad x_B \geq 0.3(x_A + x_B).$$

Bisogna inoltre approvvigionarsi dei componenti nelle quantità richieste. In base al testo, con volumi produttivi pari a x_A e x_B occorreranno almeno $(3x_A + x_B)$ componenti di tipo 1, $(x_A + 3x_B)$ di tipo 2 e $(5x_A + 3x_B)$ di tipo 3. Quindi:

$$(5) \qquad 2x_{\mathrm{I}} + 4x_{\mathrm{II}} + 4x_{\mathrm{III}} \geq 3x_A + x_B$$
$$(6) \qquad 3x_{\mathrm{I}} + 8x_{\mathrm{II}} + 4x_{\mathrm{III}} \geq x_A + 3x_B$$
$$(7) \qquad 5x_{\mathrm{I}} + 2x_{\mathrm{II}} + 3x_{\mathrm{III}} \geq 5x_A + 3x_B.$$

Tutte le x_i sono di tipo intero. Per quanto riguarda il punto (b), introduciamo la seguente variabile binaria

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se viene limitato l'acquisto della confezione di tipo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il primo vincolo modella la decisione di quale confezione limitarne l'acquisto

$$(8) \qquad y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$

mentre il secondo vincolo mette in relazione tale decisione con le quantità da acquistare

$$(9) \qquad x_i \leq 500y_i + M(1 - y_i), \qquad i = \mathrm{I, II, III}.$$

Il "Big-M" è necessario per lasciare libertà di acquisto nel caso $y_i = 0$. □

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

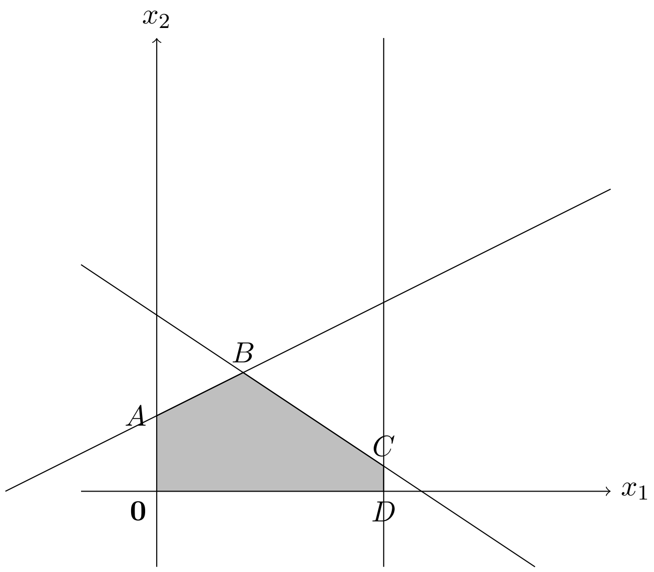
$$\begin{aligned} \max\ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to } & 2x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma col metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma per mezzo dell'algoritmo del simplesso. Partire dalla base associata all'origine. (3 punti)
(v) Dire se la base ottima trovata rimane ottima cambiando l'obiettivo in

$$\max z = 2x_1 - x_2.$$

(3 punti)

Soluzione suggerita. (Traccia)



$\mathbf{O}(0,0)$	$z_0 = 0$
$A(0,1)$	$z_A = 2$
$B(\frac{8}{7}, \frac{11}{7})$	$z_B = \frac{30}{7}$
$C(3, \frac{1}{3})$	$z_C = \frac{11}{3}$
$D(3,0)$	$z_D = 3$

Forma standard e basi.

$$\text{Basi} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{0}(x_3, x_4, x_5) \\ A x_2, x_3, x_5) \\ B(x_1, x_2, x_5) \\ C(x_1, x_2, x_4) \\ D(x_1 x_3, x_4) \end{cases} \qquad \begin{array}{llllll} \max & z = & x_1 + 2x_2 & & & \\ \text{subject to} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = 7 \\ & -x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 2 \\ & x_1 & & & +x_5 & = 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

Il simplesso percorre le basi $\mathbf{0} \rightarrow A \rightarrow B$. La base ottima corrispondente a B presenta la seguente riformulazione finale.

$$\begin{array}{lrlll} \max & z = & \frac{30}{7} & -\frac{4}{7}x_3 & -\frac{1}{7}x_4 \\ & x_1 = & \frac{8}{7} & -\frac{2}{7}x_3 & +\frac{3}{7}x_4 \\ & x_2 = & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7}x_3 & -\frac{2}{7}x_4 \\ & x_5 = & \frac{13}{7} & +\frac{2}{7}x_3 & -\frac{3}{7}x_4 \\ & & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. & & \end{array}$$

La funzione obiettivo, se riformulata rispetto alla base (x_1, x_2, x_5) diventa

$$z = \frac{5}{7} - \frac{3}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4,$$

perdendo l'ottimalità. $\square$

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Soluzione suggerita. La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} + x_4 \\ x_2 = \frac{2}{5} - 4x_4 \\ x_3 = 0 - 3x_4 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Dare una definizione di costo ridotto ed una sua interpretazione geometrica all'interno dell'algoritmo del simplesso (3 punti)
(3 punti)

(ii) Dimostrare che k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se ogni loro combinazione lineare $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i$ si esprime con un unico set di coefficienti. (2 punti)

Soluzione suggerita. Le risposte sono reperibili sugli appunti. □

Anno Accademico 2019-20

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 04/02/2019

Esercizio 1. (11 punti) L'atleta *FakeMuscles* si sta preparando per correre i 100 ed i 200 metri alle prossime olimpiadi di Tokio 2020. Per il programma di potenziamento fisico ha deciso di ricorrere ad un mix di sostanze *naturali* a base di testosterone.
Sul mercato sono disponibili 4 tipi di sostanze A, B, C, e D. Tali sostanze sono vendute in confezioni di tipo 1, 2, e 3 contenenti un numero diverso di bustine per ciascuna sostanza, come descritto nella tabella che segue.

confezioni	**A**	**B**	**C**	**D**	**costo**
1	2	3	5	6	199
2	4	8	2	1	217
3	3	7	9	5	101

L'atleta deve quindi acquistare un numero di confezioni sufficienti a soddisfare il consumo per l'intero 2019 stimato in almeno 1200 bustine. Per un potenziamento equilibrato è necessario che, per ogni sostanza, il numero di bustine sia almeno il 5% e non ecceda il 35% del totale delle bustine acquistate. Infine, si richiede che il totale delle bustine di tipo C e D non ecceda il 60% del totale delle bustine acquistate.

(a) Scrivere il programma lineare per garantire l'approvvigionamento dell'atleta a costo minimo. (8 punti)

(b) Allo scopo di limitare i controlli del Comitato Olimpico Internazionale, modificare il modello per imporre le seguenti condizioni: (i) è possibile acquistare al più confezioni di due tipi, e (ii) è possibile acquistare confezioni di tipo 1 soltanto se si acquistano confezioni di tipo 2. (3 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Introduciamo 3 variabili decisionali x_1. x_2 ,e x_3 che rappresentano rispettivamente il numero di confezioni di tipo 1, 2, e 3 che intendiamo acquistare, tutte e tre a valori in $\mathbb{Z}_+$.
Introduciamo una variabile di supporto $B \in \mathbb{Z}_+$ che rappresenta il numero totale di bustine acquistate, definite dal vincolo

$$(1) \qquad 16x_1 + 15x_2 + 24x_3 = B$$

nel quale 16, 15 e 24 sono il numero di totale di bustine in una confezione di tipo 1, 2, e 3, rispettivamente.
I seguenti vincoli rappresentano i limiti del 5% e del 35%:

$$(2) \qquad \frac{1}{20}B \leq \begin{matrix} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 9x_3 \\ 6x_1 + 1x_2 + 5x_3 \end{matrix} \leq \frac{7}{20}B$$

mentre il vincolo che segue modella la richiesta del 60%:

$$(3) \qquad 11x_1 + 3x_2 + 14x_3 \leq \frac{6}{10}B.$$

Infine, la funzione obiettivo risulta:

$$(4) \qquad \min z \equiv 199x_1 + 217x_2 + 101x_3.$$

Il modello quindi si compone della funzione obiettivo (4) e dei vincoli (1), (2), e (3).

Per quanto riguarda la parte (b), occorre introdurre 3 variabili decisionali y_1. y_2 ,e y_3 (a valori in 0 e 1) che rappresentano rispettivamente la decisione di acquistare confezioni di 1, 2, e 3. Il modello si modifica aggiungendo i seguenti due vincoli:

$$(5) \qquad \text{(i) } y_1 + y_2 + y_3 \leq 2, \qquad \text{e} \qquad \text{(ii) } y_1 \leq y_2.$$

Infine, occorre garantire la relazione tra le variabili x e le y utilizzando 3 vincoli di tipo *BigM*, ovvero:

$$(6) \qquad x_1 \leq My_1 \qquad x_2 \leq My_2 \qquad x_3 \leq My_3.$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

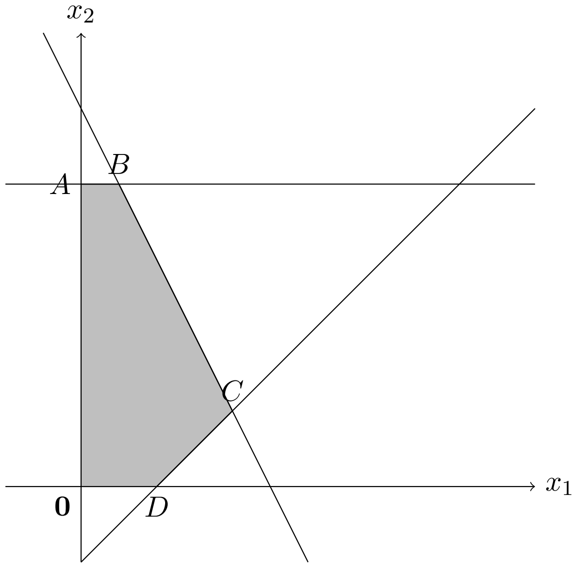
$$\begin{aligned} \max \ z = & 2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard riportando anche i valori delle variabili di base. Calcolarne esplicitamente almeno una. (3 punti)
(iv) Risolvere il problema per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ della regione ammissibile. (3 punti)
(v) Dire se la base ottima rimane tale cambiando l'obiettivo in

$$\min \ z = -x_1 + 2x_2.$$

(3 punti)

Soluzione suggerita (traccia).



$\mathbf{O}(0,0)$ $z_0 = 0$
$A(0,4)$ $z_A = 4$
$B(\frac{1}{2},4)$ $z_B = 5$
$C(2,1)$ $z_C = 5$
$D(1,0)$ $z_D = 4$

La soluzione col metodo grafico indica che entrambi i vertici B e C sono soluzioni ottime con valore pari a 5. Forma standard e basi.

$$\text{Basi} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{0}(x_3 = 5, x_4 = 1, x_5 = 4) \\ A(x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = 5) \\ B(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 4, x_4 = \frac{9}{2}) \\ C(x_1 = 2, x_2 = 1, x_5 = 3) \\ D(x_1 = 1, x_3 = 3, x_5 = 4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 2x_1 & +x_2 & & \\ \text{subject to} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =5 \\ & & x_1 & -x_2 & +x_4 & =1 \\ & & & x_2 & +x_5 & =4 \\ & & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & & & \end{array}$$

Il simplesso percorre le basi $\mathbf{0} \rightarrow D \rightarrow C$, ma anche $\mathbf{0} \rightarrow A \rightarrow B$ è possibile sotto altre regole di scelta della variabile entrante. La base ottima corrispondente a C presenta la seguente riformulazione finale.

$$\begin{array}{lrlll} \max & z = & 5 & -x_3 & \\ & x_1 = & 2 & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ & x_2 = & 1 & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{2}{3}x_4 \\ & x_5 = & 3 & +\frac{1}{3}x_3 & -\frac{2}{3}x_4 \\ & & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & & \end{array}$$

La nuova funzione obiettivo

$$\max \ z = x_1 - 2x_2$$

se riformulata rispetto alla base (x_1, x_2, x_5) diventa

$$z = 0 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4,$$

perdendo l'ottimalità. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

Soluzione suggerita (traccia). La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}x_4 \\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{5}{4}x_4 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(1) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono tra loro linearmente indipendenti se e solo se ogni loro combinazione lineare $\mathbf{w}$ si esprime in modo unico.
(2) Dimostrare che se in un'iterazione del simplesso tutte le variabili fuori base hanno costo ridotto ≤ 0, allora la base corrente è ottima.

Soluzione suggerita (traccia). Le risposte sono reperibili sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 25/02/2019

Esercizio 1. (11 punti) Un'azienda sanitaria locale deve riorganizzare la logistica del suo sistema di analisi ambulatoriale. Il sistema è composto dall'insieme P dei poliambulatori e dall'insieme L dei laboratori di analisi: il cittadino si reca in un poliambulatorio per eseguire degli esami, che vengono successivamente trasportati - nei tempi previsti dai protocolli medici - in un laboratorio per essere analizzati.
È stato stimato che ogni poliambulatorio esegua D_p (con $p \in P$) esami al giorno e che ogni laboratorio possa analizzare al più C_ℓ (con $\ell \in L$) esami. Trasportare un singolo esame dal poliambulatorio p al laboratorio ℓ costa $t_{p\ell}$ mentre il costo di una singola analisi di laboratorio è pari a c_ℓ (e quindi diverso da laboratorio a laboratorio).

(a) Scrivere il programma lineare per riorganizzare la logistica dell'azienda sanitaria a costo minimo. (8 punti)

(b) Posto H_ℓ pari al costo del trasporto di tutti gli esami al laboratorio $\ell \in L$ più il costo della loro analisi, modificare il modello affinché venga minimizzato il massimo costo imputabile ad un laboratorio. (3 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Introduciamo una variabile $x_{p\ell} \in \mathbb{Z}_+$ che modella la decisione di quanti esami trasportare dal poliambulatorio $p \in P$ al laboratorio $\ell \in L$.
Il primo vincolo modella il trasporto di tutti gli esami di un dato poliambulatorio $p \in P$ verso qualche laboratorio

$$\sum_{\ell \in L} x_{p\ell} = D_p, \qquad \forall p \in P,$$

mentre il secondo modella il fatto che un dato laboratorio $\ell \in L$ possa ricevere al più C_l esami da analizzare

$$\sum_{p \in P} x_{p\ell} \leq C_\ell, \qquad \forall \ell \in L.$$

La funzione obiettivo consiste nel minimizzare il costo totale determinato dal trasporto degli esami e dalla loro analisi. Abbiamo quindi:

$$\min z \equiv \sum_{p \in P} \sum_{\ell \in L} t_{p\ell} x_{p\ell} + \sum_{\ell \in L} c_\ell \sum_{p \in P} x_{p\ell}.$$

Per la parte (b) introduciamo una variabile decisionale di supporto $y \in \mathbb{Z}_+$ per rappresentare il massimo costo di un laboratorio.
Per prima cosa introduciamo dei vincoli per fare in modo che y assuma il valore corrispondente al massimo costo imputabile ad un laboratorio, ovvero

$$\sum_{p \in P} (c_\ell + t_{p\ell}) x_{p\ell} \leq y \qquad \forall \ell \in L.$$

Infine modifichiamo la funzione obiettivo in

$$\min z \equiv y.$$

$\square$

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

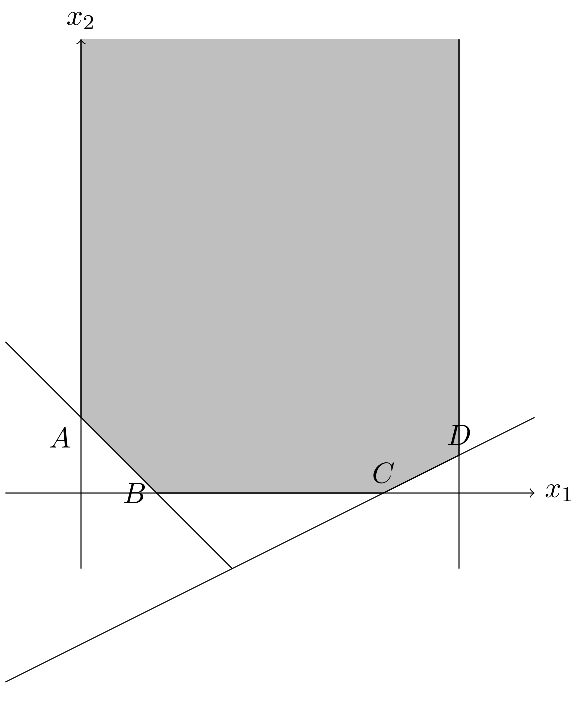
$$
\begin{aligned}
\min\ z =\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{soggetto a } & x_1 \quad -2x_2 \leq 4 \\
& x_1 \quad +x_2 \geq 1 \\
& x_1 \qquad\quad \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard riportando anche i valori delle variabili di base. Calcolarne esplicitamente almeno una. (3 punti)
(iv) Risolvere il problema per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice ($x_1 = 4, x_2 = 0$) della regione ammissibile. (3 punti)
(v) Dire se la base ottima rimane tale cambiando l'obiettivo in

$$\min\ z = x_1 - x_2.$$

(3 punti)

Soluzione suggerita (traccia).



$$
\begin{aligned}
&A(0,1) && z_A = 1 \\
&B(1,0) && z_B = 2 \\
&C(4,0) && z_C = 8 \\
&D(5,\tfrac{1}{2}) && z_D = \frac{11}{2}
\end{aligned}
$$

Come si osserva dallo studio delle rette di isoprofitto, il punto di ottimo è il vertice A con coordinate $x_1^\star = 0$, $x_2^\star = 1$, e valore della funzione obiettivo $z^\star = 1$.
Forma standard e basi.

$$\text{Basi} \rightarrow \begin{cases} A(x_2 = 1, x_3 = 6, x_5 = 5) \\ B(x_1 = 1, x_3 = 3, x_5 = 4) \\ C(x_1 = 4, x_4 = 3, x_5 = 1) \\ D(x_1 = 5, x_2 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{9}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rlllll} \max & z = -2x_1 - x_2 & & & & \\ \text{subject to} & x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = 4 \\ & x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 1 \\ & x_1 & & & +x_5 & = 5 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. & & & & \end{array}$$

Il simplesso percorre le basi $C \rightarrow B \rightarrow A$. La base ottima corrispondente ad A presenta la seguente riformulazione finale.

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & -1 & -x_1 & -x_4 \\ & x_2 = & 1 & -x_1 & +x_4 \\ & x_3 = & 6 & -3x_1 & +2x_4 \\ & x_5 = & 5 & -x_1 & \\ & & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. & & \end{array}$$

/

La nuova funzione obiettivo

$$\max \ z = -x_1 + x_2$$

se riformulata rispetto alla base (x_2, x_3, x_5) diventa

$$z = 1 - 2x_1 + x_4,$$

perdendo l'ottimalità. □

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Soluzione suggerita (traccia). La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{9} & -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{11}{9} - \dfrac{4}{9}x_4 \\ x_2 = -\dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{9}x_4 \\ x_3 = -\dfrac{10}{9} + \dfrac{11}{9}x_4 \end{cases} .$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(1) Dimostrare che, data una base B di uno sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ e un vettore $\mathbf{w} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, esiste un unico $\mathbf{v} \in B$ tale che $(B \cup \{\mathbf{w}\}) \setminus \{\mathbf{v}\})$ sia ancora una base di V.

(2) Enunciare e giustificare la condizione di illimitatezza che si può incontrare nell'esecuzione dell'algoritmo del simplesso.

Soluzione suggerita (traccia). Le risposte sono reperibili sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 21/06/2019

Esercizio 1. (11 punti) Un comune deve trasferire rifiuti da tre siti di stoccaggio A, B, C a quattro inceneritori $1, 2, 3, 4$. I tre siti di stoccaggio dispongono rispettivamente di 2500, 4200 e 3400 tonnellate di rifiuti. I quattro inceneritori hanno capacità per processare (al più) 3200, 3700, 2500 e 3000 tonnellate. Il trasporto è affidato a una ditta esterna che su ogni tratta $i \to j$ da sito di stoccaggio i a sito di lavorazione j applica un costo di c_{ij} euro per ogni tonnellata di materiale spostato. I costi in euro sono specificati dalla seguente tabella.

$$c_{ij} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 90 & 100 & 70 & 80 \\ 50 & 40 & 30 & 70 \\ 20 & 80 & 90 & 45 \end{pmatrix} \end{array}$$

Per mantenere un equilibrio tra gli impianti, per ogni coppia di inceneritori i, j la differenza nei rifiuti processati dai due non può eccedere le 900 tonnellate.

errore storico

(a) Scrivere il programma lineare per pianificare il trasporto dei rifuti a costo minimo.

(b) Modificare il modello per tenere conto di quanto segue. Su ogni tratta $i \to j$, se si trasportano più di 600 tonnellate scatta una tariffazione agevolata: invece dei costi c_{ij}, sulle tonnellate eccedenti le 600 si pagano i seguenti

$$c'_{ij} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 70 & 80 & 30 & 70 \\ 40 & 20 & 15 & 50 \\ 10 & 60 & 60 & 30 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Soluzione suggerita (traccia). Sia x_{ij} = tonnellate trasportate sulla tratta $i \to j$. Siano le costanti $a_i = (2500, 3200, 3400)$, $b_j = (3200, 3700, 2500, 3000)$. Il problema si può modellare come

$$\min \ z = \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i \qquad i = A, B, C$$

$$\sum_{i=A}^{C} x_{ij} \leq b_j \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{k=A}^{C} x_{ki} - \sum_{k=A}^{C} x_{kj} \leq 900 \qquad i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \qquad i \neq j$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i \in \{A, B, C\},\ j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Per modellare la parte (b), si possono scorporare le x_{ij} in due quantità

$$x_{ij} = x'_{ij} + x''_{ij}$$

dove le x'_{ij} rappresentano le tonnellate soggette alla tariffazione c_{ij}. La funzione obiettivo diventa

$$z = \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} (c_{ij} x'_{ij} + c'_{ij} x''_{ij}).$$

Sia $y_{ij} = 1$ se $x_{ij} \geq 600$. Per garantire la coerenza nella tariffazione si usano i vincoli

$$x'_{ij} \leq 600$$

$$x''_{ij} \leq M y_{ij}$$

$$x'_{ij} \geq 600 y_{ij}$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max\ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. Fornire calcoli/giustificazione per almeno una base tra quelle listate. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma lineare in forma standard applicando il metodo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice $(0, 3)$. (3 punti)
(v) Dire se la base ottima trovata rimane tale per l'obiettivo

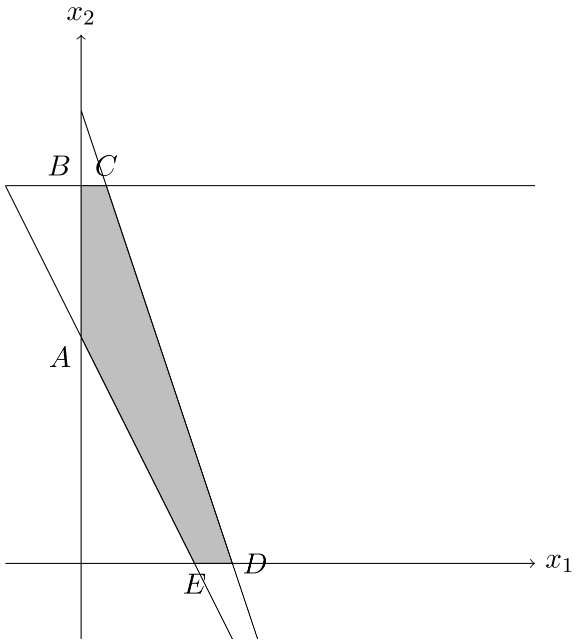
$$\min\ z = -2x_1 + x_2.$$

(3 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Il programma in forma standard è

$$\begin{aligned} \max\ z = &x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 2x_1 + x_2 \quad -x_3 = 3 \\ & 3x_1 + x_2 \quad +x_4 = 6 \\ & \quad\ \ x_2 \quad +x_5 = 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

La regione ammissibile è riportata in figura.



Le basi ammissibili corrispondono ai vertici $A(x_2, x_4, x_5)$, $B(x_2, x_3, x_4)$, $C(x_1, x_2, x_3)$, $D(x_1, x_3, x_5)$, $E(x_1, x_4, x_5)$. La base fornita corrisponde al vertice A; il simplesso visita $A \to B \to C$ (vertice ottimo). Cambiando la funzione obiettivo si perde l'ottimalità. $\square$

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Soluzione suggerita (traccia). La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale si risolve per ispezione, ottenendo infinite soluzioni al variare di $x_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} + x_4 \\ x_2 = \frac{2}{5} - 4x_4 \\ x_3 = 0 - 3x_4 \end{cases}.$$

□

Esercizio 4. (5 punti)

(i) Dimostrare che se $\mathbf{x}$ è una soluzione ammissibile di base di un programma lineare in forma standard, allora, essa è anche un vertice della regione ammissibile. (3 punti)

(ii) Dimostrare che k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se ogni loro combinazione lineare $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i$ si esprime con un unico set di coefficienti. (2 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Le risposte sono reperibili sugli appunti. □

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 19/07/2019

Esercizio 1. (11 punti) Dovete pianificare gli acquisti per un'impresa edile. Nello specifico, la ristrutturazione di uno stabile richiede l'acquisto di 3 tipologie differenti di pavimentazione: plance di legno chiaro, piastrelle medie e piastrelle grandi. La richiesta è di 300 mq di legno chiaro mentre le piastrelle richieste sono 500 mq per quelle medie e 600 mq per quelle grandi. Ogni tipologia di pavimentazione è venduta in pacchi che coprono 0.25 mq ognuno. Per l'acquisto vi potete rifornire da 3 fornitori differenti che sono in grado di fornire tutte le tipologie, i costi sono riportati in tabella (in euro)

	Fornitore 1	**Fornitore 2**	**Fornitore 3**
Plance	15	16	17
Piastrelle medie	9	8	7
Piastrelle grandi	10	12	11

Inoltre, ognuno dei fornitori applica uno sconto ogni volta che vengono acquistati un numero determinato di pacchi di una specifica tipologia. Il fornitore 1, ogni 4 pacchi di plance di legno, applica un prezzo per il successivo pacco di 12 euro. Il fornitore 2, ogni 3 pacchi di piastrelle medie, applica un prezzo per il successivo di 7 euro mentre il fornitore 3, ogni 5 pacchi di piastrelle grandi applica un prezzo, per il successivo, di 10 euro. Inoltre, per ragioni commerciali, volete che ogni fornitore fornisca almeno il 20% della commessa totale.

(a) Formulare il modello di programmazione lineare che garantisca la fornitura al prezzo minore. (8 punti)

(b) Poiché avete notato che le plance di legno dei 3 fornitori non sono esattamente dello stesso colore, vorreste conoscere quale sia il costo totale qualora, per le plance di legno, vi riforniste da uno solo dei 3 fornitori. (3 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Detti A, B, C i tre tipi di materiali forniti, sia x_{ij} il numero di pacchi di materiale i ordinati dal fornitore j. La situazione "fondamentale" è modellabile in modo analogo ai problemi di trasporto (i fornitori hanno capacità infinita, quindi non ci sono vincoli di disponibilità). Per la gestione degli sconti si possono decomporre le variabili interessate x_{A1}, x_{B2}, x_{C3} in una somma di variabili intere

$$x_{A1} = x'_{A1} + x''_{A1}$$
$$x_{B2} = x'_{B2} + x''_{B2}$$
$$x_{C3} = x'_{C3} + x''_{C3},$$

dove le variabili a singolo apice rappresentano forniture a prezzo pieno e quelle a doppio apice forniture a prezzo scontato.

$$
\begin{aligned}
\min\ z =\, & 15x'_{A1} + 16x_{A2} + 17x_{A3} + 12x''_{A1}\\
& +9x_{B1} + 8x'_{B2} + 7x_{B3} + 7x''_{B2}\\
& +10x_{C1} + 12x_{C2} + 11x'_{C3} + 10x''_{C3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{soggetto a } & 0.25\sum_{j=1}^{3} x_{Aj} \geq 300\\
& 0.25\sum_{j=1}^{3} x_{Bj} \geq 500 \qquad \text{Ri}\\
& 0.25\sum_{j=1}^{3} x_{Cj} \geq 600\\
\text{Interi} \leftarrow \quad & x_{A1} = x'_{A1} + x''_{A1}\\
& x_{B2} = x'_{B2} + x''_{B2} \qquad \text{Somma}\\
& x_{C3} = x'_{C3} + x''_{C3}\\
& x''_{A1} \leq \frac{x'_{A1}}{4}\\
& x''_{B2} \leq \frac{x'_{B2}}{3} \qquad \leq\\
& x''_{C3} \leq \frac{x'_{C3}}{5}\\
& \sum_{i=A}^{C} x_{ik} \geq 0.2\sum_{i=A}^{C}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \qquad k = 1, 2, 3\\
& x_{ij}, x'_{ij}, x''_{ij} \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

Per la parte (b), è sufficiente usare tre variabili logiche y_1, y_2, y_3 che valgono 1 se la fornitura di plance si ordina dal fornitore $1, 2, 3$ rispettivamente, e aggiungere

$$
\begin{aligned}
& y_1 + y_2 + y_3 = 1\\
& x_{A1} \leq My_1\\
& x_{A2} \leq My_2\\
& x_{A3} \leq My_3\\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$
\begin{aligned}
\max\ z = & -x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & -2x_1 + 3x_2 \le 8 \\
& x_1 + x_2 \le 4 \\
& x_1 \le 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili del programma in forma standard. Fornire calcoli/giustificazione per almeno una base tra quelle listate. (3 punti)
(iv) Risolvere il programma lineare in forma standard applicando il metodo del simplesso, partendo dalla base associata al vertice $(0,0)$. (3 punti)
(v) Dire se la base ottima trovata rimane tale per l'obiettivo

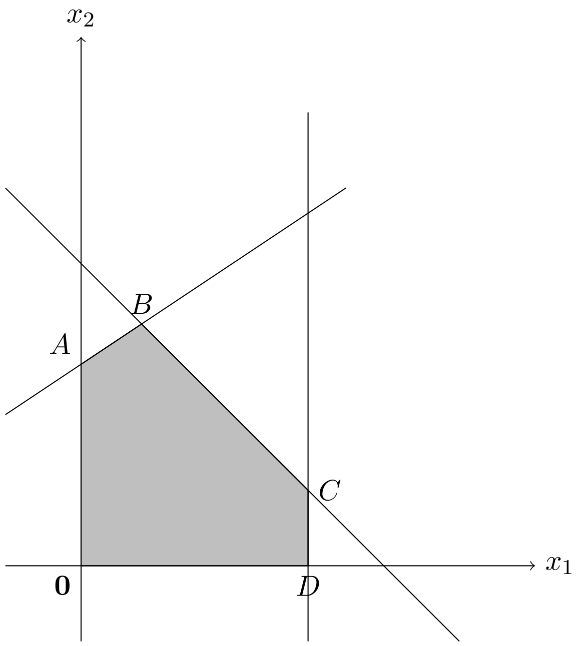
$$\max\ z = -2x_1 + x_2.$$

(3 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Il programma in forma standard è

$$
\begin{aligned}
\max\ z = & -x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
& x_1 + x_5 = \cancel{5}\ 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

La regione ammissibile è riportata in figura.



L'ottimo è nel vertice $B(\frac{4}{5}, \frac{16}{5})$ Le basi ammissibili corrispondono ai vertici $\mathbf{0}(x_3, x_4, x_5)$, $A(x_2, x_4, x_5)$, $B(x_1, x_2, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_3)$, $D(x_1, x_3, x_4)$. La base fornita corrisponde al vertice A; il simplesso visita $\mathbf{0} \to A \to B$ (vertice ottimo). Cambiando la funzione obiettivo si perde l'ottimalità. $\square$

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Soluzione suggerita (traccia). L'algoritmo di Gauss-Jordan riduce il sistema a

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & -\dfrac{7}{5}x_3 & +\dfrac{2}{5}x_4 & = -\dfrac{13}{5} \\ & x_2 + & \dfrac{3}{5}x_3 & -\dfrac{3}{5}x_4 & = \dfrac{17}{5} \\ & & & 0 & = -\dfrac{5}{2} \end{array}$$

che non ammette soluzione. $\square$

Esercizio 4. (5 punti) Dimostrare le seguenti:

(i) Se B è una base ammissibile, condizione sufficiente perché $\mathbf{x}(B)$ sia ottima è che risulti

$$r_j \leq 0 \qquad \text{per ogni variabile } x_j \text{ fuori base.}$$

(3 punti)

(ii) I vettori di un insieme $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri. (2 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. In particolare, la (i) è la proprietà 4.2 mentre per la (ii) si cerchi in sezione 2.2.2. $\square$

ESAME DI CALCOLO MATRICIALE E RICERCA OPERATIVA – APPELLO DEL 11/09/2019

Esercizio 1. (11 punti) Si consideri il seguente problema generico di selezione ottima di elementi da un dato insieme. Si supponga di avere un insieme S di n elementi, ciascuno dei quali caratterizzati da due parametri v_i e c_i che rappresentano rispettivamente il valore ed il costo dell'elemento i-esimo, con $i = 1, \ldots, n$. Selezionare l'elemento i significa inserirlo in una delle ℓ liste disponibili pagando il costo c_i con parte del budget B_j della lista j, on $j = 1, \ldots, \ell$. Supponiamo che valga la seguente: $\sum_{i=1}^{n} c_i \gg \sum_{j=1}^{\ell} B_j$. L'obiettivo è quello di selezionare un sottoinsieme degli elementi in S in modo da massizzare il valore totale degli elementi selezionati.

(a) Formulare il modello di programmazione lineare per selezionare il sottoinsieme degli elementi di valore massimo. (7 punti)

(b) Denotato con V_j il valore degli elementi inseriti nella lista j, con $j = 1, \ldots, \ell$, si modifichi il modello al punto (a) affinché la selezione degli elementi sia tale che venga massimizzato il minimo V_j. (4 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Si introduce la variabile decisionale x_{ij} che può assumere valore 1 se l'elemento i è assegnato alla lista j, 0 altrimenti.
Per la domanda (a), la funzione obiettivo può essere agevolment scritta come:

$$\max z \equiv \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{\ell} x_{ij}.$$

Il seguente vincolo modella la selezione degli oggetti, ovvero che ciascun oggetto (se selezionato) può essere inserito in una ed unica lista, ovvero

$$\sum_{j=1}^{\ell} x_{ij} \leq 1\,, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Il seguente vincolo infine garantisce di non eccedere il vincolo di budget di ogni lista, ovvero

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ij} \leq B_j\,, \qquad j = 1, \ldots, \ell.$$

La modifiche da apportare al modello proposto per rispondere alla domanda (b) sono quelle solite che riguardano la modellazione di una funzione obbiettivo di tipo bottleneck. Per prima cosa introduciamo una variabile decisionale di supporto y a valori nei reali che rappresenta il minimo tra i valori di V_j. Il seguente vincolo – da aggiungere al modello – rappresenta l'individuazione del valore minimo tra le varie liste

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} \geq y\,, \qquad j = 1, \ldots, \ell,$$

che verrà a sua volta massimizzato dalla nuova funzione obiettivo

$$\max z \equiv y.$$

□

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max\ \ z = & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } & x_1 \quad +2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \quad +2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \qquad\quad\ \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Risolvere il programma con il metodo grafico. (2 punti)
(ii) Trasformare il programma in forma standard. (1 punto)
(iii) Elencare le basi ammissibili (con il valore delle variabili) del programma in forma standard riportando in modo esplicito il calcolo di almeno una base. (3 punti)
(iv) Risolvere il problema per mezzo dell'algoritmo del simplesso, partendo dalla base corrispondente al vertice $(x_1 = 0, x_2 = 2)$. (3 punti)
(v) Dire se la base ottima trovata rimane tale per l'obiettivo

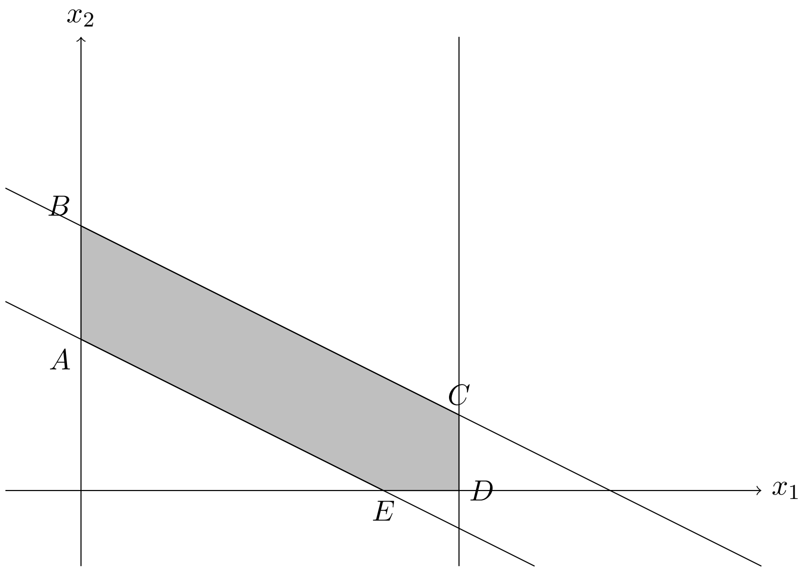
$$\max\ \ z = 2x_1 - x_2.$$

(3 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Il programma in forma standard è

$$\begin{aligned} \max\ \ z = & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } & x_1 \quad +2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \quad +2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \qquad\quad\ \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

La regione ammissibile è riportata in figura.



L'ottimo è nel vertice $C(5, 1)$ Le basi ammissibili corrispondono ai vertici $A(x_2, x_4, x_5)$, $B(x_2, x_3, x_5)$, $C(x_1, x_2, x_3)$, $D(x_1, x_3, x_4)$, $E(x_1, x_4, x_5)$. La base fornita corrisponde al vertice A; il simplesso visita i vertici $A \to B \to C$ oppure $A \to E \to D \to C$ (sono possibili due scelte equivalenti alla prima iterazione). Cambiando la funzione obiettivo si perde l'ottimalità. $\square$

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari con il metodo di Gauss-Jordan, avendo cura di indicare le operazioni elementari svolte nei vari passaggi.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 = 1 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 \qquad + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Soluzione suggerita (traccia). La riduzione di Gauss Jordan porta alla seguente soluzione

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_4 = 3 \\ \quad x_2 \qquad = 5 \\ \qquad x_3 + 2x_4 = -7 \end{cases}$$

che si risolve per ispezione, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_4 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -7 - 2x_4 \end{cases} \qquad (x_4 \in \mathbb{R}), \text{ libera.}$$

□

Esercizio 4. (5 punti) Dimostrare le seguenti:

(i) Dimostrare che condizione sufficiente affinché la funzione obiettivo sia illimitata superiormente è che nella riformulazione rispetto a una base B risulti

$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_k \leq \mathbf{0}, \quad r_k > 0 \qquad \text{per almeno una variabile } x_k \text{ fuori base.}$$

(3 punti)

(ii) Se $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un insieme di vettori risulta $\sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ se e solo se nessun $\mathbf{v}_j$ è combinazione lineare degli altri elementi di S. (2 punti)

Soluzione suggerita (traccia). Le dimostrazioni sono reperibili sugli appunti. □