Lezione 15

Successioni definite per ricorrenza

Data una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideriamo la successione $\{x_n\}$ definita mediante

$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ \boxed{x_{n+1} = f(x_n)} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

relazione ricorsiva

Es
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - 2 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (f(x) = x^2 - 2)$$

Si ha
$$x_1 = x_0^2 - 2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = -\tfrac{7}{4}$$
$$x_2 = x_1^2 - 2 = \left(-\tfrac{7}{4}\right)^2 - 2 = \tfrac{17}{16}$$
$$x_3 = \ldots\ldots$$

Si noti che cambiando x_0 cambia, in generale, tutta la successione; ad esempio

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1^2 - 2 = -1, \quad x_2 = (-1)^2 - 2 = -1 \quad \ldots$$

Con + termini

Oss Potrebbero essere anche considerate ricorsioni "a 2 passi" come per esempio

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \\ x_0 = x_1 = 1 \end{cases}$$

che dà luogo alla celebre successione di Fibonacci

1 1 2 3 5 8 13 21 34

1 1 2 3 5 8 13 21 34 ...

Si noti che in questo caso serve assegnare i primi 2 valori per individuare la successione

Sist. din. → ragnatela

Nel seguito, adotteremo il punto di vista dei "sistemi dinamici"

$$(SD) \quad \begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 \text{ assegnato} \end{cases}$$

è un modello matematico discreto per descrivere l'evoluzione di un "sistema":

- assegnare x_0 vuol dire assegnare la "condizione iniziale"
- la relazione $x_{n+1} = g(x_n)$ è invece la "legge" che descrive l'evoluzione del sistema (la "dinamica")

In quest'ottica, diremo che $\{x_n\}$ è una soluzione di (SD)

Problema: è possibile determinare l'evoluzione del sistema per $n \to +\infty$ (cioè, $\lim_{n\to+\infty} x_n$) ?

Rappresentazione grafica a Ragnatela

Consideriamo l'esempio $g(x) = x^2 - 2$

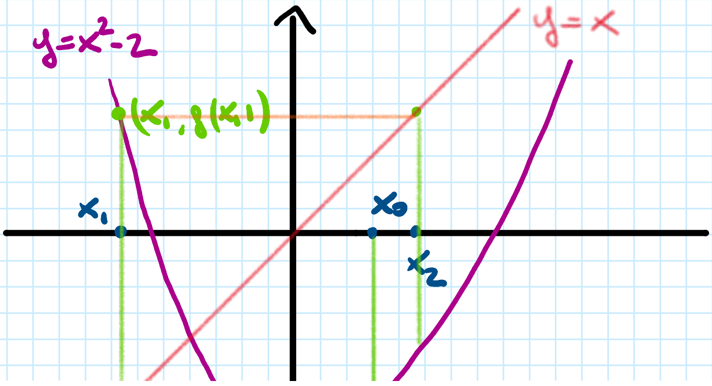
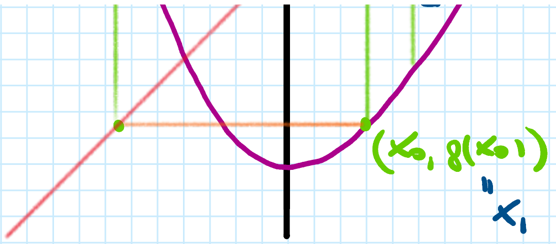


Grafico "a ragnatela"



Prendo x_0 sull'asse x

Traccio un segmento verticale fino a $(x_0, g(x_0)) = (x_0, x_1)$

Traccio un segmento orizzontale fino a (x_1, x_1)

Traccio un segmento verticale fino a $(x_1, g(x_1)) = (x_1, x_2)$

--- e così via

punto di equil.

Il ruolo di $y = x$

Le intersezioni tra i grafici di $y = g(x)$ e $y = x$ hanno un ruolo importante

Infatti, se $x^* \in \mathbb{R}$ è t.c

$$\boxed{g(x^*) = x^*} \; *$$

(cioè $(x^*, g(x^*))$ appartiene sia al grafico di $y = g(x)$ che a quello di $y = x$)

la successione

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 = x^* \end{cases}$$

è costante (infatti $x_1 = g(x_0) = g(x^*) = x^*$

$x_2 = g(x_1) = g(x^*) = x^*$ ---)

In tal caso si dice che x^* è

- punto fisso di g
- punto di equilibrio per il sistema dinamico

Tali punti hanno un ruolo anche relativamente a soluzioni non costanti. Infatti si ha

Proposizione Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e sia $\{x_n\}$ soluzione di (SD). Se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}$$

allora x^* è p.to fisso di g (cioè, $g(x^*) = x^*$)

Si noti il significato "filosofico" di questa proposizione:
"si può convergere solo ad un equilibrio"

dim Poiché $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$ si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x^*$$

e quindi, essendo $x_{n+1} = g(x_n)$ $\forall n$,

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = x^*$$

$\left(\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)\right)$

D'altra parte, essendo g continua,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x^* \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x^*)$$

e quindi $x^* = g(x^*)$ $\square$

Vediamo ora un caso particolare di (SD) che si può studiare in modo completo:

Ricorrenze lineari

Corrispondono al caso $g(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$

e quindi $\quad \{ x_{n+1} = ax_n + b$

e quindi
$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + b \\ x_0 \text{ assegnato} \end{cases}$$

Distinguiamo vari casi:

- Se $\boxed{b=0}$ si trova $x_{n+1} = a x_n$ $\left(\text{cioè } \frac{x_{n+1}}{x_n} = a\right)$

  ovvero la successione geometrica $x_n = a^n x_0$

  Quindi: • se $x_0 = 0$, allora $x_n = 0 \ \forall n$

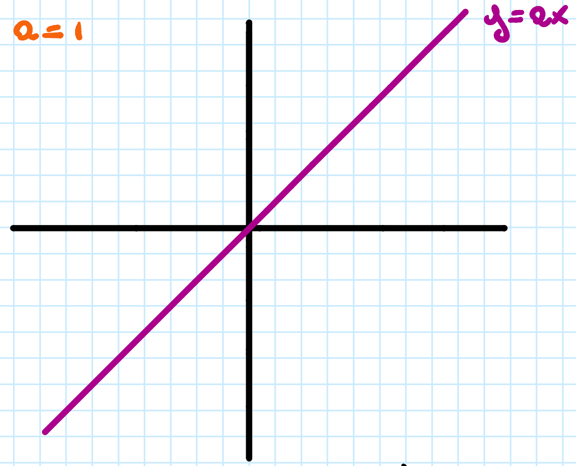
  • se $x_0 \neq 0$, allora

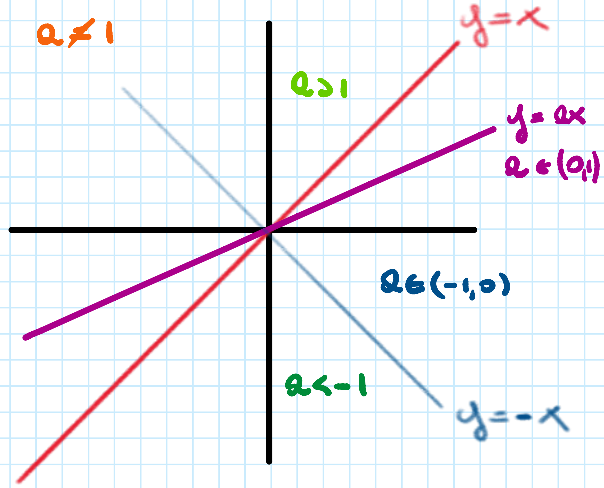
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} \infty & \text{se } a>1 \ (+\infty \text{ se } x_0>0, -\infty \text{ se } x_0<0) \\ x_0 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \nexists & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

come ,7,1,2,3

esempi

Graficamente si ha

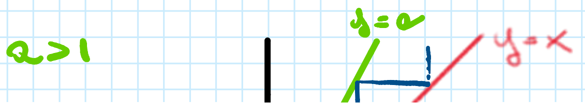


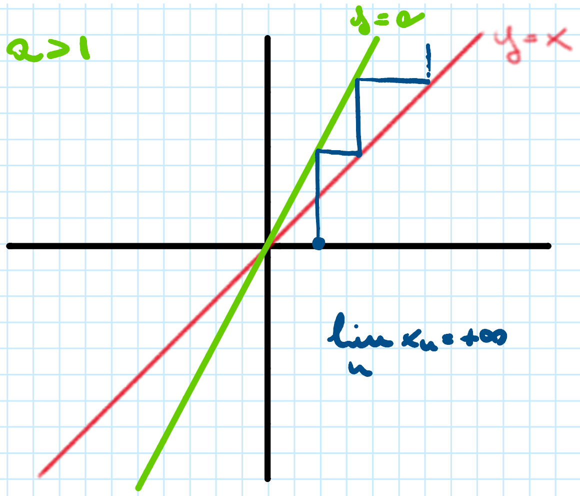


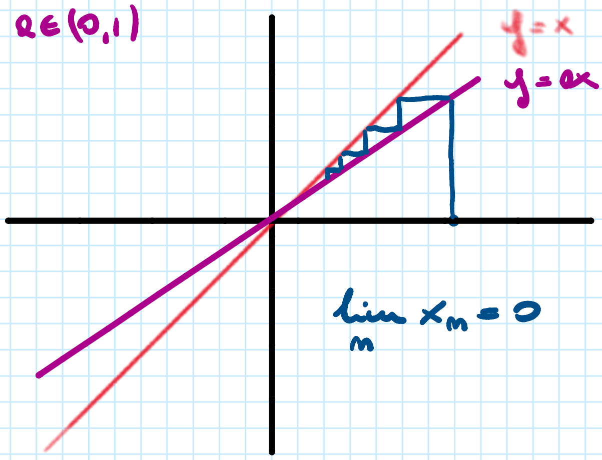
($g(x)=x$; sono tutti p.ti fissi)

($g(x)=ax$ con $a\neq 1$; l'unico p.to fisso è $x=0$)

Facciamo il grafico "a ragnatela" nei casi:







e lasciamo gli altri casi per esercizio

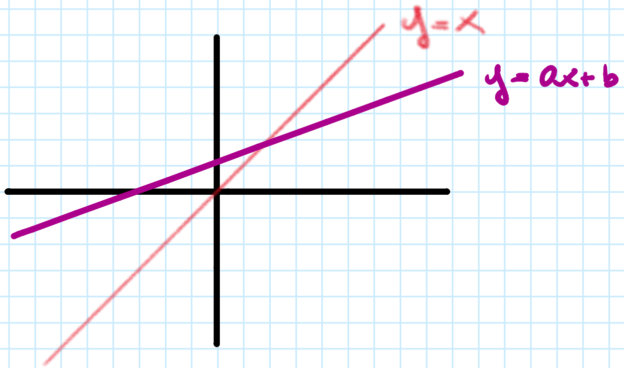
- Se $\boxed{b\neq 0}$ la situazione è invece la seguente

  - Se $\boxed{b\neq 0 \text{ e } a=1}$, $g(x)=x+b$ non ha p.ti fissi — retta // alla fine

    $$x_{n+1}=x_n+b$$

    e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases}+\infty & \text{se } b>0\\ -\infty & \text{se } b<0\end{cases}$

  - Se $\boxed{b\neq 0 \text{ e } a\neq 1}$, $g(x)=ax+b$ ha come unico p.to fisso



$$x^*=ax^*+b$$

cioè $x^*=\dfrac{b}{1-a}$

Osserviamo ora che ponendo

$$y_n=x_n-x^*$$

si ha
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1}-x^* \\ &= g(x_n)-x^* \\ &= ax_n+b-x^* \\ &= ay_n+ax^*+b-x^* \end{aligned}$$

$$= a y_n + a x^* + b - x^*$$
$$= a y_n$$

da cui $\quad y_n = a^n y_0 \quad$ con $\quad y_0 = x_0 - x^*$

Rivedo

e quindi $\quad x_n = a^n (x_0 - x^*) + x^*$

Si ha allora che

- se $x_0 = x^*$ allora $x_n = x^* \ \forall n$
- se $x_0 \neq x^*$ allora

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \begin{cases} \infty & \text{se } a > 1 \\ x^* & \text{se } -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Anche in questi casi, si può fare esercizio visualizzare la dinamica con il grafico a ragnatela

Oss Se sostituiamo $b = 0$ nelle formule trovate, si ha

$$x^* = 0 \qquad x_n = a^n x_0$$

e quindi ritroviamo il caso della succ geometrica discussa in precedenza