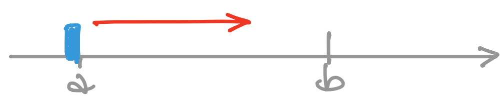
Lezione 4

Lavoro compiuto da una forza per spostare un oggetto su una retta

L'oggetto si muove su una retta sotto l'azione di una forza F che dipende solo dalla posizione in cui si trova

$x$ = posizione di

$F(x)$ = forza nel punto $x$



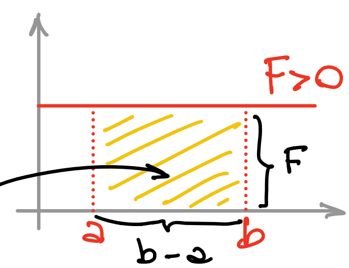

Vogliamo arrivare a definire il LAVORO compiuto da F per spostare dal punto a al punto b.

1° PASSO: F costante

def. Se $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ è costante allora

$$\boxed{L_{F;a\to b} = F\cdot(b-a)}$$

Se $F>0$, $L_{F;a\to b}$, è l'area




2° PASSO: F costante a tratti, ovvero F assume al più un numero finito di valori su $[a,b]$ su un numero finito di suoi sottointervalli

- $N>1$ (intero fissato)
- $x_1, \dots, x_{N-1}$ punti di $(a,b)$ tra loro distinti

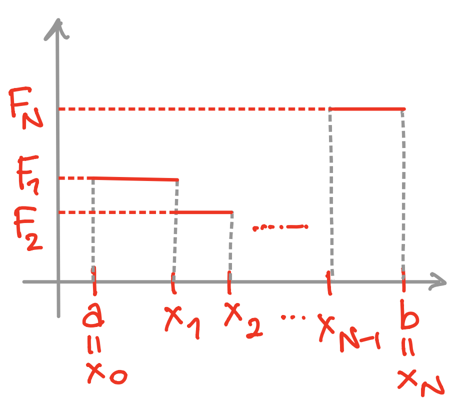
$$a =: x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{N-1} < x_N =: b$$

che suddividono $[a,b]$ in N intervalli consecutivi

$$[x_i, x_{i+1}] \quad i = 0 \dots N$$

sui quali F è costante

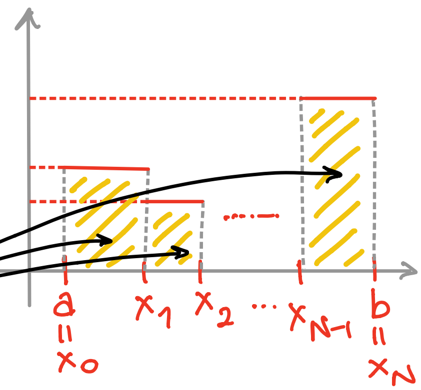
$$F(x) = F_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$
$$\forall i = 1 \dots N$$



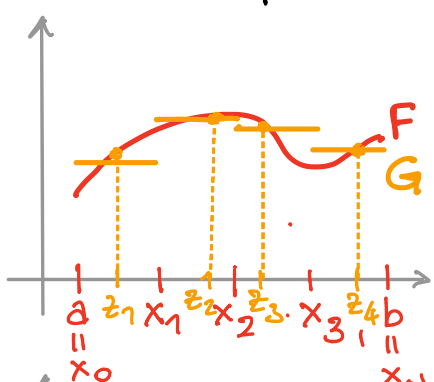
**def** Se $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ è costante a tratti allora

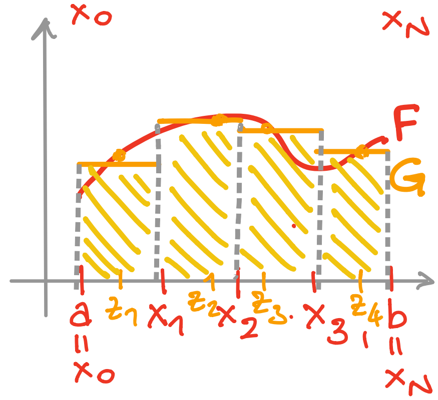
$$L_{F;a\to b}=\sum_{i=1}^{N} F_i\,(x_i-x_{i-1})$$

Se $F_i>0$ per ogni $i=1\dots N$ allora $L_{F;a\to b}$ è la somma delle aree




**3° PASSO:** F qualsiasi. Procediamo nel modo seguente:




- prendiamo $N>1$ (intero) e suddividiamo $[a,b]$ in N sottointervalli della stessa lunghezza: $\frac{b-a}{N}$

$$[\underset{\overset{\parallel}{a}}{x_0},x_1],[x_1,x_2]\dots[x_{N-1},\underset{\overset{\parallel}{b}}{x_N}]$$

- su ognuno di questi intervalli approssimiamo F con un valore costante. Per farlo scegliamo

$$z_i\in[x_{i-1},x_i)\ ,\ i=1\dots N$$

e definiamo

$$G(x):=F(z_i)\ \text{su}\ [x_{i-1},x_i)\quad i=1\dots N$$

- Approssimiamo:

$$\boxed{\begin{aligned}L_{F;a\to b}&\approx L_{G;a\to b}\\&=\sum_{i=1}^{N}F(z_i)\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{=\frac{b-a}{N}}\\&=\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}F(z_i)\end{aligned}}$$

def. Se $\lim\limits_{\frac{b-a}{N}\to 0} \left( \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} F(z_i) \right)$ esiste ed è finito e non dipende da come sono stati scelti i punti $z_i$

equivale a "$N \to \infty$"

allora questo valore è $L_{F;a\to b}$.

Problema: come scegliamo i punti $z_i$ in cui valutare F?

prendo gli $z_i$ dopo aver fatto delle valutazioni sulla F (ad es. scegliendo il punto in cui F è massima o minima in $[x_{i-1}, x_i)$

prendo gli $z_i$ secondo un criterio indipendente da F

scegliamo questa strada e prendiamo

$$z_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$$

p.to medio di $[x_{i-1}, x_i]$

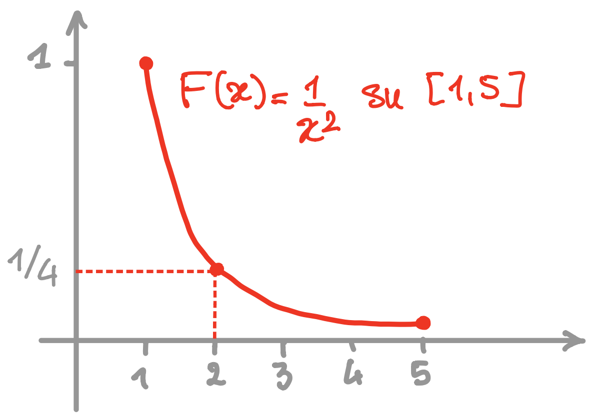
Arriviamo quindi ad un'approssimazione di $L_{F;a\to b}$ attraverso la seguente espressione

$$\boxed{L_{F;a\to b} \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} F\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}$$

FORMULA DEL PUNTO MEDIO CON N SUDDIVISIONI e)

**ESEMPIO.** $F(x) = \frac{1}{x^2}$ forza repulsiva

Approssimare $L_{\frac{1}{x^2};\, 1\to 5}$ con la formula del punto medio con 5 suddivisioni.




$a = 1$

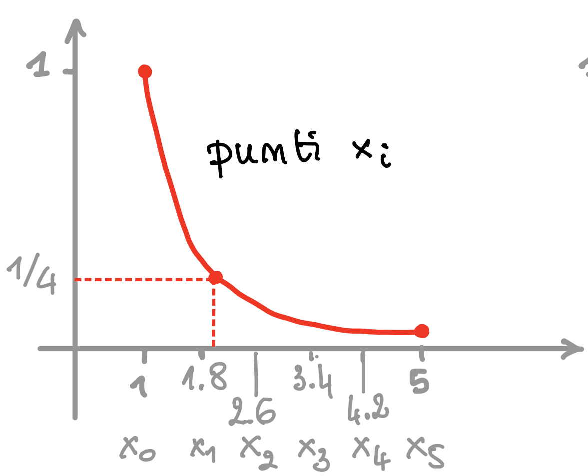
$b = 5$

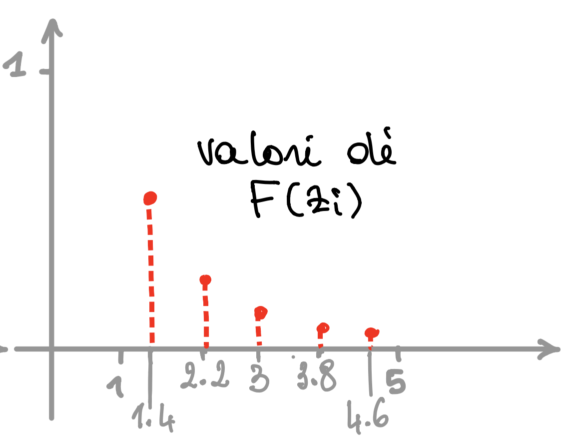
ampiezza intervallo

$$\frac{b-a}{5} = 0.8$$

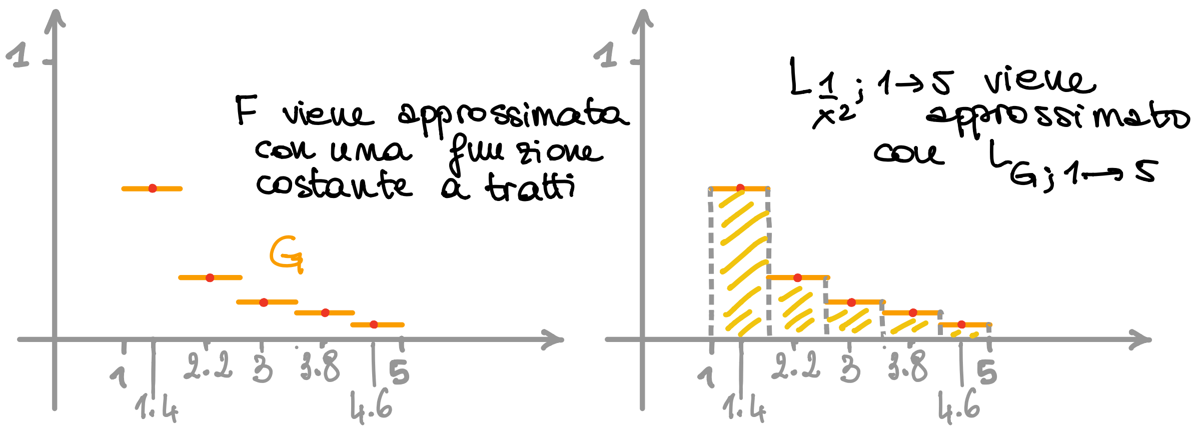
| $a$ | $b$ | $N$ | $(b-a)/N$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 0,8 |

| $i$ | $x_{i-1}$ | $x_i$ | $z_i$ | $F(z_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1,8 | 1,4 | 0,510 |
| 2 | 1,8 | 2,6 | 2,2 | 0,207 |
| 3 | 2,6 | 3,4 | 3 | 0,111 |
| 4 | 3,4 | 4,2 | 3,8 | 0,069 |
| 5 | 4,2 | 5 | 4,6 | 0,047 |



e)




$$L_{\frac{1}{x^2}; 1\to 5} \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{5} F(z_i)$$

$$= 0.8 \sum_{1}^{5} F(z_i) \approx 0.76$$

## L'integrale definito di una funzione su un intervallo

Siano:
- $F: [a,b] \to \mathbb{R}$
- $N \geq 1$ intero
- $x_0 = a$, $x_N = b$ e $x_1 \dots x_{N-1}$ i punti di $(a,b)$ che suddividono $[a,b]$ in $N$ intervalli di ampiezza $\frac{b-a}{N}$ ovvero: $[x_{i-1}, x_i)$, $i = 1 \dots N$
- $z_i \in [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1 \dots N$

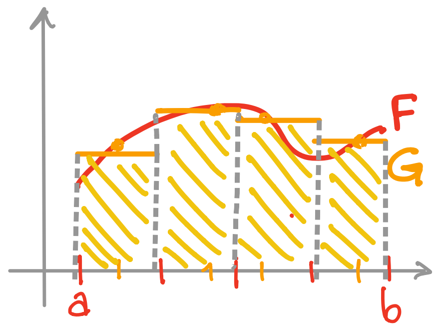
def. Se $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} F(z_i)$
- esiste finito e
- non dipende dalla scelta degli $z_i$

allora il valore che si ottiene è detto **INTEGRALE DEFINITO di F su [a,b]** e si indica con

$$\boxed{\int_a^b F(x)\,dx}$$

Alcune osservazioni sull'integrale definito:

- $S_N(F; z_1 \dots z_N) := \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} F(z_i)$ è la **SOMMA di RIEMANN di F**




$\boxed{\text{Se } F \geq 0}$ la $S_N$ è la somma delle aree dei rettangoli di base $\frac{b-a}{N}$ e altezza $F(z_i)$

- Quando $\frac{b-a}{N} \to 0$ ovvero $N \to \infty$

$$S_N(F; z_1 \dots z_N) \longrightarrow \int_a^b F(x)\,dx$$

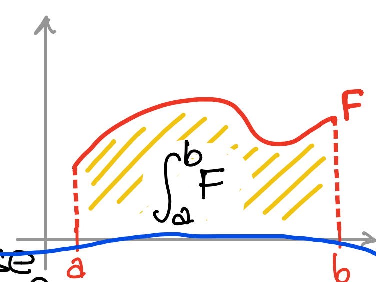
sono gli $F(z_i)$

questo simbolo è una "S" allungata

solo se ha sempre positivo non vo'e

$dx$ è la lunghezza "infinitesima" della base dei rettangolini

- $\int_a^b F(x)dx$ è un numero e, se $\boxed{F \geq 0}$, è l'area compresa tra il grafico di F e l'asse delle ascisse




- Se F è negativa o se cambia segno su $[a,b]$ allora:

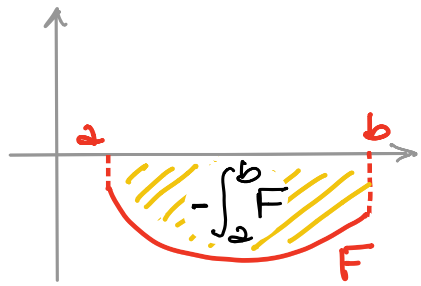
$$\boxed{\int_a^b F(x)dx \text{ non rappresenta un'area}}$$

altrimenti modulo

C'è comunque una relazione tra $\int_a^b F(x)dx$ e l'area tra il grafico di F e l'asse $x$:

- se $F \leq 0$ su $[a,b]$

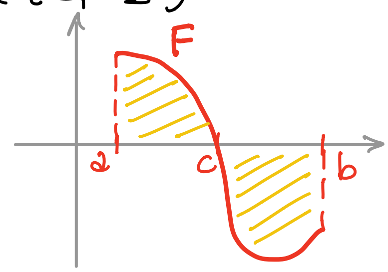
  Area $= -\int_a^b F(x)dx$




- se F cambia segno su $[a,b]$

  ($F \geq 0$ su $[a,c]$ e $F \leq 0$ su $[c,b]$)

  Area $= \int_a^c f(x)dx - \int_c^b F(x)\,dx$




In generale:

$$\boxed{\text{Area} = \int_a^b |f(x)|\,dx}$$