Esercizi MD

29 September 2021 19:02

1) $A \cup (B \cap C)$

$\cancel{x} \in A \vee (\cancel{x} \in B \wedge \cancel{x} \in C)$

$(\cancel{x} \in A \vee \cancel{x} \in B) \wedge (\cancel{x} \in A \vee \cancel{x} \in C)$

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $\underline{A \cap B = A}$ F V F impossibile

$x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$

$\neg [\exists x \in A, x \notin B]$ ogni x in A appartiene anche in B

$\forall x \in A, x \in B$ $\underline{A \subseteq B}$

$\forall x \in A, x \in B$

$\Downarrow$

$x \in A \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$

(identico)

$A \Rightarrow A \cap B$

2) $A \cup B = A$ F V → F impossibile

$x \in A \vee x \in B = x \in A$

$\neg (\exists x \in B, x \notin A)$

$\forall x \in B, x \in A$ $B \subseteq A$

3) $A \setminus (B \cap C)$

$x \in A \wedge \neg (x \in B \wedge x \in C)$

$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$

$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$

$(A / B) \cup (A / C)$

MD A Esercizi...

Esercizi sugli insiemi

Dimostrare le seguenti proprietà delle operazioni tra insiemi:

1) $A \cap B = A \iff A \subseteq B$
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Altri esercizi:

4) Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$, descrivere gli insiemi $\mathbb{P}(A)$ delle parti di A e $A \times A$ prodotto cartesiano di A con sé stesso. Determinare poi $|A|$, $|\mathbb{P}(A)|$, $|A \times A|$.

5) Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20\}$, determinare:
$A \cap B$, $(A \cup B) \cap C$, $A \setminus B$, $C \setminus (A \cup B)$.

6) Stabilire se la proprietà seguente è vera. In caso contrario, esibire un controesempio.
$A \setminus B = A \setminus C \Rightarrow B = C$.

7) Data la seguente famiglia di insiemi: $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n+1}\}$, $n \in \mathbb{N}$
Determinare: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

8) Dati gli insiemi $X = \{$fiumi d'Italia$\}$, $I = \{$regioni d'Italia$\}$ e per ogni regione $i \in I$, $A_i = \{$fiumi della regione $i\}$, stabilire se la famiglia A_i, $i \in I$ è un ricoprimento di X. È anche una partizione?

9) Determinare tutte le possibili partizioni dell'insieme $X = \{x, y, z\}$

10) Stabilire se la famiglia di insiemi $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n < x < n+1\}$, $n \in \mathbb{Z}$ costituisce una partizione di $\mathbb{R}$.

Ulteriori esercizi sono reperibili sui testi indicati in bibliografia.

ES 4) $A = \{A, B, C, D\}$ $P(A) = \{ [A,B,C,D] [A,B,C] [ABD] [ACD] [BCD] [AD] [AC] [AB] [BC] [BD] [CD] [A] [B] [C] [D] \emptyset \}$

$|A| = 4$ $|P(A)| = 2^4 = 16$

$A \times A$

$|A \times A| = \{ (AA)(AB)(AC)(AD)(BA)(BB)(BC)(BD)(CA)(CB)(CC)(CD)(DA)(DB)(DC)(DD)$

$4^2 = 16$

es 5)

$A \cap B = \{x \in N \mid x = 6n, n \in \mathbb{N}\}$

$(A \cup B) \cap C = 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20$

$A \setminus B = \{x \in N \mid x = 2n, x \neq 3n, n \in \mathbb{N}\}$

$C \setminus (A \cup B) = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

es 6)

$A \setminus B = A \setminus C \Rightarrow B = C$

$A = \{1, 3\}$ $B = \{3, 4\}$ $C = \{3, 5\}$

es 7)

$A_n = \{x \in R \mid -\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n+1}\}, n \in N$

$\bigcap_{n \in N} A_n = \emptyset$ $\lim_{n \to \infty} \pm \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow$ per il teorema dei carabinieri + tende a non avere elementi $\emptyset \Leftarrow$

$\bigcap_{n \in N} A_n = \{0\}$ in quanto $\underline{\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \in A_n}$

$\underline{\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists n \in \mathbb{N} \mid |\varepsilon| > \frac{1}{n+1}}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ $\quad \lim_{n\to\infty} \pm\frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow$ per il teorema dei carabinieri x tende a non avere elementi $\emptyset \Leftarrow$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ in quanto $\underline{\forall n\in\mathbb{N}\ 0\in A_n}$

$\underline{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}-\{0\},\ \exists n\in\mathbb{N} \mid |\varepsilon| > \frac{1}{n+1}}$

$\hookrightarrow \varepsilon \notin A_n \Rightarrow \varepsilon \notin \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} A_n$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0$ perché al crescere di n diminuisce l'intervallo e visto che val essendo il primo più grande

$A_n \subseteq A_0 \qquad A_n = \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \quad \frac{1}{n+1} \leq 1 \to \forall x \in \mathbb{N}$

es 8) Sì perché ogni fiume è in una regione e quindi ci sono tutti i fiumi ma non è partizione per $\emptyset$ e $A_1 \cap A_5 \neq \emptyset$, $i \neq 5$

es 9) $X = \{x, y, z\}$

$Q_{x_1} \{\{x,y\}\{z\}\}$

$Q_{x_2} \{\{x\}\{y,z\}\}$

$Q_{x_3} \{\{x,z\}\{y\}\}$

es 10) $A_n = \{x\in\mathbb{R} \mid n < x < n+1\},\ n\in\mathbb{Z}$

$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n \neq \mathbb{R}$ basta un $\leq$

$\hookrightarrow$ non è ricoprimento $\Rightarrow$ no partizione

Secondo barca esercizi

D1) f, g iniettiva $\quad f\circ g$ iniettiva

.... $b_1 \neq b_2 \in B \Rightarrow f(b_1) \neq f(b_2)$

$b_1 = f(a_1) \quad b_2 = f(a_2)$

$f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow \overbrace{f(g(a_1))}^{f\circ g} \neq \overbrace{f(g(a_2))}^{f\circ g}$

cvd

rifatte

$f\,g \Rightarrow f\circ g$ (usiamo teoria caratteristica)

1a) iniettiva

Siano $a_1, a_2 \in A$ consideriamo $g\circ f(a_1), g\circ f(a_2)$

Se $\underline{g(f(a_1)) = g(f(a_2))}$ poiché g è iniettiva $\Longrightarrow$

$f(a_1) = f(a_2) \overset{\text{poiché } f \text{ è iniettiva}}{\Longrightarrow} \underline{a_1 = a_2}$

$\hookrightarrow$ $g\circ f$ iniettiva

D_3

2a) Vogliamo mostrare che $\forall c \in C$

$\exists a \in A \mid g(f(a)) = c$

Prendiamo $c \in C$ poiché g è suriettiva

$\exists b \in B$ tale che $g(b) = c$

inoltre poiché f è suriettiva

$\exists a \in A \mid f(a) = b$. Ma $g(f(a)) = g(b) = c$

quindi $g(f(a)) = c \quad g\circ f$ è suriettiva

D_4

altre

$f\circ g$ iniett. Date 2 funzioni $f: A \to B \quad g: B \to C$

D3) se $g\circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva

Supposto $g\circ f$ è iniettiva consideriamo $a_1, a_2 \in A$ se $\underline{f(a_1) = f(a_2)} \overset{\text{compongo [el. uguali hanno imm. uguali]}}{\Longrightarrow} g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

$\overset{g\circ f \text{ è iniett.}}{\Longrightarrow} \underline{a_1 = a_2} \Rightarrow f$ è iniettiva

D4) ... se $g\circ f$ è suriettiva allora g è suriettivo

Prendiamo $c \in C$ poiché $g\circ f$ è suriettiva $\underline{\exists a \in A \mid g(f(a)) = c}$

Ma allora $f(a) \in B \quad \underline{f(a) \in g^{-1}(c)}$

$\Rightarrow$ controimmagine di g non è vuota

$\hookrightarrow$ suriettiva

D2) f, g suriett $\Rightarrow f\circ g$ suriet

$\forall c \in C \ \exists b \in B \mid f(b) = c$

$b = g(a)$

$\forall c \in C \quad \exists a \mid f(g(a)) = c$

esercizi induzione

Esercizi induzione

1) $\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

prima parte) $2^0 = 1 = 2 - 1$

sec) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$

$= 2(2^{n+1}) - 1$

$2^{n+2} - 1$

2) ... $n^3 - n$ è divisibile per 3

a) $n = 0 \Rightarrow 0^3 - 0 = 0$ è div

b) $n^3 - n$ div

$(n+1)^3 - (n+1)$

$n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1}$

$\underbrace{n^3 - n}_{3k} + \underbrace{3(n^2+n)}_{\text{div}} = \boxed{3}(k + n^2 + n)$

3) ..

es 1 ... $g\circ$ ... iniet $\Downarrow$ f è ... ma g ... $g((0,0)$ ...

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$n \longrightarrow n \times n$ (uguali)

$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(m, n) \longrightarrow n$

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $= id_{\mathbb{N}}$

$n \longrightarrow n$

biettiva

$\Downarrow$

suriettiva

$\Downarrow$

g è surjettiva

ma f non lo è

$\nexists\, a \in A \mid f(a) = (1,2)$

tiva

niettiva

non lo è

$) = g((1,0)) = 0$

$f \circ g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(m, n) \longrightarrow (n, n)$

non identità

$\underbrace{n^3 - n}_{3k} + 3\underbrace{(n^2 + n)}_{\text{div}} = \boxed{3}(k + n^2 + n)$

3) $n > 1 \quad n! < n^n$

a) $P(2) \quad 2! < 2^2$

$2 < 4$

correzione $\longrightarrow$ $P(n) \models P(n+1)$

b) $n^n - n! \geq 0$

$(n+1)^{\cancel{n+1}} - \cancel{n+1} \cdot n! \geq 0$

$(n+1)^n - n! \geq 0$

$(n+1)^n > n^n \geq 0$

$-n! \quad -n!$

cvd

positivo

$n+1! = n!(n+1) < n+1 \cdot n^n$

$< (n+1) \cdot (n+1)^n = n+1^{n+1}$

(stesso caso che ho fatto io)

4) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$

a) $n = 0 \quad 1 = 1^2$

b) $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = (n+1)^2 + (2n+3) =$

$n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 =$

$(n+2)^2 = [(n+1)+1]^2$

5) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > -1$

a) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernulli)

$(1+x)^0 \geq 1 + 0$

$1 \geq 1$

b) $(1+x)^n - 1 - nx \geq 0$

$\overset{+}{(1+x)^n}(1+x) - (1+nx)\overset{+}{(1+x)} \geq 0$

$(1+x)^{n+1} - (1 + (\cancel{n+1})x + nx^2) \geq 0$

$(1+x)^{n+1} - (1 + (n+1)x) - nx^2 \geq 0$

$(1+x)^{n+1} - (1 + (n+1)x) > (1+x)^{n+1} - (1 + (n+1)x) - nx^2 \geq 0$

cvd

Inverso di composta

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$

$f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$

$\underbrace{f^{-1} \circ (Id_B)}\circ f$

$f^{-1} \circ f = Id_A$

e viceversa

Esercizi sulle funzioni

Esercizi sulle funzioni

Per ciascuna delle funzioni seguenti, stabilire se è iniettiva o suriettiva, determinare il grafico Γ e la controimmagine $f^{-1}(0)$:

1) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(n) = n^2 + n$.

2) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(m,n) = m + n$;

3) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad f(x) = 3x + 1$.

4) Data la funzione f nell'esercizio 1), si consideri l'inclusione $\mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$ e la funzione composta $f_{|\mathbb{N}} = f \circ i: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
Descrivere $f_{|\mathbb{N}}$ e stabilire se è iniettiva o suriettiva.

5) Trovare l'inversa della funzione f dell'esercizio 3).

6) Mostrare che la funzione $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(m,n) = (m+n, m-n)$ non è biettiva e trovare l'inversa. $\rightarrow$ fare $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $\quad X \quad e^- \quad Z$ d/c

7) Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y, xy)$ è iniettiva o suriettiva.

8) Determinare tutte le possibili funzioni da $A = \{1,2\}$ a $B = \{a,b,c\}$.

7) Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y, x\cdot y)$ è iniettiva e suriettiva.

8) Determinare tutte le possibili funzioni da $A=\{1,2\}$ a $B=\{a,b,c\}$. Quali tra queste sono iniettive? Quali suriettive?

9) Dati due insiemi generici A, B, si consideri la funzione $f: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $S \mapsto S\cap B$. Mostrare attraverso esempi che f in generale non è iniettiva né suriettiva. In quali casi è iniettiva? In quali suriettiva?

V (controllo fatto dal non obbligo)

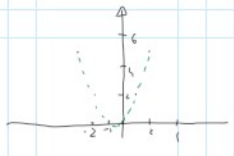
10) Data $f: A \to B$ iniettiva, mostrare che $f(A)$ è in biezione con A.

11) Data una funzione $f: A \to B$, dimostrare che: i) f iniettiva $\Leftrightarrow \forall S\subseteq A$, $f^{-1}(f(S))=S$; ii) f suriettiva $\Leftrightarrow \forall T\subseteq B$, $f(f^{-1}(T))=T$.

12) Sia $f: A \to B$ suriettiva e $g, h: B \to C$ due funzioni con uguali dominio e codominio. Dimostrare che se $gf = hf$ allora $g = h$.

13) Sia $f: B \to C$ iniettiva e $g, h: A \to B$. Mostrare che $fg = fh \Rightarrow g = h$.

1) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(n) = n^2 + n$



$n^2 + n = 0$

$(n+1)n = 0$

$n=0 \quad n=-1$

$\nexists f^{-1}(-10)$ non suriet.

$f^{-1}(0) = \{0,-1\}$ non iniet.

2) $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\quad m\ n \to m\times n$

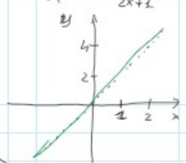
ma suriettiva

$1\cdot n = \mathbb{N} \quad m \in \mathbb{N}$

$\Gamma = \{\underbrace{((0,0),0)((0,1),0)}_{\text{non iniettiva}}((1,0),0),\ldots$

$f^{-1}(0) = \{(a,b) \in A\times B \mid a=0 \vee b=0\}$

3) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
$\quad x \to 2x+1$



$f^{-1}(0)$

$2x+1=0 \quad x=-\frac{1}{2}$

iniettiva

$2t+\cancel{1} = 2s+\cancel{1}$

$2t = 2s$

$t = s$

suriettiva

$\frac{x-1}{2}$

è iniettiva + suriettiva $\Rightarrow$ suriettiva

4) $f_n = f\circ i: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$f_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$\quad n \to n^2+n$

$\nexists f^{-1}(-1)$ non suriettiva

$f^{-1}(0) = \{0,1\}$ non iniettiva

5) $f: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
$\quad m\ n \to m+n\ \ m-n$

a) $\{m+n = p+q \quad m-n = p-q$
$\quad \to 2m = 2p \quad 2n = 2q$ iniettiva

verifico $f^{-1}f \quad ff^{-1}$
(x,y)

b) (p,q)

$p = m+n \quad q = m-n$

dovo essere in grado di dividere per due

$p+q = m\cdot 2 \quad p-q = n\cdot 2$

$(p+q, p-q) \to (p,q) \ \forall p,q \ \exists m,n \mid f(m,n) = (p,q)$

~~è suriettiva~~

$(1,2)$ non ha controimmagine

(x,y) $f: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ è biettiva

$f^{-1}(x,y) \to \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$

7) $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$\quad (x,y) \to (x+y, x\cdot y)$

$x+y = w+z \quad x\cdot y = w\cdot z$

non iniettiva $\quad a+b = b+a \quad a\cdot b = b\cdot a$

non suriettiva

$x+y = -10, \quad +100 = x\cdot y \quad x^2 + 10x + 100$

$\frac{\Delta}{4} = 25 - 100 = -75$

8)

1a 2a →
1a 2b → in
1a 2c → in
2b 2a → in
1b 2a → in
1b 2c → in
1c 2a → in
1c 2b → in
1c 2c →

no suriettive

9) $f: P(A) \to P(B)$
$\quad S \to S\cap B$

non iniettiva

$\{2\}$ non ha controimmagine
$\Downarrow$
non suriettiva

$f(\{1\}) = \{\} \quad f(\{3\}) = \{\}$

b) $A \subseteq B$ $\quad S \to S \ (S \subseteq A \subseteq B$
$\quad S \subseteq B \Rightarrow S\cap B = S$

funz. inclusione → vedo che basta $\{a\}$ fuori da B

extra

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Dim:} \\ \exists a\in A \mid a \notin B \\ S = \{a\} \quad S' = \emptyset \\ f(S) = f(S')\end{array}}$

$\Downarrow$

non va bene

invece se $A \subseteq B \ \forall S \subseteq A$

b) $A \subseteq B$ $\quad S \to S \ (S \subseteq A \subseteq B$ funz. inclusione → vedo che basta $\{a\}$ fuori da B

$S \subseteq B \implies S \cap B = S$

$f(S) = f(S')$

$\Downarrow$

non va bene

invece se $A \subseteq B$ $\forall S \subseteq A$

$S \cap B = S$

c) $B \subseteq A \implies P(B) \subseteq P(A)$ → $\forall_T \exists_S \mid f(S) = T$

$S = T$ è un caso

10) $f : A \to B$ iniettiva

$f(A) \Leftrightarrow A$ biezione

$f(A) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \ (f(a) = b) \}$

↳ $\forall b \in f(A)$ esiste almeno 1 controimmagine

↳ suriettiva

biettiva

11) $f : A \to B$ $\quad$ i) iniettiva $\Leftrightarrow \forall S \subseteq A \quad f^{-1}(f(S)) = S$

ii) suriettiva $\Leftrightarrow \forall T \subseteq B, \quad f(f^{-1}(T)) = T$

i) $f(a) = f(b) \quad a = b$

$\forall s \in S \ f^{-1}(f(s)) = s \implies f^{-1}(f(S)) = S$

ii) f suriettiva $\Leftrightarrow \forall T \subseteq B,\ f(f^{-1}(T)) = T$

12) $f : A \to B$ suriettiva (dom e codom uguali)

$g, h : B \to C$

$g \circ f = h \circ f \quad g = h \quad \quad g(f(a_2)) = h(f(a_2))$ sur, $\quad \forall b \ \exists a \mid f(a) = b$

$a_1 = a_2 \quad \quad f(a_1) = f(a_2) \ \forall b \ g(b) = h(b)$

equivalenti

13) $f : B \to C$ iniettiva

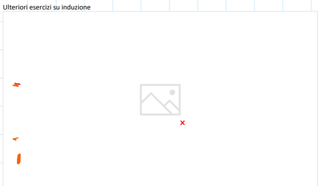
$g, h : A \to B$

$fg = fh \implies g = h$

$f(a_1) = f(a_2) \xrightarrow{\text{iniettiva}} a_1 = a_2$

$g(x) = h(x)$ cvd

Ulteriori esercizi su induzione



6) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• p0 $\quad 0^2 = 0$ ✓

• pi $\quad \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + \underbrace{n + 6n}_{7n} + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$

cvd

7) $\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

• $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

• $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)k} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$

$$\frac{n(n+2)+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+2)(n+1)}}$$

cvd

8) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n$

- $2^n - n \geq 0$
  $1 - 0 > 0 \quad \checkmark$

$\times n \geq 1$

- $2^n - n > 0$

$2^{n+1} - n - 1$

$2^n \cdot 2 - n - 1$

$2^n + 2^n - n - 1$

$\underbrace{2^n - n}_{\forall n > 0} + \underbrace{2^n - 1}_{\forall n > 0} \Rightarrow \forall n > 0$

$2^n - 1 > 0$

$n > 0$ (=> sempre vero)

9) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

- $0 = 0 \quad \checkmark$
- $\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3}$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3}$$

cvd

10) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

- $1 = \frac{1-x}{1-x} \quad \checkmark$
- $\sum \ldots = \frac{1 - \cancel{x^{n+1}}}{1-x} + x^{n+1}(\cancel{1}-x)$

$$\frac{1 - x^{(n+1)+1}}{1-x}$$

cvd

11) $\forall n \in \mathbb{N}$

$n^3 - n = 6k$

- $0 = 6 \cdot 0 \quad \checkmark$
- $(n+1)^3 - n - 1 \quad \overbrace{n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n}^{6k} - \cancel{1}$

$6k + 3n^2 + 3n + 1$

$\underbrace{3\underbrace{(n+1)n}_{\text{pari}}}_{6M} \qquad 6(k+M)$

n pari

n dispari $\Rightarrow$ n pari

12) $\forall n \geq 3$

$(n-2)180°$

- triangolo = 180°
-

↳ figura vecchia + triangolo
→ ~~...~~ +1 faccia

Esercizi combiatorica /combinatoria

MD A
211015...

Esercizi di calcolo combinatorio

Manipolazione di formule.

1) Semplificare le espressioni: $\frac{8! - 6!}{(5!)^2}$, $\frac{36! \cdot 13!}{16! \cdot 34!}$.

2) Verificare le identità: $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$, $\binom{6}{3} = \sum_{k=0}^{3} \binom{5-k}{2}$

Dimostrare che valgono le seguenti identità (per gli $n, k \in \mathbb{N}$ per cui hanno senso):

3) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (Stiefel)

4) $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$ (visualizzare sul triangolo di Pascal-Tartaglia)

5) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

6) Calcolare il coefficiente del termine in $x^{18}y^3$ nello sviluppo di $(x-2y)^{21}$ (attenti a segno)

Problemi di conteggio.

7) In quanti modi diversi 6 persone possono occupare 6 sedie? E 5 sedie? E 4 sedie?

8) Quanti sono gli anagrammi di DISCRETA? Quanti iniziano per D?

9) Quanti sono gli anagrammi di ZUZZURELLONE?

10) Quante sono le possibili targhe automobilistiche italiane (2 lettere - 3 numeri - 2 lettere)?

11) Quante coppie di doppio misto si possono formare scegliendo tra 7 tennisti maschi e 5 tenniste femmine? In quanti modi un allenatore può formare una squadra di 5 coppie miste scegliendo tra gli stessi atleti?

12) Quanti numeri di 5 cifre contengono esattamente due zeri?

13) In quanti modi, lanciando tre dadi, si ottiene come esito 1, 2, 3 (in qualsiasi ordine)? × meglio usare intersez

14) Quante sono le funzioni suriettive da $I_4 = \{1,2,3,4\}$ ad $I_3 = \{1,2,3\}$?
[Suggerimento: utilizzare il principio di inclusione-esclusione]

15) In quanti modi si possono distribuire 20 palline uguali in 5 scatole diverse?

Ulteriori esercizi sono reperibili sui testi indicati in bibliografia.

1) $\frac{8!-6!}{5!\,5!} = \frac{(8\cdot 7-1)\cancel{6!}^{6}}{\cancel{5!}\,\cancel{5!}} = \frac{\cancel{55}^{11}}{5\cdot 4} = \frac{11}{4}$

$\frac{\cancel{36}\cdot 35 \cdot \cancel{36!}\,\cancel{13!}}{\cancel{16!}\,\cancel{34!}\;\cancel{16}\cdot\cancel{15}\cdot 14} = \frac{3}{8}$

2) $\frac{7!}{3!\,4!} = \frac{6!}{3!\,3!} + \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6!\,(3+4)}{3!\,4!}$ cvd

$\binom{6}{3} = \sum_{k=0}^{3} \binom{5-k}{2}$

$\frac{6!}{3!\,3!} = \frac{2!}{2!\,0!} + \frac{3!}{2!\,1!} + \frac{4!}{2!\,2!} + \frac{5!}{2!\,3!}$

$\frac{[(2!+3!)2!+4!]\,3!+5!\cdot 2!}{\cancel{3!}\,\cancel{2!}\,3!}$ $\quad 4\cdot 5! \;+ \cancel{4}\,5! = 5\cdot 4$

cvd.

Stifel

3) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\overbrace{n!\,(\cancel{k}+n-\cancel{k}+1)}^{(n+1)!}}{(n-k+1)!\,(k\;)!}$

$\frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!\,k!} = \binom{n+1}{k}$

redang

× costruire tartaglia

3) $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$\frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\left[\cancel{k}+n-\cancel{k}+1\right] = \frac{n+1!}{k!\,(n-k+1)!}$

$\frac{n'!}{k!\,(n'-k)!} = \binom{n'}{k} = \binom{n+1}{k}$

4) $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$

$\frac{\cancel{n-1!}}{\cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(k+1)!}\,\cancel{(n-k-1)!}} \cdot \frac{\cancel{n+1!}}{\cancel{k!}\,\cancel{(n+1-k)!}}$ $\quad \frac{\cancel{n-1!}}{\cancel{k!}\,\cancel{(n-1-k)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n+1!}}{\cancel{(k+1)!}\,\cancel{(n-k)!}}$

a d a c a b $\quad$ a c a b a d

cvd

5 $\sum_{k=0}^{n} \overbrace{(-1)^k \binom{n}{k}}^{y_k} = 0$

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (1)^{n-k} \binom{n}{k} =$

$(-1+1)^n = 0^n = 0$

cvd

?

6) $(x-2y)^{21}$ $\quad x^{18}y^3$ $\quad \binom{21}{18}$ $\quad 8$

$-\frac{\cancel{21}^{7}\cdot\cancel{20}^{10}\cdot 19}{\cancel{6}} = -70\cdot 19\cdot 8$

7) 6! $\quad$ O O

8) 7! $\quad$ 6!

9) ZZZ VV R EE CC O N

$\frac{12!}{3!\,2!\,2!\,2!\,1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{11!}{2}$

10) $\cancel{Ad}^2 \quad 25^4 \; 10^2$

V 11) $7 \cdot 5 = 35$ $\qquad \dfrac{(7\cdot5)\cdot(6\cdot4)\cdots(3\cdot1)}{5!} = \dfrac{7!}{2!}$

→ oppure a ogni maschio scelgo partner

12) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

→ devo div per 2

$\cancel{9 \cdot 1 \cdot \frac{4!}{2!} \begin{cases} \text{dif} & 9\cdot8 \to \\ \text{uguali} & 9^2 \to \frac{1}{2} \end{cases}}$ $\qquad \cancel{9 \cdot 12 < \begin{matrix} 9\cdot8 \\ 9\cdot\frac{1}{2}\end{matrix}}$

$6 \cdot 81 \cdot (9) = 6 \cdot 9^3$ $\quad 6 \cdot 81 \cdot (8\cdot2+1)$ $\qquad 6 \cdot 9^3$

4,374

13) $3!$

14) $\binom{n \quad k}{4, \; 3}$ $\quad \cancel{\dfrac{n! \cdot k}{(n-k)!\, 2!}} = 9 \cdot 8 \quad \cancel{9} \cdot 8$

$6 \cdot 3 \cdot 2$

36

$|A| = 2^4 = 16 = |B| = |C|$

$|A \cap B| = 1 \ldots \qquad |A \cap B \cap C| = 0$

$A = \{\text{funzioni } f: I_4 \to I_3 \mid f^{-1}(1) = \emptyset\}$

$B = \{ \quad " \qquad f^{-1}(2) \; " \}$

$C = \{ \quad " \qquad f(3) \; " \}$

$|A \cup B \cup C| = \overset{16}{A} + \overset{16}{B} + \overset{16}{C} - \overset{1}{A \cap B} - \overset{1}{A \cap C} - \underset{1}{B \cap C} + \underset{0}{A \cap B \cap C}$

$16 \cdot 3 - 3 = 15 \cdot 3 = 45$

$9 \cdot 5$

$3^4 - 45 =$

$81 - 45 =$

$9 \cdot 4 = 36$

20 palline 5 scatole

$\left(\dfrac{20+4!}{4!\,20!}\right) = \dfrac{\cancel{24} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{\cancel{4!}} = 23!/20!$

15) $h \quad m \quad k \quad r \quad s \quad = 20$

$C'_{n,k} \to C'_{5,20} = \binom{20+5-1}{5-1} = \dfrac{24!}{20!\,4!} = 10'626$

Esercizi permutazioni

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 3&4&6&4&2&8&7&1&5 \end{pmatrix}$ $\qquad \tau \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 7&5&4&2&6&1&3&9&8 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1\,3\,6\,8)(2\,9\,5)$ $\qquad (1\,7\,3\,4\,2\,5\,6)(9\,8)$

Periodo $= 12$ $\qquad$ periodo $= 14$

parità = dispari $\qquad$ parità = dispari

2) $\alpha = (3\,5\,4)(1\,5\,4\,3\,2)(1\,5\,2)(1\,3\,2\,4)$

$\alpha = (1\,2\,5)(4\,3)$

$\alpha^2 = (1\,2\,5)(4\,3)(1\,2\,5)(4\,3)$

$= (1\,5\,2)$

$\alpha^3 = (1\,5\,2)(1\,2\,5)(4\,3) = \quad (4\,3)$

$\alpha^4 = (1\,5\,2)(1\,5\,2) = (2\,1\,5)$

$\alpha^5 = (1\,5\,2)(4\,3)$

es

in S_7 $\quad \sigma = (1\,7\,5)(2\,3)(1\,6\,4\,2\,3\,5)$

$\sigma = (1\,6\,4\,3)(5\,7)$ $\qquad$ Per $(\sigma) = 4$

σ è tipo $(4,2)$

$\sigma^2 = (1\,4)(6\,3)$

$\sigma^3 = (1\,3\,4\,6)(5\,7)$

es) cicli di 5 in S_9

$\dfrac{D_{9,5}}{5} = \dfrac{9!}{4! \cdot 5} = \dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{} \quad 72 \cdot 42 = 3024$

es) numero permutazioni di tipo $(4,2)$ in S_6

$\dfrac{D_{6,4}}{4} \cdot 1 = \dfrac{6!}{2! \cdot 4} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 18 \cdot 5 = 90$

es) $(5,2,2,2)$ in S_{15}

$\dfrac{D_{15,5}}{5} = \dfrac{15!}{10!\; 5}$

$\dfrac{D_{10,2} \cdot D_{8,2} \cdot D_{6,2}}{\cancel{8!} \cdot 3!\, 2^3}$

$\dfrac{15! \cdot \cancel{10!}\, \cancel{8!}\, \cancel{6!}}{\cancel{10!}\, \cancel{8!}\, \cancel{6!}\, 4!\, 3!\, 2^3 \cdot 5} = \dfrac{15!}{6! \cdot 2^3}$

$$\cancel{..} \cdot 3!\, 2^3$$

$$\frac{15! \cdot \cancel{10!}\, \cancel{8!}\, \cancel{6!}}{\cancel{10!}\, \cancel{8!}\, \cancel{6!}\, 4!\, 3!\, 2^3 \cdot 5} = \frac{15!}{6! \cdot 2^3}$$

n d q r

$2702 - 324 \cdot 8 = 110$

$324 - 110 \cdot 2 = 104$

$110 - 104 \cdot 1 = 6$

$104 - 6 \cdot 17 = 2$

~~6 - 2 · 3 = 0~~

$d = r$

$d' = n$

$$n \cdot \underbrace{(n' - d'q')}_{d}\, q$$

$n - d \cdot q$

$d' - r'\, q$

$\underbrace{d' - (n' - d'q')\, q}$

$d'(1 + q'q) - n'q$

$104 \quad 1 + 1 \quad 17 \quad - 110 \quad 9$

$104\,(18) - 110 \cdot 17$

$d\, \underset{v_1}{18} + n\, \underset{v_2}{(-17)}$

$r'\, 18 + d'\, 17$

$(n' - d'q')\, 18 + d'(-17)$

$d'(v_2 - v_1 \cdot q')\; n' \cdot 18$

$v_1' = v_2 - v_1 \cdot q' \qquad v_2' = v_1$

$V_1' = V_2 - V_1 \cdot q' \qquad V_2' = V_1$

COMBINATORICA LIBRO ANDREA MORI

3.10 11 u, 9 d, 9 l, 1 un

a) $11 \cdot 9 = 99$ $\quad 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

b) $\binom{11}{5} \cdot \binom{9}{3} = \frac{11!}{6!\,5!} \cdot \frac{9!}{6!\,3!} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7$

$= 11 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$

$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$

c)

8d 7u $\quad$ 7d 9u

$8 + 7 - \text{int} = 9 \qquad 7 + 9 - \text{int} = 11$

6 d $\qquad$ 5 u

3.11

a) $4!$

b) 1 1 11 $\quad$ 12 $\quad \frac{12 + 4 - 1!}{3!\; 12!}$ $\quad \frac{\cancel{15!}\, 14 \cdot 13}{\cancel{3!}}$ $\;5 \cdot 7$

c) $7 \to p_1$

$6 \to p_2$

$3 \to c,\ r_b,\ r_a$

$$\binom{16}{7}\binom{9}{6}\, 3!$$

$16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

$$\frac{16!}{7!\, 9!} \cdot \frac{9!}{6!\, 3!}\; 3!$$

$16 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8$

$2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3^2 \cdot 2^3$

$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

3.12 5 colori

a) $\binom{5}{3}$

b) 21 $\quad$ 4 4 4 4 4 $\quad$ 1

c) $12 - 5 = 7$ $\qquad \frac{7 + 5 - 1!}{(5-1)!\, 7!} = \frac{11!}{4!\, 7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8}}{\cancel{4!}}$ $\;3$

$33 \cdot 10 = 330$

3.13 16

$\binom{?}{6}$

$33 \cdot 10 = 330$

3.13) 16

a) $\binom{16}{8}$

b) $\binom{4}{2}\binom{12}{6}$

c) $\binom{16}{8} - \binom{9}{8} - \binom{9}{7}\binom{7}{1}$

$- \binom{7}{7}\binom{9}{1} - \binom{9}{2}\binom{7}{6}$

$\binom{16}{8} - 2\left[\binom{9}{8} - \binom{9}{7} \cdot \frac{7}{1}\right]$

$9 \quad \frac{9 \cdot 8}{2} \quad 7$

3.14

. AlgITMOO

$\frac{9!}{2!}$

CRROO OLLIA

$\frac{10!}{3!2!2!}$

3.15)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

QUIZ C

1) $517 = 235 \cdot 2 + 47$ (470)

$235 = 47 \cdot 5 + 0$

2)

$600 = 555 + 45$

$555 = \cancel{45} \, 540 + 15$

$540 = 15 \cdot 36 + 0$

$\cancel{1}\ 2\ 3\ \cancel{4}\ 6\ 8\ 12\ 24\ \cancel{48}$ (16)

5) $48 \xrightarrow{2} 24 \xrightarrow{2} 12 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 1$

$2^4 \quad 3 \quad - 4$

$5 \cdot 2 - 1 = 9 \rightarrow 8$

7)

$54 \rightarrow 27$

$2 \quad 3^3$

$2 \cdot 4 = 8$

$54 - 8$?

8) $-847 = 12 \cdot 70 + 7$

10) $7 \cdot -9 = -63$

$12 \cdot 18 =$

5) $\varphi(54)$ $\quad \underbrace{3^3 - 3^2}_{18} \quad 18$

3^3

2^1 $\quad 2 - 1$

$\varphi(48) \quad 3 \quad 2^4 - 2^3 \quad 8 \cdot 2 = 16$

$2^4 \cdot 3 \quad 3 - 1$

$\varphi(847)$

847	7
121	11
	11

$11^2 - 11$

$7 - 1$

$110 \cdot 6 = 660$

Esecizi dimostrazioni

$f(a) - f(b) = \quad a \equiv b \bmod mn$

$([a]_m, [a]_n)([b]_m, [b]_n) = \quad a - b = k\, mn$

$$\left([a-b]_m, [a-b]_n\right) =$$

$$\left([k\underline{m}n]_m, [km\underline{n}]_n\right) = (0,0) = 0$$

$\hookrightarrow f(a) = f(b)$

$$f\left([a]_{mn}\right) \cdot f\left([a]_{mn}\right) =$$

$$\left([a]_m, [a]_n\right) \cdot \left([b]_m, [b]_n\right) =$$

$$\left([ab]_m, [ab]_n\right) \stackrel{def}{=}$$

$$f\left([ab]_{mn}\right) = f\left([a]_{mn} \cdot [b]_{mn}\right)$$