Préparation examens outils formels

Matteo Besançon

18 janvier 2018

1 Formalisme RdP

1. Définition formelle de la structure des RdP (syntaxe)

P Places (Rond)

T Transitions (Rectangle)

Jeton (point noir)

Un réseau R est un quadruplet R

$$R = (P, T, Entree, Sortie)$$

Pour $p \in P$ et $t \in T$ si :

- $k = Entree(p, t) > 0$ p est une place d'entrée de t et t est une place de sortie de p
- $k = Sortie(p, t) > 0$ p est une place de sortie de t et t est une place d'entrée de p

On a les représentations matricielles suivantes :

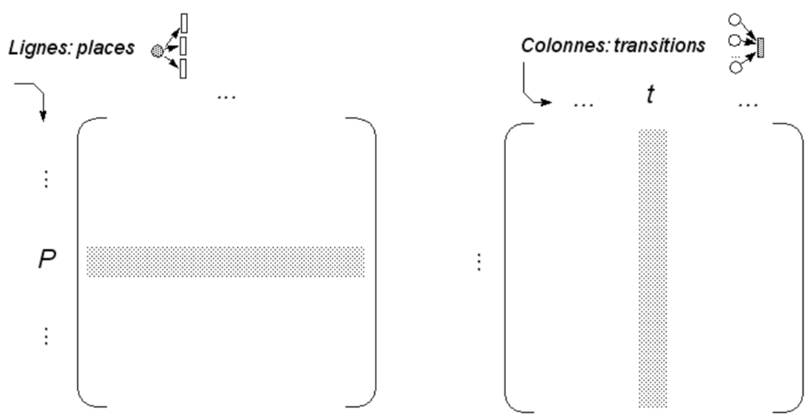

Figure 1 – Matrice d'entrée et de sortie

Par exemple avec le RdP suivant :

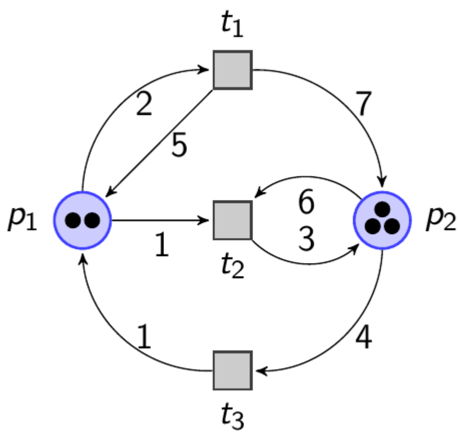

FIGURE 2 – RdP d'exemple

On a donc les matrices suivantes :

$$Entree = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} Sortie = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

L'état d'un RdP est appelé un marquage $M : P \to \mathbb{N}$ souvent le marquage initial est noté M_0

Pour la figure 2 on a la matrice de marquage :

$$M = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Définition formelle des règles de franchissabilité des transitions (sémantique)

Y a un jeton et paf plus de jeton !!

3. Utilisation de l'algèbre linéaire pour définir la franchissabilité des transitions

Une transition t est franchissable (tirable) si :

$$\forall p \in P, \; M(p) \geq Entree(p, t)$$

par exemple pour la figure 2 t_1 est tirable et t_3 ne l'est pas.

Après avoir tiré la transition t on a :

$$\forall p \in P, \; M'(p) = M(p) - Entree(p, t) + Sortie(p, t)$$

On a la notation $M \xrightarrow{t} M'$
On note C la matrice d'incidence du réseau définie par

$$\forall p \in P,\ \forall t \in t,\ C(p,t) = Sortie(p,t) - Entree(p,t)$$

donc

$$M' = M + C(\ldots, t)$$

Si on reprends l'expemple de la figure 2

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Et donc si on tire t_1

$$M' = M + C(\ldots, t_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4. Propriétés des séquences de franchissements, vecteur caractéristique et équation fondamentale

On a la séquece de transition T_1T_2 On peut écrire

$$s = T_1T_2$$

$$M_0 \xrightarrow{s} M_2$$

$\overline{s}$ est le vecteur caractéristique de la séquence s tel que

$$\overline{s} : T \to \mathbb{N}$$

$$\overline{s}(t) = \text{le nombre d'occurences de t dans } s$$

En prenant l'exemple de la figure 2 avec la séquence $t_1t_2t_2t_3t_1$ on a le vecteur caractéristique suivant :

$$\overline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a les propriétés suivantes

$$s = s_1 \cdot s_2$$

$$\overline{s} = \overline{s_1} + \overline{s_2}$$

Pour $M \xrightarrow{s} M'$ on a :

$$M' = M + C \cdot \overline{s}$$

qui est **l'équation fondamentale**.

2 Propriétés des RdP

5. Monotonie et répétitivité des séquences de transitions

Dénfinition :

$$M_a \leq M_b \text{ si } \forall p \in P M_a(p) \leq M_2(p)$$

Une séquence est dite **monotone** si

$$M_1 \xrightarrow{s} M \text{ et } M_1 \leq M_2$$

Alors

$$M_2 \xrightarrow{s} M + (M_2 - M_1)$$

Une séquence est dite **répétitive** si

$$\forall M \text{ t.q. } M \xrightarrow{s}$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, M \xrightarrow{s^n}$$

6. "Bornitude" et répétitivité des séquences de transitions

Un marquage M' est *accessible* si

$$\exists s \in T^* \text{ t.q. } M \xrightarrow{s} M'$$

L'ensemble des marquages accessibles dans un Reseau R depuis M est noté $A(R, M)$

Une place p du réseau (R, M_0) est **k-bornée** si

$$\forall M \in A(R, M_0),\ M(p) \leq k$$

Une séquence répétitive est croissante pour p si :

$$\forall M, M' \in A(R, M_0) \text{ t.q. } M \xrightarrow{s} M'$$

Alors

$$M(p) < M'(p)$$

Un réseau (R, M_0) est **non borné** si et seulement si

— $\exists s$ répétitive croissante pour p

— $\exists M \in A(R, M_0)$

Tel que $M \xrightarrow{s}$

7. Monotonicité, quasi-vivacité, vivacité et blocage

Une transition t est dite **quasi-vivante** pour M_0 si et seulement si

$$\exists M \in A(R, M_0),\ M \xrightarrow{t}$$

Un réseau est quasi-vivant si

$$\forall t \in T,\ t \text{ est quasi-vivant}$$

Une transition t est dite **vivante** si et seulement si

$$\forall M \in A(R, M_0), t \text{ est quasi-vivant pour } M$$

Un réseau est vivant si

$$\forall t \in T,\ t \text{ est vivant}$$

Attention la vivacité n'est pas monotone contrairement à la quasi-vivacité
Une séquence répétitive s est dite complète si

$$\forall t \in T,\ \overline{s}(t) \geq 1$$

On a donc la relation suivante :

$$(R, M_0) \text{ vivant} \iff \forall M \in A(R, M_0),\ \exists M' \in A(R, M),\ \exists s \in T^* \text{ complète t.q. } M' \xrightarrow{s}$$

Un marquage puit est un marquage pour le quel aucune transition n'est tirable

$$Puit(M) \iff \nexists t \in T \text{ t.q. } M \xrightarrow{t}$$

Un reseau (R, M_0) est sans blocage si

$$\forall M \in A(R, M_0),\ \neg Puit(M)$$

8. État d'accueuil, réversibilité, répétitivité, consistance

Un réseau a un **marquage d'accueuil** M_a pour un marquage initial M_0 si

$$\forall M_i \in A(R, M_0),\ \exists s \in T^* \text{ t.q. } M_i \xrightarrow{s} M_a$$

Un rdP est **réinitialisable (ou réversible)** pour un marquage initial M_0 si M_0 est un état d'accueil.

Un rdP est **répétitif** s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence s franchissable telle que chaque transition apparait un nombre illimité de fois.

Un réseau est **consistant** si il exite un marquage initial M_0 et s contenant au moins une fois toute les transitions tels que

$$M_0 \xrightarrow{s} M_0$$

3 Vérification des propriétés

9. Définition du graphe de marquages, définition du graphe de couverture

Définitions Le symbole ω est utilisé pour représenter un nombre arbitrairement dans une place.

$$\omega \notin \mathbb{N}$$

On a les propriétés suivantes avec $n \in \mathbb{N}$

$$\omega + n = \omega$$

$$\omega - n = \omega$$

$$n < \omega$$

$$\omega \leq \omega$$

$\mathbb{N}_\omega$ est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \omega$
Pour $Q \in \mathbb{N}_\omega^{|\mathbb{P}|}$
On a l'arborescence de couverture qui est notée $AC(N)$ où $N = (R, M_0)$

$$AC(N) = (S, X, \mu, \lambda, r)$$

avec les sommets de S qui sont étiquetés par des vecteurs de $\mathbb{N}_\omega^m$ où $m = |P|$ (la cardinalité de P)

$$\mu : S \to \mathbb{N}_\omega^m$$

$$r \text{ la racine, } \mu(r) = M_0$$

Les arcs de $X \subseteq S \times S$ sont étiquetés par des tarnsitions de T

$$\lambda : X \to T$$

Graph de couverture Le graph de couverture $GC(N)$ est obtenus à partire de $AC(N)$ est obtenus en fusionant les somets étiquetés avec le même vecteur.