[redacted]one di proprietà di funzioni di ordine [redacted]e

[redacted]ca Padovani
Linguaggi e Paradigmi di Programmazione

principio di **estensionalità**

- Come dimostrare $\forall f : f \texttt{ . id} = f$? Le definizioni di `.` e `id` non aiutano!
- Quando possiamo dire che due funzioni sono "uguali"?

Definizione (principio di estensionalità)

*Due funzioni f e g sono **uguali** se producono lo stesso risultato quando sono applicate allo stesso argomento. Formalmente:*

$$(\forall x : f\ x = g\ x) \iff f = g$$

Nota

- è il principio che giustifica la regola di η-riduzione nel λ-calcolo

proprietà della composizione funzionale

$\forall f : f \,.\, \texttt{id} = f$

$(f \,.\, \texttt{id})\; x$

$\quad = f\; (\texttt{id}\; x)$ $(\texttt{.})$

$\quad = f\; x$ $(\texttt{id})$

$\forall f, g, h : f \,.\, (g \,.\, h) = (f \,.\, g) \,.\, h$ lato sinistro

$(f \,.\, (g \,.\, h))\; x$

$\quad = f\; ((g \,.\, h)\; x)$ $(\texttt{.})$

$\quad = f\; (g\; (h\; x))$ $(\texttt{.})$

$\forall f, g, h : f \,.\, (g \,.\, h) = (f \,.\, g) \,.\, h$ lato destro

$((f \,.\, g) \,.\, h)\; x$

$\quad = (f \,.\, g)\; (h\; x)$ $(\texttt{.})$

$\quad = f\; (g\; (h\; x))$ $(\texttt{.})$

legge di **fusione**

Teorema (legge di fusione)

Se

1. $f\ a = b$
2. $f\ (g\ x\ y) = h\ x\ (f\ y)$

allora

3. $f\ .\ \texttt{foldr}\ g\ a = \texttt{foldr}\ h\ b$

- utile per dimostrare una famiglia di equivalenze senza usare l'induzione esplicitamente

dimostrazione della legge di fusione

$P([])$

$(f\ .\ \texttt{foldr}\ g\ a)\ []$

$$\begin{aligned}
&= f\ (\texttt{foldr}\ g\ a\ []) && (.)\\
&= f\ a && (\texttt{foldr.1})\\
&= b && (\text{ipotesi 1})\\
&= \texttt{foldr}\ h\ b\ [] && (\texttt{foldr.1})
\end{aligned}$$

$P(xs) \Rightarrow P(x : xs)$

$(f\ .\ \texttt{foldr}\ g\ a)\ (x : xs)$

$$\begin{aligned}
&= f\ (\texttt{foldr}\ g\ a\ (x : xs)) && (.)\\
&= f\ (g\ x\ (\texttt{foldr}\ g\ a\ xs)) && (\texttt{foldr.2})\\
&= h\ x\ (f\ (\texttt{foldr}\ g\ a\ xs)) && (\text{ipotesi 2})\\
&= h\ x\ ((f\ .\ \texttt{foldr}\ g\ a)\ xs) && (.)\\
&= h\ x\ ((\texttt{foldr}\ h\ b)\ xs) && (\text{ipotesi induttiva})\\
&= \texttt{foldr}\ h\ b\ (x : xs) && (\texttt{foldr.2})
\end{aligned}$$

$(+\,1)\ .\ \mathrm{sum} = \mathtt{foldr}\ (+)\ 1$

Usando $\mathtt{sum} = \mathtt{foldr}\ (+)\ 0$ si riscrive l'equazione nella forma

$$(+\,1)\ .\ \mathrm{foldr}\ \ (+)\ 0 = \mathtt{foldr}\ (+)\ 1$$

in modo che sia applicabile la legge di fusione prendendo

$$f = (+\,1) \qquad g = (+) \qquad a = 0 \qquad h = (+) \qquad b = 1$$

Verifica dell'ipotesi $f\ a = b$

$$(+\,1)\ 0 = 0 + 1 = 1$$

Verifica dell'ipotesi $f\ (g\ x\ y) = h\ x\ (f\ y)$, lato sinistro

$$(+\,1)\ ((+)\ x\ y) = (+\,1)\ (x + y) = (x + y) + 1$$

Verifica dell'ipotesi $f\ (g\ x\ y) = h\ x\ (f\ y)$, lato destro

$$(+)\ x\ ((+\,1)\ y) = x + ((+\,1)\ y) = x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

$(* \, 2) \; . \; \texttt{sum} = \texttt{foldr} \; ((+) \; . \; (* \, 2)) \; 0$

Sim

Usando $\texttt{sum} = \texttt{foldr} \; (+) \; 0$ abbiamo

$$f = (* \, 2) \qquad g = (+) \qquad a = 0 \qquad h = (+) \; . \; (* \, 2) \qquad b = 0$$

Verifica dell'ipotesi $f \; a = b$

$$(* \, 2) \; 0 = 0 * 2 = 0$$

Verifica dell'ipotesi $f \; (g \; x \; y) = h \; x \; (f \; y)$, lato sinistro

$$(* \, 2) \; ((+) \; x \; y) = (* \, 2) \; (x + y) = (x + y) * 2$$

Verifica dell'ipotesi $f \; (g \; x \; y) = h \; x \; (f \; y)$, lato destro

$$\begin{aligned} ((+) \; . \; (* \, 2)) \; x \; ((* \, 2) \; y) &= ((+) \; . \; (* \, 2)) \; x \; (y * 2) = ((+) \; ((* \, 2) \; x)) \; (y * 2) \\ &= (+) \; (x * 2) \; (y * 2) = (x * 2) + (y * 2) \\ &= (x + y) * 2 \end{aligned}$$

$\texttt{map}\ f_1\ .\ \texttt{map}\ f_2 = \texttt{map}\ (f_1\ .\ f_2)$

Usando $\texttt{map}\ f = \texttt{foldr}\ (\lambda x.\lambda xs.f\ x : xs)\ []$ abbiamo

$$f = \texttt{map}\ f_1 \quad g = \lambda x.\lambda xs.f_2\ x : xs \quad a = b = [] \quad h = \lambda x.\lambda xs.(f_1\ .\ f_2)\ x : xs$$

Verifica dell'ipotesi $f\ a = b$

$$\texttt{map}\ f_1\ [] = []$$

Verifica dell'ipotesi $f\ (g\ x\ y) = h\ x\ (f\ y)$, lato sinistro

$$\begin{aligned} &\texttt{map}\ f_1\ ((\lambda x.\lambda xs.f_2\ x : xs)\ x\ y) \\ &\quad = \texttt{map}\ f_1\ (f_2\ x : y) && (\beta\text{-riduzioni}) \\ &\quad = f_1\ (f_2\ x) : \texttt{map}\ f_1\ y && (\texttt{map.2}) \end{aligned}$$

Verifica dell'ipotesi $f\ (g\ x\ y) = h\ x\ (f\ y)$, lato destro

$$\begin{aligned} &(\lambda x.\lambda xs.(f_1\ .\ f_2)\ x : xs)\ x\ (\texttt{map}\ f_1\ y) \\ &\quad = (f_1\ .\ f_2)\ x : \texttt{map}\ f_1\ y && (\beta\text{-riduzioni}) \\ &\quad = f_1\ (f_2\ x) : \texttt{map}\ f_1\ y && (\texttt{.}) \end{aligned}$$

esercizi

Dimostrare le seguenti proprietà

1. `id` . $f = f$ ovvio
2. `flip . flip` $=$ `id`
3. `curry . uncurry` $=$ `id`
4. `iter` n `id` $=$ `id` per ogni $n \geq 0$

Usando la legge di fusione dimostrare le seguenti proprietà

5. `sum . map length` $=$ `foldr` $(($`+`$)$ `. length`$)$ 0
6. `product . concat` $=$ `foldr` $((*)$ `. product`$)$ 1