Grafi: visite

Corso di **Algoritmi e strutture dati**
Corso di Laurea in **Informatica**
Docenti: Ugo de'Liguoro, András Horváth

Indice

Sommario

Obiettivo:

- visitare tutti nodi e archi in modo sistematico
- problema di base in molte applicazioni
- la visita fornisce informazione sul grafo visitato
- vari tipi di visite:
  - in ampiezza, breadth first search
  - in profondità, depth first search

1. Idea di base

- insieme di vertici diviso in tre sottoinsiemi:
  - **bianco**: nodi non ancora scoperti (non visitati)
  - **grigio**: vertici scoperti di cui adiacenti non sono ancora tutti scoperti (nodi da cui bisogna andare ancora avanti; la frangia)
  - **nero**: nodi scoperti di cui adiacenti sono già stati scoperti (nodi da cui non bisogna andare avanti più)

1. Versione "astratta" dell'algoritmo

- INIZIALIZZA(G)
  for $\forall u \in V$ **do**
      $u.color \leftarrow bianco$
- VISITA(G, s)
  $s.color \leftarrow grigio$
  while $\exists$ nodo *grigio* **do**
      $u \leftarrow$ nodo *grigio*
      if $\exists v$ *bianco* $\in$ adj[u] **then**
          $v.color \leftarrow grigio$
      else
          $u.color \leftarrow black$

1. Proprietà, invarianti

- **proprietà I**: colore di un nodo può solo passare da bianco a grigio a nero
- **invariante I**: se $(u, v) \in E$ e u è nero, allora v è grigio o nero
- **invariante II**: tutti i vertici grigi o neri sono raggiungibili da s
- **invariante III**: qualunque cammino da s ad un nodo bianco deve contenere almeno un vertice grigio

1. Proprietà, invarianti

- invariante I e II sono evidenti
- dimostrazione di invariante III:
  - se *s* è ancora grigio: vero
  - se *s* è nero: se non ci fosse nessun vertice grigio, allora ci sarebbe un nodo bianco adiacente ad uno nero, che è impossibilie per l'invariante I

1. Al termine del algoritmo

- teorema: al termine dell'algoritmo

  un vertice v è nero $\iff$ v è raggiungibile da s

- $\Rightarrow$: dal'invariante II
- $\Leftarrow$: invariante III e la condizione di uscita del ciclo implicano che non ci può essere nessun vertice bianco raggiungibile da s

1. Costruzione del sottografo di predecessori

- per ogni vertice che viene scoperto, vogliamo ricordare quale vertice grigio ha permesso di scoprirlo
- vuole dire anche ricordare l'arco che ci porta alla scoperta del nodo
- associamo ad ogni nodo un attributo (variabile) che memorizza il nodo dal quale era scoperto
- inizializzazione dell'algoritmo:

INIZIALIZZA(G)
  for $\forall u \in V$ **do**
    $u.color \leftarrow bianco$
    $u.\pi \leftarrow nil$

1. Costruzione del sottografo di predecessori

- VISITA(G, s)
  $s.color \leftarrow grigio$
  while $\exists$ nodo *grigio* **do**
  $u \leftarrow$ nodo *grigio*
  if $\exists v$ *bianco* $\in$ adj[u] **then**
  $v.color \leftarrow grigio$
  $v.\pi \leftarrow u$
  else
  $u.color \leftarrow black$
- proprietà II: al termine di VISITA(G, s), l'unico vertice nero con predecessore nil è s

1. Sottografo di predecessori

- sottografo: $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$
- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq \text{nil}\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) \in E : v \in V_\pi - \{s\}\}$
- all'termine di VISITA(G, s), V_π è l'insieme di tutti i vertici neri (tutti i nodi raggiungibili da s)
- teorema: il sottografo di predecessori è un albero
- dimostrazione: segue dal seguente invariante del while: $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ è connesso e $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$
- il sottografo $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ è l'albero di scoperta

1. Visitare grafi non connessi

- l'algoritmo precedente visita solo il componente di cui il nodo iniziale (s) fa parte
- visita tutto il grafo solo se il grafo è connesso
- visita intera di un grafo non connesso:

VISITA-TUTTI-VERTICI(G)
  INIZIALIZZA(G)
  for $\forall u \in V$ **do**
    if $u.color = bianco$ **then**
      VISITA(G, u)

- il sottografo di predecessori diventa una foresta (un grafo composto da più alberi) se il grafo contiene più componenti
- questa foresta si chiama **foresta di scoperta**

1. Cammino di scoperta

- algoritmo che stampa il cammino dal sorgente della visita ad un nodo u

PRINT-PATH(G, s, u)
  if $u = s$ **then**
    stampa u
  else
    if $u.\pi = nil$ **then**
      stampa “non esiste cammino da s ad u”
    else
      PRINT-PATH($G, s, u.\pi$)
      stampa u

1. Versione “concreta” dell’algoritmo

- una struttura dati D per gestire l’insieme di vertici grigi
- operazioni necessari:
  - MAKE-EMPTY: crea una struttura nuova
  - FIRST(D): restituisce il primo elemento (senza modificare D)
  - ADD(D, x): aggiunge l’elemento x a D
  - REMOVE-FIRST(D): toglie da D il primo elemento
  - NOT-EMPTY(D): restituisce true se D non è vuoto, false altrimenti
- ruolo di ADD(D, x):
  - aggiunge x come primo elemento $\rightarrow$ pila (stack)
  - aggiunge x come ultimo elemento $\rightarrow$ coda (queue)

1. Versione "concreta" dell'algoritmo

```
VISITA(G, s)
  D ← MAKE-EMPTY
  s.color ← grigio
  ADD(D, s)
  while NON-EMPTY(D) do
      u ← FIRST(D)
      if ∃v bianco ∈ adj[u] then
          v.color ← grigio
          v.π ← u
          ADD(D, v)
      else
          u.color ← black
          REMOVE-FIRST(D)
```

1. Complessità della visita

- bisogna sapere come viene implementato il test:
  if $\exists v$ *bianco* $\in \mathrm{adj}[u]$
- assumiamo di aver realizzato il test con ciclo che percorre dall'inizio la lista di adiacenza
- ciclo finisce quando si trova il primo nodo bianco
- problema: la lista di adiacenza di un nodo u può essere percorso più volte

1. Complessità della visita

- dalla proprietà I sappiamo che un vertice grigio o nero non può ridiventare bianco
- non è necessario percorrere la lista di adiacenza dal inizio
- il ciclo può partire da dove è arrivato l'ultima volta
- associamo ad ogni vertice il valore corrente del puntatore alla lista di adiacenti
- la lista di adiacenza è percorsa una volta sola $\rightarrow$ implementazione più efficiente

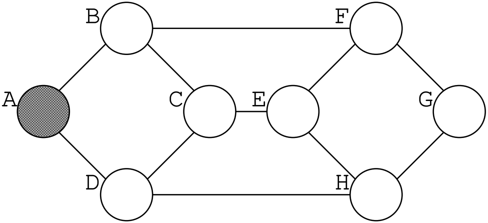
1. Complessità della visita

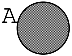
- inizializzazione richiede tempo $O(|V|)$
- ogni vertice viene inserito (eliminato) una volta in (da) D
- assumiamo che le operazioni di inserimento e eliminazione richiedano un tempo costante
- tempo totale dedicato alle operazioni su D è $O(|V|)$
- le liste di adiacenza vengono percorse una volta
- tempo totale dedicato alla ricerca di nodi bianchi è $O(|E|)$
- **tempo totale**: $O(|V| + |E|)$

2. Visita in ampiezza

- VISITA(G, s)
  $D \leftarrow$ MAKE-EMPTY
  $s.color \leftarrow grigio$
  ADD(D, s)
  while NON-EMPTY(D) **do**
  $u \leftarrow$ FIRST(D)
  if $\exists v$ *bianco* $\in$ adj[u] **then**
  $v.color \leftarrow grigio$
  $v.\pi \leftarrow u$
  ADD(D, v)
  else
  $u.color \leftarrow black$
  REMOVE-FIRST(D)
- D è una **coda** $\rightarrow$ **visita in ampiezza** (breadth first search, BFS)

2. Esempio di BFS

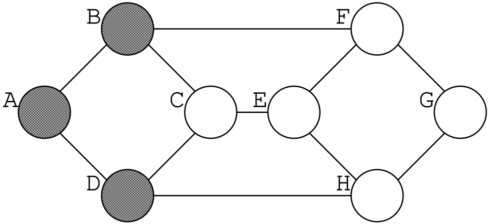


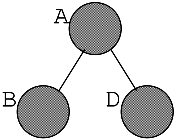


Coda D:

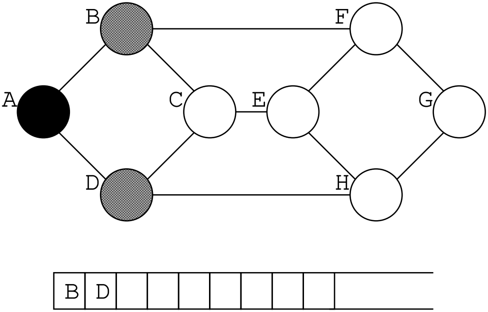
A								

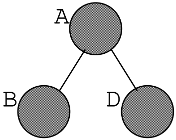
2. Esempio di BFS



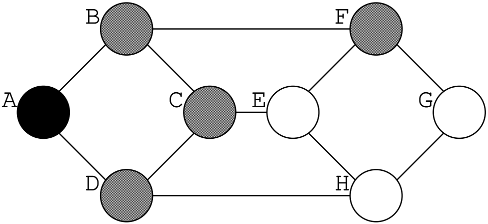


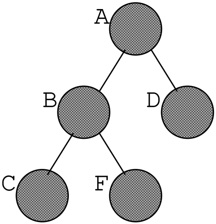
2. Esempio di BFS





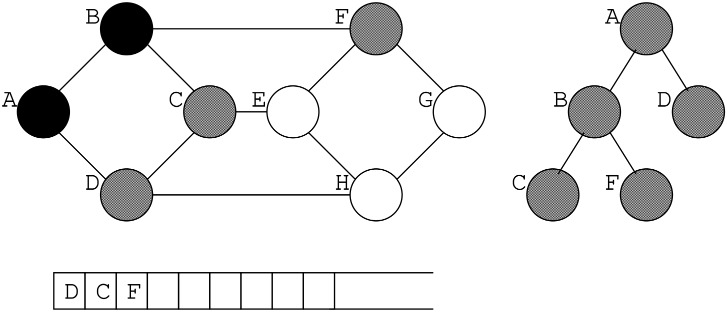
2. Esempio di BFS



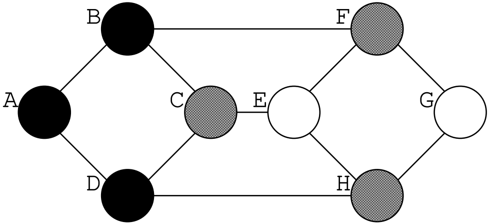


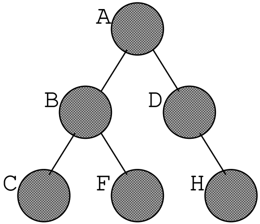
B	D	C	F						

2. Esempio di BFS



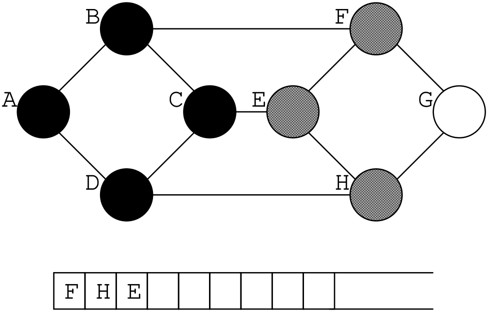
2. Esempio di BFS

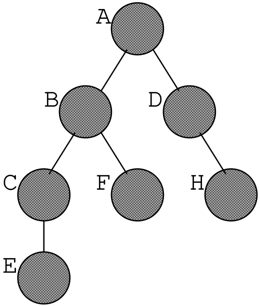




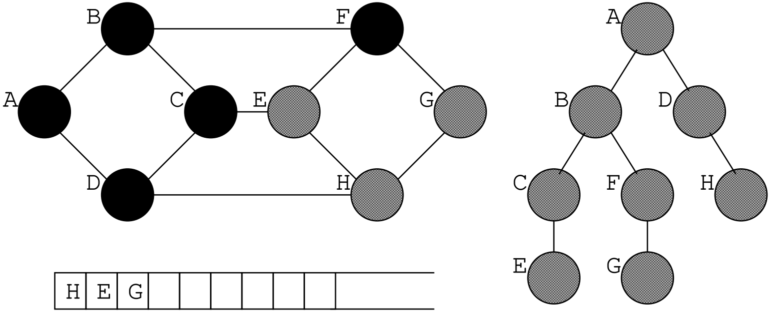
C	F	H							

2. Esempio di BFS

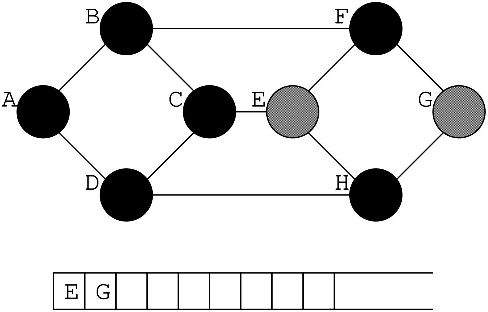


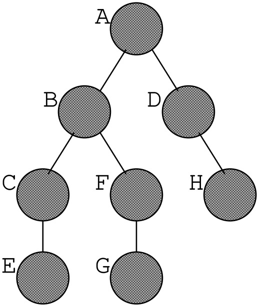


2. Esempio di BFS

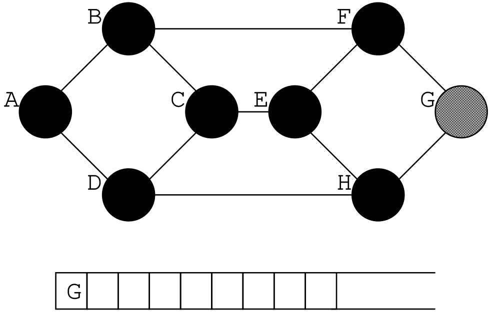


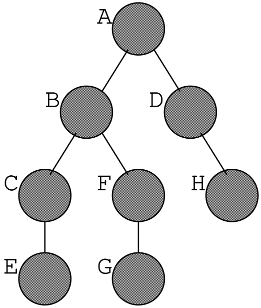
2. Esempio di BFS



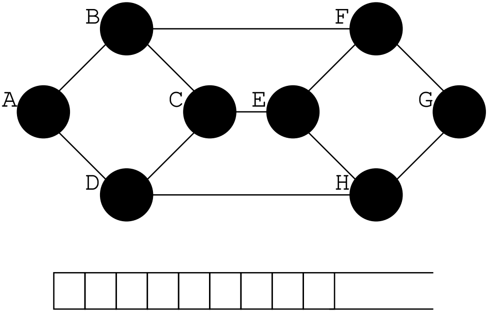


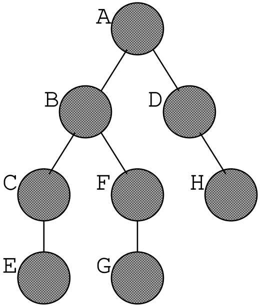
2. Esempio di BFS





2. Esempio di BFS





2. Versione modificata dell'algoritmo

- il primo elemento della coda non cambia finchè ci sono adiacenti bianchi
- VISITA(G, s)

```
D ← MAKE-EMPTY
s.color ← grigio
ADD(D, s)
while NON-EMPTY(D) do
    u ← FIRST(D)
    for ∀v : v è bianco ed è ∈ adj[u] do
        v.color ← grigio
        v.π ← u
        ADD(D, v)
    u.color ← black
    REMOVE-FIRST(D)
```

2. Terza versione (ancora più “concreta”)

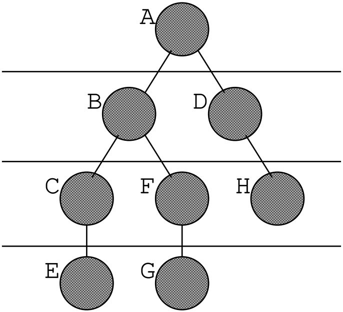
Ogni elemento nella lista di adiacenti ha due campi:

- *vtx* è la vertice
- *next* è il prossimo elemento nella lista

$\text{VISITA}(G, s)$
  $D \leftarrow \text{MAKE-EMPTY}$
  $s.color \leftarrow grigio$
  $\text{ADD}(D, s)$
  while $\text{NON-EMPTY}(D)$ **do**
    $u \leftarrow \text{FIRST}(D)$
    $ptr \leftarrow \text{adj}[u]$
    while $ptr \neq nil$ **do**
      $v \leftarrow ptr.vtx$
      if $v.color = bianco$ **then**
        $v.color \leftarrow grigio$
        $v.\pi \leftarrow u$
        $\text{ADD}(D, v)$
      $ptr \leftarrow ptr.next$
    $u.color \leftarrow black$
    $\text{REMOVE-FIRST}(D)$

2. Albero di BFS

- albero di BFS viene costruito a livelli
- la costruzione del livello $n+1$ non comincia prima di concludere la costruzione del livello n



- associamo ad ogni nodo un attributo (d) che ricorda il livello del nodo

2. Albero di BFS

- algoritmo di visita BFS col calcolo del livello :
- INIZIALIZZA(G)
  for $\forall u \in V$ **do**
  $u.color \leftarrow bianco$
  $u.\pi \leftarrow nil$
  $u.d \leftarrow \infty$

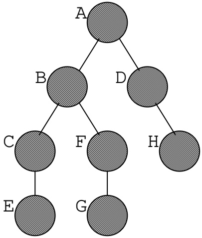
2. Albero di BFS

```
VISITA(G, s)
  D ← MAKE-EMPTY
  s.color ← grigio
  s.d ← 0
  ADD(D, s)
  while NON-EMPTY(D) do
      u ← FIRST(D)
      for ∀v : v è bianco ed è ∈ adj[u] do
          v.color ← grigio
          v.π ← u
          v.d ← u.d + 1
          ADD(D, v)
      u.color ← black
      REMOVE-FIRST(D)
```

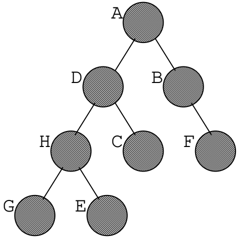
2. Albero di BFS

- albero dipende dal ordine in cui i nodi sono elencati nelle liste di adiecenza:

lista di adiecenza in ordine alfabetico:

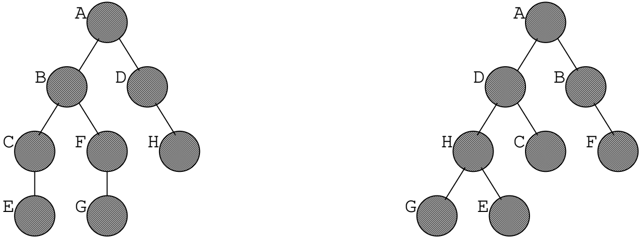


lista di adiecenza in ordine inverso:



2. Proprietà della visita BFS

Ma ogni nodo rimane allo stesso livello:



- teorema: al termine della visita BFS

$$\forall v \in V, v.d = \delta(s, v)$$

dove $\delta(s, v)$ indica la distanza di v dal sorgente s della visita (lunghezza di cammino minimo)

2. Proprietà della visita BFS

- per ogni vertice v raggiungibile da s, il cammino da s a v nell'albero BFS è un cammino minimo
- il livello di un nodo nell'albero ottenuto con la visita BFS è indipendente dal ordine in cui sono memorizzati i vertici nelle liste di adiacenza

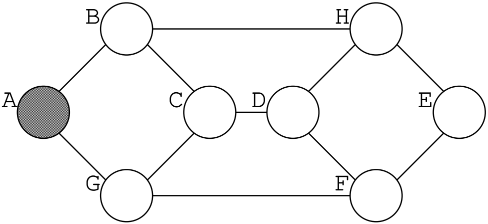
3. Visita in profondità

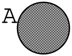
- $\text{VISITA}(G, s)$

```
D ← MAKE-EMPTY
s.color ← grigio
ADD(D, s)
while NON-EMPTY(D) do
    u ← FIRST(D)
    if ∃v bianco ∈ adj[u] then
        v.color ← grigio
        v.π ← u
        ADD(D, v)
    else
        u.color ← black
        REMOVE-FIRST(D)
```

- D è una **pila** $\rightarrow$ **visita in profondità** (depth first search, DFS)

3. Esempio di DFS

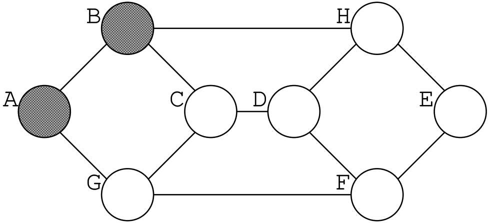


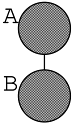


Pila:

A								

3. Esempio di DFS

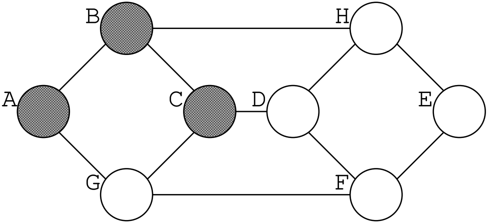


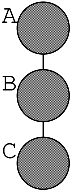


Pila D:

A	B								

3. Esempio di DFS

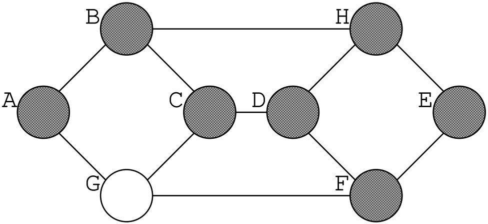




Pila D:

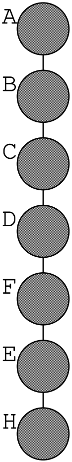
A	B	C							

3. Esempio di DFS

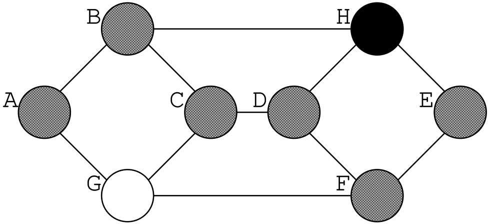


Pila D:

A	B	C	D	F	E	H			

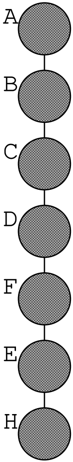


3. Esempio di DFS

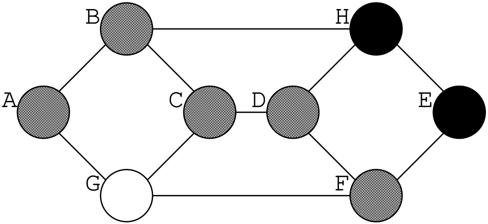


Pila D:

A	B	C	D	F	E				

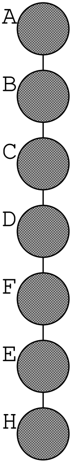


3. Esempio di DFS

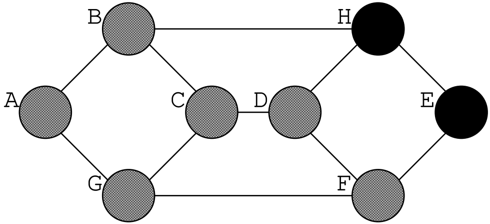


Pila D:

A	B	C	D	F					

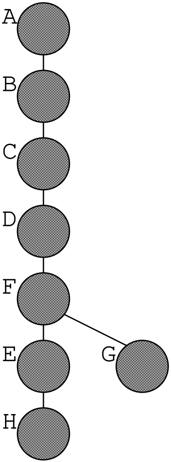


3. Esempio di DFS

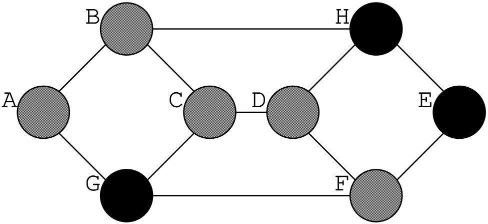


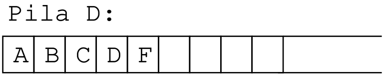
Pila D:

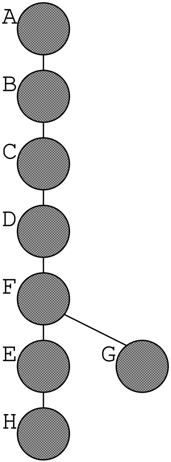
A	B	C	D	F	G				



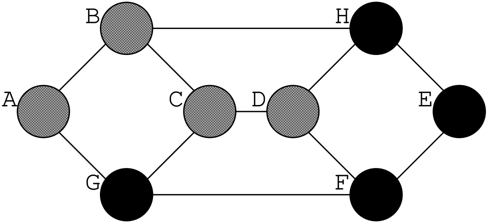
3. Esempio di DFS





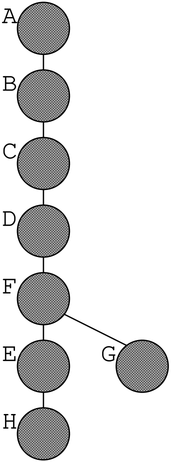


3. Esempio di DFS

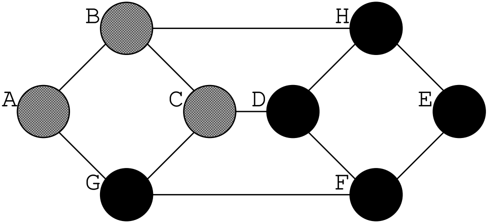


Pila D:

A	B	C	D						

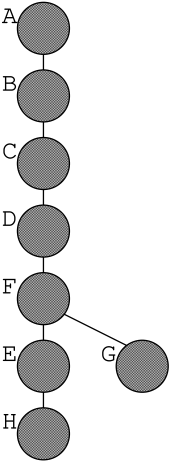


3. Esempio di DFS

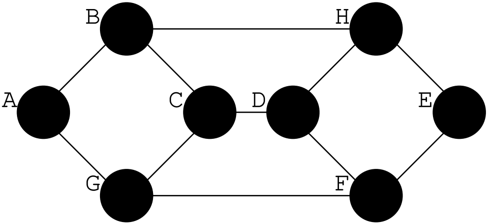


Pila D:

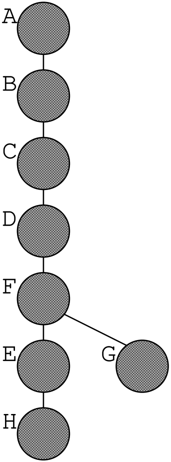
A	B	C							



3. Esempio di DFS

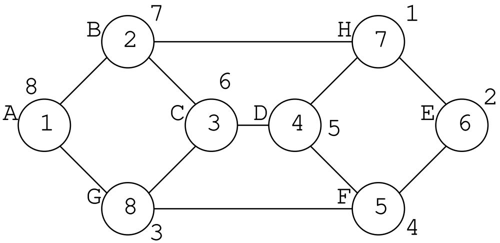


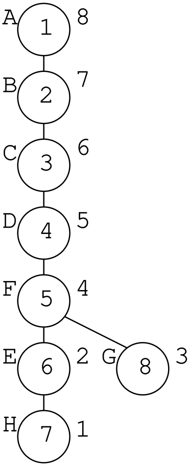
Pila D:



3. Ordine di scoperta di nodi

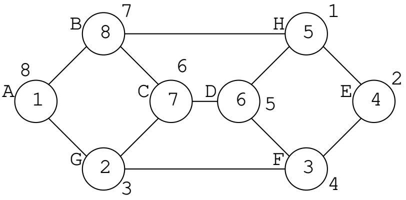
- due ordini tra i nodi:
  - l'ordine in cui i nodi diventano grigi (scritto nel nodo)
  - l'ordine in cui i nodi diventano neri (scritto accanto al nodo)
- liste di adiacenza in ordine alfabetico

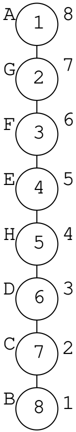




3. Ordine di scoperta di nodi

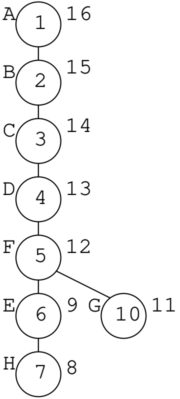
- liste di adiacenza in ordine contrario

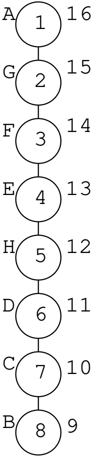




3. Ordine di scoperta di nodi

- un unico contatore che viene incrementato quando un nodo cambia colore
- ogni nodo viene marcato due volte con questo numero (bianco $\rightarrow$ grigio, grigio $\rightarrow$ nero)





3. Versione sbagliata (non funziona)

- VISITA(G, s)
  $D \leftarrow$ MAKE-EMPTY
  $s.color \leftarrow grigio$
  ADD(D, s)
  while NON-EMPTY(D) **do**
    $u \leftarrow$ FIRST(D)
    for $\forall v : v$ è *bianco* ed è $\in$ adj[u] **do**
      $v.color \leftarrow grigio$
      $v.\pi \leftarrow u$
      ADD(D, v)
    $u.color \leftarrow black$
    REMOVE-FIRST(D)
- perchè non funziona?

Inutile

3. Perchè non funziona?

- se v è bianco, diventa grigio e finisce sul top di D
- la lista di adiacenti da considerare dovrebbe essere quella del nuovo nodo sul top di D
- invece nella condizione del **for** rimane il vertice precedente

3. Una versione corretta

```
VISITA(G, s)
  D ← MAKE-EMPTY
  s.color ← grigio
  ADD(D, s)
  while NON-EMPTY(D) do
      while ∃v : v è bianco ed è ∈ adj[FIRST(D)] do
          v.color ← grigio
          v.π ← FIRST(D)
          ADD(D, v)
      u.color ← black
      REMOVE-FIRST(D)
```

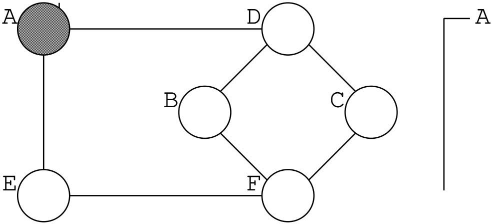
3. E una versione corretta e più concreta

```
VISITA(G, s)
  D ← MAKE-EMPTY
  s.color ← grigio
  ADD(D, s)
  while NON-EMPTY(D) do
      while FIRST(D).ptr ≠ nil do
          v ← FIRST(D).ptr.vtx
          FIRST(D).ptr ← FIRST(D).ptr.next
          if v.color = bianco then
              v.color ← grigio
              v.π ← FIRST(D)
              ADD(D, v)
      FIRST(D).color ← black
      REMOVE-FIRST(D)
```

3. Inizializzazione

- naturalmente l'attributo *ptr* va inizializzato
- INIZIALIZZA(G)
  for $\forall u \in V$ **do**
  $u.color \leftarrow bianco$
  $u.\pi \leftarrow nil$
  $u.ptr \leftarrow \mathrm{adj}[u]$

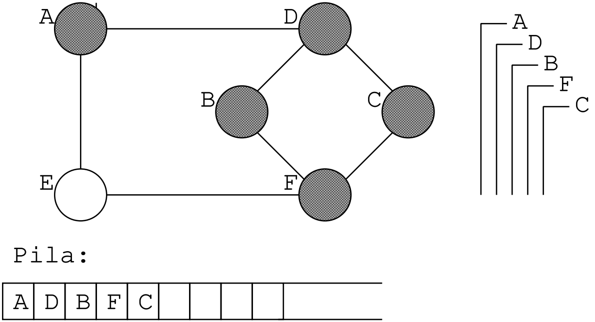
3. Un altro esempio di DFS



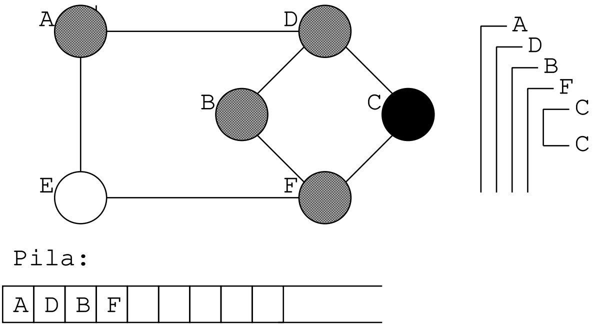
Pila:

A								

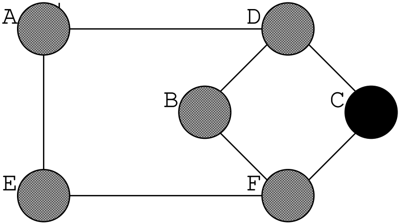
3. Un altro esempio di DFS

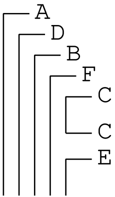


3. Un altro esempio di DFS



3. Un altro esempio di DFS

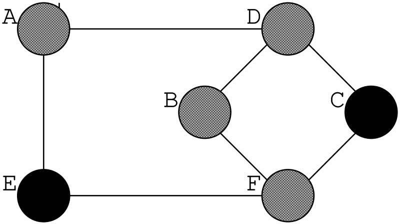


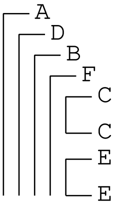


Pila:

A	D	B	F	E					

3. Un altro esempio di DFS

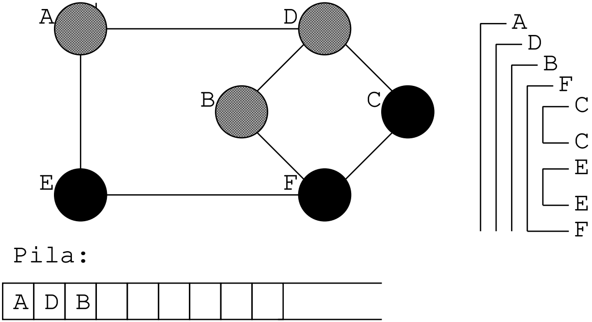




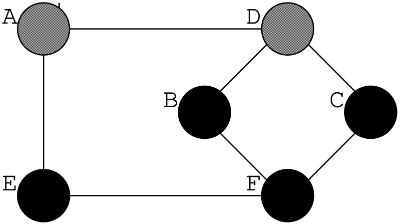
Pila:

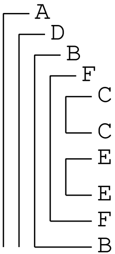
A	D	B	F						

3. Un altro esempio di DFS



3. Un altro esempio di DFS

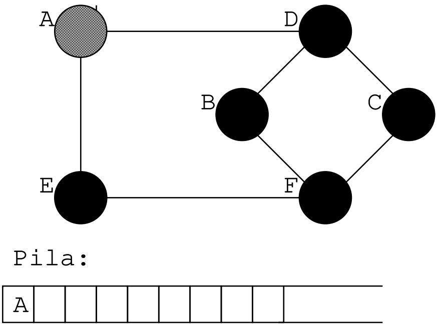


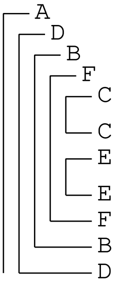


Pila:

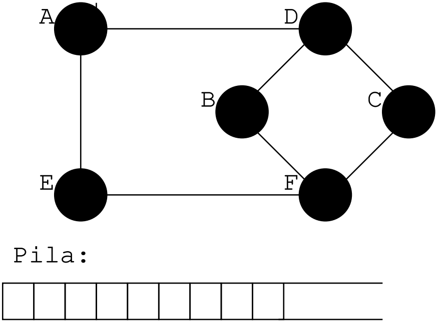
A	D							

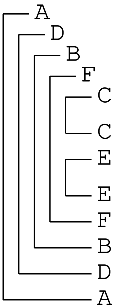
3. Un altro esempio di DFS





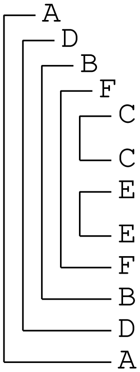
3. Un altro esempio di DFS





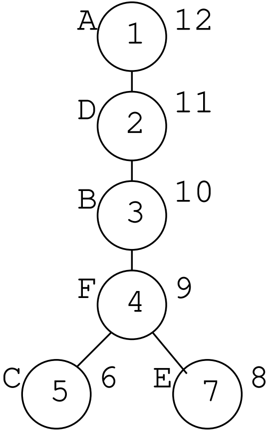
3. Struttura di “attivazione”

- gli intervalli di “attivazione” di una qualunque coppia di nodi sono:
  - disgiunti oppure
  - uno interamente contenuto nell’altro



3. Struttura di “attivazione”

- un vertice non viene “disattivato” finchè non sono stati “attivati” e “disattivati” tutti i suoi discendenti
- è l’ordine in cui si percorre l’albero delle chiamate ricorsiva di una procedura ricorsiva
- progettiamo una versione ricorsiva dell’algoritmo di visita in profondità



3. Versione ricorsiva della visita in profondità

$\textsc{Visita}(G, s)$
$s.color \leftarrow grigio$
while $\exists v$: v è *bianco* ed è $\in$ adj[s] **do**
$v.\pi \leftarrow s$
$\textsc{Visita}(G, v)$
$s.color \leftarrow nero$

3. Corrispondenza fre la versione ricorsiva e iterativa

- c'è corrispondenza fra lo stack della versione iterativa e lo stack delle attivazioni della procedura ricorsiva
- supponiamo che le due versioni visitino gli adiacenti nello stesso ordine
- se il contenuto dello stack della versione iterativa è $\{v_1, ..., v_r\}$ ($v_1 = s$ e v_r è al top dello stack)
- allora la sequenza di attivazioni per la procedura ricorsiva è $\{\text{VISITA}(G, v_1), ..., \text{VISITA}(G, v_r)\}$
- può essere dimostrata per induzione sul numero di elementi nello stack

3. Versione estesa per raccogliere altre informazioni

- introduciamo un contatore “time” per ricordare l’ordine delle attivazioni e disattivazioni
- VISITA(G, s)
  - $s.color \leftarrow grigio$
  - $s.d \leftarrow time$
  - $time \leftarrow time + 1$
  - **while** $\exists v$: v è *bianco* ed è $\in$ adj[s] **do**
    - $v.\pi \leftarrow s$
    - VISITA(G, v)
  - $s.f \leftarrow time$
  - $time \leftarrow time + 1$
  - $s.color \leftarrow nero$

3. Versione estesa per raccogliere altre informazioni

- bisogna inizializzare le nuove variabili:
- INIZIALIZZA(G)

  for $\forall u \in V$ **do**

  $\quad u.color \leftarrow bianco$

  $\quad u.\pi \leftarrow nil$

  $\quad u.d \leftarrow \infty$

  $\quad u.f \leftarrow \infty$

  $time \leftarrow 1$
- tempi di un nodo non visitato rimangono infiniti

3. Visita in profondità di tutti i nodi

- l'algoritmo precedente visita solo il componente di cui il nodo iniziale (s) fa parte
- visita tutto il grafo solo se il grafo è connesso
- visita intera di un grafo non connesso:

VISITA-TUTTI-VERTICI(G)
  INIZIALIZZA(G)
  for $\forall u \in V$ **do**
    if $u.color = bianco$ **then**
      VISITA(G, u)

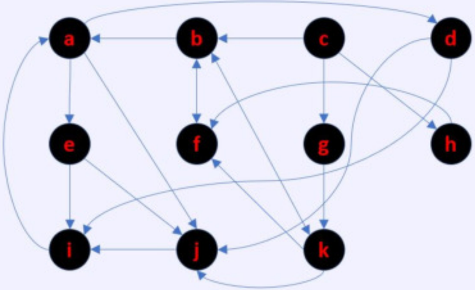
3. Proprietà della visita in profondità di tutti i nodi

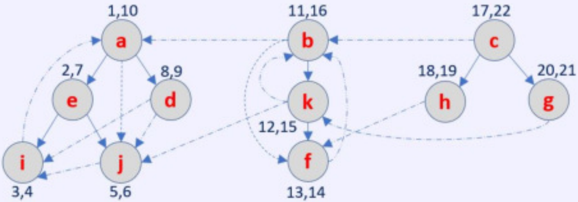
- Teorema delle parentesi: in ogni visita DFS in un grafo (orientato o non orientato), per ogni coppia di nodi u, v, una e una sola delle seguente condizioni è soddisfatta:
  - $u.d < v.d < v.f < u.f$ e u è un antenato di v in un albero della foresta DFS
  - $v.d < u.d < u.f < v.f$ e u è un discendente di v in un albero della foresta DFS
  - $u.d < u.f < v.d < v.f$ o $v.d < v.f < u.d < u.f$ e non esiste relazione antenato-discendente tra u e v nella foresta DFS
- ogni caso implica caratteristiche del grafo:
  - $u.d < v.d < v.f < u.f$: nel grafo esiste un cammino da u a v
  - $v.d < u.d < u.f < v.f$: nel grafo esiste un cammino da v a u
  - $u.d < u.f < v.d < v.f$ e u e v fanno parte di due alberi distinti: nel grafo non esiste cammino da u a v
  - $v.d < v.f < u.d < u.f$ e u e v fanno parte di due alberi distinti: nel grafo non esiste cammino da v a u

3. Proprietà della visita in profondità di tutti i nodi

- classificazione degli archi del grafo durante DFS
  - arco dell'albero: arco inserito nella foresta DFS
  - arco all'indietro: arco che collega un nodo ad un suo antenato
  - arco in avanti: arco che collega un nodo ad un suo discendente
  - arco di attraversamento: arco che collega due vertici che non sono in relazione antenato-discendente

a:	e	d	j
b:	a	k	f
c:	b	h	g
d:	i	j	
e:	i	j	
f:	b		
g:	k		
h:	f		
i:	a		
j:	i		
k:	b	j	f





3. Proprietà della visita in profondità di tutti i nodi

- un arco (u, v) viene classificato quando si esamina v nella lista di adiacenti adj$[u]$
- in quel momento $v.color$ può essere:
  - *bianco*: (u, v) è un arco della foresta DFS
  - *grigio*: u è un discendente di v in un albero della foresta DFS, (u, v) è un arco all'indietro
  - *nero*: la visita di v è già terminata (e quindi $v.f < u.f$), (u, v) è un arco
    - in avanti se v è un discendente di u, in tal caso $u.d{<}v.d \implies u.d{<}v.d{<}v.f{<}u.f$
    - di attraversamento altrimenti, in tal caso $v.d{<}u.d \implies v.d{<}v.f{<}u.d{<}u.f$
- i precedenti casi forniscono un criterio per la classificazione

3. Proprietà della visita in profondità di tutti i nodi

- teorema: in una visita DFS di un grafo non orientato, ogni arco è un arco dell'albero o un arco all'indietro
- teorema: un grafo, orientato o non orientato, è aciclico se e solo se una visita DFS (qualunque) non produce archi all'indietro