[illegible]nfluenza e strategie di riduzione

Luca Padovani
Linguaggi e Paradigmi di Programmazione

confluenza

Teorema (confluenza)

Se $M \Rightarrow N_1$ e $M \Rightarrow N_2$ allora esiste N tale che $N_1 \Rightarrow N$ e $N_2 \Rightarrow N$.

Aritmetica

$$
\begin{tikzcd}
 & (1+2)\times(3+4) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
3\times(3+4) \arrow[dr] & & (1+2)\times 7 \arrow[dl] \\
 & 3\times 7 \arrow[d] & \\
 & 21 &
\end{tikzcd}
$$

Java `(int a = 1;)`

$$
\begin{tikzcd}
 & \texttt{(a = 2) * (a + 1)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\texttt{2 * (a + 1)} \arrow[d] & & \texttt{(a = 2) * 2} \arrow[d] \\
\texttt{2 * 3} \arrow[d] & & \texttt{2 * 2} \arrow[d] \\
\texttt{6} & & \texttt{4}
\end{tikzcd}
$$

unicità della forma normale

Definizione (forma normale)

*Diciamo che M è in **forma normale** se non può più essere ridotto, ovvero se **non** esiste N tale che $M \to N$. In tal caso scriviamo $M \not\to$.*

Corollario

La forma normale di M, se esiste, è unica (a meno di α-conversioni).

Dimostrazione.

Supponiamo che M abbia due forme normali N_1 ed N_2, ovvero $M \Rightarrow N_1 \not\to$ e $M \Rightarrow N_2 \not\to$. Per il teorema di confluenza esiste N tale che $N_1 \Rightarrow N$ e $N_2 \Rightarrow N$. Siccome N_1 ed N_2 sono in forma normale, deve essere $N_1 = N = N_2$ (a meno di α-conversioni). $\square$

strategie di riduzione

Come scegliere il prossimo redex? Due possibilità naturali:

1. redex più a sinistra e più interno **ordine applicativo**

$$(\lambda x.x)\ \underline{((\lambda y.y)\ z)} \to \underline{(\lambda x.x)\ z} \to z$$

2. redex più a sinistra e più esterno **ordine normale**

$$\underline{(\lambda x.x)\ ((\lambda y.y)\ z)} \to \underline{(\lambda y.y)\ z} \to z$$

Strategie di riduzione e linguaggi di programmazione

- ordine applicativo $\Rightarrow$ applicare una funzione a un argomento significa prima valutare l'argomento e poi sostituire il valore ottenuto nel corpo della funzione **linguaggi "zelanti"**
- ordine normale $\Rightarrow$ applicare una funzione a un argomento significa sostituire l'argomento (che non è necessariamente un valore) nel corpo della funzione **linguaggi "pigri"**

Le due strategie sono "equivalenti"? **NO**

un esempio in cui conviene essere pigri

Ordine applicativo

$$(\lambda x.y)\ (\underline{(\lambda z.z)\ (\lambda z.z)}) \to \underline{(\lambda x.y)\ (\lambda z.z)} \to y$$

Ordine normale

$$\underline{(\lambda x.y)\ ((\lambda z.z)\ (\lambda z.z))} \to y$$

Osservazioni

- l'argomento x non è **mai usato**
- l'ordine normale è più efficiente perché non lo valuta

un esempio in cui conviene essere zelanti

Ordine applicativo

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.x\,x)\,\underline{((\lambda y.y)\,(\lambda z.z))} &\to \underline{(\lambda x.x\,x)\,(\lambda z.z)} \\
&\to \underline{(\lambda z.z)\,(\lambda z.z)} \\
&\to \lambda z.z
\end{aligned}
$$

Ordine normale

$$
\begin{aligned}
\underline{(\lambda x.x\,x)\,((\lambda y.y)\,(\lambda z.z))} &\to (\underline{(\lambda y.y)\,(\lambda z.z)})\,((\lambda y.y)\,(\lambda z.z)) \\
&\to \underline{(\lambda z.z)\,((\lambda y.y)\,(\lambda z.z))} \\
&\to \underline{(\lambda y.y)\,(\lambda z.z)} \\
&\to \lambda z.z
\end{aligned}
$$

Osservazioni

- l'argomento x è usato **due volte**
- l'ordine applicativo è più efficiente perché lo valuta una volta sola
- ottimizzare l'ordine normale: **salvare** il risultato della prima valutazione dell'argomento e **riusarlo** per le valutazioni successive

normalizzazione

Teorema (normalizzazione)

Se $M \Leftrightarrow N$ ed N è in forma normale, allora c'è una riduzione in ordine normale $M \Rightarrow N$.

Conseguenze

- se la forma normale di un'espressione esiste, la posso trovare riducendo l'espressione in ordine normale
- questa proprietà **non vale** per l'ordine applicativo

Esempio

Sia $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.x\,x$. Abbiamo:

- $(\lambda x.y)\,\underline{(\omega\,\omega)} \to (\lambda x.y)\,\underline{(\omega\,\omega)} \to \cdots$ ordine applicativo
- $\underline{(\lambda x.y)\,(\omega\,\omega)} \to y$ ordine normale