Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dept. of Information Technology and Electrical Engineering

Übungsstunde 9

Themenüberblick

- **Abtasttheorem**

  Digitale Systeme

  Abgetastete Systeme im Frequenzbereich

  Aliasing, Interpolation, Kritische Abtastung

  Interpretation als Entwicklung in ein Orthonormalsystem

Aufgaben für diese Woche

83, 84, **85**, 86, **87**, 88, **89**, **90**, 91, **92**, **93**, **94**, 95, **96**

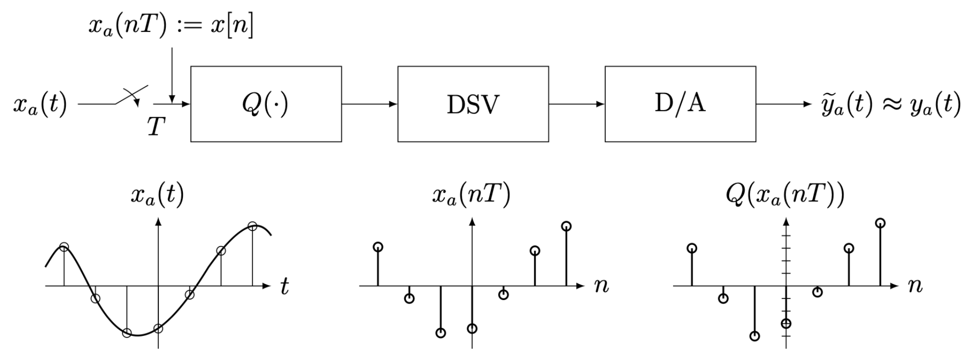
Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Abtasttheorem

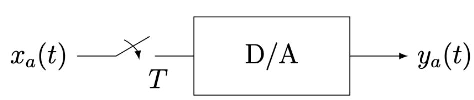
Digitale Systeme

Das Abtasttheorem bildet die Grundlage für die digitale Signalverarbeitung, da es die Brücke zwischen kontinuierlichen und diskreten Signalen schlägt. Mit digitalen Signalen zu arbeiten ist essenziell, da Computer nur digitale Daten – also zeit- und amplitudendiskrete Werte – verarbeiten können. Im Vergleich zu kontinuierlichen Signalen, die unendlich viele Informationen enthalten, ermöglicht die Digitalisierung eine effiziente Speicherung und Verarbeitung der Daten durch eine endliche Anzahl von Bits.

Die digitale Signalverarbeitung bietet zahlreiche Vorteile gegenüber der analogen: Sie ist vielseitig einsetzbar, z.B. für zeitvariante, adaptive und mehrdimensionale Anwendungen, garantiert eine hohe Rechengenauigkeit unabhängig von nichtidealen Bauelementen, wie z.B. RLC-Schaltkreisen, und ermöglicht kompakte, kostengünstige sowie energieeffiziente Implementierungen. Das Abtasttheorem stellt sicher, dass kontinuierliche Signale unter geeigneten Bedingungen verlustfrei in den diskreten Bereich übertragen werden können.



In SigSys 1 betrachten wir die Quantisierung, also das System $Q(\cdot)$ nicht. Wenn wir nun also ein Signal abgetastet und verarbeitet haben, modelliert durch einen digitalen Signalverarbeitungs-Block (DSV), dann wollen wir zum Schluss wieder eine zeitkontinuierliche Version des Signals rekonstruieren:



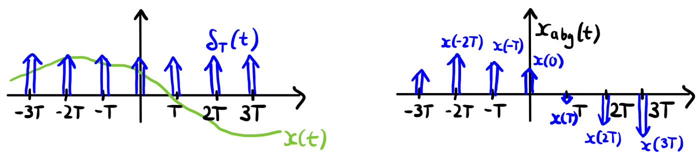
Die Frage ist nun, ob ein allgemeines Signal $x_a(t)$ von seinen Abtastwerten $x_a(nT)$ rekonstruiert werden kann, d.h. ob $y_a(t) = x_a(t)$.

Die Antwort auf diese Frage ist nicht so einfach, es hängt nämlich von der Abtastperiode T ab.

Abgetastete Signale im Frequenzbereich

1. Wir modellieren die Abtastung als eine Multiplikation mit einem Deltakamm:

$$x_{abg.}(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)$$

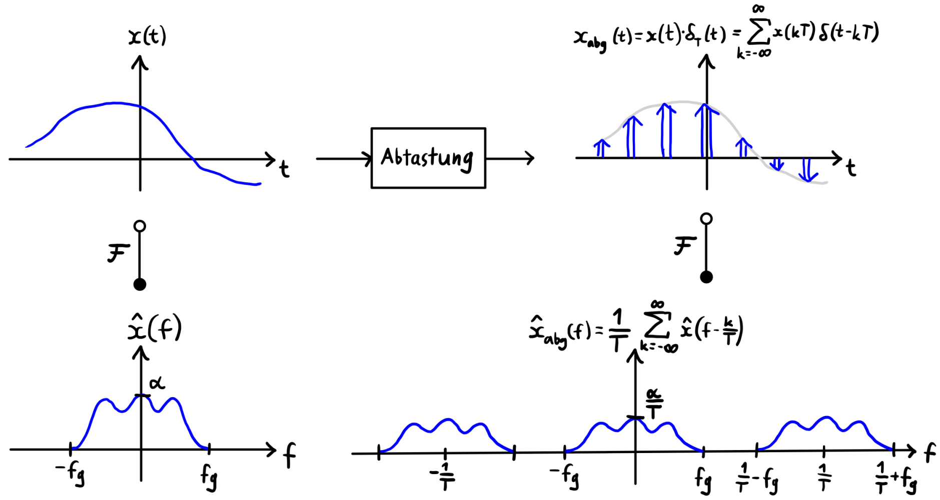


2. Wir fouriertransformieren das abgetastete Signal $x_{abg}(t)$.

Unter Verwendung von $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0) \overset{20.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$ erhalten wir:

$$\hat{x}_{abg.}(f) = \mathcal{F}\{x\cdot\delta_T\}(f) = \left(\hat{x} * \hat{\delta}_T\right)(f) = \left(\hat{x} * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\cdot - \frac{k}{T}\right)\right)(f)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\hat{x} * \delta\left(\cdot - \frac{k}{T}\right)\right)(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{x}\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

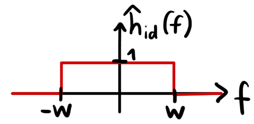


Bemerkungen:

- f_g ist die Bandbreite von $x(t)$
- $f_s := \frac{1}{T}$ ist die Abtastfrequenz (Sampling Frequenz)
- Die Abtastung von $x(t)$ erzeugt im Frequenzbereich um Skalierungsfaktor $\frac{1}{T}$ skalierte Kopien von $\hat{x}(f)$, die um $\frac{1}{T}$ verschoben sind, wobei T die Abtastperiode ist.

Die Abtastung im Zeitbereich entspricht einer Periodisierung im Frequenzbereich.

Ziel ist es, das abgetastete Signal perfekt zu rekonstruieren. (Wir wollen das analoge Signal ohne Informationsverlust aus den Abtastwerten zurückgewinnen.) Dies können wir folgenderweise implementieren:

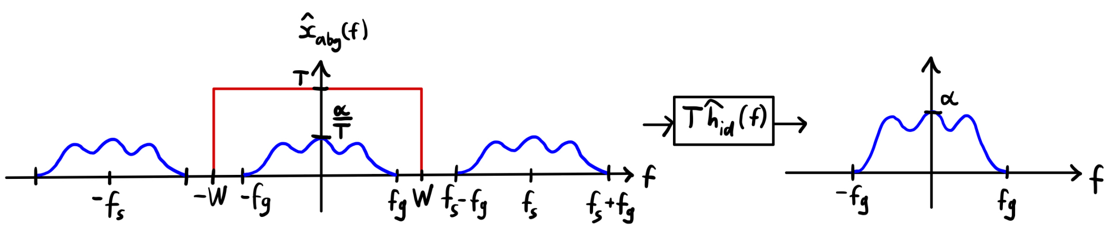


wobei $\hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases}$ ein idealer Tiefpassfilter mit Breite W ist.

Zur Erinnerung: $\hat{x}_{abg.} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \dfrac{k}{T}\right)$

Der Term $\cdot T$ beim idealen Tiefpassfilter steht für die Skalierung, da wir ohne diesen Term $\frac{1}{T}x(t)$ anstatt $x(t)$ erhalten.

Graphisch sieht es wie folgt aus:

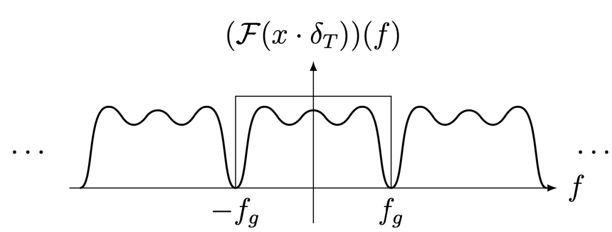


Durch Rücktransformation erhält man das ursprüngliche Signal $x(t)$.

Bemerkung: Die Wahl von W ist entscheidend und in einigen Fällen ist es gar nicht möglich, das Signal zu rekonstruieren.

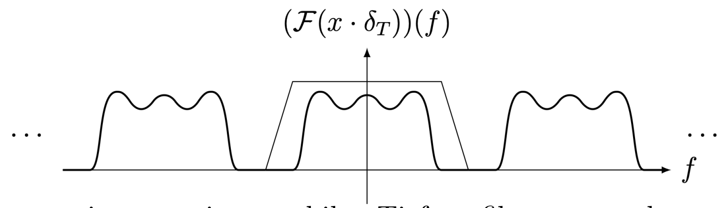
Das Spektrum des abgetasteten Signals hängt von der Abtastfrequenz $f_s = \frac{1}{T}$ ab. Wir unterscheiden zwischen drei Fällen:

1. **Kritische Abtastung:** $f_s = 2f_g$



Wir können das Signal mit einem idealen Tiefpassfilter der Breite $W = f_g$ rekonstruieren

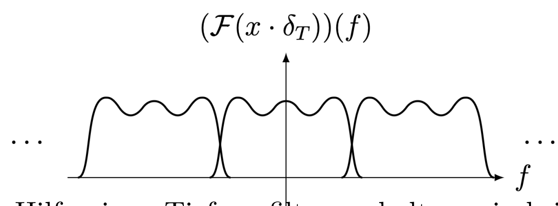
2. **Überabtastung:** $f_s > 2f_g$



In diesem Fall können wir sogar einen stabilen Tiefpassfilter verwenden.

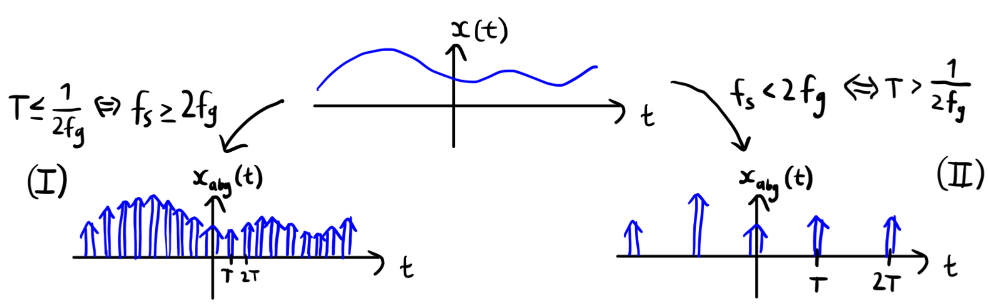
Bemerkung: Überabtastung mit $f_s > 2f_g$ garantiert nicht nur, dass perfekte Rekonstruktion möglich ist, sondern hilft im Allgemeinen auch, die Empfindlichkeit auf Rauschen im Abtastprozess zu verringern und ermöglicht es, Tiefpassfilter mit speziellen Eigenschaften (z.B. Stabilität) einzusetzen.

3. **Unterabtastung:** $f_s < 2f_g$



Es gibt **Aliasing**. Mit Hilfe eines Tiefpassfilters erhalten wir keine perfekte Version von $\hat{x}(f)$, eine Rekonstruktion des ursprünglichen Signals ohne Informationsverluste ist somit nicht möglich.

Intuition



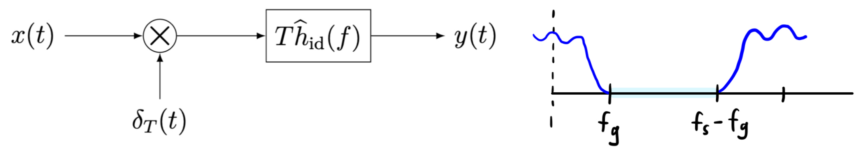
Im ersten Fall tasten wir genug schnell ab, sodass dabei keine Informationen verloren gehen. Im zweiten Fall tasten wir jedoch zu langsam ab, sodass zu viele Informationen über das Signal verloren gehen und eine perfekte Rekonstruktion nicht mehr möglich ist.

Abtasttheorem

Ein Signal mit der Bandbreite f_g kann aus seinen Abtastwerten, genommen mit einer Rate von $f_s \geq 2f_g$, eindeutig rekonstruiert werden. Die kritische Rate $f_s = 2f_g$ wird als **Nyquistrate** bezeichnet.

Interpretation als Interpolation

Wir betrachten das folgende System:



wobei $\hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \; h_{id}(t) = \dfrac{\sin(2\pi W t)}{\pi t}$

Damit die perfekte Rekonstruktion möglich ist, muss $W \in [f_g,\ f_s - f_g]$ und $f_s \geq 2f_g$ gelten.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \left(\underbrace{(x \cdot \delta_T)}_{x_{abg}} * T h_{id} \right)(t) = T(x_{abg} * h_{id})(t) \\
&= T \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(\cdot - kT) \right) * h_{id} \right](t) \\
&= T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\left(\delta(\cdot - kT)\right) * h_{id} \right)(t) \\
&= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h_{id}(t - kT), \quad \text{wobei} \\
h_{id} &= \frac{\sin(2\pi W t)}{\pi t}
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir die **Rekonstruktionsformel**:

$$
\boxed{y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(2\pi W(t - kT)\right)}{\pi(t - kT)}}
$$

Kritische Abtastung

Bei der kritischen Abtastung haben wir $f_s = 2f_g$, d.h. $f_g = f_s - f_g$

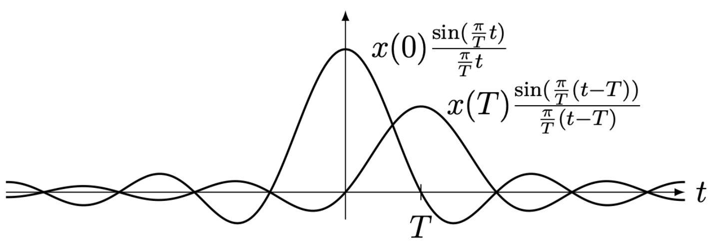
Somit haben wir $W = f_g = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$

Deswegen gilt bei der kritischen Abtastung: $y(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$

Im Allgemeinen ist die Rekonstruktion eines Signals aus seinen Abtastwerten gegeben durch:

$$y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h(t-kT)$$

wobei $h(t)$ die Impulsantwort eines Filters ist. In unserem Fall haben wir $h(t) = h_{id}(t)$ gewählt, grundsätzlich kann man aber auch andere Filter verwenden.



Interpretation als Entwicklung in ein Orthonormalsystem

Die Rekonstruktionsformel

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$$

entspricht einer Entwicklung eines bandbegrenzten Signals $x(t)$ in ein Orthonormalsystem. Wir betrachten hierbei den linearen Unterraum X der f_g−bandbegrenzten Signale in $L^2(\mathbb{R})$. Die Funktionen

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} = \sqrt{T} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\pi(t-kT)}$$

bilden ein Orthonormalsystem in X. Es gilt:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{T} x(kT) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}}_{e_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x,\ e_k \rangle \cdot e_k$$

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2023, Aufgabe 2

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal

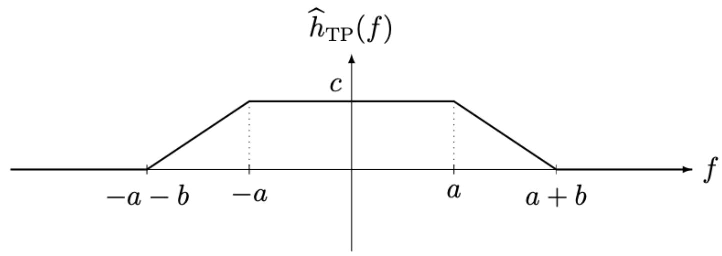
$$x(t) = \frac{\sin^2(2\pi t)}{\pi^2 t^2}$$

welches an folgendem System anliegt:

Der D/A-Wandler ist durch die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

spezifiziert. Das LTI-System H_{TP} hat den im folgenden Diagramm dargestellten Frequenzgang $\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f)$



wobei $a > 0$ und $b, c \geq 0$. Nehmen Sie durchgehend $T = 1/3$ an.

★ (a) Berechnen Sie $\widehat{x}(f)$.

★ (b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{x}_a(f)$ und schreiben Sie diese als Funktion von $\widehat{x}(f)$.

(c) Skizzieren Sie $\widehat{x}_a(f)$ im Bereich $f \in [-5, 5]$. Bitte beschriften Sie die Achsen in der Skizze.

(d) Berechnen Sie nun $y(t)$ für den Spezialfall $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$.

(e) Bestimmen Sie Werte $a \in (0, \infty)$ und $b, c \in [0, \infty)$, sodass $x(t) = y(t)$ gilt. Begründen Sie ihre Antwort.
Hinweis: Sie müssen keine zulässigen Bereiche für die Werte von a, b, c angeben, ein konkretes Zahlenbeispiel reicht!