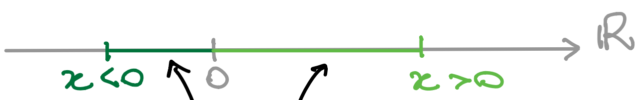
Lezione 6

Distanza tra due punti sulla retta reale

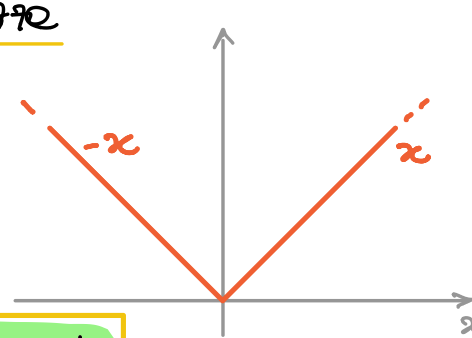
easy distanz



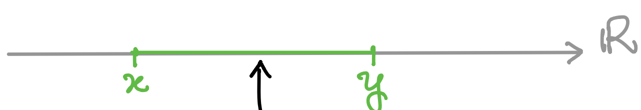
la distanza di x dall'origine è la lunghezza di questo segmento

≥ 0

$$\boxed{d(x,0)=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}}$$



1 $\Rightarrow \boxed{d(x,0)=|x|}$

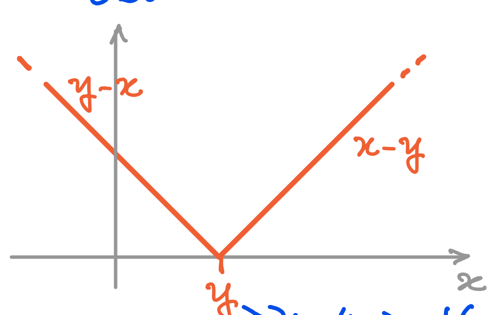


la distanza tra x e y è la lunghezza di questo segmento

2 $$\boxed{d(x,y)=\begin{cases} y-x & \text{se } y\geq x\\ x-y & \text{se } x>y\end{cases} = |y-x|}$$

Fissato y, la distanza di x da y la possiamo rappresentare come la "traslazione" di $|x|$

dist



$\rightarrow x=y \Rightarrow d(x,y)=0$

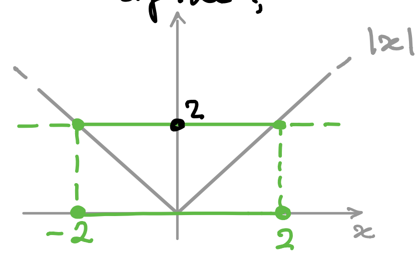
e)

ES. Quali sono i punti della retta che distano al più 2 dall'origine?

$\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{|x|}_{=d(x,0)} \leq 2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$

$= [-2, 2]$

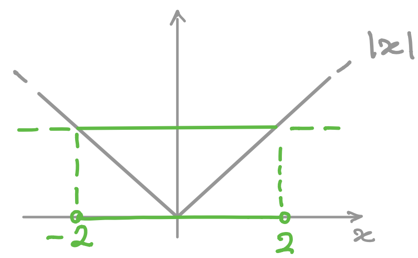


Se invece cerchiamo i punti con distanza strettamente minore di 2 troviamo:

$\{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$

$= (-2, 2) \to I_2(0)$



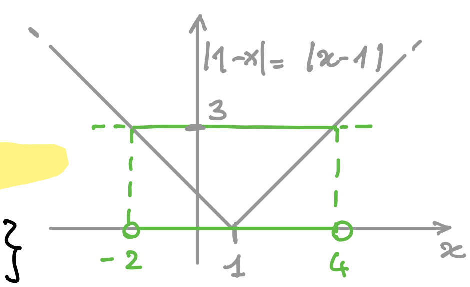
ES. Quali punti della retta distano al più 3 dal punto di ascissa $\underset{=y}{1}$?

$\{x \in \mathbb{R} : d(x,1) < 3\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 3\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -3 < x-1 < 3\}$

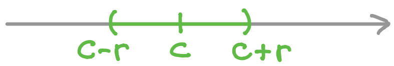
$= (-2, 4) \to I_3(1)$



Intorni di un punto della retta reale

DEF. Dato $c \in \mathbb{R}$ si dice INTORNO DI CENTRO c E RAGGIO r l'insieme:

$$I_r(c) := \{x \in \mathbb{R} \ d(x,c) < r\}$$



$$= (c-r, c+r)$$

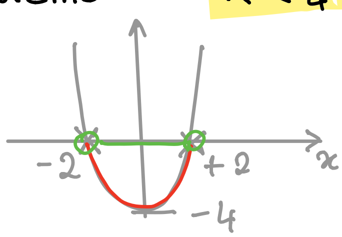
DEF. Si dice che una PROPRIETÀ È VERA DEFINITIVAMENTE PER x CHE TENDE A c $(x \to c)$ se esiste $r>0$ tale per cui tale proprietà è vera per ogni $x \in I_r(c)$, tranne al più per $x=c$.

es

ES 1. Dimostrare che $x^2 < 4$ definitivamente per $x \to 0$.

Vogliamo mostrare che $\exists r>0 : x^2<4, \ \forall x \in I_r(0)$

Risolviamo $x^2 < 4 \iff x^2 - 4 < 0$



$\iff (x-2)(x+2) < 0$

$\iff -2 < x < +2$

$\iff x \in (-2,2) = I_2(0)$

$\Rightarrow$ possiamo scegliere $r=2$ (o qualsiasi numero più piccolo).

ES 2. Dimostrare che (P) $\boxed{\frac{1}{x^2} > 1}$ è vera definitivamente per $x \to 0$.

Vogliamo mostrare che $\exists r>0 : \frac{1}{x^2} > 1, \forall x \in I_r(0) \setminus \{0\}$

Risolviamo: $\frac{1}{x^2} > 1 \iff \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$0 < a < b$

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$\iff \begin{cases} (x-1)(x+1) < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\iff x \in (-1,1) \setminus \{0\} = I_1(0) \setminus \{0\}$

→ Possiamo quindi scegliere $r = 1$ (o più piccolo)
e ottenere che (P) è vera
nell'intorno bucato $I_1(0)\setminus\{0\}$.

La retta reale estesa e gli intorni di infinito

DEF. $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ si dice RETTA REALE ESTESA

DEF. Un INTORNO di $+\infty$ è una semiretta della forma $(a,+\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

DEF. Un INTORNO di $-\infty$ è una semiretta della forma $(-\infty,a)$, con $a \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

DEF. Si dice che una PROPRIETÀ è VERA DEFINITIVAMENTE PER x CHE TENDE A $+\infty$ ($x \to +\infty$) (Risp. per $x \to -\infty$)

se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale per cui tale proprietà è vera per ogni $x \in I_a(+\infty)$ (risp. per ogni $x \in I_a(-\infty)$)

ES 3. $x^3 > 8$ è vera defin. per $x \to +\infty$, infatti è valida in $(2,+\infty) = I_2(+\infty)$ e anche in ogni $I_a(+\infty)$ con $a > 2$.

ES 4. $10^x < 10^{-10}$ per vera defin. per $x \to -\infty$ infatti è valida in $(-\infty,-10) = I_{-10}(-\infty)$ e anche in ogni $I_a(-\infty)$ con $a < -10$.

Limiti di funzione

Limiti finiti al finito

riv. complet.

Parlando di "pendenza di f nel punto c" abbiamo scritto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

Se esiste finito e' pendenza

e detto che se questo oggetto esiste finito allora è $p_f(c)$ ovvero $f'(c)$.

Es. $f(x) = 4x^2$ $\quad c = 1$

$$f'(1) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ammesso che il "limite" esista finito}}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(1+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{4} + 8\Delta x + 4\Delta x^2 \cancel{-4}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (8 + 4\Delta x) = 8$$

con qs scrittura vogliamo indicare che

i valori di $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = 8+4\Delta x$ si avvicinano a 8 quando quello di Δx si avvicina a 0

ma non solo ... possiamo anche quantificare l'avvicinamento di $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ a 8 quando $\Delta x \to 0$

infatti possiamo rispondere a un quesito del tipo: quanto piccolo deve essere Δx affinché $8+4\Delta x$ si trovi ad una distanza da 8 inferiore a 10^{-2}?

$$d(8+4\Delta x, 8) < 10^{-2} \iff |4\Delta x| < 10^{-2} = 0.01$$
$$\iff |\Delta x| < \frac{1}{4\cdot 10^2} = r$$

Conclusione: $\boxed{\Delta x \in I_r(0) \Rightarrow 8+4\Delta x \in I_{0.01}(8)}$

Invece di fissare 10^{-2} come soglia, potevamo prendere un qualsisi numero $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere e chiedere: quanto vicino a 0 devo prendere Δx affinchè $8+4\Delta x$ sia ad una distanza da 8 inferiore a ε?

$$d(8+4\Delta x, 8) < \varepsilon \iff |\cancel{8}+4\Delta x-\cancel{8}| < \varepsilon$$
$$\iff |\Delta x| < \varepsilon/4$$

Conclusione:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \Delta x \in I_{\varepsilon/4}(0) \Rightarrow 8+4\Delta x \in I_\varepsilon(8)}$$

Attenzione: l'ampiezza dell'intorno in cui devo prendere Δx dipende da "quanto vicino a 8" voglio avere $8+4\Delta x$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 8+4\Delta x = 8$ significa $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \ (= \varepsilon/4)$

$$\Delta x \in I_\delta(0) \Rightarrow 8+4\Delta x \in I_\varepsilon(8)$$

DEF. Data $f: I_r(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ per qualche $r > 0$, si dice che f ammette limite finito ℓ per x che tende a c e si scrive $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$

se:

$(\ell)_c$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in I_\delta(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell).}$

OSSERVAZIONI

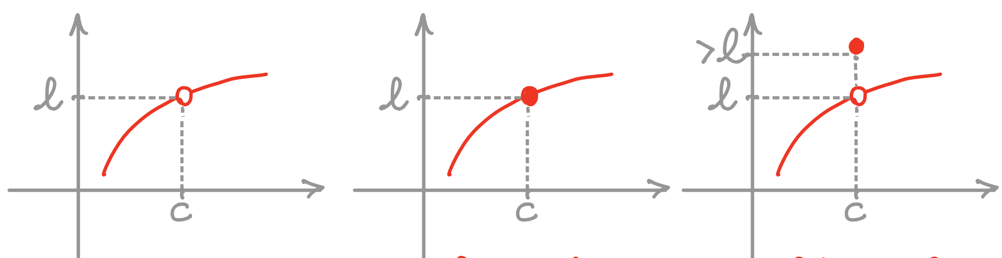
(1) gli intorni possono essere sostituiti dalla distanza:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

(2) il valore di δ dipende da ε: $\delta = \delta(\varepsilon)$

(3) Il limite per $x \to c$ non prescrive il comportamento della funzione in $x = c$

ES. Per le tre funzioni in figura si ha che $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$, ma il loro comportamento in $x = c$ è molto diverso!



f non è definita in c

$f(c) = \ell$

$f(c) > \ell$