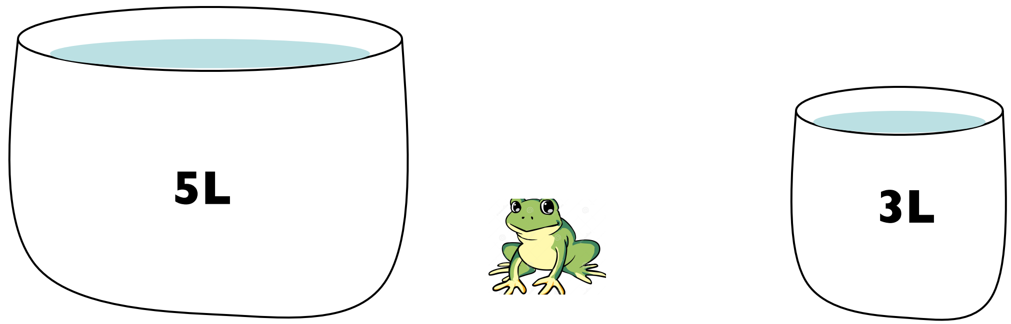
Programmazione:
l'idea di problema algoritmico

Corso di Programmazione 1A, 2021-22
Felice Cardone

Un problema di “programmazione” (dal film *Die Hard*)



Dati due recipienti, G da 5 litri e p da 3 litri, e una disponibilità illimitata di acqua, trovare un modo per avere esattamente 4 litri di acqua in G usando solo le seguenti operazioni:

riempire G
riempire p
vuotare (anche in parte) il contenuto di G in p (G → p)
vuotare (anche in parte) il contenuto di p in G (p → G)
vuotare G
vuotare p

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\big\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

Una soluzione

$$G = 0, p = 0 \xrightarrow{\text{riempi } G} G = 5, p = 0 \xrightarrow{G \to p} G = 2, p = 3$$

Una soluzione

$$G = 0, p = 0 \xrightarrow{\text{riempi } G} G = 5, p = 0 \xrightarrow{G \to p} G = 2, p = 3 \xrightarrow{\text{vuota } p} G = 2, p = 0$$

Una soluzione

$$
\begin{array}{c}
G = 0, p = 0 \\
\downarrow \text{ riempi G} \\
G = 5, p = 0 \\
\downarrow G \rightarrow p \\
G = 2, p = 3 \\
\downarrow \text{ vuota p} \\
G = 2, p = 0 \\
\downarrow G \rightarrow p \\
G = 0, p = 2
\end{array}
$$

Una soluzione

$$
\begin{array}{l}
G = 0, p = 0 \\
\quad \Big\downarrow \text{ riempi G} \\
G = 5, p = 0 \\
\quad \Big\downarrow \ G \to p \\
G = 2, p = 3 \\
\quad \Big\downarrow \text{ vuota p} \\
G = 2, p = 0 \\
\quad \Big\downarrow \ G \to p \\
G = 0, p = 2 \\
\quad \Big\downarrow \text{ riempi G} \\
G = 5, p = 2
\end{array}
$$

Una soluzione

$$G = 0, p = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ riempi G}$$

$$G = 5, p = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ } G \rightarrow p$$

$$G = 2, p = 3$$

$$\Big\downarrow \text{ vuota p}$$

$$G = 2, p = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ } G \rightarrow p$$

$$G = 0, p = 2$$

$$\Big\downarrow \text{ riempi G}$$

$$G = 5, p = 2$$

$$\Big\downarrow \text{ } G \rightarrow p$$

$$G = 4, p = 3$$

Una soluzione

$$\begin{tikzcd}
G = 0, p = 0 \arrow[d, "\text{riempi } G"] \\
G = 5, p = 0 \arrow[d, "G \rightarrow p"] \\
G = 2, p = 3 \arrow[d, "\text{vuota } p"] \\
G = 2, p = 0 \arrow[d, "G \rightarrow p"] \\
G = 0, p = 2 \arrow[d, "\text{riempi } G"] \\
G = 5, p = 2 \arrow[d, "G \rightarrow p"] \\
G = 4, p = 3 \arrow[d, "\text{vuota } p"] \\
G = 4, p = 0
\end{tikzcd}$$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 2, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 2, p = 0$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 0, p = 2$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 2$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 4, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 4, p = 0$

Altra soluzione

$G = 0, p = 0$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 2, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 2, p = 0$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 0, p = 2$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 2$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 4, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 4, p = 0$

Altra soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 0, p = 3$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\big\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

$\big\downarrow$ $G \to p$

$G = 2, p = 3$

$\big\downarrow$ vuota p

$G = 2, p = 0$

$\big\downarrow$ $G \to p$

$G = 0, p = 2$

$\big\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 2$

$\big\downarrow$ $G \to p$

$G = 4, p = 3$

$\big\downarrow$ vuota p

$G = 4, p = 0$

Altra soluzione

$G = 0, p = 0$

$\big\downarrow$ riempi p

$G = 0, p = 3$

$\big\downarrow$ $p \to G$

$G = 3, p = 0$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

$\downarrow$ G → p

$G = 2, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 2, p = 0$

$\downarrow$ G → p

$G = 0, p = 2$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 2$

$\downarrow$ G → p

$G = 4, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 4, p = 0$

Altra soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 0, p = 3$

$\downarrow$ p → G

$G = 3, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 3, p = 3$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

$\downarrow$ $G \rightarrow p$

$G = 2, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 2, p = 0$

$\downarrow$ $G \rightarrow p$

$G = 0, p = 2$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 2$

$\downarrow$ $G \rightarrow p$

$G = 4, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 4, p = 0$

Altra soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 0, p = 3$

$\downarrow$ $p \rightarrow G$

$G = 3, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 3, p = 3$

$\downarrow$ $p \rightarrow G$

$G = 5, p = 1$

Una soluzione

$$G = 0, p = 0 \xrightarrow{\text{riempi } G} G = 5, p = 0 \xrightarrow{G \to p} G = 2, p = 3 \xrightarrow{\text{vuota } p} G = 2, p = 0 \xrightarrow{G \to p} G = 0, p = 2 \xrightarrow{\text{riempi } G} G = 5, p = 2 \xrightarrow{G \to p} G = 4, p = 3 \xrightarrow{\text{vuota } p} G = 4, p = 0$$

Altra soluzione

$$G = 0, p = 0 \xrightarrow{\text{riempi } p} G = 0, p = 3 \xrightarrow{p \to G} G = 3, p = 0 \xrightarrow{\text{riempi } p} G = 3, p = 3 \xrightarrow{p \to G} G = 5, p = 1 \xrightarrow{\text{vuota } G} G = 0, p = 1$$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 2, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 2, p = 0$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 0, p = 2$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 2$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 4, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 4, p = 0$

Altra soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 0, p = 3$

$\downarrow$ $p \to G$

$G = 3, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 3, p = 3$

$\downarrow$ $p \to G$

$G = 5, p = 1$

$\downarrow$ vuota G

$G = 0, p = 1$

$\downarrow$ $p \to G$

$G = 1, p = 0$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

$\downarrow$ $G \rightarrow p$

$G = 2, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 2, p = 0$

$\downarrow$ $G \rightarrow p$

$G = 0, p = 2$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 2$

$\downarrow$ $G \rightarrow p$

$G = 4, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 4, p = 0$

Altra soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 0, p = 3$

$\downarrow$ $p \rightarrow G$

$G = 3, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 3, p = 3$

$\downarrow$ $p \rightarrow G$

$G = 5, p = 1$

$\downarrow$ vuota G

$G = 0, p = 1$

$\downarrow$ $p \rightarrow G$

$G = 1, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 1, p = 3$

Una soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 0$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 2, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 2, p = 0$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 0, p = 2$

$\downarrow$ riempi G

$G = 5, p = 2$

$\downarrow$ $G \to p$

$G = 4, p = 3$

$\downarrow$ vuota p

$G = 4, p = 0$

Altra soluzione

$G = 0, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 0, p = 3$

$\downarrow$ $p \to G$

$G = 3, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 3, p = 3$

$\downarrow$ $p \to G$

$G = 5, p = 1$

$\downarrow$ vuota G

$G = 0, p = 1$

$\downarrow$ $p \to G$

$G = 1, p = 0$

$\downarrow$ riempi p

$G = 1, p = 3$

$\downarrow$ $p \to G$

$G = 4, p = 0$

Alcune domande

(1) Si possono ottenere 4 litri di acqua in G quando:

a) $G = 8, p = 3$?

b) $G = 7, p = 3$?

c) $G = 6, p = 3$?

(risolubilità)

Alcune domande

(1) Si possono ottenere 4 litri di acqua in G quando:

a) G = 8, p = 3 ?

b) G = 7, p = 3 ?

c) G = 6, p = 3 ?

(risolubilità)

(2) Nel caso in cui una soluzione esiste, qual è il numero minimo di operazioni per ottenerla? (complessità in tempo)

Alcune domande

(1) Si possono ottenere 4 litri di acqua in G quando:

a) $G = 8, p = 3$?

b) $G = 7, p = 3$?

c) $G = 6, p = 3$?

(risolubilità)

(2) Nel caso in cui una soluzione esiste, qual è il numero minimo di operazioni per ottenerla? (complessità in tempo)

(3) Come cambia la situazione se si hanno a disposizione più recipienti, per esempio

a) $G = 5, p = 3, q = 3$?

b) $G = 6, p = 3, q = 3$? (tradeoff spazio/tempo)

Analisi del comportamento di un “programma”

Immaginiamo il gioco solitario in cui ogni posizione è una fila di pedine bianche (B) e nere (N). Ogni mossa è fatta in accordo con una delle seguenti regole:

(1) rimpiazzare una pedina bianca ed una nera consecutive con due pedine bianche consecutive, in simboli BN → BB;
(2) rimpiazzare due pedine bianche consecutive con una pedina nera, in simboli BB → N;
(3) rimpiazzare una pedina nera ed una bianca consecutive con due pedine bianche ed una nera consecutive, in simboli NB → BBN.

Domande

1. è possibile, utilizzando mosse di tipo (1), (2) e (3), passare da una posizione BBB ad una posizione NNN?

2. è possibile, utilizzando mosse di tipo (1), (2) e (3), passare da una posizione BBBB ad una posizione NNNN?

Analisi del comportamento di un "programma"

Immaginiamo il gioco solitario in cui ogni posizione è una fila di pedine bianche (B) e nere (N). Ogni mossa è fatta in accordo con una delle seguenti regole:

(1) rimpiazzare una pedina bianca ed una nera consecutive con due pedine bianche consecutive, in simboli BN → BB;
(2) rimpiazzare due pedine bianche consecutive con una pedina nera, in simboli BB → N;
(3) rimpiazzare una pedina nera ed una bianca consecutive con due pedine bianche ed una nera consecutive, in simboli NB → BBN.

Domande
1. è possibile, utilizzando mosse di tipo (1), (2) e (3), passare da una posizione BBB ad una posizione NNN? NO

2. è possibile, utilizzando mosse di tipo (1), (2) e (3), passare da una posizione BBBB ad una posizione NNNN? SI

Soluzione

(1) BN → BB
(2) BB → N
(3) NB → BBN

Le sequenze di passi possibili sono le seguenti:

$\underline{\mathrm{BB}}\mathrm{B} \to_{(2)} \underline{\mathrm{NB}} \to_{(3)} \underline{\mathrm{BB}}\mathrm{N} \to_{(2)} \mathrm{NN}$

$\underline{\mathrm{BB}}\mathrm{B} \to_{(2)} \underline{\mathrm{NB}} \to_{(3)} \mathrm{B}\underline{\mathrm{BN}} \to_{(1)} \mathrm{BBB}$

$\mathrm{B}\underline{\mathrm{BB}} \to_{(2)} \mathrm{BN} \to_{(1)} \mathrm{BB}$

Nessuna di queste può portare BBB in NNN. Ma la seguente derivazione mostra che c'è una derivazione che porta BBBB in NNNN:

$$\begin{aligned} \mathrm{BBBB} \to_{(2)} \mathrm{NBB} \to_{(3)} \mathrm{BB}\underline{\mathrm{NB}} \to_{(3)} \underline{\mathrm{BB}}\mathrm{BBN} &\to_{(2)} \underline{\mathrm{NB}}\mathrm{BN} \\ &\to_{(3)} \mathrm{BB}\underline{\mathrm{NB}}\mathrm{N} \to_{(3)} \underline{\mathrm{BB}}\mathrm{BBNN} \\ &\to_{(2)} \mathrm{N}\underline{\mathrm{BB}}\mathrm{NN} \\ &\to_{(2)} \mathrm{NNNN} \end{aligned}$$

La formalizzazione dei processi di calcolo