Lezione 8

Limiti infiniti all'infinito

DEF. Data $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$
si dice che f ammette limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

se: $\boxed{\forall M>0\ \exists N>0 : x>N \Rightarrow f(x)>M}$

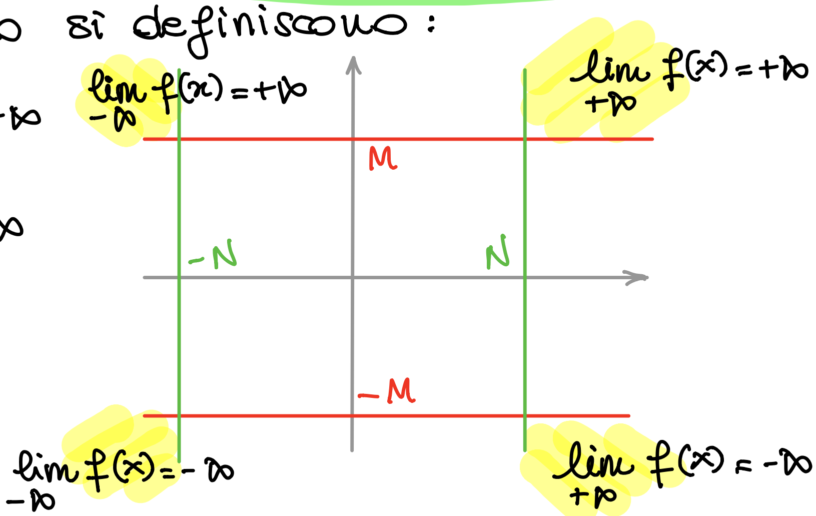
$(+\infty)_{+\infty}$

In modo analogo si definiscono:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



$\forall M>0\ \exists N>0 : x<-N \Rightarrow f(x)<-M.$

in un unico def

Attraverso la definizione di intorno e di $\overline{\mathbb{R}}$ possiamo dare una definizione unificata di limite:

dati $c,\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, $\boxed{\lim_{x\to c} f(x)=\ell}$

significa:

$$\boxed{\forall I_r(\ell), \exists I_s(c) : x\in I_s(c)\setminus\{c\} \Rightarrow f(x)\in I_r(\ell)}$$

$\rightsquigarrow$ Se ℓ o c sono "infiniti", $I_r(\ell)=(r,+\infty)$ oppure $(-\infty,r)$

Algebra (parziale) dei limiti infiniti

Siano $c \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

ed f, g, h, k tali per cui:

- $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = +\infty$ — infiniti
- $\lim_{x \to c} k(x) = 0^+$ — infinitesimo

Allora:

- $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$
- $\lim_{x \to c} [g(x) + h(x)] = +\infty$
- se ~~$\ell \neq 0$~~ $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $\lim_{x \to c} g(x) \cdot h(x) = +\infty$
- se $\ell \neq 0$ $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{k(x)} = +\infty$

OSS. → Perchè PARZIALE? Perchè non siamo in grado ad esempio di dare una regola per stabilire il risultato di: $\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{h(x)}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

o di $\lim_{x \to c} k(x) g(x)$ $[0 \cdot \infty]$

Teoremi di permanenza del segno

1° Teorema di Permanenza del segno

Siano $c, \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ ed $f: \underbrace{I_r(c) \setminus \{c\}}_{\text{se } c \text{ è finito}} \to \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell .$$

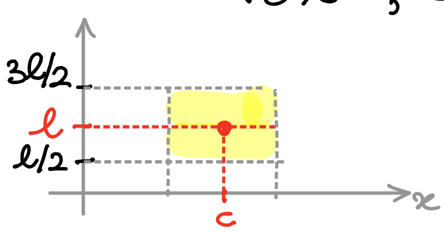
Allora:
- se $\underset{(\text{opp. } +\infty)}{\ell > 0}$ allora $f(x) > 0$ definitiv. per $x \to c$
- se $\underset{(\text{opp. } -\infty)}{\ell < 0}$ allora $f(x) < 0$ definit. per $x \to c$

dim

DIM. (Nel caso ℓ finito e > 0)

L'ipotesi è che $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists I_r(c) : x \in I_r(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$



Sappiamo che $\ell > 0$; scegliamo quindi $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$

Allora $f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$ significa $|f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}$

ovvero $\underbrace{-\ell/2 < f(x) - \ell < \ell/2}_{\text{sommando } \ell \text{ a destra e a sinistra}}$

si ottiene: $f(x) > \frac{\ell}{2} \ (> 0) \ , \ \forall x \in I_r(c) \setminus \{c\}$

ovvero definitivamente per $x \to c$. ∎

OSS. Questo risultato mi dice che "se il limite di f è strettam. positivo, allora la f.ne stessa è "definitivamente" strettamente positiva (risp. negativa).

2° Teorema di Permanenza del segno

Siano $c, \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ ed $f: \underbrace{I_r(c)\setminus\{c\}}_{\text{se } c \text{ è finito}} \to \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell.$$

Allora:
- se $f(x) \geq 0$ definitiv. per $x \to c$ allora $\ell \geq 0$,
- se $f(x) \leq 0$ definitiv. per $x \to c$ allora $\ell \leq 0$;

dim

Nota: anche se fosse $f > 0$ (o $f < 0$) la tesi rimarrebbe $\ell \geq 0$ (o $\ell \leq 0$).

ES. $f(x) = x^2$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ed $f(x) > 0$ $\forall x \neq 0$.

DIM. Dimostriamo che: $f(x) \geq 0$ definitiv. per $x \to c$ $\Rightarrow \ell \geq 0$. $p \Rightarrow q$

$\neg q \Rightarrow \neg p$

o equivalentemente che: $\ell < 0 \overset{1°\text{T.P.S.}}{\Rightarrow} f(x) < 0$ definitiv. per $x \to c$

Questa seconda implicazione segue immediatamente dal 1°T.P.S. ∎

teorema carab.

Teoremi di confronto

1° Teorema di confronto (limiti finiti)

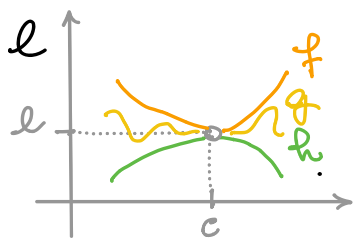
Siano $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$ ed $f, g, h : I_r(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ tali che:

$(H)_c$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in $I_r(c) \setminus \{c\}$.

se c è finito

Se: $(H)_L$ $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$

allora: $\lim_{x \to c} g(x) = l$.



dim

Dim. Vogliamo dimostrare $\lim_{x \to c} g(x) = l$.

ovvero: $\forall \varepsilon > 0, \exists I(c) : \forall x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow g(x) \in I_\varepsilon(l)$

Per $(H)_L$ sappiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists \hat{I}(c) : \forall x \in \hat{I}(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l) \\ \exists \tilde{I}(c) : \forall x \in \tilde{I}(c) \setminus \{c\} \Rightarrow h(x) \in I_\varepsilon(l) \end{cases}$$

scegliamo $I(c) := \hat{I}(c) \cap \tilde{I}(c)$

e osserviamo che, $\forall x \in I(c)$ si ha $\begin{cases} |f(x) - l| < \varepsilon \\ |h(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$

ovvero: $\left.\begin{array}{l} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon \end{array}\right\} \forall x \in I(c)$

Per $(H)_c$ si ha quindi: $l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$ $\forall x \in I(c)$,

da cui si conclude:

$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$ ovvero $g(x) \in I_\varepsilon(l)$, $\forall x \in I(c)$. ∎

2° Teorema di confronto (limiti infiniti)

Siano $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $f, g : I_r(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ (se c è finito)
tali che:

$(H)_c$ $f(x) \leq g(x)$ in $I_r(c) \setminus \{c\}$.

Allora:

(1) se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$

(2) se $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

DIM (1). Per ipotesi $\forall M > 0$, $\exists I(c) : x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) > M$

Per $(H)_c$ allora anche $g(x) > M$ che è la tesi ■

Funzioni monotone e funzioni limitate

Una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice:

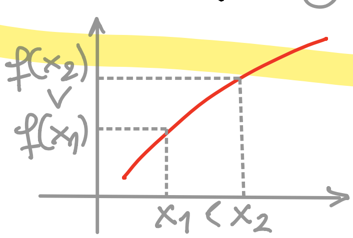
■ MONOTONA CRESCENTE su I

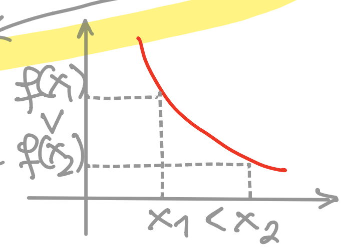
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

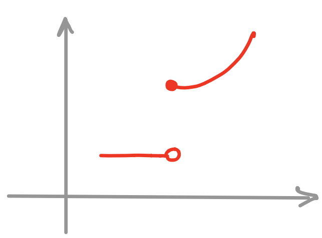
MONOTONA DECRESCENTE su I

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

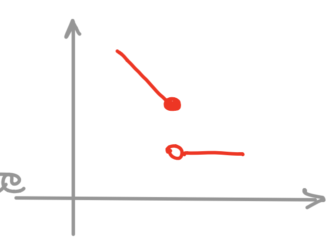
se $\neq$ allora è strettamente monotona cresc./decresc.





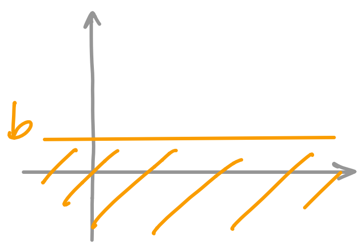


NON sono strettamente monotone



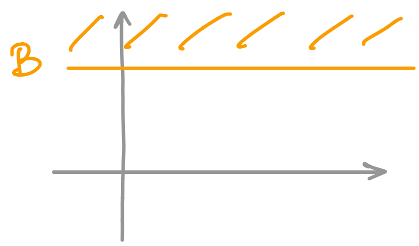
LIMITATA INFERIORMENTE

$\exists b \,/\, f(x) \geq b$
$\forall x \in I$



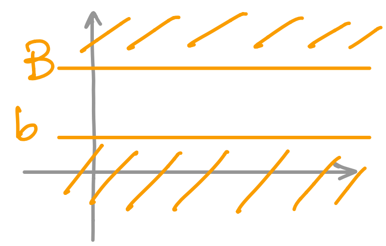
LIMITATA SUPERIORMENTE

$\exists B : f(x) \leq B$
$\forall x \in I$



LIMITATA

$\exists b, B : b \leq f(x) \leq B$
$\forall x \in I$



Teorema (limiti di funzioni monotone)

Sia $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$, monotona.

Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste.

In particolare:

1. se f è monotona crescente e superiormente limitata da B allora $l \in \mathbb{R}$ e $l \leq B$.
2. se f è monotona crescente ma non superiormente limitata allora $l = +\infty$
3. se f è monotona decrescente e inferiormente limitata da b allora $l \in \mathbb{R}$ e $l \geq b$
4. se f è monotona decrescente ma non inferiormente limitata allora $l = -\infty$