Linguaggi Formali e Traduttori

2.5 Proprietà di chiusura dei linguaggi regolari

Sommario

In questa lezione studiamo le più importanti proprietà di chiusura dei linguaggi regolari ponendoci la seguente domanda: dati due linguaggi regolari L ed L', i seguenti linguaggi sono regolari?

- $L \cup L'$
- $L \cap L'$
- LL'
- $\overline{L}$
- $L - L'$
- L^R

In tutti i casi possiamo rispondere affermativamente.

Unione e concatenazione

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per unione e concatenazione.

Dimostrazione

Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari.

Dunque esistono due espressioni regolari E_1 ed E_2 tali che $L_1 = L(E_1)$ e $L_2 = L(E_2)$.

Ora $E_1 + E_2$ e $E_1 E_2$ sono espressioni regolari che generano, rispettivamente, $L_1 \cup L_2$ e $L_1 L_2$.

Concludiamo che $L_1 \cup L_2$ e $L_1 L_2$ sono regolari.

Complemento

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per complemento.

Dimostrazione

Sia L un linguaggio regolare.

Dunque esiste un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che $L = L(A)$.

Definiamo $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ e osserviamo che

$$w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow w \notin L(B)$$

Concludiamo che $\overline{L} = L(B)$ e che $\overline{L}$ è regolare.

Intersezione

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per intersezione.

Dimostrazione

Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari su un alfabeto Σ.

Usando le **leggi di De Morgan**, osserviamo che

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

Siccome i linguaggi regolari sono chiusi per unione e complemento, concludiamo che $L_1 \cap L_2$ è regolare.

Intersezione (costruzione diretta)

Dimostrazione alternativa

Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari su un alfabeto Σ.

Dunque esistono due DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tali che $L_1 = L(A_1)$ e $L_2 = L(A_2)$.

Definiamo $B = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), F_1 \times F_2)$ dove

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

per ogni $p \in Q_1$, $q \in Q_2$ e $a \in \Sigma$. Concludiamo osservando che

$$\begin{aligned}
w \in L(B) \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}((q_1, q_2), w) \in F_1 \times F_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \land \hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2 \\
&\Leftrightarrow \quad w \in L(A_1) \land w \in L(A_2) \\
&\Leftrightarrow \quad w \in L_1 \cap L_2
\end{aligned}$$

Differenza

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per differenza.

Dimostrazione

Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari su un alfabeto Σ.

Per concludere basta osservare che $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ e ricordare che i linguaggi regolari sono chiusi per intersezione e complemento.

Inversione

Teorema

I linguaggi regolari sono chiusi per inversione.

Dimostrazione

Se L è un linguaggio regolare deve esistere un'espressione regolare E tale che $L = L(E)$.

Definiamo l'espressione regolare E^R per induzione sulla struttura di E e per casi sulla sua forma, usando le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\emptyset^R &= \emptyset \\
\varepsilon^R &= \varepsilon \\
a^R &= a \\
(E_1 + E_2)^R &= E_1^R + E_2^R \\
(E_1 E_2)^R &= E_2^R E_1^R \\
(E^*)^R &= (E^R)^*
\end{aligned}$$

È facile dimostrare che $L(E^R) = L(E)^R$, dunque L^R è regolare.

Esercizi

Aiutandosi con le tecniche illustrate in questa lezione, risolvere i seguenti esercizi.

1. Se L è un linguaggio regolare, cosa si può dire di L^* e di L^+? Sono regolari?
2. Definire un DFA che riconosca il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ in cui non c'è uno 0 seguito da due 1.
3. Definire un DFA che riconosca il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ di lunghezza pari e che contengono almeno un 1.
4. Definire un'espressione regolare per il linguaggio $L(E)^R$, dove $E = (ab)^*(b + a^*)^*$.