SST1 Übungsstunde 9

Matteo Dietz

November 2025

Themenüberblick

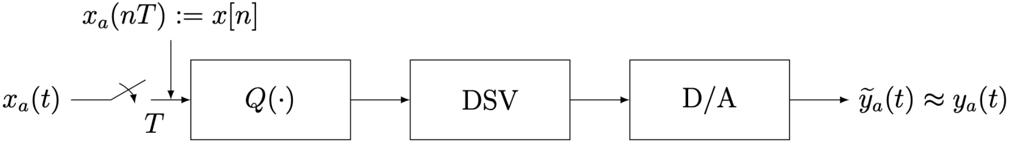
- **Abtasttheorem**:
  Digitale Systeme
  Abgetastete Systeme im Frequenzbereich
  Aliasing, Interpolation, Kritische Abtastung
  Interpretation als Entwicklung in ein Orthonormalsystem

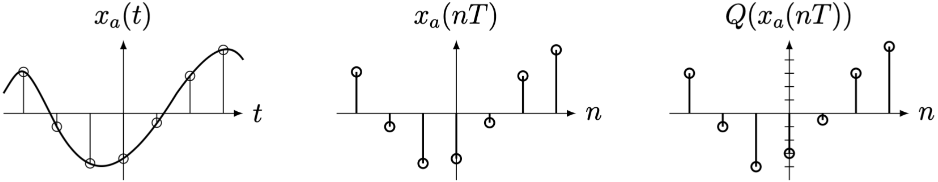
Aufgaben für diese Woche

83, 84, **85**, 86, **87**, 88, **89**, **90**, 91, **92**, **93**, **94**, 95, **96**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Digitale Systeme



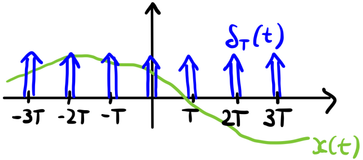


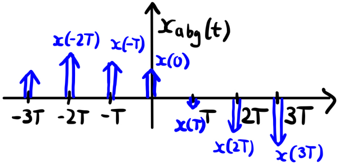
Abgetastete Signale im Frequenzbereich

1. Abtastung wird modelliert als Multiplikation mit einem Deltakamm:

$$x_{abg.}(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$





Abgetastete Signale im Frequenzbereich

2. Wir fouriertransformieren das abgetastete Signal $x_{abg}(t)$.

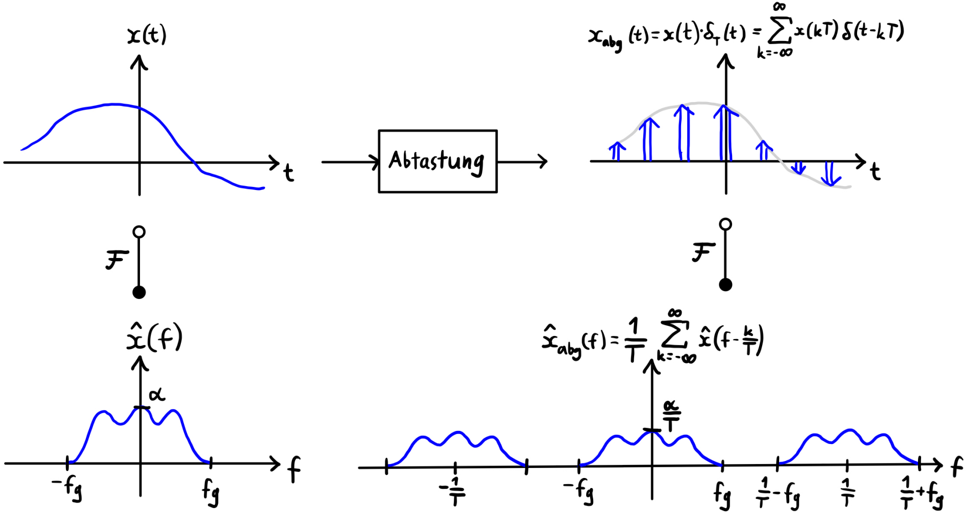
$$\hat{x}_{abg.}(f) = \mathcal{F}\{x \cdot \delta_T\}(f) = \left(\hat{x} * \hat{\delta}_T\right)(f)$$

$$\overset{20.}{=} \left(\hat{x} * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\cdot - \frac{k}{T}\right)\right)(f)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\hat{x} * \delta\left(\cdot - \frac{k}{T}\right)\right)(f)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Abgetastete Signale im Frequenzbereich



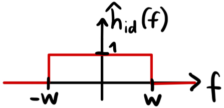
Bemerkungen

Die **Abtastung im Zeitbereich** entspricht einer **Periodisierung im Frequenzbereich**.

- f_g ist die Bandbreite von $x(t)$
- $f_s := \dfrac{1}{T}$ ist die Abtastfrequenz (*sampling frequeny*)
- Die Kopien von $\hat{x}(f)$ sind mit Faktor $\frac{1}{T}$ skaliert.

Rekonstruktion

- Wie gewinnen wir das analoge Signal ohne Informationsverlust aus den Abtastwerten zurück?

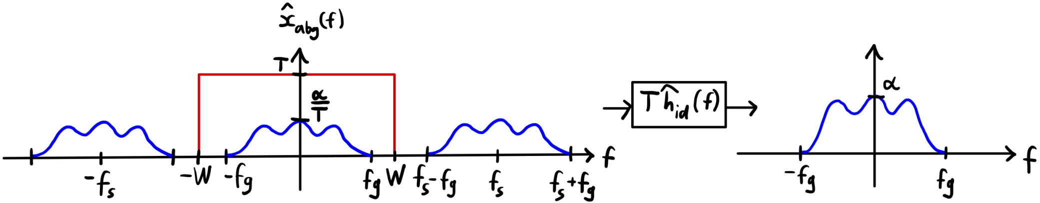


$$\hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases}$$ idealer Tiefpassfilter mit Breite W

Zur Erinnerung: $\hat{x}_{abg.} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$

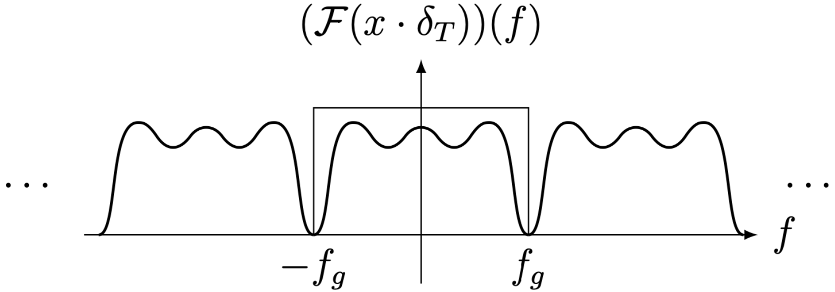
Rekonstruktion

Der Term $\cdot T$ beim idealen Tiefpassfilter steht für die Skalierung, da wir ohne diesen Term $\frac{1}{T}x(t)$ anstatt $x(t)$ erhalten würden.



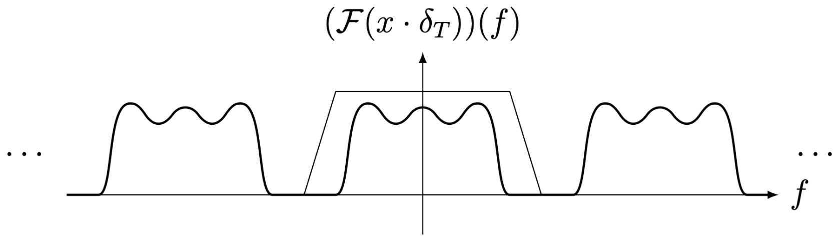
Bemerkung: Die Wahl von W ist entscheidend und in einigen Fällen ist es gar nicht möglich, das Signal zu rekonstruieren.

1. Kritische Abtastung: $f_s = 2f_g$



$\Longrightarrow$ Wir können das Signal mit einem idealen Tiefpassfilter der Breite $W = f_g$ rekonstruieren

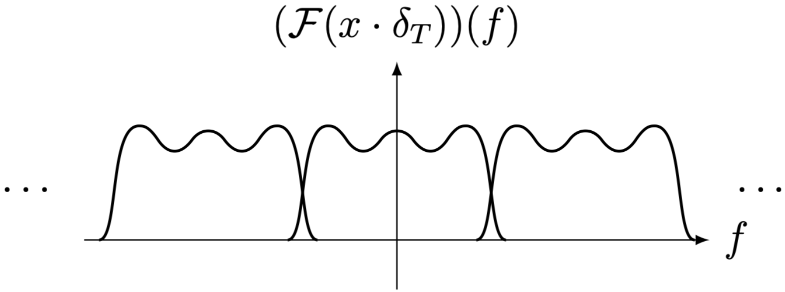
2. Überabtastung: $f_s > 2f_g$



Vorteile an Überabtastung:

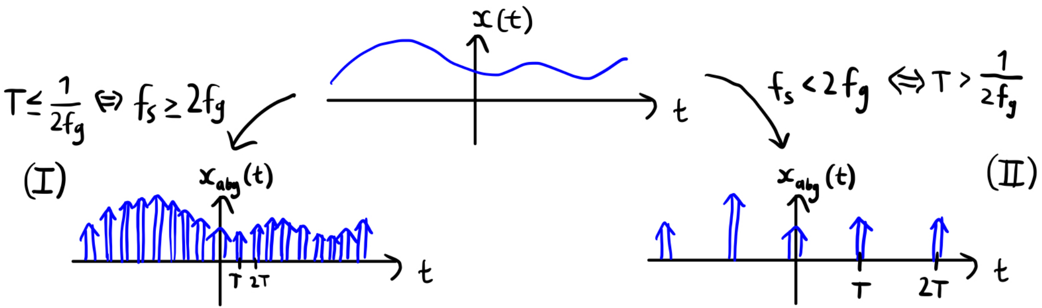
1. Wir können einen stabilen Tiefpassfilter verwenden.
2. Überabtastung verringert die Empfindlichkeit auf Rauschen.

3. **Unterabtastung:** $f_s < 2f_g$



Es gibt **Aliasing**. Mit Hilfe eines Tiefpassfilters erhalten wir keine perfekte Version von $\hat{x}(f)$.

Intuition



(I) Genug hohe Abtastrate $\implies$ kein Informationsverlust

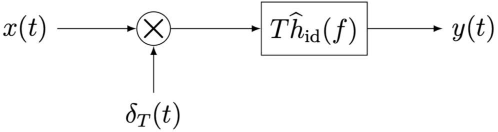
(II) Zu tiefe Abtastrate $\implies$ Informationsverlust

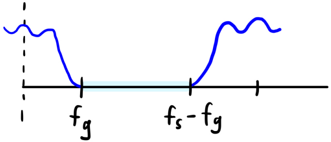
Abtasttheorem

Ein Signal mit der Bandbreite f_g kann aus seinen Abtastwerten, genommen mit einer Rate von $f_s \geq 2f_g$, eindeutig rekonstruiert werden.
Die kritische Rate $f_s = 2f_g$ wird als **Nyquistrate** bezeichnet.

Interpretation als Interpolation

- Wir betrachten das folgende System:





$$\text{wobei } \hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h_{id}(t) = \frac{\sin(2\pi W t)}{\pi t}$$

- Damit die perfekte Rekonstruktion möglich ist, muss $W \in [f_g,\ f_s - f_g]$ und $f_s \geq 2f_g$ gelten.

Interpretation als Interpolation

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \left(\underbrace{(x \cdot \delta_T)}_{x_{abg}} * Th_{id} \right)(t) = T(x_{abg} * h_{id})(t) \\
&= T \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(\cdot - kT) \right) * h_{id} \right](t) \\
&= T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \left(\delta(\cdot - kT) \right) * h_{id} \right)(t) \\
&= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h_{id}(t - kT)
\end{aligned}
$$

Rekonstruktionsformel

Also: $y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h_{id}(t - kT)$, wobei

$$h_{id} = \frac{\sin(2\pi W t)}{\pi t}$$

Somit erhalten wir die **Rekonstruktionsformel**:

$$\boxed{y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(2\pi W (t - kT)\right)}{\pi (t - kT)}}$$

Kritische Abtastung

- Kritische Abtastung: $f_s = 2f_g$, d.h. $f_g = f_s - f_g$

$$\Longrightarrow \quad W = f_g = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$$

- Allgemeine Rekonstruktion eines Signals aus Abtastwerten:

$$\boxed{y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h(t-kT)}$$

- $h(t)$ ist die Impulsantwort eines Filters.

Abtastung als Entwicklung in ein Orthonormalsystem

Die Rekonstruktionsformel

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$$

entspricht einer Entwicklung eines bandbegrenzten Signals $x(t)$ in ein Orthonormalsystem.

Abtastung als Entwicklung in ein Orthonormalsystem

Linearer Unterraum X der f_g-bandbegrenzten Signale in $L^2(\mathbb{R})$

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} = \sqrt{T}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\pi(t-kT)}$$

Diese Funktionen bilden ein Orthonormalsystem in X. Es gilt:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{T}x(kT)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}}_{e_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x,\ e_k\rangle \cdot e_k$$

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2023, Aufgabe 2