SST1 Übungsstunde 4

Matteo Dietz

October 2025

Themenüberblick

- **Repetition: Zeitinvarianz**

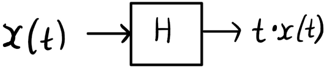
- **Analoge LTI Systeme im Zeitbereich**:
  Impulsantwort
  Faltung, Eigenschaften der Faltung, Graphische Faltung
  Eigenschaften der Impulsantwort

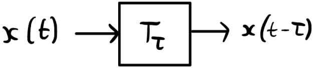
Aufgaben für diese Woche

31, **33**, 34, **35**, 36, **37**, **38**, **39**, **40**, **41**, **42**, **43**, 44, **45**

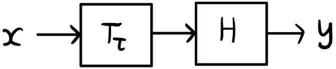
Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

$$Hx(t) = t \cdot x(t) \qquad\qquad T_\tau x(t) = x(t-\tau)$$

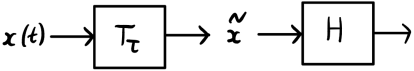




$(HT_\tau x)(t)$:



$\tilde{x}(t) = T_\tau x(t) = x(t-\tau)$



$$H\tilde{x}(t) = t \cdot \tilde{x}(t)$$
$$= t \cdot x(t-\tau)$$

$HT_\tau x(t) = t \cdot x(t-\tau)$

Beispiel

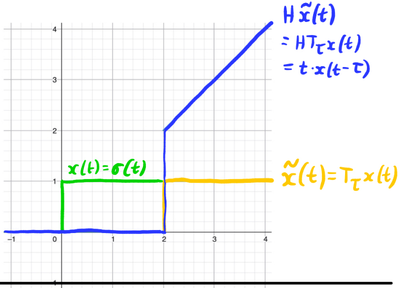
$$X(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ 1 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

$$TX(t) = X(t-2)$$

$$= \begin{cases} 0 & : t-2 < 0 \\ 1 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

$$HTX(t) = t\,TX(t)$$

$$= t\,\mathrm{If}(t-2 < 0, 0, 1)$$



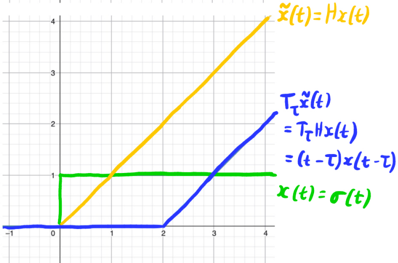
$$X(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ 1 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

$$HX(t) = t\,X(t)$$

$$= t\,\mathrm{If}(t < 0, 0, 1)$$

$$THX(t) = HX(t-2)$$

$$= (t-2)\,\mathrm{If}(t-2 < 0, 0, 1)$$



Punktenotation (aus Lösung 30.c) & 28)

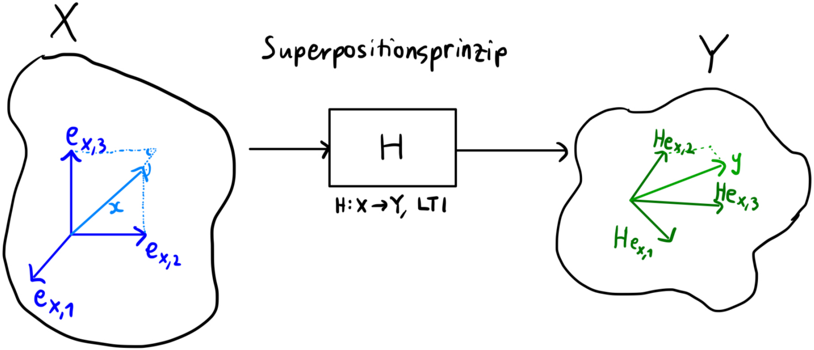
- $(Hx(\cdot - \tau))$ bedeutet: H wirkt auf das verschobene Signal $x(t-\tau) = (T_\tau x)(t)$, also:

$$(Hx(\cdot - \tau))(t) = (HT_\tau x)(t) = tx(t-\tau)$$

- $(Hx)(t-\tau)$ bedeutet: Antwort $y(t) = (Hx)(t)$ des Systems H auf Eingangssignal $x(t)$ wird um τ zeitverschoben, also:

$$(Hx)(t-\tau) = (T_\tau Hx)(t) = (t-\tau)x(t-\tau)$$

Analoge LTI-Systeme im Zeitbereich



Impulsantwort

LTI-Systeme sind vollständig durch ihre Impulsantwort $h := (H\delta)(t)$ definiert.

Wir können dem System einen $\delta-$Impuls als Input geben und den Output betrachten und dieser Output charakterisiert das LTI-System vollständig.

Herleitung

Herleitung

Herleitung

Impulsantwort von LTI-Systemen

Ein LTI-System antwortet auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit dem Ausgangssignal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau := x * h$$

wobei $h(t) = (H\delta)(t)$ die **Impulsantwort** des Systems ist.

Aufgabe 42.a)

Existenz des Faltungsintegrals

- Das Faltungsintegral zweier Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) \mathrm{d}\tau$$

  kann divergieren.

- Die **Young'sche Ungleichung** stellt sicher, dass eine Faltung zweier Signale existiert.

Repetition: L^p

- $L^p := \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty \right\}$
- **p-Norm**: $||x||_p := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}$
- **Spezialfall**: $||x||_\infty := \inf\{C \geq 0 : |x(t)| \leq C, \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$

Young'sche Ungleichung: Theorem

- Seien x und h (messbare) Funktionen, sodass $||x||_p,\ ||h||_q < \infty$ für p, q mit $1 \leq p, q \leq \infty$. Man setze:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

Dann gilt: $||x * h||_r \leq ||x||_p ||h||_q$.

Young'sche Ungleichung: Spezialfälle

- $x_1 \in L^p,\ 1 \leq p \leq \infty,\ x_2 \in L^1 \implies ||x_1 * x_2||_p \leq ||x_1||_p||x_2||_1$ und damit $x_1 * x_2 \in L^p$
- $x_1 \in L^2,\ x_2 \in L^2 \implies |(x_1 * x_2)(t)| \leq ||x_1||_2||x_2||_2,\ t \in \mathbb{R}$ und damit $x_1 * x_2 \in L^\infty$

Eigenschaften der Faltung

1. **kommutativ**: $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$
2. **assoziativ**: $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$
3. **distributiv**: $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$
4. **linear in beiden Argumenten**:
   $x_1 * (\alpha x_2 + \beta x_3) = \alpha(x_1 * x_2) + \beta(x_1 * x_3)$

Analytische Berechnung der Faltung: Aufgabe 41

Graphische Faltung: Kochrezept

Ziel: Wir wollen $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$ berechnen.

1) $x(\tau)$ spiegeln um $\tau = 0$, um $x(-\tau)$ zu erhalten.
2) Das gespiegelte $x(\tau)$ um t verschieben.
   - nach rechts für $t > 0$
   - nach links für $t < 0$

   $\implies x(t-\tau) = x(-(\tau - t))$
3) Das gespiegelte & verschobene $x(\tau)$ mit $h(\tau)$ multiplizieren.
   $\implies x(t-\tau)h(\tau)$
4) Integrieren & den Wert von $y(t)$ bei t eintragen.
5) Zurück zu 2) mit neuem t.

Graphische Faltung: Hinweise

Hinweise: Vergesst nicht, dass die Faltung kommutativ ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Spiegelt und verschiebt das einfachere Signal und fixiert das kompliziertere!

Aufgabe 39.a)

Eigenschaften der Impulsantwort

- Kausalität
- Gedächtnis
- BIBO-Stabilität

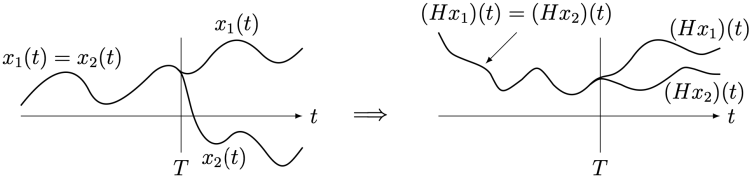
Repetition: Kausalität

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **kausal**, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und jedes $T \in \mathbb{R}$ gilt

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \text{für alle } t \leq T$$

$$\implies (Hx_1)(t) = (Hx_2)(t), \quad \text{für alle } t \leq T$$

Repetition: Kausalität



- **Intuition**: Das Ausgangssignal zu dem Zeitpunkt T ist nur von dem momentanen oder vergangenen Zeitpunkten abhängig.

- Echtzeitrealisierungen sind immer kausal.

Repetition: Gedächtnis

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **gedächtnislos**, wenn für alle $x \in X$ und alle Zeitpunkte $t_0 \in \mathbb{R}$ das Ausgangssignal $(Hx)(t)$ zum Zeitpunkt t_0 nur von $x(t_0)$ abhängt.

- Sonst heisst das System **gedächtnisbehaftet**.

- Gedächtnislosigkeit $\implies$ Kausalität (aber nicht umgekehrt)

Repetition: BIBO-Stabilität

- **Definition**: Ein System $H: X \to Y$ ist **BIBO-stabil**, wenn:

  für alle $x \in X$ mit $|x(t)| \leq B_x < \infty$, für alle t, existiert ein $B_y \in \mathbb{R}$ mit $B_y < \infty$, sodass

  $|y(t)| \leq B_y$, für alle t, wobei $y = Hx$.

Zusammenfassung: Eigenschaften der Impulsantwort

Kausalität

Das LTI-System ist kausal $\Leftrightarrow h(t) = 0$ für $t < 0$.

Gedächtnislosigkeit

Das LTI-System H ist gedächtnislos $\Leftrightarrow$

$$y(t) = (Hx)(t) = \alpha x(t), \quad \alpha \in \mathbb{C} \Leftrightarrow h(t) = \alpha\delta(t)$$

BIBO-Stabilität

Wenn $h \in L^1$, dann ist das LTI-System BIBO-stabil.

Aufgaben

- **Aufgabe 45**
- **Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1**