Préparation examens outils formels

Matteo Besançon

18 janvier 2018

1 Formalisme RdP

1. Définition formelle de la structure des RdP (syntaxe)

P Places (Rond)

T Transitions (Rectangle)

Jeton (point noir)

Un réseau R est un quadruplet R

$$R = (P, T, Entree, Sortie)$$

Pour $p \in P$ et $t \in T$ si :

— $k = Entree(p, t) > 0$ p est une place d'entrée de t et t est une place de sortie de p

— $k = Sortie(p, t) > 0$ p est une place de sortie de t et t est une place d'entrée de p

On a les représentations matricielles suivantes :

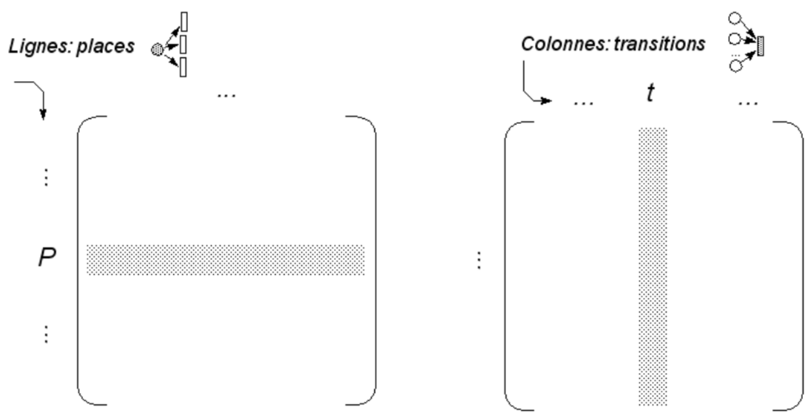

FIGURE 1 – Matrice d'entrée et de sortie

Par exemple avec le RdP suivant :

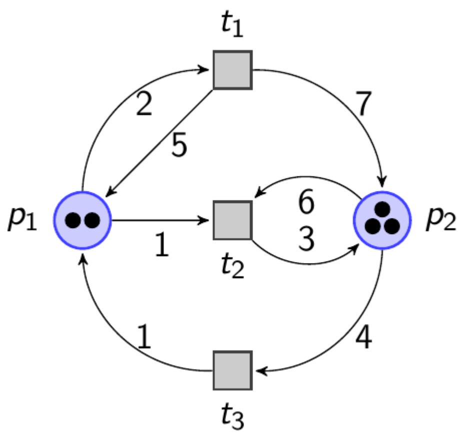

FIGURE 2 – RdP d'exemple

On a donc les matrices suivantes :

$$Entree = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \; Sortie = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

L'état d'un RdP est appelé un marquage $M : P \rightarrow \mathbb{N}$ souvent le marquage initial est noté M_0

Pour la figure 2 on a la matrice de marquage :

$$M = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Définition formelle des règles de franchissabilité des transitions (sémantique)

Y a un jeton et paf plus de jeton !!

3. Utilisation de l'algèbre linéaire pour définir la franchissabilité des transitions

Une transition t est franchissable (tirable) si :

$$\forall p \in P, \;\; M(p) \geq Entree(p, t)$$

par exemple pour la figure 2 t_1 est tirable et t_3 ne l'est pas.

Après avoir tiré la transition t on a :

$$\forall p \in P, \;\; M'(p) = M(p) - Entree(p, t) + Sortie(p, t)$$

On a la notation $M \xrightarrow{t} M'$
On note C la matrice d'incidence du réseau définie par

$$\forall p \in P,\ \forall t \in t,\ C(p,t) = Sortie(p,t) - Entree(p,t)$$

donc

$$M' = M + C(\ldots, t)$$

Si on reprends l'expemple de la figure 2

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Et donc si on tire t_1

$$M' = M + C(\ldots, t_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4. Propriétés des séquences de franchissements, vecteur caractéristique et équation fondamentale

On a la séquece de transition T_1T_2 On peut écrire

$$s = T_1T_2$$

$$M_0 \xrightarrow{s} M_2$$

$\overline{s}$ est le vecteur caractéristique de la séquence s tel que

$$\overline{s} : T \to \mathbb{N}$$

$$\overline{s}(t) = \text{le nombre d'occurences de t dans } s$$

En prenant l'exemple de la figure 2 avec la séquence $t_1t_2t_2t_3t_1$ on a le vecteur caractéristique suivant :

$$\overline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a les propriétés suivantes

$$s = s_1 \cdot s_2$$

$$\overline{s} = \overline{s_1} + \overline{s_2}$$

Pour $M \xrightarrow{s} M'$ on a :

$$M' = M + C \cdot \overline{s}$$

qui est **l'équation fondamentale**.

2 Propriétés des RdP

5. Monotonie et répétitivité des séquences de transitions

Dénfinition :

$$M_a \leq M_b \text{ si } \forall p \in P M_a(p) \leq M_2(p)$$

Un réseau est dit **monotone** si

$$M_1 \xrightarrow{s} M \text{ et } M_1 \leq M_2$$

Alors

$$M_2 \xrightarrow{s} M + (M_2 - M_1)$$

Une séquence est dite **répétitive** si

$$\forall M \text{ t.q. } M \xrightarrow{s}$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, M \xrightarrow{s^n}$$