Lezione 19

Serie numeriche

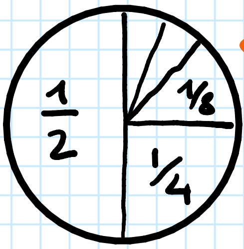
"È possibile sommare infiniti numeri? Il risultato è sempre infinito?"

Riflettiamo su qualche esempio:

1) $1 + 1 + 1 + \dots = +\infty$

suggerito dall'intuizione

2) $\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}\ = \ ?$



Qui l'intuizione sembra suggerire che il risultato sia 2

Cioè: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

3) $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = \ ?$

Potremmo ragionare in 2 modi

- $(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots = 0$
- $1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots = 1$

E quindi il risultato qual è?

Questi esempi mostrano che la somma di infiniti numeri è un'operazione delicata che va numeri è un'operazione delicata che va

def. opportunamente formalizzata e studiata

- Sia data una successione $\{a_n\}$; si vuole definire (quando possibile!)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$ serie di termine a_n

(negli esempi 1) $a_n = 1 \ \forall n \geq 0 \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 1$

2) $a_n = \frac{1}{2^n} \ \forall n \geq 0 \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$

3) $a_n = (-1)^n \ \forall n \geq 0 \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$)

- Definiamo la successione $\{s_N\}$ come

$$\boxed{s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n}$$ successione delle somme parziali

ovvero $s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$ ecc...

- Allora

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \to +\infty} s_N}$$ se il limite esiste

(ricordiamo che l'indice che compare nel simbolo $\sum$ è "muto", ovvero $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$)

Si noti che abbiamo ricondotto il problema di una

Si noti che abbiamo ricondotto il problema di una somma infinita al limite di una successione

$$\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n}_{\text{somma infinita}} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n}_{\text{somma finita}}}_{\text{limite quando il numero degli addendi va a } +\infty} \right)$$

teor. conv.

- Precisamente, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è detta:

  - **convergente** se $\exists\, S \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{N\to+\infty} S_N = S$

    In tal caso S è detto somma della serie

  - **divergente** se $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$ o $-\infty$

  - **indeterminata** se $\lim_{N\to+\infty} S_N$ non esiste (o irregolare o oscillante)

OSS

Osservazione Se $a_n \geq 0 \ \forall n$ (diremo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una serie a termini positivi)

allora la successione $\{S_N\}$ è monotona crescente

(infatti $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N \quad \forall N$)

Dunque $\lim_{N\to+\infty} S_N$ esiste sempre (finito o infinito)

e quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non può essere indeterminata

Riconsideriamo gli esempi alla luce delle def date:

Serie geometriche

Riconsideriamo gli esempi alla luce delle def date:

1) $a_n = 1$

quindi: $S_N = a_0 + \dots + a_N = N+1$

e $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$

Dunque (come atteso) $\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$ (serie divergente)

3) $a_n = (-1)^n$

quindi: $S_N = a_0 + \dots + a_N = \begin{cases} 1 & \text{se } N \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } N \text{ è dispari} \end{cases}$

e $\lim_{N\to+\infty} S_N$ non esiste

Dunque la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è indeterminata

(non è possibile definire questa somma infinita!)

2) $a_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Studiamo più in generale $a_n = q^n$ con $q \in \mathbb{R}$ $(q \neq 0)$

(per $q = 1$ e $q = -1$ ritroviamo dunque gli esempi 1) e 3))

$S_N = a_0 + a_1 + \dots + a_N = 1 + q + q^2 + \dots + q^N$

$q S_N = q + q^2 + \dots + q^{N+1}$

e dunque $S_N - q S_N = 1 - q^{N+1}$

(se $q=1$ già sappiamo che)

da cui $S_N = \frac{1-q^{N+1}}{\dots}$ se $q \neq 1$

da cui $\quad S_N = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q} \quad$ se $q \neq 1$ $\quad$ (se $q=1$ già sappiamo che $S_N = N+1$)

Quindi
$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Cioè

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}}$$

serie geometrica di ragione q

In particolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(come suggerito dall'intuizione!)

es
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Oppure

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{k=0} \dots = \frac{\dots}{1-1/3} = \frac{\dots}{2} \dots$$

La serie geometrica ha varie applicazioni "divertenti", per esempio:

- spiegazione del paradosso di Achille e della tartaruga (si veda il video su Moodle)
- scrittura in frazione dei numeri decimali periodici

es

Vediamolo con alcuni esempi:

a) $$1,\bar{5} = 1,5555\dots$$
$$= 1 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \dots$$
$$= 1 + 5\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$$
$$= 1 + 5\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} - 1\right)$$
$$= 1 + 5\left(\frac{1}{1-1/10} - 1\right)$$
$$= 1 + 5\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$$

b) $$1,\overline{57} = 1,575757\dots$$ es 2
$$= 1 + \frac{57}{100} + \frac{57}{100^2} + \dots$$
$$= 1 + 57\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{100^n}$$
$$= 1 + 57\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{100^n} - 1\right)$$
$$= 1 + 57\left(\frac{1}{1-1/100} - 1\right) = \frac{156}{99}$$

c) $$1,4\bar{5} = 1,4555\dots$$

c) $1,4\bar{5} = 1,4555\ldots$

$$= 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{4}{10} + 5 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$$

$$= 1 + \frac{4}{10} + 5 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} - 1 - \frac{1}{10} \right)$$

$$= 1 + \frac{4}{10} + 5 \left(\frac{1}{1 - 1/10} - 1 - 1/10 \right) = \frac{131}{30}$$