

SST1 Übungsstunde 1

Matteo Dietz

September 2025

Organisatorisches

- Übungsstunde dienstags 16:15-18:00 im HG E22
- Study-Center dienstags 18:15-19:00 im ETZ E7
- Vorlesungsskript und Übungsskript auf der Vorlesungswebsite
Username: sigsys2025, Passwort: Fourier2025

Organisatorisches

- Bonussystem: Es gibt dieses Semester keinen Bonus in SST1
- Ich werde jede Woche ein kurzes Skript auf meiner Website hochladen. Der Link zu meiner Website ist auf der Vorlesungswebsite.

Hinweise

- Geht in die Vorlesung!
- Macht Aufgaben während des Semesters und schiebt nicht alles für die Lernphase auf!
- Der Stil der Prüfung ändert sich dieses Jahr zum ersten Mal seit 10 Jahren. Zu euren Gunsten :)

Themenüberblick

- **Einführung Signale:**

Einteilung der Signale und einfache Beispielaufgaben

- **Lineare Algebra Recap:**

Lineare Räume und Unterräume:

Lineare Unabhängigkeit, Basen, Koordinaten, Dimensionsbegriff,
duale Basen, Funktionsräume, Normen, Skalarprodukte,
Orthogonalität

Eigenwerte, Eigenvektoren, Matrixdiagonalisierung, ...

Aufgaben für diese Woche

1, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, 7, **8**, **9**, 10, **11**, 12, 13, 14, **15**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Lineare Räume

Definition: Ein linearer Raum über \mathbb{C} ist eine nichtleere Menge X zusammen mit

- (i) einer Abbildung $+: X \times X \rightarrow X$, genannt Addition und notiert mit $x_1 + x_2$,
- (ii) einer Abbildung von $\mathbb{C} \times X$ nach X , genannt skalare Multiplikation und notiert mit αx ,

so, dass Addition und skalare Multiplikation folgende Eigenschaften erfüllen:

(A1) Kommutativität (+): $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$, für alle $x_1, x_2 \in X$.

(A2) Assoziativität (+): $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$, für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$.

(A3) Nullelement (+): $\exists! 0 \in X$, so dass $0 + x = x$, für alle $x \in X$.

(A4) Inverses Element (+): $\forall x \in X \exists! -x \in X$, so dass $x + (-x) = 0$.

(SM1) Assoziativität (\cdot): $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $x \in X$

(SM2) Einselement (\cdot): $1x = x$, für alle $x \in X$.

(A&SM1) Distributivgesetz: $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, und alle $x_1, x_2 \in X$.

(A&SM2) Distributivgesetz: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, und alle $x \in X$.

Aufgabe 7

Lineare Unterräume

- **Definition:** Ein linearer Unterraum ist eine **nichtleere Teilmenge** (\tilde{X}) eines linearen Raumes X , wenn gilt:

(i) $x_1 + x_2 \in \tilde{X}$, für alle $x_1, x_2 \in \tilde{X}$.

(ii) $\alpha x \in \tilde{X}$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $x \in \tilde{X}$.

Aufgabe 9

Basen in linearen Räumen

Definition: Eine Teilmenge $\{x_i\}_{i=1}^n$ des linearen Raumes X ist linear abhängig, wenn es zugehörige Skalare $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ gibt, die **nicht alle gleich Null** sind und so, dass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0.$$

Wenn $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ impliziert, dass $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dann ist die Teilmenge $\{x_i\}_{i=1}^n$ linear unabhängig.

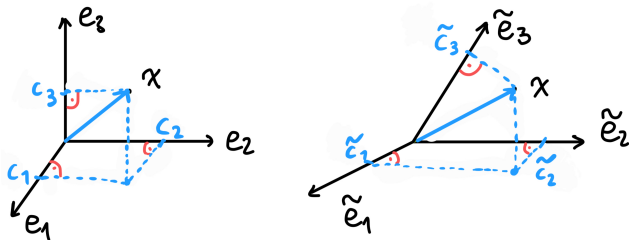
Basen in linearen Räumen

- Die **Basis** eines linearen Raums X ist eine Menge von Vektoren in X , die linear unabhängig sind und jedes Element x des gesamten Raumes X durch eindeutige Linearkombination erzeugen können.

Basen in linearen Räumen

- **Formale Definition:** Die Menge $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M$, $\mathbf{e}_k \in \mathbb{C}^M$, ist eine Basis für \mathbb{C}^M , wenn:
 - 1 $\text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M = \mathbb{C}^M$
 - 2 $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M$ linear unabhängig ist.

Basen in linearen Räumen



Koordinaten $c_k := \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle$, $k = 1, \dots, M$

Analysematrix

$$\text{Analysematrix } \mathbf{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M^H \end{bmatrix}$$

$$\text{Koordinaten } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M^H \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{e}_M, \mathbf{x} \rangle \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{x}$$

Dimensionsbegriff

- **Dimension M**
 - = maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente im linearen Raum
 - = Anzahl Basiselemente **jeder** Basis dieses linearen Raumes
- Wenn es kein endliches M gibt, $\implies X$ unendlich-dimensional.

Duale Basen

- Eine Menge $\{\tilde{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^M$, $\tilde{\mathbf{e}}_k \in \mathbb{C}^M$, $k = 1, \dots, M$ heisst dual zu einer Basis $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M$, wenn:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^M \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \tilde{\mathbf{e}}_k, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$$

Duale Basen einer ONB

- Die duale Basis einer Orthonormalbasis ist sie selbst.
 $\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_k$, für alle $k = 1, \dots, M$, denn dann gilt trivialerweise:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^M \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$$

Duale Basen einer allgemeinen Basis

- **Synthesematrix:** $\tilde{\mathbf{T}}^H = [\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_M]$
- Setze $\tilde{\mathbf{T}}^H = \mathbf{T}^{-1}$, um eine duale Basis zu finden.

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{T}}^H \mathbf{T} \mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_M] \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_M \rangle \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^M \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{x},$$

Aufgabe 11

Funktionsräume

- Für eine nichtleere Menge S definiert man den linearen Raum X als Menge aller Funktionen von S nach \mathbb{C} , wobei die Addition und die skalare Multiplikation wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} (+) \quad & \forall x_1, x_2 \in X \quad + : X \times X \rightarrow X \\ & (x_1 + x_2)(s) = x_1(s) + x_2(s) \quad \forall s \in S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cdot) \quad & \forall \alpha \in \mathbb{C}, x \in X \quad \cdot : \mathbb{C} \times X \rightarrow X \\ & (\alpha \cdot x)(s) = \alpha x(s) \end{aligned}$$

Norm

- **Definition:** Eine reelle Funktion $\| \cdot \|$, definiert auf einem linearen Raum X , ist eine Norm auf X , wenn gilt:

(N1) Nichtnegativität: $\|x\| \geq 0$, für alle $x \in X$

(N2) Dreiecksungleichung: $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$, für alle $x_1, x_2 \in X$

(N3) Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, für alle $x \in X$

(N4) Definitheit: $\|x\| = 0$ dann, und nur dann, wenn $x = 0$

Normierte Lineare Räume

- **Definition:** Ein normierter linearer Raum ist ein Paar $(X, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem linearen Raum X und einer Norm auf X .

Beispiele für Normierte Lineare Räume

- linearer Raum \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n mit einer der folgenden Normen:

Summennorm (1-Norm): $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Euklidische Norm (2-Norm): $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

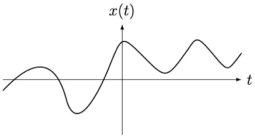
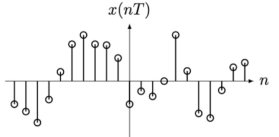
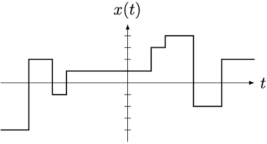
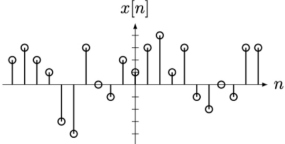
p-Norm: $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$

Maximumsnorm: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$

Beispiele für Normierte Lineare Räume

- linearer Raum $L^p := \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt < \infty\}$
mit der Norm $\|x\|_{L^p} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$
- linearer Raum $l^p := \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p < \infty\}$
mit der Norm $\|x\|_{l^p} := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p\right)^{1/p}$

Einteilung der Signale

<div>Zeit Signal- amplitude</div>	kontinuierlich	diskret
kontinuierlich	<p>analoge Signale</p>  <p>A continuous, smooth, wavy line representing an analog signal $x(t)$ plotted against time t.</p>	<p>zeitdiskrete Signale</p>  <p>A discrete signal $x(nT)$ plotted against n, shown as a sequence of vertical stems with open circles at the top, representing samples of a continuous signal.</p>
diskret	<p>amplitudendiskrete Signale</p>  <p>A discrete signal $x(t)$ plotted against time t, shown as a step function where the amplitude changes at discrete intervals of time.</p>	<p>digitale Signale</p>  <p>A digital signal $x[n]$ plotted against n, shown as a sequence of vertical stems with open circles at the top, where the amplitude is also discrete.</p>