Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

- ☒ $\{s \in \mathbb{Q}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 2 \wedge s(1) = 1/2\}$
- ☐ $\{s \in \{0, 1/2\}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 2 \wedge s(1) = 1/2\}$ $(\cdot, 1/2)$ $(1/2, 1/2)$
- ☐ $\{s \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid s(1) = 1/2\}$
- ☐ $\{s \in \mathbb{R}^{<\mathbb{N}} \mid s(1) = 1/2\}$

(b) Sia $f\colon A \to B$ iniettiva. 2 punti
Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- ☐ Se $g\colon B \to A$ è iniettiva, allora f è biettiva. inf
- ☒ Se B è finito allora A è finito.
- ☐ Per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ è non vuoto.
- ☐ $|B| \leq |A|$.

(c) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☒ $\exists x \forall y R(x, y) \models \forall y \exists x R(x, y)$.
- ☐ La formula $\exists x \forall y R(x, y) \to \forall y \exists x R(x, y)$ è soddisfacibile, ma non valida.
- ☒ La formula $\forall y \exists x R(x, y) \to \exists x \forall y R(x, y)$ è soddisfacibile, ma non valida.
- ☐ La formula $\forall y \exists x R(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y R(x, y)$ è insoddisfacibile.

(d) Siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono certamente vere? 2 punti

- ☐ $\mathrm{P} \to (\mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \models \mathrm{P} \to \mathrm{R}$
- ☒ Se $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e $\mathrm{Q} \models \mathrm{R}$ allora $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$.
- ☒ Se P è una contraddizione allora $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$.
- ☒ Se P è una tautologia e $\mathrm{P} \models \neg\mathrm{Q}$ allora Q è una contraddizione.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Siano

$$\begin{aligned} P_1 &: \quad C \lor \neg A \\ P_2 &: \quad A \to B \\ P_3 &: \quad \neg C \to \neg B. \end{aligned}$$

Determinare, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- a) $P_1, P_2 \models P_3$
- b) $P_3, P_1 \models P_2$
- c) $P_2, P_3 \models P_1$.

	A	B	C	P_1	P_2	P_3
1	V_F	V_F	V_F	V	V	V
2	V_F	V_F	F_V	F	V	F
3	V_F	F_V	V_F	V	F	V
4	V_F	F_V	F_V	F	F	V
5	F_V	V_F	V_F	V	V	V
6	F_V	V_F	F_V	V	V	F
7	F_V	F_V	V_F	V	V	V
8	F_V	F_V	F_V	V	V	V

b) $P_1 \land P_3 \models P_2$

$P_1 \land P_3$ verificata a riga 1,3,5,7,8

ma P_2 non verif. a riga 3

$\Rightarrow P_1 \land P_3 \not\models P_2$

c) $P_2 \land P_3 \models P_1$

$P_2 \land P_3$ verif. in 1,5,7,8 e P_1 è anche verificata in tali righe

$\Rightarrow P_2 \land P_3 \models P_1$

a) $P_1, P_2 \models P_3$ ovvero $P_1 \land P_2 \models P_3$

$P_1 \land P_2$ verificate a riga 1,5,6,7,8

ma P_3 non è verificata a riga 6 quindi $P_1, P_2 \not\models P_3$

Esercizio 3 6 punti

1. Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   x è un numero primo

   utilizzando il linguaggio formato dai simboli $\cdot$ e 1 interpretati nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$, $+$, $\cdot$ e 1 interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   Per ogni $n > 1$ c'è almeno un primo compreso tra n e $2n$.

$$x \neq 1 \wedge \forall y \forall z \left(y \cdot z = x \to \left(y = 1 \vee z = 1 \right) \right)$$

$$\forall n \left(1 < n \to \exists p \left(p \neq 1 \wedge \forall y \forall z \left(y \cdot z = p \to y = 1 \vee z = 1 \right) \wedge p < n + n \wedge n < p \right) \right)$$

$$\forall n \left(1 < n \to \exists p \left(n < p < n + n \wedge \forall y \forall z \left(y \cdot z = p \to y = 1 \vee z = 1 \right) \right) \right)$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binaria. Sia φ l'enunciato

$$\exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge \forall z \neg P(z, x) \wedge \forall z \neg P(z, y)).$$

Determinare in quali delle seguenti strutture φ è vera:

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{A}}$ è la relazione $<$.
2. $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, P^{\mathcal{B}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{B}} = \{(n, m) \mid n \text{ divide } m \text{ e } n \neq m\}$.
3. $\mathcal{C} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}, P^{\mathcal{C}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{C}}$ è la relazione $\subset$.

Giustificare le proprie risposte.

1. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (\cancel{z} \geq x) \wedge \forall z (z \geq y))$

esistono 2 num. distinti i quali sono entrambi il minimo in $\mathbb{N}$ (ovvero 0)

non esistono 2 numeri distinti che sono entrambi minori = di qualunque z (vorrebbe dire entrambi $=0$ ma devono essere distinti)

2. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z ((z \nmid x \vee z = x) \wedge (z \nmid y \vee z = y)))$

esistono 2 distinti in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ non sono divisi da nessun numero diverso da sé o da 1 (in quanto non in universo)

$\Rightarrow$ esistono 2 numeri distinti primi in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ $\Rightarrow$ è vero

3. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (z \not\subset x \wedge z \not\subset y))$

esistono 2 gruppi di $\mathbb{N}$ non nulli e distinti tali che non hanno sottogruppi propri diversi da $\emptyset$ (non in universe)

Cognome, nome e matricola: $\Rightarrow$ 2 gr. distinti con solo sottogr. banali es. $\{1\}$ e $\{2\}$ è vero

Esercizio 5 6 punti

Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} 4k + 1 = n(2n + 3).$$

passo base

$$\sum_{k=1}^{1} 4k+1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5 = 1(2 \cdot 1 + 3) = n(2n+3)$$

cvd

passo ind.

hp $\sum_{k=1}^{n} 4k+1 = n(2n+3)$

th $\sum_{k=1}^{n+1} 4k+1 = (n+1)(2(n+1)+3)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} 4k+1 = \sum_{k=1}^{n} 4k+1 + 4(n+1)+1 \overset{\text{x hp induttiva}}{=} n(2n+3) + 4(n+1)+1$$

$$n(2n+3) + 4n + 5$$

$$= n(2n+3) + 2n + 3 + 2n + 2$$

$$= (n+1)(2n+3) + 2(n+1)$$

$$= (n+1)(2n+2+3)$$

$$= (n+1)(2(n+1)+3)$$

cvd.