

DIPARTIMENTO INTERATENEO DI FISICA "MICHELANGELO MERLIN" CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

ELABORATO PER LA PROVA FINALE

LA CONSERVAZIONE DELLA PARITA'

Laureando:

Matteo De Tullio

Anno Accademico 2018-2019

1 – Introduzione: la parità in fisica classica

Per poter introdurre la questione della conservazione della parità occorre prima avere a disposizione una breve panoramica sui concetti base e sulle proprietà che la caratterizzano, in particolar modo a partire dalla sua definizione nell'ambito della fisica classica.

Consideriamo una trasformazione lineare generica tridimensionale, quale quella data dalla matrice definita come segue:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

L'operazione di parità potrà essere vista come un caso particolare della (1), nella quale $A_{ii} = -1$ (i = 1,2,3) ed $A_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Pertanto essa sarà lineare e potrà essere rappresentata in questo contesto dalla matrice:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(2)

Classicamente, quindi, l'operazione di parità corrisponde ad una *inversione delle coordinate canoniche* di un punto materiale nello spazio tridimensionale rispetto all'origine del sistema di riferimento considerato. Si avranno allora sostituzioni del tipo:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = X' \tag{3}$$

per quanto riguarda le tre coordinate spaziali,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}' \tag{4}$$

per le componenti della quantità di moto.

Sulla base di tale analisi, si deduce facilmente che le equazioni del moto risultano parità-invarianti (in generale invarianti per trasformazioni lineari del sistema di riferimento). Un esempio viene proprio fornito dalla legge di Newton, la quale soddisfa questa proprietà nel momento in cui vi applichiamo la (2):

$$m\ddot{X}(t) = F(t) \tag{4}$$

Applicando P ad ambo i membri si definiscono

$$\ddot{X}'(t) = \mathbb{P}\ddot{X}(t) \tag{5}$$

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbb{P}\mathbf{F}(t) \tag{6}$$

Pertanto si vede immediatamente che

$$m\ddot{X}'(t) = F'(t) \tag{7}$$

Questo conclusione è intuitiva, in quanto due sistemi gemelli che evolvano rispettivamente dalle condizioni iniziali $(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0)$ e $(-\boldsymbol{r}_0,-\boldsymbol{v}_0)$ descrivono traiettorie che per ogni istante si mantengono speculari e non sovrapponibili.

In altre parole, si può quindi affermare che in fisica classica l'invarianza per trasformazioni di parità implica l'impossibilità nel definire la destra e la sinistra univocamente: infatti in caso di violazione della invarianza da parte di un fenomeno si potrebbero definire destra e sinistra in base al modo particolare di evoluzione del sistema in ciascuna "direzione".

Concludiamo l'introduzione ricordando l'importante risultato del *teorema di Noether* ^[1]: le proprietà invarianti di un sistema rispetto all'azione di un gruppo (con uno o più parametri) vengono dette simmetrie. In un sistema Lagrangiano, a tali simmetrie corrispondono leggi di conservazione, che sono integrali primi del moto del sistema. Nel caso in esame ciò si traduce nel fatto che *se un sistema è invariante per trasformazioni di parità, allora la parità sarà la quantità fisica conservata in tale sistema*.

Poiché la parità è *sempre* conservata in fisica classica (meccanica ed elettromagnetismo) allora certamente non le si può associare un significato fisico profondo, come invece lo assumerà in altri contesti.

particolare ad uno stato è un fatto di pura convenzione. Ciò che ha senso è, infatti, il *confronto* tra due stati.

 ¹ Infatti la parità può assumere solamente due valori,
 +1 e -1 (destra e sinistra) e assegnarne uno in

2 – La parità in fisica quantistica

In ambito quantistico un sistema di N particelle viene descritto mediante una funzione d'onda, sia essa $\psi(\mathbf{r}, t)$, con $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ posizioni delle N particelle nello spazio. Si definisce allora *l'operatore di parità* $\widehat{\mathbb{P}}$ tale che, applicato alla funzione d'onda, la trasformi come segue:

$$\widehat{\mathbb{P}}\psi(\mathbf{r},t) = \psi(-\mathbf{r},t) \tag{8}$$

E' possibile dimostrare che $\widehat{\mathbb{P}}$ è un operatore hermitiano. Inoltre, se applicato due volte consecutivamente a una funzione d'onda, esso fornisce la funzione d'onda iniziale, ovvero

$$\widehat{\mathbb{P}}^2 = \mathbb{I} \tag{9}$$

con \mathbb{I} operatore di identità². Oltre a ciò, dal momento che $\widehat{\mathbb{P}}$ è soluzione dell'equazione algebrica (9), i suoi autovalori \mathbb{P} soddisferanno la stessa equazione: $\mathbb{P}^2 = 1$, e sono quindi dati da

$$\mathbb{P} = \pm 1 \tag{10}$$

Le autofunzioni corrispondenti a questi due possibili autovalori soddisfano la relazione

$$\widehat{\mathbb{P}}\psi(\mathbf{r},t) = \mathbb{P}\psi(\mathbf{r},t) \tag{11}$$

saranno a parità spaziale definita e si dicono rispettivamente *pari* se

$$\psi_p(-\mathbf{r},\mathsf{t}) = \psi_p(\mathbf{r},\mathsf{t}) \tag{12}$$

e corrispondono all'autovalore $\mathbb{P}=+1$. Invece si dicono *dispari* se

$$\psi_d(-\mathbf{r}, \mathbf{t}) = -\psi_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \tag{13}$$

e corrispondono all'autovalore $\mathbb{P} = -1$.

La trasformazione unitaria di parità agisce anche sugli operatori 3 . Sia A un operatore generico, avremo la seguente trasformazione

$$A \to A^{\widehat{\mathbb{P}}} = \widehat{\mathbb{P}} A \widehat{\mathbb{P}} \tag{14}$$

È utile allora classificare le varie grandezze fisiche in base al modo in cui si trasformano sotto operazione di parità. Si distinguono:

- *Vettori polari* (o *vettori veri*) operatori vettoriali che si invertono di segno per parità. Esempi di essi saranno sena dubbio gli operatori posizione **R** e impulso⁴ **P**.
- Vettori assiali (o pseudovettori) sono
 operatori vettoriali invarianti per parità. Lo
 sono in genere i prodotti vettoriali fra
 vettori polari, quali ad esempio gli
 operatori di momento angolare orbitale L e
 di spin S.
- Scalari veri sono operatori scalari invarianti per riflessioni spaziali. Generalmente il prodotto scalare fra vettori polari o fra vettori assiali è uno scalare vero.
- Pseudoscalari sono operatori scalari che invertono il proprio segno per parità. In generale il prodotto scalare tra un vettore polare e uno assiale è uno pseudoscalare.

2.1 – Conservazione della parità in meccanica quantistica

^[2] In fisica classica si parla di conservazione di una data variabile dinamica A(q, p, t) se essa risulta costante. Nel formalismo quantistico questo tipo di definizione non ha significato, in quanto le variabili sono descritte da operatori. Diremo allora che una osservabile è conservata se il suo valor medio in un qualsiasi stato risulta costante nel tempo.

La condizione *necessaria* e *sufficiente* affinché ciò avvenga è che l'operatore corrispondente alla grandezza fisica considerata commuti con l'Hamiltoniano H del sistema, posto che entrambi

² Tramite questa proprietà si può dimostrare anche che esso è un operatore unitario: $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P} = \mathbb{P}^{\dagger}$. Da ciò segue immediatamente che $\mathbb{PP}^{\dagger} = 1$, ovvero la definizione di unitarietà.

³ Essi sostituiscono, in meccanica quantistica, le grandezze fisiche, vettoriali o scalari.

⁴ **P** è vettore polare perché proporzionale al gradiente fatto rispetto a un vettore polare: $\vec{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$

non dipendano esplicitamente dal tempo. Nel caso della parità, essa si conserva se

$$[\widehat{\mathbb{P}}, H] = 0 \tag{15}$$

In particolare la (15) implica che l'Hamiltoniano sia invariante per trasformazioni di parità. Considerando infatti la (14) applicata ad H

$$H \to H^{\widehat{\mathbb{P}}} = \widehat{\mathbb{P}} H \widehat{\mathbb{P}} \tag{16}$$

insieme alla (9) si ottiene l'invarianza

$$H^{\widehat{\mathbb{P}}} = H \tag{17}$$

Nei casi di maggior rilievo l'Hamiltoniano assume una forma del tipo⁵

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \tag{18}$$

Ovvero somma di un termine cinetico ed uno di energia potenziale dipendente solo dalla posizione **r**.

2.2 – Parità orbitale e intrinseca

2.2.1 – Parità orbitale

In molte delle situazioni che possono essere trattate, ad esempio quelle in cui siamo in presenza di un potenziale centrale, è possibile fattorizzare la funzione d'onda di un sistema in vari termini. Nel caso di autofunzioni comuni ai tre operatori commutativi \mathbf{H} , \mathbf{L}^2 ed \mathbf{L}_Z , ritroviamo la forma

$$\psi(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})Y_{l}^{m}(\theta, \phi) \tag{19}$$

dove $R(\mathbf{r})$ è detta funzione d'onda radiale e $Y_l^m(\theta,\phi)$ armonica sferica⁶. Queste ultime hanno la forma

$$Y_l^m(\theta, \phi) = C(l, m) P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$
 (20)

dove

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^{|m|}\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|m|} P_l(\cos\theta) \quad (21)$$

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^l \left[(\cos^2\theta - 1)^l \right]$$
 (22)

con l ed m numeri quantici del momento angolare (azimutale e magnetico) e C(l,m) costante di normalizzazione⁷ da essi dipendente.

In figura 1 si nota che effettuare la trasformazione di parità $r \rightarrow -r$ in coordinate sferiche comporta le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases}
 r \to r \\
 \theta \to \pi - \theta \\
 \phi \to \pi + \phi
\end{cases}$$
(23)

Applicando⁸ le (23) alle armoniche sferiche (20) dopo un certo numero di passaggi si trova che

$$\widehat{\mathbb{P}}Y_l^m(\theta,\phi) = Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta,\phi) \qquad (24)$$

^[2]Quindi un autostato di L^2 relativo all'autovalore $\hbar^2 l(l+1)$ ha parità definita da

$$\mathbb{P} = (-1)^l \tag{25}$$

Tale autovalore corrispondente alle armoniche sferiche prende il nome di *parità orbitale*, \mathbb{P}_{orb} .

Essa non è tuttavia definita per una particella libera di impulso p fissato, in quanto essa si può esprimere come sviluppo in serie di infinite armoniche sferiche: tutti i valori di l tra 0 e $+\infty$ sono presenti e la parità orbitale non può essere definita.

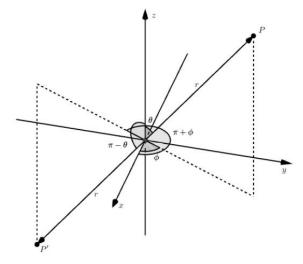


Figura 1: Rappresentazione in coordinate sferiche dell'operazione di parità.

⁵ Il termine cinetico è uno scalare vero (paritàinvariante). Pertanto se il potenziale è invariante per parità allora lo è tutto l'Hamiltoniano e la parità è conservata.

⁶ Autofunzione del momento angolare orbitale.

⁷ Si impone una condizione di normalizzazione per le armoniche sferiche.

⁸ Nelle (21) e (22) ci si ricordi che $cos(\pi-\theta) = -cos \theta$ (quindi i termini che lo contengono portano un (-1)^m oppure un (-1)^l dopo la trasformazione di parità), $sin(\pi-\theta) = sin \theta$ e che $e^{im(\pi+\phi)} = (-1)^m e^{im\phi}$.

2.2.2 – Parità intrinseca

La *parità intrinseca* \mathbb{P}_{int} di una particella è definita come l'autovalore della parità relativo alla funzione d'onda della particella nel sistema di riferimento in cui essa è a riposo, dunque è indipendente dallo stato di momento angolare di quest'ultima. Inoltre la funzione d'onda associata alla particella è uno scalare se essa possiede spin nullo, altrimenti è un vettore o uno pseudovettore se essa è dotata di spin⁹.

In generale non si parla di parità intrinseca assoluta per una particella isolata¹⁰, in quanto la funzione d'onda ad essa associata è sempre definita a meno di una fase arbitraria non misurabile che può portare a variazioni di segno.

Ogni particella ha quindi una parità intrinseca associata determinabile sperimentalmente studiando le interazioni con altre particelle, ma soltanto se essa manca in uno dei due stati, inziale o finale, di un'interazione. Condizione necessaria sarà, quindi, che *la parità totale sia conservata* nell'interazione in esame.

2.2.2.1 – Assorbimento di Pioni Negativi in Deuterio: parità del $\,\pi^-$

 $^{[3]}$ L'esperimento condotto da W. Chinowsky e J. Steinberger nel 1954 per stabilire la parità intrinseca del pione negativo π^- fu infatti eseguito assumendo valido il principio di conservazione della parità. Fu studiata la reazione

$$\pi^- + D \to n + n. \tag{26}$$

Un fascio di π^- viene inviato su un target di deuterio liquido D alla temperatura di circa 22 °K. A causa dell'elevata densità del fluido il pione perde molta energia in esso¹¹. Quando il pione è prossimo allo stato di riposo c'è una buona probabilità che il pione si scontri contro gli atomi del bersaglio,

Figura 2: Geometria sperimentale utilizzata per misurare il rate di coincidenze n-n in funzione dell'angolo θ tra i rivelatori di neutroni.

andando a sostituire l'elettrone del deuterio e cominciando ad orbitare attorno al nucleo. Data la massa molto maggiore rispetto a quella dell'elettrone, il raggio dell'orbita sarà minore. Un sistema del genere è detto *atomo mesico*, essendo il pione un mesone.

Inizialmente l'atomo mesico si trova in uno stato eccitato con n ed l alti per poi decadere verso stati di energia minore. Si osserva tramite le righe di transizione che esso raggiunge lo stato n=7 ed l=0, dopodiché il pione decade in due neutroni. Il valore n=7 coincide con la sovrapposizione della funzione d'onda del pione con quella del nucleo di deuterio. Questa condizione innesca fenomeni di interazione forte, allora completamente ignoti agli sperimentatori l=12, che promuovono il decadimento della particella.

POLYETHYLENE ABSORBER

I" CARBON

COUNTER #4

COUNTER #5

⁹ Ad esempio la parità intrinseca sarà positiva se si ha a che fare con uno scalare, negativa in caso di pseudoscalare. Per una particella di spin 1 la parità sarà +1 o -1 a seconda che la sua funzione d'onda sia uno pseudovettore o un vettore vero.

 $^{^{10}}$ Solo nel caso del fotone y o di particelle che decadono in fotoni si può parlare di parità assoluta. Infatti il fotone, essendo puro campo elettromagnetico, può essere descritto dal potenziale vettore \boldsymbol{A} , il quale è un vettore vero. Poiché la funzione d'onda deve comportarsi da tale, si deduce che $P_{int}^{\gamma} = -1$.

¹¹ Ciò si può dedurre da una analisi della *curva di Bethe-Bloch*.

 $^{^{12}}$ Chinowsky e Steinberger conoscevano però lo spin delle particelle in gioco: 0 per il π^- ,che viene assorbito in onda S (I=0), 1 per il D (che è in uno stato di tripletto in onda S o D), $^1/_2$ per il n, e tramite la spettroscopia atomica hanno osservato che I=0 è lo stato che corrisponde al decadimento del pione.

Il momento angolare totale dello stato iniziale è dato da

$$J_{TOT}^{i} = l_{TOT}^{i} + s_{TOT}^{i} = 1 (27)$$

e tale valore dovrà conservarsi in seguito al decadimento. La parità dello stato iniziale è 1. Nello stato finale sappiamo lo spin s_{TOT}^f ma non conosciamo l_{TOT}^f . Sappiamo che lo stato finale è costituito da due particelle identiche a spin $\frac{1}{2}$, quindi la funzione d'onda (fattorizzata in funzione d'onda orbitale, di spin e di isospin dev'essere completamente antisimmetrica per scambio delle due particelle. Ci chiediamo cosa accada per lo scambio delle due particelle. I due neutroni sono in viaggio lungo la stessa direzione e con verso opposto, posizionati simmetricamente rispetto al punto in cui si trovava il pione. Scambiare i due neutroni è equivalente ad applicare l'operatore di parità.

Essendo un sistema di particelle identiche, scambiarle ha effetti diversi sulla funzione di spin a seconda che ci si trovi in uno stato di singoletto o di tripletto. Infatti nel singoletto la funzione sarà antisimmetrica per scambio mentre nel tripletto sarà simmetrica. Stando a queste considerazioni si vede che lo stato finale con stesso momento angolare deve avere parità orbitale -1. Se la parità è conservata allora si trova che anche lo stato iniziale deve avere parità -1. In conclusione si trova che

$$\mathbb{P}_{int}^{\pi^{-}} = -1 \tag{28}$$

e si dice che il π^- ha parità intrinseca negativa rispetto al nucleone¹⁴.

La reazione (26) è stata osservata rivelando i due neutroni in coincidenza. In particolare, per testare l'identificazione degli eventi osservati, è stato misurato il rate di coincidenza in funzione dell'angolo θ (figura 3) sotteso dai due rivelatori di neutroni sul bersaglio, visibile in figura 3 nello schizzo dell'apparato sperimentale.

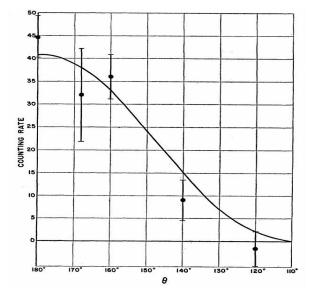


Figura 3: Conteggio rate di coincidenze calcolato e osservato in funzione dell'angolo θ sotteso dai due rivelatori di neutroni sul target.

2.2.2.2 – Ultime considerazioni sulla parità intrinseca

La parità intrinseca per una particella è sempre la stessa, indipendentemente dalla reazione considerata per valutarla. ^[4]In analogia al segno della carica elettrica, la parità intrinseca di una particella è ben definita solo relativamente al resto del sistema con cui questa interagisce. In conclusione, se la particella si trova in uno stato di momento angolare *l* definito, la parità di tale stato è data da¹⁵

$$\mathbb{P}_{TOT} = \mathbb{P}_{orb} \cdot \mathbb{P}_{int} = (-1)^l \mathbb{P}_{int} \tag{29}$$

In generale, per un sistema costituito da più particelle, si definisce la parità totale come il prodotto delle parità intrinseche di ciascuna particella moltiplicato per l'eventuale parità orbitale. Da ciò deriva che si può misurare la parità intrinseca solo se le particelle nello stato iniziale sono diverse da quelle nello stato finale.

 $^{^{13}}$ La parte di isospin è simmetrica rispetto allo scambio delle due particelle perché esse si trovano in un tripletto di isospin ($I_3 = -1$, I = 1).

¹⁴ In generale si assegna uguale parità intrinseca a tutti i membri di uno stesso multipletto di isospin.

¹⁵ I numeri quantici sono moltiplicativi, in quanto la parità (come il time-reversal e la coniugazione di carica) è una simmetria *discreta*. Per simmetrie continue (come traslazione o rotazione) i numeri quantici risultano, invece, additivi.

3 – Conservazione della parità nelle interazioni fondamentali

Si vuole ora affrontare la questione della conservazione della parità nel contesto delle interazioni fondamentali considerate in fisica delle particelle: elettromagnetica, forte e debole.

Nel verificare la conservazione della parità si assume che qualunque stato nucleare possa essere visto come una sovrapposizione di una funzione d'onda ψ_c avente la parità canonica dello stato (ampiezza che corrisponde ad una conservazione della parità) e di una funzione d'onda aggiuntiva ψ_{nc} non canonica di parità opposta:

$$\psi = \psi_c + F\psi_{nc} \tag{30}$$

Tale notazione è stata introdotta dai fisici teorici T. D. Lee e C. N. Yang^[5]. Più nel dettaglio, se la parità non è strettamente conservata in un'interazione tutti gli stati atomici e nucleari divengono miscele principalmente costituite dallo stato che vi è stato assegnato insieme a piccole percentuali di stati che possiedono parità opposta, il cui *peso frazionario*¹⁶ sarà chiamato $|F|^2$. L'esistenza di regole di selezione della parità che funzionano bene nella fisica atomica e nucleare è una chiara indicazione che il grado di miscelazione, F^2 , non può essere grande se la parità è conservata. Stando a tali considerazioni si può imporre un limite¹⁷ per cui $|F|^2 \lesssim 10^{-6}$.

La *non conservazione* della parità implicherebbe quindi l'esistenza di interazioni con parità miste, la cui stima viene fornita da *F* nel confronto con le interazioni ordinarie. La presenza di tali tipi di interazioni condizionerebbe le distribuzioni angolari nelle reazioni nucleari.

3.1 – Interazioni elettromagnetiche

Questa rappresenta l'unica fra le tre interazioni citate cui è associata una formulazione analitica completa, al contrario di quanto accade per le interazioni forti e deboli, le quali possono essere studiate solo da un punto di vista fenomenologico.

L'Hamiltoniano dell'interazione qui è noto analiticamente; in particolare si vede che il termine di interazione è proporzionale al prodotto scalare $A \cdot J$. Poiché

$$-\frac{\partial A}{\partial t} = \mathbf{E} + \nabla \phi, \tag{31}$$

sapendo che **E** è un vettore polare, così come lo è il gradiente **V** rispetto alla posizione allora si può affermare che **A** sia un vettore polare. Inoltre anche $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ è un vettore polare, in quanto prodotto di uno scalare vero per un vettore polare. Se ne deduce che $\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ è uno scalare vero, invariante per parità. Pertanto si può affermare con alto grado di sicurezza che questo tipo di interazione conservi la parità.

La conservazione della parità nelle interazioni elettromagnetiche può essere verificata, ad esempio, studiando la transizione tra due livelli di un atomo con emissione di un fotone γ . Nella transizione verrà emesso un fotone con variazione di momento angolare $\Delta l = l^f - l^i$. In particolare nelle transizioni di dipolo elettrico si ha sempre $\Delta l = \pm 1$ essendo 1 lo spin del fotone 18. Quindi

$$(-1)^{l^f} = (-1)^l P_{int}^{\gamma} \tag{32}$$

3.2 – Interazioni deboli

3.2.1 – Dal paradosso τ - θ alla proposta di verifica sperimentale della conservazione della parità mediante decadimento β di un nucleo radioattivo

La questione della conservazione della parità nelle interazioni deboli viene trattata in un ^[5]articolo dai precedentemente citati Lee e Yang. In particolare esso si apre con il problema ¹⁹ del cosiddetto *paradosso* τ - θ . Precedentemente alla pubblicazione del loro articolo, dall'analisi ^[8] dei prodotti di decadimento di due mesoni ²⁰, il τ ⁺ e il θ ⁺, apparentemente identici per massa ^[6] e vita media ^[7], erano stati osservati stati finali con parità opposte. *Assumendo come valida la conservazione della parità*, ciò avrebbe implicato che τ ⁺e θ ⁺ avessero parità diverse pur essendo la stessa particella.

$$^{20}\, au^+
ightarrow\pi^+\pi^+\pi^-\,\mathrm{e}\, heta^+
ightarrow\pi^+\pi^0$$

¹⁶ Ovvero il "grado di violazione della parità".

¹⁷ Limite valido nella maggior parte dei casi della spettroscopia atomica.

¹⁸ Misure molto accurate di spettroscopia atomica permettono di determinare l^f ed l^i e di verificare la conservazione della parità con $|F|^2 < 10^{-12}$.

¹⁹ All'epoca dei due fisici (1956) si dava infatti per scontata la conservazione della parità in *tutte* le interazioni.

Secondo quanto ipotizzato da Lee e Yang, un modo di superare questa difficoltà era assumere che la parità non fosse rigorosamente conservata, in modo tale che τ^+ e θ^+ rappresentassero due differenti schemi di decadimento di una stessa particella²¹, la quale necessariamente abbia un singolo valore di massa e tempo di vita media. Il loro obiettivo quindi era analizzare questa possibilità, in contrasto con quella che era l'evidenza sperimentale del tempo di conservazione della parità. La loro ipotesi era anche basata sul fatto che non si avevano a disposizione test sperimentali a supporto della conservazione della parità nelle interazioni deboli, al contrario di quanto, invece, era stato confermato con alto grado di accuratezza nel caso delle interazioni forti ed elettromagnetiche.

Esistono *tre* metodi per verificare la conservazione della parità in un dato processo:

- Determinare, ove possibile, la parità dello stato iniziale e di quello finale.
- Indagare la struttura dell'Hamiltoniana di interazione: se la parità si conserva vale la (15) e l'Hamiltoniana non deve dipendere da quantità pseudoscalari.
- Il terzo metodo si basa sulla constatazione che se un sistema è parità-invariante ogni reazione e la sua trasformata per parità devono avvenire con la stessa probabilità, quindi con la stessa sezione d'urto.

L'operazione di parità inverte i tre assi coordinati in un punto, il che è equivalente all'inversione di un solo asse e alla rotazione di 180° intorno a questo. Poiché l'invarianza per rotazioni è certamente fuori discussione²², la conservazione della parità viene ridotta ad una invarianza per inversione di un solo asse, ad esempio l'asse z del riferimento. Secondo questo approccio, quindi, la parità sarà conservata in un processo se la reazione in esame e quella che si ottiene per riflessione speculare avvengono con stessa probabilità.

Nell'articolo gli autori suggeriscono, successivamente, un metodo sperimentale per verificare la conservazione della parità grazie al decadimento β^{23} di un nucleo dotato di spin. Quando il nucleo va sotto decadimento β libera un elettrone che vola per esempio con un certo angolo θ rispetto all'asse z. Per poter utilizzare tale decadimento come test della conservazione della parità è necessario polarizzare il momento magnetico²⁴ del nucleo in una certa direzione, ad esempio z (come si nota in figura 4).

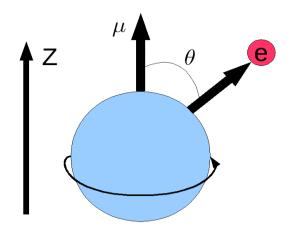
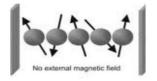


Figura 4: Decadimento beta di un nucleo. Il momento magnetico μ è disegnato secondo la regola della mano destra, la velocità \mathbf{v} dell'elettrone forma un angolo ϑ rispetto alla direzione di μ .

Ciò è necessario perché un campione radioattivo è presente un gran numero di nuclei con spin orientati casualmente, pertanto il decadimento risulterebbe isotropo e non permetterebbe di evidenziare a dovere il di fenomeno una eventuale violazione della conservazione



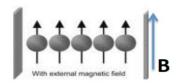


Figura 5: effetto di allineamento di un campo magnetico **B** sugli spin nucleari.

della parità. La polarizzazione del momento magnetico del nucleo lungo l'asse z può essere ottenuta utilizzando un campo magnetico (figura 5)

protone con la creazione di un elettrone ed un neutrino.

²¹ Essi verranno identificati con la particella K^+ .

²² Ciò è garantito dalla conservazione del momento angolare totale.

²³ È un tipo di decadimento mediato dall'interazione debole e implica la trasformazione di un neutrone in un

Esso è parallelo allo spin **J** del nucleo tramite la relazione $\mu = g \mu_N J$, con μ_N magnetone nucleare.

e renderebbe evidente l'eventuale esistenza di asimmetria, come si vedrà nel seguito.

Per vedere come ciò sia rilevante nel contesto della parità occorre osservare un'immagine "allo specchio" del sistema, come mostrato in figura 6.

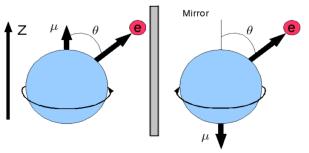


Figura 6: Decadimento beta allo specchio. Nell'immagine speculare (sulla destra) il nucleo inverte il verso del suo momento magnetico, quindi l'angolo di \mathbf{v} con cui è emesso l'elettrone rispetto alla direzione di $\boldsymbol{\mu}$ cambia.

Nello specchio l'elettrone vola al di fuori del nucleo con lo stesso angolo rispetto al semispazio z>0; tuttavia, nello specchio il nucleo sta "girando" in senso opposto, e quindi il suo momento magnetico è ora nella direzione z negativa. Ciò significa che l'angolo tra la traiettoria dell'elettrone e il momento magnetico del nucleo è cambiato. Precisamente, se il momento magnetico sta puntando nella direzione z, e si trova che l'angolo tra la traiettoria dell'elettrone e l'asse z positivo è θ , allora nello specchio l'angolo tra i due sarà $\pi-\theta$.

Ora, denotati rispettivamente con n numero di elettroni β rilevati nel semispazio z > 0 e con n' il numero di quelli rilevati nel semispazio z < 0 (nell'unità di tempo), se la parità è davvero una simmetria sempre valida in natura, il sistema iniziale e quello ottenuto tramite trasformazione di parità devono essere indistinguibili e deve risultare sperimentalmente valida l'uguaglianza

$$n = n' \tag{33}$$

E' possibile mostrare che, al fine di polarizzare il campione radioattivo, oltre all'uso di un campo magnetico molto intenso, conviene che esso venga raffreddato il più possibile: ciò si vede applicando

²⁵ Il rapporto $n/n' \propto e^{-(m'-m)B}/T$, con m e m' componenti di spin nucleari allineati e non con B, indica la frazione di nuclei del campione con spin non

la statistica di Maxwell-Boltzmann alle energie dei nuclei²⁵.

Infine gli autori mostrano che è possibile determinare la *distribuzione angolare* di radiazione β emessa nel decadimento di un campione radioattivo opportunamente polarizzato come:

$$I(\theta)d\theta = C(1 + \alpha\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\tag{34}$$

con C costante, θ angolo di emissione dell'elettrone rispetto allo spin dei nuclei polarizzati. Il parametro α rappresenta il grado di asimmetria nella distribuzione angolare rispetto allo spin nucleare e può essere misurato come:

$$\alpha = 2 \frac{\int_0^{\pi/2} I(\theta) d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} I(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi} I(\theta) d\theta} = 2 \frac{n - n'}{n + n'}$$
 (35)

Se il suo valore risulta apprezzabilmente diverso da 0, si può affermare che esista una *direzione* preferenziale nell'emissione di radiazione β rispetto allo spin nucleare.

3.2.2 – Esperimento di Madame Wu

Per provare la violazione della parità in un'interazione debole era necessario:

- Scegliere un processo nella cui evoluzione entrasse in gioco in modo determinante un'interazione debole;
- Costruire uno stato iniziale *simmetrico* per parità;
- Verificare se in seguito all'evoluzione si giungesse ad uno stato finale simmetrico o non simmetrico per parità.

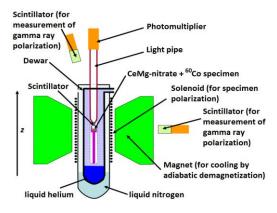


Figura 7: Uno schema che illustra l'apparato sperimentale dell'esperimento di Wu.

allineato con B e può essere ridotto aumentando B e diminuendo T.

L'esperimento era stato ^[5]proposto da Lee e Yang venne ^[9]eseguito da M.me C. S. Wu nel 1957. Si trattava di studiare il decadimento β

$$^{60}_{27}Co \rightarrow ^{60}_{28}Ni + e^- + \bar{\nu}_e + 2\gamma$$
 (36)

nel quale²⁶ i fotoni γ sono prodotti dalla diseccitazione del nucleo di nichel. La scelta specifica del $^{60}_{27}$ Co fu dettata soprattutto dall'elevato spin nucleare²⁷ da esso posseduto, allo scopo di facilitare la polarizzazione dei nuclei.

A livello sperimentale ottenere tale polarizzazione rappresentava una difficoltà non di poco conto: a causa dei piccolissimi momenti magnetici dei nuclei rispetto agli elettroni erano richiesti campi magnetici elevati e temperature estremamente basse, molto inferiori a quelle ottenibili con il solo raffreddamento ad elio liquido.

Tuttavia all'epoca era ben noto da qualche tempo che i nuclei di $^{60}_{27}Co$ potessero essere polarizzati seguendo il metodo di Gorter^[10] e Rose^[11].

Le basse temperature richieste²⁸ erano raggiunte usando il metodo della *demagnetizzazione adiabatica*. Il cobalto radioattivo veniva depositato come strato superficiale sottile²⁹ su un cristallo di nitrato di cerio e magnesio (CMN), un sale paramagnetico, ed immerso in un campo magnetico esterno³⁰.

Se lo stato finale prodotto nel decadimento³¹ (36) è simmetrico, ciò significa che vengono emessi tanti elettroni in alto quanti in basso ed il parametro α definito nella (35) sarebbe confrontabile con lo 0. Se ciò non avviene, si ha una chiara violazione della parità, ovvero il processo osservato e quello riflesso non avvengono identicamente in natura.

Il rivelatore di elettroni (figura 8) doveva essere posto all'interno del criostato (altrimenti gli elettroni sarebbero stati assorbiti dalle sue pareti). Il segnale prodotto (luce di scintillazione), doveva essere trasportato fuori ai fotomoltiplicatori, (che

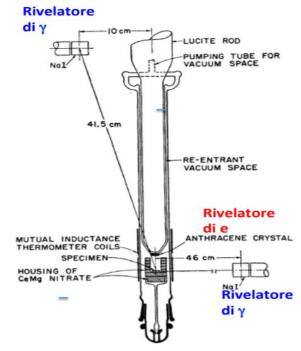


Figura 8: Apparato sperimentale originale utilizzato da Wu

non lavorano a temperature criogeniche) attraverso una guida di luce.

La polarizzazione veniva misurata dall'anisotropia dei raggi γ emessi nel decadimento (36). Per questo vennero installati due scintillatori NaI posti rispettivamente uno nel piano "equatoriale" ($\theta = \pi/2$) e l'altro nel piano "polare" ($\theta = 0$ o $\theta = \pi$, a seconda del verso). La radiazione β era invece rivelata grazie ad un cristallo di antracene posto nella stessa direzione del campo magnetico polarizzante.

I risultati sperimentali sono visibili in figura 9: essi denotano una chiara asimmetria nell'emissione β dipendente dalla polarizzazione del campione³². Il parametro di asimmetria α risulta essere negativo, il che segnala che l'emissione di particelle β sia favorita nella direzione opposta rispetto a quella dello spin nucleare. Questa è una conferma evidente della non conservazione della parità nel decadimento β : se essa si conservasse gli elettroni

²⁸ Approssimativamente 0.003 °K.

 $^{^{26}}$ Il $^{60}_{27}Co$ a $\rm J^P$ = 5⁺ decadeva in $^{60}_{28}Ni$ con $\rm J^P$ = 4⁺ secondo un'interazione di tipo Gamov-Teller pura.

²⁷ Si aveva infatti $J^{\mathbb{P}} = 5^+$.

 $^{^{29}}$ La sorgente di $^{60}_{27}Co$ doveva essere molto sottile per non assorbire gli elettroni emessi e polarizzata per un lungo periodo per avere un numero sufficiente di conteggi.

³⁰ Per preservare più a lungo la polarizzazione occorreva posizionare il cristallo CMN in un contenitore a forma di bottiglia, in cui veniva praticato il vuoto, ed isolarlo termicamente.

 $^{^{31}}$ Bisogna ovviamente assicurarsi che il campione di $^{60}_{27}Co$ resti polarizzato durante il tempo di misura.

³² Come si nota dal grafico, col passare del tempo il campione si riscalda e ciò lo porta a depolarizzarsi completamente dopo circa 8 minuti.

non avrebbero una direzione privilegiata di decadimento in relazione allo spin nucleare.

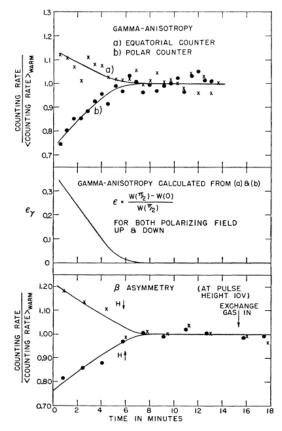


Figura 9: Anisotropia della radiazione gamma e asimmetria della radiazione beta per campo polarizzante che punta verso l'alto e verso il basso.

Si osserva che gli effetti di asimmetria sono speculari (in posizione polare vengono rilevati meno raggi γ quando vengono rilevate più particelle β e viceversa) e cessano contemporaneamente, indicando che l'asimmetria β non è legata ad altri fattori sperimentali. Si trova che circa il 60% dei raggi γ sono stati emessi in una direzione, mentre il 40% è stato emesso nell'altra.

3.2.3 – Conseguenze della non conservazione della parità nelle interazioni deboli

Naturalmente il risultato di M.me Wu fu un colpo molto duro per la comunità scientifica. Esso aveva mostrato che esiste una classe di processi (governati dalla forza debole) per cui la parità è massimamente violata ed è possibile definire univocamente ed inequivocabilmente la sinistra rispetto alla destra.

Concludiamo con il notare che la non conservazione della parità nelle interazioni deboli spiega anche la apparente piccola violazione rilevata nelle interazioni forti: infatti gli adroni possono anche interagire debolmente, e il parametro di violazione dipende quindi dall'intensità relativa delle interazioni adroniche forti e deboli secondo la (30).

3.3 – Interazioni forti

In numerosi esperimenti *antecedenti* a quello di M.me Wu era stata osservata la conservazione della parità nelle interazioni forti. Tuttavia dopo il risultato ottenuto da quest'ultima, che aveva scosso la comunità scientifica, si ritenne opportuno sottoporre ad ulteriore verifica l'ipotesi che la parità si conservasse sempre nelle interazioni forti. In generale l'approccio sperimentale per la verifica poteva avvenire in *tre* modalità diverse secondo la distinzione proposta da D. H. Wilkinson^[12]:

- 1. Nella *prima* classe di esperimenti si ricercano violazioni delle regole di selezione assolute basate sulla rigorosa conservazione della parità prestando attenzione al valore del parametro di violazione $|F|^2$, l'intensità della parte irregolare della funzione d'onda che non conserva la parità;
- 2. Nella *seconda* si ricerca la polarizzazione longitudinale delle particelle pesanti del prodotto o la polarizzazione circolare a partire da sistemi inizialmente non polarizzati. I risultati sono direttamente sensibili al parametro *F*;
- 3. Nella *terza* ricerchiamo, infine, la presenza di potenze dispari del $\cos\theta$ nelle distribuzioni angolari o correlazioni di radiazioni emesse da stati nucleari ben isolati. I risultati sono nuovamente sensibili ad $|F|^2$.

Nel seguito discutiamo brevemente i risultati di due esperimenti che avevano come scopo tale verifica, entrambi svolti successivamente a quello di Wu.

3.3.1 – Esperimento di Tanner^[13]

Il fallimento del principio di conservazione della parità che era appena stato osservato nel caso delle interazioni deboli aveva sollevato la questione di quanto accuratamente essa venga conservata nelle reazioni nucleari. Nell'esperimento considerato viene presa in esame la reazione nucleare

$$^{19}_{9}F + p \rightarrow ^{16}_{8}O + \alpha$$
 (37)

a 340 keV, che procede attraverso una risonanza corrispondente ad uno stato eccitato di 13.2 MeV del $^{20}_{10}Ne^*$ con $J^P=1^+$. Normalmente tale risonanza

decade in uno stato eccitato del $^{16}_{8}O$, emettendo una particella α ed un fotone γ conservando la parità. Bisogna considerare il fatto che i nuclei $^{16}_{8}O$ e $^{4}_{2}He$ presentano spin nucleare nullo e parità +, dunque possono avere soltanto momento angolare orbitale. Da ciò segue che la parità dello stato finale è solamente orbitale, $(-1)^l$, pertanto i soli stati possibili sono quelli della "serie naturale" $0^+, 1^-, 2^+, 3^-, \dots$

Risulta, quindi, che un decadimento del $^{20}_{10}Ne^*$ in uno di questi stati sia possibile solo ammettendo una violazione di parità.

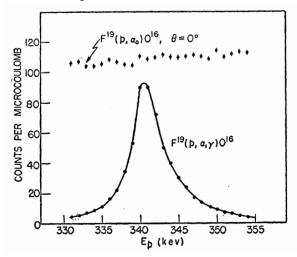


Figura 10: curva dei rendimenti (*yield curve*) del ${}^{19}_{9}F(\mathbf{p}, \alpha_0)$ ${}^{16}_{8}O$ corretta per penetrabilità della barriera in onda s, insieme alla curva di rendimento della radiazione γ proveniente dal ${}^{19}_{9}F(\mathbf{p}, \alpha_1 \gamma)$ ${}^{16}_{8}O$.

In figura 10 si possono osservare i risultati sperimentali ottenuti. Si confrontano le *yield curves* dei due processi, ovvero le sezioni d'urto risonanti: si vede che per il secondo non si osserva praticamente risonanza, ovvero non si ritrova emissione di particelle α nel decadimento del $^{20}_{10}Ne^*$ in $^{16}_{8}O$, a conferma del fatto che la *non* conservazione della parità fosse fortemente ostacolata. Ciò venne reso evidente da una stima del limite superiore del parametro di violazione F, il quale è inferiore al valore di $2\cdot 10^{-4}$.

³³ In simboli $J^{\mathbb{P}} = 0^+$.

3.3.2 – Esperimento di Haas^[14]

Tale esperimento, il cui risultato è definito come una delle prove più convincenti della conservazione della parità nelle interazioni forti ed elettromagnetiche, fornisce una buona rappresentazione di quali siano le problematiche coinvolte in una verifica di questo tipo.

Nell'articolo ritroviamo una *formulazione teorica* del problema e una descrizione della realizzazione pratica dell'esperimento.

Nel modello teorico viene data una stima del parametro di violazione F supponendo che l'Hamiltoniano dell'interazione nucleare sia dato dalla somma di un termine H che conserva la parità e di un altro termine perturbativo, H', che non la conserva. Il problema è trattato applicando al nucleo un modello a particelle indipendenti in una buca di potenziale armonico tridimensionale. Ad esso corrispondono N=(n+1)(n+2) stati quasi degeneri. Se l'Hamiltoniano imperturbato H conserva la parità, allora esisteranno stati eccitati pari³⁴ ψ_g di energia E_g e similmente stati dispari³⁵ ψ_u di energia E_u tali che, applicando la teoria perturbativa al primo ordine, la funzione ψ_g si modifichi in

$$\psi = \psi_g + \frac{\langle \psi_g | H' | \psi_u \rangle}{E_g - E_u} \psi_u = \psi_g + F \psi_u$$
 (38)

permettendo di ottenere la forma tipica della (30). Supponendo che l'elemento di matrice per l'interazione tra le singole particelle, H'_{nm} , sia trascurabile per transizioni energetiche maggiori di $\hbar\omega$, si può vedere che la (38) può essere approssimata da

$$\psi = \psi_g + \frac{\sqrt{NA}Hr_{nm}}{\hbar\omega}\psi_u \tag{39}$$

dove A è il numero di nucleoni.

Inoltre anche ω può essere approssimato come

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{2V}{m_N R^2}} \tag{40}$$

³⁴ Se si considerano il livello energetico $n\hbar\omega$ dell'oscillatore più vicino ad E_g con, n pari, e gli N stati u_{ig} ad esso associati, si potrà scrivere $\psi_g = \sum_{i=1}^N a_i \ u_{ig}$

³⁵ Analogamente, quando n' dispari abbiamo $\psi_u = \sum_{i=1}^{N'} b_i \, u_{iu}$. N ed N' avranno valori simili.

Considerando che tipicamente la massa di un nucleone $m_N = 1 \text{ GeV/c}^2$, la buca di potenziale è profonda V = 40 MeV, la separazione media fra i livelli $\hbar \omega$ è di 20 eV e che il raggio per un nucleo con A = 100 è $R = 1.25 A^{1/3}$ fm si trova un parametro di violazione F nell'ordine di 10^{-3} .

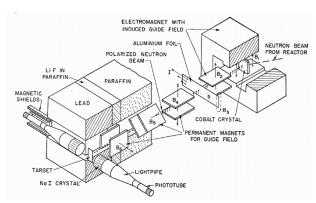


Figura 11: Apparato sperimentale utilizzato da Haas *et al*, preso dall'articolo originale del 1959.

L'apparato sperimentale, in figura 11, era stato progettato per osservare l'emissione di raggi γ in seguito all'assorbimento di neutroni lenti polarizzati da parte di un bersaglio di Cadmio-113. Il fascio di neutroni termici prodotto, di energia media 0.09 eV, incide su un cristallo che produce riflessione alla Bragg e viene quindi polarizzato verticalmente, nella direzione del campo elettrico prodotto da un elettromagnete. Il fascio attraversa, quindi, una serie di campi magnetici guida³⁶, i quali ne ruotano la direzione di polarizzazione da verticale ad orizzontale³⁷. L'esperimento è ripetuto, poi, invertendo la direzione di polarizzazione dei neutroni. Tale cambio avviene interponendo al fascio un foglio di alluminio attraversato da corrente elettrica; rispetto al caso in cui la corrente è nulla, in questa situazione i neutroni sentono un campo magnetico opposto dopo aver attraversato l'alluminio³⁸.

Nella reazione osservata un neutrone viene assorbito da un nucleo di Cadmio-113, che diventa così Cadmio-114 in uno stato eccitato che decade a livelli energetici inferiori emettendo raggi γ

$$^{113}Cd + n \rightarrow ^{114}Cd^* \rightarrow ^{114}Cd + \gamma$$
 (41)

Discriminando opportunamente i segnali dei fotomoltiplicatori, vengono selezionate le energie dei raggi γ corrispondenti a transizioni senza variazioni di parità, per le quali è attesa solo radiazione di dipolo magnetico. La presenza di radiazione di dipolo elettrico è indice di non perfetta conservazione della parità.

Si mostra, infine, che il parametro α , come definito³⁹ nella (35), è pari a

$$\alpha = 2 \frac{EM}{E^2 + M^2} \tag{42}$$

con E ed M ampiezze di radiazione di dipolo elettrico e magnetico. Sperimentalmente si trova $\alpha \simeq 4 \cdot 10^{-5}$. Confrontando quest'ultimo con $F \simeq 10^{-3}$ precedentemente stimato si trova $H'_{nm} \simeq 0.04$ eV. Tale valore può essere confrontato con la profondità tipica della buca di potenziale per le interazioni forti, di $V \simeq 40$ MeV ottenendo così una stima dell'intensità relativa delle forze non invarianti per parità rispetto a quelle invarianti, che risulta essere di circa 10^{-8} .

³⁶ Essi erano prodotti grazie a magneti permanenti.

³⁷ Tale operazione è necessaria per ragione legate al posizionamento e alla schermatura degli scintillatori e dei fotomoltiplicatori, posti a ϑ = 0 e θ = π rispetto alla direzione di polarizzazione, e aventi lo scopo di rivelare i raggi γ prodotti nell'interazione.

 $^{^{38}}$ Fra le precauzioni sperimentali vi è anche una spessa schermatura del bersaglio costituita da piombo, fluoruro di litio e paraffina. I primi due bloccano i raggi γ , la terza i neutroni di fondo.

 $^{^{39}}$ Dove ϑ rappresenta l'angolo di emissione γ rispetto alla direzione di polarizzazione dei neutroni.

Riferimenti Bibliografici

- [1] "Analytical Mechanics: an Introduction", Fasano A., Marmi S., Oxford University Press, 2006.
- [2] Meccanica Quantistca I, Principi, G. Nardulli, FrancoAngeli, 2001.
- [3] W. Chinowsky and J. Steinberger, Physical Review 95, 1561 (1954).
- [4] Introduction to High Energy Physics, D. H. Perkins, Addison-Wesley, 1972.
- [5] T. D. Lee and C. N. Yang, Physical Review 104, 254 (1956).
- [6] Whitehead, Stork, Perkins, Peterson, and Birge, Bull. Am. Phys. Soc. Ser. II, 1, 184 (1956); Barkas, Heckman, and Smith Bull. Am. Phys. Soc. Ser. II, 1, 184 (1956)
- [7] Harris, Orear, and Taylor, Phys. Rev. 100, 932 (1955); V. Fitch and K. Motley, Phys. Rev. 101, 496 (1956); Alvarez, Crawford, Good, and Stevenson, Phys. Rev. 101, 503 1956).
- [8] R. Dalitz, Phil. Mag. 44, 1068 (1953); E. Fabri, Nuovo cimento II, 479 (1954); Orear, Harris, and TaylorL. Phys. Rev. 102, 1676 (1956).
- [9] Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay, C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, R. P. Hudson, Physical Review 105, 1413 (1957).
- [10] Gorter, C. J. (1948). "A New Suggestion for Aligning Certain Atomic Nuclei". Physica, 14 (8): 504.
- [11] Rose, M. E. (1949). "On the Production of Nuclear Polarization". Physical Review. 75 (1): 213.
- [12] Parity conservation in Strong Reactions: Introduction and the Reaction $He^4(d, \gamma) Li^6 \dagger$. D. H. Wilkinson, Physical Review 109, 1603 (1958).
- [13] Parity in Nuclear Reaction, N. Tanner, Physical Review, 107, 1203 (1957).
- [14] R. Haas, L. B. Leipuner, and R. K. Adair Physical Review 116, 1221 (1959).