Lezione 9

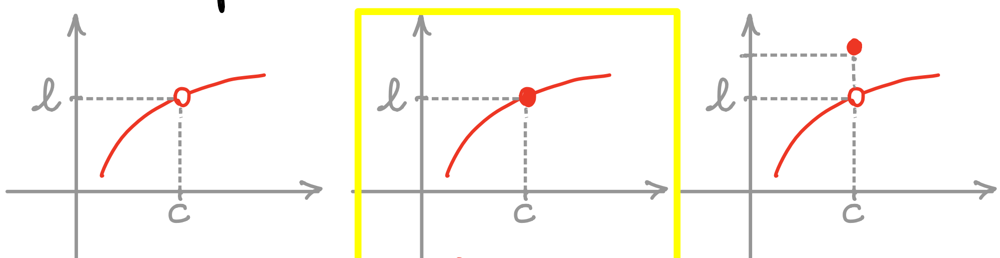
Funzioni continue

$c \in \mathbb{R}$, $I(c) := I_r(c) = (c-r, c+r)$ intorno di c per qualche $r > 0$ (anche $+\infty$)

continua

DEF. Una funzione $f : I(c) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice CONTINUA in c se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Le tre funzioni hanno lo stesso limite per $x \to c$ ma solo quella centrale è continua in c:

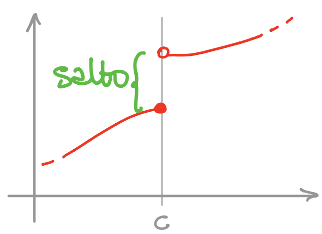


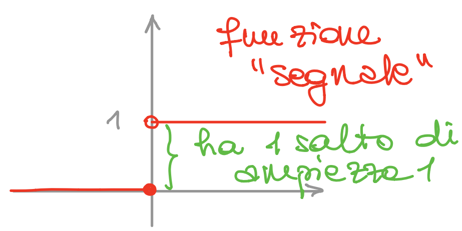
f non è definita in c — $f(c) = \ell$ — $f(c) \neq \ell$

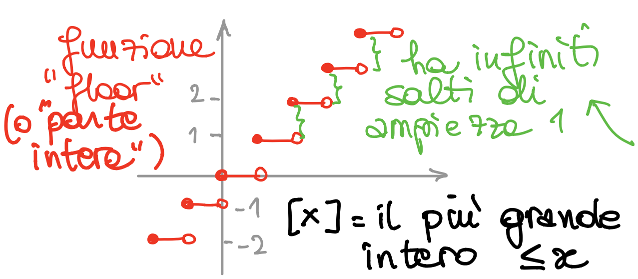
salto

DEF. Si dice che $f : I(c) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha un SALTO in $x = c$ se

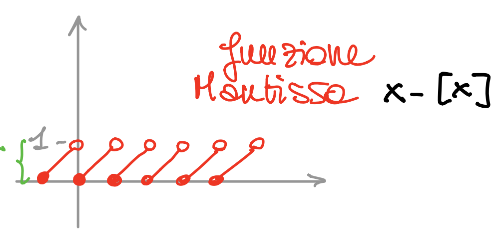
$\lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\lim_{x \to c^+} f(c)$ esistono finiti ma sono diversi







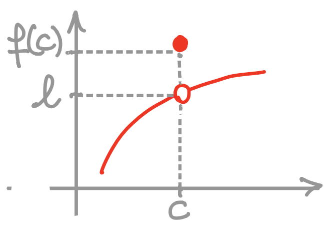
$[x]$ = il più grande intero $\leq x$

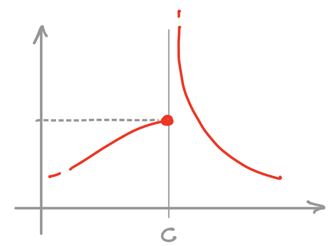


Ci sono sostanzialmente due "modi" in cui f può non essere continua in $x=c$:

1° modo: $\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{ma} \quad f(c) \neq \ell}$

2° modo: $\boxed{\lim_{x\to c} f(x) \nexists \text{ oppure è } \infty}$

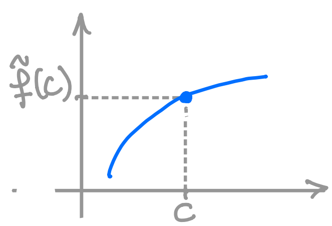


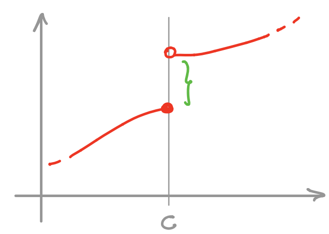


⇓

in questo caso possiamo definire una 'nuova' funzione, continua in $x=c$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq c \\ \ell & \text{se } x = c \end{cases}$$





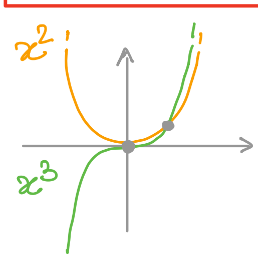
per ottenere una funzione continua NON si può modificare f in un solo punto

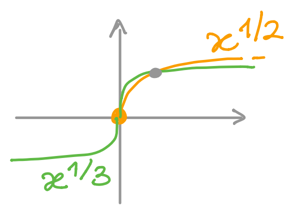
6W1e Proprietà legate alla continuità

① Continuità delle funzioni elementari

$\boxed{x^n \quad n \in \mathbb{N}}$ continua su $\mathbb{R}$

$\boxed{x^{1/n} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ $\begin{cases} \text{" \quad " \quad } [0, +\infty), \text{ se } n \text{ pari} \\ \text{" \quad " \quad } \mathbb{R}, \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}$





$\boxed{x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}}$ $\begin{cases} \text{〃} \quad \text{〃} \quad [0,+\infty),\ \alpha>0 \\ \text{〃} \quad \text{〃} \quad (0,+\infty),\ \alpha<0 \end{cases}$

$\boxed{\sin x,\ \cos x}$ 〃 〃 $\mathbb{R}$

$\boxed{a^x \quad a>0}$ 〃 〃 $\mathbb{R}$

$\boxed{\log_a x \quad a>0,\ a\neq 1}$ 〃 〃 $(0,+\infty)$

oper

② Continuità di funzione somma, prodotto e reciproco

$f,g : I(c) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue in $I(c)$

$\boxed{f \pm g,\ fg}$ continue in $I(c)$

se $f(x) \neq 0$ $\forall x \in I(c)$, $\boxed{\frac{1}{f}}$ continua in $I(c)$

comp

③ Continuità della funzione composta

$$\begin{cases} I \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$$

$(g \circ f)(x)$

Se f è definita in $x=c$ e g è definita in $f(c)$
allora: $\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } c \\ g \text{ continua in } f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f$ continua in c

ES. $\sin x^2$ $\quad x \xmapsto{f} x^2 \xmapsto{g} \sin x^2$ continua su $\mathbb{R}$

f e g sono definite e continue su tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\sin x^2$ è continua su $\mathbb{R}$

ES. $\sqrt{\cos x}$ $\quad x \xmapsto{f} \cos x \xmapsto{g} \sqrt{\cos x}$

f è definita e cont. su $\mathbb{R}$
g è 〃 〃 su $[0,+\infty)$ $\to$ $f\circ g$ è continua quando $\cos x \geq 0$
$x \in \bigcup_k \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

Es. $\sin\left(e^{x^2} + \sqrt{\cos x}\right)$ → def. e cont. quando $\cos x \geq 0$

la funzione seno è def. e conti su $\mathbb{R}$

$x \to x^2 \to e^{x^2}$ def e cont su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la funzione è definita e continua quando $\cos x \geq 0$

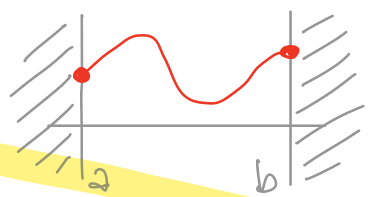
④ Teorema di Weierstrass

> Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in tutti punti di $[a,b]$ ⊛
>
> Allora esistono x_m e $x_M \in [a,b]$ tali che
>
> $$f(x_m)^{(*)} \leq f(x) \leq f(x_M)^{(*)} \quad \forall x \in [a,b].$$

⊛ Cosa significa che f è continua in a o in b?

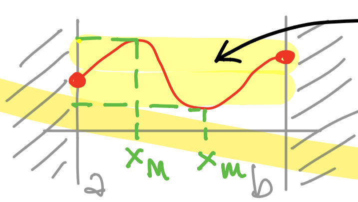
in a: $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

in b: $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$



(*) x_m e x_M sono p.ti di minimo e massimo assoluti di f su $[a,b]$

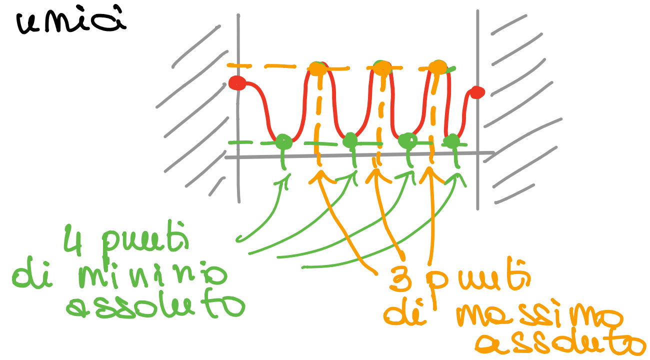
$f(x_m)$ e $f(x_M)$ sono minimo e massimo assoluti di f su $[a,b]$



il grafico di f si trova in questa striscia

OSSERVAZIONI sul TEOREMA di WEIERSTASS

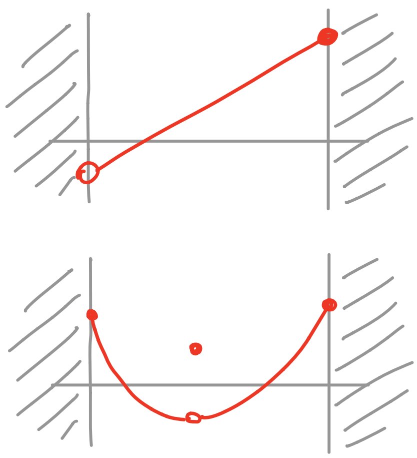
(A) x_m e x_M non sono unici



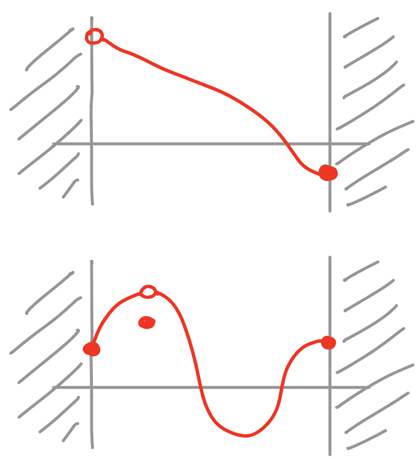
(B) l'ipotesi di continuità di f è necessaria su tutto $[a,b]$, estremi compresi

cont. nec

queste due funzioni non ammettono minimo assoluto su $[a,b]$



queste due funzioni non ammettono massimo assoluto su $[a,b]$



Limiti notevoli e funzioni asintotiche

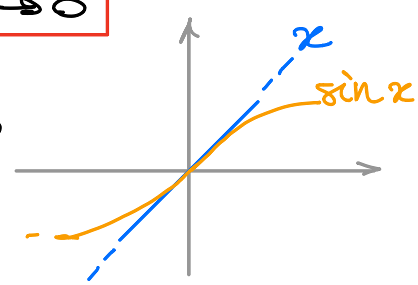
DEF. Le funzioni f e g si dicono ASINTOTICHE per $x \to c$ se
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
In tal caso scriviamo
$$f \sim g \quad \text{per } x \to c$$

I $\boxed{\text{limiti notevoli}}$ sono dei limiti che presentano forme di indeterminazione e che possono essere dimostrati attraverso le proprietà delle f.ni coinvolte.

Non dimostreremo questi limiti, ma ne sfrutteremo il significato in termini di funzioni asintotiche.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\sin x \sim x \text{ per } x \to 0}$$

significato: $\sin x$ e x hanno lo stesso comportamento quando $x \to 0$



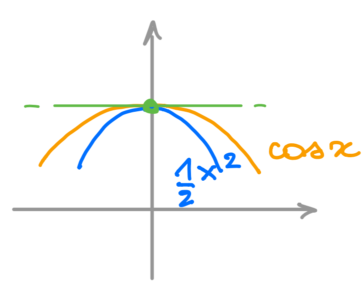
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2 \text{ per } x \to 0}$$

DIM. $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

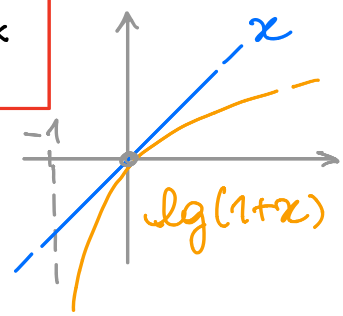
$= \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$

$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 1^2 = 1$

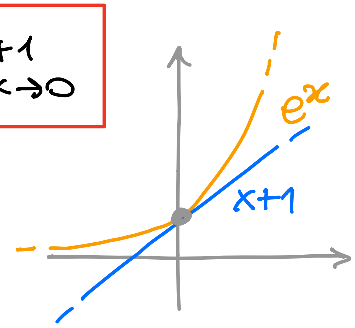
$\frac{1}{1+\cos x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$ ∎



$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1}$$ ovvero $$\boxed{\lg(1+x) \sim x \text{ per } x \to 0}$$



$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$ ovvero $$\boxed{e^x \sim x+1 \text{ per } x \to 0}$$



$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1}$$ ovvero $$\boxed{(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x \text{ per } x \to 0}$$