Prova di Logica Matematica 9 settembre 2019 Versione 2

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________

V

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia φ la formula $\forall y \forall w\, [y = z \to g(y, w) = w]$. 2 punti

- ☐ Nessuna variabile occorre libera in φ.
- ■ L'insieme di verità di φ in $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ è costituito da un solo elemento.
- ■ φ non è un enunciato.
- ■ $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \varphi[z/0]$.

(b) Sia X l'insieme degli abitanti di Genova e S la relazione binaria su X definita da $x\ S\ y$ se e solo se x abita a meno di 100 metri da y. 2 punti

- ☐ S è una relazione transitiva.
- ■ S è una relazione simmetrica.
- ☐ S è una relazione d'ordine.
- ■ S è una relazione riflessiva.

(c) La funzione $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = 3t^2 + 1$ è 2 punti

- ☐ biettiva.
- ☐ iniettiva ma non suriettiva.
- ■ né iniettiva, né suriettiva.
- ☐ suriettiva ma non iniettiva.

(d) Siano B e C due insiemi infiniti. 2 punti

- ■ Se B è numerabile e $C \subseteq B$, allora $|C| = |\mathbb{N}|$.
- ☐ $B \cap C$ deve anch'esso essere infinito.
- ■ $B \cup C$ deve anch'esso essere infinito.
- ☐ Se B è più che numerabile e $C \subseteq B$, anche C deve essere più che numerabile.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_0 &: \quad (\neg \mathrm{D} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{D} \wedge \neg \mathrm{B}) \\
\mathrm{R}_1 &: \quad (\neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\mathrm{B} \wedge \neg \mathrm{C}) \\
\mathrm{R}_2 &: \quad \neg \mathrm{C} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{D}
\end{aligned}
$$

Giustificando le proprie risposte, determinare se:

1. $\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1 \models \mathrm{R}_2$;
2. $\mathrm{R}_2 \models \mathrm{R}_0 \wedge \mathrm{R}_1$;
3. $\mathrm{R}_2 \equiv \mathrm{R}_1 \vee \mathrm{R}_0$.

Soluzione:

$$\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_n \models \mathrm{R}$$

se e solo se ogni interpretazione delle variabili proposizionali che compaiono in almeno una tra $\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_n, \mathrm{R}$ che rende vera tutte le formule $\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_n$, rende vera anche R.

$$\mathrm{Q} \equiv \mathrm{R}$$

se e solo se

$$\mathrm{Q} \models \mathrm{R} \text{ e } \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$$

se e solo se Q e R hanno la stessa tavola di verità.

Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che R_0 e R_1 sono vere, lo è anche R_2.

   Quindi $\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1 \models \mathrm{R}_2$.

2. Se C e B sono vere, R_2 è vera mentre R_1 è falsa, quindi lo è anche $\mathrm{R}_0 \wedge \mathrm{R}_1$.

   Quindi $\mathrm{R}_2 \not\models \mathrm{R}_0 \wedge \mathrm{R}_1$.

3. $\mathrm{R}_1 \vee \mathrm{R}_0$ e R_2 non hanno la stessa tavola di verità (per esempio se B e D sono false e C è vera si ha che R_2 è falsa, mentre $\mathrm{R}_1 \vee \mathrm{R}_0$ è vera), quindi non sono logicamente equivalenti.

Esercizio 3 — 6 punti

1. Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   Il numero z divide il numero y.

   utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $\cdot$ di moltiplicazione interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $0, \cdot$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{R}$ la frase

   Se 0 non divide un numero, quel numero è non nullo.

Soluzione:

1. Una possibile formalizzazione è

$$\exists w(w \cdot z = y).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall y((\neg \exists w(w \cdot 0 = y)) \to \neg(y = 0)).$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{Q\}$ con Q simbolo di relazione binaria. Sia φ l'enunciato

$$\forall y \exists z \neg Q(z, y).$$

1. Determinare se $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models \varphi$.
2. Determinare se $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models \varphi$.
3. L'enunciato φ è soddisfacibile? È valido?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'enunciato φ interpretato in $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$ afferma che

   > Per ogni numero naturale y esiste un numero naturale z tale che $z \not\geq y$ (ovvero tale che $z < y$).

   Ma se $y = 0$, un tale z non può esistere (0 è il più piccolo tra i numeri naturali). Quindi $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \not\models \varphi$.

2. L'enunciato φ interpretato in $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ afferma che

   > Per ogni numero naturale y esiste un numero naturale z tale che $z \not\leq y$ (ovvero tale che $y < z$).

   Questo equivale a dire che ci sono numeri naturali arbitrariamente grandi, quindi $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models \varphi$.

3. Per quanto visto ai punti precedenti, φ è soddisfacibile (è vero, ad esempio, in $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$) ma non valido (per esempio non è soddisfatto in $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$).

Esercizio 5 6 punti

Siano b e c due numeri naturali. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza

$$(b+c)^n \geq b^n + c^n.$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 1$.

Passo base ($n = 1$)**.** Si ha che $(b+c)^1 = b+c = b^1 + c^1$, dunque in particolare $(b+c)^1 \geq b^1 + c^1$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $(b+c)^n \geq b^n + c^n$.

Tesi induttiva: $(b+c)^{n+1} \geq b^{n+1} + c^{n+1}$.

Utilizzando la definizione di esponenziale e il fatto che $b+c$, cb^n e bc^n sono tutti numeri maggiori o uguali a 0, si ottiene che

$$\begin{aligned}
(b+c)^{n+1} &= (b+c)^n \cdot (b+c) \\
&\geq (b^n + c^n) \cdot (b+c) && \text{(per ipotesi induttiva)} \\
&= b^{n+1} + cb^n + bc^n + c^{n+1} \\
&\geq b^{n+1} + c^{n+1},
\end{aligned}$$

come desiderato.