prof vip

Lezione 3

La funzione derivata

def. Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$.
Diciamo che f ammette derivata (prima) nel punto c se esiste finito
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

def. Se f (come nella def. sopra) è derivabile in tutti i punti di (a,b) allora possiamo definire la funzione derivata (prima) di f:
$$f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

è la pendenza al grafico di f nel punto $(x, f(x))$

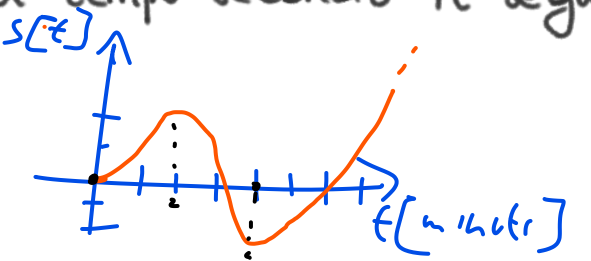
I teoremi che abbiamo visto sono:

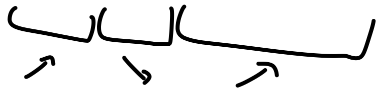
Teorema 1. f monotona $\uparrow \iff f' \geq 0$
f monotona $\downarrow \iff f' \leq 0$

Teorema 2. f $\smile$ (convessa) $\iff f' \uparrow$
f $\frown$ (concava) $\iff f' \downarrow$

es

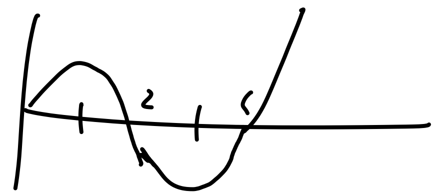
ESERCIZIO. Un oggetto ( ) si muove di moto rettilineo.
La sua posizione, $s(t)$, sulla retta varia nel tempo secondo il seguente grafico:





- $s(t)$ è misurata in metri

- il tempo t è misurato in minuti.



(1) Descrivere l'andamento di [illegible] nel tempo.

(2) Stimarne la velocità in $t=5$. $\sim 1/2$ m/min

(3) Tracciare "un" grafico della velocità.

(1) L'oggetto parte dall'origine e per $t \in [0,2]$ (per 2 minuti) si muove verso destra. In $t=2$ inverte la direzione del suo moto e inizia a muoversi verso sinistra. In $t \in [2,4]$, si muove verso sinistra; in $t=4$ inverte la direzione e torna a muoversi verso destra fino a $t=7$.

→ In $t=2$ e $t=4$ si ferma (istantaneam.)

→ La posizione massima raggiunta da [illegible] è $s=2$ (in $t=7$)

quella minima è $s=-1{,}5$ (in $t=4$)

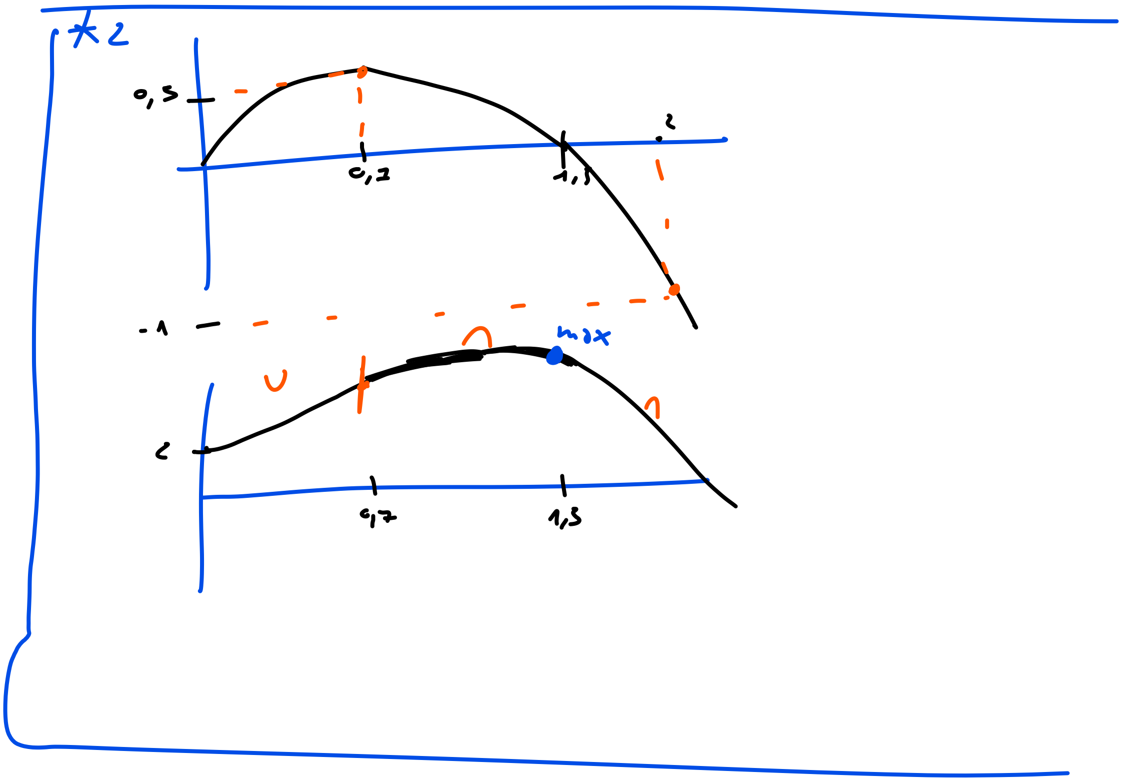
(2) $v(5) \approx$? stimiamo la pendenza della tangente.

Punti di passaggio: $(5,-1)$ $(6{,}3\,,0)$

$$v(5) \approx \text{pendenza retta} = \frac{0-(-1)}{6{,}3-5} = \frac{1}{1{,}3} = \cdots$$

[metri/minuto]

(3)



T1	s	$\nearrow$	$\Leftrightarrow$	$v \geq 0$
	s	$\searrow$	$\Leftrightarrow$	$v \leq 0$
T2	s	$\cup$	$\Leftrightarrow$	$v \nearrow$
	s	$\cap$	$\Leftrightarrow$	$v \searrow$

k te

Problema inverso: dalla f' alla f

→ Noto il grafico della pendenza riusciamo a risalire al grafico della funzione di partenza?

$$f \xrightarrow{\text{derivazione}} f'$$

$$f' \xrightarrow{\text{calcolo delle primitive}} f$$

ESEMPIO. $f(x) = x^2 \rightsquigarrow f'(x) = 2x$

Data la funzione $f'(x) = 2x$ so che una possibile f è x^2 però mi accorgo che: Tutte le parabole $x^2 + c$ $c \in \mathbb{R}$ hanno come derivata la funzione $2x$

il problema **data f' determina f** non ha un'unica soluzione perché trovata una soluzione f anche $f+c$ con $c \in \mathbb{R}$ è soluzione.

def. Data $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice PRIMITIVA di f su (a,b) una qualsiasi funzione $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che

$$g'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b).$$

g è **UNA** primitiva di f $\Leftrightarrow$ f è la derivata di g.

Teorema. $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

- g è una primitiva di f su I $\Rightarrow$ $g+c$ è ancora una primitiva di f, $\forall c$
- se g e h sono primitive di f su I $\Rightarrow$ $g-h$ è una costante

ESERCIZIO. ▮ si muove di moto rettilineo, la sua posizione viene misurata in metri rispetto all'origine della retta del moto e il tempo è misurato in minuti. *2

La sua velocità varia nel tempo secondo il seguente grafico

(1) Descrivere la posizione dell'oggetto al variare del tempo.

(2) Sapendo che $s(0)=2$ tracciare un grafico approssimativo di $s(t)$.

(1) Usiamo il Teorema 1:

$v \geq 0 \iff s \nearrow$

$v \leq 0 \iff s \searrow$

se $t \in [0; 1{,}5]$ l'oggetto si muove verso destra

in $t = 1{,}5$ si ferma e cambia direzione

se $t \in [1{,}5; 2]$ si muove verso sinistra.

(2) $s(0) = 2$

---

es extra

$f(x) = x^2$

$f'(x)$ se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2\cancel{\Delta x}\, x + \cancel{\Delta x^2} - \cancel{x^2}}{\cancel{\Delta x}}$$

piccolo

$$= 2x$$