errore su es. 3

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

+ ins. verità
$\varphi(B)$

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

+ indici

- ☒ $\{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 3 \land s(2) = 1\}$
- ☐ $\{s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 3 \land s(2) = 1\}$ –
- ☒ $\{s \in \mathbb{N}^3 \mid s(2) = 1\}$
- ☐ $\{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid s(2) = 1\}$ – $\sim \mathbb{R}$

(b) Sia R la relazione "non essere consecutivi" sui numeri naturali. 2 punti
Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- ☒ La relazione R è riflessiva.
- ☒ La relazione R è simmetrica.
- ☐ La relazione R è transitiva. –
- ☐ La relazione R è un pre-ordine. –

(c) Sia φ la formula $\forall x \exists z \neg R(x,z)$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☐ φ non è un enunciato. –
- ☐ Alcuni termini che occorrono in φ hanno altezza 1. – 0
- ☐ L'altezza di φ è 2. –
- ☒ L'insieme delle variabili libere di φ è vuoto.

(d) Sia P una tautologia, Q una contraddizione e R un'arbitraria formula proposizionale. Quali delle seguenti affermazioni sono certamente vere? 2 punti

- ☒ $\mathrm{P} \leftrightarrow \neg\mathrm{Q}$ è una tautologia.
- ☒ $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \models \mathrm{P}$.
- ☒ $\mathrm{Q} \models \mathrm{P} \land \mathrm{R}$.
- ☒ Se $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$ allora R è una tautologia.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Utilizzando la logica proposizionale, dimostrare che per ogni coppia di insiemi A e B vale l'inclusione

$$\complement A \cup B \subseteq \complement(A \triangle B) \cup \complement A.$$

$$x \in (\complement A \cup B) \models x \in (\complement(A \triangle B) \cup \complement A)$$

$$x \notin A \vee x \in B \models \neg x \in ((A \triangle B)) \vee \cancel{x} \notin A$$

$$x \notin A \vee x \in B \models \neg((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \vee x \notin B)) \vee x \notin A$$

$$P = x \in A$$

$$Q = x \in B$$

$$\neg P \vee Q \models \neg((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \vee \neg P$$

$$\neg P \vee Q \models [\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q)] \vee \neg P$$

$$\underbrace{\neg P \vee Q}_{P_1} \models \underbrace{[(\neg P \vee \underset{P \to Q}{Q}) \wedge (P \vee \underset{Q \to P}{\neg Q})] \vee \neg P}_{Q_1}$$

$P \to Q$		$P \to Q$			
P	Q	P_1	$Q \to P$	$[\ldots]$	Q_1
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

$P_1 \models Q_1$

Esercizio 3 6 punti

1. Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

   x e y sono numeri consecutivi

   utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $<$ interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$ e $+$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

   Se due numeri sono consecutivi, almeno uno dei due è pari.

1. $\neg\exists_z (z<x \land y<z) \land \neg\exists_z \left(z<y \land x<z \right)$

2. $\forall_x \forall_y \left(x \cancel{< y \land \neg\exists_z (z<y \land x<z)} \to \exists_z (x=z+z \lor y=z+z) \right)$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{P, f, a\}$ con P simbolo di relazione unaria, f simbolo di funzione binaria e a simbolo di costante. Sia φ la formula

$$P(x) \wedge \exists y(f(y,a) = x).$$

Determinare l'insieme di verità di φ in ciascuna delle seguenti L-strutture:

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, \cdot, 2 \rangle$, dove $P^{\mathcal{A}}$ è l'insieme dei numeri primi.
2. $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, P^{\mathcal{B}}, \cdot, 0 \rangle$, dove $P^{\mathcal{B}}$ è l'insieme dei numeri non negativi.

Giustificare le proprie risposte.

1. $P(x) \wedge \exists y (y \cdot 2 = x)$

in $\mathbb{N}$
x e' num. primo e x e' pari → ma l'unico numero pari primo e' 2

⇒ l'isieme verità $= \{2\}$

2. $x \geq 0 \wedge \exists y (y \cdot 0 = x)$

x e' un numero Reale maggiore uguale a zero ed e' uguale $0 \cdot y$ per un certo y a

↳ e' un num Reale ≥ 0 ed e' $= 0$

⇒ x e' $= 0$

$\varphi(B)$ insieme verità $= \{0\}$

Esercizio 5 6 punti

Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1. \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 1.$$

base

$$a_0 = 5 = 3 \cdot 2^{0+1} - 1 = a_0 \qquad \text{cvd}$$

Passo ind

hp $\quad a_n = 2a_{n-1} + 1 = 3 \cdot 2^{n+1} - 1$

th $\quad a_{n+1} = 2a_n + 1 = 3 \cdot 2^{n+1+1} - 1$

$$\underline{a_{n+1}} = 2a_n + 1 \overset{\text{x hp indut}}{=} 2\left(3 \cdot 2^{n+1} - 1\right) + 1$$

$$= 3 \cdot 2^{n+2} - 2 + 1 = \underline{3 \cdot 2^{n+1+1} - 1}$$

cvd