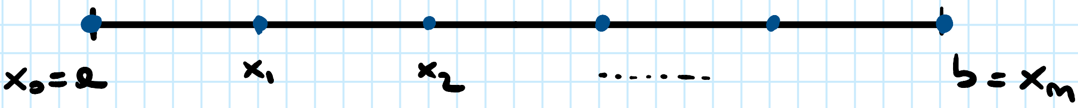
Lezione 21

Integrale definito

Ricordiamo la definizione data nella Lezione 4

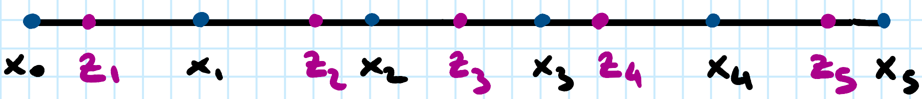
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata (cioè, $m \le f(x) \le M \;\; \forall x \in [a,b]$)
- Fissato $n \in \mathbb{N}$ si suddivide $[a,b]$ in n sottointervalli di ampiezza $\frac{b-a}{n}$



$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Si scelgono in modo arbitrario n punti

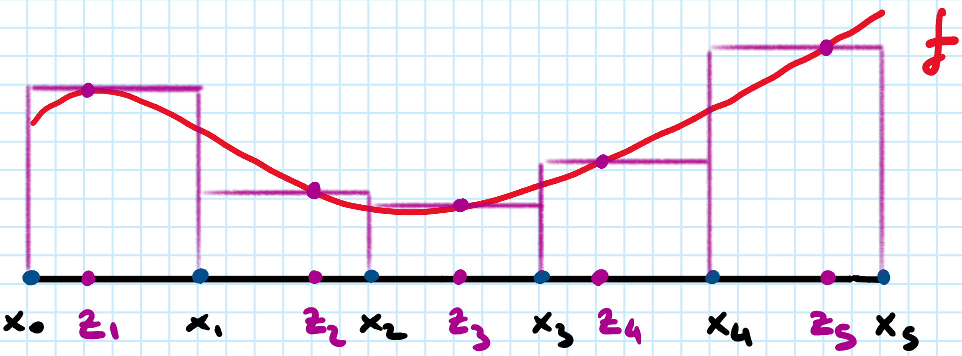
$$z_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1, \dots, n$$



("punti di campionamento")

- Si considera la somma di Riemann

$$\boxed{S_n(f; z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(z_i)}$$



Def Se
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f; z_1, \dots, z_n)$$
esiste finito e non dipende dalla scelta degli z_i allora la funzione f si dice integrabile (secondo Riemann) su $[a,b]$ e si pone

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n(f; z_1, \dots, z_n)}$$

Tale numero viene chiamato integrale (definito) di f su $[a,b]$

Osservazione Non tutte le funzioni limitate sono integrabili. Ad esempio, si consideri $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

In tal caso, $\lim_{n\to+\infty} S_n(f; z_1, \dots, z_n)$ dipende dalla scelta degli z_i; infatti:

- se scegliamo $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Q}$ si ha
$$S_n(f; z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-0}{n} \underbrace{f(z_i)}_{=1}$$
$$= 1$$
e dunque $\lim_{n\to+\infty} S_n(f; z_1, \dots, z_n) = 1$
- se scegliamo $z_1, \dots, z_n \notin \mathbb{Q}$ si ha

• se scegliamo $z_1, \dots, z_m \notin \mathbb{Q}$ si ha

$$S_m(f; z_1, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1-0}{m} \underbrace{f(z_i)}_{=0}$$
$$= 0$$

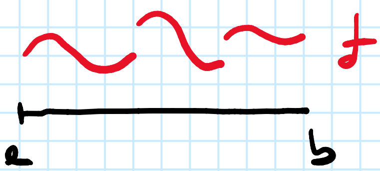
e dunque $\lim_{m \to +\infty} S_m(f; z_1, \dots, z_m) = 0$

Dunque f non è integrabile (secondo Riemann) su $[0,1]$

Si dimostra, però, che sono integrabili:

- le funzioni monotone e limitate su $[a,b]$
- le funzioni continue su $[a,b]$

(o più in generale le funzioni con un numero finito di discontinuità di tipo salto)



Vediamo ora le principali

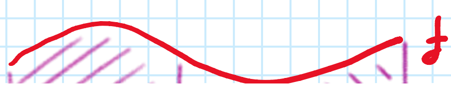
Proprietà dell'integrale definito

- Linearità: se f, g sono integrabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g$ è integrabile e vale

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

- Additività rispetto al dominio: se f è integrabile su $[a,b]$ e $c \in (a,b)$, allora f è integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$ e vale

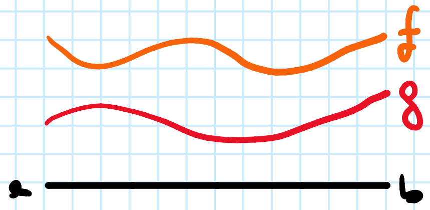
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

- **Monotonia:** se f e g sono integrabili e $g(x) \le f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$



In particolare: se $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

Vediamo ora un importante teorema (che sarà utilizzato nella prossima lezione)

Teorema della media integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a,b]$ t.c.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

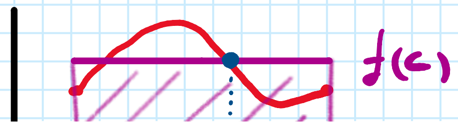
Osservazione Ricordiamo (Lez 5) che il numero

$$\boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx}$$

può essere interpretato come valore medio (o media integrale) di f su $[a,b]$

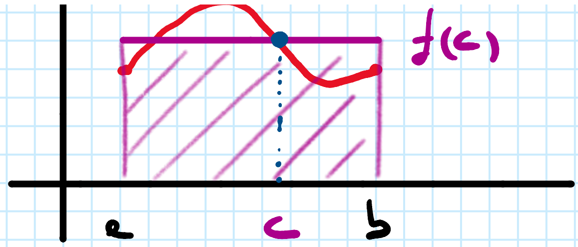
Il teorema ci dice dunque che, se f è continua, esiste (almeno) un punto in cui f è uguale al suo valore medio

Significato geometrico



Significato geometrico

per $f \geq 0$



$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Area sotto al grafico di } f} = \underbrace{(b-a)\, f(c)}_{\text{Area del rettangolo di base } (b-a) \text{ e altezza } f(c)}$$

dim

dim Poiché f è continua, per il teorema di Weierstrass esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$$m := f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) =: M \qquad \forall x \in [a,b]$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale, risulta

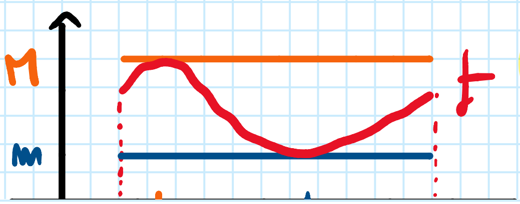
$$\underbrace{\int_a^b m\,dx}_{= m\cdot(b-a)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b M\,dx}_{= M\cdot(b-a)}$$

da cui

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

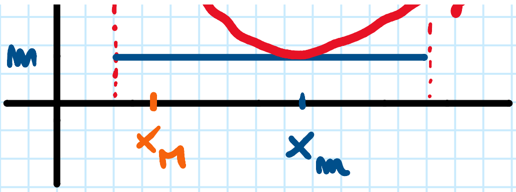
Cioè: la media integrale di f è un valore compreso tra il minimo e il massimo di f su $[a,b]$.

Poiché f è continua, il teorema di esistenza degli zeri assicura che esiste c compreso tra x_m e x_M



t.c. $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

(applicando il teorema di



(applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$) $\square$