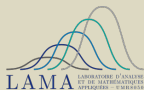


Décimation dans les modèles d'Ising et XY à $d \leq 2$

Séminaire de probabilités de Créteil

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, Créteil
mardi 8 mars 2022, 14h00 (heure de Paris)

Matteo D'Achille



UNIVERSITÉ
PARIS-EST CRÉTEIL
VAL DE MARNE



Exposé basé sur une collaboration avec :

- Aernout C.D. van Enter institut Bernoulli, université de Groningue
- Arnaud Le Ny LAMA, université Paris-Est Créteil

Référence principale :

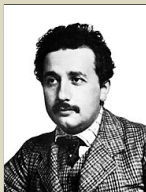
*M. D'Achille, A. C. D. van Enter et A. Le Ny, "Decimations for two-dimensional Ising and rotator models", J. Math. Phys. **63**, 27, 2022 (pre-publi : 2105.07950)*

Plan de l'exposé

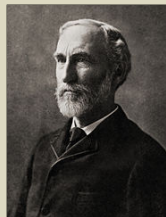
- 1 Introduction
- 2 Notations et concepts préliminaires
- 3 Spécifications : du local au global
- 4 La spécification globale du modèle XY
- 5 Conclusions et une perspective

Mécanique statistique et les ensembles de Gibbs

Einstein 1902 : « ... to derive the thermal equilibrium and the second law of thermodynamics from the equation of motion and probability theory »



Gibbs
1902



Soient V le volume, N le nombre de particules et E l'énergie.
On a trois *ensembles* :

- micro-canonique : V , N et E fixes ;
- **canonique** : V et N fixes, E peut fluctuer ;
- grand-canonique : V fixe, N et E peuvent fluctuer.

Micro. \rightarrow canon. \rightarrow grand. : transformée de Laplace.

Caractérisation variationnelle de la mesure de Gibbs

Pour V fini, soit $\Omega = E^V$ l'espace des configurations et $\mathcal{H}_V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ l'hamiltonien. Pour P une mesure de probabilité, considérons

$$\begin{cases} U[P] = \sum_{\sigma \in \Omega} P[\sigma] \mathcal{H}_V[\sigma] & (\text{énergie interne}), \\ S[P] = -\sum_{\sigma \in \Omega} P[\sigma] \log P[\sigma] & (\text{entropie}). \end{cases}$$

Pour β fixe (température inverse), considérons la *fonctionnelle énergie libre généralisée*

$$\Phi[P; \beta] := S[P] - \beta U[P].$$

Lemme. La *mesure de Gibbs* $P[\sigma] := \frac{e^{-\beta \mathcal{H}_V[\sigma]}}{Z(\beta)}$ maximise Φ .

Tout va bien si $V < \infty$ (souvent très dur d'évaluer $Z(\beta)$...). Mais si $V \rightarrow \infty$?

L'approche de Dobrushin–Lanford–Ruelle



Dobrushin
1968

Lanford-
Ruelle
1969



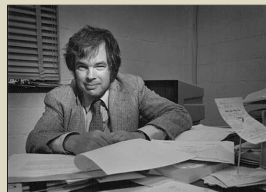
Si $V = \infty$, les mesures de Gibbs sont définies au moyen de la **spécification des versions régulières de leurs probabilités** conditionnelles par rapport à l'extérieur d'ensembles finis (sur lesquels des conditions aux bords sont données).

Voir e.g. Friedli-Velenik 2017

Kadanoff et Wilson : le groupe de renormalisation



Kadanoff
1966



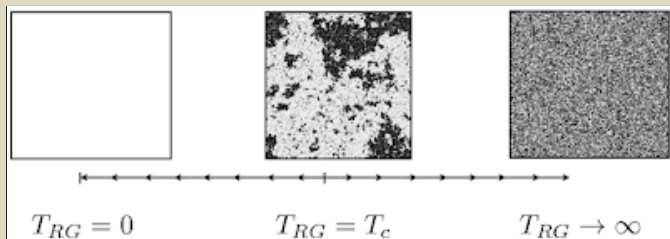
Wilson
1983

- les transitions de phase (transitions liquide-gaz, para-ferro magnétique P. Curie 1892);
- les phénomènes critiques (opalescence critique Cagniard de Latour 1822);
- la théorie de Landau.

Plusieurs mesures de Gibbs au point critique? Symétries du système au point critique?

Voir e.g. Zinn-Justin 2005

Groupe de renormalisation et phénomènes critiques en $d = 2$



Le modèle d'Ising

C'est un modèle de spin à symétrie discrète $O(1) \sim \mathbb{Z}_2$

Espace des configurations :

$$\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\{-1, +1\})^{\otimes \mathbb{Z}^2}, \rho = \left(\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}\right)^{\otimes \mathbb{Z}^2},$$

Interaction : $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{S}}$, pour $\Phi_A \equiv 0$ si $A \neq \{i, j\}$ et

$$\Phi_{\{i, j\}}(\sigma) = -J(i, j) \sigma_i \sigma_j, \quad A = \{i, j\},$$

où $J : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $J(i, j) \geq 0$ (e.g. $J(i, j) = J, \forall i, j$).

Hamiltonien : volume V avec condition aux bords ω

$$\mathcal{H}_V^\Phi(\sigma \mid \omega) := \sum_{A \in \mathcal{S}, A \cap V \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma_V \omega_{V^c}). \quad (1)$$

Un peu d'histoire du modèle d'Ising $2d$

- 1925 Ising (Lenz) : introduction du modèle (en $d = 1$)
- 1936 Peierls : existence d'une transition de phase
- 1941 Kramers–Wannier : température critique (« dualité »)
- 1944 Onsager : toute l'énergie libre
- 1949 Onsager : $\beta = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{2}$ (champ moyen)
- 1963 Montroll–Potts–Ward : fonct. de corrélation (pfaffians)
- 1963 Kasteleyn : Ising $2d \sim$ probl. de recouvrement de dimères
- 1964 Schultz–Mattis–Lieb : Ising $2d \sim$ chaîne de fermions
- 1969 Berezin : Ising $2d$ reformulée en variables de Grassmann
- 1970 Polyakov : invariance du modèle sous transf. de Möbius
-

Voir e.g. Mussardo 2007, Chelkak–Smirnov 2011, Jacobsen–Ikhlef 2013

Le modèle XY (ou rotateur planaire)

C'est un modèle de spin à symétrie continue $O(2)$

Espace des configurations :

$$\Omega = (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{Z}^2}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)^{\otimes \mathbb{Z}^2}, \quad \rho = \left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\otimes \mathbb{Z}^2},$$

Interaction : $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{S}}$, pour $\Phi_A \equiv 0$ si $A \neq \{i, j\}$ et

$$\Phi_{\{i, j\}}(\sigma) = -J(i, j) \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j = -J(i, j) (\sigma_{i,1} \sigma_{j,1} + \sigma_{i,2} \sigma_{j,2}), \quad A = \{i, j\},$$

où $J : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $J(i, j) \geq 0$ (e.g. $J(i, j) = J, \forall i, j$).

Hamiltonien : volume V avec condition aux bords $\vec{\omega}$

$$\mathcal{H}_V^\Phi(\vec{\sigma} \mid \vec{\omega}) := \sum_{A \in \mathcal{S}, A \cap V \neq \emptyset} \Phi_A(\vec{\sigma}_V \vec{\omega}_{V^c}). \quad (2)$$

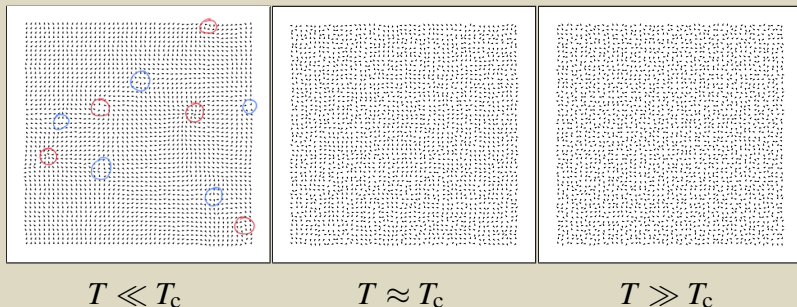
Un peu d'histoire du modèle XY

- 1928 Heisenberg : modèle avec symétrie $O(3)$
- 1964 Schultz–Mattis–Lieb : introduction « officielle » du modèle XY
- 1970 Ginibre : fonctions de corrélation via inégalités des Griffiths
- 1971 Berezinsky et Kosterlitz–Thouless (1973) : transition des (anti-)tourbillons couplés à $\beta > \beta_c$ aux tourbillons libres à $\beta < \beta_c$ (prix Nobel de physique 2016)
- 1977 McBryan–Spencer 1977, Fröhlich–Spencer 1981 : preuve de l'existence de ces deux phases (prix Dannie Heineman 1991)
- 1980 Aizenmann–Simon : $\mathbb{E}^{XY}[\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j]_{J,2\beta} \leq \mathbb{E}^{\text{Ising}}[\sigma_i \sigma_j]_{J,\beta}, \forall d$
 - ...

Voir e.g. Kardar 2007, Simon 2022

Un regard sur les deux phases du modèle XY

Fixons une boîte $L \times L$ avec c.a.b. périodiques. Des configurations typiques à $L = 50$:



Décimation sur \mathbb{Z}^2

Définition. La décimation sur \mathbb{Z}^2 $T: (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}') = (\Omega, \mathcal{F})$, à toute configuration « invisible » $\omega \in \Omega$, associe une configuration « visible » $\omega' \in \Omega'$ selon :

$$\omega \longmapsto \omega' = (\omega'_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}, \text{ avec } \omega'_i = \omega_{2i} .$$

van Enter–Fernandez–Sokal 1993, partie I

Bien défini sur des modèles hiérarchiques (à-la-Dyson), non triviaux sur des treillis pour les transformations les plus courantes (e.g. décimation, majorité).

La décimation est un bon exemple pour illustrer ce point, comme remarqué par Griffiths, Pearce et Israel, et ensuite interprété par une perte de la propriété de Gibbs par van Enter–Fernandez–Sokal 1993 (EFS).

Idée générale : montrer que l'espérance conditionnelle d'une variable microscopique image en un site fixé (e.g. l'aimantation), est **essentiellement discontinue** en fonction de la condition aux bords.

van Enter–Fernandez–Sokal 1993, partie II

L'approche EFS consiste en :

- Construire la mesure marginale sur les spins visibles en intégrant les spins invisibles originaux ;
- Conditionnement d'événements sur des sous-graphes infinis (dépendance du modèle, existence d'une spécification globale).
- Conditionnement par rapport à une « mauvaise configuration » (dépendante du modèle), plusieurs mesures de Gibbs peuvent coexister → transition de phase (même si le modèle d'origine n'en a aucune !)
- Considérer la configuration transformée dans un anneau autour d'un volume fini et montrer qu'elle est « bonne » agissant comme « conditions aux limites ».
- Défixer l'origine : le choix de la phase invisible, conditionnée à tous les autres spins visibles, influence l'espérance du spin visible à l'origine.

Notations de base

\mathcal{M}_1^+ : ensemble des mesures de proba sur (Ω, \mathcal{F}) .

Ordre partiel « \leq » sur Ω : $\sigma \leq \omega$ ssi $\sigma_i \leq \omega_i \ \forall i \in \mathbb{Z}^2$

« \leq » admet une extension naturelle aux fonctions et à un ordre stochastique sur les probas.

Spécification de Gibbs

Définition [spécification de Gibbs]. Pour un potentiel UAC Φ , l'ensemble des noyaux de probabilité $\gamma^{\beta\Phi} = (\gamma_V^{\beta\Phi})_{V \in \mathcal{S}}$, défini pour tous $V \in \mathcal{S}$ **fini**, $\sigma, \omega \in \Omega$, par

$$\gamma_{\Lambda}^{\beta\Phi}(\sigma \mid \omega) := \frac{1}{Z_V^{\beta\Phi}(\omega)} e^{-\beta \mathcal{H}_V^{\Phi}(\sigma \mid \omega)}, \quad (3)$$

est appelé une **spécification de Gibbs** pour le potentiel Φ à température inverse β .

Une notion essentielle : la quasilocalité

Définition. Une fonction f est **quasilocale** si

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathcal{S}} \sup_{\sigma, \omega: \sigma_\Lambda = \omega_\Lambda} |f(\omega) - f(\sigma)| = 0.$$

Considérons le **modèle d'Ising** (ou n'importe quel modèle avec espace d'états fini). Alors

$$\text{continuité} \equiv \text{quasilocalité}.$$

Base de voisinages : pour $\omega \in \Omega$, $(\mathcal{N}_\Lambda(\omega))_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ avec, $\forall \Lambda \in \mathcal{S}$,

$$\mathcal{N}_\Lambda(\omega) = \left\{ \sigma \in \Omega : \sigma_\Lambda = \omega_\Lambda, \sigma_{\Lambda^c} \text{ arbitraire} \right\}.$$

Aussi les voisinages de ω sachant $+$ ou $-$ sur une couronne $\Delta \setminus \Lambda$:

$$\mathcal{N}_{\Lambda, \Delta}^+(\omega) = \left\{ \sigma \in \mathcal{N}_\Lambda(\omega) : \sigma_{\Delta \setminus \Lambda} = +_{\Delta \setminus \Lambda}, \sigma_{\Delta^c} \text{ arbitraire} \right\},$$

$$\mathcal{N}_{\Lambda, \Delta}^-(\omega) = \left\{ \sigma \in \mathcal{N}_\Lambda(\omega) : \sigma_{\Delta \setminus \Lambda} = -_{\Delta \setminus \Lambda}, \sigma_{\Delta^c} \text{ arbitraire} \right\}.$$

Voisinages dans le modèle XY

Rappel : dans le modèle XY

$$\theta_i = \theta(\vec{\sigma}_i) = (\vec{\sigma}_i, \vec{e}_1) \in]-\pi, +\pi] .$$

Base de voisinages : pour $\varepsilon_k > 0$, la famille $(\mathcal{N}_{\Lambda, \varepsilon_k}(\vec{\omega}))_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ avec, $\forall \Lambda \in \mathcal{S}$,

$$\mathcal{N}_{\Lambda, \varepsilon_k}(\vec{\omega}) = \left\{ \vec{\sigma} \in \Omega : (\vec{\sigma}_i, \vec{\omega}_i) \leq \varepsilon_k, \forall i \in \Lambda; \vec{\sigma}_{\Lambda^c} \text{ arbitraire} \right\}.$$

Spécification locale (Föllmer 1975, Preston 1976)

Définition [spécification locale] : une famille de noyaux de probabilité $\gamma_\Lambda : \Omega \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$; $(\omega, A) \mapsto \gamma_\Lambda(A | \omega)$ t.q. $\forall \Lambda \in \mathcal{S}$

1. $\forall \omega \in \Omega, \gamma_\Lambda(\cdot | \omega) \in \mathcal{M}_1^+$;
2. $\forall A \in \mathcal{F}, \gamma_\Lambda(A | \cdot)$ est \mathcal{F}_{Λ^c} -mesurable ;
3. $\forall \omega \in \Omega, \gamma_\Lambda(B | \omega) = \mathbf{1}_B(\omega)$ quand $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$ (propreté) ;
4. $\forall \Lambda \subset \Lambda' \in \mathcal{S}, \gamma_{\Lambda'} \gamma_\Lambda = \gamma_{\Lambda'}$, où (consistance)

$$\forall A \in \mathcal{F}, \forall \omega \in \Omega, (\gamma_{\Lambda'} \gamma_\Lambda)(A | \omega) = \int_{\Omega} \gamma_\Lambda(A | \omega') \gamma_{\Lambda'}(d\omega' | \omega).$$

L'action d'une spécification locale sur fonctions et mesures :

$$\gamma_\Lambda f(\omega) := \int_{\Omega} f(\sigma) \gamma_\Lambda(d\sigma | \omega) = \gamma_\Lambda[f | \omega],$$

$$\mu \gamma_\Lambda[f] := \int_{\Omega} (\gamma_\Lambda f)(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \gamma_\Lambda[f | \omega] \mu(d\omega).$$

Spécifications attractives (Fernandez-Pfister 1997)

Une spécification locale est **attractive** si $\forall \Lambda \in \mathcal{S}$ et $\forall f$ croissante, $\omega \mapsto \gamma_{\Lambda} f(\omega)$ comme fonction des conditions aux bords ω est croissante.

Affirmation : une spécification de Gibbs pour un potentiel ferromagnétique est automatiquement attractive.

Des spécifications aux spécifications globales

Problème : conditionner à l'extérieur d'un ensemble **infini** ?

Idée : un ordre partiel sur les configurations + théorème de Beppo Levi (convergence monotone).

XY : on considère l'ordre partiel \leq_{\sin} :

$$\omega \leq_{\sin} \omega' \text{ ssi } \sin \theta_i \leq \sin \theta'_i, \forall i \in \mathbb{Z}^2,$$

qui implique l'*ordre stochastique* partiel entre mesures

$$\mu \leq_{\sin} \mu' \text{ ssi } \forall f \text{ croissante, } \mu[f] \leq \mu'[f].$$

Avec ce choix, les configs. $\pm \frac{\pi}{2}$ **sont extrémales** et la spécification du modèle **XY est attractive** à cause des inégalités de Griffiths.

Spécifications et mesures DLR

Définition (mesures DLR). $\mu \in \mathcal{M}_1^+$ est **consistante** avec la spécification γ (ou spécifiée par γ) si, $\forall A \in \mathcal{F}$ et $\forall \Lambda \in \mathcal{S}$,

$$\mu[A|\mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega) = \gamma_{\Lambda}(A|\omega), \mu\text{-p.p. } \omega \in \Omega.$$

μ est spécifiée par γ si

$$\int (\gamma_{\Lambda} f) d\mu = \int f d\mu \quad \forall \Lambda \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\text{qloc}}.$$

Soit $\mathcal{G}(\gamma)$ l'ensemble des mesures spécifiées par γ .

Problème : comprendre $\mathcal{G}(\gamma)$.

Spécification de Gibbs

Définition. La *spécification de Gibbs* à température inverse $\beta > 0$ est $\gamma^J = \gamma^{\beta\Phi}$, définie à volume fini Λ par

$$\gamma_{\Lambda}^J(d\sigma \mid \omega) = \frac{1}{Z_{\Lambda}^{\beta\Phi}(\omega)} e^{-\beta H_{\Lambda}^{\Phi}(\sigma \mid \omega)} (\rho_{\Lambda} \otimes \delta_{\omega_{\Lambda^c}})(d\sigma).$$

Une mesure de Gibbs est une mesure spécifiée par une spécification de Gibbs.

Mesures de Gibbs \equiv mesures quasilocales non nulles

Une spécification γ est **quasilocale** si, $\forall \Lambda \in S$, l'image de n'importe quelle f via γ est une fonction quasilocale :

$$f \in \mathcal{F}_{\text{loc}} \implies \gamma_{\Lambda} f \in \mathcal{F}_{\text{qloc}}.$$

Une mesure μ est quasilocale ssi $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, où γ est quasilocale.
Pourquoi s'intéresser aux mesures quasilocales ?

Théorème (Kozlov 1974, Sullivan 1973)

μ est une mesure de Gibbs $\iff \mu$ est quasilocale et non-nulle.

Discontinuité essentielle

Définition. $\omega \in \Omega$ est un **point de discontinuité essentielle** pour une probabilité conditionnelle $\mu \in \mathcal{M}_1^+$, si $\exists \Lambda_0 \in \mathcal{S}$, une fonction f locale, $\delta > 0$, t.q. $\forall \Lambda$ avec $\Lambda_0 \subset \Lambda$ il existe $\mathcal{N}_\Lambda^1(\omega)$ et $\mathcal{N}_\Lambda^2(\omega)$ (deux voisinages de ω) t.q.

$$\forall \omega^1 \in \mathcal{N}_\Lambda^1(\omega), \forall \omega^2 \in \mathcal{N}_\Lambda^2(\omega),$$

$$\left| \mu[f|\mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega^1) - \mu[f|\mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega^2) \right| > \delta,$$

ou de manière équivalente

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^2} \sup_{\omega^1, \omega^2 \in \Omega} \left| \mu[f|\mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega_\Delta \omega_{\Delta^c}^1) - \mu[f|\mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega_\Delta \omega_{\Delta^c}^2) \right| > \delta.$$

La spécification globale du modèle XY

Théorème [D'A, van Enter, Le Ny 2021]. Soit $\Gamma^+ = (\Gamma_S^+)_{S \subset \mathbb{Z}^2}$ une famille de noyaux de proba. t.q. :

- $\Gamma_\Lambda^+(d\vec{\sigma}|\vec{\omega}) := \gamma_\Lambda^J(d\vec{\sigma}|\vec{\omega})$, $\forall \Lambda$ fini et $\forall \vec{\omega} \in \Omega$;
- Pour S **infini**, alors $\forall \vec{\omega} \in \Omega$, $\Gamma_S^+(d\vec{\sigma}|\vec{\omega}) := \mu_S^{+, \vec{\omega}} \otimes \delta_{\vec{\omega}_{S^c}}(d\vec{\sigma})$,
où $\mu_S^{+, \vec{\omega}}$ est la limite faible obtenue en fixant $\vec{\omega}_{S^c}$ sur S^c :

$$\mu_S^{+, \vec{\omega}}(d\vec{\sigma}_S) := \lim_{\Delta \uparrow S} \gamma_\Delta^J(d\vec{\sigma} \mid \vec{\omega}_{S^c}).$$

Alors Γ^+ est une **spécification globale** t.q. $\mu^+ \in \mathcal{G}(\Gamma^+)$ (*idem* pour Γ^- t.q. $\mu^- \in \mathcal{G}(\Gamma^-)$).

Idée de la preuve

Le problème à surmonter est que pour XY , $E = \mathbb{S}^1$, lorsque pour Ising c'était $E = \{-1, +1\}$. Donc on doit vérifier que :

- l'ordre partiel ne détruit pas la propriété de préservation de monotonie du noyaux ;
- les noyaux « candidats » préservent la mesurabilité et l'utilisation du théorème de convergence monotone.

Etape 1) : l'équivalence des spécifications locales et globales sur des ensembles finis est OK :

$$\Gamma_{\Lambda}^+ \equiv \gamma_{\Lambda}^J, \quad \forall \Lambda \subset \mathbb{Z}^2 \text{ fini.}$$

Etape 2) : $\forall S \subset \mathbb{Z}^2$ infini, et $\forall \Lambda$ fini, la consistance est

$$\Gamma_S^+ = \Gamma_S^+ \Gamma_{\Lambda}^+ = \Gamma_S^+ \gamma_{\Lambda}^J.$$

Idée de la preuve

Donc $\forall f \in \mathcal{F}_{\text{loc}}$ et $\forall \Lambda$ **fini** on a, $\forall \vec{\omega}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_S^+(f \mid \vec{\omega}) &= \int_{\Omega} \gamma_{\Lambda}^J(f \mid \vec{\sigma}) \Gamma_S^+(d\vec{\sigma} \mid \vec{\omega}) \\ &\underset{\text{propriété}}{=} \int_{\Omega} \gamma_{\Lambda}^J(f \mid \vec{\sigma}_S \vec{\omega}_{S^c}) \Gamma_S^+(d\vec{\sigma} \mid \vec{\omega}) . \end{aligned}$$

Pour une configuration $\vec{\omega}$, la mesure $\Gamma_S^+(\cdot \mid \vec{\omega})$ est spécifiée par la spécification contrainte $\gamma^{S, \vec{\omega}}$, définie $\forall \vec{\eta}$ par

$$\gamma_{\Lambda}^{S, \vec{\omega}}(\cdot \mid \vec{\eta}) := \gamma_{\Lambda}^J(\cdot \mid \vec{\eta}_S \vec{\omega}_{S^c}).$$

Maintenant on obtient la limite faible :

$$\mu_S^{+, \vec{\omega}}(\cdot) := \lim_{\Delta \uparrow S} \gamma_{\Delta}^J(\cdot \mid \vec{\cdot}_S \vec{\omega}_{S^c}).$$

Idée de la preuve

Donc $\forall S \subset \mathbb{Z}^2$ **infini**, on a les noyaux

$$\Gamma_S^+(d\vec{\sigma} \mid \vec{\omega}) := \mu_S^{+, \vec{\omega}}(d\vec{\sigma}_S) \otimes \delta_{\vec{\omega}_{S^c}}(d\vec{\sigma}_{S^c})$$

et ces noyaux sont consistants au sens de DLR.

Objectif : prouver que

$$\mathbb{E}_{\mu^+}(f_1 f_2) = \mathbb{E}_{\mu^+}(\Gamma_{D_1}^+(f_1 \mid \cdot) f_2).$$

$\forall f_1, f_2$ Λ_1 -locale et Λ_2 -locale, avec $\Lambda_1 \subset D_1$, $\Lambda_2 \subset D_2 \setminus D_1$.

Preuve : \leq et \geq .

*. f_1 et f_2 positives et croissantes au sens de \leq_{sin} .

$$\mathbb{E}_{\mu^+}(f_1 f_2) \geq \mathbb{E}_{\mu^+}(\Gamma_{D_1}^+(f_1 \mid \cdot) f_2)$$

Preuve à-la Fernandez-Pfister 1997 pour Ising + $\vec{\sigma} \leq_{\sin} \vec{\eta}_\Lambda \vec{\tau}_{\Lambda^c}$.

$\forall f_1, f_2$, Λ_1 -locale et Λ_2 -locale, avec $\Lambda_1 \subset D_1$, $\Lambda_2 \subset D_2 \setminus D_1$:

1. $\Gamma_{D_1}^+(f_1 \mid \vec{\eta}) \underset{\text{Monotonie du noyau}}{\leq} \gamma_\Lambda^J \left(f_1(\vec{\sigma}_\Lambda) \mid \vec{\tau}_{D_1} \vec{\eta}_{D_1^c} \right) ;$
2. $\mathbb{E}_{\mu^+}(\Gamma_{D_1}^+(f_1 \mid \cdot) f_2) \leq \int \gamma_{\Lambda_2}^J(d\vec{\eta} \mid \vec{\tau}) \gamma_\Lambda^J \left(f_1 \mid \vec{\tau}_{D_1} \vec{\eta}_{D_1^c} \right) f_2(\vec{\eta}) ;$
3. Prenons un autre Λ_2 t.q. $\Lambda_2 \cap D_1 = \Lambda$. Alors

$$\int \gamma_{\Lambda_2}^J(d\vec{\eta} \mid \vec{\tau}) \gamma_\Lambda^J \left(f_1 \mid \vec{\tau}_{D_1} \vec{\eta}_{D_1^c} \right) f_2(\vec{\eta}) = \int \gamma_{\Lambda_2}^J(d\vec{\eta} \mid \vec{\tau}) f_1(\vec{\eta}) f_2(\vec{\eta}),$$

et donc $\mathbb{E}_{\mu^+}(\Gamma_{D_1}^+(f_1 \mid \cdot) f_2) \leq \mathbb{E}_{\mu^+}(f_1 f_2)$.

$$\mathbb{E}_{\mu^+}(f_1 f_2) \leq \mathbb{E}_{\mu^+}(\Gamma_{D_1}^+(f_1 \mid \cdot) f_2)$$

Pour $M \subset \Lambda_2 \cap D_1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^+}(f_1 f_2) &\leq \lim_{\Lambda_2} \int \gamma'_{\Lambda_2}(d\vec{\eta} \mid \vec{\mp}) f_1(\vec{\eta}) f_2(\vec{\eta}) = \lim_{\Lambda_2} \int \gamma'_{\Lambda_2}(d\vec{\eta} \mid \vec{\mp}) \gamma'_M(f_1 \mid \vec{\eta}) f_2(\vec{\eta}) \\ &\leq \lim_{\Lambda_2} \int \gamma'_{\Lambda_2}(d\vec{\eta} \mid \vec{\mp}) \gamma'_M(f_1 \mid \vec{\mp}_{D_1} \vec{\eta}_{D_1^c}) f_2(\vec{\eta}) \\ &= \int \mu^+(d\vec{\eta}) \gamma'_M(f_1 \mid \vec{\mp}_{D_1} \vec{\eta}_{D_1^c}) f_2(\vec{\eta}). \end{aligned}$$

La conclusion suit via le théorème de Beppo Levi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^+}(f_1 f_2) &\leq \lim_{M \uparrow D_1} \int \mu^+(d\vec{\eta}) f_2(\vec{\eta}) \gamma_M(f_1 \mid \vec{\mp}_{D_1} \vec{\eta}_{D_1^c}) \\ &= \mathbb{E}_{\mu^+} \left(f_2 \Gamma_{D_1}^+(f_1 \mid \cdot) \right) \end{aligned}$$

et donc la consistance sur des ensembles **infinis**, $\Gamma_{D_1}^+ = \Gamma_{D_1}^+ \Gamma_{D_2}^+$ ■

Configuration spéciale et conditionnement

Pour une configuration « spéciale » $\vec{\omega}'_{\text{spe}}$, on a pour ν^+ -p.p. $\vec{\omega}' \in \mathcal{N}_{\Lambda', \varepsilon}(\vec{\omega}'_{\text{spe}})$

$$\nu^+[f(\vec{\sigma}') | \mathcal{F}_{\{(0,0)\}^c}](\vec{\omega}') = \Gamma_S^+[f(\vec{\sigma}') | \vec{\omega}] \mu^+ - \text{p.p.}(\vec{\omega}),$$

avec $S = (2\mathbb{Z}^2)^c \cup \{(0,0)\}$ et $\vec{\omega} \in T^{-1}\{\vec{\omega}'\}$ coïncide avec $\vec{\omega}'_{\text{spe}}$ sur $2\mathbb{Z}^2$. $\forall \vec{\omega}' \in \mathcal{N}_{\Lambda'}(\vec{\omega}'_{\text{spe}})$,

$$\nu^+[f(\vec{\sigma}') | \mathcal{F}_{\{(0,0)\}^c}](\vec{\omega}') = \mu_{(2\mathbb{Z}^2)^c \cup \{(0,0)\}}^{+, \vec{\omega}} \otimes \delta_{\vec{\omega}_{2\mathbb{Z}^2 \cap \{(0,0)\}^c}} [f(\vec{\sigma}')].$$

C'est obtenu par limite faible monotone avec c.a.b. $+\frac{\pi}{2}$ fixes *après* avoir gelé $\vec{\omega}$ sur les sites pairs : $\forall \vec{\omega}' \in \mathcal{N}_{\Lambda'}(\vec{\omega}'_{\text{alt}})$, $\forall \vec{\omega} \in T^{-1}\{\vec{\omega}'\}$,

$$\mu_{(2\mathbb{Z}^2)^c \cup \{(0,0)\}}^{+, \vec{\omega}}(\cdot) = \lim_{\Delta \in \mathcal{I}, \Delta \uparrow (2\mathbb{Z}^2)^c \cup \{(0,0)\}} \gamma_{\Delta}^J(\cdot | \vec{\tau}_{(2\mathbb{Z}^2)^c \cup \{(0,0)\}}) \vec{\omega}_{2\mathbb{Z}^2 \cap \{(0,0)\}^c}.$$

La configuration « mauvaise » ω'_{alt} en $d = 2$

La configuration mauvaise :

$$(\omega'_{\text{alt}})_i = (-1)^{(i_1+i_2)}, \forall i \in (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

On a donc plusieurs résultats de non-gibbsiannité à basse température car si la spécification de départ admet une transition de phase, la spécification contrainte l'admet aussi.

Caveat : la discontinuité essentielle est due à un effet de *screening* qui est présent même pour des interactions à longue portée, si c'est possible de choisir une couronne à la van Enter-Le Ny en 2017. La non-gibbsiannité est une conséquence de cet effet de *screening* et de la domination stochastique.

Exemple : Ising isotrope à longue portée

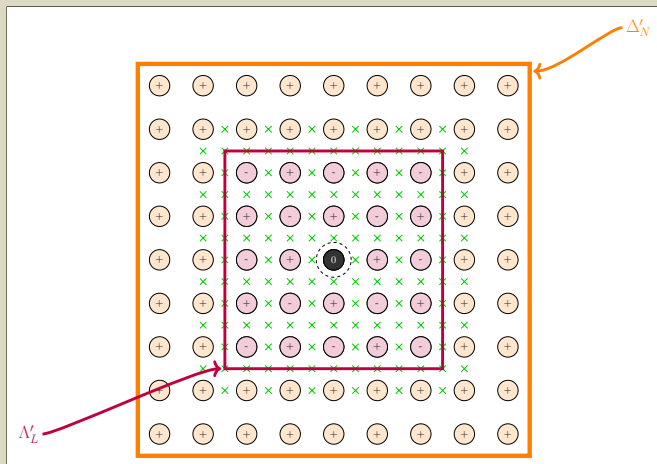
Posons $\Lambda'_L = ([-L, +L] \cap \mathbb{Z})^2$, $\Delta'_N = ([-N, +N] \cap \mathbb{Z})^2$, avec $N > L$. Alors on a une borne uniforme en L pour les différences d'énergie avec c.a.b. ω_1^+ et ω_2^+ : il suffit de choisir $N = N(L) = O(L^{\frac{2}{\alpha-1}})$. Plus précisément :

$$\delta H_L^{+, \omega_{1/2}'} := \left| H_{\Lambda, \omega_1^+}(\sigma_\Lambda) - H_{\Lambda, \omega_2^+}(\sigma_\Lambda) \right| \leq \sum_{x \in \Lambda_{2L}} 2 \sum_{k > 2N} \frac{1}{k^\alpha} < C < \infty.$$

Lemme (D'A-van Enter-Le Ny 2021). Soit $\Lambda' \subset \Delta' \in \mathcal{S}$ et soient $\omega'^+ \in \mathcal{N}_{\Lambda', \Delta'}^+(\omega'_{\text{alt}})$ et $\omega'^- \in \mathcal{N}_{\Lambda', \Delta'}^-(\omega'_{\text{alt}})$. Alors $\exists \delta > 0$ et $\exists \Lambda'_0$ suffisamment grande t.q. $\Delta' \supset \Lambda' \supset \Lambda'_0$ avec $\Delta' \setminus \Lambda'$ beaucoup plus grande que Λ' , t.q. $\forall \omega^+ \in T^{-1}\{\omega'^+\}$ et $\forall \omega^- \in T^{-1}\{\omega'^-\}$,

$$\left| \mu_{(2\mathbb{Z}^2)^c \cup \{0\}}^{+, \omega^+}[\sigma_0] - \mu_{(2\mathbb{Z}^2)^c \cup \{0\}}^{+, \omega^-}[\sigma_0] \right| > \delta \quad (\text{disc. essentielle}).$$

Représentation graphique de la preuve



$$(\omega'_{\text{alt}})_i = (-1)^{(i_1+i_2)}, \forall (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Exemple 2 : modèles XY en $d = 2$

La configuration « mauvaise » XY est maintenant

$$\vec{\omega}'_{\text{alt}} = (-1)^{i_1+i_2} \vec{e}_1, \forall (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Théorème (D'A-van Enter-Le Ny 2021). Pour le modèle XY en $d = 2$ avec interaction

$$J^{\text{iso}, \alpha}(i, j) := J \cdot |i - j|^{-\alpha} \cdot \langle \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \rangle,$$

pour $\beta > \beta_c^{J(\alpha)}$, la mesure $\nu^+ = T(\mu^+)$ est non-quasilocale, et donc non-gibbsienne $\forall 2 < \alpha \leq 4$.

Remarque : ces arguments passent pour XY en $d = 1$ à longue portée avec $1 < \alpha < 2$ (le cas $\alpha = 2$ est plus subtil).

Quelques conclusions

On a montré que les mesures décimées pour les modèles d'Ising et XY $2d$ sont non-gibbsiennes à basse température grâce à l'équivalence des conditions aux bords dans le cas à longue portée et à une extension de la spécification globale de Fernandez-Pfister au cas XY en $d = 2$. Cette approche s'applique à plusieurs types d'interactions dans les modèles d'Ising et XY , comme :

- Ising : à plus proches voisins bi-axial, axial longue portée (anisotrope), isotrope longue portée ;
- XY : $2d$ à plus proches voisins anisotrope et isotrope longue portée.

Une perspective : la transition « spin-flop »

Même si le modèle original n'a pas de brisure de symétrie $O(2)$ à cause du théorème de Mermin-Wagner, un choix astucieux de la configuration spéciale (différent de la configuration ω'_{alt} présentée ici !) peut induire une brisure $O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (transition « spin-flop »).

(... les détails de cet argument dans le prochain épisode ...)

Merci de votre attention !