La formalizzazione dei processi di calcolo

Corso di Programmazione 1A, 2021-22
Felice Cardone

La formalizzazione del calcolo

Alan M. Turing (1912-1954)

La formalizzazione del calcolo

David Hilbert (1862-1943)

John von Neumann (1903-1957)

La concezione formalistica della matematica

Dobbiamo considerare la matematica come un gioco combinatorio giocato con simboli primitivi, e dobbiamo determinare in modo combinatorio finitario a quali combinazioni di simboli primitivi conducono i metodi di costruzione o "dimostrazioni".

J. von Neumann, 1931

Entscheidungsproblem:

Trovare una procedura che consente di decidere la validità di una data espressione logica con un numero finito di operazioni.

Hilbert & Ackermann, 1928

L’analisi di Turing (1936)

Il calcolo è normalmente effettuato scrivendo certi simboli su carta. Possiamo supporre che la carta sia divisa in quadretti come i quaderni di aritmetica dei bambini.
Nell'aritmetica elementare si sfrutta talvolta il carattere bidimensionale della carta […] ma questo non è essenziale per il calcolo. Assumo quindi che il calcolo sia effettuato su carta ad una dimensione, cioè su di un nastro suddiviso in caselle.

L’analisi di Turing (1936)

Il calcolo è normalmente effettuato scrivendo certi simboli su carta. Possiamo supporre che la carta sia divisa in quadretti come i quaderni di aritmetica dei bambini.
Nell'aritmetica elementare si sfrutta talvolta il carattere bidimensionale della carta […] ma questo non è essenziale per il calcolo. Assumo quindi che il calcolo sia effettuato su carta ad una dimensione, cioè su di un nastro suddiviso in caselle.

Assumo anche che il numero di simboli che possono essere scritti sia finito.

L’analisi di Turing (1936)

Il calcolo è normalmente effettuato scrivendo certi simboli su carta. Possiamo supporre che la carta sia divisa in quadretti come i quaderni di aritmetica dei bambini.
Nell'aritmetica elementare si sfrutta talvolta il carattere bidimensionale della carta […] ma questo non è essenziale per il calcolo. Assumo quindi che il calcolo sia effettuato su carta ad una dimensione, cioè su di un nastro suddiviso in caselle.

Assumo anche che il numero di simboli che possono essere scritti sia finito.

Il comportamento del calcolatore ad ogni istante è determinato dal simbolo che sta osservando e dal suo “stato mentale” a quell’istante. Possiamo supporre che esista un limite superiore al numero di simboli o caselle che il calcolatore sta osservando ad un dato momento. Supporremo anche che il numero di stati mentali che possono essere considerati sia finito.

(Turing 1936, §9)

Le macchine di Turing (1936)

Problema: scrivere un programma per trasformare una sequenza di simboli 1 in una sequenza alternante di simboli 0 e 1

Le macchine di Turing (1936)

Problema: scrivere un programma per trasformare una sequenza di simboli 1 in una sequenza alternante di simboli 0 e 1

prima	...	1	1	1	1	1	1	1	...

Le macchine di Turing (1936)

Problema: scrivere un programma per trasformare una sequenza di simboli 1 in una sequenza alternante di simboli 0 e 1

prima	...	1	1	1	1	1	1	1	...

programma

dopo	...	0	1	0	1	0	1	0	...

Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$

…	1	1	1	1	1	1	1	…

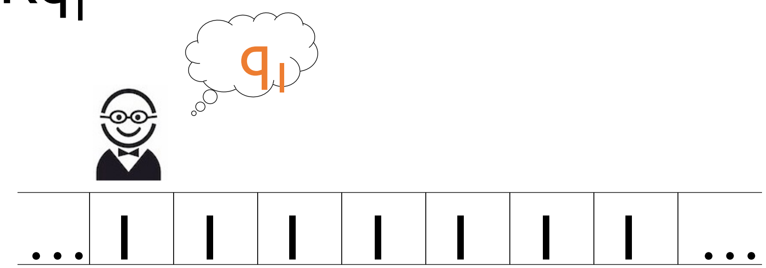
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



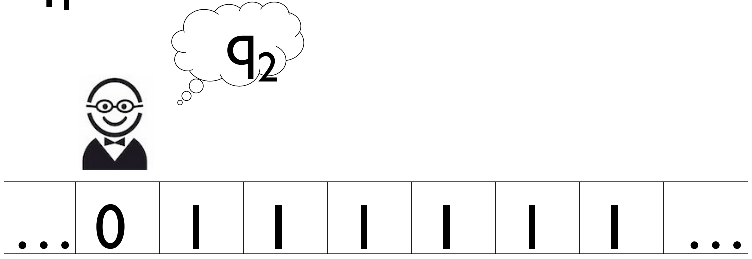
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



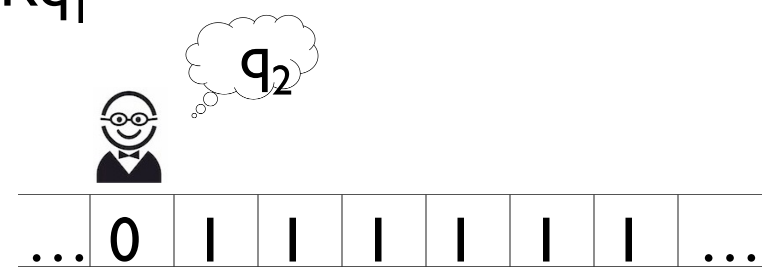
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



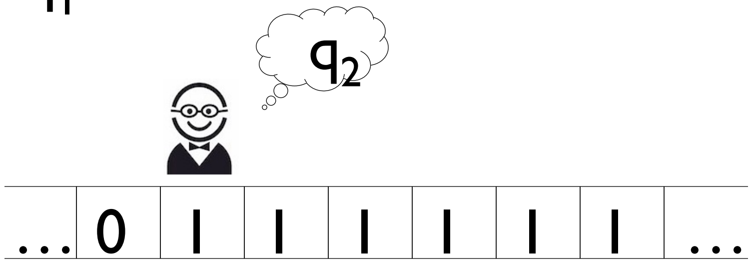
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



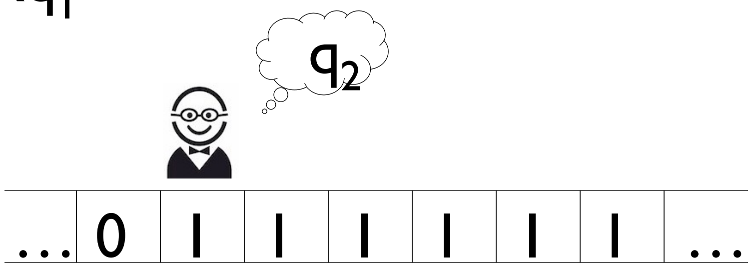
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



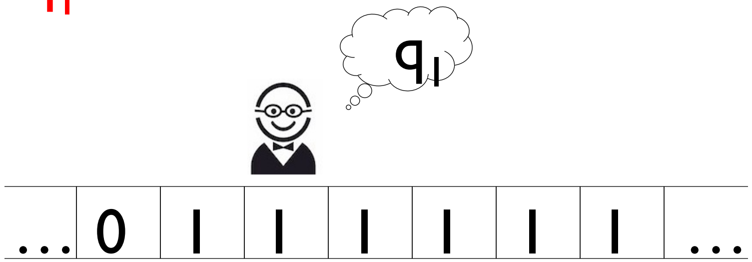
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



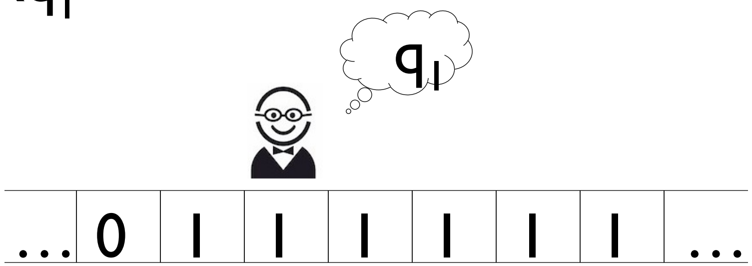
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



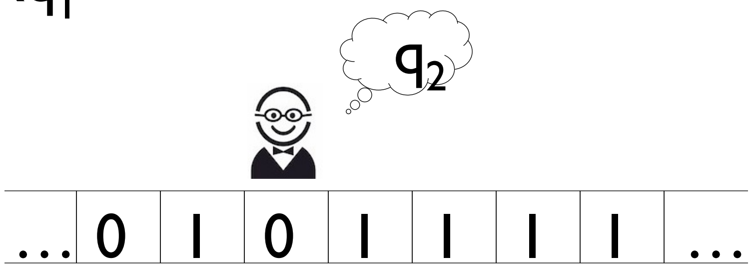
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



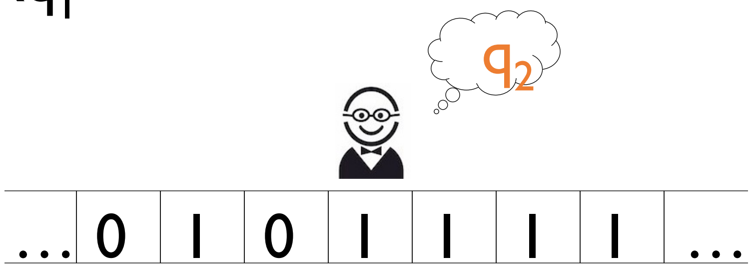
Le macchine di Turing (1936)

$q_1 0 R q_1$

$q_1 1 0 q_2$

$q_2 0 R q_2$

$q_2 1 R q_1$



e così via…

Non tutte le funzioni sono calcolabili da una macchina di Turing

0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	…
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	…
2	1	0	1	0	0	0	0	1	1	…
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	…
4	1	0	1	0	0	0	1	0	1	…
5	1	0	0	0	0	1	0	1	1	…
6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	…
7	1	0	0	0	0	0	0	0	1	…
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Il procedimento diagonale di Cantor per $\{0,1\}^{N}$

Non tutte le funzioni sono calcolabili da una macchina di Turing

0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	…
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	…
2	1	0	0	0	0	0	0	1	1	…
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
5	1	0	0	0	0	0	0	1	1	…
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
7	1	0	0	0	0	0	0	1	1	…
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Il procedimento diagonale di Cantor per $\{0,1\}^{N}$

Non tutte le funzioni sono calcolabili da una macchina di Turing

La diagonale non può essere una delle righe perché differisce dalla riga n nella posizione n.

Quindi: non si possono numerare gli elementi di $\{0,1\}^{N}$.

Ma le funzioni calcolabili mediante macchina di Turing sono in quantità numerabile, **quindi** almeno una funzione $N \longrightarrow \{0,1\}$ non è calcolabile.

0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	…
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	…
2	1	0	0	0	0	0	0	1	1	…
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
5	1	0	0	0	0	0	0	1	1	…
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
7	1	0	0	0	0	0	0	1	1	…
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Problemi indecidibili 😟

Non esiste una macchina di Turing M che, operando su un nastro che contiene:

- ➢ la descrizione di una qualsiasi macchina di Turing T,
- ➢ un dato di ingresso x per T,

termina sempre i suoi calcoli scrivendo sul nastro il valore M(T,x) dove:

- ➢ M(T,x) = 1 se T, azionata sul dato x, termina i suoi calcoli
- ➢ M(T,x) = 0 altrimenti

Perché?

Supponiamo che esista una M come descritta.
Definiamo una nuova macchina di Turing M* che, per ogni macchina T:

- ➢ $M^*(T,0)\uparrow$ se $M(T,0) = 1$
- ➢ $M^*(T,0) = 0$ se $M(T,0) = 0$

Sia D la macchina tale che $D(0) = M^*(D,0)$

Perché?

Supponiamo che esista una M come descritta.
Definiamo una nuova macchina di Turing M* che, per ogni macchina T:

- ➢ $M^*(T,0)\uparrow$ se $M(T,0) = 1$
- ➢ $M^*(T,0) = 0$ se $M(T,0) = 0$

Sia D la macchina tale che $D(0) = M^*(D,0)$ D è un punto fisso di una trasformazione

D(0) converge?

Se no: $D(0) =_{def} M^*(D,0)\uparrow$, quindi $M(D,0) = 1$ quindi $D(0)\downarrow$
Se sì: $D(0) =_{def} M^*(D,0)\downarrow$, quindi $M(D,0) = 0$ quindi $D(0)\uparrow$

⚡

Programmazione:
un po' di
terminologia