SST1 Übungsstunde 6

Matteo Dietz

October 2025

Themenüberblick

- **Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich:**
  Fouriertransformation: Definition, Eigenschaften und Beispiele
  Dualität der Fouriertransformation
  Plancherelsche Identität und Parsevalsche Beziehung

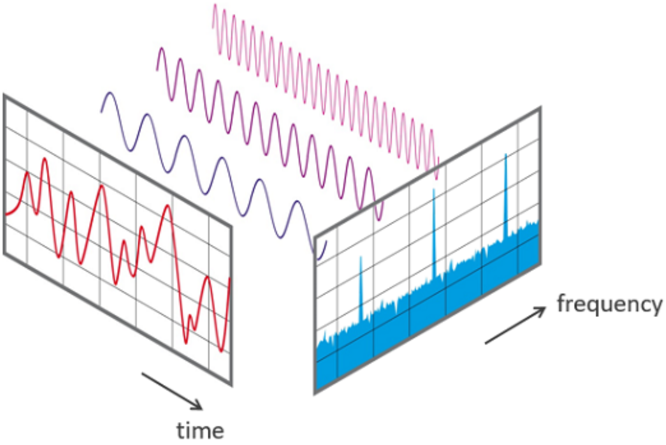
Aufgaben für diese und nächste Woche

56, **57**, 58, **59**, **60**, 61, **62**, 63, **64**, 65, **66**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich

- **Motivation**



Fouriertransformation

- **Fouriertransformation (FT)**:

$$\hat{x}(f) = (\mathcal{F}x)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift}\mathrm{d}t$$

- **Inverse Fouriertransformation (IFT)**:

$$x(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{2\pi ift}\mathrm{d}f$$

Fouriertransformation: Hinweise

- KomA/NuS 2: FT und IFT waren definiert als:

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

- In SST1 haben wir t und f als Parameter anstatt t und ω
- $\omega = 2\pi f \implies \mathrm{d}\omega = 2\pi \mathrm{d}f \implies$ kein Vorfaktor $1/(2\pi)$ in IFT

Fouriertransformation: Hinweise

- Die Fouriertransformation ist eine **lineare Abbildung**. (**Additivität** & **Homogenität**)
- Berechnet die FT und IFT mithilfe der Transformationstabellen.
- An der Prüfung muss man eigentlich nie die Integrale der FT berechnen. Es gibt immer einen Kunstgriff, nachdem man die FT von der Tabelle ablesen kann.

Riemann-Lebesgue Lemma

- Es sei x ein absolut integrierbares Signal, d.h. $x \in L^1$.

  Dann ist $(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f)$ stetig und $\lim_{|f| \to \infty} \hat{x}(f) = 0$.

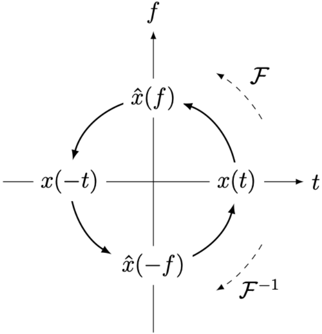
Verschiebung im Zeitbereich

Faltung im Zeitbereich

Aufgaben

- **Aufgabe 58.b)**
- **Aufgabe 60.b)**
- **Aufgabe 64.b)**

Dualität der Fouriertransformation



$$
\begin{aligned}
x(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{x}(f) \\
\widehat{x}(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(-f) \\
x(-t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{x}(-f) \\
\widehat{x}(-t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(f).
\end{aligned}
$$

Beispiel

Parseval und Plancherel

Plancherelsche Identität:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\hat{y}(f)\mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

Parsevalsche Beziehung:

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2\mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = ||\hat{x}||^2$$

Plancherelsche Identität

- **Theorem**: Wenn $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt $\langle x, y \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$

  $\implies \mathcal{F}$ ist längenerhaltend und winkelerhaltend
- **Beweis**:

Aufgaben

- **Aufgabe 66**
- **Prüfungsaufgabe: Sommer 2020, Aufgabe 4.a)**
- **Prüfungsaufgabe: Sommer 2019, Aufgabe 2**