

## Corso di Logica

### 3.2 – Esercizi Relativi al Principio di Induzione

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica  
Università di Torino

### Somma dei primi $n$ numeri dispari

✓ *one note*

Dimostrare che:

$$\sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione **per induzione** su  $n \in \mathbb{N}$  (equivalentemente, **su**  $n \geq 0$ ).

$$P(n) \text{ è } \sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2.$$

Caso base ( $n = 0$ )

$P(0)$  è  $\sum_{i=0}^0 2i + 1 = (0 + 1)^2$ . Verifichiamo:

$$\sum_{i=0}^0 2i + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \quad \text{e} \quad (0 + 1)^2 = 1^2 = 1,$$

quindi  $P(0)$  è vera.

Dimostrare che:

$$\sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Passo induttivo ( $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ )

$P(n)$  è  $\sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2$  (**Ipotesi induttiva**).

$P(n + 1)$  è  $\sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1 = ((n + 1) + 1)^2$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1 &= \left( \sum_{i=0}^n 2i + 1 \right) + (2(n + 1) + 1) \\ &= (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 && \text{per ip. ind.} \\ &= ((n + 1) + 1)^2. \end{aligned}$$

□

Dimostrare che:

$$\sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Passo induttivo ( $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ )

$P(n)$  è  $\sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2$  (**Ipotesi induttiva**).

$P(n + 1)$  è  $\sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1 = ((n + 1) + 1)^2$ .

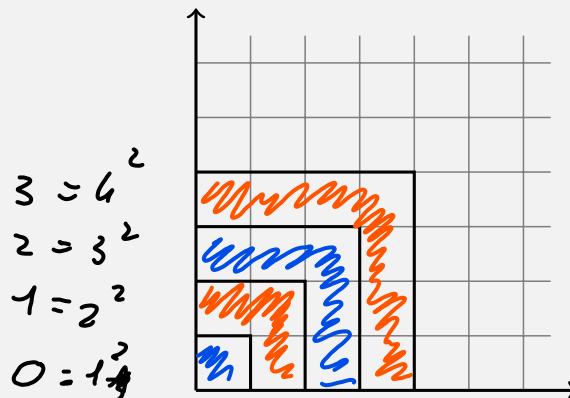
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1 &= \left( \sum_{i=0}^n 2i + 1 \right) + (2(n + 1) + 1) = (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 + 1 = n^2 + 4n + 4. \end{aligned}$$

$$((n + 1) + 1)^2 = (n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4.$$

Poiché se vale  $P(n)$  allora sia  $\sum_{i=0}^{n+1} 2i + 1$  che  $((n + 1) + 1)^2$  sono uguali a  $n^2 + 4n + 4$ , si ha che anche  $P(n + 1)$  è vera. □

## Dimostrazione geometrica di $\sum_{i=0}^n 2i + 1 = (n + 1)^2$

La figura

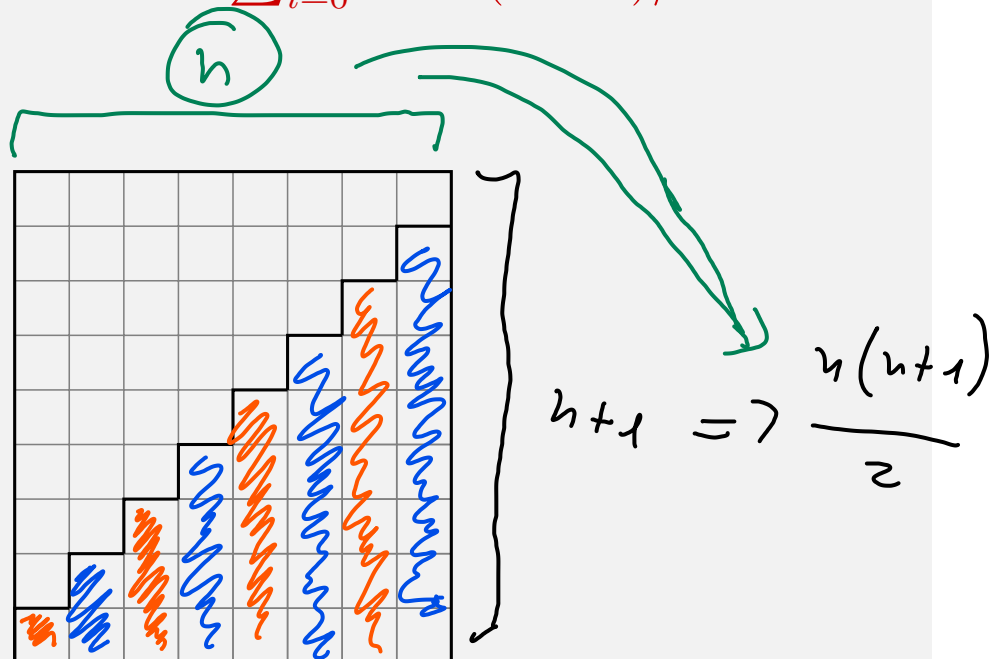


mostra come l'area del quadrato di lato  $n + 1$  sia ottenibile sommando l'area delle "cornici"  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$ .



## Dimostrazione geometrica di $\sum_{i=0}^n i = n(n + 1)/2$

La figura



mostra come il rettangolo di area  $n \times (n + 1)$  si può ripartire in due regioni uguali, ciascuna di area  $1 + 2 + \dots + n$ .

## Venerete

Dimostrare che  $\sum_{i=0}^n 2i = n^2 + n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Caso base:**  $\sum_{i=0}^0 2i = 2 \cdot 0 = 0 = 0^2 + 0$  ( $n = 0$ )

**Passo induttivo:** Data  $\sum_{i=0}^n 2i = n^2 + n$  dimostriamo che

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1)^2 + (n+1).$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^n 2i + 2(n+1) \\ &= n^2 + n + 2(n+1) && \text{per ipotesi induttiva} \\ &= n^2 + n + 2n + 2 \\ &= (n^2 + 2n + 1) + (n+1) \\ &= (n+1)^2 + (n+1) \end{aligned}$$

## 3 Venerete

Dimostrare che per ogni  $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

**Attenzione!** In questo caso il passo base è quello per  $n = 1$  (il passo induttivo resta invariato).

(Soluzione alla lavagna)

Ricordiamo che dato  $n \geq 1$ ,

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

4 ✓

Dimostrare che  $2^n < n!$  per ogni  $n \geq 4$ .

Per induzione su  $n \geq 4$ .

**Caso base:**  $2^4 = 16 < 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$  ( $n = 4$ )

**Passo induttivo:** Data  $2^n < n!$  dimostrare che  $2^{n+1} < (n+1)!$ .

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 \\ &< n! \cdot 2 && \text{per ipotesi induttiva} \\ &< n! \cdot (n+1) && (\text{perché } n \geq 4 \text{ e } n! \geq 1) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

Definiamo la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1. \end{cases}$$

5 ✓

Dimostrare che  $a_n = 2^{n+1} - 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Caso base:**  $a_0 = 1 = 2^{0+1} - 1$  ( $n = 0$ )

**Passo induttivo:** Data  $a_n = 2^{n+1} - 1$  dimostrare che  $a_{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$ .

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n + 1 \\ &= 2 \cdot (2^{n+1} - 1) + 1 && \text{per ipotesi induttiva} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Definiamo  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  per ricorsione ponendo

6✓

$$\begin{cases} g(0) = 2, \\ g(n+1) = g(n) \cdot g(n). \end{cases}$$

Dimostrare che  $g(n) = 2^{(2^n)}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Caso base:**  $g(0) = 2 = 2^1 = 2^{(2^0)}$  ( $n = 0$ )

**Passo induttivo:** Data  $g(n) = 2^{(2^n)}$  dimostrare che  $g(n+1) = 2^{(2^{n+1})}$ .

$$\begin{aligned} g(n+1) &= g(n) \cdot g(n) \\ &= 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} && \text{per ipotesi induttiva} \\ &= 2^{(2^n + 2^n)} \\ &= 2^{(2 \cdot 2^n)} \\ &= 2^{(2^{n+1})} \end{aligned}$$

Sia  $X$  un insieme infinito e  $f: X \times X \rightarrow X$  una biezione. Definiamo una successione di funzioni  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  per ricorrenza ponendo:

notion 7

$$\begin{cases} h_2: X^2 \rightarrow X, & (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2), \\ h_{n+1}: X^{n+1} \rightarrow X, & (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto f(h_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}). \end{cases}$$

Dimostrare che  $h_n: X^n \rightarrow X$  è una biezione per ogni  $n \geq 2$ .

Per induzione su  $n \geq 2$ .

**Caso base ( $n = 2$ ):** si ha  $h_2 = f$ , quindi  $h_2$  è una biezione poiché  $f$  lo è.

**Passo induttivo: Iniettività.** se  $h_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = h_{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1})$ , allora  $x_{n+1} = y_{n+1}$  e  $h_n(x_1, \dots, x_n) = h_n(y_1, \dots, y_n)$  poiché  $f$  è iniettiva. Ma allora anche  $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$  perché, per ipotesi induttiva,  $h_n$  è iniettiva. Quindi  $(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1})$ .

**Suriettività.** Dato  $y \in X$ , esistono  $x, z \in X$  tali che  $f(x, z) = y$  poiché  $f$  è suriettiva. Poiché per ipotesi induttiva  $h_n$  è suriettiva, esiste  $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$  tale che  $h_n(x_1, \dots, x_n) = x$ . Ponendo  $x_{n+1} = z$  si ha allora  $h_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(h_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) = f(x, z) = y$ .

8✓

Dimostrare che ogni affrancatura da 4 centesimi o più può essere ottenuta usando solo francobolli da 2 e 5 centesimi.

(Soluzione alla lavagna)

9✓

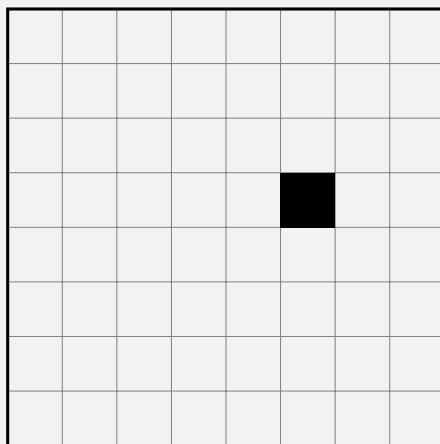
Dimostrare per induzione che se  $n$  è dispari e  $a_1, \dots, a_n$  sono dispari, allora  $\sum_{i=1}^n a_i$  è dispari.

(Soluzione alla lavagna)

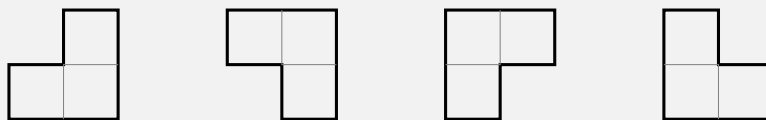
Sia  $F$  un quadrato di lato  $2^n$  (con  $n \geq 1$ ) da cui è stato rimosso un quadretto, per esempio

10

nel 10



Dimostrare che  $F$  è ricopribile con i tasselli

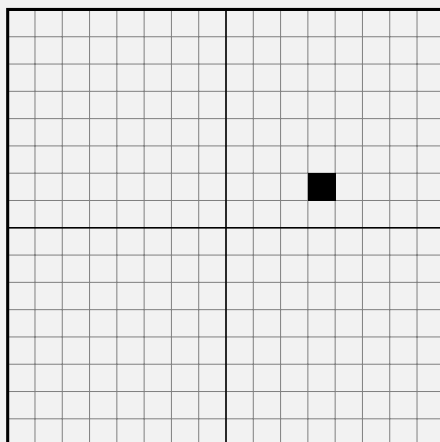


$P(n)$  è la proprietà che ogni figura  $F$  ottenuta da un quadrato di lato  $2^n$  è ricopribile nel modo richiesto.


Caso base ( $P(1)$ ): Ovvio.

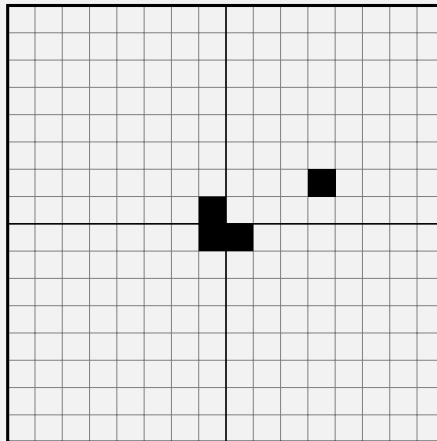


**Passo induttivo** ( $P(n) \rightarrow P(n+1)$ ): Sia  $F$  una figura ottenuta da un quadrato di lato  $2^{n+1}$  e suddividiamo questa figura in quattro blocchi costituiti da quadrati di lato  $2^n$ , uno dei quali mancante di una tessera. Per esempio possiamo supporre che il quadrato mancante sia nel blocco in alto a destra.





Mettiamo un tassello  nel punto di incontro dei quattro blocchi:



A questo punto abbiamo quattro figure a cui possiamo applicare l'ipotesi induttiva  $P(n)$ . Questo dimostra che anche  $P(n + 1)$  è vera.