

Übungsstunde 8

Themenüberblick

- Spezielle Eingangssignale von LTI-Systemen

Repetition: Fourierreihen

Plancherel und Parseval für periodische Signale

- Anwendungen der Fouriertransformation auf LTI-Systeme

Ideale Tiefpassfilter

Bandbegrenzte Signale

Aufgaben für diese Woche

67, 68, 69, **70**, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, **80**, 81, 82

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Fourierreihen

Für T -periodische Signale $x(t)$ gilt:

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}, \quad \text{wobei } c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Gemäss Nr. 21 aus der Formelsammlung wird dieses $x(t)$ fouriertransformiert zu:

$$(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f) = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Eigenschaften der Fourierreihen

- (i) Fourierreihen existieren nur für periodische Signale.
- (ii) Periodische Signale haben immer ein "diskretes" Frequenzspektrum.
- (iii) c_k sind die komplexen Koeffizienten und beschreiben das Signal im Frequenzbereich.

Periodische Eingangssignale an LTI-Systemen

Eingangssignal: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$

Wegen Linearität, Stetigkeit und da $e^{2\pi i f_0 t}$ Eigenfunktionen von LTI-Systemen sind, gilt:

$$\Rightarrow y(t) = (Hx)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\hat{h} \left(\frac{k}{T} \right)}_{d_k} e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

Das Ausgangssignal auf ein T -periodisches Eingangssignal ist auch T -periodisch.

Poissonsche Summenformel

$$(h * \delta_T)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h} \left(\frac{k}{T} \right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

Parseval und Plancherel für T -periodische Signale

Plancherelsche Identität für periodische Signale $x, y \in L^2([0, T])$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x (c_k^y)^*$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale $x \in L^2([0, T])$

$$\|x\|_{L^2([0, T])}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Bemerkungen: In diesem Bereich betrachten wir den Fall $T = 1$. Die folgenden Aussagen gelten jedoch allgemein auch für $T \neq 1$ unter minimal grösserem Rechenaufwand, den wir uns hier sparen.

Die Parsevalsche Beziehung sagt zum einen aus, dass die L^2 -Norm der Funktion (“Energie”) statt aus einem Integral aus einer Summe (der Fourier-Koeffizienten im Betragsquadrat) berechnet werden kann. In Analysis wird dies verwendet um gewisse Reihen zu summieren.

Zum anderen sagt die Parsevalsche Beziehung aus, dass die Fourierkoeffizienten für $L^2([0, 1])$ schneller als $\frac{1}{n}$ abklingen, da die linke Seite einen definierten Wert und die rechte Reihe damit konvergieren muss.

Wenn wir nun $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t}$ nach t ableiten, erhalten wir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi i k \underbrace{c_k}_{\hat{x}(k)} e^{2\pi i k t}$$

Das heisst, für den k -ten Fourier-Koeffizienten der Ableitung von $x(t)$ gilt: $\hat{x}'(k) = 2\pi i k \hat{x}(k)$

$$\text{und somit: } \widehat{x^{(n)}}(k) = (2\pi i k)^n \underbrace{\hat{x}(k)}_{c_k} \quad \text{und} \quad \|x^{(n)}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{2n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2n} |\underbrace{\hat{x}(k)}_{c_k}|^2,$$

Somit haben wir eine direkte Verbindung zwischen Glattheit eines Signals und dem Abfall seiner Fourier-Koeffizienten: Je glatter das Signal, desto schneller ist der Abfall der Fourier-Koeffizienten.

Zusammenfassend: Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ steht im direkten Zusammenhang mit dem Abfall seiner Mitglieder $|c_k|$. Je glatter x , desto schneller ist der Abfall seiner Fourierkoeffizienten $|c_k|$ also desto schneller ist die Konvergenz der Fourierreihe. Für eine numerische Approximation bedeutet das, dass sich glatte Funktionen sehr gut durch kurze Fourier-Summen approximieren lassen, während unglatte Funktionen längere Fourier-Summen brauchen.

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.a) iii, iv

Aus 1.a)i. und ii. haben wir die drei LTI-Systeme H_1 , H_2 und H_3 gegeben durch:

$$\hat{h}_1(f) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2}, \quad \hat{h}_2(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (\widehat{H_3 x})(f) = (2\pi i f) \hat{x}(f)$$

iii. Ist das Gesamtsystem H mit $(Hx)(t) = (H_3 H_2 H_1 x)(t)$ ein LTI-System? Wenn ja, geben Sie die Fouriertransformierte $\hat{h}(f)$ der zugehörigen Impulsantwort h an.

iv. Am Eingang des Gesamtsystems H liegt das Signal

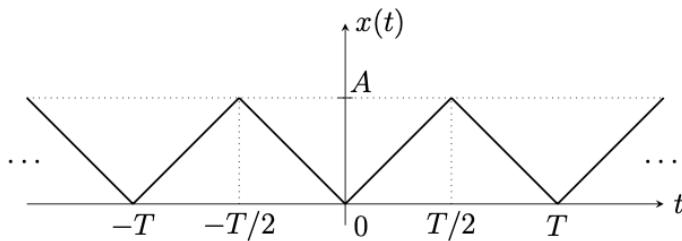
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t / T}, \quad T > 0, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

an. Berechnen Sie die Fourierreihe des Ausgangssignals $y(t) = (Hx)(t)$ in Abhängigkeit von c_k , T und f_g .

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.d) i, ii

★ (d) (10 Punkte) Gegeben sei das T -periodische Signal

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{2A}{T}t, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{2A}{T}t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases},$$



mit $A > 0$, $T > 0$.

★ i. (8 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t / T}$$

Hinweis: Das folgende unbestimmte Integral kann hilfreich sein.

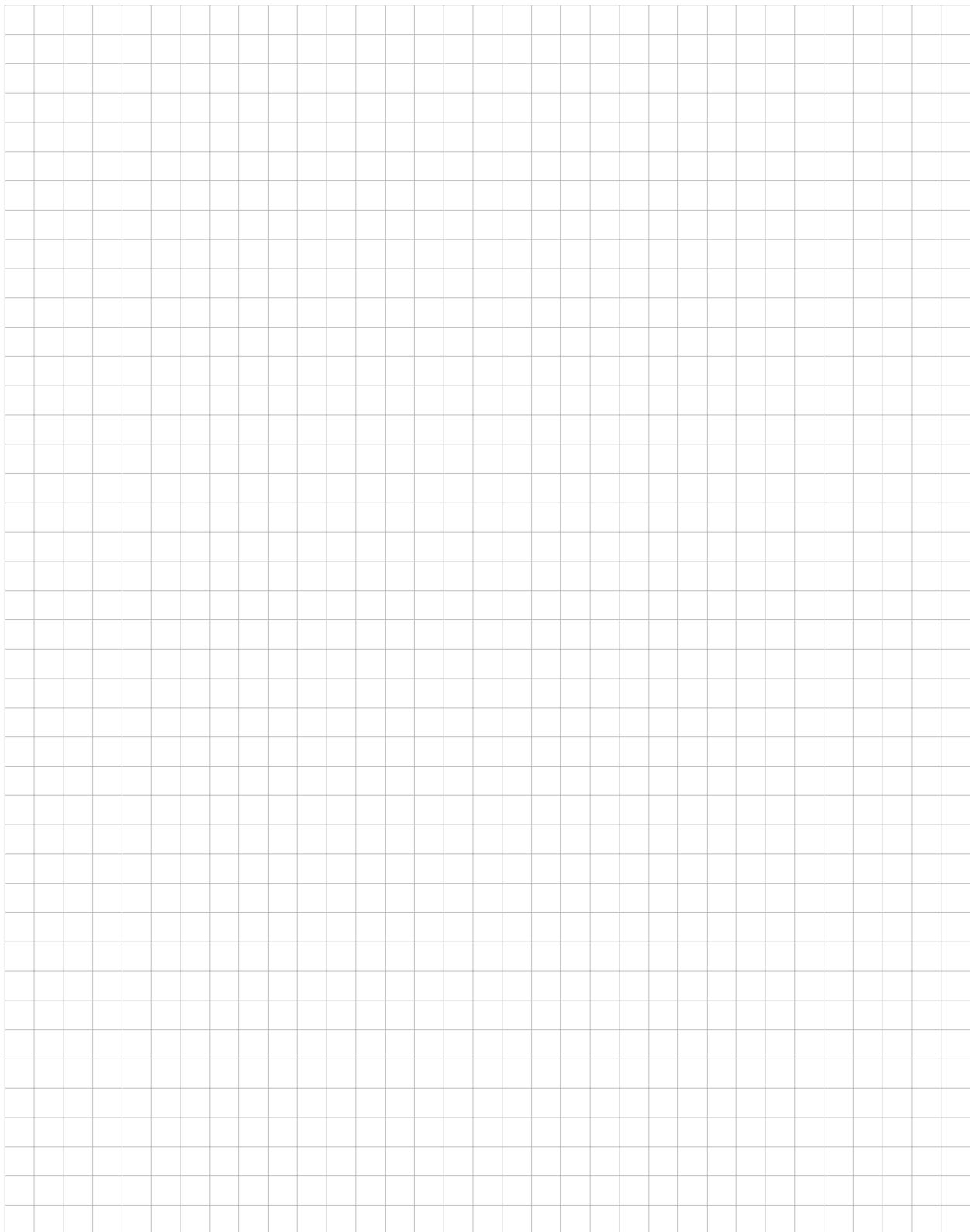
$$\int te^{at} dt = \frac{e^{at}(at - 1)}{a^2}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

ii. (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt.$$

Benutzen Sie dieses Resultat in Kombination mit der Parsevalschen Beziehung für zeitkontinuierliche periodische Signale, um zu beweisen, dass

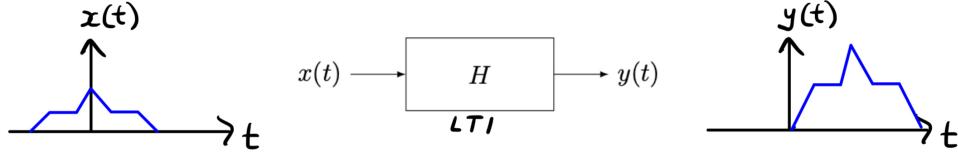
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$





Anwendung der Fouriertransformation auf LTI-Systeme

Verzerrungsfreie Systeme



Definition: Ein **verzerrungsfreies** System hat folgende Eigenschaften:

1. Input und Output haben die gleiche Form, d.h.

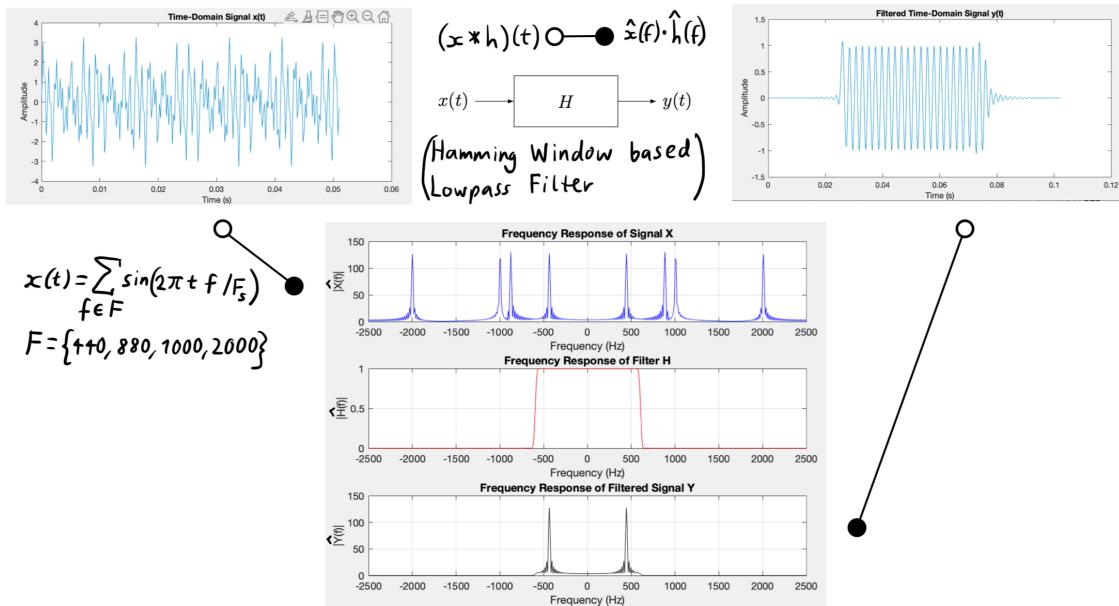
$$y(t) = kx(t - t_0) \xrightarrow{2.} \hat{y}(f) = \underbrace{ke^{-2\pi i f t_0}}_{= \hat{h}(f)} \hat{x}(f)$$

$$2. \hat{h}(f) = |\hat{h}(f)| e^{i\varphi(f)} = k e^{i(-2\pi f t_0)} \xrightarrow{} h(t) = k\delta(t - t_0)$$

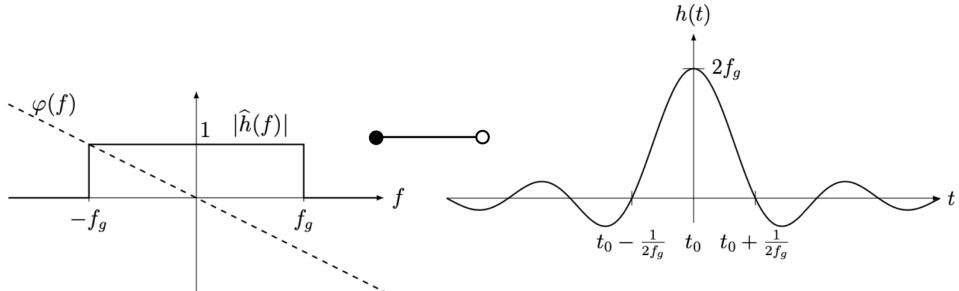
3. Das System ist linear, stabil, kausal und zeitinvariant

- Verzerrungsfreie Systeme sind **Allpässe**, d.h. alle Frequenzen der Eingangssignale werden durchgelassen. Oft ist es jedoch nützlich, wenn wir bestimmte Frequenzen herausfiltern können. Dies entspricht einer Verzerrung des Eingangssignals.
- Ein Anwendungsgebiet wäre zum Beispiel, wenn wir aus einem Audiosignal hochfrequentes Rauschen (noise) rausfiltern möchten. In diesem Fall wollen wir, dass nur die tiefen Frequenzen des Eingangssignals durchgelassen werden. Das nennt man einen Tiefpassfilter.

Beispiel eines Tiefpassfilters



Idealisierte Tiefpassfilter



Dieses System heisst Tiefpassfilter, da alle Frequenzen ausserhalb des Durchlassbereiches $[-f_g, f_g]$ aus dem Eingangssignal herausgefiltert werden. Ein ideales Tiefpassfilter ist mathematisch wie folgt beschrieben:

$$\hat{h}(f) = |\hat{h}(f)| e^{i\varphi(f)}, \quad \text{wobei} \quad |\hat{h}(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \varphi(f) = -2\pi f t_0$$

$e^{i\varphi(f)}$ entspricht einer Zeitverzögerung von t_0 .

$$\text{Wir schreiben } h(t) = \underbrace{|\hat{h}(f)|}_{=: \hat{h}_{id}(f)} e^{-2\pi i f t_0} \xrightarrow[2.]{\quad} h_{id}(t - t_0)$$

$$\text{Aus FS. 27 erhalten wir, dass } h_{id}(t) = \frac{\sin(2\pi f_g t)}{\pi t} \xrightarrow[27.]{\quad} \hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Somit erhalten wir } h(t) = h_{id}(t - t_0) = \frac{\sin(2\pi f_g(t - t_0))}{\pi(t - t_0)}$$

Wichtige Bemerkungen

1. Da $h(t) = 0 \forall t < 0$ **nicht gilt**, ist das ideale Tiefpassfilter **nicht kausal**.
2. Es gilt **nicht**, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$, d.h. die Impulsantwort ist nicht absolut integrierbar.
Wenn $h \in L^1$ wäre, dann hätten wir für das ideale Tiefpassfilter garantiert **BIBO-Stabilität**. Dies ist aber nicht der Fall.

Der Grund hierfür liegt im Riemann-Lebesgue Lemma, das besagt, dass wenn das Signal x absolut integrierbar ist, dann ist $(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f)$ stetig und es gilt $\lim_{|f| \rightarrow \infty} (\mathcal{F}x)(f) = 0$.

Da nun $\hat{h}(f)$ nicht stetig ist $\Rightarrow h(t)$ nicht absolut integrierbar.

- 1.&2. \Rightarrow Ideale Tiefpassfilter sind **nicht realisierbar** in der Praxis. Wir müssen das Filter kausal und h absolut integrierbar machen! (Für BIBO-Stabilität)

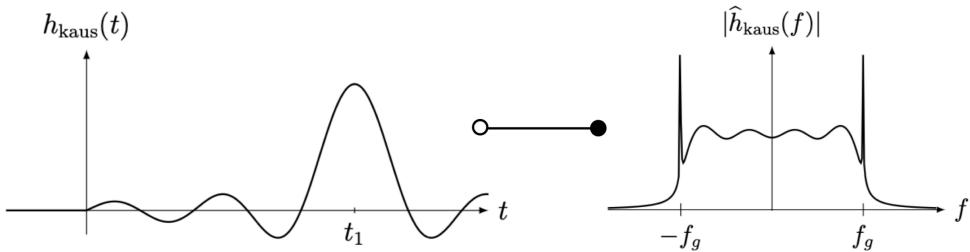
Kausalität

Da das System LTI ist, wollen wir um Kausalität zu erreichen $h(t) = 0 \forall t < 0$ haben.

$$\text{Im Zeitbereich: } h_{id}(t) = \frac{\sin(2\pi f_g t)}{\pi t}$$

Nun verschieben wir $h_{id}(t)$ um t_1 und multiplizieren das verschobene ideale Tiefpassfilter mit der Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$. So erhalten wir $h(t) = 0 \forall t < 0$.

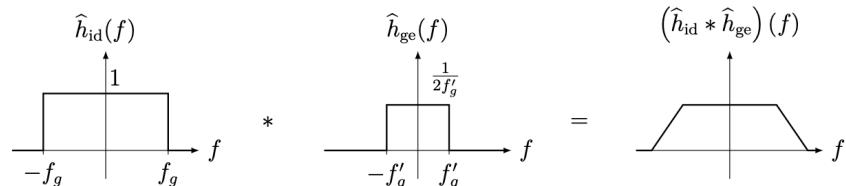
Somit $h_{kaus}(t) = h_{id}(t - t_1)\sigma(t)$



Wenn wir die dazugehörige Fouriertransformation $\hat{h}_{kaus}(f)$ bestimmen, dann sehen wir, dass die Frequenzen bei $\pm f_g$ deutlich verstärkt werden. Somit ist h_{kaus} kein gutes Filter.

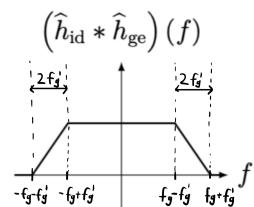
Stabilisierung

Wir wollen $h(t) \in L^1$ (absolut integrierbar). Aus diesem Grund falten wir $\hat{h}_{id}(f)$ mit $\hat{h}_{ge}(f)$.



$$\text{Somit erhalten wir } (\hat{h}_{id} * \hat{h}_{ge})(f) \bullet \circ h_{id}(t)h_{ge}(t) \propto \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2} \in L^1$$

Das resultierende Tiefpassfilter ist BIBO-stabil und sieht im Frequenzbereich aus wie folgt:



Da dieses Filter nicht perfekt ist in den Bereichen $|f \pm f_g| \in [-f'_g, f'_g]$, versucht man f'_g so klein wie möglich zu wählen.

Bandbegrenzte Signale

Definition: Die **Bandbreite** des Signals x ist das kleinste W , so dass

$$(x * h_{\text{TP},W})(t) = x(t), \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \text{ wobei}$$

$$h_{\text{TP},W}(t) = \sin(2\pi W t) / (\pi t).$$

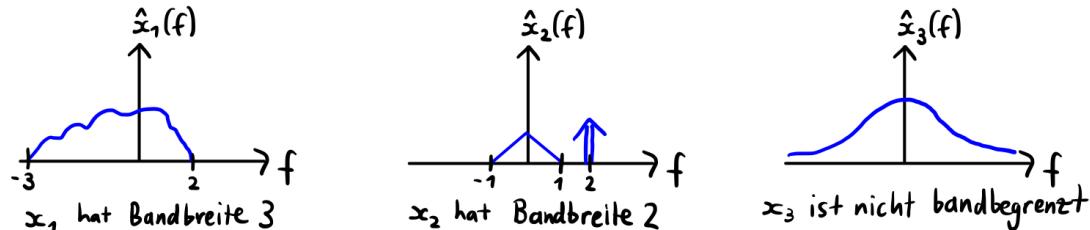
Im Frequenzbereich bedeutet das

$$\hat{x}(f) \hat{h}_{\text{TP},W}(f) = \hat{x}(f), \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}, \text{ und}$$

$$\hat{h}_{\text{TP},W}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Intuitiv bedeutet diese Definition das folgende: Die Bandbreite ist die betragsweise höchste Frequenz (positiv oder negativ), die in einem Signal enthalten ist.

Beispiele:



Bemerkung: Seien x_1, x_2 zwei Signale mit Bandbreite W_1 resp. W_2

- $x_1(t) + x_2(t)$ hat Bandbreite $\max\{W_1, W_2\}$
- $(x_1 * x_2)(t)$ hat Bandbreite $\min\{W_1, W_2\}$
- $x_1(t)x_2(t)$ hat Bandbreite $\leq W_1 + W_2$

Bernstein'sche Ungleichung

Theorem: Wenn $x(t)$ in der Form

$$x(t) = \int_{-W}^W g(f) e^{2\pi i f t} df, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden kann, für eine integrierbare Funktion g , d.h. $g \in L^1$, dann gilt

$$\left| \frac{dx(t)}{dt} \right| \leq 4\pi W \sup_{\tau \in \mathbb{R}} |x(\tau)|, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dieses Kriterium liefert uns eine Abschätzung für die Ableitung von $x(t)$.

Eine kleine Bandbreite $W \Rightarrow$ nur tiefe Frequenzen sind im Signal enthalten $\Rightarrow x(t)$ kann sich nur "langsam" ändern.

Aufgabe 68

Das Signal $x(t)$ habe die Bandbreite f_0 , d.h. $\hat{x}(f) = 0$ für $|f| > f_0$. Bestimmen Sie die Bandbreiten der folgenden Signale in Abhängigkeit von f_0 .

a) $x(t) + x(t - 1)$

c) $x^2(t)$

b) $\frac{dx(t)}{dt}$

d) $x(t) \cos(2\pi f_0 t)$

