Übungsstunde 4

Themenüberblick

- **Analoge LTI Systeme im Zeitbereich:**

  Impulsantwort

  Faltung, Eigenschaften der Faltung, Graphische Faltung

  Eigenschaften der Impulsantwort

Aufgaben für diese Woche

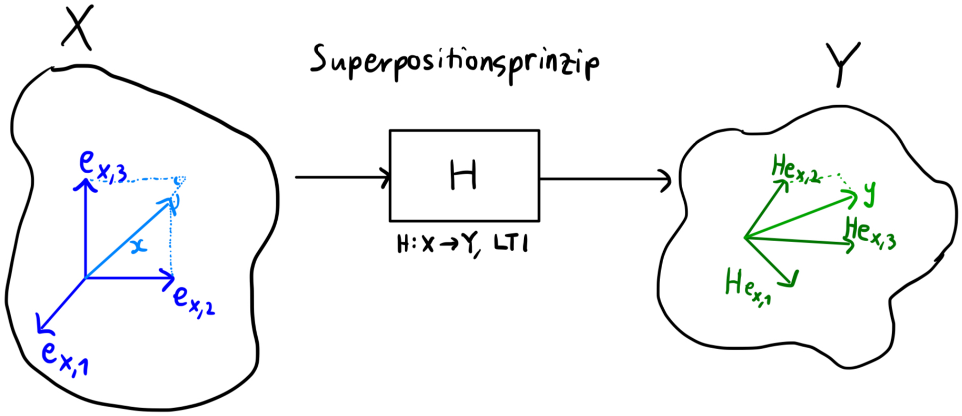
31, **33**, 34, **35**, 36, **37**, **38**, **39**, **40**, **41**, **42**, **43**, 44, **45**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Analoge Lineare Zeitinvariante Systeme im Zeitbereich

Wir betrachten in diesem Kapitel nur **LTI-Systeme**. LTI steht für *linear & time invariant*. Das heisst alle Systeme, die wir hier betrachten, sind **linear** (& **stetig**) und **zeitinvariant**. (Die genauen Definitionen dieser Eigenschaften findet ihr in den Materialien der 3. Übungsstunde.)

Um ein LTI-System $H : X \to Y$ vollständig zu charakterisieren, können wir jedes einzelne Basiselement von X durch H abbilden und aus Linearkombinationen davon die Abbildung von jedem Element in X durch H berechnen. (Es gilt das Superpositionsprinzip, da H linear ist.)



Dies wird jedoch unmöglich, sobald die linearen Räume, auf denen H definiert ist, unendlich dimensional sind.

Es gilt aber folgende wichtige Eigenschaft, die uns ermöglicht, Systeme auf unendlichdimensionalen linearen Räumen zu charakterisieren.

LTI-Systeme sind vollständig durch ihre Impulsantwort $h := (H\delta)(t)$ definiert.

Das heisst, wir können dem System einen $\delta-$Impuls als Input geben und den Output betrachten und dieser Output charakterisiert das LTI-System vollständig.

Herleitung

Annahmen: $x(t)$ sei absolut integrierbar, resp. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty$

Ein LTI-System antwortet auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit dem Ausgangssignal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau := x * h$$

wobei $h(t) = (H\delta)(t)$ die **Impulsantwort** des Systems ist.

$x * h$ nennt man die **Faltung** (englisch *convolution*) von x mit h. Es reicht also, eine einzige Messung $h(t) = (H\delta)(t)$ durchzuführen, um das System H vollständig zu charakterisieren.

Bemerkung:

System ist in der Form $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ darstellbar $\Longrightarrow$ System ist ein LTI-System.

System ist ein LTI-System $\not\Longrightarrow$ System ist in der Form $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ darstellbar.

Das heisst es gibt auch LTI-Systeme, deren Ausgangssignal sich nicht als Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort charakterisieren lässt, jedoch nicht umgekehrt.

Wir werden aber in SST1 immer einfachheitshalber annehmen, dass wann immer wir ein LTI-System gegeben haben, dann handelt es sich um LTI-Systeme, die auch stetig sind und eine Darstellung der Form $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ haben.

Aufgabe 42.a)

Ein LTI-System ist durch die folgende Eingangs-Ausgangsbeziehung beschrieben

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-\tau)} x(\tau - 2)\mathrm{d}\tau$$

Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.

Existenz des Faltungsintegrals und Eigenschaften der Faltung

Es ist nicht immer garantiert, dass das Faltungsintegral zweier Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$, d.h.

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

existiert. Die Young'sche Ungleichung stellt sicher, dass eine Faltung zweier Signale existiert. Zuerst jedoch ein bisschen Repetition:

L^p ist der Raum aller Funktionen x, die $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty$ erfüllen.

Die $p-$Norm $||\cdot||_p$ ist gegeben durch $||x||_p := \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$

Spezialfall: $||x||_\infty := \inf\{C \geq 0 : |x(t)| \leq C,\ \text{für alle } t \in \mathbb{R}\}$.

Theorem: *(Young'sche Ungleichung)*

Seien x und h (messbare) Funktionen, sodass $||x||_p,\ ||h||_q < \infty$ für p, q mit $1 \leq p, q \leq \infty$. Man setze:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

Dann gilt: $||x * h||_r \leq ||x||_p ||h||_q$.

Zwei Spezialfälle, die aus der Young'schen Ungleichung folgen:

$x_1 \in L^p,\ 1 \leq p \leq \infty,\ x_2 \in L^1 \implies ||x_1 * x_2||_p \leq ||x_1||_p ||x_2||_1$ und damit $x_1 * x_2 \in L^p$

$x_1 \in L^2,\ x_2 \in L^2 \implies |(x_1 * x_2)(t)| \leq ||x_1||_2 ||x_2||_2,\ t \in \mathbb{R}$ und damit $x_1 * x_2 \in L^\infty$

Eigenschaften der Faltung

1. kommutativ: $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$
2. assoziativ: $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$
3. distributiv: $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$
4. linear in beiden Argumenten: $x_1 * (\alpha x_2 + \beta x_3) = \alpha(x_1 * x_2) + \beta(x_1 * x_3)$

Interpretation des Faltungsintegrals

Man kann das Faltungsintegral als eine gewichtete Linearkombination zeitverschobener Versionen des Eingangssignals verstehen. Die Gewichtungskoeffizienten sind durch die Impulsantwort $h(t)$ gegeben. Die Faltung kann man entweder analytisch oder graphisch berechnen.

Analytisch: Aufgabe 41

Für die Signale $x_1(t) = e^{-\alpha t}\sigma(t)$ und $x_2(t) = e^{-\beta t}\sigma(t)$ berechne man die Faltung $y(t) = (x_1 * x_2)(t)$ (auch für $\alpha = \beta$!).

Graphische Faltung: Kochrezept

Ziel: Wir wollen $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$ berechnen.

1) $x(\tau)$ spiegeln um $\tau = 0$, um $x(-\tau)$ zu erhalten.
2) Das gespiegelte $x(\tau)$ um t verschieben.
   - nach rechts für $t > 0$
     $\implies x(t-\tau) = x(-(\tau - t))$
   - nach links für $t < 0$
3) Das gespiegelte & verschobene $x(\tau)$ mit $h(\tau)$ multiplizieren. $\implies x(t-\tau)h(\tau)$
4) Integrieren & den Wert von $y(t)$ bei t eintragen.
5) Zurück zu 2) mit neuem t. Wir führen die Integration in 4) an jeder Stelle erneut durch, wo sich das Verhalten von $x(t-\tau)$ zu $h(\tau)$ sprungartig verändert.

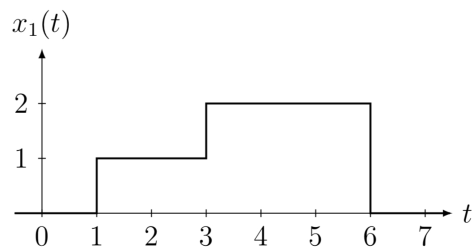
Hinweise: Vergesst nicht, dass die Faltung kommutativ ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

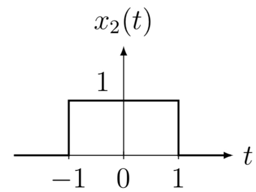
Manchmal ist es sinnvoller, $h(\tau)$ anstatt $x(\tau)$ zu spiegeln und zu verschieben. In der Regel verschiebt man das einfachere Signal und fixiert das kompliziertere Signal.

Aufgabe 39.a)

Bestimmen Sie $x_1 * x_2$ für die angegebenen Signale x_1 und x_2.



und



Eigenschaften der Impulsantwort

Gegeben ist ein LTI-System mit der Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Kausalität

Ein LTI-System ist kausal dann und nur dann, wenn $h(t) = 0$ für $t < 0$.

Gedächtnislosigkeit

Ein LTI-System H ist gedächtnislos, wenn für alle $x(t)$ und alle Zeitpunkte $t_0 \in \mathbb{R}$ das Ausgangssignal $(Hx)(t)$ zum Zeitpunkt t_0, d.h. $(Hx)(t_0)$, nur von $x(t_0)$ abhängt. Da das System linear sein muss (wir betrachten ja LTI-Systeme), muss die Eingangs-Ausgangsbeziehung notwendigerweise folgende Form haben:

$$y(t) = (Hx)(t) = \alpha x(t), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Das ist gleichbedeutend wie wenn wir sagen, dass die Impulsantwort die Form $h(t) = \alpha\delta(t)$ hat.

BIBO-Stabilität

Wenn $h \in L^1$, dann ist das LTI-System BIBO-stabil.

Aufgabe 45

Ein LTI-System sei durch die Impulsantwort

$$h(t) = \sigma\left(\frac{t}{2}+1\right) - \sigma\left(\frac{t}{2}-1\right)$$

beschrieben, wobei $\sigma(t)$ die Sprungfunktion bezeichnet.

a) Skizzieren Sie den Zeiterlauf der Impulsantwort $h(t)$.

b) Ist das System (begründen Sie ihre Antworten!)

i) kausal? ii) gedächtnisbehaftet? iii) BIBO-stabil?

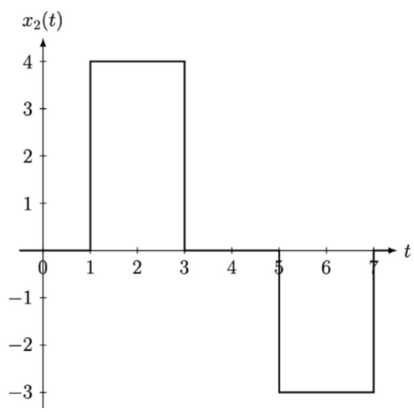
c) Bestimmen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems auf das Eingangssignal $x(t) = e^{-t}\sigma(t)$

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1

Ein analoges LTI-System sei durch folgende Eingangs-Ausgangsbeziehung beschrieben:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-4(t-\tau)} x(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

- ⋆ (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.
- ⋆ (b) (2 Punkte) Ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ⋆ (c) (2 Punkte) Ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ⋆ (d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf das Eingangssignal $x_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2)$.
- ⋆ (e) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf das abgebildete Signal $x_2(t)$.



Hinweis: Diese Teilaufgabe kann effizient unter Verwendung des Ergebnisses aus Teilaufgabe d) gelöst werden.