? → 4 d

10 errori su $20 \cdot 4 \cdot 4 = 320$ $310/320 = 0{,}96875$

$\sim 97\%$

1

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La formula $\forall x \forall y [R(x,y) \to \exists z (R(x,z) \land R(z,y))]$

- ☐ non è un enunciato.
- ☐ per essere valutata in una struttura richiede di assegnare un valore alla x.
- No, ☒ è verificata in $\langle \mathbb{N}, < \rangle$.
- Sì, ☐ è verificata in $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$. Scemo

(b) La funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto -2n^2$

- ☐ è iniettiva. –
- ☐ è suriettiva. –
- ☒ ha immagine contenuta in $\mathbb{Z}$.
- ☒ è tale che $f(n) = f(-n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) La proposizione $(\mathrm{A} \lor \neg \mathrm{B}) \leftrightarrow (\neg(\mathrm{B} \land \neg \mathrm{A}))$

- ☒ è una tautologia.
- ☐ non è soddisfacibile.
- ☒ è conseguenza logica di $\mathrm{A} \lor \neg \mathrm{A}$.
- ☐ ha come connettivo principale $\lor$.

(d) Ricordiamo che $\mathrm{Div}(k)$ è l'insieme dei divisori di k e $|$ la relazione di divisibilità.

- ☐ $\mathrm{Div}(20) \subseteq \mathrm{Div}(24)$.
- ☐ $\langle \mathrm{Div}(27), | \rangle$ NON è un ordine lineare. 1 3 9 27
- ☒ $\mathrm{Div}(36) \cap \mathrm{Div}(24) = \mathrm{Div}(12)$.
- ☐ $\mathrm{Div}(24)$ ha la stessa cardinalità di $\mathrm{Div}(6) \times \mathrm{Div}(6)$.

$2^3 \cdot 3$ $2 \cdot 3$

$4 \cdot 2 = 8$ $4 \times 4 = 16$

2

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La proposizione $(\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{A}) \to \mathrm{B}$ è

- [ ] una tautologia.
- [x] soddisfacibile, ma non valida.
- [ ] una contraddizione.
- [x] logicamente equivalente a B.

(b) La funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + 5$ è

- [x] iniettiva.
- [x] suriettiva.
- [x] biettiva.
- [ ] né iniettiva, né suriettiva.

(c) Sia φ la formula del prim'ordine $\forall x[(R(x,y) \wedge \exists y P(y)) \to \exists z R(f(z), x)]$. Allora

- [ ] le variabili libere di φ sono y e z.
- [x] y ha sia occorrenze libere che vincolate in φ.
- [x] tutte le occorrenze di x sono vincolate.
- [ ] φ è un enunciato.

(d) Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,4\}$ allora

- [x] $A \setminus B = \{1,3\}$.
- [x] $\{2,3,4\} \subseteq A \cup B$.
- [x] $A \cap B \neq \emptyset$.
- [x] $A \times B$ ha 6 elementi.

3

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia φ la formula $\forall x \exists z \neg R(x, z)$.
- ☐ φ NON è un enunciato.
- ☐ $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models \varphi$.
- ☒ $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models \varphi$.
- ☒ φ è soddisfacibile ma non valida.

(b) La funzione $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto -x + 5$
- ☐ non è iniettiva ma è suriettiva.
- ☒ è biettiva.
- ☐ è iniettiva ma non suriettiva.
- ☒ è tale che $x < y$ se e solo se $f(x) > f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$.

(c) La proposizione A $\vee$ (B $\wedge \neg$A)
- ☒ è soddisfacibile.
- ☐ è logicamente equivalente a A $\vee \neg$B.
- ☒ ha come conseguenza logica B $\vee \neg$B.
- ☒ è conseguenza logica di A.

(d) Se $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un numero pari}\}$ e $B = \mathrm{Div}(30)$ è l'insieme dei divisori di 30, allora

1 2 3 5 6 10 15 30

- ☒ $A \cap B = \{2, 6, 10, 30\}$.
- ☒ $\{3, 4, 20\} \subseteq A \cup B$.
- ☐ $A \cup B = \mathbb{N}$.
- ☒ $A \times B$ è infinito.

3,1

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$a_0 = k$$
$$a_{n+1} = a_n \cdot a_n.$$

☒ Se $k = 0$, allora $a_n = 0$ per ogni n.
☒ Se $k = 1$, allora $a_n = 1$ per ogni n.
☒ Se $k = 2$, allora $a_2 = 16$.
☐ Se $k = 3$, allora $a_2 < 80$.

(b) Sia φ la formula $\forall w(w = f(w, z))$.

☒ $\langle \mathbb{R}, + \rangle \models \varphi[z/0]$
☒ $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[z/1, w/1]$
☐ φ richiede di assegnare un valore a w per essere valutata in una struttura.
☒ φ richiede di assegnare un valore a z per essere valutata in una struttura.

(c) La funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto 3^n$

☒ è iniettiva.
☐ è suriettiva.
☐ è tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$.
☒ è tale che $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$.

(d) Se $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r^2 - 5r + 6 = 0\}$ e $B = \mathrm{Div}(36)$ è l'insieme dei divisori di 36, allora

☒ $A \cap B = A$. 2, 3 1 2 3 4 6 9 12 18 36
☐ $A \setminus B \neq \emptyset$.
☒ $A \cup B \subseteq B$.
☐ $A \times B$ è infinito.

4

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La proposizione $(A \to \neg B) \vee (B \to \neg A)$

- ☒ è logicamente equivalente ad $\neg(A \wedge B)$.
- ☐ è una tautologia.
- ☒ è conseguenza logica di $\neg(A \vee \neg A)$.
- ☐ ha come conseguenza logica $\neg(A \vee \neg A)$.

(b) La funzione $f\colon \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle \mapsto \langle 1 - s_1, \ldots, 1 - s_n\rangle$

- ☒ è iniettiva.
- ☒ è suriettiva.
- ☐ ha immagine contenuta in $\{0,1\}^n$ per un opportuno $n \in \mathbb{N}$.
- ☒ è tale che $f \circ f$ è la funzione identità, ovvero $f(f(s)) = s$ per ogni $s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$.

(c) Sia φ la formula $\forall z \forall w[(R(z,w) \wedge R(w,x)) \to R(z,x)]$.

- ☐ φ è un enunciato. -
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, <\rangle \models \varphi[x/n, w/n, z/n]$ per qualsiasi $n \in \mathbb{Z}$.
- ☐ φ ha almeno una occorrenza libera della variabile w.
- ☐ $\mathcal{A} \models \varphi[x/5]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, R^{\mathcal{A}}\rangle$ e $R^{\mathcal{A}} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,5\rangle\}$.

(d) Sia A un insieme infinito e B un insieme finito.

?
none

- ☐ $|A| \le |B|$. -
- ☐ Esiste una suriezione $g\colon B \to A$. -
- ☐ $B \times A$ è finito se $B \neq \emptyset$. -
- ☐ $B \times A$ è infinito se $B = \emptyset$. -

5

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

0 1 2 3
0 1 3 6

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = a_n + (n + 1)$$

- ☒ $a_2 = 3$.
- ☐ $a_3 = 5$.
- ☒ $a_3 = 0 + 1 + 2 + 3$.
- ☒ $a_n = \sum_{i=0}^{n} i$.

(b) La funzione $f \colon \{0, 2, 4\}^{<\mathbb{N}} \to \{0, 1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}}$, $\langle s_1, \dots, s_n\rangle \mapsto \langle \frac{s_1}{2}, \dots, \frac{s_n}{2}\rangle$
- ☒ è iniettiva.
- ☐ è suriettiva.
- ☐ ha immagine contenuta in $\{0, 2\}^{<\mathbb{N}}$.
- No → ☒ è tale che $(f \circ f)(s) \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ per ogni $s \in \{0, 4\}^{<\mathbb{N}}$. s e solo 0 - 4

(c) La proposizione $\neg A \to (A \vee \neg B)$
- ☐ è una tautologia.
- ☒ è logicamente equivalente a $A \vee \neg B$.
- ☐ ha come conseguenza logica $\neg B$.
- ☒ è conseguenza logica di $\neg B$.

(d) Sia $L = \{f, g, h\}$ con f, g simboli di funzione binari ed h simbolo di funzione unario. Sia t_1 il termine $f(x, h(x))$ e t_2 il termine $g(h(x), h(h(x)))$.
- ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, -\rangle \models \varphi_1[x/1]$, dove φ_1 è la formula $t_1 = t_2$.
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, \cdot, +, -\rangle \models \varphi_2[x/0]$, dove φ_2 è la formula $t_1 = t_2$.
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, -\rangle \models \varphi_3[y/0]$, dove φ_3 è la formula $\forall x(t_1 = y)$.
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, -\rangle \models \varphi_4[x/3, y/-9]$, dove φ_4 è la formula $t_2 = y$.

Attenzione! L'interpretazione della funzione h in ciascuna delle strutture precedenti è la funzione **unaria** $- \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $k \mapsto -k$.

1

6

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$a_0 = k$$
$$a_{n+1} = a_n + a_n. \quad 2^n$$

- ☒ Se $k = 0$ allora $a_n = 0$ per ogni n.
- ☐ Se $k = 1$ allora $a_3 \neq 8$.
- ☐ Se $k = 1$ allora $a_n \neq 2^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.
- ☒ Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $a_n = k \cdot 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\langle r_0, r_1 \rangle \mapsto r_0 \cdot r_1 + r_0$

- ☐ è iniettiva.
- ☒ è suriettiva.
- ☐ ha immagine contenuta in $\mathbb{Q}$.
- ☒ è tale che $f(\langle r, 0 \rangle) = r$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

(c) La formula $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \leftrightarrow \neg(\neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B})$

- ☒ è una contraddizione.
- ☐ è logicamente equivalente a $\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B}$.
- ☒ ha come conseguenza logica $\neg\mathrm{A}$.
- ☐ è conseguenza logica di $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$.

$\mathbb{Q}^+$ $\mathbb{N}$

(d) Sia A l'insieme dei numeri razionali positivi e B l'insieme dei numeri interi.

- ☐ $|A| > |B|$.
- ☒ $|A \times B| = |A|$.
- ☒ $|A \cap B| = |A|$.
- ☒ $|A^B| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, dove A^B è l'insieme di tutte le funzioni da B in A.

7

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia φ la formula $f(g(x,y),z) = g(f(x,y),z)$ nel linguaggio $L = \{f, g\}$, dove f e g sono entrambi simboli di funzione binari.

- ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \not\models \varphi[x/0, y/1, z/7]$. -
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \models \psi[x/2, y/2, z/7]$, dove ψ è la formula $\exists x \exists y \varphi$.
- ☒ $\exists x \exists y \varphi$ ha come unica variabile libera z.
- ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \models \varphi[x/2, y/2, z/0]$. -

(b) La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ r \mapsto \langle r^2, r \rangle$

- ☒ è iniettiva.
- ☐ è suriettiva. -
- ☒ ha immagine contenuta in $\{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\} \times \mathbb{R}$.
- ☐ è tale che $f(r) = f(-r)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$. —

(c) La proposizione $\neg(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \vee \neg(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B})$

- ☒ è una tautologia.
- ☐ è logicamente equivalente a A.
- ☐ ha come conseguenza logica $\neg$B.
- ☒ è conseguenza logica di $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$.

(d) Sia A l'insieme dei numeri razionali $\overset{Q^+}{\underbrace{\text{maggiori di } 0}}$ e $\mid$ la relazione di divisibilità su A (ossia dati $q, s \in A$, vale la relazione $q \mid s$ se e solo se esiste $r \in A$ tale che $q \cdot r = s$).

- ☒ $q \mid s$ per ogni $q, s \in A$.
- ☒ $\mid$ è una relazione transitiva su A.
- ☐ $\mid$ NON è una relazione simmetrica su A.
- ☒ $\mid$ è una relazione di equivalenza su A.

8 Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. ± 2 $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

No → ☒ $|A \cap B| > 1$. $= 1$

☐ $A \setminus B = \emptyset$. –

☒ $|B \times A| = |B|$.

☒ $\mathbb{R} \setminus (B \cup A) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq 0 \text{ e } a \neq -2\}$.

(b) La funzione $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto \frac{n}{n+1}$

☒ è iniettiva.

☐ è suriettiva.

☒ ha immagine contenuta in $\mathbb{Q}$.

☒ ha immagine contenuta in $[0; 1)$.

(c) Sia $L = \{R, f, h\}$ con R simbolo di funzione binario, f simbolo di funzione binario e h simbolo di funzione unario. Sia t_1 il termine $f(x, h(y))$ e t_2 il termine $h(f(x, y))$.

☐ $\langle \mathbb{Z}, <, +, - \rangle \models R(t_1, t_2)[x/2, y/3]$. –

☒ $\langle \mathbb{Z}, <, +, - \rangle \models \varphi[x/2, y/3]$, dove φ è la formula $\exists x \exists y \neg R(t_1, t_2)$.

☒ $\exists x \exists y \neg R(t_1, t_2)$ è un enunciato.

☐ $\langle \mathbb{Z}, <, +, - \rangle \models \psi[x/2, y/3]$, dove ψ è la formula $\forall x \forall y R(t_1, t_2)$. –

Attenzione! L'interpretazione della funzione h in ciascuna delle strutture precedenti è la funzione **unaria** $- \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ k \mapsto -k$.

(d) Sia $\mid$ la relazione di divisibilità sui numeri interi (ossia dati $q, s \in \mathbb{Z}$, vale la relazione $q \mid s$ se e solo se esiste $r \in \mathbb{Z}$ tale che $q \cdot r = s$).

☐ $q \mid s$ per ogni $q, s \in \mathbb{Z}$. –

☒ $\mid$ è una relazione riflessiva e transitiva su $\mathbb{Z}$.

☒ $3 \mid -3$ e $-3 \mid 3$.

☐ $\mid$ è una relazione di ordine su $\mathbb{Z}$. - (riflessiva, trans, e antisimm)

Domande a risposta multipla

9

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali delle seguenti sono formalizzazioni corrette (in $\mathbb{N}$) dell'affermazione

Due numeri consecutivi non possono essere entrambi pari.

nel linguaggio costituito dai simboli + e 1 (interpretati nella maniera usuale)?

- ☐ $\forall x \forall y [y = x + 1 \rightarrow \exists z (x = z + z) \vee \exists z (y = z + z)]$.
- ☒ $\forall x \forall y [y = x + 1 \rightarrow \neg(\exists z (x = z + z) \wedge \exists z (y = z + z))]$.
- ☒ $\forall x \forall y \neg(\exists z (x = z + z) \wedge \exists z (x + 1 = z + z))$.
- ☐ $\forall x \forall y [y = x + 1 \rightarrow (\neg\exists z (x = z + z) \wedge \neg\exists z (y = z + z))]$.

(b) La relazione R su $\mathbb{Z}$ definita da $x \mathrel{R} y$ se e solo se x e y sono due interi consecutivi (ovvero $|x - y| = 1$)

- ☐ è riflessiva. –
- ☒ è simmetrica.
- ☐ antisimmetrica. –
- ☐ transitiva. –

(c) Sia $A = \{a, b, c\}$. L'insieme $\mathscr{P}(A)$ delle parti di A

- ☒ ha 8 elementi.
- ☒ ha un massimo e un minimo rispetto alla relazione $\subseteq$.
- ☒ contiene almeno due elementi x e y tali che $x \cap y \neq \emptyset$.
- ☒ contiene almeno due elementi x e y tali che $x \cap y = \emptyset$.

(d) Sia $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binario. Sia $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ un ordine, ovvero una L-struttura tale che $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva su A. Se sappiamo che $\mathcal{A} \models \exists x \forall y R(x, y) \wedge \forall x \exists y R(x, y)$, allora

esista succ.

$\mathbb{N}$. $\leq$ ma $\{0, 1\}$

- ☒ $\mathcal{A}$ ha un minimo.
- no ☒ ~~certamente $\mathcal{A}$ non ha un massimo.~~ no — in questo rifl.
- no ☒ $\mathcal{A}$ può avere sia un minimo che un massimo.
- ☐ può essere che $\mathcal{A}$ non abbia né massimo né minimo.

non $\lneq$

10

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano P e Q due proposizioni tali che $\mathrm{Q} \models \mathrm{P}$. Allora

- ☒ $\mathrm{Q} \models \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$.
- ☒ $\mathrm{Q} \wedge \neg\mathrm{P}$ è certamente insoddisfacibile.
- ☒ $\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}$ è certamente una tautologia.
- ☐ $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ è certamente una tautologia.

(b) La funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

- ☐ È iniettiva.
- ☒ È suriettiva.
- ☒ È tale che $f(x, y) = f(-x, -y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- ☒ È tale che $f(x, x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) Sia φ la formula $\forall x(\exists y R(y, x) \rightarrow R(x, y))$.

- ☐ φ è un enunciato.
- ☐ Tutte le occorrenze della variabile y sono vincolate.
- ☐ Tutte le occorrenze della variabile y sono libere.
- ☒ Tutte le occorrenze della variabile x sono vicolate.

(d) Si ricordi che per $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

- ☐ Esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e $[a; b] = \emptyset$.
- ☒ Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq b$, l'insieme $[a; b] \cap \mathbb{N}$ è finito.
- ☐ Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq b$, l'insieme $[a; b] \cap \mathbb{Q}$ è infinito.
- ☒ $[0; 1] \cap \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x = 0\}$.

11

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia P una tautologia. Allora

- ☒ P è soddisfacibile.
- ☐ Per ogni Q, la proposizione $P \to Q$ è una tautologia.
- ☒ Per ogni Q, la proposizione $Q \to P$ è una tautologia.
- ☒ $\neg P$ è una contraddizione.

(b) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2$. Allora

- ☒ f è iniettiva.
- ☒ l'immagine di f è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$.
- ☒ $f(f(n)) \neq 4$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ $f(n) > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sia X l'insieme delle nazioni europee e sia R la seguente relazione binaria su X:

$$x \mathrel{R} y \quad \text{se e solo se} \quad x \text{ confina con } y.$$

- ☐ R è una relazione transitiva.
- ☒ R è una relazione simmetrica.
- ☐ R è un ordine.
- ☒ Esistono $x, y \in X$ tali che *non* vale $x \mathrel{R} y$.

(d) Sia φ la formula

$$\forall x (P(x,y) \to \exists y \forall z P(z,y))$$

- ☐ φ è un enunciato.
- ☐ Le variabili che occorrono vincolate (almeno una volta) in φ sono: x e y.
- ☒ La variabile y occorre sia libera che vincolata nella formula φ.
- ☐ La variabile z occorre sia libera che vincolata nella formula φ.

12

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$

(a) Sia A l'insieme dei numeri razionali positivi e B l'insieme dei numeri interi.

- ☐ $|A| > |B|$. –
- ☒ $|A \times B| = |A|$.
- ☒ $|A \cap B| = |A|$.
- No ☒ $|A^B| = |2^{\mathbb{N}}|$. $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$ $|A^B| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

(b) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $r \mapsto \langle r^2, r\rangle$

- ☒ è iniettiva.
- ☐ è suriettiva. –
- ☒ ha immagine contenuta in $\{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\} \times \mathbb{R}$.
- ☐ è tale che $f(r) = f(-r)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

(c) Sia data la formula $\varphi \equiv (f(g(x, y), z) = g(f(x, y), z))$ nel linguaggio $L = \{f, g\}$ con due simboli di funzioni binari f, g:

- ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot\rangle \not\models \varphi[x/0, y/1, z/7]$. –
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot\rangle \models \exists x \exists y \varphi[x/2, y/2, z/7]$.
- ☒ $\exists x \exists y \varphi$ ha come unica variabile libera z.
- ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot\rangle \models \varphi[x/2, y/2, z/0]$. –

(d) La formula $\neg \mathrm{A} \to (\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B})$

- ☐ è una tautologia.
- ☒ è logicamente equivalente a $\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B}$.
- ☐ Ha come conseguenza logica $\neg \mathrm{B}$.
- ☒ È conseguenza logica di $\neg \mathrm{B}$.

13

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia $L = \{P, f, a\}$ con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e a simbolo di costante. Quali delle seguenti sono L-formule?

- ☐ $\exists x\,(P(f(y,x),a) = a)$. 2 storiche.
- ☐ $P(a, f(f(x), f(x)))$.
- ☐ $\forall a\, P(a,a)$.
- ☐ $\exists y\,(f(x,y) = a) \land \forall y\, P(x,y)$.

(b) Sia R la relazione "avere lo stesso peso".

- ☐ R è una relazione simmetrica.
- ☐ R è una relazione di ordine.
- ☐ R è una relazione di equivalenza.
- No ☐ R è una relazione di pre-ordine. $\supseteq$ equiv.

(c) Sia $\varphi(x)$ la formula $\exists y\,(y = f(a,a) \land g(y,x) = a)$ nel linguaggio $L = \{f, g, a\}$. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 1\rangle$.

- ☐ $\mathcal{A} \models \varphi[x/2^{-1}]$.
- ☐ $\mathcal{A} \models \varphi[x/2]$.
- ☐ $\mathcal{A} \models \exists x\, \varphi(x)$.
- ☐ $\mathcal{A} \models \forall x\, \varphi(x)$.

(d) La formula $\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})$

- ☐ è conseguenza logica di A.
- ☐ è logicamente equivalente a A.
- ☐ è vera solo quando A e B sono false, mentre C è vera.
- ☐ è falsa solo quando A e B sono vere, mentre C è falsa.

14

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia P la proposizione $A \wedge (\neg A \to B) \to \neg A$.

- ☒ P è soddisfacibile.
- ☒ ¬P è soddisfacibile.
- ☒ Per ogni valutazione v, il valore di $v(P)$ non dipende dal valore di $v(B)$.
- ☐ P è vera se e solo se B è vera.

(b) La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - x$

- ☐ è tale che $x \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ☒ è tale che $f(x) = 0$ per qualche $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ è iniettiva.
- ☐ è suriettiva.

(c) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- ☐ Se A è un insieme finito, anche $A^{<\mathbb{N}}$ lo è.
- ☐ Se A è infinito, allora $A^{<\mathbb{N}}$ è un insieme numerabile.
- ☐ Se esiste una suriezione $f\colon A \to B$, allora $|A| \leq |B|$.
- ☒ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

$R \overset{?}{=} R \times N = [0,1) \times N = R +$

(d) Sia $L = \{R, f, a\}$ con R simbolo di relazione unario, f simbolo di funzione binario e a simbolo di costante. Sia φ la stringa

$$(\exists x((\forall y(R(f(x,y)))) \wedge ((R(a)) \to (f(a,a) = a))))$$

- ☒ φ è una formula del prim'ordine nel linguaggio L.
- ☐ φ contiene variabili libere.
- ☒ L'altezza di φ è 3.
- ☐ Nel raggio d'azione di $\forall y$ compare il simbolo di costante a.

15

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia P una contraddizione e Q una proposizione qualsiasi.

- ☒ $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ è una tautologia.
- ☐ $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ è soddisfacibile.
- ☒ $\mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ è logicamente equivalente a $\neg\mathrm{Q}$.
- ☐ $\mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ è logicamente equivalente a Q.

(b) Sia A un insieme non vuoto.

- ☐ $A^{<\mathbb{N}}$ è finito quando A lo è.
- ☒ $A^{<\mathbb{N}}$ è numerabile se $|A| \leq |\mathbb{N}|$. N^N num
- ☒ $A^n \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- ☒ Quando $|A| = 1$ si ha che $|A^{\mathbb{N}}| < |A^{<\mathbb{N}}|$.

(c) La relazione R su $\mathbb{N}$ definita da $x \mathrel{R} y$ se e solo se $|x - y| \leq 2$ è

- ☒ riflessiva.
- ☒ simmetrica.
- ☐ transitiva.
- ☐ una relazione d'equivalenza.

(d) Consideriamo le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 4$.

- ☒ La funzione g è una biezione.
- ☐ La funzione f è una biezione.
- ☐ La funzione $f \circ g$ è una biezione.
- ☐ La funzione $g \circ f$ è una biezione.

1C

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia Q una tautologia e P una proposizione soddisfacibile ma non valida.
- ☒ $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ è una tautologia.
- ☐ $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ non è logicamente equivalente a P.
- ☐ $\mathrm{Q} \models \mathrm{P}$ è vero.
- ☒ $\mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ è logicamente equivalente a P.

(b) Siano A e B insiemi non vuoti.
- ☐ $A \times B$ è *finito* se almeno uno tra A e B lo è. −
- ☒ $|A^B| = 1$ se e solo se $|A| = 1$. ~~A → B~~ B → A
- ☒ Se $A \subseteq B$ allora $A^n \subseteq B^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- ☒ Se $A \subseteq B$ e $|B| \leq |A|$ allora $|A| = |B|$. $x|y$

(c) La relazione S su $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definita da $x\ S\ y$ se e solo se $\exists z(x \cdot z = y)$
- ☒ è riflessiva.
- ☐ non è simmetrica.
- ☒ è transitiva.
- ☐ non è una relazione d'equivalenza.

(d) Consideriamo le funzioni $f\colon \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q},\ \ x \mapsto \frac{1}{x-1}$
e $g\colon \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q},\ \ x \mapsto \frac{1}{x} + 1$.
- ☒ La funzione g è iniettiva.
- No ☐ 0 è nel codominio di f. −
- ☒ $(g \circ f)(2) = 2$. codominio non immagine
- no ☐ 1 è nel codominio di g. −

17

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano P e Q proposizioni tali che P $\models$ Q.

- ☐ Se P è una tautologia allora anche Q lo è.
- ☐ P $\wedge \neg$Q è soddisfacibile.
- ☐ Se Q è una contraddizione allora anche P lo è.
- ☐ Necessariamente vale anche Q $\models$ P.

(b) Sia $f\colon A \to B$ una funzione iniettiva.

- ☐ Per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ contiene esattamente un elemento.
- ☐ Se B è finito anche A lo è.
- ☐ Se $|A| = |B|$ allora f è anche suriettiva.
- ☐ Se B è infinito anche A lo è.

(c) Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ e sia φ la formula $\forall x[(f(y,x) = z) \wedge \exists z(f(z,z) = x)]$.

- ☐ L'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}^2$. $\emptyset \subseteq N^2$
- ☐ L'insieme delle variabili libere di φ è $\{y, z\}$.
- ☐ φ è un enunciato.
- ☐ L'altezza di φ è 3.

(d) Siano A, B e C insiemi non vuoti.

- ☐ $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (A \cup C) \setminus B$.
- ☐ Se $C \cap (A \cap B) = \emptyset$ allora $C \cap (A \cup B) = \emptyset$.
- ☐ Se $C \cap (A \cup B) = \emptyset$ allora $C \cap (A \cap B) = \emptyset$
- ☐ Se $A \times B \subseteq A \times C$ allora $B \subseteq C$.

18

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? $\mathbb{N} \subseteq$

- ☒ $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Q}\}$ $\to \subseteq \mathbb{Q}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 2 = 0\}$ –
- ☒ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$ $\to \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$
- ☐ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \vee y \notin \mathbb{Q}\}$ –

(b) Sia $f : A \to B$ una funzione suriettiva.

- ☐ Per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ contiene esattamente un elemento. –
- ☒ Se A è finito anche B lo è.
- ☐ Se $|A| = |B|$ allora f è anche iniettiva. –
- ☒ Se B è infinito anche A lo è.

(c) Sia φ la formula $\forall x \exists z \neg R(x, z)$.

- ☐ φ non è un enunciato. –
- ☐ $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models$ φ. –
- ☒ $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models$ φ.
- ☒ φ è soddisfacibile ma non valida.

$$\forall x \exists z \begin{cases} x > z \\ z > x \end{cases}$$

– (d) Sia a_m, $m \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$a_0 = n$$
$$a_{m+1} = 2a_m.$$

- ☒ Se $n = 0$, allora $a_m = 0$ per ogni m.
- ☐ Se $n = 1$, allora $a_m = 1$ per ogni m.
- ☒ Se $n = 2$ allora $a_m = 2^{m+1}$ per ogni m.
- ☐ Se $n = 3$ allora $a_3 < 10$.

$n \quad 2n \quad 2^2 n$

$2^m n$

$2^m \cdot 2 = 2^{m+1}$

$2^3 \cdot 3$

Domande a risposta multipla

19

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia X l'insieme degli abitanti di Torino e R la relazione binaria su X definita da $x\ R\ y$ se e solo se x abita a meno di 50 metri da y. $|x-y| \leq 50$

- ☒ R è una relazione riflessiva.
- ☐ R è una relazione transitiva.
- ☒ R è una relazione simmetrica.
- ☐ R è una relazione d'equivalenza.

(b) Siano A e B due insiemi infiniti.

- ☐ $A \cap B$ deve anch'esso essere infinito.
- ☒ $A \cup B$ deve anch'esso essere infinito.
- ☐ Se A è più che numerabile e $B \subseteq A$, anche B deve essere più che numerabile.
- ☒ Se A è numerabile e $B \subseteq A$, allora $|B| = |\mathbb{N}|$.

(c) Sia φ la formula $\forall x \forall z\, [x = y \to f(x, z) = z]$.

- ☒ φ non è un enunciato.
- ☐ Nessuna variabile occorre libera in φ.
- ☒ $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[y/0]$.
- ☒ L'insieme di verità di φ in $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ è costituito da un solo elemento.

(d) La funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(q) = 2q^2 + 1$ è

- ☐ iniettiva ma non suriettiva.
- ☐ suriettiva ma non iniettiva.
- ☐ biettiva.
- ☒ né iniettiva, né suriettiva.