

SST1 Übungsstunde 2

Matteo Dietz

September 2025

Organisatorisches

- Study-Center dienstags 18:15-19:00 im ETZ E7
Kommt in den ersten 15 Minuten des Study-Centers!
- Vorlesungsskript und Übungsskript auf der Vorlesungswebsite
Username: sigsys2025, Passwort: Fourier2025
- Link zu meinen Handouts ebenfalls auf der Vorlesungswebsite

Themenüberblick

- **Kurze Repetition:**

Unterräume, Normierte Lineare Räume

- **Hilberträume:**

Inneres Produkt, Orthogonalität, Orthonormalsysteme, L^2 als unendlich dimensionaler normierter Raum, Gram-Schmidt

- **Systeme und Systemeigenschaften:**

Linearität, Nullraum, Bildraum, Stetigkeit

Aufgaben für diese Woche

16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

Die fettgedruckten Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Lineare Unterräume

- **Definition:** Ein linearer Unterraum ist eine **nichtleere Teilmenge** (\tilde{X}) eines linearen Raumes X , wenn gilt:

- (i) $x_1 + x_2 \in \tilde{X}$, für alle $x_1, x_2 \in \tilde{X}$.
- (ii) $\alpha x \in \tilde{X}$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $x \in \tilde{X}$.

Repetition: Funktionsräume

- Für eine nichtleere Menge S definiert man den linearen Raum X als Menge aller Funktionen von S nach \mathbb{C} , wobei die Addition und die skalare Multiplikation wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} (+) \quad & \forall x_1, x_2 \in X \quad + : X \times X \rightarrow X \\ & (x_1 + x_2)(s) = x_1(s) + x_2(s) \quad \forall s \in S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cdot) \quad & \forall \alpha \in \mathbb{C}, x \in X \quad \cdot : \mathbb{C} \times X \rightarrow X \\ & (\alpha \cdot x)(s) = \alpha x(s) \end{aligned}$$

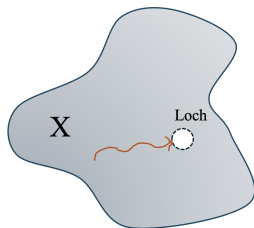
Repetition: Normierte Lineare Räume

- **Definition:** Ein normierter linearer Raum ist ein Paar $(X, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem linearen Raum X und einer Norm auf X .

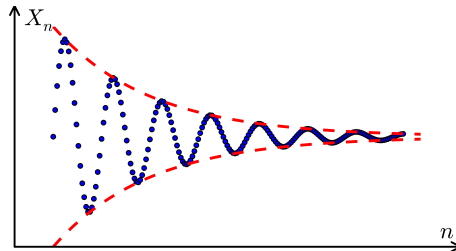
Hilberträume

- Ein Hilbertraum ist ein **linearer Raum**. Dieser Raum ist
 - (i) ausgestattet mit einem **inneren Produkt**.
 - (ii) **vollständig** bezüglich der induzierten Norm dieses inneren Produktes.

Vollständigkeit



Kein Hilbertraum



Cauchy-Folge

Inneres Produkt: Definition

- Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ in einem linearen Raum X heisst **inneres Produkt**, wenn folgende Eigenschaften gelten:
 - (i) Additivität im 1. Argument: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
 - (ii) Homogenität im 1. Argument: $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
 - (iii) Konjugierte Symmetrie: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
 - (iv) Positive Definitheit: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Inneres Produkt: Bemerkungen

- Additiv im 2. Argument:

$$\langle x, y + z \rangle = \langle y + z, x \rangle^* = \langle y, x \rangle^* + \langle z, x \rangle^* = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

- komplexe Konjugation:

$$\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle^* = \alpha^* \langle y, x \rangle^* = \alpha^* \langle x, y \rangle$$

Inneres Produkt: Induzierte Norm

- Sei X ein linearer Raum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$
- $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ist die von diesem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **induzierte Norm**.

Orthogonalität

- Sei X ein linearer Raum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 $x_1, x_2 \in X$ sind **orthogonal**, falls $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.
- **Bemerkungen:**
 - (i) Orthogonalität \implies Lineare Unabhängigkeit
 - (ii) n paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem linearen Raum der Dimension n bilden eine orthonormale Basis in diesem Raum.

Satz des Pythagoras

Wenn $\langle x, y \rangle = 0$, dann $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Beweis:

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Intuition für \mathbb{R}^2 : $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \underbrace{|\cos \angle(u, v)|}_{\in [0,1]}$

Aufgabe 16

Vollständiges Orthonormalsystem

- $\{e_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ in X ist ein vollständiges Orthonormalsystem für den Hilbertraum X , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

① $\langle e_l, e_{l'} \rangle = \begin{cases} 1, & l = l' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \text{ für } l, l' \in \mathbb{Z}$

② Für jedes $x \in X$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\langle x, e_l \rangle|^2$

L^2 als unendlich dimensionaler normierter Raum

- $L^2([0, 1])$ ist der lineare Raum der auf $[0, 1]$ quadratisch integrierbaren Signale. Formal:

$$L^2([0, 1]) = \left\{ x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 |x(t)|^2 < \infty \right\}$$

- $L^2([0, 1])$ ist **unendlich dimensional**.
- $\{e^{2\pi i n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ist eine **ONB** in diesem Raum

L^2 als unendlich dimensionaler normierter Raum

L^2 als unendlich dimensionaler normierter Raum

Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren

- Sei $\{w_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dann existiert eine **ONB** $\{v_i\}_{i=1}^n = \{v_1, \dots, v_n\}$ mit:

$\text{Span}\{v_1, \dots, v_j\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_j\}$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren

Algorithmus

Für $j = 1, 2, \dots, n$:

$$v'_j = w_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_i, w_j \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

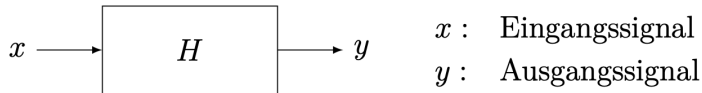
$$v_j = \frac{v'_j}{\|v'_j\|}$$

$$j \rightarrow j + 1$$

Aufgabe 18

Systeme & Beispiele

Ein System hat folgendes Blockschaltbild:



Dabei ist $x \in X$ und $y \in Y$, wobei X und Y lineare Räume sind.

Linearität

- Ein System $H : X \rightarrow Y$ ist **linear**, wenn:
 - (i) **Additivität:** $H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2$, für alle $x_1, x_2 \in X$
 - (ii) **Homogenität:** $H(\alpha x) = \alpha Hx$, für alle $x \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$
- Falls das System (i) \vee (ii) nicht erfüllt, heisst H **nichtlinear**.

Linearität: Bemerkungen

- Wenn H ein lineares System ist, dann muss $H0 = 0$ immer gelten.
- Wenn dies also nicht erfüllt ist, dann muss H nichtlinear sein.

Aufgabe 23

Aufgabe 24

Nullraum

- Sei $H : X \rightarrow Y$ ein lineares System

Der Nullraum von H ist die Teilmenge von X definiert durch $\mathcal{N}(H) = \{x \in X : Hx = 0\}$.

$\mathcal{N}(H)$ ist ein linearer Unterraum von X .

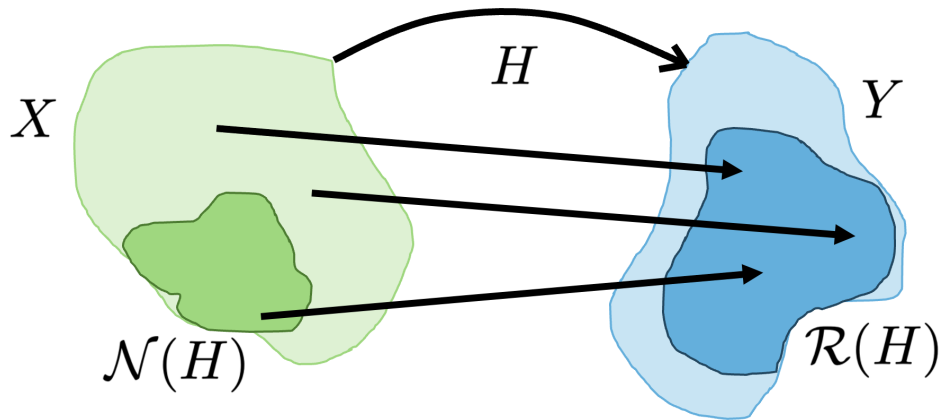
Bildraum

- Sei $H : X \rightarrow Y$ ein lineares System

Der Bildraum von H ist die Teilmenge von Y definiert durch $\mathcal{R}(H) = \{y = Hx : x \in X\}$.

$\mathcal{R}(H)$ ist ein linearer Unterraum von Y .

Nullraum und Bildraum



- **Theorem:** Das System H ist **linear und stetig**
 \Leftrightarrow Für jede konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ gilt:

$$H \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i H x_i$$

$\varepsilon - \delta$ Stetigkeit

- Seien $(X, || \cdot ||)$ und $(Y, || \cdot ||)$ normierte lineare Räume.

Das System $H : X \rightarrow Y$ ist **stetig** in $x_0 \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängiges $\delta > 0$ gibt, so dass:

$\forall x \in X$ mit $||x - x_0|| < \delta$ folgt, dass $||Hx - Hx_0|| \leq \varepsilon$.