Esercizi sulle funzioni

Per ciascuna delle funzioni seguenti, stabilire se è iniettiva o suriettiva, determinare il grafico Γ e la controimmagine $f^{-1}(0)$:

1) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(n) = n^2 + n$;
2) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(m,n) = m \cdot n$;
3) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $\quad f(x) = 2x + 1$.

4) Data la funzione f dell'esercizio 1), si consideri l'inclusione $\mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$ e la funzione composta $f|_{\mathbb{N}} = f \circ i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
Descrivere $f|_{\mathbb{N}}$ e stabilire se è iniettiva o suriettiva.

5) Trovare l'inversa della funzione f dell'esercizio 3). $\quad x \mapsto \frac{x-1}{2}$

6) Mostrare che la funzione $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(m,n) = (m+n, m-n)$ è biettiva e trovarne l'inversa.

7) Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ è ~~iniettiva~~ o ~~suriettiva~~.

$$(x,y) \longmapsto (x+y,\, x\cdot y)$$

8) Determinare tutte le possibili funzioni da $A=\{1,2\}$ a $B=\{a,b,c\}$. Quali fra queste sono iniettive? Quali suriettive?

9) Dati due insiemi generici A e B, si consideri la funzione
$$f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B), \quad S \longmapsto S\cap B$$
Mostrare attraverso esempi che f a priori non è iniettiva né suriettiva. In quali casi è iniettiva? In quali suriettiva?

10) Data $f : A \to B$ iniettiva, mostrare che $f(A)$ è in biezione con A.

11) Data una funzione $f : A \to B$, dimostrare che:
i) f iniettiva $\Leftrightarrow \forall S \subseteq A,\ f^{-1}(f(S)) = S$;
ii) f suriettiva $\Leftrightarrow \forall T \subseteq B,\ f(f^{-1}(T)) = T$.

12) Sia $f : A \to B$ suriettiva e $g, h : B \to C$ due funzioni con uguali dominio e codominio. Dimostrare che se $gf = hf$ allora $g = h$.

13) Sia $f : B \to C$ iniettiva e $g, h : A \to B$. Mostrare che $fg = fh \Rightarrow g = h$.