Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa
Programmazione Lineare
Programmi a variabili continue

Andrea Grosso
Dipartimento di Informatica
Università di Torino
grosso@di.unito.it – 011-6706824

Sommario

Sommario

Metodo grafico

$$\boxed{\begin{aligned} \max\ z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{soggetto a } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 &\leq = \geq b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}}$$

Metodo grafico

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 & \\ \text{soggetto a } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq = \geq b_i & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}}$$

Se un programma lineare ha solo due variabili di decisione (x_1, x_2) si presta ad essere risolto con una costruzione grafica.

- Rappresentare in $\mathbb{R}^2$ la *regione ammissibile*

$$S_a = \{(x_1, x_2) \colon a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq = \geq b_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

- Studiare le curve di livello della funzione obiettivo

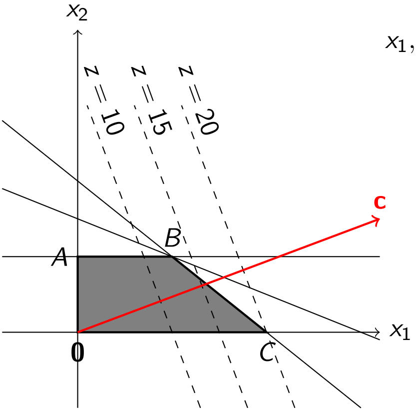
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad \text{(rette isocosto/isoprofitto).}$$

Esempio 1

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 8x_1 + 3x_2 & \\
\text{soggetto a } 4x_1 + 5x_2 & \leq 10 \\
4x_1 + 10x_2 & \leq 15 \\
x_2 & \leq 1 \\
x_1, x_2 & \geq 0.
\end{aligned}
$$

Esempio 1

$$
\begin{aligned}
\max\ z = {} & 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a}\ & 4x_1 + 5x_2 \le 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 \le 15 \\
& x_2 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$



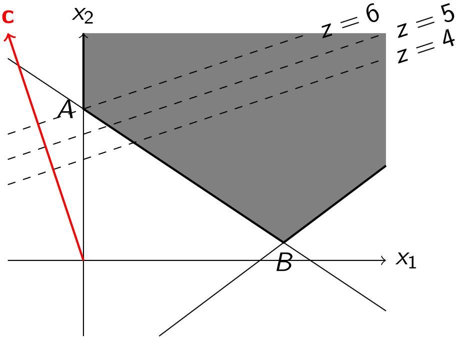
$$x_1^* = \frac{5}{2}, x_2^* = 0$$

Esempio 2

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a } & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & 3x_1 - 4x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Esempio 2

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= -x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a } & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& 3x_1 - 4x_2 \leq 7 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Problema illimitato.

Sommario

Forma generale di un PL

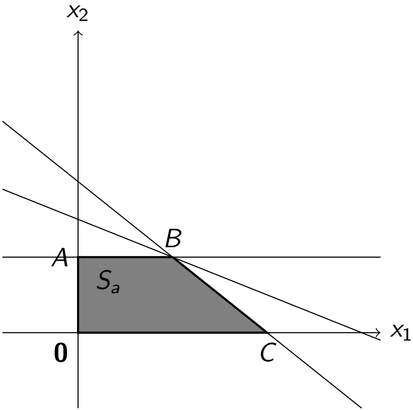
$$\max / \min \;\; z = c_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

soggetto a

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\geq b_i \qquad i = 1, \ldots, k, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i \qquad i = k+1, \ldots, l, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \qquad i = l+1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Forma generale di un PL

$$\begin{aligned} \max\ \ & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + \ 5x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq \ 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



S_a insieme convesso (poliedro/politopo).

Forma standard di un PL

$$
\begin{aligned}
\max\ \ z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{soggetto a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots, m \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0.
\end{aligned}
$$

- Programma di massimizzazione.
- Vincoli di uguaglianza.
- Disuguaglianze $x_j \geq 0$, per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Forma standard di un PL

$$
\begin{aligned}
\max \;\; z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{soggetto a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots, m \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0.
\end{aligned}
$$

- Programma di massimizzazione.
- Vincoli di uguaglianza.
- Disuguaglianze $x_j \geq 0$, per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Ogni PL è equivalente a un PL in forma standard.

Trasformazione in forma standard

Da min a max.

$$\begin{array}{lcl} \min \; z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \Longleftrightarrow & \max \; \bar{z} = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{soggetto a} \quad x \in S_a & & \text{soggetto a} \quad x \in S_a \end{array}$$

Trasformazione in forma standard

Eliminazione di variabili non-positive.

$$x_j \leq 0 \iff x_j = -\bar{x}_j,\ \bar{x}_j \geq 0.$$

Eliminazione di variabili libere.

$$x_j \text{ libera} \iff x_j = x_j^+ - x_j^-,\ x_j^+, x_j^- \geq 0.$$

Trasformazione in forma standard

Eliminazione di disuguaglianze.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \underbrace{y_i}_{\text{var. di slack}} = b_i, \quad y_i \geq 0.$$

Trasformazione in forma standard

Eliminazione di disuguaglianze.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \underbrace{y_i}_{\text{var. di slack}} = b_i, \quad y_i \geq 0.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \underbrace{y_i}_{\text{var. di surplus}} = b_i, \quad y_i \geq 0.$$

Trasformazione in forma standard

Esempio 1.

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad z = & 4x_1 + 5x_2 - x_3 \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3 \geq 7 \\
& x_1 + x_2 \leq 16 \\
& x_1 + 2x_2 = 8 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ libera.}
\end{aligned}
$$

Trasformazione in forma standard

$$
\begin{aligned}
\max \;\; z = & -4x_1 - 5x_2 + x_3 \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3 \;\geq 7 \\
& x_1 + x_2 \;\leq 16 \\
& x_1 + 2x_2 \;= 8 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ libera.}
\end{aligned}
$$

Trasformazione in forma standard

$$
\begin{aligned}
\max\ z = & -4x_1 - 5x_2 + x_3 \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3 \ \geq 7 \\
& x_1 + x_2 \ \leq 16 \\
& x_1 + 2x_2 \ = 8 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ libera.}
\end{aligned}
$$

$$x_2 = -\bar{x}_2, \quad \bar{x}_2 \geq 0.$$

Trasformazione in forma standard

$$
\begin{aligned}
\max \ z =& -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3 \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3 \ \geq 7 \\
& x_1 - \bar{x}_2 \ \leq 16 \\
& x_1 - 2\bar{x}_2 \ = 8 \\
& x_1, \bar{x}_2 \geq 0, x_3 \text{ libera.}
\end{aligned}
$$

Trasformazione in forma standard

$$\begin{aligned}
\max\ z =& -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3 \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3 \geq 7 \\
& x_1 - \bar{x}_2 \leq 16 \\
& x_1 - 2\bar{x}_2 = 8 \\
& x_1, \bar{x}_2 \geq 0, x_3 \text{ libera.}
\end{aligned}$$

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-, \quad x_3^+, x_3^- \geq 0.$$

Trasformazione in forma standard

$$
\begin{aligned}
\max \ z = & -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3^+ - x_3^- \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3^+ - x_3^- \geq 7 \\
& x_1 - \bar{x}_2 \leq 16 \\
& x_1 - 2\bar{x}_2 = 8 \\
& x_1, \bar{x}_2, x_3^+, x_3^- \geq 0.
\end{aligned}
$$

Trasformazione in forma standard

$$
\begin{aligned}
\max \; z = & -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3^+ - x_3^- \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3^+ - x_3^- \geq 7 \\
& x_1 - \bar{x}_2 \leq 16 \\
& x_1 - 2\bar{x}_2 = 8 \\
& x_1, \bar{x}_2, x_3^+, x_3^- \geq 0.
\end{aligned}
$$

Trasformazione in forma standard

$$\begin{aligned} \max \;\; z = & -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3^+ - x_3^- \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3^+ - x_3^- - x_4 = 7 \\ & x_1 - \bar{x}_2 \leq 16 \\ & x_1 - 2\bar{x}_2 = 8 \\ & x_1, \bar{x}_2, x_3^+, x_3^-, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Trasformazione in forma standard

$$\begin{aligned}
\max \ z = & -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3^+ - x_3^- \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_3^+ - x_3^- - x_4 = 7 \\
& x_1 - \bar{x}_2 + x_5 = 16 \\
& x_1 - 2\bar{x}_2 = 8 \\
& x_1, \bar{x}_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Trasformazione in forma standard

Esempio 2.

$$
\begin{aligned}
\max \ & z = 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \ & 4x_1 + 5x_2 \leq 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Trasformazione in forma standard

Esempio 2.

$$
\begin{aligned}
\max \;\; & z = 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \;\; & 4x_1 + \;\; 5x_2 \leq 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\
& \qquad\quad\;\; x_2 \leq \;1 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \;\; & z = 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \;\; & 4x_1 + \;\; 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& \qquad\quad\;\; x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Trasformazione in forma standard

Esempio 3.

$$
\begin{aligned}
\max \;\; z = & -x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& 3x_1 - 4x_2 \leq 7 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Trasformazione in forma standard

Esempio 3.

$$\begin{aligned} \max\ \ z =& -x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & 3x_1 - 4x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ \ z =& -x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ & 3x_1 - 4x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Ipotesi di lavoro e notazioni

Programma in forma standard

$$\max\{z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

$$\begin{aligned} \max\ \ z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i & \\ \text{soggetto a } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & \qquad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & \qquad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dimensioni e notazione

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
$S_a = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$
$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_n)$.
$\boldsymbol{x} =$ variabili di controllo

Ipotesi sul rango

$\rho(\boldsymbol{A}) = m,\ m < n$ – no equazioni ridondanti o contraddittorie.
Infinite soluzioni per $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Sommario

Insiemi convessi

- Dati $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0,1]$ il punto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{v} + \alpha(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \\ &= \alpha \boldsymbol{u} + (1-\alpha)\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

  è una *combinazione lineare convessa* di $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.
- Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è *convesso* se per ogni coppia $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$ tutte le combinazioni lineari convesse di $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ sono elementi di S.
- Dato S convesso, un punto $\boldsymbol{x} \in S$ è un *vertice* di S se *non esistono* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$, $\alpha \in (0,1)$ tali che

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{u} + (1-\alpha)\boldsymbol{v}.$$

- Dato S convesso, un punto $\boldsymbol{x} \in S$ è un *vertice* di S se *non esistono* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$, tali che

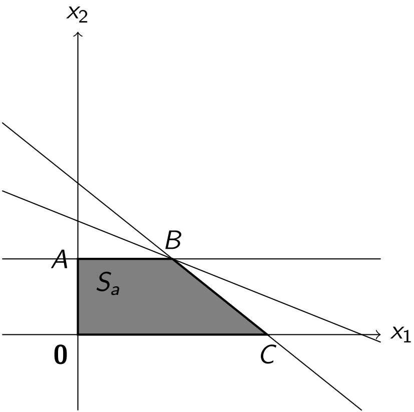
$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}.$$

Vertici della regione ammissibile

Teorema. Se il programma lineare

$$\max\{z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

ammette soluzioni ottime, allora almeno una di esse è un vertice di $S_a = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$.



Vertici della regione ammissibile

Dimostrazione.

- Sia $\boldsymbol{x}^*$ ottimo: $z^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in S_a\}$.
- Caso banale: se $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{x}^*$ vertice.

Vertici della regione ammissibile

Dimostrazione.

- Sia $\boldsymbol{x}^*$ ottimo: $z^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in S_a\}$.
- Caso banale: se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x}^*$ vertice.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{0} =& \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v} \\ & \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a \subseteq \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}\right\} \implies \forall i \begin{cases} \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}v_i = 0 \\ u_i, v_i \geq 0 \end{cases} \implies u_i = v_i = 0$$

Vertici della regione ammissibile

Dimostrazione.

- Sia $\boldsymbol{x}^*$ ottimo: $z^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in S_a\}$.
- Caso banale: se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x}^*$ vertice.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{0} =& \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v} \\ & \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a \subseteq \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}\right\} \implies \forall i \begin{cases} \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}v_i = 0 \\ u_i, v_i \geq 0 \end{cases} \implies u_i = v_i = 0$$

- $\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{0}$, cioè $\boldsymbol{x}^* = (\underbrace{x_1^*, \ldots, x_k^*}_{>0}, \underbrace{x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*}_{=0})^T$.
- Se $\boldsymbol{x}^*$ è un vertice, il teorema vale.

Vertici della regione ammissibile

Dimostrazione.

- Sia $\boldsymbol{x}^*$ ottimo: $z^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in S_a\}$.
- Caso banale: se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x}^*$ vertice.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{0} = & \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v} \\ & \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a \subseteq \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}\right\} \implies \forall i \begin{cases} \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}v_i = 0 \\ u_i, v_i \geq 0 \end{cases} \implies u_i = v_i = 0$$

- $\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{0}$, cioè $\boldsymbol{x}^* = (\underbrace{x_1^*, \ldots, x_k^*}_{>0}, \underbrace{x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*}_{=0})^T$.
- Se $\boldsymbol{x}^*$ è un vertice, il teorema vale.
- Se $\boldsymbol{x}^*$ non è un vertice...

Vertici della regione ammissibile

- $\boldsymbol{x}^*$ non vertice $\implies \exists \boldsymbol{x}' \in S_a$:

$$\boldsymbol{x}' \text{ ottimo, e} \quad \{i \colon x_i' > 0\} \subset \{i \colon x_i^* > 0\}.$$

- Se proviamo l'implicazione, il teorema vale (perché)?

- Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a$ distinti, con $\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}$.

Vertici della regione ammissibile

- $\boldsymbol{x}^*$ non vertice $\implies \exists \boldsymbol{x}' \in S_a$:

$$\boldsymbol{x}' \text{ ottimo, e } \quad \{i : x'_i > 0\} \subset \{i : x^*_i > 0\}.$$

- Se proviamo l'implicazione, il teorema vale (perché)?

- Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a$ distinti, con $\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}$.
  1. $u_i = v_i = x^*_i = 0$ per $i = k+1, \ldots, n$.

Vertici della regione ammissibile

- $\boldsymbol{x}^*$ non vertice $\implies \exists \boldsymbol{x}' \in S_a$:

$$\boldsymbol{x}' \text{ ottimo, e } \quad \{i \colon x_i' > 0\} \subset \{i \colon x_i^* > 0\}.$$

- Se proviamo l'implicazione, il teorema vale (perché)?

- Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a$ distinti, con $\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}$.
  1. $u_i = v_i = x_i^* = 0$ per $i = k+1, \ldots, n$.

$$\frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}v_i = 0, u_i, v_i \geq 0 \implies u_i = v_i = 0.$$

  2. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ sono soluzioni ottime!

Vertici della regione ammissibile

- $\boldsymbol{x}^*$ non vertice $\implies \exists \boldsymbol{x}' \in S_a$:

$$\boldsymbol{x}' \text{ ottimo, e } \quad \{i \colon x'_i > 0\} \subset \{i \colon x^*_i > 0\}.$$

- Se proviamo l'implicazione, il teorema vale (perché)?

- Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a$ distinti, con $\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}$.
  1. $u_i = v_i = x^*_i = 0$ per $i = k+1, \dots, n$.

$$\frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}v_i = 0, u_i, v_i \geq 0 \implies u_i = v_i = 0.$$

  2. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ sono soluzioni ottime!
     Se per assurdo $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u} < z^*$:

$$z^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{2}\underbrace{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}}_{<z^*} + \frac{1}{2}\underbrace{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{v}}_{\leq z^*} < z^* \implies z^* < z^*.$$

Vertici della regione ammissibile

- Sia $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = (y_1, \ldots, y_n)^T \neq 0$.
- Ipotesi: almeno un $y_j < 0$ (se no, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$).

Vertici della regione ammissibile

- Sia $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = (y_1, \ldots, y_n)^T \neq 0$.
- Ipotesi: almeno un $y_j < 0$ (se no, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$).
- Consideriamo le soluzioni

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{y}.$$

- Per quali $\varepsilon > 0$ risulta $\boldsymbol{x}' \in S_a$?

$$\boldsymbol{x}' \in S_a \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}' \geq 0.$$

Vertici della regione ammissibile

- Sia $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = (y_1, \ldots, y_n)^T \neq 0$.
- Ipotesi: almeno un $y_j < 0$ (se no, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$).
- Consideriamo le soluzioni

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{y}.$$

- Per quali $\varepsilon > 0$ risulta $\boldsymbol{x}' \in S_a$?

$$\boldsymbol{x}' \in S_a \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}' \geq 0.$$

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{y}) = \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \\ &\underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*}_{\boldsymbol{b}} + \varepsilon \underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{b}} - \varepsilon \underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}$....

Vertici della regione ammissibile

- Per quali $\varepsilon > 0$ $\boldsymbol{x}' \geq \mathbf{0}$? Per ogni componente $i = 1, \ldots, n$:

Vertici della regione ammissibile

- Per quali $\varepsilon > 0$ $\boldsymbol{x}' \geq \mathbf{0}$? Per ogni componente $i = 1, \ldots, n$:
  1. $i \in k+1, \ldots, n$: $x_i^* = u_i = v_i = 0$, $y_i = (u_i - v_i) = 0$, quindi

$$x_i' = x_i^* + \varepsilon y_i = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Vertici della regione ammissibile

- Per quali $\varepsilon > 0$ $\boldsymbol{x}' \geq \mathbf{0}$? Per ogni componente $i = 1, \ldots, n$:
  1. $i \in k+1, \ldots, n$: $x_i^* = u_i = v_i = 0$, $y_i = (u_i - v_i) = 0$, quindi
  $$x_i' = x_i^* + \varepsilon y_i = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$
  2. $i \in 1, \ldots, k$:
     - 2a. $y_i \geq 0 \implies x_i' = x_i^* + \varepsilon y_i \geq x_i^* \geq 0.$
     - 2b. $y_i < 0$: $x_i^* + \varepsilon y_i \geq 0$ solo se
     $$\varepsilon \leq -\frac{x_i^*}{y_i}.$$

Vertici della regione ammissibile

- Per quali $\varepsilon > 0$ $\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}$? Per ogni componente $i = 1, \dots, n$:
  1. $i \in k+1, \dots, n$: $x_i^* = u_i = v_i = 0$, $y_i = (u_i - v_i) = 0$, quindi
  $$x_i' = x_i^* + \varepsilon y_i = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$
  2. $i \in 1, \dots, k$:
     - 2a. $y_i \geq 0 \implies x_i' = x_i^* + \varepsilon y_i \geq x_i^* \geq 0.$
     - 2b. $y_i < 0$: $x_i^* + \varepsilon y_i \geq 0$ solo se
     $$\varepsilon \leq -\frac{x_i^*}{y_i}.$$
- In $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{y}$, fissiamo
$$\varepsilon = \min\left\{ -\frac{x_i^*}{y_i} : y_i < 0 \right\}.$$

Vertici della regione ammissibile

Conclusione. Per la scelta di ε, almeno una delle

$$x_i^* + \varepsilon y_i \geq 0 \qquad y_i < 0$$

satura (=è soddisfatta per uguaglianza), quindi

- $x'_k, \ldots, x'_n = 0$,
- almeno una $x'_1, \ldots, x'_k$ è $= 0$.

$$\{i \colon x'_i > 0\} \subset \{i \colon x_i^* > 0\}.$$

- Inoltre:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}' = & \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{y}) = \\ = & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{u} - \varepsilon \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{v} = \\ = & z^* + \varepsilon z^* - \varepsilon z^* = z^*. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}'$ ottima.

Vertici della regione ammissibile

Lemma. Sia $\boldsymbol{x} \in S_a = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$.
$\boldsymbol{x}$ è un vertice di $S_a \iff$ le colonne di $\boldsymbol{A}$ in $\{\boldsymbol{A}_j \colon x_j > 0\}$ sono linearmente indipendenti.

Vertici della regione ammissibile

Dimostrazione. Sia

$$\boldsymbol{x} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_k}_{>0}, \underbrace{x_{k+1}, \ldots, x_n}_{=0}).$$

- $\boldsymbol{x}$ vertice $\implies$ $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ l.i.
  Per assurdo: $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ non l.i.
  Allora esistono $y_1, \ldots, y_k$: $\sum_{j=1}^{k} y_k \boldsymbol{A}_j = \mathbf{0}$.
  Poniamo $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$.
  Nota: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{A}_j = \sum_{j=1}^{k} y_j \boldsymbol{A}_j = \mathbf{0}$.

Vertici della regione ammissibile

Dimostrazione. Sia

$$\boldsymbol{x} = (\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{>0}, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}_{=0}).$$

- $\boldsymbol{x}$ vertice $\implies$ $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_k$ l.i.
  Per assurdo: $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_k$ non l.i.
  Allora esistono $y_1, \dots, y_k$: $\sum_{j=1}^{k} y_k \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}$.
  Poniamo $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$.
  Nota: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{A}_j = \sum_{j=1}^{k} y_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}$.
- Definiamo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y} \quad (\varepsilon > 0).$$

Vertici della regione ammissibile

Dimostrazione. Sia

$$\boldsymbol{x} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_k}_{>0}, \underbrace{x_{k+1}, \ldots, x_n}_{=0}).$$

- $\boldsymbol{x}$ vertice $\implies$ $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ l.i.
  Per assurdo: $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ non l.i.
  Allora esistono $y_1, \ldots, y_k$: $\sum_{j=1}^{k} y_k \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}$.
  Poniamo $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$.
  Nota: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{A}_j = \sum_{j=1}^{k} y_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}$.
- Definiamo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y} \quad (\varepsilon > 0).$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}_{=\boldsymbol{b}} + \varepsilon \underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}_{=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{b}.$$

- Anche $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$.

Vertici della regione ammissibile

- Per $\varepsilon >=$ sufficientemente piccolo, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \geq 0$.
- Scegliamo

$$\varepsilon \leq -\frac{x_i}{y_i} \quad \forall\, y_i < 0 \qquad \text{per avere } \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$$

$$\varepsilon \leq \frac{x_i}{y_i} \quad \forall y_i > 0 \qquad \text{per avere } \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}$$

Vertici della regione ammissibile

- Per $\varepsilon >=$ sufficientemente piccolo, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \geq 0$.
- Scegliamo

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\leq -\frac{x_i}{y_i} \quad \forall\, y_i < 0 \qquad\qquad \text{per avere } \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0} \\
\varepsilon &\leq \frac{x_i}{y_i} \quad \forall y_i > 0 \qquad\qquad \text{per avere } \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

- Allora $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a$.

$$
\frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \qquad \text{ASSURDO!}
$$

Vertici della regione ammissibile

- $\boldsymbol{x}$ non vertice di $S_a \implies \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ non l.i.
- Per assurdo: $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ l.i.
- Se $\boldsymbol{x}$ non è vertice, esistono $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_a$ distinti tali che

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}.$$

- Osservazione: $u_j = v_j = 0$ per $j = k+1, \ldots, n$.
- Allora:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{A}_j = \sum_{j=1}^{k} x_j \boldsymbol{A}_j \quad = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \boldsymbol{A}_j = \sum_{j=1}^{k} u_j \boldsymbol{A}_j \quad = \boldsymbol{b}$$

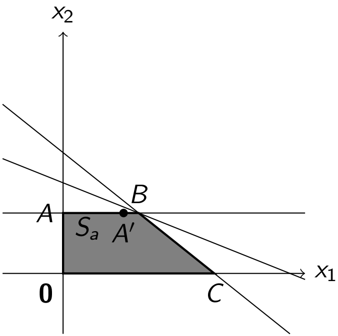
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{A}_j = \sum_{j=1}^{k} v_j \boldsymbol{A}_j \quad = \boldsymbol{b}$$

- ASSURDO.

Vertici della regione ammissibile

$$\begin{array}{rl} \max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + \ \ 5x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ & \qquad\quad x_2 \leq \ 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + \ \ 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\ & \qquad\quad x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{array}$$

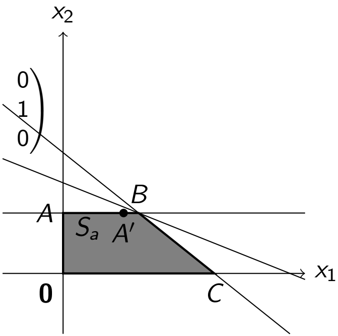


Vertici della regione ammissibile

$$\begin{array}{rl} \max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\ & x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{array}$$

- $A'(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Vertici della regione ammissibile

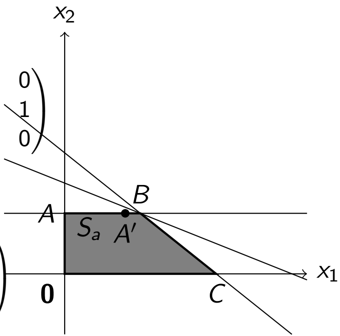
$$\begin{array}{ll} \max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\ & x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{array}$$

- $A'(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B(x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Vertici della regione ammissibile

$$\begin{array}{rl} \max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + 5x_2 \le 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \le 15 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\ & x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, \dots, x_5 \ge 0. \end{array}$$

- $A'(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0)$

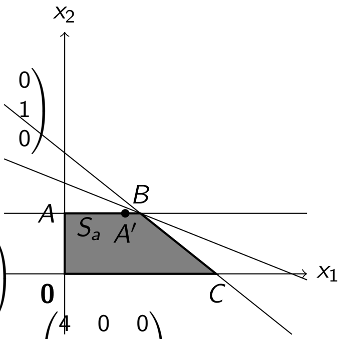
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B(x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $C(x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 1)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Sommario

Soluzioni di base di un sistema di equazioni lineari

Sistema ridotto (senza equazioni contraddittorie)

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \rho(\boldsymbol{A}) = m < n$$

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \to (\boldsymbol{A}' \mid \boldsymbol{b}') = \begin{array}{c} \\ x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc|c} x_{j_1} & x_{j_2} & \dots & x_{j_m} & x_{j_{m+1}} & \dots & x_{j_n} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right) \end{array}.$$

Soluzioni di base di un sistema di equazioni lineari

- $B = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_m}\}$ insieme di variabili di base (o base).
- $N = \{x_{j_{m+1}}, \dots, x_{j_n}\}$ insieme di variabili fuori base.

$$x_i = \beta_i - \sum_{j \in N} \alpha_{ij} x_j \qquad x_i \in B.$$

- La soluzione

$$\begin{aligned} x_i &= \beta_i & \qquad i \in B \\ x_j &= 0 & \qquad j \in N \end{aligned}$$

  è l'unica soluzione che ha $x_{j_{m+1}}, \dots, x_{j_n} = 0$ ed è chiamata soluzione di base (associata B) del sistema.
- $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}\}$ è un insieme di *variabili di base* (o in breve base) $\iff$

  le colonne $\boldsymbol{A}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{A}_{j_m}$ formano una base dello spazio generato dalle colonne di $\boldsymbol{A}$.
- $\boldsymbol{A}_B = (\boldsymbol{A}_j : x_j \in B)$ matrice di base (quadrata e invertibile!).

Insiemi di variabili di base

Notazioni.

partizion

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= (x_j \colon x_j \in B) \\ \boldsymbol{x}_N &= (x_j \colon x_j \in N) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{c}_B &= (c_j \colon c_j \in B) \\ \boldsymbol{c}_N &= (c_j \colon c_j \in N) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_B \ \boldsymbol{A}_N) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{A}_B &= (\boldsymbol{A}_j \colon x_j \in B) \\ \boldsymbol{A}_N &= (\boldsymbol{A}_j \colon x_j \in N) \end{aligned}$$

---

sol base (part

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

La *soluzione di base* del sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ associata a B è l'unica sua soluzione $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(B)$ che ha $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$.

$$\boxed{\boldsymbol{x}(B) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}}$$

Soluzioni di base

Definizione. Se $\boldsymbol{x}(B) \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}(B) \in S_a$ è una *soluzione ammissibile di base* (B è una *base ammissibile*). B *è degenere* se $x_j(B) = 0$ per qualche $x_j \in B$.

Non tutte le basi sono ammissibili!

$$
\begin{aligned}
\max\ \ z = & 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a}\ \ & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
\end{array}
$$

qua già identità

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \underbrace{10}_{x(B)} \underbrace{- 4x_1 - 5x_2}_{\text{pongo } 0} \\
x_4 &= 15 - 4x_1 - 10x_2 \\
x_5 &= 1 - x_2
\end{aligned}
$$

Sarebbe $(0,0)$ in 2D del prob.

Soluzioni di base

(tolgo < θ)

1 2

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_1 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\
x_4 & 0 & 5 & -1 & 1 & 0 & 5 \\
x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

$5/2 \,/\, \frac{5}{4} = 2$

$5/5 = 1$

$1/1 = 1$

x(B) amm.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\
x_4 &= 5 - 5x_2 + x_3 \\
x_5 &= 1 - x_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_2 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 2 \\
x_4 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 & -5 \\
x_5 & -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & -1
\end{array}
$$

x(B) non amm.

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 2 - \frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\
x_4 &= -5 + 4x_1 + 2x_3 \\
x_5 &= -1 + \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3
\end{aligned}
$$

Basi e vertici

Teorema fondamentale della PL. Se il programma lineare

$$\max\{z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

ammette soluzioni ottime, allora almeno una di esse è un vertice di $S_a = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$.

Lemma. Sia $\boldsymbol{x} \in S_a = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$.
$\boldsymbol{x}$ è un vertice di $S_a \iff$ le colonne di $\boldsymbol{A}$ in $\{\boldsymbol{A}_j \colon x_j > 0\}$ sono linearmente indipendenti.

già dato

Proprietà. Sia $\bar{\boldsymbol{x}} \in S_a$. $\bar{\boldsymbol{x}}$ è una soluzione ammissibile di base $\iff$ $\bar{\boldsymbol{x}}$ è un vertice di S_a.

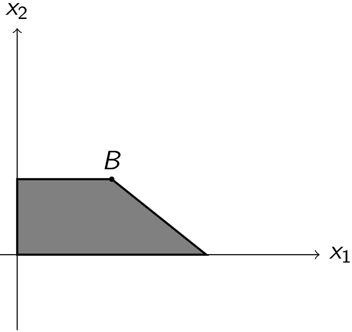
Basi e vertici

$$\begin{array}{ll}\max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + 5x_2 \le 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \le 15 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0.\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\ & x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, \dots, x_5 \ge 0.\end{array}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\underline{\tfrac{5}{4}}, 1, 0, 0, 0)^T$$

$$\boldsymbol{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



mi manca 1 colonna $\Rightarrow$ ne trova una io

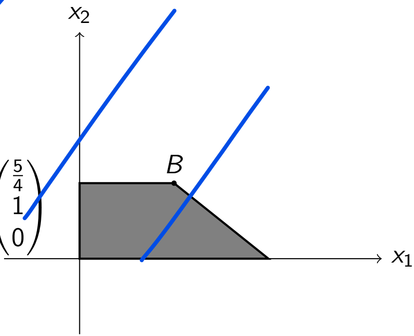
Basi e vertici

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 4x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\ & x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\tfrac{5}{4}, 1, 0, 0, 0)^T$$

$$\boldsymbol{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Basi e vertici

- Due insiemi di variabili di base B, B' (basi) sono adiacenti se

$$B' = (B \setminus \{x_p\}) \cup \{x_q\}.$$

- Sulla matrice ridotta di Gauss-Jordan, si passa da una base all'altra per mezzo di un opportuno pivot $\alpha_{pq} \neq 0$ — x_q *entra* in base, x_p esce.
- Se B è una base ammissibile, a quali condizioni una variabile x_q può entrare in base in modo da ottenere una nuova base B' ammissibile?
- Occorre scegliere in modo opportuno la variabile uscente x_p (e quindi il pivot α_{pq}.

$$\begin{array}{l|l} \alpha_{pq} > 0 & \\ \dfrac{\beta_p}{\alpha_{pq}} \leq \dfrac{\beta_i}{\alpha_{iq}} \quad i \in B,\ \alpha_{iq} > 0 & x_p \text{ tale che } \dfrac{\beta_p}{\alpha_{pq}} = \min\{\dfrac{\beta_i}{\alpha_{iq}} : i \in B,\ \alpha_{iq} > 0\} \end{array}$$

- Problema: come garantire che il cambio di base aumenti la funzione obiettivo?

Riformulazione

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N$$

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N =$$

$$= \mathbf{c}_B^T(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}$$

Riformulazione

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N \\
z =& \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N = \\
=& \boldsymbol{c}_B^T(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x} \\
=& \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{x}_N
\end{aligned}
$$

Riformulazione

Ax = b matriciale divisa

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

la voglio in base a var. fuori base

$$\begin{aligned}
\boxed{z} &= c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \\
&= c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x \\
&= c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \\
&\stackrel{\text{def}}{=} z(B) + r^T(B) x_N
\end{aligned}$$

$$\boxed{c^T x(B) = z(B)}$$

costo sul base

- $r(B) = (r_j : x_j \in N)$ *costi ridotti* delle variabili fuori base.

1 x ogni variabile fuori base

$$r_j = c_j - c_B^T A_B^{-1} A_N.$$

Riformulazione

quest'anno altra via

Γ

Riformulazione del programma lineare

$$\max\{z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

rispetto alla base B:

$$\begin{aligned} \max \qquad\qquad z &= z(B) \quad + \boldsymbol{r}^T(B)\boldsymbol{x}_N \\ \text{soggetto a} \qquad \boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \quad - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}&, \boldsymbol{x}_N \geq 0. \end{aligned}$$

Esempi

$$\begin{aligned}
\max \ & z = 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \ & 4x_1 + \ 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& \qquad\quad x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Esempi

es su quad

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 4x_1 + \ \ 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& \qquad\quad\ \ x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
B = \{x_3, x_4, x_5\} \implies \boldsymbol{A}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_B(B) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Esempi

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & 4x_1 + \ \ 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& \qquad\qquad x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrr}
\max\ z = & 0 & +8x_1 & +3x_2 \\
x_3 = & 10 & -4x_1 & -5x_2 \\
x_4 = & 15 & -4x_1 & -10x_2 \\
x_5 = & 1 & & -x_2 \\
& \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

Esempi

$$\begin{aligned}
\max \ \ & z = 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \ \ & 4x_1 + \ 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Esempi

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 4x_1 + \ \ 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& \qquad\quad\ \ x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
B = \{x_1, x_2, x_5\} \implies \boldsymbol{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Esempi

$$
\begin{aligned}
\max \;\; z &= 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 4x_1 + \;\; 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& \qquad\qquad x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcrrr}
\max \;\; z & = & 13 & +\frac{3}{5}x_3 & -\frac{13}{5}x_4 \\
x_1 & = & \frac{5}{4} & & -\frac{1}{4}x_4 \\
x_2 & = & 1 & +\frac{1}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_4 \\
x_5 & = & 0 & -\frac{1}{5}x_3 & +\frac{1}{5}x_4 \\
& & \multicolumn{3}{c}{x_1, \dots, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Esempi

$$
\begin{aligned}
\max \;\; z &= 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 4x_1 + \;\, 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& \qquad\quad\;\; x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Esempi

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 8x_1 + 3x_2 \\
\text{soggetto a} \quad & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15 \\
& \qquad\quad\;\; x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
B = \{x_1, x_3, x_5\} \implies \boldsymbol{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_B(B) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

$\boxed{\text{Base non ammissibile}}$

L

Riformulazione

Riformulazione del programma lineare

$$\max\{z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

rispetto alla base B:

$$\begin{aligned} \max \qquad z &= z(B) &&+ \boldsymbol{r}^T(B)\boldsymbol{x}_N \\ \text{soggetto a} \qquad \boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} &&- \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}&, \boldsymbol{x}_N \geq 0. \end{aligned}$$

- Consideriamo un cambio di base $B' = (B \setminus \{x_p\}) \cup \{x_q\}$ (ammissibile).
- Se $r_j \leq 0$ per ogni $x_j \in N$, siamo all'ottimo!
- Se $r_q > 0$ per un $x_q \in N$, allora portare x_q in base aumenta la funzione obiettivo!

Algoritmo del simplesso

Passo 1

Input: Un insieme di variabili di base (base ammissibile) ammissibile B e la soluzione associata $\boldsymbol{x}(B)$.

Riformulazione del problema.

$$
\begin{aligned}
\max\ \ z = & z(B) + \sum_{x_j \notin B} r_j x_j \\
\text{soggetto a } x_i = & \beta_i + \sum_{x_j \notin B} -\alpha_{ij} x_j \qquad\qquad x_i \in B \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0.
\end{aligned}
$$

Algoritmo del simplesso

Passo 1

1

Input: Un insieme di variabili di base (base ammissibile) ammissibile B e la soluzione associata $\boldsymbol{x}(B)$.

Riformulazione del problema.

$$\begin{aligned} \max\ z = & z(B) + \sum_{x_j \notin B} r_j x_j \\ \text{soggetto a } x_i = & \beta_i + \sum_{x_j \notin B} -\alpha_{ij} x_j \qquad\qquad x_i \in B \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Controllo di ottimalità.

- Se $r_j \leq 0\ \forall x_j \notin B$ STOP: $\boldsymbol{x}(B)$ è ottima!
- 2 Altrimenti: scegli <u>una</u> $x_q \notin B$ con $r_q > 0$.

Algoritmo del simplesso

Passo 2

3 **Scelta della variabile uscente dalla base.**

Scegli $x_p \in B$ tale che

$$\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} = \min\left\{-\frac{\beta_i}{-\alpha_{iq}} : \alpha_{iq} > 0\right\}$$

Algoritmo del simplesso

Se non esistono $\alpha_{iq} > 0$?

STOP: problema illimitato!

Soluzione ammissibile per qualunque $\varepsilon > 0$.

$$
\begin{array}{lr}
x_q = \varepsilon > 0 & \\
x_j = 0 & x_j \notin B, j \neq q \\
\hline
x_i = \beta_i - \alpha_{iq}\varepsilon \qquad (-\alpha_{iq} > 0) & x_i \in B \\
\hline
z = z(B) + r_q\varepsilon \to +\infty \quad (\varepsilon \to +\infty) &
\end{array}
$$

Algoritmo del simplesso

Passo 3

4 Nuova soluzione di base

$$B := (B \setminus \{x_p\}) \cup \{x_q\}.$$

Trovare la nuova riformulazione rihiede solo un'operazione di pivot su α_{pq}.

1 Iterare dal passo 1...

Algoritmo del simplesso

Input: Una base ammissibile B.

1. Riformula il problema,

$$\begin{aligned} \max \ \ z = & z(B) + \sum_{x_j \notin B} r_j x_j \\ \text{soggetto a } x_i = & \beta_i + \sum_{x_j \notin B} -\alpha_{ij} x_j \qquad\qquad x_i \in B \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

2. Scegli la variabile entrante in base x_q, $r_q > 0$.
   - Se non esiste $r_q < 0$: STOP, ottimo!
3. Scegli la variabile uscente x_p:

$$\min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{iq}} : \alpha_{iq} > 0 \right\} = \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}$$

   - Se non esiste $-\alpha_{pq} < 0$: STOP, prob. illimitato.
4. Cambia base $B := (B \setminus \{x_p\}) \cup \{x_q\}$.
   Torna a 1.