

Übungsstunde 7

Themenüberblick

- **Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich:**

Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich

Kaskadierung von LTI-Systemen

- **Spezielle Eingangssignale von LTI-Systemen**

Allgemeine Schwingungen

Sinusförmige Eingangssignale

Einschaltvorgänge

Periodische Eingangssignale und Fourierreihen

Deltakamm und Poissonsche Summenformel

Aufgaben für diese Woche

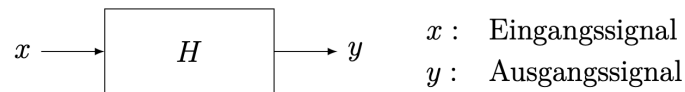
Nochmals dieselben wie letzte Woche und 69, 70, 71, 72, 73, 74

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Eigenfunktionen analoger LTI-Systeme

Reminder: Eigenvektoren x (z.B. Vektoren in \mathbb{R}^n) sind Vektoren, die die Gleichung $Hx = \lambda x$ erfüllen, wobei H ein System (z.B. eine Matrix) ist. λ nennt man den dazugehörigen Eigenwert.

Wir wollen nun die Eigenfunktionen von analogen LTI Systemen finden. Das heisst, wir wollen $x(t)$ finden, sodass $y(t) = (Hx)(t) = \lambda x(t)$ gilt.



Eingangssignal: Wähle $x(t) = e^{2\pi i f_0 t}$ (komplexe Exponentialfunktion)

Wir wenden nun darauf das LTI-System H an:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_0 (t - \tau)} h(\tau) d\tau = e^{2\pi i f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-2\pi i f_0 \tau} d\tau}_{\hat{h}(f_0)}$$

Es folgt: $(He^{2\pi i f_0 \cdot})(t) = \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}$

Kunstgriff:

Die Funktionen $e^{2\pi i f_0 t}$ sind Eigenfunktionen von LTI-Systemen mit zugehörigen Eigenwerten $\hat{h}(f_0)$

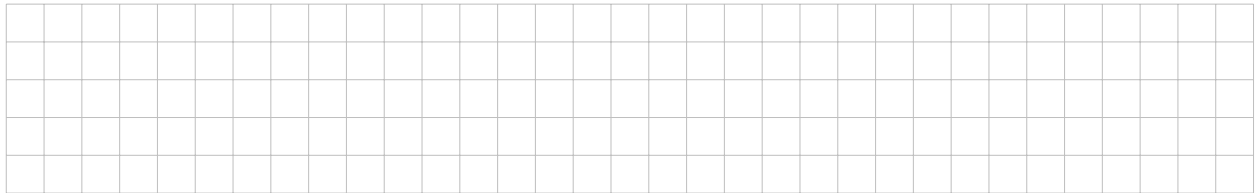
Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich



Somit gilt $\widehat{(x * h)}(f) = \hat{x}(f) \hat{h}(f)$ und in ähnlicher Weise $\widehat{(x \cdot h)}(f) = (\hat{x}(f) * \hat{h}(f))$

$$\begin{array}{ccc} (x * h)(t) & \overset{7.}{\circ \text{---} \bullet} & \hat{x}(f)\hat{h}(f) \\ x(t)h(t) & \overset{8.}{\circ \text{---} \bullet} & (\hat{x} * \hat{h})(f) \end{array}$$

Als Folge dessen gilt für LTI Systeme $y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\hat{h}(f)e^{2\pi ift}df$



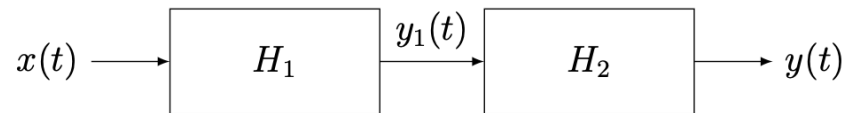
Wir können LTI-Systeme mit folgenden drei Blockschaltbildern darstellen:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t) \quad \text{beschreibt} \quad y(t) = (Hx)(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \quad \text{beschreibt} \quad y(t) = (x * h)(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\hat{h}(f)} \longrightarrow y(t) \quad \text{beschreibt} \quad \hat{y}(f) = \hat{x}(f)\hat{h}(f)$$

Wir betrachten die Kaskadierung von zwei LTI-Systemen H_1 und H_2 . Die Frage ist nun, ob H_1 und H_2 kommutieren, bzw. ob gilt, dass $H_1 H_2 = H_2 H_1$.



Grund: (Theorem, das nicht in SST1 behandelt wird):

- (i) A und B besitzen eine gemeinsame Eigenbasis.
- (ii) A und B kommutieren.

Sidenote: Dieses Theorem ist ausserdem essentiell für Physik 2, wobei man in diesem Fall \hat{A} und \hat{B} als *Hermitian Operators* bezeichnet, die genau dann kommutieren, wenn sie eine gemeinsame Eigenbasis haben. (Dieses Kriterium kann v.a. in Quantum Mechanics sehr hilfreich sein.)

Berechnen wir nun konkret die Kaskadierung der beiden LTI-Systeme H_1 und H_2 . Dazu nehmen wir $x(t) = e^{2\pi i f_0 t}$ (Eigenfunktion) und rechnen:

Die Kaskadierung von LTI-Systemen ist somit wieder ein LTI-System mit $\hat{h}(f) = \hat{h}_1(f) \cdot \hat{h}_2(f)$ d.h. $h(t) = (h_1 * h_2)(t)$.

Spezielle Eingangssignale

Allgemeine Schwingungen

Wir betrachten das Eingangssignal $x(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$, wobei $s = \sigma + i2\pi f_0$, $\Re(s) = \sigma \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0, \end{cases}$

dann $x(t) = e^{\sigma t} e^{i2\pi f_0 t}$, $\Re(x(t)) = e^{\sigma t} \cos(2\pi f_0 t)$

$e^{\sigma t}$ beschreibt die **Einhüllende** und $e^{i2\pi f_0 t}$ beschreibt die **Schwingung**.

Der Ausgang eines Systemes mit Impulsantwort $h(t)$ ist dann:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{=H(s)}$$

$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ ist die **Laplace-Transformierte** von $h(t)$.

Sinusförmiges Eingangssignal

Wir betrachten das Eingangssignal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi f_0 t} e^{-i\varphi_0}$

Die **blau markierten Signale** sind die Eigenfunktionen. Als Ausgangssignal erhalten wir:

$$\begin{aligned} y(t) &= (Hx)(t) = \frac{1}{2} \hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} \underbrace{\hat{h}(-f_0)}_{=\hat{h}^*(f_0)} e^{-i2\pi f_0 t} e^{-i\varphi_0} \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} \right)^* \right) = \Re \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} \right) \\ &= |\hat{h}(f_0)| \cdot \cos \left(2\pi f_0 t + \varphi_0 + \arg(\hat{h}(f_0)) \right), \text{ da } \hat{h}(f_0) \text{ komplexwertig sein kann.} \end{aligned}$$

Somit ist das Ausgangssignal auf ein sinusförmiges Eingangssignal ein **skalierter** und **verschobener** Sinus, der mit **derselben Frequenz** oszilliert wie das Eingangssignal.

Einschaltvorgänge

Wir betrachten das Eingangssignal $x(t) = e^{2\pi i f_0 t} \sigma(t)$ (Eigenfunktionen aber nur für $t \geq 0$)

Der stationäre Zustand des Ausgangssignals ist $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}$

Das heisst unendlich lange nach dem Einschalten hat der Einschaltvorgang keinen Einfluss mehr. Das System befindet sich im eingeschwungenen Zustand (steady state). (Herleitung im Skript s.54)

Fourierreihen

Was passiert, wenn der Input $x(t)$ ein beliebiges periodisches Signal ist?

Aus KomA, Ana2 und NuS2 wissen wir, dass wir jede periodische Funktion als Fourierreihe darstellen können. Wir nehmen also an, dass unser Eingangssignal $x(t)$ T -periodisch ist. Dann:

$$x(t) = x(t + T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}, \quad \text{wobei} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Gemäss Nr. 21 aus der Formelsammlung wird dieses $x(t)$ fouriertransformiert zu:

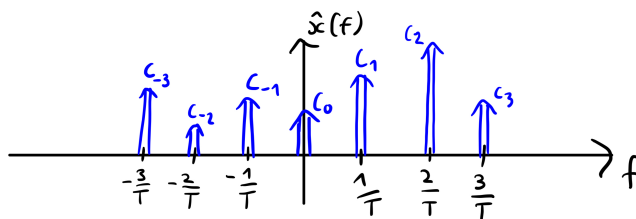
$$(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f) = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Eigenschaften der Fourierreihen

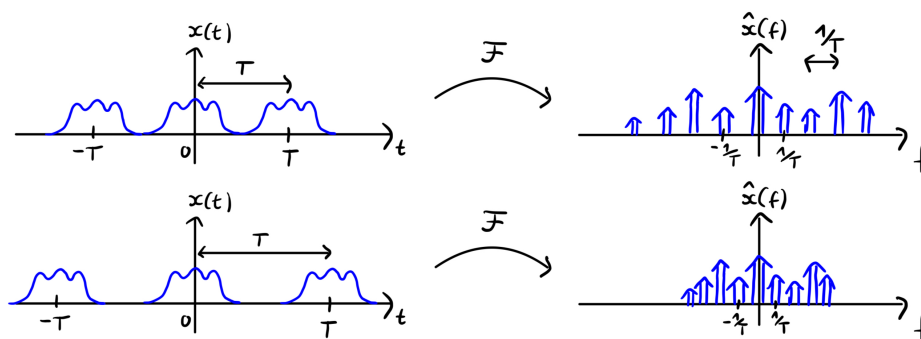
- (i) Fourierreihen existieren nur für periodische Signale.
- (ii) Periodische Signale haben immer ein "diskretes" Frequenzspektrum.
- (iii) c_k sind die komplexen Koeffizienten und beschreiben das Signal im Frequenzbereich.

Wir schreiben $x(t) = x(t + T) \circ \text{---} \bullet c_k$

Die c_k beschreiben die Gewichte des Deltakamms.



Eigentlich ist das Spektrum kontinuierlich, da es für alle Frequenzen definiert ist, es hat jedoch nur an Vielfachen von $1/T$ Komponenten, die ungleich null sind.



Wenn $T \rightarrow \infty$, dann $1/T \rightarrow 0$ und somit wird die Fourierreihe zu einem Integral. Das "diskrete" Spektrum wird kontinuierlich.

Periodische Eingangssignale an LTI-Systemen

Eingangssignal: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$

Zur Erinnerung: $\left(H e^{2\pi i f_0 \cdot} \right) (t) = \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}$, wobei $e^{2\pi i f_0 t}$ Eigenfunktionen sind. Hier mit $f_0 = \frac{k}{T}$

Dank Linearität und Stetigkeit gilt $(Hx)(t) = \left(H \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k \cdot}{T}} \right) (t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(H e^{\frac{2\pi i k \cdot}{T}} \right) (t)$

$$\Rightarrow y(t) = (Hx)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right)}_{d_k} e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

Das Ausgangssignal auf ein T -periodisches Eingangssignal ist auch T -periodisch.

Deltakamm

Ein Deltakamm ist die Summe von um T zeitverschobenen Deltafunktionen. (Periode T)

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad \text{51.} \quad c_k = \frac{1}{T} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Die Antwort eines LTI-Systems auf den Deltakamm $\delta_T(t)$ berechnet sich wie folgt:

$$y(t) \stackrel{\text{LTI}}{=} (h * \delta_T)(t) = \left(h * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - kT) \right) (t) \stackrel{\text{LIN}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h * \delta(\cdot - kT))(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT),$$

wobei wir in der letzten Umformung verwendet haben, dass die δ -Funktion das Einselement der Faltung ist.

Poissonsche Summenformel

Somit antworten LTI-Systeme auf das Eingangssignal $x(t) = \delta_T(t)$ mit $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$.

$y(t)$ ist T -periodisch und kann somit als Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$ entwickelt werden.

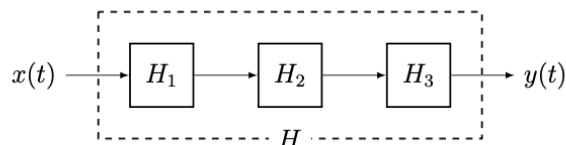
Wegen $x(t) \stackrel{\text{51.}}{\circ} \bullet \frac{1}{T} \forall k \in \mathbb{Z}$ und da gemäss oben $d_k = c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right)$ erhalten wir:

$$\text{Poissonsche Summenformel:} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.a) ii, iii, iv

Aufgabe 1 (25 Punkte)

★ (a) (7 Punkte) Gegeben sei folgendes System H ,



bestehend aus dem LTI-System H_1 mit Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$(H_1 x)(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-|t-\tau|} d\tau,$$

dem LTI-System H_2 mit Impulsantwort

$$h_2(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi f_g t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 2f_g, & t = 0 \end{cases}, \quad f_g > 0,$$

und dem System H_3 mit Eingangs-Ausgangsbeziehung

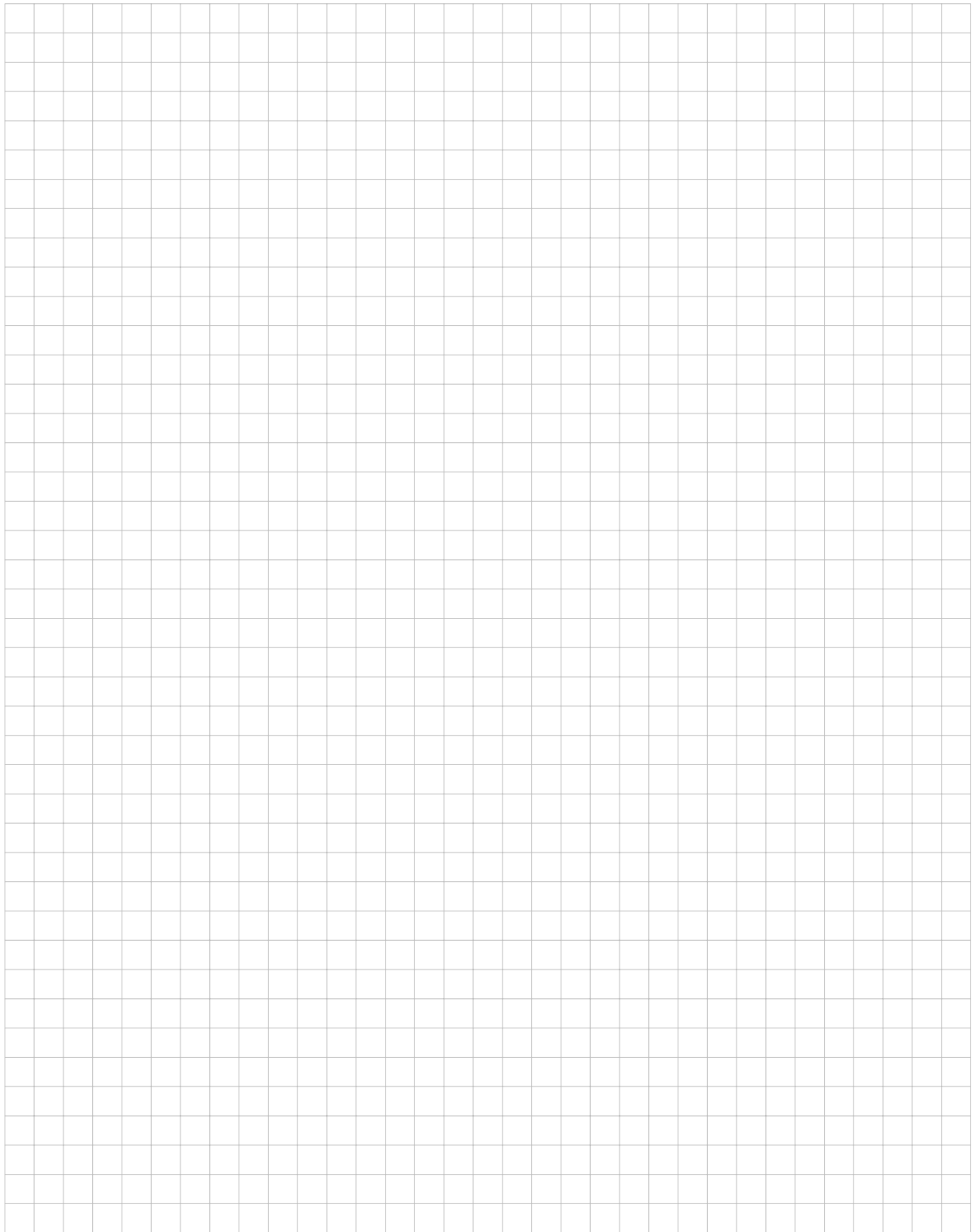
$$(H_3 x)(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

- ★ i. (1 Punkt) Ist das System H_3 ein LTI-System?
Hinweis: Sie können die Stetigkeit des Operators $\frac{dx(t)}{dt}$ ohne Beweis annehmen.
- ★ ii. (3 Punkte) Berechnen Sie $\hat{h}_1(f)$ und $\hat{h}_2(f)$, wobei h_1 die Impulsantwort des LTI-Systems H_1 ist, und stellen Sie die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Systems H_3 im Frequenzbereich dar, d.h., bestimmen Sie $\widehat{(H_3 x)}(f)$ als Funktion von $\hat{x}(f)$.
- iii. (1 Punkt) Ist das Gesamtsystem H ein LTI-System? Wenn ja, geben Sie die Fouriertransformierte $\hat{h}(f)$ der zugehörigen Impulsantwort h an.
- iv. (2 Punkte) Am Eingang des Gesamtsystems H liegt das Signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t / T}, \quad T > 0, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

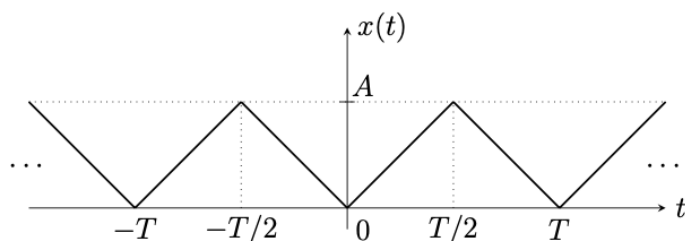
an. Berechnen Sie die Fourierreihe des Ausgangssignals $y(t) = (Hx)(t)$ in Abhängigkeit von c_k , T und f_g .



Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.d) i, ii

★ (d) (10 Punkte) Gegeben sei das T -periodische Signal

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{2A}{T}t, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{2A}{T}t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases},$$



mit $A > 0, T > 0$.

★ i. (8 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t / T} \text{ in Abhängigkeit von } A.$$

Hinweis: Das folgende unbestimmte Integral kann hilfreich sein.

$$\int t e^{at} dt = \frac{e^{at}(at - 1)}{a^2}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

ii. (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt.$$

Benutzen Sie dieses Resultat in Kombination mit der Parsevalschen Beziehung für zeitkontinuierliche periodische Signale, um zu beweisen, dass

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

