

# Différences d'énergie asymptotique dans l'ERAP sur des variétés bidimensionnelles

Exposé pour le gdt "Processus ponctuels et applications"  
Laboratoire Painlevé @ Université de Lille-I

**Matteo D'Achille**



Collaborateurs : D. Benedetto & E. Caglioti (Rome La Sapienza),  
S. Caracciolo (UMilan & INFN), V. Erba (UMilan)  
G. Sicuro (Londres King's College) et A. Sportiello (CNRS & UP13)

Références: [tel-03098672](tel:03098672), [2008.01462](#)

vendredi 19 février 2021, 14h00 (HNEC)

# Plan de l'exposé

- ▶ Introduction
- ▶ Problèmes d'assignation aléatoire euclidienne (ERAP)
- ▶ ERAP en dimension 2 : motivations et état de l'art
- ▶ Différences d'énergie asymptotique dans l'ERAP sur des variétés bidimensionnelles
- ▶ Conclusions et quelques perspectives

# Introduction

Un **problème d'optimisation combinatoire (OC)** consiste à trouver l'extrema d'une fonction d'intérêt sur des ensembles discrets et typiquement larges.

Le **problème d'assignation (PA)** en est un exemple majeur et trouve application dans une grande variété de situations, p. ex. :

- ▶ Suivi des particules identiques qui se déplacent en régime diffusive ( gouttes d'eau dans un nuage, oiseaux dans un troupeau ... )
- ▶ Conception des réseaux cellulaires, compte tenu de la géographie et de la densité spatiale des utilisateurs ( p. ex. à partir des données historiques )

L'importance de ce problème a été reconnue dans de nombreux domaines :

1. Economie (Koopmans–Beckmann 1957)
2. Théorie de jeux: stratégie mixte optimale dans un jeu à deux joueurs (von Neumann 1953, 1954)

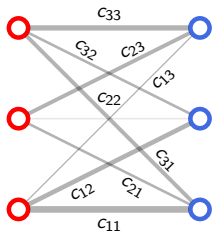
## Le problème d'assignation (PA)

Pour une matrice  $c$  réelle  $n \times n$ , on cherche une bijection  $\pi$  t.q.

$$\mathcal{H}(\pi, c) = \sum_i c_{i\pi(i)}$$

soit minimal. Soit  $\pi_{\text{opt}} = \arg \min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathcal{H}(\pi, c)$ ,  $\mathcal{H}_{\text{opt}}(c) := \mathcal{H}(\pi_{\text{opt}}; c)$ .

Ex.  $n = 3$ :



$$c = \begin{pmatrix} 5 & 3.5 & 1 \\ 2 & 1.2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

PA est **P-complet**: de nombreux problèmes, comme inverser une matrice ou déterminer si un nombre naturel donné est premier, peuvent être formulés comme un PA.

Algo:  $\pi_{\text{opt}} = \pi_{\text{opt}}(c)$  est trouvée en temp  $\mathcal{O}(n^3)$  (Munkres 1957)

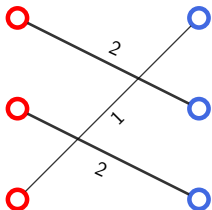
## Le problème d'assignation (PA)

Pour une matrice  $c$  réelle  $n \times n$ , on cherche une bijection  $\pi$  t.q.

$$\mathcal{H}(\pi, c) = \sum_i c_{i\pi(i)}$$

soit minimal. Soit  $\pi_{\text{opt}} = \arg \min_{\pi \in \mathcal{S}_n} \mathcal{H}(\pi, c)$ ,  $\mathcal{H}_{\text{opt}}(c) := \mathcal{H}(\pi_{\text{opt}}; c)$ .

Ex.  $n = 3$ :



$$c = \begin{pmatrix} 5 & 3.5 & \textcircled{1} \\ \textcircled{2} & 1.2 & 3 \\ 3 & \textcircled{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{\text{opt}}(c) = 5$$

PA est **P-complete**: de nombreux problèmes, comme inverser une matrice ou déterminer si un nombre naturel donné est premier, peuvent être formulés comme un PA.

Algo:  $\pi_{\text{opt}} = \pi_{\text{opt}}(c)$  est trouvée en temp  $\mathcal{O}(n^3)$  (Munkres 1957)

## PA: un problème "vieux"



König  
1916



Egervary  
1931



Munkres  
1957

von Neumann  
1953



Kuhn  
1955



*"De investigando ordine systematis aequationum..."*

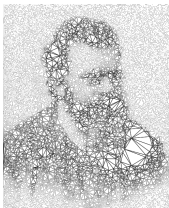
Jacobi 1860

Voir Ollivier 2009



PA est bien compris et aujourd'hui peut-être résolu rapidement même sur des smartphones... pourquoi l'étudier ?

# Classe de problèmes d'OC $\equiv$ système désordonné



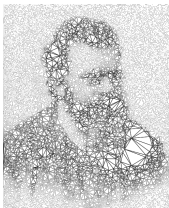
le "Boltzmann désordonné"



Physique: limite de température zéro ( état fondamental ) d'un seul système physique désordonné (Kirkpatrick *et al.* 1983).

*Mécanique Statistique*

# Classe de problèmes d'OC $\equiv$ système désordonné



le "Boltzmann désordonné"



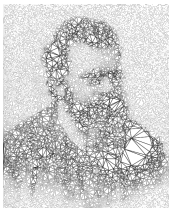
Physique: limite de température zéro ( état fondamental ) d'un seul système physique désordonné (Kirkpatrick *et al.* 1983).

*Optimisation Combinatoire*

*Mécanique Statistique*



# Classe de problèmes d'OC $\equiv$ système désordonné



le "Boltzmann désordonné"



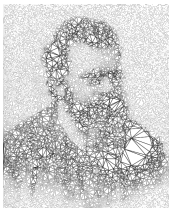
Physique: limite de température zéro ( état fondamental ) d'un seul système physique désordonné (Kirkpatrick *et al.* 1983).

*Optimisation Combinatoire*

*Mécanique Statistique*

► Solution optimale

# Classe de problèmes d'OC $\equiv$ système désordonné



le "Boltzmann désordonné"



Physique: limite de température zéro ( état fondamental ) d'un seul système physique désordonné (Kirkpatrick *et al.* 1983).

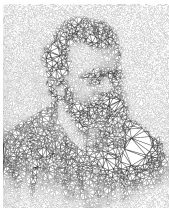
*Optimisation Combinatoire*

► Solution optimale

*Mécanique Statistique*

► État fondamental

# Classe de problèmes d'OC $\equiv$ système désordonné



le "Boltzmann désordonné"



Physique: limite de température zéro ( état fondamental ) d'un seul système physique désordonné (Kirkpatrick *et al.* 1983).

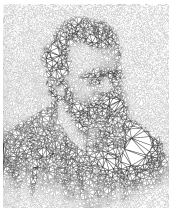
*Optimisation Combinatoire*

- ▶ Solution optimale
- ▶ Propriétés typiques de la solution optimale

*Mécanique Statistique*

- ▶ État fondamental

# Classe de problèmes d'OC $\equiv$ système désordonné



le "Boltzmann désordonné"



Physique: limite de température zéro ( état fondamental ) d'un seul système physique désordonné (Kirkpatrick *et al.* 1983).

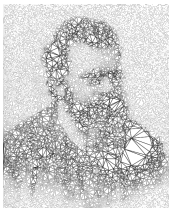
## *Optimisation Combinatoire*

- ▶ Solution optimale
- ▶ Propriétés typiques de la solution optimale

## *Mécanique Statistique*

- ▶ État fondamental
- ▶ Moyenne "quenched" sur le désordre

# Classe de problèmes d'OC $\equiv$ système désordonné



le "Boltzmann désordonné"



Physique: limite de température zéro ( état fondamental ) d'un seul système physique désordonné (Kirkpatrick *et al.* 1983).

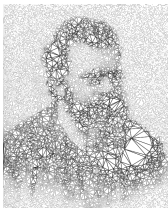
## *Optimisation Combinatoire*

- ▶ Solution optimale
- ▶ Propriétés typiques de la solution optimale
- ▶ Contraintes géométriques et topologiques

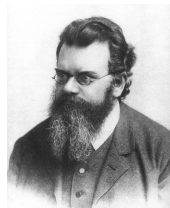
## *Mécanique Statistique*

- ▶ État fondamental
- ▶ Moyenne "quenched" sur le désordre

# Classe de problèmes d'OC $\equiv$ système désordonné



le "Boltzmann désordonné"



Physique: limite de température zéro ( état fondamental ) d'un seul système physique désordonné (Kirkpatrick *et al.* 1983).

## *Optimisation Combinatoire*

- ▶ Solution optimale
- ▶ Propriétés typiques de la solution optimale
- ▶ Contraintes géométriques et topologiques

## *Mécanique Statistique*

- ▶ État fondamental
- ▶ Moyenne "quenched" sur le désordre
- ▶ Frustration

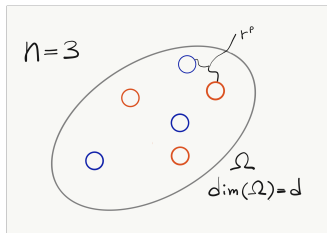
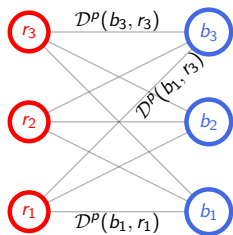
## Le problème d'assignation aléatoire (RAP)

Dans un problème d'assignation aléatoire la matrice des coûts  $c$  devient aléatoire. On s'intéresse aux propriétés statistiques de la v.a.  $\mathcal{H}_{\text{opt}}$  ( asymptotique de la valeur d'espérance mathématique pour grand  $n$ , loi de  $\mathcal{H}_{\text{opt}}$  ) dépendant du choix de l'ensemble.

Si les  $c_{ij}$  sont des v.a. (**i.i.d.**) on parle de “**problème d'assignation aléatoire (RAP)**”. Le RAP est un problème bien étudié en physique statistique (M.Mézard–G.Parisi, H.Orland), et rigoureusement en probabilités (D.Aldous, J.Wästlund, J.Salez).

Insatisfaisant en physique: il s'agit d'un modele de champ moyen. L'hypothèse que les  $c_{ij}$  soient i.i.d. empêche de modéliser des corrélations d'origine géométrique observés e.g. dans les spectres de vibration des verres ou dans l'hopping des electrons dans les semi-conducteurs amorphes (voir M.Mézard–G.Parisi–A.Zee 1999).

# Problème d'assignation aléatoire euclidienne (ERAP)



Choix du désordre: deux  $n$ -échantillons  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{R}$  ( i.e. sommets du graphe biparti complet ), dans une variété  $\Omega$  de dimension  $d$ . Cout d'une couple **bleu-rouge**:  $\mathcal{D}^p(b_i, r_j)$ , où  $\mathcal{D}$  est une distance et  $p \in \mathbb{R}$ .  
Principe d'universalité: tout autre détail de la fonction de coût serait éliminé dans la limite  $n \rightarrow \infty$ .

Motivation de la physique des systèmes critiques: invariance sous translations, rotations et transformation d'échelle.



# Problème d'assignation aléatoire euclidienne (ERAP)

Deux connections importantes:

- ▶ **Transport optimal** - C'est le problème de Monge-Kantorovitch entre les mesures empiriques  $\rho_B$  et  $\rho_R$  associées aux points bleues et rouges:

$$\mathcal{H}_{\text{opt}} = nW_p^p(\rho_B, \rho_R)$$

où  $W_p$  est la distance de  $p$ -Wasserstein (M.Ledoux, M.Talagrand, H.Brezis, L.Ambrosio)

- ▶ **Verres de spin** - C'est un modèle-jouet de verre de spin en dimension finie. Il modélise leurs propriétés essentielles (notamment la frustration en raison de l'inégalité triangulaire) tout en restant plus facile à traiter, par rapport e.g. au verre de spin de Edwards–Anderson (M.Mézard–G.Parisi 1988)

## Problème d'assignation aléatoire euclidienne: définition

Nous nous intéressons à l'asymptotique de l'espérance de l'énergie :

$$E_{p,d}(n) = \mathbb{E}_{n,p,d} [\mathcal{H}_{\text{opt}}] \stackrel{?}{=} K_{p,d} n^{\gamma_{p,d}} (\ln n)^{\gamma'_{p,d}} (1 + o(1))$$

quand  $n \rightarrow \infty$ , en fonction de  $d, p$  et du choix du désordre (loi de prob. associée aux points **bleu** et **rouges**).

On veut étudier  $(\gamma_{p,d}, \gamma'_{p,d})$  et on s'attend qu'ils soient **“universels”**, i.e. largement indépendants des détails microscopiques du problème (qui affectent la constante  $K_{p,d}$ )  
→ “diagramme de phase”

**Remarque:** les cas non uniformes sont plus subtils

Exemple: à  $d = 1$ ,  $p = 2$ , et désordre gaussien on a

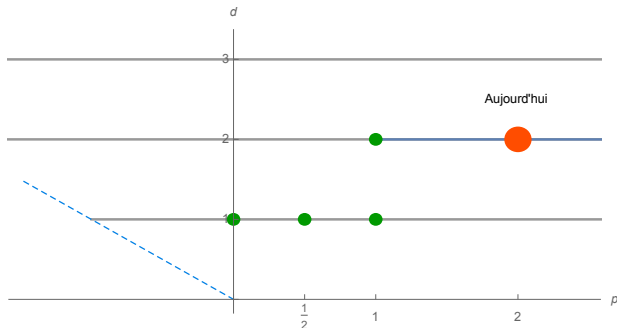
$$E_{2,1}(n) \sim 2 \ln \ln n \quad (\gamma_{2,1} = \gamma'_{2,1} = 0)$$

(Caracciolo–**D’Achille**–Sicuro 2019, Bobkov–Ledoux 2019 + Berthet–Fort 2020)

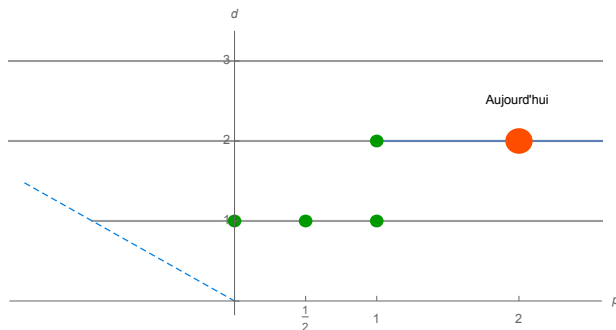
Voir aussi Benedetto–Caglioti 2020 pour le cas  $d = 2$  **non-uniforme**

# Diagramme de phase: état de l'art

Je resume ici quelques faits connus sur le diagramme de phase dans le cas de la mesure uniforme.



# Diagramme de phase: état de l'art



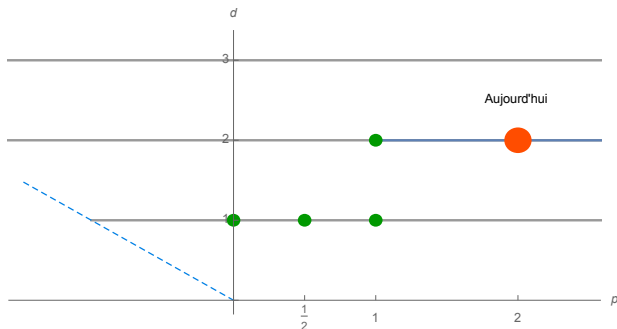
$d \geq 3$  “simple” ou sans “aucune géométrie” (Mézard–Parisi 1988)

$$E_{p,d}(n) \sim E_{\text{LB}}(n) = K_{p,d} n^{1-p/d}, \quad (\gamma_{p,d}, \gamma'_{p,d}) = (1 - \frac{p}{d}, 0)$$

Ici  $\exists! K_{p,d}$  voir e.g. Barthe–Bordenave 2013, Goldman–Trevisan 2020  
la détermination analytique de  $K_{p,d}$  reste une question ouverte.

---

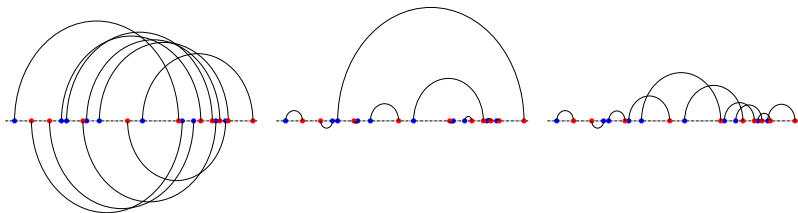
# Diagramme de phase: état de l'art



$d = 1$  “simple” (mais riche!) en raison de la structure mathématique de la solution (convexité/concavité, monotonie de la fonction coût)

## $d = 1$ : propriétés qualitatives de la solution

$p = 0$  et  $p = 1$  séparent trois régimes différents ( $n = 10$ ):



Une fois **bleus** et **rouges** triés dans l'ordre naturel  
optimalité  $\implies \pi_{\text{opt}}$  est:

$p < 0$  **cyclique**:  $\pi_{\text{opt}}(i) = i + k \pmod{n}$

(Caracciolo–D'Achille–Sicuro 2017)

$p \in (0, 1)$  **non-crossing**: pour  $AB, CD$  des intervalles dans  $\pi_{\text{opt}}$ , soit  
 $AB \subset CD$  ou  $AB \cap CD = \emptyset$  (McCann 1999)

$p > 1$  **triée**:  $\pi_{\text{opt}}$  est la permutation identique (convexité + stricte croissance);

Remarque: ces propriétés de  $\pi_{\text{opt}}$  sont vraies  $\forall$  instance

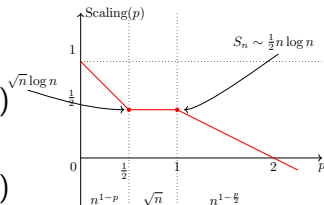
## Tranche du diagramme de phase à $d = 1$

Récemment on a introduit l'**appariement de Dyck** pour  $p \in (0, 1)$ , une configuration sous-optimale qui est déterminé par l'ordre des couleurs des points et est donc indépendant de leur espacement et de l'exposant  $p$ . Sur cette base on a la conjecture

$$(\gamma_{p,1}, \gamma'_{p,1}) = (\gamma_{p,1}^{\text{Dyck}}, \gamma'^{\text{Dyck}}_{p,1})$$

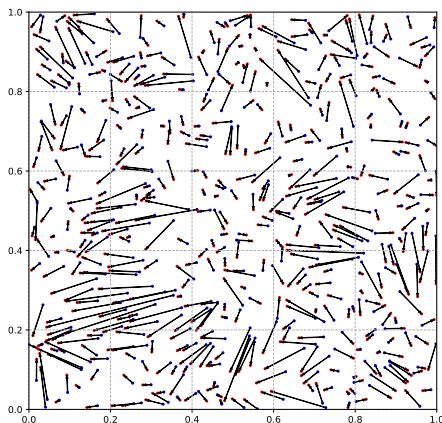
(voir Caracciolo–D'Achille–Erba–Sportiello 2020). Donc

$$(\gamma_{p,1}, \gamma'_{p,1}) = \begin{cases} (1 - \frac{p}{2}, 0) & p \geq 1 \\ (\frac{1}{2}, 0) & p \in (\frac{1}{2}, 1) \\ (\frac{1}{2}, 1) & p = \frac{1}{2} \\ (1 - p, 0) & p \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$



Remarque:  $K_{p,1}|_{p \geq 1} = \frac{\Gamma(1+p/2)}{p+1}$  mais  $K_{p,1}|_{p \in (0,1)}$  est inconnue.

## $d = 2$ : un problème “ancien”



$$(\gamma_{p,d}, \gamma'_{p,d}) = (\gamma_{LB}, \frac{p}{2}) \text{ à } p \geq 1 \text{ (Ajtai-Komlós-Tusnády 1984)}$$

Typiquement, l'assignation ne se réalise pas dans le voisinage euclidien d'un point, mais plutôt avec le  $\sim (\ln n)$ -ième voisin



## Quelques remarques sur le cas $(p, d) = (2, 2)$

$$E_{\Omega}(n) \sim K_{p,2} n^{1-\frac{p}{2}} (\ln n)^{\frac{p}{2}}$$

La constante  $K_{p,2}$  était inconnue pour toute valeur  $p$  et toute variété riemannienne bi-dimensionnelle  $\Omega$

Caracciolo–Lucibello–Parisi–Sicuro 2014 montrent par un calcul de QFT que si  $|\Omega| = 1$

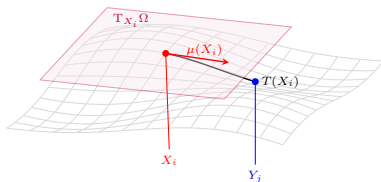
$$K_{2,2} = \frac{1}{2\pi}$$

Preuve de  $K_{2,2}$  en (Ambrosio–Stra–Trevisan 2019) avec méthodes EDP.

IDÉE:  $E_{\Omega}(n)$  est divergent. Si une telle divergence est universelle (i.e. elle ne dépend pas des détails locaux du problème), on peut calculer analytiquement la différence asymptotique  $E_{\Omega}(n) - E_{\Omega'}(n)$  entre deux variétés  $\Omega, \Omega'$  pour  $n \rightarrow \infty$

## ERAPs sur des variétés bidimensionnelles à $p = 2$

Approche : écrire une théorie des champs pour le cas  $p = 2$ .



Pour  $\Omega$  une variété riemannienne  $d$ -dimensionnelle, considérons le lagrangien

$$\mathcal{L}[\vec{\mu}, \phi] := \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{\mu}^2(x) \nu_{\mathcal{B}}(dx) + \int_{\Omega} [\phi(x + \vec{\mu}(x)) \nu_{\mathcal{B}}(x) - \phi(x) \nu_{\mathcal{R}}(dx)]$$

Energie Contrainte de transport

$\nu_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$  est la densité empirique des bleues (rouges) et  $\phi$  est un multiplicateur de Lagrange.

## ERAPs sur des variétés bidimensionnelles à $p = 2$

Puisque nous nous attendons à ce que  $|\vec{\mu}|$  soit “petite” quand  $n \rightarrow \infty$ , on effectue une expansion de Taylor dans le “petit paramètre”  $\epsilon = |\nabla \cdot \vec{\mu}(x)|$ . On obtient le lagrangien linearisé

$$\mathcal{L}_{\text{lin}}[\vec{\mu}, \phi] := \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \vec{\mu}^2(x) + \vec{\mu}(x) \cdot \nabla \phi(x) \right] dx + \int_{\Omega} \delta \nu(x) \phi(x) dx$$

dont les equations d'Euler-Lagrange à l'ordre dominant en  $\epsilon$  donne l'equation de Poisson pour  $\phi$  avec source  $\delta \nu := \nu_B - \nu_R$

$$\Delta_{\Omega} \phi(x) = \delta \nu(x), \quad -\Delta_{\Omega} = \text{op. de Laplace - Beltrami on } \Omega$$

à résoudre avec conditions au bord de Neumann sur  $\Omega$  (si  $\partial \Omega \neq \emptyset$ ). Puis  $\vec{\mu} = -\nabla \phi$  et  $E_{\Omega} = \int_{\Omega} |\vec{\mu}|^2$ . D'après Caracciolo–Lucibello–Parisi–Sicuro 2014, l'énergie peut s'ecrire

$$E_{\Omega}(n) = -2 \text{Tr } \Delta_{\Omega}^{-1}$$

qui est une expression **mal définie** !!  $\implies$  Regularisations

# Approche CLPS2014 et universalité des différences d'énergie

D'après Caracciolo–Lucibello–Parisi–Sicuro 2014

$$E_{\Omega}(n) = -2 \operatorname{Tr} \Delta_{\Omega}^{-1} \simeq 2 \sum_{\lambda \in \Lambda(\Omega)} \frac{F\left(\frac{\lambda}{n^{2/d}}\right)}{\lambda}$$

où  $F$  est une fonction de cutoff t.q.  $F(0) = 1$  et  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$  et qui est **indépendante de**  $\Omega$  (mais dépend du type de problème entre Poisson-Poisson et Grid-Poisson).

# Approche CLPS2014 et universalité des différences d'énergie

Rappelons la

Loi de Weyl pour c.b. de Neumann (Ivrii 1980)

Soit  $\Omega$  une variété  $d$ -dimensionnelle. Soit  $\Lambda(\Omega)$  le spectre de  $-\Delta_\Omega$  avec c.b. de Neumann si  $\partial\Omega \neq \emptyset$  et sans  $\lambda = 0$ . Soit  $\mathcal{N}_\Omega(\lambda)$  le nombre de valeurs propres  $\leq \lambda$ . Alors

$$\mathcal{N}_\Omega(\lambda) = \frac{B_d}{2\pi^d} |\Omega| \lambda^{\frac{d}{2}} + \frac{B_{d-1}}{4(2\pi)^{d-1}} |\partial\Omega| \lambda^{\frac{d-1}{2}} + o(\lambda^{\frac{d-1}{2}})$$

pour  $B_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$  le volume de la  $d$ -boule standard.

# Approche CLPS2014 et universalité des différences d'énergie

On peut s'affranchir de  $F$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (E_{\Omega}(n) - E_{\Omega'}(n)) &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\lambda \in \Lambda(\Omega)} \frac{F\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\lambda} - \sum_{\lambda \in \Lambda(\Omega')} \frac{F\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\lambda} \right) \\&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} F\left(\frac{\lambda}{n}\right) \frac{d(\mathcal{N}_{\Omega}(\lambda) - \mathcal{N}_{\Omega'}(\lambda))}{\lambda} \\&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} d\lambda \left( \frac{F\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\lambda^2} - \frac{F'\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{n\lambda} \right) (\mathcal{N}_{\Omega}(\lambda) - \mathcal{N}_{\Omega'}(\lambda)) \\&= 2 \int_{0+}^{\infty} \frac{d(\mathcal{N}_{\Omega}(\lambda) - \mathcal{N}_{\Omega'}(\lambda))}{\lambda}\end{aligned}$$

car  $(\mathcal{N}_{\Omega}(\lambda) - \mathcal{N}_{\Omega'}(\lambda)) = O(\sqrt{\lambda} \ln \lambda)$  (et proche de zéro l'intégrale est régularisée par le trou spectral).

# Les différences d'énergies asymptotiques ne dépendent pas de la régularisation

**Résultat principal:** malgré le fait que la théorie de champs soit mal définie ( $E_\Omega(n)$  n'est pas fini), il est possible de donner un sens expérimental précis (et prédictif), quand  $n \rightarrow \infty$ , aux différences d'énergie asymptotique  $E_\Omega(n) - E_{\Omega'}(n)$  entre deux domaines  $\Omega, \Omega'$  par une procédure de **régularisation**.

Ici je discuterai :

- ▶  $R_\Omega$  ou “**masse de Robin**”  $\sim$  calcul d'intégrales de la diagonale de la fonction de Green pour l'eq. de Poisson;
- ▶  $K_\Omega$  ou “**masse de Kronecker**”  $\sim$  calcul de limites, i.e. expansion de la fonction  $Z_\Omega(s)$  spectrale associée à  $-\Delta_\Omega$  autour de son pôle simple à  $s = 1$ .

Remarque: d'autres régularisations sont possibles.

## Regularisation 1 : masse de Robin

Analogue au problème de l'**auto-énergie** en électrostatique.  
Il est bien connu (Okikiolu 2008-2009) que

$$G_{\Omega}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln d(x, y) + m(y) + \mathcal{O}(|x - y|)$$

Si  $B_{\delta}(x)$  est la boule de rayon  $0 < \delta \ll 1$  centrée en  $x$ , et

$$C_{\delta}(x) = 2 \int_{\Omega \setminus B_{\delta}(x)} |\nabla G_{\Omega}(z, x)|^2 dz$$

alors l'énergie peut s'écrire

$$E_{\Omega, \delta} = \int_{\Omega} C_{\delta}(x) dx = -\frac{\ln \delta}{\pi} + 2 \int_{\Omega} m(x) dx + O(\delta)$$

où la constante

$$R_{\Omega} = \int_{\Omega} m(x) dx$$

est la **masse de Robin**.



## Regularisation 2 : masse de Kronecker

C'est la méthode de **régularisation zêta** en théorie quantique de champs.

Prenons la fonction génératrice (ou fonction zêta spectrale)

$$Z_{\Omega}(s) := \sum_{\lambda \in \Lambda(\Omega)} \frac{1}{\lambda^s} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{s-1} + K_{\Omega} + O(s-1)$$

où on appelle la constante  $K_{\Omega}$  la **masse de Kronecker** d'après la première formule limite de Kronecker. Nous affirmons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_{\Omega}(n) - E_{\Omega'}(n)) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (Z_{\Omega}(s) - Z_{\Omega'}(s)) = 2(K_{\Omega} - K_{\Omega'})$$

Nota bene : en raison d'un résultat par C.Morpurgo 2002,  $\forall \Omega$ ,

$$R_{\Omega} - K_{\Omega} = \frac{\ln 2}{2\pi} - \frac{\gamma_E}{2\pi} = 0.0184511 \dots$$

# Différences d'énergie asymptotique : résultat principal

En conclusion, on propose la

**Conjecture** (BCCDSS 2020).

Pour  $\Omega, \Omega'$  deux variétés bidimensionnelles d'aire unitaire,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [E_{\Omega}(n) - E_{\Omega'}(n)] = 2(R_{\Omega} - R_{\Omega'}) = 2(K_{\Omega} - K_{\Omega'})$$

La disponibilité des méthodes de calcul intégral (masse de Robin) et de calcul de limites (masse de Kronecker) ouvre la porte à une vérification “expérimentale” de cette conjecture par comparaison avec des expériences numériques.

Nous avons testé cette conjecture dans un certain nombre de cas simples.

# ERAPs sur des variétés bidimensionnelles à $p = 2$

Exemple:  $\Omega$  obtenue en collant les cotés d'un polygone fondamental rectangulaire de rapport largeur/longueur  $\rho$

$\implies$  expression analytique pour :

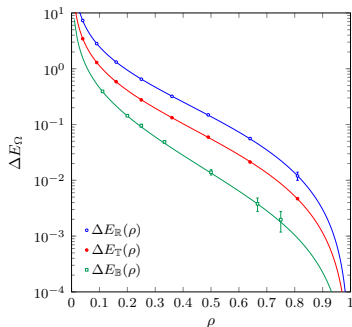
$$\Delta E_{\Omega}(\rho) = 2(R_{\Omega}(\rho) - R_{\Omega'}(1)) = 2(K_{\Omega}(\rho) - K_{\Omega'}(1))$$

pour c.b. ouverte-ouverte ("rectangle"  $\mathbb{R}$ ), périodique-périodique ("2-torus"  $\mathbb{T}$ ), antipériodique-antipériodique ("surface de Boy"  $\mathbb{B}$ ). [ $\eta$  = fonction de Dedekind]

$$K_{\mathbb{R}}(\rho) = \frac{\gamma_E}{2\pi} - \frac{\ln(4\pi^2\rho|\eta(i\rho)|^4)}{4\pi} + \frac{1}{2\pi^2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \zeta(2)$$

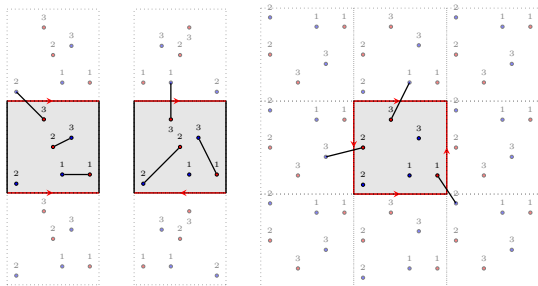
$$K_{\mathbb{T}}(i\rho) = \frac{\gamma_E - \ln(4\pi\sqrt{\rho})}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln |\eta(i\rho)|$$

$$K_{\mathbb{B}}(\rho) = \frac{\gamma_E}{2\pi} - \frac{\ln(4\pi^2\rho)}{4\pi} - \frac{\ln \eta(i\rho)}{\pi} - \frac{1}{4\pi^2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \zeta(2)$$



# ERAPs sur des variétés bidimensionnelles à $p = 2$

... ou “c.b.” mixtes : “Cylinder”  $\mathbb{C}$ , “Möebius strip”  $\mathbb{M}$  et “Klein bottle”  $\mathbb{K}$



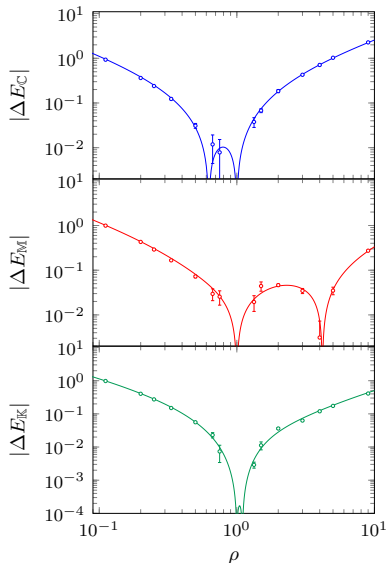
# ERAPs sur des variétés bidimensionnelles à $p = 2$

$$|\Delta E_{\Omega}| = |K_{\Omega}(\rho) - K_{\Omega}(1)|$$

$$K_{\mathbb{C}}(\rho) = \frac{\gamma_{\mathbb{E}}}{2\pi} - \frac{\ln(16\pi^2\rho)}{4\pi} - \frac{1}{\pi} \log \eta(2i\rho) + \frac{\zeta(2)}{4\pi^2\rho}$$

$$K_{\mathbb{M}}(\rho) = \frac{\gamma_{\mathbb{E}}}{2\pi} - \frac{\ln(4\pi^2\rho)}{4\pi} - \frac{1}{\pi} \log \frac{\eta^3(i\rho)}{\eta(i2\rho)\eta(i\frac{\rho}{2})} + \frac{\zeta(2)}{4\pi^2\rho}$$

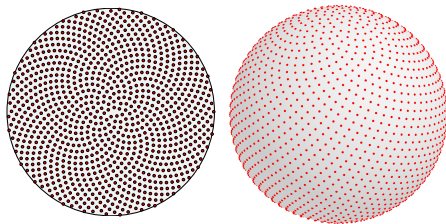
$$K_{\mathbb{K}}(\rho) = \frac{\gamma_{\mathbb{E}}}{2\pi} - \frac{\ln(4\pi^2\rho)}{4\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \eta\left(i\frac{\rho}{2}\right) - \frac{\zeta(2)}{2\pi^2\rho}$$



## ERAPs sur des variétés bidimensionnelles à $p = 2$

Des résultats analogues valent pour la 2-sphère, la sphère projective, le disque unitaire ... Jusqu'à ici: Poisson-Poisson. Mais aussi pour "**Grid-Poisson**" : fixons e.g. le bleu sur un réseaux (rectangulaire, triangulaire...)

Réseau de Fibonacci :  
(Saff–Kuijlaars 1997)



En conclusion, pour  $G \in \{\text{Square}, \text{Tri}, \text{Fibo}\}$  **on conjecture** :

$$E_{\Omega}^{\text{GP}}(n) = \frac{1}{4\pi} \ln n + c_{*}^{\text{GP}}(n) + K_{\Omega} + o(1)$$

et pour Poisson-Poisson

$$E_{\Omega}^{\text{PP}}(n) = \frac{1}{2\pi} \ln n + 2c_{*}^{\text{PP}}(n) + 2K_{\Omega} + o(1)$$

## ERAPs sur des variétés bidimensionnelles à $p = 2$

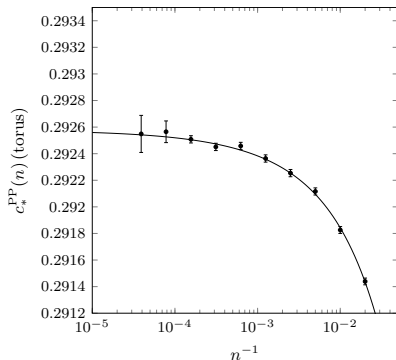
En ce qui concerne les parties inconnues universelles  $c_*(n)$ , nos expériences numériques suggèrent qu'elles pourraient bien être des constantes en  $n$

$$c_*^{\text{PP}}(n) = 0.29258(2)$$

$$c_*^{\text{SP}}(n) = 0.4156(5)$$

$$c_*^{\text{TP}}(n) = 0.413(2)$$

Remarque: pour les réseaux,  $10^{-3}$  peut également être l'échelle des "vraies" différences (régularisations)



## ERAPs sur des variétés bidimensionnelles à $p = 2$

La quantité  $c_*^{\bullet P}(n)$  montre une faible dépendance de  $n$  (ou aucune dépendance du tout) : [Ambrosio-Glaudo 2019] ont récemment prouvé que

$$c_*^{UP}(n) = O(\sqrt{\ln n \ln \ln n}).$$

En particulier, quelles sont les propriétés (et éventuellement la valeur exacte, si elles sont constantes) de  $c_*^{\bullet P}(n)$  est **une question ouverte**.



# Conclusions

Dans cet exposé on a discuté l'ERAP à  $(p, d) = (2, 2)$  sur des variétés riemanniennes  $\Omega$ , où  $E_\Omega(n) \sim \log n$ . Dans le cadre de l'approche de **théorie de champs** proposé par CLPS 2014, nous avons proposé la **conjecture** que la première correction à la série asymp. de  $E_\Omega(n)$  dépendante de  $\Omega$  est sur **le terme constant en  $n$** .

Une consequence est que la différence d'énergie entre deux variétés  $\Omega$  et  $\Omega'$  est indépendante de la régularisation adoptée et peut être calculé explicitement par différentes méthodes, un résultat totalement inattendu !

# Conclusions

Ces previsions ont été vérifiées par des simulations numériques approfondies sur de nombreuses variétés.

- ▶ **Prouver** cette conjecture !
- ▶ On peut déduire des **relations distributionnelles** entre les énergies de différents problèmes
- ▶ **Au-delà de la linéarisation** : étudier la premier **correction non-linéaire** à la théorie des champs
- ▶ Les méthodes numériques pourraient être utiles pour étudier les propriétés spectrales de  $-\Delta_\Omega$  lorsque le spectre et la fonction de Green ne sont pas accessibles (e.g. surfaces de genre  $\geq 2$ )

## Perspective 1: symétries dans les spectres de certaines matrices aléatoires associées à l'ERAP

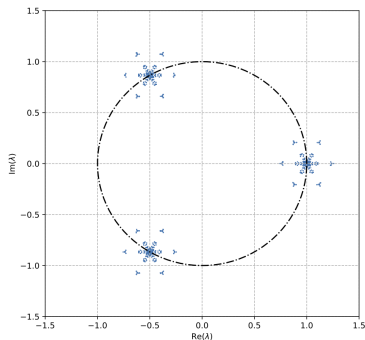
1. Pour un PA quelconque, on peut montrer qu'une permutation  $\pi$  est optimale pour la matrice de cout  $c_n \iff$  existe la "**jauge hongroise**", i.e.  $u = (u_1, \dots, u_n)$  et  $v = (v_1, \dots, v_n)$  t.q.  $(c^H)_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$  est positive et  $c_{i\pi(i)}^H = 0 \ \forall i$  (on a  $\mathcal{H}_{\text{opt}}(c) = \sum_i (u_i + v_i)$ )
2. Une matrice  $n \times n$   $M_n^{(N)}$  dans l'ensemble cyclotomique  $\mathcal{C}_N(n)$  a des entrées i.i. unif. d. sur les  $N$  racines complexes de l'unité, i.e. avec d.d.p.

$$\rho_{w_N^k}(w) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta \left( w - e^{2\pi i \frac{k}{N}} \right)$$

# Perspective 1: symétries dans les spectres de certaines matrices aléatoires associées à l'ERAP

Soit  $H_n(\beta) = e^{-\beta c^H}$ , où  $c$  est dans la “jauge hongroise” et prenons le spectre du produit de Hadamard  $\sigma(H_n(\beta)M_n^{(N)})$ . De manière assez générale, pour  $\beta$  et  $n$  grands on observe que  $\sigma$  semble se concentrer sur des **régions non triviales du plan complexe**.

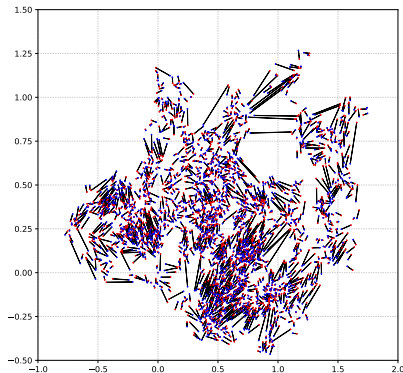
Exemple à  $N = 3$  sur  $\mathbb{T}^2$  (PP)  
( $n = 100$ ,  $\beta = 10^3$ ,  $10^3$  réalisations):



## Perspective 1: spectres de certaines matrices aléatoires associées à l'ERAP

## Perspective 2: ERAPs sur la boucle brownienne

À  $(p, d) = (1, 2)$  on peut montrer que la solution optimale est non-crossing: les arêtes ne se croisent pas ( inégalité triangulaire )  
Soient  $\mathcal{B}$  i.i.d. sur la boucle brownienne à  $d = 2$ . Est-ce que  $(\gamma, \gamma')$  sont determines par la “masse” ou par le comportement anormal autour des temps de coupure ?



MERCI DE VOTRE ATTENTION !

