

Übungsstunde 10

Themenüberblick

- Repetition: Abtasttheorem
- Zeitdiskrete Signale und Systeme

Zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT)

Zeitdiskrete LTI-Systeme und Systemeigenschaften

Differenzengleichungen

Aufgaben für diese Woche

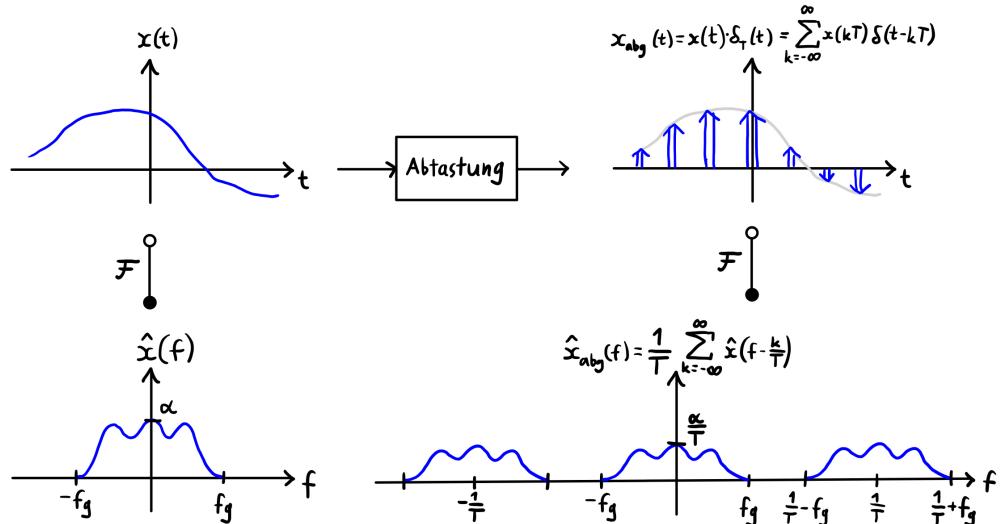
97, 98, 99, 100, 101, **102**, **103**, **104**, 105, 106, **107**, **108**, 109, **110**, **111**, **112**, 113

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Abtasttheorem

Abgetastete Signale im Frequenzbereich

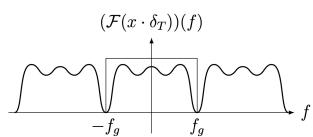
$$x_{abg.}(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad \text{O} \xrightarrow{20.} \hat{x}_{abg.}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



Die Abtastung im Zeitbereich entspricht einer Periodisierung im Frequenzbereich.

Die Abtastung von $x(t)$ erzeugt im Frequenzbereich um Skalierungsfaktor $\frac{1}{T}$ skalierte Kopien von $\hat{x}(f)$, die um $f_s = \frac{1}{T}$ verschoben sind, wobei T die Abtastperiode ist.

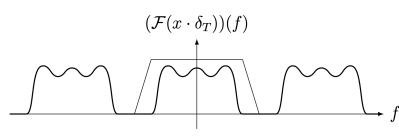
Kritische Abtastung



$$f_s = 2f_g$$

Wir können das Signal mit einem idealen Tiefpassfilter der Breite $W = f_g$ rekonstruieren.

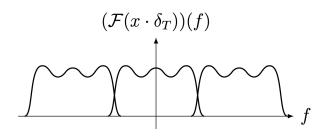
Überabtastung



$$f_s > 2f_g$$

In diesem Fall können wir sogar einen stabilen Tiefpassfilter verwenden. Überabtastung mit $f_s > 2f_g$ garantiert nicht nur, dass perfekte Rekonstruktion möglich ist, sondern hilft im Allgemeinen auch, die Empfindlichkeit auf Rauschen im Abtastprozess zu verringern.

Unterabtastung



$$f_s < 2f_g$$

Es gibt **Aliasing**. Mit Hilfe eines Tiefpassfilters erhalten wir keine perfekte Version von $\hat{x}(f)$, eine Rekonstruktion des ursprünglichen Signals ohne Informationsverluste ist somit nicht möglich.

Abtasttheorem

Ein Signal mit der Bandbreite f_g kann aus seinen Abtastwerten, genommen mit einer Rate von $f_s \geq 2f_g$, eindeutig rekonstruiert werden. Die kritische Rate $f_s = 2f_g$ wird als **Nyquistrate** bezeichnet.

Rekonstruktion

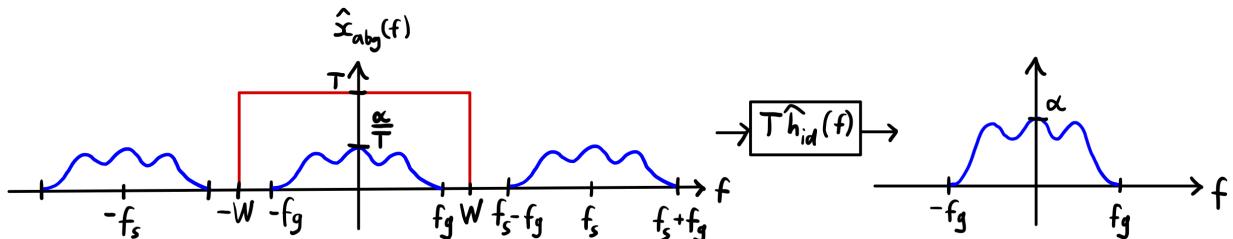
Im Allgemeinen ist die Rekonstruktion eines Signals aus seinen Abtastwerten gegeben durch:

$$y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)h(t - kT)$$

wobei $h(t)$ die Impulsantwort eines Filters ist. Im Falle der kritischen Abtastung brauchen wir für die Rekonstruktion einen idealen Tiefpassfilter $h(t) = h_{id}(t)$ mit Breite $W = f_g = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$.

$$\hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad \bullet \circ h_{id}(t) = \frac{\sin(2\pi W t)}{\pi t}$$

Deswegen gilt bei der kritischen Abtastung: $y(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin(\frac{\pi}{T}(t - kT))}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}$



Zeitdiskrete Signale

Eine Abtastung im Zeitbereich ergibt eine periodische Fortsetzung des Spektrums, d.h.

$$\hat{x}_{\text{abg}}(f) = \mathcal{F}\{x \cdot \delta_T\}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

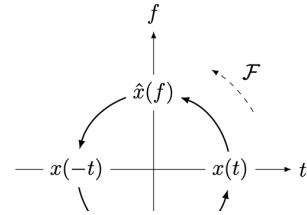
Dieses Signal ist $\frac{1}{T}$ -periodisch und besitzt somit eine Fourierreihendarstellung. Wir verwenden im Folgenden die Poissonsche Summenformel und die Dualität der Fouriertransformation.

Poissonsche Summenformel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t + kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k/T) e^{2\pi i k t / T}$$

Wir setzen ein: $h \rightarrow \hat{x}$, $t \rightarrow f$, $T \rightarrow \frac{1}{T}$

Dualität der Fouriertransformation

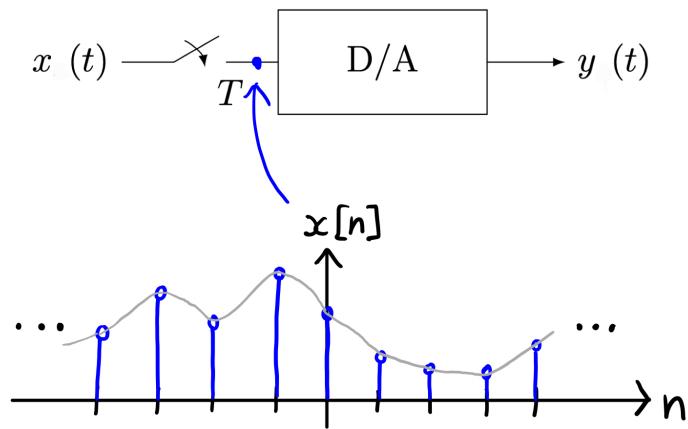


$$\Rightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \cdot T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{x}(kT)}_{x(-kt)} e^{2\pi i k f T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-kT) e^{2\pi i k f T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(kT)}_{c_k} e^{-2\pi i k f T}$$

Indem wir im letzten Schritt die Summationsreihenfolge gewechselt haben ($k \rightarrow -k$), haben wir das abgetastete Signal im Frequenzbereich $\hat{x}_{\text{abg}}(f)$ als komplexe Fourierreihe dargestellt. Die **Abtastwerte** $x(kT)$ sind die Koeffizienten der Fourierreihe des Spektrums $\hat{x}_{\text{abg}}(f)$.

Notation für Zeitdiskrete Signale

$x_d[k] := x(kT)$, wobei $k \in \mathbb{Z}$, nimmt nur ganze Zahlen als Argument



Zeitdiskrete Signale im Frequenzbereich

Wir definieren $\theta = Tf$ und erhalten somit mithilfe der Formel von oben

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k]e^{-2\pi ik\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-2\pi ikTf} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta - k}{T}\right) = \hat{x}_d(\theta)$$

Somit erhalten wir die Zeitdiskrete Fouriertransformation (*Discrete Time Fourier Transform*):

$$(\text{DTFT}) \quad \hat{x}_d(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]e^{-2\pi i n \theta}$$

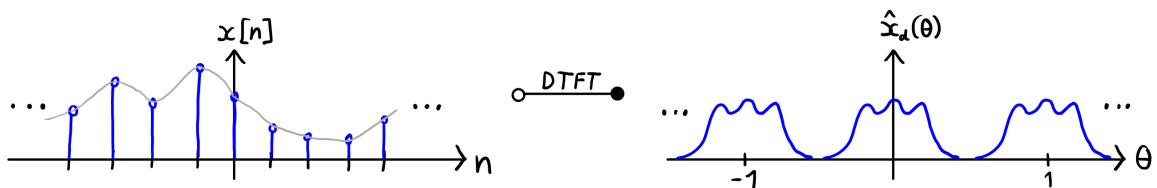
$$(\text{IDTFT}) \quad x_d[n] = \int_0^1 \hat{x}_d(\theta) e^{2\pi i n \theta} d\theta$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \hat{x}_d(\theta) \cdot e^{2\pi i n \theta} d\theta &= \int_0^1 \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_d[l] e^{-2\pi i l \theta} \right) \cdot e^{2\pi i n \theta} d\theta = \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_d[l]}_{\text{unabhg. von } \theta} \cdot \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi i(n-l)\theta} d\theta}_{\delta[n-l]} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_d[l] \delta[n-l] = x_d[n] \end{aligned}$$

Bemerkungen:

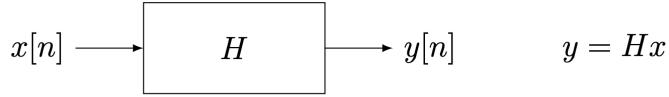
- Die DTFT transformiert ein Signal von einem **diskreten Zeitbereich** in einen **kontinuierlichen Frequenzbereich**.
- $\theta = Tf = \frac{f}{f_s}$ ist die **relative Frequenz**. (T = Abtastperiode und f_s = Abtastfrequenz)
- $\hat{x}_d(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta - k}{T}\right)$ ist **1-periodisch** in θ .



Formelsammlung: Fouriertransformation zeitdiskreter Signale (DTFT)

54.	$x[n] = \int_0^1 \hat{x}(\theta) e^{2\pi i n \theta} d\theta$	○—●	$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i n \theta}$
55.	$x[n - N_0]$	○—●	$e^{-2\pi i N_0 \theta} \hat{x}(\theta)$
56.	$e^{2\pi i n \theta_0} x[n]$	○—●	$\hat{x}(\theta - \theta_0)$
57.	$x^*[n]$	○—●	$\hat{x}^*(-\theta)$
58.	$x[-n]$	○—●	$\hat{x}(-\theta)$
59.	$(x * y)[n]$	○—●	$\hat{x}(\theta) \hat{y}(\theta)$
60.	$x[n]y[n]$	○—●	$(\hat{x} * \hat{y})(\theta)$ (siehe 2)
61.	$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	○—●	$\Re\{\hat{x}(\theta)\}$
62.	$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	○—●	$i\Im\{\hat{x}(\theta)\}$
63.	$\Re\{x[n]\}$	○—●	$\hat{x}_e(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) + \hat{x}^*(\theta))$
64.	$i\Im\{x[n]\}$	○—●	$\hat{x}_o(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) - \hat{x}^*(\theta))$
65.	$nx[n]$	○—●	$\frac{i}{2\pi} \frac{d\hat{x}(\theta)}{d\theta}$
66.	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	○—●	$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i \theta}} \hat{x}(\theta) + \frac{1}{2} \hat{x}(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k)$
67.	$\delta[n - N_0]$	○—●	$e^{-2\pi i N_0 \theta}$
68.	$e^{2\pi i \theta_0 n}$	○—●	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_0 - k)$
69.	$\cos(2\pi \theta_0 n)$	○—●	$\frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + \theta_0 - k) + \delta(\theta - \theta_0 - k) \right)$
70.	$\sin(2\pi \theta_0 n)$	○—●	$\frac{i}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + \theta_0 - k) - \delta(\theta - \theta_0 - k) \right)$
71.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	○—●	$\frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{k}{N}\right)$
72.	$\sigma[n]$	○—●	$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i \theta}} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k)$
73.	$a^n \sigma[n], \quad a < 1$	○—●	$\frac{1}{1 - ae^{-2\pi i \theta}}$
74.	$\frac{\sin(2\pi n \alpha)}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < 1/2$	○—●	$\begin{cases} 1, & \theta \leq \alpha \\ 0, & \alpha < \theta \leq 1/2 \end{cases}$ (1-periodisch)
75.	$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	○—●	$\frac{\sin((2N_1 + 1)\pi\theta)}{\sin(\pi\theta)}$

Zeitdiskrete Systeme



Die folgenden Eigenschaften sind im zeitdiskreten Bereich analog definiert wie im zeitkontinuierlichen. (Vgl. ÜS 3)

Linearität

- $H(\alpha x_1 + x_2) = \alpha Hx_1 + Hx_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Zeitinvarianz

- $H(x[\cdot - n_0]) = (Hx)[\cdot - n_0] \quad \forall x \in X, \forall n_0 \in \mathbb{Z}$

Kausalität

- $x_1[n] = x_2[n] \quad \forall n \leq n_0 \implies (Hx_1)[n] = (Hx_2)[n] \quad \forall n \leq n_0 \quad \forall x_1, x_2 \in X, \forall n_0 \in \mathbb{Z}$

BIBO-Stabilität

- $\forall x \in X \text{ mit } |x[n]| \leq B_x < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies \exists B_y < \infty \text{ mit } |(Hx)[n]| \leq B_y \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Kronecker-Delta Funktion

Die Kronecker-Delta Funktion ist definiert als

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

Es gilt $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$

Zeitdiskrete LTI-Systeme

Ein zeitdiskretes System ist LTI, wenn es linear und zeitinvariant ist. Die Systemantwort von zeitdiskreten LTI-Systemen lautet:

$$y[n] = (Hx)[n] = H \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[\cdot - k] \right) [n] \stackrel{\text{Lin.}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] (H(\delta[\cdot - k])) [n] \stackrel{\text{Zeitinv.}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{(H\delta)[n - k]}_{=: h[n - k]}$$

Die zeitdiskrete Impulsantwort ist definiert als $h[n] = (H\delta)[n]$

Die Antwort von einem LTI-System ist also:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \xrightarrow[59]{\text{DTFT}} \hat{y}(\theta) = \hat{x}(\theta)\hat{h}(\theta)$$

Systemeigenschaften Zeitdiskreter LTI-Systeme

Ein LTI-System heisst ...

- **kausal**, genau dann wenn: $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$
- **BIBO-stabil**, wenn: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$, (also $h \in l^1$)

Prüfungsaufgabe Frühjahr: 2017, Aufgabe 3.a)

- a) (14 Punkte) Wir betrachten das zeitdiskrete LTI-System H_1 mit der Impulsantwort

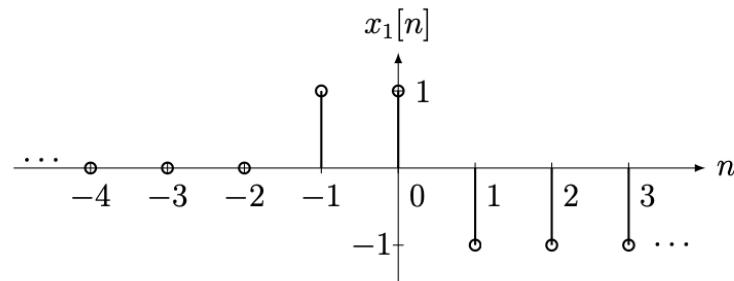
$$h_1[n] = 4 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) \sigma[n]$$

- i. Bestimmen Sie die Sprungantwort $a_1[n]$ von H_1 (d.h., das Ausgangssignal für das Eingangssignal $\sigma[n]$).

Hinweis: Für $q \neq 1$ gilt $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

- ii. Bestimmen Sie das Ausgangssignal für das Eingangssignal

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{-1, 0\}, \\ -1, & n \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Leiten Sie das Resultat als Funktion der Sprungantwort a_1 her. Begründen Sie die Schritte in Ihrer Herleitung über die Eigenschaften von LTI-Systemen.

- iii. Geben Sie eine allgemeine hinreichende Begründung für BIBO-Stabilität eines zeitdiskreten LTI-Systems an. Zeigen Sie mithilfe dieser Bedingung, dass H_1 BIBO-stabil ist.

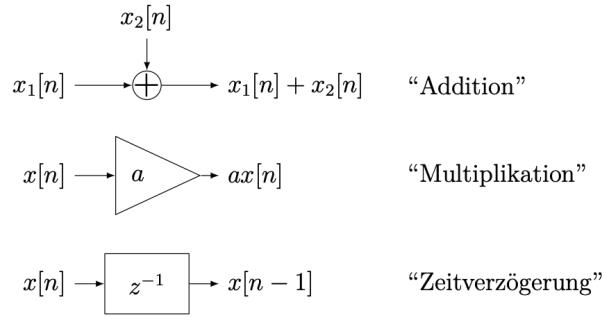
A large grid of squares, approximately 20 columns by 20 rows, intended for the student to write their answer to the question in part iii.

Differenzengleichungen

Die Eingangs-Ausgangsbeziehung vieler zeitdiskreter LTI-Systeme kann mithilfe von Differenzengleichungen beschrieben werden. Diese Differenzengleichungen haben die Form:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n - m]$$

Um Differenzengleichungen zu beschreiben sind Blockschaltbilder sehr hilfreich. In Blockschaltbildern verwenden wir die folgenden Elemente:

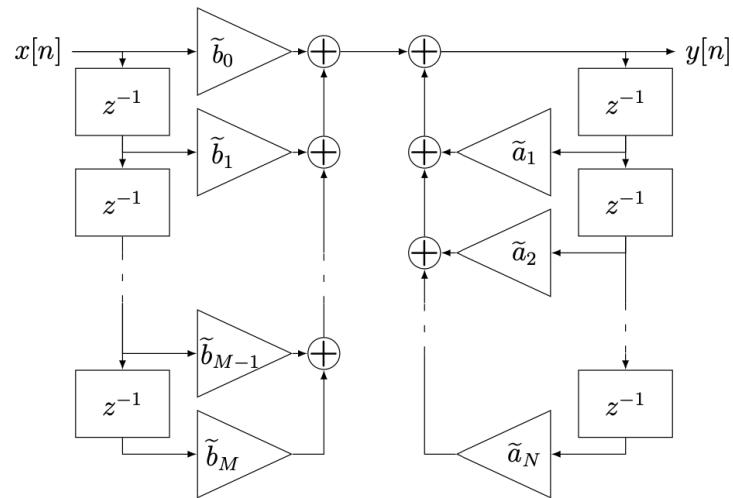


Wenn wir obige Differenzengleichung umformen, erhalten wir:

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n - k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n - m] \implies y[n] = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n - k] + \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_0} x[n - m]$$

$$\text{Wir setzen } -\frac{a_k}{a_0} = \tilde{a}_k \text{ und } \frac{b_m}{a_0} = \tilde{b}_m \implies y[n] = \sum_{k=1}^N \tilde{a}_k y[n - k] + \sum_{m=0}^M \tilde{b}_m x[n - m]$$

$$\hat{y}(\theta) e^{-2\pi i k \theta} \quad \hat{x}(\theta) e^{-2\pi i m \theta}$$



Beispiel

Wir betrachten ein LTI-System beschrieben durch die Differenzengleichung:

$$2y[n] - 3y[n-3] = x[n] + 6x[n-1] - 8x[n-7]$$

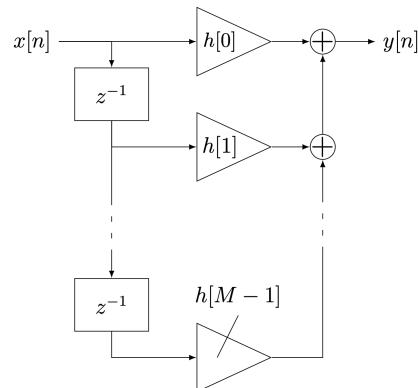
Ziel: Suche $\hat{h}(\theta) = \frac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)}$. Um die Fouriertransformierte der Impulsantwort zu finden, nehmen wir die DTFT auf beiden Seiten der Differenzengleichung.

Dank $x[n-N_0]$ 55. $e^{-2\pi i N_0 \theta} \hat{x}(\theta)$ haben wir: $\left(\sum_{k=0}^N a_k e^{-2\pi i k \theta} \right) \hat{y}(\theta) = \left(\sum_{m=0}^M b_m e^{-2\pi i m \theta} \right) \hat{x}(\theta)$

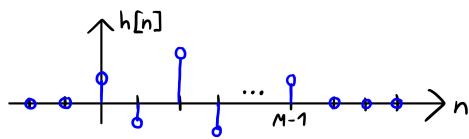
$$\text{Somit } \hat{h}(\theta) = \frac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m e^{-2\pi i m \theta}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-2\pi i k \theta}}$$

FIR-Filter (Finite Impulse Response)

Die Impulsantwort von FIR-Filters hat eine **endliche Länge**. Eine Konsequenz davon ist, dass FIR-Filter keine Rückkopplungen haben.

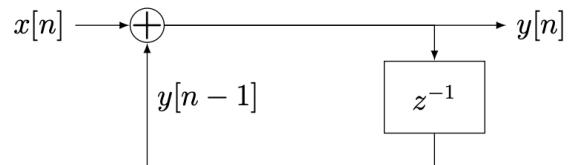


$$y[n] \stackrel{\text{LTI}}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n-l] = \sum_{l=0}^{M-1} h[l]x[n-l]$$



IIR-Filter (Infinite Impulse Response)

Die Impulsantwort von IIR-Filters hat **unendliche Länge**. Das Blockschaltbild hat Rückkopplungen, welche oft zu Stabilitätsproblemen führen. Wenn $h[n]$ unendlich lang ist, kann es gut sein, dass die Impulsantwort nicht absolut summierbar ist.



$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + y[n-1] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x[k] \stackrel{\text{LTI}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h[n-k] = \sigma[n-k] \Leftrightarrow h[n] = \sigma[n]$$

Dieses System ist nicht BIBO-stabil!

Prüfungsaufgabe: Frühjahr: 2017, Aufgabe 3.b)

b) (11 Punkte) Wir betrachten nun das zeitdiskrete LTI-System H_2 mit Frequenzgang

$$\hat{h}_2(\theta) = \frac{7e^{4\pi i\theta}}{1 - \frac{1}{12}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{12}e^{-4\pi i\theta}}$$

- i. Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_2[n]$ von H_2 . Ist H_2 kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ii. Bestimmen Sie die zu H_2 gehörige Differenzengleichung.

