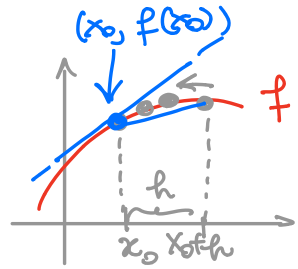
Lezione 10

Funzioni derivabili e funzione derivata

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$



DEF. La funzione f è **DERIVABILE in x_0** se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ esiste finito.}$$

In tal caso il valore del limite è la **DERIVATA PRIMA di f** e si denota con $f'(x_0)$.

DEF. Se f è derivabile in ogni punto di (a,b) allora si dice **DERIVABILE su (a,b)** e possiamo definire la funzione **DERIVATA PRIMA di f**

$$\begin{cases} f' : (a,b) \to \mathbb{R} \\ \quad x_0 \mapsto f'(x_0) \end{cases}$$

Rivedo

IMPORTANTE. Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

equivale a: $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h\, f'(x_0)} = 1$$

ovvero: $$f(x_0+h) - f(x_0) \sim h\, f'(x_0)$$

o anche $$f(x_0+h) \sim f(x_0) + f'(x_0)h$$

Ponendo: $x_0 + h = x$ otteniamo

$$\boxed{f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \to x_0}$$

quando $x \to x_0$, $f(x)$ è asintotica alla retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$\rightsquigarrow$ le rette che avevamo disegnato per i "limiti notevoli" erano proprio le tangenti

Ad esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ci dice che la derivata della funzione seno in $x = 0$ vale 1 (pendenza della retta x).

Teorema (legame tra continuità e derivabilità)

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in $x_0\in(a,b)$.
Allora f è continua in x_0.

DIM. Vogliamo dimostrare che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

ovvero che: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$ $\quad (x=x_0+h)$

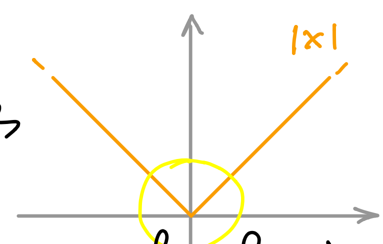
Questo equivale a: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=0$

$$\text{ovvero} \quad \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} = 0$$

i due termini del prodotto ammettono quindi limite: il primo è finito, il secondo è nullo.

Il limite del prodotto è quindi nullo ∎

Attenzione. Il viceversa è falso!
Esistono funzioni continue, ma non derivabili.



in x_0 la funzione $|x|$ non è deriv.
infatti

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = 1 \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = -1$$

? ⌈

Derivate successive

Se f è derivabile su (a,b), possiamo valutare la derivabilità della funzione f'.
ovvero ci chiediamo:

$$\boxed{\text{esiste finito } \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}, \quad x_0\in(a,b)?}$$

In caso di risposta affermativa denotiamo questo valore con $f''(x_0)$ e lo chiamiamo DERIVATA SECONDA di f in x_0

Se f' è derivabile in ogni punto di (a,b), definiamo la funzione DERIVATA SECONDA di f su (a,b)

$$\begin{cases} f'' : (a,b) \to \mathbb{R} \\ \quad\; x_0 \mapsto f''(x_0) \end{cases}$$

? ⌊

Allo stesso modo si definisco le derivate di ordine superiore.

Notazione: $f^{(n)}(x_0)$ derivata di ordine n di f in x_0

Il Teorema di Lagrange e le sue conseguenze

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- continua su $[a,b]$
- derivabile su (a,b)

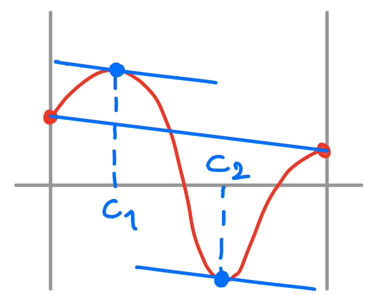
Allora $\boxed{\exists\; c\in(a,b) : f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

Non ne facciamo la dimostrazione, ma vediamone il significato anche in base alle interpretazioni della derivata prima che abbiamo visto.

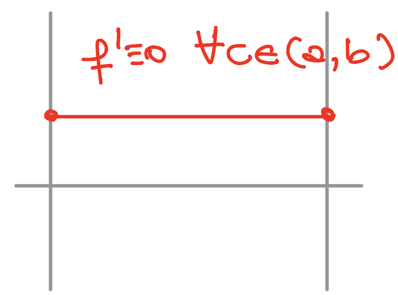
Osservazioni

① Il T. di Lagrange stabilisce che:

> esiste almeno un p.to in (a,b) in cui la pendenza della tangente al grafico è uguale alla pendenza del segmento passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$



② Non è detto che il punto c sia unico ma si pensi a quando f è costante!



③ Se f rappresenta la posizione di sulla retta ed $f'(c)$ è la sua velocità istantanea al tempo c, allora

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

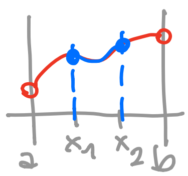
è la velocità media di nell'intervallo $[a,b]$ e il T. di Lagrange afferma che:

> esiste almeno un istante in cui la velocità istantanea è uguale a quella media

dim su
notch

Corollario 1 (caratterizzazione delle funzioni con $f'=0$)

Data $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile, allora $f'(x)=0,\ \forall x\in(a,b) \iff \exists K\in\mathbb{R}: f(x)=k\ \forall x\in(a,b)$



Dim. Essendo f derivabile su (a,b), f è anche continua su (a,b). Se prendiamo due punti $a<x_1<x_2<b$ allora f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange su $[x_1,x_2]\subset(a,b)$, per ogni scelta di x_1 e x_2.

$\Leftarrow$) Se $f(x)=k$ per qualche costante k e per ogni $x\in(a,b)$

(si usa la def. di derivata) allora $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k-k}{h}=0$

quindi $f'(x)=0$ per ogni $x\in(a,b)$.

$\Rightarrow$) Se $f'(x)=0$ per ogni $x\in(a,b)$

(si usa il T. di Lagr.) allora prendiamo $x_1<x_2$ qualsiasi in (a,b) e per il T. di Lagrange abbiamo $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$ per qualche $c\in(a,b)$

quindi $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

Si conclude grazie all'arbitrarietà di x_1 e x_2. ■

Corollario 2 (caratterizzazione delle funzioni con $f''=0$)

Data $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile due volte, allora
$f''(x)=0, \forall x\in(a,b) \Leftrightarrow \exists m,q\in\mathbb{R}: f(x)=mx+q, \forall x\in(a,b)$

$\Leftarrow$) Se $f(x)=mx+q$ allora $f'(x)=m$ e $f''(x)=0$

$\Rightarrow$) Se $f''(x)=0$ allora $\overset{\text{per Cor. 1}}{\exists}\, m\in\mathbb{R}: f'(x)=m$

(*) la derivata è additiva!

ovvero $f'(x)-m=0$ ovvero $\overset{(*)}{(f(x)-mx)'}=0$

ovvero $\exists q\in\mathbb{R}: f(x)=mx+q$ ∎

Corollario 3 (caratterizzazione delle primitive di una stessa funzione su $[a,b]$)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

(i) Se F è una primitiva di f allora per ogni $c\in\mathbb{R}$ anche $F+c$ è una primitiva di f

(ii) Se F_1 ed F_2 sono entrambe primitive di f allora esiste $c\in\mathbb{R}$ tale che
$F_1(x)-F_2(x)=c, \forall x\in[a,b]$.

DIM (i) $(F(x)+c)' \overset{\text{additività}}{=} F'(x)=f(x)$.

(ii) $F_1'(x)=f(x)$ e $F_2'(x)=f(x)$

allora $F_1'(x)-F_2'(x)=0$

$(F_1(x)-F_2(x))'=0$

$\Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}: F_1(x)-F_2(x)=c$ ∎