Correzione esercizi (combinatoria)

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$5!=5\cdot 4!$$

$$\boxed{k!=k\cdot(k-1)!}$$

3) $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$

$$\frac{n!}{(k-1)!\,\underbrace{(n-(k-1))!}_{(n-k+1)!}}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k)!}$$

$$\frac{n!\cdot k}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}+\frac{n!\cdot(n-k+1)}{\underbrace{k\cdot(k-1)!}_{k!}\cdot\underbrace{(n-k+1)\cdot(n-k)!}_{(n-k+1)!}}=\frac{n!\,(\cancel{k}+n-\cancel{k}+1)}{k!\,(n-k+1)!}=\frac{\overbrace{(n+1)\cdot n!}^{(n+1)!}}{k!\,((n+1)-k)!}=\binom{n+1}{k}$$

2) $\binom{6}{3}=\sum_{k=0}^{3}\binom{5-k}{2} \rightsquigarrow \binom{6}{3}=\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$

$$\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{5!}{2!\,3!}+\frac{4!}{2!\,2!}+\frac{3!}{2!\,1!}+\frac{2!}{2!\,0!}\quad\dots$$

5) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Formula di Newton: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

Basta prendere $x=-1$, $y=1$ $\Rightarrow$ $x+y=0$ $\Rightarrow$ $(x+y)^n = 0$

Ma $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

6) $(x-2y)^{21} = \sum_{k=0}^{21} x^k (-2y)^{21-k} \binom{21}{k} = x^{21} + \dots x^{20} y + \dots x^{19} y^2 + \dots \dots + \dots y^{21}$

Il termine corrispondente a $k=18$ è $x^{18} \cdot (-2y)^3 \cdot \binom{21}{18} = (-2)^3 \cdot \frac{21!}{18!\,3!} x^{18} y^3 = -10640\, x^{18} y^3$

11) Prima domanda : 7 scelte per il maschio $\Rightarrow$ $7 \cdot 5 = 35$ scelte
5 " per la femmina

Seconda domanda: ogni femmina fa parte della squadra, basta scegliere quali maschi accoppiare a ciascuna di loro. (l'ordine conta).

$$D_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

12) Quanti numeri di 5 cifre contengono esattamente due zeri?

1. Scegliamo dove posizionare gli zeri : $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ $\Rightarrow$ in totale $6 \cdot 9^3$ scelte
2. Scegliamo le altre tre cifre : 9^3 possibilità

13) 3!

15) In quanti modi si possono distribuire 20 palline uguali in 5 scatole diverse?

Dobbiamo posizionare 4 "divisori" tra le 20 palline :

Es. o o o | o | o o o || o o o o o o o o o o o o o $(3,1,3,0,13)$

Ovvero devo scegliere la posizione dei 4 divisori tra le 24 disponibili.

$$\binom{24}{4} = \frac{24!}{4!\,20!} = \frac{\cancel{24} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{\cancel{4!}} = 10626$$

14) Quante sono le funzioni suriettive da $I_4 = \{1,2,3,4\}$ a $I_3 = \{1,2,3\}$

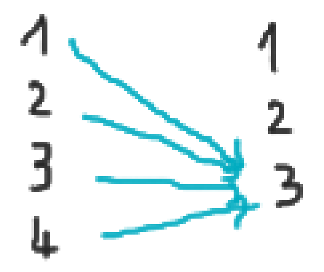
Idea: calcolo il numero totale delle funzioni e tolgo quelle <u>non</u> suriettive.

$A = \{\text{funzioni } f: I_4 \to I_3 \text{ t.c. } f^{-1}(1) = \emptyset\}$ $\quad |A| = 2^4 = 16$

$B = \{ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{t.c. } f^{-1}(2) = \emptyset\}$ $\quad |B| = 16$

$C = \{ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{t.c. } f^{-1}(3) = \emptyset\}$ $\quad |C| = 16$

Le funzioni non suriettive coincidono con l'unione $A \cup B \cup C$.



$A \cap B = \{ f: I_4 \to I_3 \text{ t.c. } f^{-1}(1) = \emptyset \text{ e } f^{-1}(2) = \emptyset\}$ $\quad |A \cap B| = 1$

$|B \cap C| = |A \cap C| = 1$

$A \cap B \cap C = \emptyset \quad |A \cap B \cap C| = 0$

Per il principio di inclusione esclusione:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0 = 45$$

L'insieme di <u>tutte</u> le funzioni $I_4 \to I_3$ ha cardinalità $3^4 = 81$

Quelle suriettive sono $81 - 45 = 36$

Esercizi sulle permutazioni

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 6 & 4 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ in S_9

Scrivere σ e τ come prodotti di cicli disgiunti

$\sigma = (1\ 3\ 6\ 8)(2\ 9\ 5)$ $\quad \tau = (1\ 7\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6)(8\ 9)$

$per(\sigma) = mcm(4,3) = 12$ $\quad per(\tau) = mcm(7,2) = 14$

parità $D + P = D$ dispari $\quad$ parità $P + D = D$ dispari

$\sigma \circ \tau = (1\ 3\ 6\ 8)(2\ 9\ 5)(1\ 7\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6)(8\ 9)$

$= (1\ 7\ 6\ 3\ 4\ 9)\cancel{(2)}(5\ 8)$

$1 \to 1 \to 7 \to 7 \to 7$
2
$3 \to 3 \to 4 \to 4 \to 4$
$4 \to 4 \to 2 \to 9 \to 9$
5
$6 \to 6 \to 1 \to 1 \to 3$
$7 \to 7 \to 3 \to 3 \to 6$
8
$9 \to 8 \to 8 \to 8 \to 1$

2) $\alpha = (3\ 5\ 4)(1\ 5\ 4\ 3\ 2)(1\ 5\ 2)(1\ 3\ 2\ 4) \quad \in S_5$

$\alpha = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$ $\quad per(\alpha) = 6$ $\quad \alpha^6 = id$

$\alpha^2 = (1\ 2\ 5)(3\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4) = (1\ 5\ 2)$ $\quad \alpha^4 =$

$\alpha^3 = (1\ 2\ 5)(3\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4) = (3\ 4)$ $\quad \alpha^5 =$

Es 3: in S_7 $\quad \sigma = (1\ 7\ 5)(2\ 3)(1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 5) = (1\ 6\ 4\ 3)(5\ 7)$

σ è di tipo $(4,2)$ $\qquad per(\sigma) = mcm(4,2) = 4 \qquad \sigma^4 = id$

$$\sigma^2 = (1\ 4)(3\ 6)$$
$$\sigma^3 = (1\ 3\ 4\ 6)(5\ 7)$$

Es 4: Determinare il n° di cicli di lunghezza 5 in S_9.

Il n° di tali cicli è $\quad \dfrac{D_{9,5}}{5} = \dfrac{9!}{5\cdot(9-5)!} = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$

Determinare il n° di permutazioni di tipo $(4,2)$ in S_6

1) scelgo il ciclo da 4 : $\dfrac{D_{6,4}}{4} = \dfrac{6!}{4\cdot(6-4)!} = \dfrac{6!}{4\cdot 2!} = \dfrac{6!}{8} = 90$

2) scelgo il ciclo da 2 tra i due elementi rimasti : ce n'è solo 1.

In conclusione : ci sono 90 permutazioni di tipo $(4,2)$ in S_6.

Es 3: Quante permutazioni di tipo $(5,2,2,2)$ ci sono in S_{15}?

1) Scelgo il ciclo da 5 : $\frac{D_{15,5}}{5} = \frac{15!}{5 \cdot 10!}$

2) Scelgo il primo ciclo da 2 : $\frac{D_{10,2}}{2} = \frac{10!}{2 \cdot 8!}$

3) " secondo " : $\frac{D_{8,2}}{2} = \frac{8!}{2 \cdot 6!}$

4) " terzo " : $\frac{D_{6,2}}{2} = \frac{6!}{2 \cdot 4!}$

Principio delle scelte successive : $\frac{15!}{5 \cdot \cancel{10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{2 \cdot \cancel{8!}} \cdot \frac{\cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{2 \cdot 4!} = \frac{15!}{5 \cdot 2^3 \cdot 4!}$

Per trovare il numero corretto occorre dividere per il numero di permutazioni (o riordinamenti) dei tre cicli da 2, che è $3!$

$$\text{Risposta} = \frac{15!}{5 \cdot 2^3 \cdot 4! \cdot 3!}$$