

SST1 Übungsstunde 7

Matteo Dietz

October 2025

Themenüberblick

- **Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich:**

- Eigenfunktionen von LTI Systemen

- Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich

- Kaskadierung von LTI-Systemen

Themenüberblick

- **Spezielle Eingangssignale von LTI-Systemen**

- Allgemeine Schwingungen

- Sinusförmige Eingangssignale

- Einschaltvorgänge

- Periodische Eingangssignale und Fourierreihen

- Deltakamm und Poissonsche Summenformel

Aufgaben für diese Woche

Dieselben wie letzte Woche und **69, 70, 71, 72, 73, 74,**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Eigenfunktionen analoger LTI-Systeme

- **Reminder:** Eigenvektoren x sind Vektoren, die die Gleichung $Hx = \lambda x$ erfüllen, wobei H ein System ist. λ nennt man den dazugehörigen Eigenwert.
- Wir wollen nun die Eigenfunktionen von analogen LTI Systemen finden. Das heisst, wir wollen $x(t)$ finden, sodass $y(t) = (Hx)(t) = \lambda x(t)$ gilt.

Eigenfunktionen analoger LTI-Systeme

- **Eingangssignal:** $x(t) = e^{2\pi i f_0 t}$

Wir wenden nun darauf das LTI-System H an:

$$\begin{aligned}y(t) &= (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_0(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{2\pi i f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-2\pi i f_0 \tau}d\tau}_{\hat{h}(f_0)} \\&\implies (He^{2\pi i f_0 \cdot})(t) = \hat{h}(f_0)e^{2\pi i f_0 t}\end{aligned}$$

Eigenfunktionen analoger LTI-Systemen

Es gilt also: $(He^{2\pi if_0 \cdot})(t) = \hat{h}(f_0)e^{2\pi if_0 t}$

Kunstgriff:

Die Funktionen $e^{2\pi if_0 t}$ sind Eigenfunktionen von LTI-Systemen mit zugehörigen Eigenwerten $\hat{h}(f_0)$

Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich

$$\begin{aligned}\hat{y}(f) &= \widehat{(x * h)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x * h)(t) e^{-2\pi i f t} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-2\pi i f t} dt d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-2\pi i f \tau} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-2\pi i f s} ds}_{\hat{x}(f)} d\tau = \hat{x}(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau}_{\hat{h}(f)} \\&= \hat{x}(f) \hat{h}(f)\end{aligned}$$

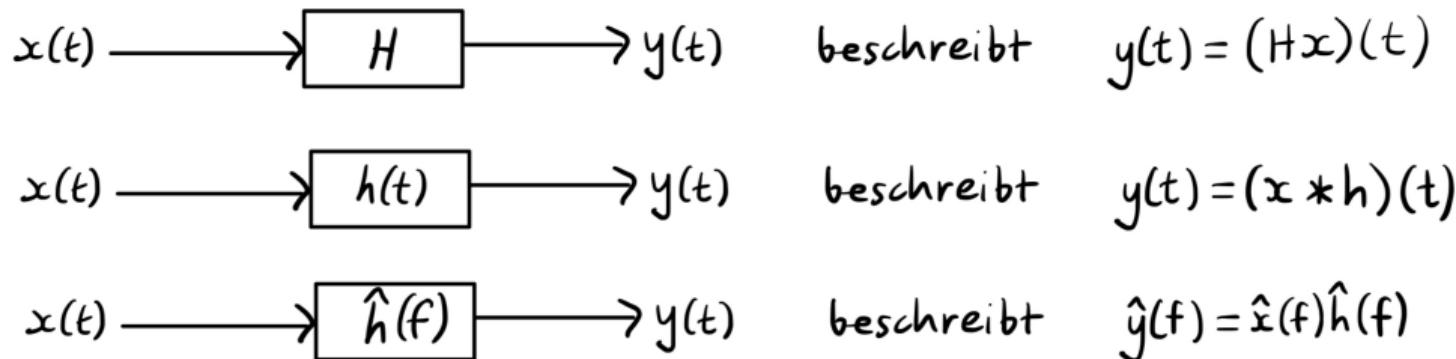
Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich

$$\begin{array}{ccc} (x * h)(t) & \xrightarrow{7.} & \hat{x}(f)\hat{h}(f) \\ x(t)h(t) & \xrightarrow{8.} & (\hat{x} * \hat{h})(f) \end{array}$$

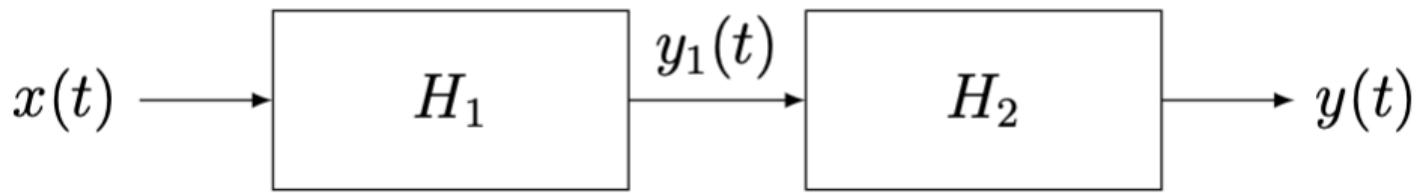
$$\implies y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\hat{h}(f)e^{2\pi ift}df$$

Blockschaltbilder

- Wir können LTI-Systeme mit folgenden Blockschaltbildern beschreiben:



Kaskadierung von LTI-Systemen



LTI-Systeme kommutieren

Kaskadierung von LTI-Systemen: Theorem

- Es seien A und B zwei lineare Operatoren auf einem linearen Raum V ausgestattet mit einem positiv definiten inneren Produkt. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:
 - (i) A und B besitzen eine gemeinsame Eigenbasis.
 - (ii) A und B kommutieren.
- LTI-Systeme haben die komplexen Exponentialfunktionen als gemeinsame Eigenbasis. Somit kommutieren LTI-Systeme.

Kaskadierung von LTI-Systemen

- Kaskadierung der LTI-Systeme H_1 und H_2 mit $x = e^{2\pi i f_0 t}$:

Die Kaskadierung von LTI-Systemen ist wieder ein LTI-System mit $\hat{h}(f) = \hat{h}_1(f) \cdot \hat{h}_2(f)$ d.h. $h(t) = (h_1 * h_2)(t)$.

Spezielle Eingangssignale

- Allgemeine Schwingungen
- Sinusförmige Eingangssignale
- Einschaltvorgänge
- Allgemeine Periodische Signale

Allgemeine Schwingungen

- Eingangssignal $x(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$,

wobei $s = \sigma + i2\pi f_0$, $\Re(s) = \sigma \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0, \end{cases}$

dann $x(t) = e^{\sigma t} e^{i2\pi f_0 t}$, $\Re(x(t)) = e^{\sigma t} \cos(2\pi f_0 t)$

- $e^{\sigma t}$ = Einhüllende und $e^{i2\pi f_0 t}$ = Schwingung.

Allgemeine Schwingungen

- Der Ausgang eines Systemes mit Impulsantwort $h(t)$ ist dann:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{=H(s)}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \textbf{Laplace-Transformierte von } h(t).$$

Sinusförmige Eingangssignale

- Eingangssignal:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi f_0 t} e^{-i\varphi_0}$$

Ausgangssignal:

$$\begin{aligned}y(t) &= (Hx)(t) = \frac{1}{2} \hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} \underbrace{\hat{h}(-f_0)}_{=\hat{h}^*(f_0)} e^{-i2\pi f_0 t} e^{-i\varphi_0} \\&= \frac{1}{2} \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} \right)^* \right) \\&= \Re \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} \right)\end{aligned}$$

Sinusförmige Eingangssignale

$$\Re \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} \right) = |\hat{h}(f_0)| \cdot \cos \left(2\pi f_0 t + \varphi_0 + \arg(\hat{h}(f_0)) \right),$$

da $\hat{h}(f_0)$ komplexwertig sein kann.

- Das Ausgangssignal auf ein sinusförmiges Eingangssignal ist ein **skalierter** und **verschobener** Sinus, der mit **derselben Frequenz** oszilliert wie das Eingangssignal.

Einschaltvorgänge

- Eingangssignal: $x(t) = e^{2\pi i f_0 t} \sigma(t)$
- Stationärer Zustand des Ausgangssignals $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}$
- Der Einschaltvorgang hat unendlich lange nach dem Einschalten keinen Einfluss mehr.

Fourierreihen: Definition

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}, \quad \text{wobei} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt$$

$x(t)$ wird gemäss Nr. 21 fouriertransformiert zu:

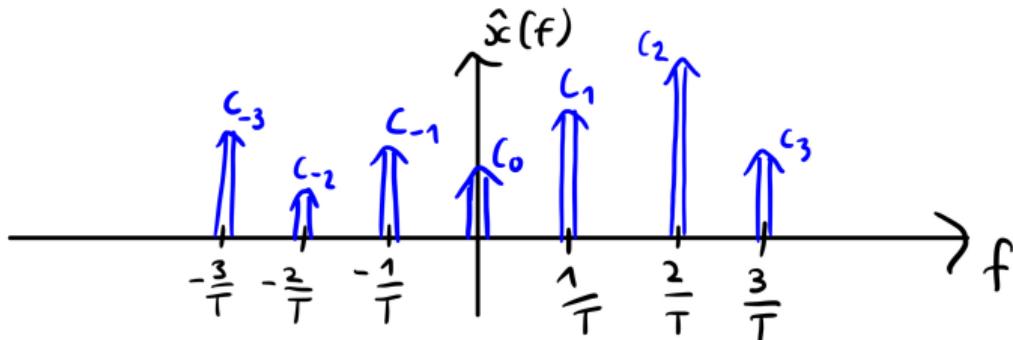
$$(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f) = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta \left(f - \frac{k}{T} \right)$$

Fourierreihen: Eigenschaften

- (i) Fourierreihen existieren nur für periodische Signale.
- (ii) Periodische Signale haben immer ein "diskretes" Frequenzspektrum.
- (iii) c_k sind die komplexen Koeffizienten und beschreiben das Signal im Frequenzbereich.

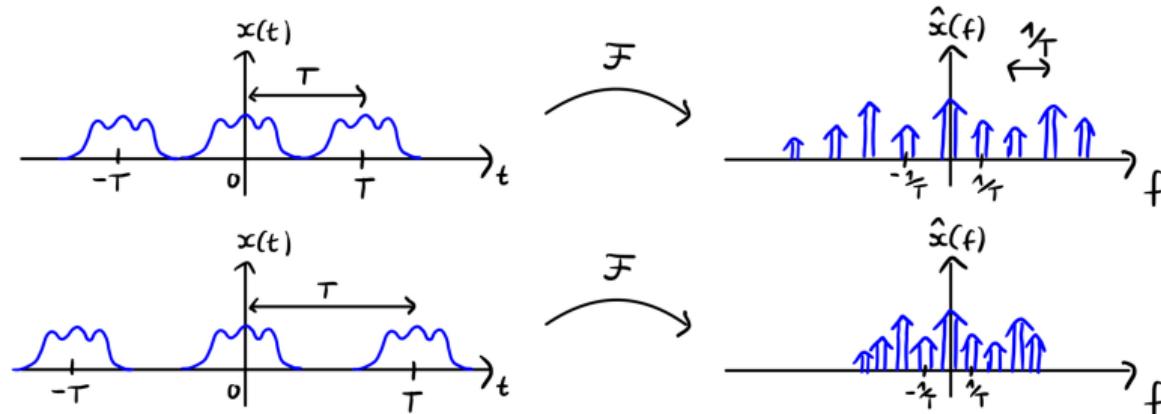
Fourierreihen: Eigenschaften

- Wir schreiben $x(t) = x(t + T) \circ \bullet c_k$
- Die c_k beschreiben die Gewichte des Deltakamms.



Fourierreihen: Eigenschaften

- Eigentlich ist das Spektrum kontinuierlich, es hat jedoch nur an Vielfachen von $1/T$ Komponenten, die ungleich null sind.



- $1/T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ somit wird die Fourierreihe zu einem Integral.
Das "diskrete" Spektrum wird kontinuierlich.

Periodische Signale an LTI-Systemen

Eingangssignal: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$

Zur Erinnerung: $(H e^{2\pi i f_0 \cdot}) (t) = \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}$

Dank Linearität und Stetigkeit gilt:

$$(Hx)(t) = \left(H \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k \cdot}{T}} \right) (t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(H e^{\frac{2\pi i k \cdot}{T}} \right) (t)$$

Periodische Signale an LTI-Systemen

$$\Rightarrow y(t) = (Hx)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

- Das Ausgangssignal auf ein T -periodisches Eingangssignal ist auch T -periodisch.

Deltakamm

Ein Deltakamm ist definiert durch:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad \xrightarrow{51.} \quad c_k = \frac{1}{T} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Antwort eines LTI-Systems auf einen Deltakamm $\delta_T(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &\stackrel{\text{LTI}}{=} (h * \delta_T)(t) = \left(h * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - kT) \right) (t) \\ &\stackrel{\text{LIN}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h * \delta(\cdot - kT))(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) \end{aligned}$$

Poissonsche Summenformel

- LTI-Systeme antworten auf das Eingangssignal $x(t) = \delta_T(t)$

$$\text{mit } y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

- $y(t)$ ist T -periodisch und kann somit als Fourierreihe

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$
 entwickelt werden.

Poissonsche Summenformel

- Dank $x(t) \xrightarrow{51.} \bullet \frac{1}{T} \forall k \in \mathbb{Z}$ und $d_k = c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right)$ erhalten wir:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

Aufgaben

- Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.a)ii, iii, iv und 1.d)i, ii