Übungsstunde 6

Themenüberblick

- **Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich:**

  Fouriertransformation: Definition, Eigenschaften und Beispiele

  Dualität der Fouriertransformation

  Plancherelsche Identität und Parsevalsche Beziehung

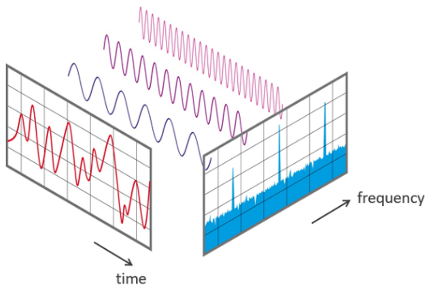
Aufgaben für diese Woche

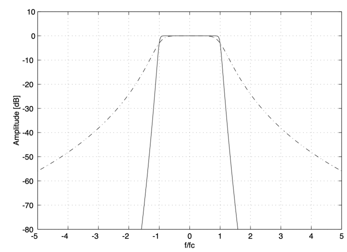
56, **57**, 58, **59**, **60**, 61, **62**, 63, **64**, 65, **66**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich

Motivation





Das Frequenzspektrum ist ein mächtiges Werkzeug in SST1, da es wesentliche Eigenschaften von Signalen und Systemen offenbart, die im Zeitbereich verborgen bleiben. Wir können Signale in ihre Frequenzkomponenten zerlegen und somit Systeme für spezifische Aufgaben entwerfen und optimieren. Im Bereich der Signalverarbeitung ermöglicht das Frequenzspektrum effizientes Filtern, noise reduction und feature extraction. In der Kommunikationstechnik erleichtert es Modulation, Datenkompression und channel analysis für eine klarere Signalübertragung. In der Schaltungstheorie vereinfacht die Frequenzanalyse das Rechnen mit Wechselstromsignalen und hilft Ingenieuren, stabile und effiziente Schaltungen zu entwickeln. Diese Ansätze sind in vielen Bereichen grundlegend und liefern Einsichten und Lösungen, die durch eine reine Zeitbereichsanalyse nicht möglich wären.

Fouriertransformation

Die Fouriertransformation (FT) ist definiert durch:

$$\hat{x}(f) = (\mathcal{F}x)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i f t}\mathrm{d}t$$

Die dazugehörige Rücktransformation (IFT) ist dann:

$$x(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}f$$

Wichtiger Hinweis: in KomA/NuS 2 war die Fouriertransformation und ihre Rücktransformation definiert als:

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Da wir in SST1 t und f als Parameter haben anstatt t und ω, haben wir dank $\omega = 2\pi f$ und somit wegen $\mathrm{d}\omega = 2\pi\mathrm{d}f$ kein Vorfaktor $1/(2\pi)$ in der Rücktransformation.

Die Fouriertransformation ist eine **lineare Transformation**:

$$(\mathcal{F}(\alpha x_1 + \beta x_2))(f) = \alpha\hat{x_1}(f) + \beta\hat{x_2}(f)$$

Riemann-Lebesgue Lemma

Es sei x ein absolut integrierbares Signal, d.h. $x \in L^1$.

Dann ist $(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f)$ stetig und $\lim\limits_{|f| \to \infty} \hat{x}(f) = 0$.

Wichtige Beziehungen und Transformationspaare

Verschiebung im Zeitbereich

$x(t - t_0) \overset{2.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}(f)$

Analog dazu gilt auch $e^{2\pi i f_0 t} x(t) \overset{3.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \hat{x}(f - f_0)$

Faltung im Zeitbereich entspricht Multiplikation im Frequenzbereich

$(x * y)(t) \overset{7.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \hat{x}(f)\hat{y}(f)$

Analog dazu gilt auch $x(t)y(t) \overset{8.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} (\hat{x} * \hat{y})(f)$

1 Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

1.	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t$
2.	$x(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}(f)$
3.	$e^{2\pi i f_0 t} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f - f_0)$
4.	$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(-f)$
5.	$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-f)$
6.	$x(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}\, \hat{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
7.	$(x * y)(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f)\hat{y}(f)$
8.	$x(t)y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x} * \hat{y})(f)$
9.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(f)\}$
10.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(f)\}$
11.	$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) + \hat{x}^*(-f))$
12.	$i\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) - \hat{x}^*(-f))$
13.	$t^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\mathrm{d}^n \hat{x}(f)}{\mathrm{d}f^n}$
14.	$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(2\pi i f)^n \hat{x}(f)$
15.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi i f}\hat{x}(f) + \frac{1}{2}\hat{x}(0)\delta(f)$

Einige Fouriertransformationspaare

16.	$\delta(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i f t_0}$
17.	$e^{2\pi i f_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\delta(f - f_0)$
18.	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$
19.	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}\left(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\right)$
20.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$
21.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/T_0}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$

22.	$\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{2\pi i f} + \dfrac{1}{2}\delta(f)$
23.	$\operatorname{sign}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{\pi i f}$
24.	$e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{a + 2\pi i f}$
25.	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{(a + 2\pi i f)^n}$
26.	$e^{-a\lvert t\rvert}, \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
27.	$\dfrac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & \lvert f\rvert \leq f_c \\ 0, & \lvert f\rvert > f_c \end{cases}$
28.	$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \leq T_0 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_0 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\sin(2\pi T_0 f)}{\pi f}$
29.	$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{T_0}, & \lvert t\rvert \leq T_0 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_0 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\sin^2(\pi T_0 f)}{\pi^2 T_0 f^2}$
30.	$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2 f^2/a}$
31.	$\dfrac{\mathrm{d}^n\delta(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(2\pi i f)^n$
32.	t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^n \dfrac{\mathrm{d}^n\delta(f)}{\mathrm{d}f^n}$
33.	$\lvert t\rvert$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\dfrac{1}{2\pi^2 f^2}$

Dualität der Fouriertransformation

Die folgenden Korrespondenzen sind äquivalent.

$$x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{x}(f)$$
$$\hat{x}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(-f)$$
$$\hat{x}(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(f)$$

Plancherelsche Identität

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, \hat{y}^*(f)\, df = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$$

Parsevalsche Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert \hat{x}(f)\rvert^2 \mathrm{d}f$$

Poissonsche Summenformel ($T > 0$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n/T) e^{2\pi i n t/T}$$

Aufgabe 58.b)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Signale:

b) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi t), & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

Aufgabe 64

Für die gegebenen Fouriertransformierten $\hat{x}(f)$ berechne man die zugehörigen Zeitsignale $x(t)$.

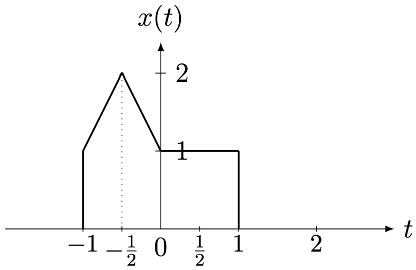
b) $\hat{x}(f) = \cos(8\pi f + \frac{\pi}{3})$

Aufgabe 60

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Signale:

b) $x(t) = te^{-2t}\sigma(t)$

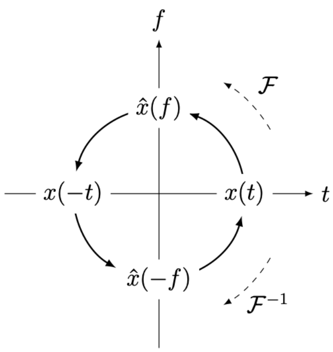
c)



Weitere Zentrale Eigenschaften der Fouriertransformation

Dualität der Fouriertransformation

Man kann die Fouriertransformation als Rotation in der Zeit-Frequenz-Ebene betrachten:



$$\begin{aligned} x(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \ \widehat{x}(f) \\ \widehat{x}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \ x(-f) \\ x(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \ \widehat{x}(-f) \\ \widehat{x}(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \ x(f). \end{aligned}$$

Somit erhält die Fouriertransformationstabelle viel mehr Informationen als nur $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \hat{x}(f)$

Beispiel: In der Formelsammlung steht

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_0}, & |t| \leq T_0 \\ 0, & |t| \geq T_0 \end{cases} \quad \circ\!\!\xrightarrow{\ 29.\ }\!\!\bullet \quad \frac{\sin^2(\pi T_0 f)}{\pi^2 T_0 f^2}$$

Wir suchen nun $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 f_0 t^2}\right\}(f)$, was wir jedoch nicht in der Formelsammlung finden können.

Da aber $\hat{x}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet x(-f)$ gilt, können wir die gewünschte Transformation wie folgt berechnen:

Planscherelsche Identität und Parsevalsche Beziehung

Die beiden Beziehungen, um welche es in diesem Abschnitt geht, gehören meiner Meinung (und der Meinung vieler Mathematiker) nach, zu den wichtigsten und schönsten Eigenschaften der Fouriertransformation:

Plancherelsche Identität:

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\hat{y}^*(f)\mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$$

Parsevalsche Beziehung:

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2\mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{x}\rangle = ||\hat{x}||^2$$

Parsevalsche Beziehung

Wenn wir zuerst die **Parsevalsche Beziehung** betrachten, können wir aus $||x||^2 = ||\hat{x}||^2$ schliessen, dass die Fouriertransformation eine Isometrie bezüglich der L^2-Norm, also eine längenerhaltende bijektive Transformation ist.

Man kann die Parsevalsche Beziehung sehr gut für die Berechnung der **Energie eines Signales** verwenden.

Plancherelsche Identität

Wenden wir uns nun der **Plancherelschen Identität** für Fouriertransformationen zu:

Theorem: Wenn $x, y \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt $\langle x, y\rangle = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$

Somit ist die Fouriertransformation nicht nur längenerhaltend, sondern auch winkelerhaltend.

Beweis:

Wenn wir nun in der Plancherelschen Identität $y = x$ wählen, so folgt daraus direkt die Parsevalsche Beziehung.

Aufgabe 66

Von einem Signal $x(t)$ ist die Fouriertransformierte gegeben als

$$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Energie des Signals $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$ gegeben durch

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Sommer 2020 4.a)

⋆ (a) (14 Punkte) Es sei $T \in \mathbb{R}_+,\ a \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \cos(2\pi t) + a\sin(2\pi t), \quad t \in \mathbb{R},$$

das gemäss

$$y(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

abgetastet wird.

i. (4 Punkte) Berechnen Sie das Spektrum $\hat{x}(f)$ des Signals $x(t)$.

ii. (4 Punkte) Berechnen Sie das Spektrum $\hat{y}(f)$ des Signals $y(t)$.

iii. (6 Punkte) Kann der Parameter a für $T = 1$ eindeutig aus $y(t)$ bestimmt werden? *Hinweis: Betrachten Sie* $\hat{y}$.

Prüfungsaufgabe: Sommer 2019, Aufgabe 2

2. **Aufgabe** (25 Punkte) Während die herkömmliche Fourier-Transformation die globalen spektralen Charakteristika eines Signals wiedergibt, beschreibt die Kurzzeit-Fourier-Transformation (englisch short-time Fourier transform, kurz STFT) die zeitliche Evolution des Spektrums eines Signals. Die STFT eines allgemeinen Signals $x(t)$ bezüglich der Fensterfunktion $w(t)$ ist gegeben durch

$$F_x^w(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w^*(t-\tau) e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t.$$

★ (a) (7 Punkte) Berechnen Sie für eine allgemeine Fensterfunktion $w(t)$ die STFT des Signals

$$y(t) = x(t - t_0) \cos(2\pi f_0 t)$$

in Abhängigkeit von $F_x^w(\tau, f)$.

★ (b) (9 Punkte) Ziel dieser Teilaufgabe ist es das Signal $x(t)$ aus der STFT $F_x^w(\tau, f)$ zurückzugewinnen. Dazu betrachten wir eine zweite allgemeine Fensterfunktion $v(t)$ und setzen

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_x^w(\tau, f) v(t-\tau) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}f.$$

Welche Bedingung müssen $w(t)$ und $v(t)$ erfüllen, damit $y(t) = x(t)$ gilt?

★ (c) (9 Punkte) Das Spektrogramm des Signals $x(t)$ bezüglich der Fensterfunktion $w(t)$ is

$$S_x^w(\tau, f) = |F_x^w(\tau, f)|^2.$$

Berechnen Sie die Energie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^w(\tau, f) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}f$$

des Spektrogramms in Abhängigkeit von $\|x\|$ und $\|w\|$ für allgemeines $x(t)$ und allgemeine Fensterfunktion $w(t)$, wobei

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t} \qquad \text{und} \qquad \|w\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 \mathrm{d}t}.$$