Ordinamento, algoritmi quadratici

Algoritmi e strutture dati

Ugo de'Liguoro, Andras Horvath

1

Sommario

- Obiettivi
  - sviluppo di algoritmi di ordinamento di complessità quadratica, verifica della correttezza con invariante e introduzione dell'analisi di complessità
- Argomenti
  - problema dell'ordinamento (sorting)
  - insertion-sort
  - selection-sort

2

Ricerca in vettore non ordinato

- come si cerca un elemento in un vettore non ordinato?
- dobbiamo esaminare il vettore elemento per elemento
- quanti confronti servono per cercare un elemento in un vettore di *n* elementi nel caso peggiore e nel caso migliore?
- *n* nel caso peggiore (elemento non c'è)
- 1 nel caso migliore (il primo elemento esaminato è quello cercato)
- come si procede nel caso in cui il vettore è ordinato?

3

Ricerca binaria (dicotomica)

- algoritmo di ricerca per cercare elementi in vettori ordinati
- l'idea: confrontiamo l'elemento centrale e quello ricercato
  - se sono uguali, allora l'elemento è presente
  - se l'elemento ricercato è più grande, bisogna cercare nella prima meta del vettore
  - se l'elemento ricercato è più piccolo, bisogna cercare nella seconda meta del vettore
- iterando l'idea, in ogni giro o si trova l'elemento o si dimezza la dimensione del problema
- quando la porzione ancora "valida" del vettore contiene un elemento solo, è facile decidere se l'elemento c'è o meno

4

Ricerca binaria (dicotomica)

```
BinSearch-Ric(x, A, i, j)
        ▷ Pre: A[i..j] ordinato
        ▷ Post: true se x ∈ A[i..j]
if i > j then        ▷ A[i..j] = ∅
    return false
else
    m ← ⌊(i + j)/2⌋
    if x = A[m] then
        return true
    else
        if x < A[m] then
            return BinSearch-Ric(x, A, i, m − 1)
        else      ▷ A[m] < x
            return BinSearch-Ric(x, A, m + 1, j)
        end if
    end if
end if
```

5

Ricerca in vettore ordinato

- quanti confronti servono con la ricerca binaria nel caso peggiore e nel caso migliore?
- 1 nel caso migliore (il primo elemento esaminato è quello cercato)
- nel caso peggiore (elemento ricercato non c'è) si dimezza il problema in ogni giro: numero di confronti è all'incirca $log_2 n$ (possiamo dimezzare il vettore $log_2 n$ volte senza svuotarlo)

Conviene ordinare se bisogna fare tante ricerche.

6

Problema dell'ordinamento

Ordinamento come problema computazionale:

Input: una sequenza di n numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Output: una permutazione $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ della sequenza in ingresso tale che $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots \leq a_{i_n}$

7

Forza bruta

SORTED(A)
for $i \leftarrow 2$ **to** $length(A)$ **do**
  if $A[i-1] > A[i]$ **then**
    return *false*
  end if
end for
return *true*

TRIVIAL-SORT(A)
for all A' permutazione di A **do**
  if SORTED(A') **then**
    return A'
  end if
end for

Il numero di permutazioni di un vettore di n elementi distinti sono n!

8

Crescita di 2^n ed n!

n	2^n	$n!$
0	1	1
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720
7	128	5040
8	256	40320
9	512	362880
…	...	....
18	262144	6402373705728000
19	524288	121645100408832000
...		

9

1

Ordinamento per inserimento

- l'idea per ordinare il vettore $A[1..n]$:
  - quando la parte $A[1..i-1]$ è già ordinato
  - si può **inserire** l'elemento $A[i]$ nella parte ordinata tramite scambi:
    - se $A[i] \geq A[i-1]$ allora $A[1..i]$ è ordinato e ci si ferma, altrimenti si scambia $A[i]$ con $A[i-1]$
    - se $A[i-1] \geq A[i-2]$ allora $A[1..i]$ è ordinato e ci si ferma, altrimenti si scambia $A[i-1]$ con $A[i-2]$
    - se $A[i-2] \geq A[i-3]$ allora $A[1..i]$ è ordinato e ci si ferma, altrimenti si scambia $A[i-2]$ con $A[i-3]$
    - ...
  - dopo gli scambi $A[1..i]$ è ordinato
- per partire abbiamo che $A[1..1]$ è ordinato
- si inserisce nella parte ordinata prima $A[2]$, poi $A[3]$, ... e infine $A[n]$

10

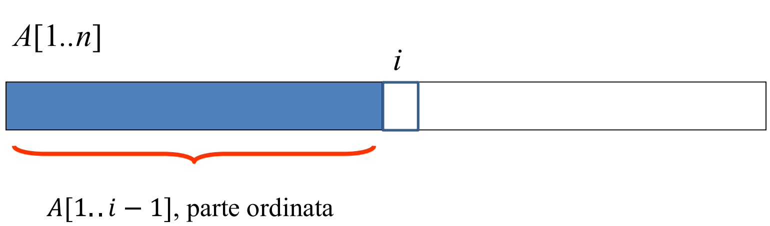
Simulazione

- simuliamo l'idea con $A = (5,4,7,3,6,6)$

$(\mathbf{4}, 5,7,3,6,6)$
$(4,5, \mathbf{3}, 7,6,6)$
$(4, \mathbf{3}, 5,7,6,6)$
$(\mathbf{3}, 4,5,7,6,6)$
$(3,4,5, \mathbf{6}, 7,6)$
$(3,4,5,6, \mathbf{6}, 7)$

11

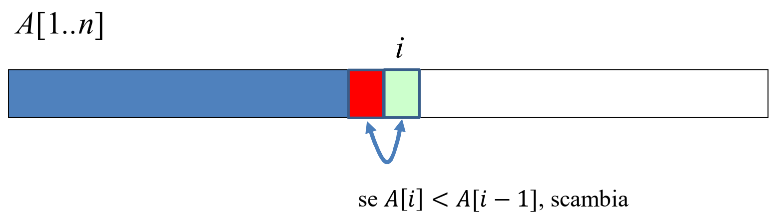
Ordinamento per inserimento



12

Ordinamento per inserimento

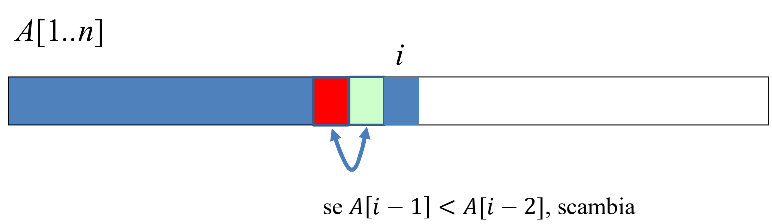
$A[i] < A[i-1]$?



13

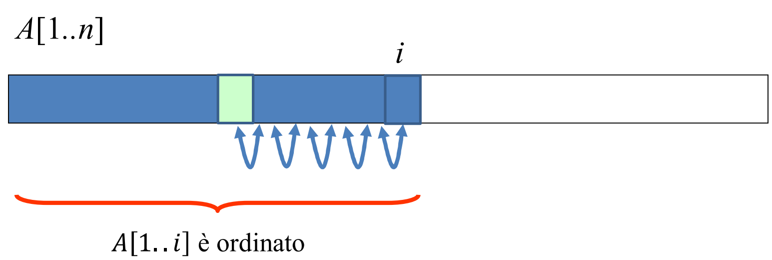
Ordinamento per inserimento

$A[i-1] < A[i-2]$?



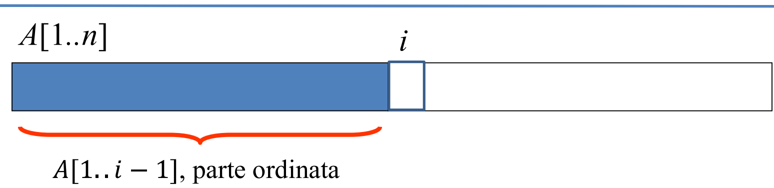
14

Ordinamento per inserimento



15

Ordinamento per inserimento




```
INSERTION-SORT(A)
for i ← 2 to length(A)  do
        ▷ inserisce A[i] in A[1..i − 1]
    j ← i
    while j > 1 and A[j − 1] > A[j] do
        scambia A[j − 1] con A[j]
        j ← j − 1
    end while
end for
return A
```

16

Ordinamento per inserimento

```
INSERTION-SORT(A)
for i ← 2 to length(A)  do
            ▷ inserisce A[i] in A[1..i − 1]
    j ← i
    while j > 1 and A[j − 1] > A[j] do
        scambia A[j − 1] con A[j]
        j ← j − 1
    end while
end for
return A
```

- Insertion-Sort(A) termina per ogni A?
- La sequenza che restituisce è ordinata?
- Quanto tempo impiega in funzione di $n = length(A)$?

La **terminazione** è assicurata dal fatto che sia il **for** che il **while** sono cicli limitati.

17

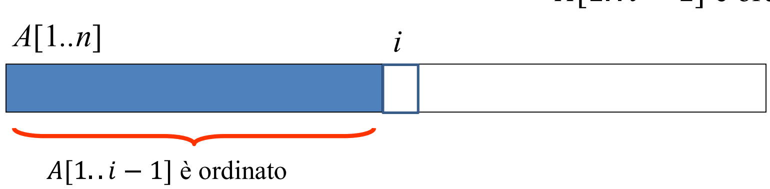
Correttezza dell'algoritmo

```
INSERTION-SORT(A)
for i ← 2 to length(A)  do
            ▷ inserisce A[i] in A[1..i − 1]
    j ← i
    while j > 1 and A[j − 1] > A[j] do
        scambia A[j − 1] con A[j]
        j ← j − 1
    end while
end for
return A
```

Insertion-Sort è iterativo con due cicli, usiamo invarianti per la sua verifica.

L'invariante del ciclo esterno?

$A[1..i-1]$ è ordinato.

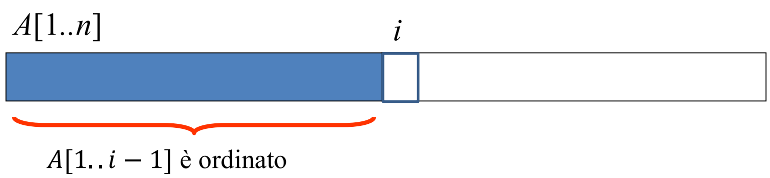


18

Correttezza dell'algoritmo

Dimostrazione dell'invariante esterno: $A[1..i-1]$ è ordinato:

- **inizializzazione**:
  - prima di eseguire il ciclo per la prima volta $i = 2$
  - con $i = 2$ l'invariante diventa $A[1..1]$ è ordinato e questo è vero

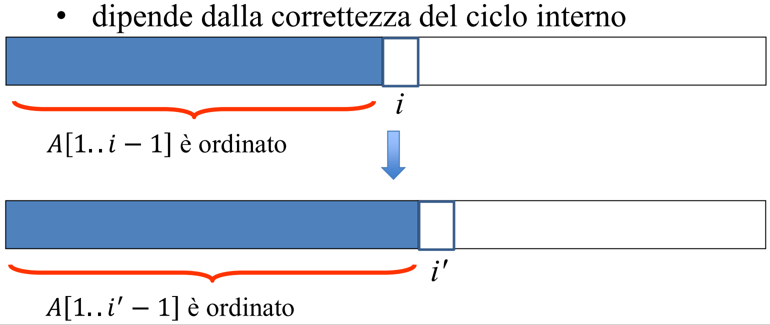


19

Correttezza dell'algoritmo

Dimostrazione dell'invariante esterno: $A[1..i-1]$ è ordinato:

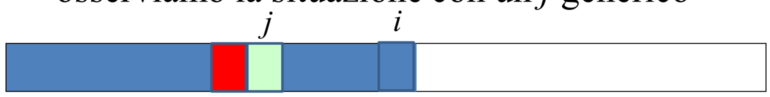
- **mantenimento**:
  - dobbiamo dimostrare che "$A[1..i-1]$ ordinato $\Rightarrow$ $A[1..i'-1]$ ordinato" dove $i' = i+1$
  - se $A[i]$ viene inserito correttamente in $A[1..i-1]$, allora l'invariante viene mantenuto
  - dipende dalla correttezza del ciclo interno



20

Correttezza dell'algoritmo

- Invariante del ciclo interno?
- osserviamo la situazione con un *j* generico

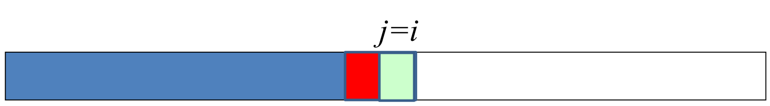


- verde: elemento che era nella posizione *i* prima di eseguire il ciclo interni
- abbiamo già eseguiti degli scambi
- rosso: elemento da confrontare con verde
- invariante:
  - $A[1..j-1]$ e $A[j..i]$ sono ordinati
  - ciascun elemento in $A[1..j-1]$ è minor uguale di tutti gli elementi di $A[j+1..i]$

21

Correttezza dell'algoritmo

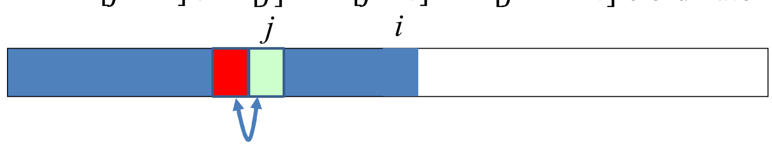
- **dimostriamo l'invariante**: $A[1..j-1]$ e $A[j..i]$ sono ordinati e ciascun elemento in $A[1..j-1]$ è minor uguale di tutti gli elementi di $A[j+1..i]$ (abbrev.: $A[1..j-1] \leq A[j+1..i]$)
- **inizializzazione**: con $j=i$ l'invariante diventa:
  - $A[1..i-1]$ e $A[i..i]$ (vettore di singolo elemento) sono ordinati
  - ciascun elemento in $A[1..i-1]$ è minor uguale di tutti gli elementi di $A[i+1..i] = \varnothing$
- quindi $j=i$ l'invariante si riduce a: $A[1..i-1]$ è ordinato
- e questo è garantito dal invariante esterno



22

Correttezza dell'algoritmo

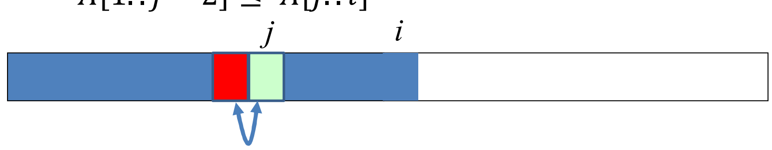
- **dimostriamo l'invariante**: $A[1..j-1]$ e $A[j..i]$ sono ordinati e $A[1..j-1] \leq A[j+1..i]$
- **mantenimento**: bisogno dimostrare che "se l'invariante vale prima allora vale anche dopo l'esecuzione del ciclo"
- il ciclo si esegue solo se $j > 1 \wedge A[j-1] > A[j]$
- se il ciclo si esegue allora si scambiano $A[j-1]$ e $A[j]$ e j viene decrementato ($j' = j-1$), implicazioni:
  - $A[1..j-1]$ è ordinato $\Rightarrow A[1..j'-1] = A[1..j-2]$ è ordinato
  - $A[j..i]$ è ordinato $\wedge A[1..j-1] \leq A[j+1..i] \wedge$ $A[j-1] > A[j] \Rightarrow A[j'..i] = A[j-1..i]$ è ordinato



23

Correttezza dell'algoritmo

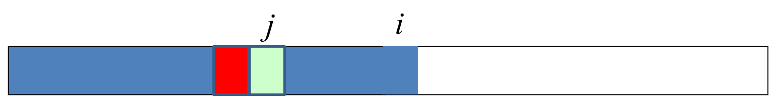
- **dimostriamo l'invariante**: $A[1..j-1]$ e $A[j..i]$ sono ordinati e $A[1..j-1] \leq A[j+1..i]$
- **mantenimento**: bisogno dimostrare che "se l'invariante vale prima allora vale anche dopo l'esecuzione del ciclo"
- il ciclo si esegue solo se $j > 1 \wedge A[j-1] > A[j]$
- se il ciclo si esegue allora si scambiano $A[j-1]$ e $A[j]$ e j viene decrementato ($j' = j-1$), implicazioni:
  - $A[1..j-1] \leq A[j+1..i] \wedge A[j-1] > A[j] \Rightarrow$
    $A[1..j'-1] \leq A[j'+1..i]$ ovvero
    $A[1..j-1] \leq A[j+1..i] \wedge A[j-1] > A[j] \Rightarrow$
    $A[1..j-2] \leq A[j..i]$



24

Correttezza dell'algoritmo

- **invariante interno**: $A[1..j-1]$ e $A[j..i]$ sono ordinati e $A[1..j-1] \leq A[j+1..i]$
- all'uscita dal ciclo interno abbiamo $j = 1 \vee A[j-1] \leq A[j]$
- in ogni caso all'uscita l'invariante implica che $A[1..i]$ è ordinato
- quindi abbiamo dimostrato che
  se prima di eseguire il ciclo interno $A[1..i-1]$ è ordinato allora dopo l'esecuzione del ciclo interno $A[1..i]$ è ordinato



25

Correttezza dell'algoritmo

- **invariante esterno**: $A[1..i-1]$ è ordinato
- all'uscita dal ciclo interno abbiamo $i = n + 1$
- dunque all'uscita l'invariante implica che $A[1..n]$ è ordinato
- quindi abbiamo dimostrato che
  l'algoritmo è corretto

26

Il tempo di calcolo di Insert-Sort

Quanto tempo impiega?
Dipende dalla dimensione dall'ingresso, $n = length(A)$.

27

Il tempo di calcolo di Insert-Sort

		costo atomico (non utile)	num. volte
1.	**for** $i \leftarrow 2$ **to** $length(A)$	c_1	n
2.	$j \leftarrow i$	c_2	$n-1$
3.	**while** $j > 1$ **and** $A[j-1] > A[j]$	c_3	$\sum_{i=2}^{n} t_i$
4.	scambia $A[j-1]$ con $A[j]$	c_4	$\sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
5.	$j \leftarrow j - 1$	c_5	$\sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$

Riga 1: l'esecuzione prevede assegnare un valore alla variabile i (2 la prima volta e $i + 1$ successivamente) e controllare se i sia $\leq length(A)$; il controllo viene eseguito con i=2,3,..., $length(A)$+1, quindi n volte

$$t_i = \cancel{n}.\ \text{esecuzioni del test del } \textbf{while} = \begin{cases} 1 & \text{nel caso migliore} \\ i & \text{nel caso peggiore} \end{cases}$$

28

Il tempo di calcolo di Insert-Sort

Con $t_i = i$, caso peggiore:

tempo

$$T_{ins}(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_3 \sum_{i=2}^{n} i + c_4 \sum_{i=2}^{n} (i-1) + c_5 \sum_{i=2}^{n} (i-1)$$
$$= (c_1+c_2)n - c_2 + c_3 \sum_{i=2}^{n} i + (c_4 + c_5)\sum_{i=2}^{n} (i-1)$$

$$\sum_{i=2}^{n} i = 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+2}{2}(n-1) = \frac{n^2+n-2}{2}$$

som. n.

$$\sum_{i=2}^{n} (i-1) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n}{2}(n-1) = \frac{n^2-n}{2}$$

$$T_{ins}(n) = \frac{c_3+c_4+c_5}{2} n^2 + \left(c_1 + c_2 + \frac{c_3-c_4-c_5}{2}\right) n - (c_2+c_3)$$
$$= an^2 + bn + c$$

Nel caso peggiore Insert-Sort ha
complessità temporale quadratica.

29

Il tempo di calcolo di Insert-Sort

Con $t_i = 1$, caso migliore:

$$T_{ins}(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_3 \sum_{i=2}^{n} 1 + c_4 \sum_{i=2}^{n} (1-1) + c_5 \sum_{i=2}^{n} (1-1)$$
$$= (c_1+c_2)n - c_2 + c_3 \sum_{i=2}^{n} 1$$
$$\sum_{i=2}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n - 1$$
$$T_{ins}(n) = (c_1 + c_2 + c_3)n - (c_2 + c_3) = dn + e$$

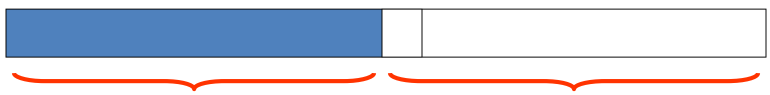
Nel caso migliore Insert-Sort ha
complessità temporale lineare.

30

Ordinamento per selezione

L'idea dell'algoritmo:
- assumiamo che la parte sinistra del vettore sia ordinato e quella a destra contiene elementi maggiori-uguali
- graficamente:

$A[1..n]$ i



$A[1..i\text{-}1]$,parte ordinata

tutti gli elementi di questa parte sono maggiori-uguali di quelli nella parte ordinata,

abbrev.: $A[1..i\text{-}1] \leq A[i..n]$

- cerchiamo l'elemento minimo in $A[i..n]$ e lo scambiamo con $A[i]$
- cosi la parte ordinata si allarga (la disordinata diminuisce)

31

Ordinamento per selezione

SELECT-SORT(A)
for $i \leftarrow 1$ **to** $length(A) - 1$ **do** $\triangleright\ n = length(A)$

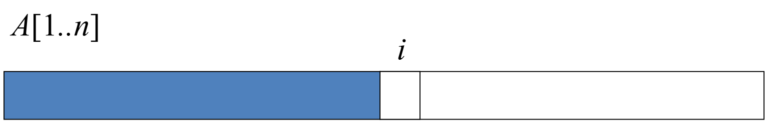
    $k \leftarrow i$
    for $j \leftarrow i + 1$ **to** $length(A)$ **do**
        if $A[k] > A[j]$ **then**
            $k \leftarrow j$
        end if
    end for
    scambia $A[i]$ con $A[k]$
end for
return A

32

Ordinamento per selezione

Invariante del ciclo esterno:

- $A[1 \,..\, i-1]$ è ordinato
- se x è in $A[i \,..\, n]$ ed y è in $A[1 \,..\, i-1]$ allora $x \geq y$



Inizializzazione:

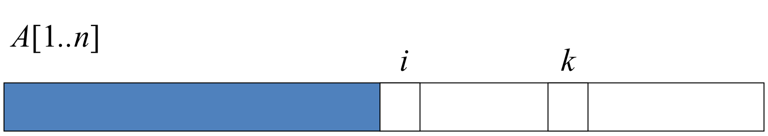
- con i=1 la porzione $A[1 \,..\, i-1]$ è vuota
- dunque la proposizione espressa dall'invariante non può che valere

33

Ordinamento per selezione

Mantenimento:

- dobbiamo dimostrare che "se vale prima allora vale anche dopo"
- come ipotesi possiamo assumere che prima di eseguire il corpo del ciclo interno
  - $A[1..i{-}1]$ è ordinato e
  - se x è in $A[i..n]$ ed y è in $A[1..i{-}1]$ allora $x \geq y$
- assumiamo che la ricerca del minimo in $A[i..n]$ sia eseguita correttamente e di conseguenza $A[k]$ sia il minimo valore in $A[i..n]$ (dimostreremo dopo che è corretto)
- $A[k]$ è minimo in $A[i..n]$ ma è maggior-uguale di qualunque elemento in $A[1..i{-}1] \Rightarrow$ scambiando $A[i]$ con $A[k]$ e incrementando i di 1 l'invariante si mantiene

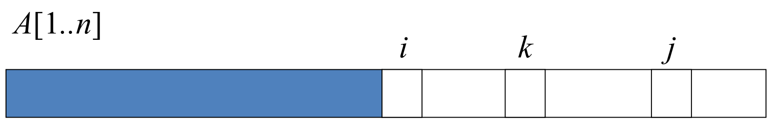


34

Ordinamento per selezione

Invariante del ciclo interno:

• $A[k]$ è minimo in $A[i..j-1]$



Inizializzazione:

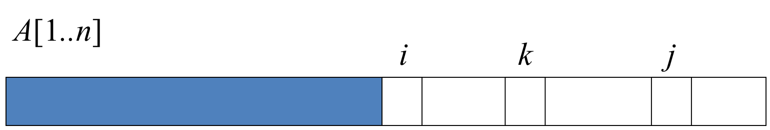
• con $k=i$ e $j=i+1$ l'invariante si riduce a "$A[i]$ è minimo in $A[i..i]$" e questo è evidente che sia vero

35

Ordinamento per selezione

Invariante del ciclo interno:

- $A[k]$ è minimo in $A[i..j-1]$



Mantenimento:

- come ipotesi induttiva assumiamo che l'invariante vale prima di eseguire il ciclo
- il corpo del ciclo aggiorna la posizione del massimo se $A[k]>A[j]$ e, in ogni caso, incrementa j
- dunque l'invariante viene mantenuto

36

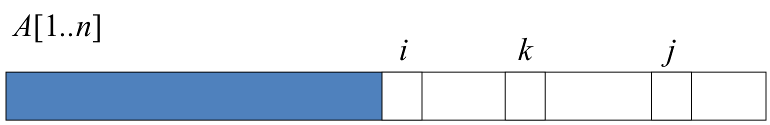
Ordinamento per selezione

Invariante del ciclo interno:

- $A[k]$ è minimo in $A[i..j-1]$
- quando si esce dal ciclo $j=n+1$ quindi $A[k]$ è minimo in $A[i..n]$ dunque il minimo si trova correttamente

Invariante del ciclo esterno:

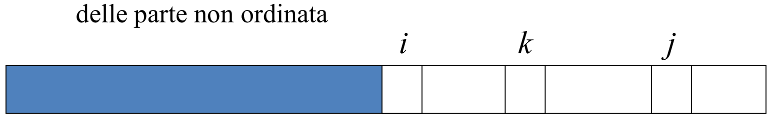
- $A[1 .. i-1]$ è ordinato
- se x è in $A[i .. n]$ ed y è in $A[1 .. i-1]$ allora $x \geq y$
- quando si esce dal ciclo $i=n$ quindi $A[i..n-1]$ è ordinato e $A[n]$ è maggiore uguale di qualunque elemento di $A[1 .. n-1]$, dunque il vettore è ordinato e l'algoritmo è corretto



37

Complessità di Select-Sort

- come nel caso si Insert-Sort possiamo contare per ogni riga quante volte viene eseguito
- **caso migliore**: il minimo si trova sempre all'inizio della parte non ordinata (k non viene mai aggiornato)
- **caso peggiore**: la parte non ordinata in realtà è ordinata decrescente e quindi k viene aggiornato dopo ogni confronto
- in tutti e due i casi la funzione $T_{sel}(n)$ (il costo di eseguire Select-Sort) è un polinomio di secondo grado
- questo succede perché j in ogni caso deve arrivare in fondo delle parte non ordinata



Sia nel caso migliore sia nel caso peggiore Select-Sort ha ***complessità temporale quadratica.***

38

Insertion-Sort vs Select-Sort

```
INSERTION-SORT(A)
for i ← 2 to length(A)  do
        ▷ inserisce A[i] in A[1..i − 1]
    j ← i
    while j > 1 and A[j − 1] > A[j] do
        scambia A[j − 1] con A[j]
        j ← j − 1
    end while
end for
return A
```

```
SELECT-SORT(A)
for i ← 1 to length(A) − 1  do
    k ← i
    for j ← i + 1 to length(A) do
        if A[k] > A[j] then
            k ← j
        end if
    end for
    scambia A[i] con A[k]
end for
return A
```

$$C^{min}(n) = \text{n. confronti nel caso migliore}$$
$$C^{max}(n) = \text{n. confronti nel caso peggiore}$$
$$S^{min}(n) = \text{n. spostamenti nel caso migliore}$$
$$S^{max}(n) = \text{n. spostamenti nel caso peggiore}$$

39

Insertion-Sort vs Select-Sort

```
INSERTION-SORT(A)
for i ← 2 to length(A)  do
        ▷ inserisce A[i] in A[1..i − 1]
    j ← i
    while j > 1 and A[j − 1] > A[j] do
        scambia A[j − 1] con A[j]
        j ← j − 1
    end while
end for
return A
```

```
SELECT-SORT(A)
for i ← 1 to length(A) − 1  do
    k ← i
    for j ← i + 1 to length(A) do
        if A[k] > A[j] then
            k ← j
        end if
    end for
    scambia A[i] con A[k]
end for
return A
```

$$C^{min}_{Ins}(n) = ??? \qquad C^{min}_{Sel}(n) = ???$$
$$C^{max}_{Ins}(n) = ??? \qquad C^{max}_{Sel}(n) = ???$$
$$S^{min}_{Ins}(n) = ??? \qquad S^{min}_{Sel}(n) = ???$$
$$S^{max}_{Ins}(n) = ??? \qquad S^{max}_{Sel}(n) = ???$$

40

Alberi di decisione

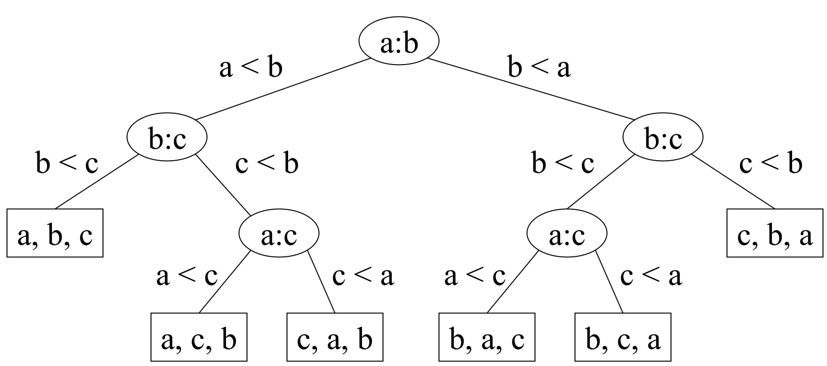
Un albero rappresenta le esecuzioni di un algoritmo:

- i nodi interni rappresentano decisioni da prendere
- le foglie rappresentano possibili uscite (output)
- i rami rappresentano particolari esecuzioni (secondo il risultato decisione)

L'albero di decisione che minimizza l'altezza fornisce un confine inferiore al numero di decisioni necessarie nel caso peggiore.

41

L'albero per l'ordinamento di 3 el.



42

Il problema dell'ordinamento

Nel caso dell'ordinamento:

- n! foglie (un ordinamento è una permutazione)
- i nodi interni rappresentano confronti

In un albero binario per avere k foglie ci vogliono almeno $log_2 k$ livelli.

Nel caso dell'ordinamento (*sorting*) il numero dei confronti deve essere dunque maggiore di (usando la formula di Stirling per approssimare n!):

$$\log_2 n! \approx \log_2\left(\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\right) = \log_2 \sqrt{2\pi n} + n\log_2(n/e) \approx n\,\log_2 n$$

43