1°

Lezione 12

Approssimazione locale di funzioni

Siano $c \in \mathbb{R}$, $I(c)$ un suo intorno
ed
$f: I(c) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x=c$ e continua su $I(c)$.

Allora abbiamo visto che se $f'(c) \neq 0$ si ha

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{(x-c) f'(c)} = 1 \quad \text{ovvero} : \quad \boxed{f(x) \sim f(c) + f'(c)(x-c) \text{ per } x \to c.}$$

DEF. $\underbrace{T_{1,c}(x) := f(c) + f'(c)(x-c)}_{\text{è la tang. al grafico di } f \text{ in } (c, f(c))}$ è il POLINOMIO di TAYLOR di ORDINE 1 di f CENTRATO in c

ES. $f(x) = e^x \quad c = 0, \quad f(0) = 1$
$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1 \quad \rightarrow \quad e^x \sim \underbrace{1+x}_{T_{1,0}(x)}$ per $x \to 0$

errori

Che errore commetto prendendo il valore di $T_{1,c}(x)$ al posto di $f(x)$?

- in $x = c$ $\quad T_{1,c}(c) = f(c) \Rightarrow$ non commetto alcun errore
- $E_1(x) = |f(x) - T_{1,c}(x)|$ è l'errore.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ e } T_{1,c} \text{ sono continue} \\ |\cdot| \text{ è continuo} \end{array}\right\} \Rightarrow E_1(x)$ è una f.ne continua,

Allora: $\quad \lim_{x \to c} E_1(x) = E_1(c) = 0$

quindi (def. di limite):

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta : 0 < |x-c| < \delta \implies E_1(x) < \varepsilon$$

Conclusione: l'errore è piccolo a piacere, pur di prendere x sufficientemente vicino a c.

parabola

Riusciamo a migliorare l'approssimazione del valore di $f(x)$ in prossimità di $x=c$ prendendo, invece di una retta, un polinomio di ordine 2, o magari di ordine n?

Per capire come fare notiamo che $T_{1,c}(x)$ ha queste caratteristiche:

$$(1)\begin{cases} T_{1,c}(c) = f(c) \\ T'_{1,c}(c) = f'(c) \end{cases}$$

pare quindi naturale cercare $T_{2,c}(x)$ tale che:

$$(2)\begin{cases} (1) \\ T''_{1,c}(c) = f''(c) \end{cases}$$

- Esiste un polinomio di II° ordine che soddisfa (2)?
- Se esiste, è unico?

Polinomio di II° ordine che in $x=c$ vale $f(c)$:

trovo parametri

$$\boxed{T_{2,c}(x) = a(x-c)^2 + b(x-c) + d}$$

$$T_{2,c}(c) = d \iff \boxed{d = f(c)}$$

$$T'_{2,c}(x) = 2a(x-c) + b$$

$$T'_{2,c}(c) = f'(c) \iff \boxed{b = f'(c)}$$

$$T''_{2,c}(x) = 2a$$

$$T''_{2,c}(c) = f''(c) \iff \boxed{a = \frac{f''(c)}{2}}$$

a, b, d sono determinate in modo univoco

$\Rightarrow$ l'unico polinomio di II° ordine che soddisfa (2) è:

$$\boxed{T_{2,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2}.$$

POLINOMIO di TAYLOR di II° ORDINE di f in $x=c$

Taylor Generico

Iterando questo ragionamento si arriva al seguente risultato:

Teorema. Data $f: I(c) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x=c$, esiste un unico polinomio di ordine n, $T_{n,c}(x)$ tale che:

$$\begin{cases} T_{n,c}^{(k)}(c) = f^{(k)}(c) \\ \text{per ogni } k = 0 \dots n \end{cases}$$

Tale polinomio si chiama POLINOMIO di TAYLOR di ORDINE n per f CENTRATO in $x=c$. ed è:

$$\boxed{T_{n,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dots \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n$

Notazione
- $f^{(k)}(c)$ è la derivata di ordine k di f in $x=c$

  $\leadsto f^{(0)}(c) = f(c)$

- $T_{n,c}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^k}{k!}$

  dove ricordiamo che $0! = 1$

DEF. Quando $c=0$, il Polinomio di Taylor viene chiamato POLINOMIO di McLAURIN.

ES. $f(x) = e^x$

$f^{(k)}(x) = e^x$ per ogni $k \geq 0$

$f^{(k)}(0) = 1$ per ogni $k \geq 0$

$\Rightarrow T_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \frac{1}{n!}x^n$

$\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$

$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$

- Cosa possiamo dire dell'errore commesso prendendo $T_{n,c}(x)$ al posto di $f(x)$?

$\rightsquigarrow$ mi aspetto che $E_2(x) \leq E_1(x)$ ... e anche

$$E_n(x) \leq E_{n-1}(x) \quad , \forall n \geq 1$$

dove: $E_k(x) = |f(x) - T_{k,c}(x)|$.

Possiamo anche scrivere:

$$\boxed{\underset{\text{approssimare}}{f(x) \text{ da}} = T_{n,c}(x) + \text{"RESTO"}}$$

$E_n(x) = |\text{"RESTO"}|$

quale comportamento mi aspetto dal "RESTO"?

- $\lim_{x \to c} \text{"RESTO"} = 0$
- Fissato x, "RESTO" decresce al crescere di n

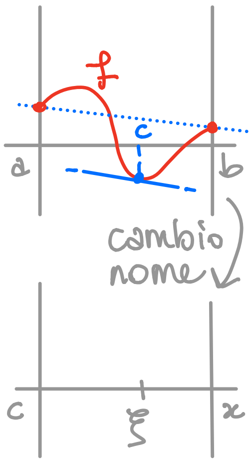
Rileggiamo il Teorema di Lagrange in questi termini:

sotto opportune ipotesi su $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si ha che

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

ovvero:

$$\exists c \in (a,b) : f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$



Cambiamo nome ai punti:

$b \rightsquigarrow x \quad a \rightsquigarrow c \quad c \rightsquigarrow \xi$

e leggiamo il Teorema di Lagrange:

$$\exists\, \xi \in [c,x] : \quad f(x) = f(c) + f'(\xi)(x-c)$$

è $T_{0,c}(x)$!!

$\Rightarrow$ RESTO $= f'(\xi)(x-c)$ è il resto di "ordine 0"

Formula di Taylor con il resto di Lagrange

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile $(n+1)$ volte

Allora: $\forall c, x \in (a,b)$, $\exists\, \xi \in (c,x)$ (o in (x,c))

$$\boxed{f(x) = T_{n,c}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}$$

Possiamo stimare l'errore commesso approssimando $f(x)$ con $T_{n,c}(x)$, infatti:

$$E_n(x) = |f(x) - T_{n,c}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right|$$

$$= \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-c|^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-c|^{n+1}}$$

dove $\boxed{M = \max\limits_{\substack{\xi \in [c,x] \\ (\xi \in [x,c])}} |f^{(n+1)}(\xi)|}$ ammesso che $f^{(n+1)}$ si continua (si usa il Teorema di Weierstrass)

ESERCIZIO. Che errore commetto approssimando

$$\sqrt{e}$$

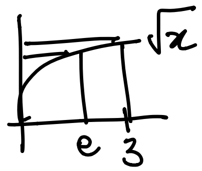
con il polinomio di McLaurin di e^x di ordine 3? E con quello di ordine 5? E di ordine n?

McLaurin $\rightsquigarrow$ $c=0$

$x = \frac{1}{2}$ $\quad (\sqrt{e} = e^{1/2})$

$n = 3$

$$e^{1/2} - T_{3,0}(1/2) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^4 \quad \text{per qualche } \xi \in (0, 1/2)$$



$$f^{(4)}(\xi) = e^{\xi}$$

e $\max_{\xi \in [0,1/2]} e^{\xi} = e^{1/2} < 3^{1/2}$ $\quad$ la funzione $\sqrt{\cdot}$ è monotona $\uparrow$ ed $e < 3$

quindi: $$\left|\sqrt{e} - T_{3,0}(1/2)\right| \le \frac{\sqrt{3}}{4!}\,\frac{1}{2^4}$$

stima errore

Approssimazione con $T_{5,0}(1/2)$:

- la stima di $f^{(6)}(\xi)$ è la stessa

$$\Rightarrow \quad E_5(1/2) \le \frac{\sqrt{3}}{6!\,2^6}$$

Approssimazione con $T_{n,0}(1/2)$:

$$E_n(1/2) \le \frac{\sqrt{3}}{n!\,2^n}$$

al crescere di n il valore con cui si stima l'errore diminuisce.