

# SST1 Übungsstunde 8

Matteo Dietz

November 2024

- **Abtasttheorem:**

Digitale Systeme

Abgetastete Systeme im Frequenzbereich

Aliasing, Interpolation, Kritische Abtastung

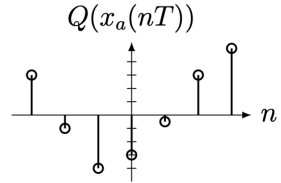
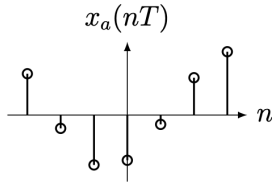
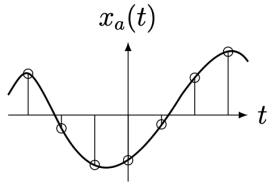
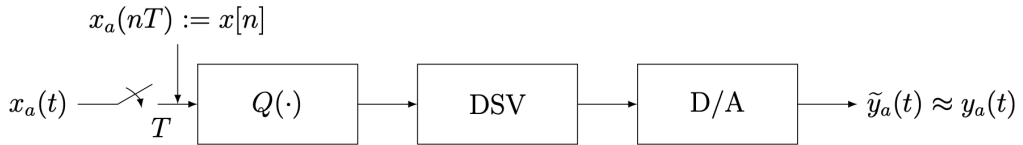
Interpretation als Entwicklung in ein Orthonormalsystem

# Aufgaben für diese Woche

**78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92,**  
**93, 94, 95, 96**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

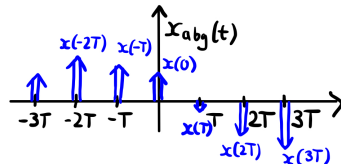
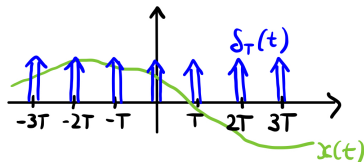
# Digitale Systeme



# Abgetastete Signale im Frequenzbereich

1. Abtastung wird modelliert als Multiplikation mit einem Deltakamm:

$$\begin{aligned}x_{abg.}(t) &= x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)\end{aligned}$$

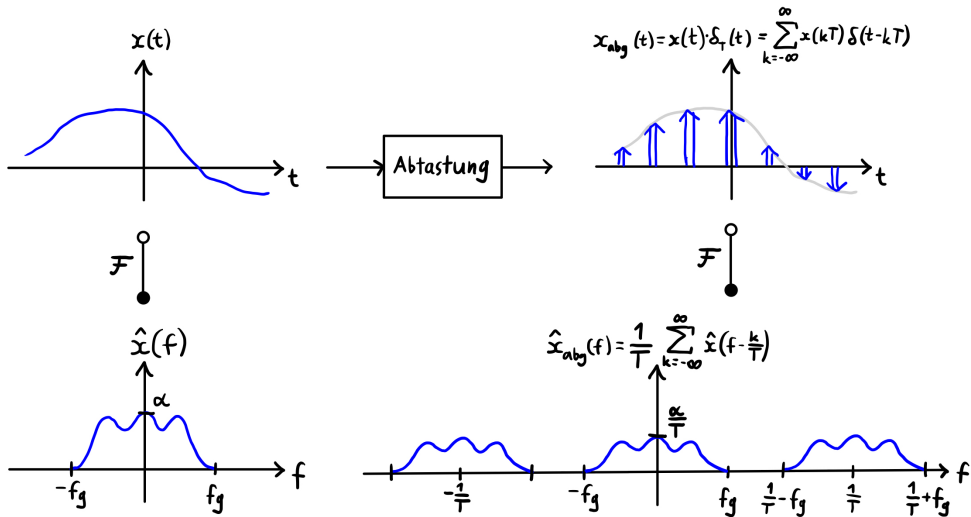


# Abgetastete Signale im Frequenzbereich

2. Wir fouriertransformieren das abgetastete Signal  $x_{abg}(t)$ .

$$\begin{aligned}\hat{x}_{abg.}(f) &= \mathcal{F}\{x \cdot \delta_T\}(f) = \left(\hat{x} * \hat{\delta}_T\right)(f) \\ &\stackrel{20.}{=} \left(\hat{x} * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\cdot - \frac{k}{T}\right)\right)(f) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\hat{x} * \delta\left(\cdot - \frac{k}{T}\right)\right)(f) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)\end{aligned}$$

# Abgetastete Signale im Frequenzbereich



# Bemerkungen

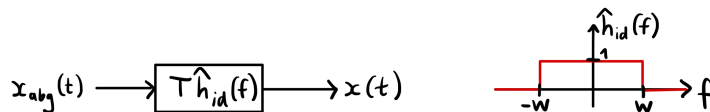
Die **Abtastung im Zeitbereich** entspricht einer **Periodisierung im Frequenzbereich**.

- $f_g$  ist die Bandbreite von  $x(t)$
- $f_s := \frac{1}{T}$  ist die Abtastfrequenz (*sampling frequency*)
- Die Kopien von  $\hat{x}(f)$  sind mit Faktor  $\frac{1}{T}$  skaliert.



# Rekonstruktion

- Wie gewinnen wir das analoge Signal ohne Informationsverlust aus den Abtastwerten zurück?

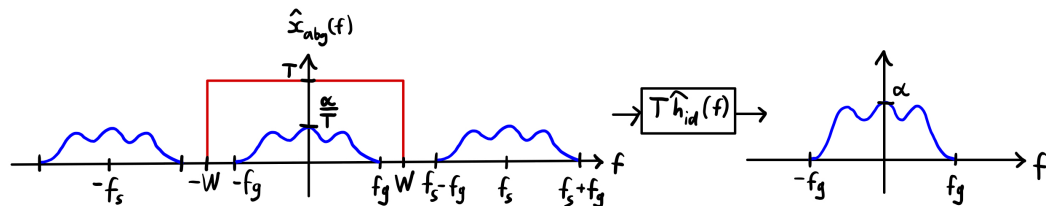


$$\hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad \text{idealer Tiefpassfilter mit Breite } W$$

$$\text{Zur Erinnerung: } \hat{x}_{abg.} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x} \left( f - \frac{k}{T} \right)$$

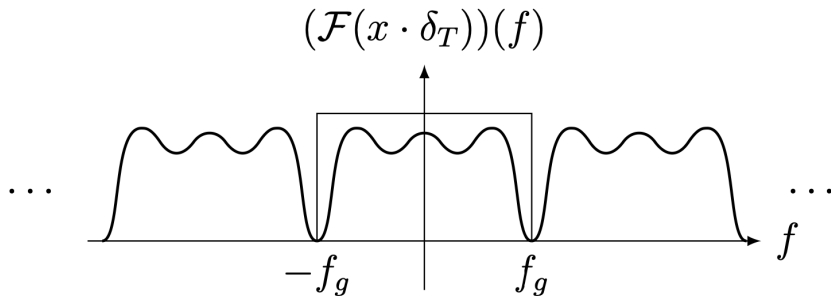
# Rekonstruktion

Der Term  $\cdot T$  beim idealen Tiefpassfilter steht für die Skalierung, da wir ohne diesen Term  $\frac{1}{T}x(t)$  anstatt  $x(t)$  erhalten würden.



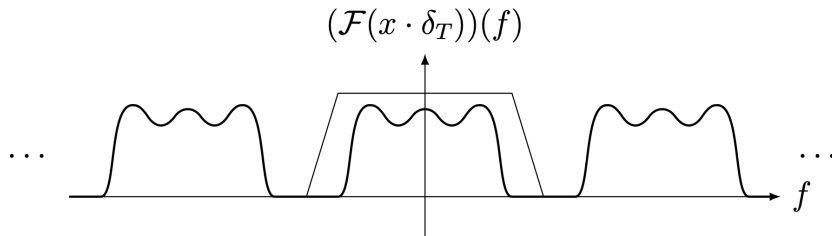
**Bemerkung:** Die Wahl von  $W$  ist entscheidend und in einigen Fällen ist es gar nicht möglich, das Signal zu rekonstruieren.

# 1. Kritische Abtastung: $f_s = 2f_g$



$\implies$  Wir können das Signal mit einem idealen Tiefpassfilter der Breite  $W = f_g$  rekonstruieren

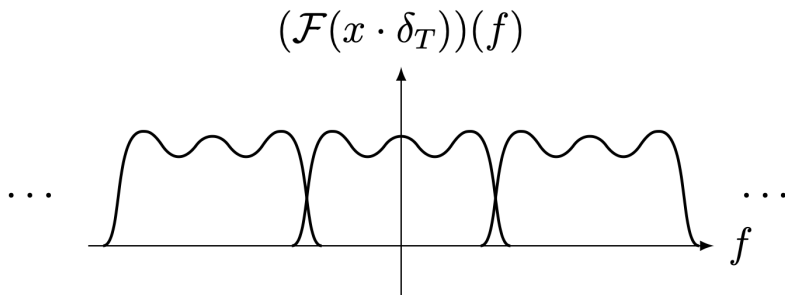
## 2. Überabtastung: $f_s > 2f_g$



### Vorteile an Überabtastung:

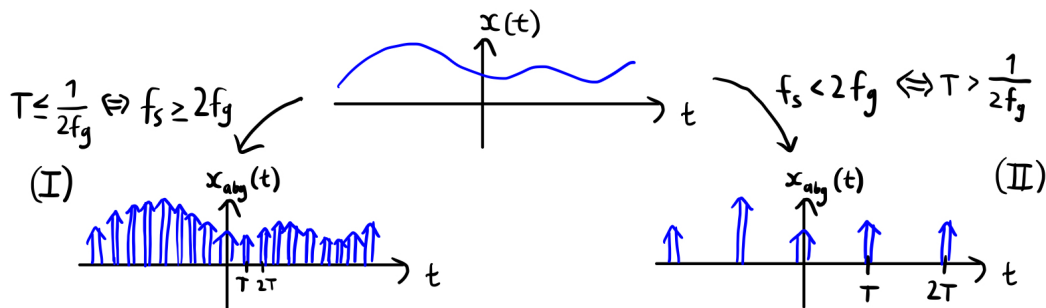
- 1 Wir können einen stabilen Tiefpassfilter verwenden.
- 2 Überabtastung verringert die Empfindlichkeit auf Rauschen.

### 3. Unterabtastung: $f_s < 2f_g$



Es gibt **Aliasing**. Mit Hilfe eines Tiefpassfilters erhalten wir keine perfekte Version von  $\hat{x}(f)$ .

# Intuition



- (I) Genug hohe Abtastrate  $\Rightarrow$  kein Informationsverlust
- (II) Zu tiefe Abtastrate  $\Rightarrow$  Informationsverlust

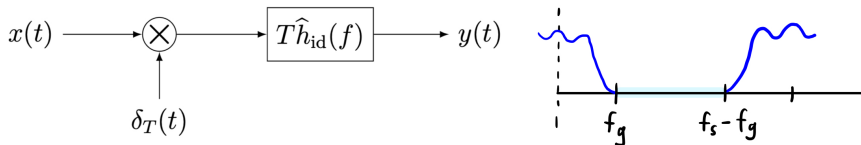
# Abtasttheorem

Ein Signal mit der Bandbreite  $f_g$  kann aus seinen Abtastwerten, genommen mit einer Rate von  $f_s \geq 2f_g$ , eindeutig rekonstruiert werden.

Die kritische Rate  $f_s = 2f_g$  wird als **Nyquistrate** bezeichnet.

# Interpretation als Interpolation

- Wir betrachten das folgende System:



wobei  $\hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases}$        $\bullet \text{---} \circ h_{id}(t) = \frac{\sin(2\pi Wt)}{\pi t}$

- Damit die perfekte Rekonstruktion möglich ist, muss  $W \in [f_g, f_s - f_g]$  und  $f_s \geq 2f_g$  gelten.



# Interpretation als Interpolation

$$\begin{aligned}y(t) &= \left( \underbrace{(x \cdot \delta_T)}_{x_{abg}} * Th_{id} \right) (t) = T(x_{abg} * h_{id})(t) \\&= T \left[ \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(\cdot - kT) \right) * h_{id} \right] (t) \\&= T \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) (\delta(\cdot - kT)) * h_{id} \right) (t) \\&= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h_{id}(t - kT)\end{aligned}$$

# Rekonstruktionsformel

Also:  $y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h_{id}(t - kT)$ , wobei

$$h_{id} = \frac{\sin(2\pi Wt)}{\pi t}$$

Somit erhalten wir die **Rekonstruktionsformel**:

$$y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin(2\pi W(t - kT))}{\pi(t - kT)}$$

# Kritische Abtastung

- Kritische Abtastung:  $f_s = 2f_g$ , d.h.  $f_g = f_s - f_g$

$$\implies W = f_g = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

$$\implies y(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}$$

- Allgemeine Rekonstruktion eines Signals aus Abtastwerten:

$$y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h(t - kT)$$

- $h(t)$  ist die Impulsantwort eines Filters.

# Abtastung als Entwicklung in ein Orthonormalsystem

Die Rekonstruktionsformel

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}$$

entspricht einer Entwicklung eines bandbegrenzten Signals  $x(t)$  in ein Orthonormalsystem.

# Abtastung als Entwicklung in ein Orthonormalsystem

Linearer Unterraum  $X$  der  $f_g$ –bandbegrenzten Signale in  $L^2(\mathbb{R})$

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)} = \sqrt{T} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\pi(t - kT)}$$

Diese Funktionen bilden ein Orthonormalsystem in  $X$ . Es gilt:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{T} x(kT) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}}_{e_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$$

# Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2023, Aufgabe 2