Esercizi RO

29 September 2021 18:19

Esercizi supplementari di modellazione (suppl-lp) es 1

ESERCIZI SUPPLEMENTARI DI MODELLAZIONE

1. Problemi di mix

I seguenti sono esercizi su problemi di mix. Il primo è semplice e necessita solo di due variabili. Un programma con due sole variabili continue si può risolvere molto facilmente con una procedura grafica che verrà presto introdotta nel corso. Gli esercizi successivi, pur rimanendo nell'ambito dei problemi di mix, sono un po' più articolati di quelli esaminati a lezione.

1. Una gelateria produce due tipi di sorbetti, A e B, partendo dalle materie prime latte e frutta. Per produrre un Kg di sorbetto A servono 300 g di frutta e mezzo litro di latte. Per produrre un Kg di sorbetto B servono 250 g di frutta e 650 ml di latte. Sono disponibili a magazzino 300 litri di latte e 200 Kg di frutta. Nessuno dei due sorbetti può rappresentare meno del 30% della produzione totale. Il sorbetto di A garantisce un profitto netto di 10 euro/Kg, il sorbetto B garantisce un profitto di 6 euro/Kg.

Scrivere il programma lineare che permette di determinare il mix produttivo che massimizza il profitto totale, supponendo di poter vendere l'intera produzione.

2. In una mensa scolastica, il pasto quotidiano degli allievi deve fornire loro i seguenti nutrienti.

- Tra i 60 e gli 80 grammi di proteine.
- Non più di 70 grammi di grassi.
- Tra i 200 e i 400 grammi di carboidrati.
- Tra le 2500 e le 4000 calorie.

La mensa può acquistare (1) pasta a 2 euro/Kg, (2) carne a 12 euro/Kg, (3) pesce a 18 euro/Kg, (4) legumi a 5 euro/Kg e (5) altre verdure a 1 euro/Kg. I tenori di macronutrienti in grammi/100 gr e Cal/100 gr dei vari alimenti sono riportati in tabella.

	Pasta	Carne	Pesce	Legumi	Verdure
Proteine	4	59	17	25	10
Grassi	13	13	14	0	0
Carboidrati	83	28	0	60	5
Calorie	130	140	170	360	65

Scrivere il programma lineare che permette di determinare il mix di alimenti per comporre il pasto base che soddisfa i requisiti sui nutrienti e l'apporto calorico a costo totale minimo.

3. Una ditta produce due tipi di prodotti, A e B, a partire da tre tipi di componenti 1, 2 e 3. Ogni unità di prodotto A richiede per essere assemblato tre componenti di tipo 1, due di tipo 2 e cinque di tipo 3. Ogni unità di prodotto B richiede otto componenti di tipo 1, quattro di tipo 2, sette di tipo 3.

I tre tipi di componenti sono reperibili sul mercato in tre tipi di confezioni, denominati *grande*, *media* e *piccola*, al costo rispettivamente di 30, 20 e 10 euro l'una. Ogni confezione contiene un mix dei tre componenti, come da tabella.

Confezione	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3
Grande	20	15	2
Media	8	10	6
Piccola	5	3	2

Ogni unità di prodotto A viene venduta a 200 euro, ogni unità di prodotto B a 100 euro. Si vuole programmare la produzione del mese corrente.

Dei tre componenti $1, 2, 3$, per questo mese sono ancora disponibili in magazzino rispettivamente 1000, 3000 e 7000 unità utilizzabili.

Per questo mese non si ritiene possibile vendere più di 100000 unità complessive dei due prodotti $(A + B)$. Del prodotto A sono richieste almeno 8000 unità e del prodotto B ne sono richieste almeno 10000. Comunque nessuno dei due prodotti può rappresentare, per decisione del management, più del 60% del mix prodotto.

Scrivere il programma lineare che permette di pianificare i volumi produttivi dei prodotti A e B e gli acquisti necessari di confezioni di componenti al fine di massimizzare il saldo (incasso − spese), supponendo di poter vendere l'intera produzione.

1)

$A = 300f + 500l$

$B = 250f + 650l$

$300 = l$

$200 = F$

$B, A \geq 30$

$A = 10$ €

$B = 6$ €

$0{,}5A + 0{,}65B \leq 300$

$0{,}3A + 0{,}25B \leq 200$

$\text{MAX } P = 10A + 6B$

$B \geq 30\% (A+B)$

$0{,}7B \geq 0{,}3A$

$0{,}7A \geq 0{,}3B$

2)

$60 < P < 80$

$G < 70$

$200 < C < 400$

$2500 < Cal < 4000$

$x_1 = 2$ € $\quad x_3 = 18$ € $\quad x_5 = 1$ €

$x_2 = 12$ € $\quad x_4 = 5$ €

$60 < \sum_{n=1}^{5} x_i \cdot P_i \cdot 10 < 80$

[...]

$2500 < \sum_{n=1}^{5} x_i \, Cal_i \cdot 10 < 4000$

$\min pr = \sum_{n=1}^{5} x_i \cdot pr_i$

3) $A \; B \leftarrow C_1 \; C_2 \; C_3$

$A = 3C_1 + 2C_2 + 5C_3$

$B = 8C_1 + 4C_2 + 7C_3$

$P_G = 30 \quad P_m = 20 \quad P_p = 10$

$A = 200$ € $\quad B = 100$ €

$Cr_1 = 1000 \quad Cr_2 = 3000 \quad Cr_3 = 7000$

$A + B \leq 100'000$

$A \geq 8000$

$B \geq 10000$

$A, B \leq 60\%$

$\text{Max } S = A \cdot 200 + 100A - P_G \cdot 30 - P_m \cdot 20 - 10 P_p$

$A, B \leq 0{,}6 (A+B)$

$C_1 = A \cdot 3 + 8 \cdot B \leq P_G \cdot 20 + P_m \cdot 8 + P_p \cdot 5 + 1000$

$C_2 = A \cdot 2 + 4B \leq P_G \, 15 + P_m \, 10 + P_p \, 3 + 3000$

$C_3 = A \cdot 5 + 7B \leq P_G \, 5 + P_m \, 3 + P_p \, 2 + 7000$

$\angle\ C_3 = A\cdot 5 + 7B \leq P_G\ 5 + P_M\ 3 + P_P\ 2 + 7000$

è già lineare nonostante non sembri

$\downarrow$

A, B, P_G, P_M, P_r

Esercizi-vettori-matrici (2)

$A \xrightarrow{2\text{ anni}} +0{,}4$ $\qquad 100'000\ €$

$B \xrightarrow{3\text{ anni}} +0{,}7$

$\xrightarrow[2\text{ anni}]{} C \xrightarrow[\times 4]{} +1$ $\qquad$ soldi

$\xrightarrow[5]{} d \xrightarrow[1]{} 0{,}3$

$\max\ pr = S_6$

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$

A_1, A_2, A_3, A_4

B_1, B_2, B_3

$C_2\ D_5$

$S_1 = 100'000 = S_2$

$S_3 = S_2 + A_1 \cdot 0{,}4$

$S_4 = S_3 + A_2 \cdot 0{,}4 + B_1 \cdot 0{,}7$

$S_5 = S_4 + A_3 \cdot 0{,}4 + B_2 \cdot 0{,}7$

$S_6 = S_5 + A_4 \cdot 0{,}4 + B_3 \cdot 0{,}7 + C_2 + D_5 \cdot 0{,}3$

$\cancel{A_1 + B_1 \leq S_1}$

$A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + C_2 \leq S_2 = S_1$

$B_1 + A_2 + B_2 + A_3 + B_3 + C_2 \leq S_3$

$B_2 + A_3 + B_3 + A_4 + C_2 \leq S_4$

$B_3 + A_4 + D_5 \leq S_5$

Es speculare

$x_{ij} \in \{0,1\}$ $\qquad$ $y \geq 0 \quad T_i \geq 0$

$M_1, \dots$ $\qquad$ $1, \dots 10$ $\qquad$ ~~x~~ indicare reale

$\min\ t = y$

$$\begin{cases} y \geq T_1 = \sum_{n=1}^{10} x_{1n} \cdot p_{1n} \\ y \geq T_2 = \sum_{n=1}^{10} x_{1n}\, p_{2n} \\ y \geq T_3 = \sum_{n=1}^{10} x_{3n}\, p_{3n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1,2,3\} \\ \cancel{\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in \{1,\dots,10\}} \end{cases} \rightarrow \text{no} \quad \left(\text{più di una lav. per macchina}\right)$$

Es supplementari 2

EsSupplem...

Il modello deve prendere decisoni sul mix produttivo di A e B, a fronte di una disponibilità di componenti legata alle scorte di magazzino (disponibili a costo nullo) più gli eventuali acquisti di confezioni.

$$\begin{aligned}
\max\ z = & 200x_A + 100x_B - (30x_G + 20x_M + 10x_P) && (13)\\
\text{soggetto a } & x_A + x_B \leq 100000 && (14)\\
& x_A \geq 8000 && (15)\\
& x_B \geq 10000 && (16)\\
& x_A \leq 0.6(x_A + x_B) && (17)\\
& x_B \leq 0.6(x_A + x_B) && (18)\\
& 3x_A + 8x_B \leq 1000 + 20x_G + 8x_M + 5x_P && (19)\\
& 2x_A + 4x_B \leq 3000 + 15x_G + 10x_M + 3x_P && (20)\\
& 5x_A + 7x_B \leq 7000 + 2x_G + 6x_M + 2x_P && (21)\\
& x_A, x_B, x_G, x_M, x_P \in \mathbb{Z}_+. && (22)
\end{aligned}$$

2. Trasporto e assegnamento

4. Un comune deve smistare i rifiuti solidi urbani da quattro centri di raccolta $1, 2, 3, 4$ a tre impianti di trattamento A, B, C. Nei quattro centri di raccolta si accumulano rispettivamente 200, 500, 800 e 300 tonnellate all'anno di rifiuti. I tre impianti hanno rispettive capacità di trattamento massime di 1000, 1500 e 2000 tonnellate/anno, con costi differenti: 1000 euro/ton per l'impianto A, 600 euro/ton per l'impianto B, 1300 euro/ton per l'impianto C. A questo vanno aggiunti i costi di trasporto, in euro/ton, come da tabella seguente.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 200 & 50 \\ 120 & 130 & 90 \\ 80 & 100 & 120 \\ 120 & 150 & 60 \end{pmatrix} \end{array} = T_{ir}$$

Scrivere il programma lineare che permette di pianificare lo smistamento e il trattamento dei rifiuti dai centri di raccolta ai tre impianti a costo totale minimo.

5. Due tipi di carburante, **N**ormale e **S**uper, possono essere prodotti in tre impianti 1, 2, 3 che hanno diverse caratteristiche. L'impianto 1 può produrre 2 barili di Normale e 3 di Super consumando 8 barili di greggio. L'impianto 2 può produrre 3 barili di Normale e 4 di Super ogni 9 barili di greggio. L'impianto 3 può produrre 2 barili di Normale e 4 di Super ogni 10 barili di greggio.

?

Il greggio viene acquistato da tre fornitori A, B, C, che per il mese corrente hanno disponibilità di 50000, 150000 e 200000 barili, che possono essere forniti ai tre impianti con costi (in euro/barile) inclusivi di spese di acquisto e trasporto come da tabella.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 50 & 60 & 90 \\ 40 & 75 & 80 \\ 100 & 40 & 70 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il carburante Normale è venduto a 120 euro al barile, il Super a 150; la direzione dell'azienda vuole produrre un mix bilanciato, perciò nessuno dei due tipi può rappresentare meno del 40% della produzione mensile.

Scrivere il programma per pianificare l'approvvigionamento di greggio dai fornitori e il mix mensile da produrre al fine di massimizzare il saldo ricavi−costi, supponendo di poter vendere l'intera produzione.

3. Problemi multiperiodali

6. Un finanziere ha a disposizione due piani di investimento A e B, disponibili all'inizio di ciascuno dei prossimi cinque anni. Ogni euro investito in A all'inizio di ogni anno dà, due anni più tardi, un profitto di 0.4 euro, e può essere immediatamente reinvestito. Ogni euro investito in B all'inizio di ogni anno dà, tre anni dopo, un profitto di 0.7 euro. In più, da un certo momento in avanti, sarà possibile sfruttare anche due altri piani di investimento C e D. In particolare, ogni euro investito in C all'inizio del secondo anno raddoppierà dopo quattro anni. Ogni euro investito in D all'inizio del quinto anno darà un profitto di 0.3 euro l'anno successivo. Anche per i piani B, C, D, vale la possibilità di reinvestimento come per il piano A.

Il finanziere ha a disposizione 100000 euro e vuole sapere quale piano di investimento massimizza il profitto maturato entro l'inizio del sesto anno.

4. Problemi max/min, min/max

7. Un certo insieme di m task $T = \{1, 2, \dots, m\}$ deve essere smistato su un set di n processori $P = \{1, 2, \dots, n\}$. Ogni task $i \in T$ è caratterizzato da un certo consumo di memoria s_i e da un tempo di esecuzione p_{ij} che dipende dal processore $j \in P$ sul quale esso viene allocato. Ogni processore $j \in P$ dispone di una quantità limitata di memoria B_j per allocare i task. Ogni task va allocato ad un solo processore.

Scrivere il programma lineare per determinare l'allocazione di task sui vari processori al fine di minimizzare il tempo di calcolo consumato sul processore più "carico".

↳ Problema con terta

4) $\overset{\text{trasp}}{T_{ij}}$ $\quad i \in \{1,2,3,4\}$ $\quad j \in \{A,B,C\}$ $\qquad x_{ij} \in \mathbb{R}$

4) T_{ij} $\quad i \in \{1,2,3,4\}$ $\quad J \in \{A,B,C\}$ $\quad X_{iJ} \in \mathbb{R}$

prod $\quad P_i = \{200, 500, 800, 300\}$ ton/anno

smalt $\quad S_J = \{1000, 1500, 2000\}$ ton/anno $\quad$ scartate max

costo $\quad C_J = \{1000, 600, 1300\}$

$$\min\ z = \sum_{n=A}^{C}\sum_{m=1}^{4}\left(T_{mn} X_{iJ} + C_J X_{iJ}\right)$$

I = m $\quad$ J = n

$$\sum_{n=A}^{C}\sum_{m=1}^{4} X_{mn}\left(T_{mn} + C_m\right)$$

$$\forall i \quad \sum_{J=A}^{C} X_{iJ} = P_i$$

$$\forall J \quad \sum_{i=1}^{4} X_{iJ} \leq S_J$$

5) N, S $\qquad 1, 2, 3$

120 $\quad P_n$ $\qquad P_s = 150$

$$1 \to 2N + 3S = \underbrace{8}_{Q_J}\ G = \frac{2 \cdot 120 + 3 \cdot 150}{8}$$

$$2 \to 3N + 4S = 9 \quad \ldots$$

$$3 \to 2N + 4S = 10 \quad \ldots$$

$\forall i$

disp $\quad D_{A,B,C} = [\,5 \cdot 10^4,\ 15 \cdot 10^4 + 20 \cdot 10^4\,]$

costo tot x sorip $\quad C_{A1} \qquad C_{mn} \qquad m = \{A, B, C\} \quad n = \{1, 2, 3\}$

$X_{mn} \in \mathbb{R}$

- $$\max\ G = \sum_{i=A}^{C}\sum_{J=1}^{3} X_{iJ}\left(V_J - C_{iJ}\right)$$

→ x intero $\quad$ % ?

- $$\forall i \quad \sum_{J=1}^{3} X_{iJ} \leq D_i \qquad\qquad \forall J \quad \sum_{i=A}^{B} X_{iJ}\ \%\ Q_J = 0$$

- $$\frac{Q_n}{Q_J + Q_n} \geq 0{,}4 \qquad \frac{Q_J}{Q_n + Q_J} \geq 0{,}4$$

$$Q_n = 2\sum_{J=A}^{C} X_{J1} + 3 \quad \ldots + 2 \ldots$$

$$Q_J = 3 \quad " \quad + 4 \quad " \quad + 4 \quad "$$

6) finanziere già fatto

7) task $T = \{1, 2, \dots, m\}$ $\to s_i$ consumo mem, $\to p_{ij}$ tempo ($\times$ j proc)

proc $P = \{1, 2, \dots, n\}$ $\to B_j$ memoria disp.

$T \xrightarrow{\text{unico}} P$

- $\min z = y \quad \to y \geq t_j$

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ • $\forall i \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$

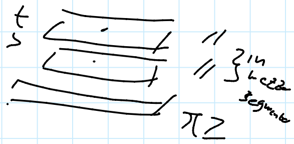
• $\forall j \forall i \quad x_{ij} \cdot s_i \leq B_j$

• $t_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} p_{ij}$

Dimostrazione intersezione e semipiano sono convessi

Inter

presi 2 punti in intersezione retta sta in uno $\wedge$ altro $\Rightarrow$ sta in intersezione



Semi

$x = 0 \quad \pi \geq$

$x_1 + (x_2 - x_1) \cdot t \quad 0 < t < 1$

$(1-t)\, x_1 + x_2$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

$(1-t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq 1$

$\nexists x_1, x_2 \mid \underbrace{(1-t)\, x_1 + x_2 \leq 0}_{\text{sia esterno}}$

Esercizi più difficili di esame

2) $\min z = \sum_{i=1}^{n} y_i$ $\quad y_i \geq 0$, $\quad y_i \geq (t_i + p_i - d_i)$

$t_i \geq 0$

Ordinam

$x_{ij} \ \{0, 1\}$ $\begin{cases} 1 & i \text{ precede } j \\ 0 & j \text{ precede } i \end{cases}$ $\quad x_{ij} + x_{ji} = 1$

Somma non moltiplica

vincoli

somma non moltiplico

$$t_i + p_i \le t_j + M(1 - x_{ij}) \quad \forall i \ne j$$ vincoli disgiuntivi

↳ blocca anche possibili cicli

2 senza M

Variabili x_{ij} $i, j \{1, \dots, n\}$

$$\begin{cases} 1 & \text{se job } i \text{ è lavorato per } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

vincoli

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$
$$\forall j \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i, j = \{1, \dots, n\}$$

j-esimo tempo $C_j = \sum_{k=1}^{j} \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\, p_i$ (molt. tutta tabella a sinistra)

due date j-esimo giorno $D_j = \sum_{i=1}^{n} d_i\, x_{ij}$ (molt colonna)

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad - y_i \ge 0$$
$$\rightarrow y_i \ge C_j - D_j$$

Esercizi algebra /calcolo matriciale

es-geom

Esercizio

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane delle seguenti rette.

(a) In $\mathbb{R}^2$, la retta passante per $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$ con direzione $\mathbf{v} = (2, 1)$.
(b) In $\mathbb{R}^2$, la retta passante per $\mathbf{x}_0 = (2, 3)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
(c) In $\mathbb{R}^3$, la retta passante per $\mathbf{x}_1 = (0, 2, 1)$ e $\mathbf{x}_2 = (1, 1, -1)$.
(d) In $\mathbb{R}^3$, la retta passante per $\mathbf{x}_0 = (1, 2, -1)$ e ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 0)$.
(e) In $\mathbb{R}^4$, la retta passante per $\mathbf{x}_0 = (1, 1, -1, 0)$ e parallela a $\mathbf{v} = (-2, 1, 0, 2)$

Esercizio

Calcolare la distanza

(a) tra il punto $(2, 1, -1)$ e il piano di equazione $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$;
(b) tra il punto $(1, 2)$ e la retta di equazione $2x_1 - x_2 = 1$;
(c) tra la il punto $(1, 0, 1, 2)$ e l'iperpiano di equazione $2x_1 - x_2 + x_4 = 2$.

Esercizio

Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$, la distanza tra un punto $\mathbf{y}$ e un iperpiano Π di equazione $\mathbf{vx} = \alpha$ è data da

$$d(\mathbf{y}, \Pi) = \frac{|\mathbf{vy} - \alpha|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Esercizio

Calcolare il prodotto di matrici (a blocchi).

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\mathbf{AB} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} = .$$

Esercizio ~ esami

a

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } 3x_1 &+ 2x_2 \le 9 \\ x_1 &- 2x_2 \le 1 \\ x_1 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} \max\ z &= -2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a } 2x_1 &+ x_2 \ge 4 \\ x_1 &- 2x_2 \le 5 \\ x_1 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

1a) $S: X = X_0 + vt$

$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = -1 + 1t \end{cases}$

$x_1 - 2x_2 = 3$

1b)

$\frac{1}{2} \cdot a + \frac{3}{2} a = 0$

$a = 3 \quad b = -1 \quad v = (3, -1)$

$\begin{cases} x_1 = 2 + 3t \\ x_2 = 3 - 1t \end{cases}$

$x_1 + 3x_2 = 11$

1c) $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$

$\begin{cases} x_1 = 0 - 1t \\ x_2 = 2 + 1t \\ x_3 = 1 + 2t \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$

1d) $1a + 1b + 1c = 0$ $\qquad a = 0,\ b = 1,\ c = -1$

$2a = 0$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = -1 - t \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

1e) $\begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 1 + 1t \\ x_3 = -1 + 0t \\ x_4 = 0 + 2t \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$

2a) $v(y - y_0)$

$\underset{v}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} x = \overset{\alpha}{2}$

$\dfrac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}(2\ 1\ -1) - 2\right|}{3} = \dfrac{|3|}{3} = 1$

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t = 2$

$7 + 9t = 2 \qquad t = \frac{2}{9} - \frac{7}{9} = -\frac{5}{9}$

$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{5}{9} \right\|$

$\frac{5}{9}\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{5}{3}$

2b) ✓

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad x\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=1$

$$\frac{|0-1|}{\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{5}$$

$\to x=y+vt$ $\quad x=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}t$ $\quad 0+5t=1$ $\quad t=\frac15$

$\to x=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\frac15$

$x-y=\begin{pmatrix}2/5\\-1/5\end{pmatrix}$

$$\frac{\sqrt{4+1}}{5}=\frac{\sqrt5}{5}$$

2c) ✓

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}x=2$

$$\frac{|4-2|}{\sqrt6}=\frac{2}{\sqrt2\sqrt3}=\frac{\sqrt6}{3}$$

$x=y+vt$ $\quad \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}x=2$

$x=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}t$ $\quad x-y=\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\0\\-1/3\end{pmatrix}$

$4+6t=2$ $\quad t=-\frac13$ $\quad \frac{\sqrt{4+1+1}}{3}=\frac{\sqrt6}{3}$

3) ✓

$X=y+vt$ $\quad Vx=\alpha$

$$\left[\begin{array}{l}[vy]+[v]t=\alpha\\ t=\dfrac{\alpha-vy}{v^2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x_0=\dfrac{\alpha-vy}{v^2}v+y\\ |x_0-y|=\left\|\dfrac{\alpha}{v^2}\cdot v-y\right\|\\ d=|x_0-y|=\left\|\dfrac{\alpha-vy}{\frac{v^2}{v}}\right\|\end{array}\right.$$

$$d=\left\|\frac{\alpha-vy}{v}\right\|=\frac{\|\alpha-vy\|}{\|v\|}=\boxed{\frac{|vy-\alpha|}{\|v\|}}$$ cvd

4) ✓

$$A\times B=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\0&0&1\\-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&2\\2&0&1\\0&1&2\\3&-2&3\end{pmatrix}$$

4×4 $4\times3\Rightarrow 4\times3$ compatibile

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\overset{Id}{A_{11}}\cdot B_{11}+A_{12}B_{21} & \overset{Id}{A_{11}}\cdot B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}\cdot B_{11}\;A_{22}\cdot B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

col 3

$$\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&4\\0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&2\\1&-2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\2&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0&1\\3&-2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&2\\2&0&1\\0&1&2\\3&-2&3\end{pmatrix}$$

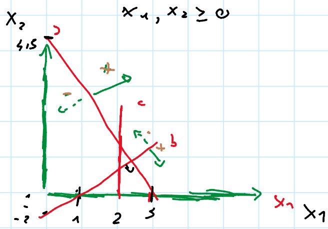
5) 1) max $z=3x_1+x_2$

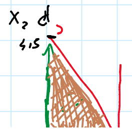
s.o.g. $\quad 3x_1+2x_2\le 9$ a

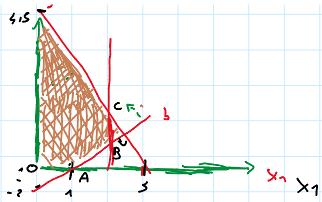
$\quad x_1-2x_2\ge 1$

$\quad x_2\le 2$

$\quad x_1,x_2\ge 0$



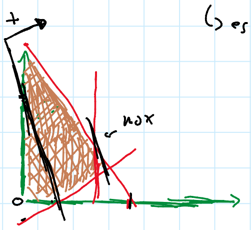




$A(1,0)$ $B(2,\frac{1}{2})$ $C(2,\frac{3}{2})$ $D(0,\frac{9}{2})$

$3x_1+x_2=k$ → iso prodotto

↳ es $k=3$



$3\cdot 2+\frac{3}{2}=k$

$\boxed{k=\frac{15}{2}}$

b) $\max z=-2x_1+x_2$

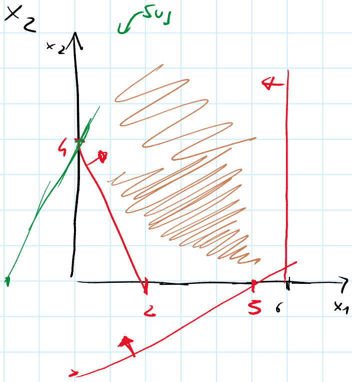
sog.

$2x_1+x_2\geq 4$

$x_1-2x_2\leq 5$

$x_1\leq 6$

$x_1,x_2\geq 0$



$-2x_1+x_2\geq 0$

4

$Z=\infty$ Illimitato

---

inverso
$$\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&2\\-1&-2&2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{Id}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&2\\-1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{Id}$$ ✓

---

es in classe
$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=8\\ -x_2+2x_3=4\\ x_1+x_2+x_3=12\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&8\\0&-1&2&4\\1&1&1&12\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&8\\0&-1&2&4\\0&-1&2&4\end{array}\right)=\text{indeterm}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&16\\0&1&-2&-4\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$x_1=16-3t$
$x_2=-4+2t$
$x_3=t$

↳ in $\mathbb{R}^3$ sarebbe retta

Esercizi in classe

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&-1&2&1&5\\&3&1&&2&4\\1&-1&-1&2&-2&2\end{array}\right)$$

eroff

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\0&3&1&0&2&4\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&-\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

10

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&-1&2&-2&2\\&3&1&0&2&4\\0&3&1&-2&5&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2/3&2&-4/3&2/3\\&1&\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&4/3\\&&&-2&3&-3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{6} & \frac{11}{6} \\ & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ & & & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$ continuo

∞^2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ & & & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

! -1

$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_5$

$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5$

$x_4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_5$

x_3, x_5 libere

Inversione

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & +3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & -1 & 0 & -1 & 0 \\ & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ & & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & 0 & -2 & -4 & +3 \\ & & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Inver

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 3 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & & \\ & -1 & -1 & -2 & 1 & \\ & -1 & -1 & -1 & & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 2 & -1 & \\ & & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

↳ non invertibile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 2 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & & \\ & -1 & -2 & -2 & 1 & \\ & -1 & -1 & -1 & & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 2 & -1 & \\ & & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & -1 & 1 & \\ & 1 & & 1 & & \\ & & 1 & 1 & -1 & \end{array}\right)$$

es IS in spam

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & w_1 \\ 1 & 0 & 1/2 & w_2 \\ 0 & 1 & 2 & w_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & w_2 \\ & & 0 & w_1 - 2w_2 \\ & 1 & 2 & w_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\to$ imp $\Rightarrow$ non in spam

es indipendenza

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$x_1 = -\frac{1}{2}x_3$

$x_2 = -x_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ & 1 & 2 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array}$$

Sottospazio

$$\mathcal{L}(S) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & w_1 \\ 1 & 0 & 1/2 & w_2 \\ 0 & 1 & 2 & w_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & w_2 \\ & & 0 & w_1-2w_2 \\ & 1 & 2 & w_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & w_2 \\ & 1 & 2 & w_3 \\ & & 0 & w_1-2w_2 \end{array}\right) \to \text{condizione}$$

$w_1 = 2w_2$ (PIANO)

ottenimento base

$$v_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad v_3\begin{pmatrix}1\\1/2\\2\end{pmatrix}$$

1) $v_1 \neq 0$ $\quad v_1 \notin \mathcal{L}(B) \leftarrow B = \emptyset$

2) $v_2 \neq 0$ $\quad v_2 \notin \mathcal{L}(B) \leftarrow B = \{v_1\}$

3) $v_3 \neq 0$ $\quad v_3 \in \mathcal{L}(B)$

$B = \{v_1, v_2\}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{soluzione unica} \Leftrightarrow v_3 \in \mathcal{L}(B)$$

Esempio

GAUSS JORDAN DOPO SOTTOSPAZI

$$V_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad V_3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_4\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

- S è libero → NO in quanto in $\mathbb{R}^3$
- $S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ è libero
- genera base + base con v_3 no
- $w = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L}(S)$ *
- $w \in \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$

no vedi sotto

$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \to -2$ non ottenibile

$A_S X = w$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & -3 & \end{array}\right)$$

non fermo ancora

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

non fermo ancora

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

*funziona

$\longrightarrow$ v_1 v_2 v_3 non ind

$V_3 = V_1 - 3V_2$

$\underbrace{V_1, V_2, V_4}_{\mathbb{R}^3}$ ind $\longrightarrow$ V_3 e V_5 dipendenti

Esercizi algebra lineare

es-linalg

ESERCIZI DI ALGEBRA E GEOMETRIA

1. Considerare i seguenti vettori, organizzati per comodità in colonne di una matrice $\boldsymbol{A}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} & \boldsymbol{v_4} \end{array} \\ \boldsymbol{A} = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Effettuare su $\boldsymbol{A}$ la riduzione di Gauss-Jordan, e generare la relativa matrice di trasformazione.
(b) Determinare una base di $V = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_4}\})$.
(c) Determinarne una base contenente $\boldsymbol{v_4}$, se possibile.
(d) Dati i vettori $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w'} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, determinare se $\boldsymbol{w} \in V$, $\boldsymbol{w'} \in V$.
(e) Dare un'interpretazione geometrica di V in $\mathbb{R}^3$.
(f) Dato un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$, si definisce il suo *spazio ortogonale* $V^\perp$ come

$$V^\perp = \{\boldsymbol{w} | \boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = 0 \; \forall\, \boldsymbol{v} \in V\}.$$

$V^\perp$ contiene tutti i vettori che sono ortogonali ad ogni vettore di V. Per V definito al punto (b), dare una descrizione dello spazio $V^\perp$, e una sua interpretazione geometrica.
(g) Il teorema delle alternative di Gordan stabilisce che data $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e un $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ risulta

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \neq \emptyset \iff \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0},\, \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \neq 0\} = \emptyset.$$

Verificare il teorema per il punto (d); la situazione suggerisce un'idea di dimostrazione.
Osservazione. Se V è lo spazio delle colonne di $\boldsymbol{A}$, la condizione $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ vuol dire $\boldsymbol{u} \in V^\perp$. Il teorema di Gordan stabilisce quindi che il sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è insolubile se e solo se il vettore $\boldsymbol{b}$ ha una proiezione ortogonale non nulla sullo spazio ortogonale alle colonne di $\boldsymbol{A}$ (graficamente, cosa vuol dire nell'esempio in esame?).

2. Dati due sottospazi V_1, V_2 di $\mathbb{R}^n$ dire se gli insiemi $V_1 \cap V_2$ e $V_1 \cup V_2$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

3. Si consideri la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare il rango di $\mathbf{A}$.
(2) Determinare una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ che contenga la terza colonna.
(3) Determinare se il vettore

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

fa parte dello spazio delle colonne di **A**.

4. Invertire le seguenti matrici.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

5. Data la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare:

(i) il rango di $\boldsymbol{A}$;
(ii) una base dello spazio delle colonne di $\boldsymbol{A}$ che contenga la colonna $\boldsymbol{A}_4$;
(iii) l'appartenenza o meno di $\boldsymbol{v} = (6, 5, 4)^T$ allo spazio delle colonne di $\boldsymbol{A}$.

1) a)

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 1 & & 1 & & \\ 1 & 1 & & -1/2 & & 1 & \\ 3 & & 3 & 3/2 & & & 1 \end{array}\right)$$

$E_2 \leftarrow E_2 - \frac{1}{2}E_1$
$\longrightarrow$
$E_3 \leftarrow E_3 - \frac{3}{2}E_1 \,/\, E_1 \leftarrow \frac{1}{2}E_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 & & \\ & 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & \\ & -3/2 & +3/2 & +3/2 & -3/2 & & 1 \end{array}\right)$$

$E_1 \leftarrow E_1 - E_2$
$\longrightarrow$
$E_3 \leftarrow E_3 + 3E_2 \,/\, E_2 \leftarrow 2E_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & 1 & +1/2 & 1 & -1 & \\ & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & \\ & & & & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

di base fuori base

$\{v_1, v_2\}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica

$$TA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 3 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

funziona

b) base $\rightarrow \{v_1, v_2\}$

o uso Gauss

(b) base $\rightarrow \{v_1, v_2\}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \neq 0 \wedge \notin L(\emptyset)$

o uso Gauss

$\{v_1, v_2\}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0 \wedge \notin L(S)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ ma $\in L(S) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 3/2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ & \cancel{6} & \cancel{3} \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 1/2 \end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0$ ma $\in L(S) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1/2 \\ & & 1/2 \end{array}\right)$

(d) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Imp $\Rightarrow w \notin L(S)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 3 & 0 & 3/2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & 1/2 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{array}\right) \in L(S)$

(e) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a_1 \\ 1 & 1 & a_2 \\ 3 & 0 & a_3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_1 - a_2 \\ & 1 & a_2 - (a_1 - a_2) \\ 0 & 0 & a_3 - (a_1 - a_2)3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & & a_1 - a_2 \\ & 1 & 2a_2 - a_1 \\ & & a_3 - 3a_1 + 3a_2 \end{array}\right)$

$-3x + 3y + z = 0$

$\cancel{y - 3x - 3z} = 0$ piano

(f)
$$\begin{matrix} 2 & w_1 & \\ 1 & w_2 & =0 \\ 3 & w_3 & \\ 1 & w_1 & \\ 1 & w_2 & =0 \\ 0 & w_3 & \end{matrix}$$

$L(S) \quad S = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

è sottospazio di $\mathbb{R}^n$

(somma e prodotto num. vettore e interno) ⟹ sottospazio

- $(\bar{w}_1 + \bar{w}_2)\bar{v} = w_1 \cdot v + w_2 \cdot v = 0 + 0$
- $\alpha(\vec{w} \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot 0 = 0$

$$\begin{cases} 2w_1 + w_2 + 3w_3 = 0 \\ w_1 + w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = -3t \\ w_2 = 3t \\ w_3 = t \end{cases}$$

9) $A\vec{x}=\vec{b}$ ammette soluzioni

$\iff$ $\vec{u}^T A = \vec{0}$, $\vec{u}^T b \neq 0$

proiez. ortogonale non nulla

non ha soluzioni

$u^T A\vec{x} = \vec{u}\vec{b}$

$\hookrightarrow 0 \quad \hookrightarrow \neq 0 \Rightarrow$ crea impossibilità

Riga di trasformazione che rende tutta una riga =0 (il vettore)
ma che non rende b=0 (il numero) -> ovvero un sistema impossibile

da matrice trasforma

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{array}\right)$

$\Downarrow$

(ha equaz. incongruente)

$\hookrightarrow$ v è dato da ultima riga (in quanto $0\,0\,0\,0 = n$)

$\boxed{\text{Dim}} \Rightarrow$

Se $A\bar{x}=b$ non ha soluzioni allora

non ver

2) V_1 sottospazio $\mathbb{R}^n$

V_2 " "

a) $V_1 \cap V_2$ " " ? $\to$ è retta (idea) $\Rightarrow$ è sotto spazio

b) $V_1 \cup V_2$ " " ? $\to$ no

$\bar{v} \in V_1 \cap V_2$

$\bar{w} \in V_1 \cap V_2$

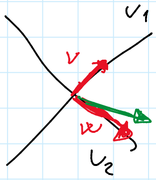
1) $(\bar{v}+\bar{w}) \in V_1$ (in quanto stanno entrambi in V_1)

$\in V_2$ (" in V_2)

2) $\alpha\bar{v} \in V_1$ (in quanto sta in V_1)

$\alpha\bar{v} \in V_2$ (" in V_2)

— def sottospazio

b) 

$\to$ non è in $V_1 \cup V_2$

3) $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 3 \\ & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 4 & 4 & 7 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-7 \\ & 1 & 0 & 2 & -6 \\ & & 1 & 1 & 7/4 \end{array}\right)$ $7/4$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$\begin{array}{c} \\ 1/2 \\ -2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ & 1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 & -5 \\ & & & & +2 \end{array}\right)$

rango 2 — non appartiene

1 0 1 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -6 \\ & 1 & 1 & 7/4 \end{array}\right) \quad 7/4$$

rango 2 — non appartiene

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

(4)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 3 & & 1 & \\ & & 2 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & & & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & & -1/2 \\ & 1 & 0 & -2 & 1 & -1/2 \\ & & 1 & & & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1/2 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & & \\ -1 & 1 & 0 & & 1 & \\ 2 & 1 & 3/2 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & & \\ & 1 & 1/2 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1/2 & -2 & & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & & \\ & 1 & 1/2 & 1 & 1 & \\ & & & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

→ non inv.

(5)
$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$E_2 \leftarrow E_2 - 1/2\, E_1$

$E_1 \leftarrow 1/2\, E_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 3 \\ 0 & 1/2 & 3 & -9/2 & 3/2 & 2 \\ & -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$E_1 \leftarrow E_1 - E_2$

$E_3 \leftarrow E_3 + 2E_2$

$E_2 \leftarrow 2E_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ & 1 & 6 & -9 & 3 & 4 \\ & & 8 & -6 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$E_1 \leftarrow E_1 + \frac{3}{8} E_3$

$E_2 \leftarrow E_2 - \frac{6}{8} E_3$

$E_3 \leftarrow \frac{1}{8} E_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5-\frac{9}{4} & -1+\frac{3}{2} & 4 \\ & 1 & 0 & -9+\frac{9}{2} & 0 & -2 \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 0 & | & -2 \\ & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & | & 1 \end{pmatrix}$$

rango $\{v_1, v_2, v_3\}$

$\hookrightarrow \in \mathcal{L}(S)$

(v_1, v_2, v_4)

v_2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & 2 & 5 \\ & -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 3 & 0 & 6 & 29 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & -14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 5/3 & 1 & 0 & 2 & 29/3 \\ 0 & -\frac{42}{3} & 0 & 0 & -6 & -100/3 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow$ da qui so già che risolvibile e $\in \mathcal{L}(S)$

che $\{v_2, v_3, v_4\}$ è un spazio $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ riempie tutto

posso farlo in verifica ma argomento

Esempio dopo dimostrazione fondamentale

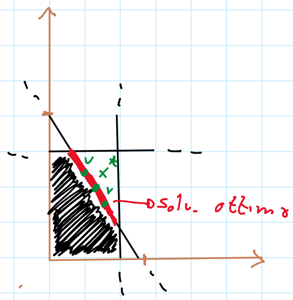
$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$x^* = \left(\frac{5}{4}, \frac{17}{8}\right) \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

stand

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + x_4 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, \dots x_5 \geq 0$$

ovvio det

$$x^* = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 17/8 \\ 0 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad v \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

comp nulla ovunque

$$x' = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 17/8 \\ 0 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/4 \\ 0 \\ 1/2 \\ -3/4 \end{pmatrix} \qquad y = \bar{u} - \bar{v} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/4 \\ 0 \\ 1/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

sistema

$$\begin{cases} 5/4 - 1/2\,\varepsilon \geq 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 7/8 - 3/4\,\varepsilon \geq 0 \end{cases} \quad \text{banali}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon \leq \frac{5}{2} \\ \varepsilon \leq \frac{7}{6} \end{array}\right\} \quad \varepsilon \leq \frac{7}{6}$$

$$\begin{pmatrix} 5/4 - 1/2 \cdot 7/6 \\ \dots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2/3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$7/8 - 3/4\,\varepsilon \geq \qquad \varepsilon \leq \frac{7}{6}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 5/4 - 1/2 \cdot 7/6 \\ 17/8 + 3/4 \cdot 7/6 \\ 0 \\ 3/4 + 1/2 \cdot 7/6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 3 \\ 0 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$