SST1 Übungsstunde 6

Matteo Dietz

November 2024

Themenüberblick

- **Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich:**
  Kurze Repetition: Fouriertransformation und Eigenschaften
  Eigenfunktionen von LTI Systemen
  Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich
  Kaskadierung von LTI-Systemen

Themenüberblick

- **Spezielle Eingangssignale von LTI-Systemen**
  Allgemeine Schwingungen
  Sinusförmige Eingangssignale
  Einschaltvorgänge
  Periodische Eingangssignale und Fourierreihen
  Deltakamm und Poissonsche Summenformel

Aufgaben für diese Woche

Dieselben wie letzte Woche und **69**, **70**, **71**, **72**, 73, **74**,

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Eigenschaften der Fouriertransformation

- **Definition**:

$$\text{(FT)} \qquad \hat{x}(f) = (\mathcal{F}x)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i f t}\mathrm{d}t$$

$$\text{(IFT)} \quad x(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}f$$

Riemann-Lebesgue Lemma

- Es sei x ein absolut integrierbares Signal, d.h. $x \in L^1$.

  Dann ist $(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f)$ stetig und $\lim_{|f| \to \infty} \hat{x}(f) = 0$.

Formelsammlung

1.	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t$
2.	$x(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}(f)$
3.	$e^{2\pi i f_0 t} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f - f_0)$
4.	$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(-f)$
5.	$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-f)$
6.	$x(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \hat{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
7.	$(x * y)(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f)\hat{y}(f)$
8.	$x(t)y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x} * \hat{y})(f)$
9.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(f)\}$
10.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(f)\}$
11.	$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) + \hat{x}^*(-f))$
12.	$i\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) - \hat{x}^*(-f))$
13.	$t^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\mathrm{d}^n \hat{x}(f)}{\mathrm{d}f^n}$
14.	$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(2\pi i f)^n \hat{x}(f)$
15.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi i f}\hat{x}(f) + \frac{1}{2}\hat{x}(0)\delta(f)$

Parseval und Plancherel

Plancherelsche Identität:

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\hat{y}^*(f)\mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$$

Parsevalsche Beziehung:

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2\mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{x}\rangle = ||\hat{x}||^2$$

Aufgaben

- **Aufgabe 66**
- **Prüfungsaufgabe: Sommer 2019, Aufgabe 2**

Eigenfunktionen analoger LTI-Systeme

- **Reminder**: Eigenvektoren x sind Vektoren, die die Gleichung $Hx = \lambda x$ erfüllen, wobei H ein System ist. λ nennt man den dazugehörigen Eigenwert.

- Wir wollen nun die Eigenfunktionen von analogen LTI Systemen finden. Das heisst, wir wollen $x(t)$ finden, sodass $y(t) = (Hx)(t) = \lambda x(t)$ gilt.

Eigenfunktionen analoger LTI-Systeme

- **Eingangssignal**: $x(t) = e^{2\pi i f_0 t}$

  Wir wenden nun darauf das LTI-System H an:

$$
\begin{aligned}
y(t) = (x * h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_0 (t-\tau)} h(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{2\pi i f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-2\pi i f_0 \tau}\mathrm{d}\tau}_{\hat{h}(f_0)}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \; (He^{2\pi i f_0 \cdot})(t) = \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}
$$

Eigenfunktionen analoger LTI-Systemen

Es gilt also: $(He^{2\pi i f_0 \cdot})(t) = \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}$

Kunstgriff:
Die Funktionen $e^{2\pi i f_0 t}$ sind Eigenfunktionen von LTI-Systemen mit zugehörien Eigenwerten $\hat{h}(f_0)$

Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich

Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich

$$(x * h)(t) \quad \circ\!\!\xrightarrow{\;7.\;}\!\!\bullet \quad \hat{x}(f)\hat{h}(f)$$

$$x(t)h(t) \quad \circ\!\!\xrightarrow{\;8.\;}\!\!\bullet \quad (\hat{x} * \hat{h})(f)$$

$$\implies y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\hat{h}(f)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}f$$

Blockschaltbilder

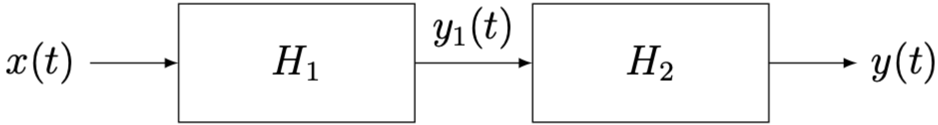
- Wir können LTI-Systeme mit folgenden Blockschaltbildern beschreiben:

$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$ beschreibt $y(t) = (Hx)(t)$

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$ beschreibt $y(t) = (x * h)(t)$

$x(t) \longrightarrow \boxed{\hat{h}(f)} \longrightarrow y(t)$ beschreibt $\hat{y}(f) = \hat{x}(f)\hat{h}(f)$

Kaskadierung von LTI-Systemen



LTI-Systeme kommutieren

Kaskadierung von LTI-Systemen: Theorem

- Es seien A und B zwei lineare Operatoren auf einem linearen Raum V ausgestattet mit einem positiv definiten inneren Produkt. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

  (i) A und B besitzen eine gemeinsame Eigenbasis.

  (ii) A und B kommutieren.

- LTI-Systeme haben die komplexen Exponentialfunktionen als gemeinsame Eigenbasis. Somit kommutieren LTI-Systeme.

Kaskadierung von LTI-Systemen

- Kaskadierung der LTI-Systeme H_1 und H_2 mit $x = e^{2\pi i f_0 t}$:

Die Kaskadierung von LTI-Systemen ist wieder ein LTI-System mit $\hat{h}(f) = \hat{h}_1(f) \cdot \hat{h}_2(f)$ d.h. $h(t) = (h_1 * h_2)(t)$.

Spezielle Eingangssignale

- **Allgemeine Schwingungen**
- **Sinusförmige Eingangssignale**
- **Einschaltvorgänge**
- **Allgemeine Periodische Signale**

Allgemeine Schwingungen

- Eingangssignal $x(t) = e^{st}, \quad s \in \mathbb{C}$,

  wobei $s = \sigma + i2\pi f_0, \quad \mathfrak{Re}(s) = \sigma \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0, \end{cases}$

  dann $x(t) = e^{\sigma t} e^{i2\pi f_0 t}, \quad \mathfrak{Re}(x(t)) = e^{\sigma t} \cos(2\pi f_0 t)$

- $e^{\sigma t}$ = Einhüllende und $e^{i2\pi f_0 t}$ = Schwingung.

Allgemeine Schwingungen

- Der Ausgang eines Systemes mit Impulsantwort $h(t)$ ist dann:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} \mathrm{d}\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau}_{=\mathrm{H}(s)}$$

$$\mathrm{H}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau = \textbf{Laplace-Transformierte} \text{ von } h(t).$$

Sinusförmige Eingangssignale

- Eingangssignal:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \tfrac{1}{2} e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi f_0 t} e^{-i\varphi_0}$$

Ausgangssignal:

$$y(t) = (Hx)(t) = \tfrac{1}{2} \hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} \underbrace{\hat{h}(-f_0)}_{=\hat{h}^*(f_0)} e^{-i2\pi f_0 t} e^{-i\varphi_0}$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} \right)^* \right)$$

$$= \mathfrak{Re} \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} \right)$$

Sinusförmige Eingangssignale

$$\mathfrak{Re}\left(\hat{h}(f_0)e^{i2\pi f_0 t}e^{i\varphi_0}\right) = |\hat{h}(f_0)| \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_0 + \arg(\hat{h}(f_0))\right),$$

da $\hat{h}(f_0)$ komplexwertig sein kann.

- Das Ausgangssignal auf ein sinusförmiges Eingangssignal ist ein skalierter und verschobener Sinus, der mit derselben Frequenz oszilliert wie das Eingangssignal.

Einschaltvorgänge

- Eingangssignal: $x(t) = e^{2\pi i f_0 t}\sigma(t)$
- Stationärer Zustand des Ausgangssignals $y(t) \xrightarrow{t\to\infty} \hat{h}(f_0)e^{2\pi i f_0 t}$
- Der Einschaltvorgang hat unendlich lange nach dem Einschalten keinen Einfluss mehr.

Fourierreihen: Definition

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}}, \quad \text{wobei} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-\frac{2\pi ikt}{T}} \mathrm{d}t$$

$x(t)$ wird gemäss Nr. 21 fouriertransformiert zu:

$$(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Fourierreihen: Eigenschaften

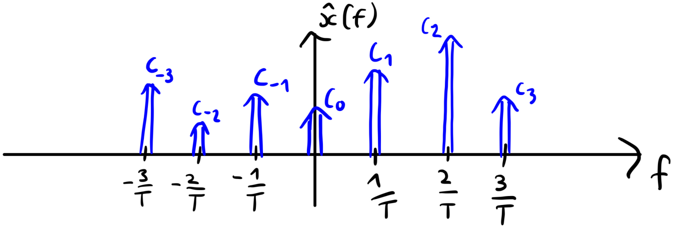
(i) Fourierreihen existieren nur für periodische Signale.

(ii) Periodische Signale haben immer ein "diskretes" Frequenzspektrum.

(iii) c_k sind die komplexen Koeffizienten und beschreiben das Signal im Frequenzbereich.

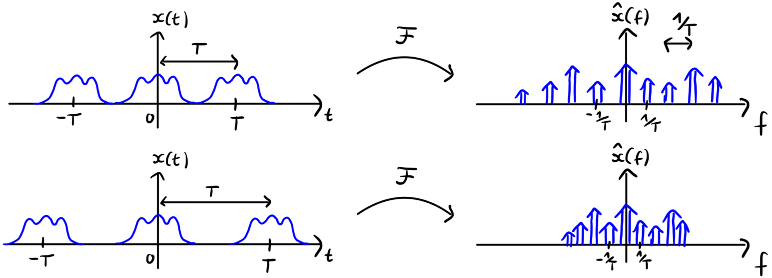
Fourierreihen: Eigenschaften

- Wir schreiben $x(t) = x(t+T) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; c_k$
- Die c_k beschreiben die Gewichte des Deltakamms.



Fourierreihen: Eigenschaften

- Eigentlich ist das Spektrum kontinuierlich, es hat jedoch nur an Vielfachen von $1/T$ Komponenten, die ungleich null sind.



- $1/T \xrightarrow{T\to\infty} 0$ somit wird die Fourierreihe zu einem Integral. Das "diskrete" Spektrum wird kontinuierlich.

Periodische Signale an LTI-Systemen

Eingangssignal: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$

Zur Erinnerung: $\left(He^{2\pi if_0\cdot}\right)(t) = \hat{h}(f_0)e^{2\pi if_0 t}$

Dank Linearität und Stetigkeit gilt:

$$(Hx)(t) = \left(H \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi ik\cdot}{T}}\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(He^{\frac{2\pi ik\cdot}{T}}\right)(t)$$

Periodische Signale an LTI-Systemen

$$\Longrightarrow \; y(t) = (Hx)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right)}_{d_k} e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$$

- Das Ausgangssignal auf ein $T-$periodisches Eingangssignal ist auch $T-$periodisch.

Deltakamm

Ein Deltakamm ist definiert durch:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \ \circ\!\!\xrightarrow{\text{51.}}\!\!\bullet \ c_k = \frac{1}{T} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Antwort eines LTI-Systems auf einen Deltakamm $\delta_T(t)$:

$$y(t) \overset{\text{LTI}}{=} (h * \delta_T)(t) = \left(h * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - kT) \right)(t)$$

$$\overset{\text{LIN}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(h * \delta(\cdot - kT)\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

Poissonsche Summenformel

- LTI-Systeme antworten auf das Eingangssignal $x(t) = \delta_T(t)$ mit $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$
- $y(t)$ ist $T-$periodisch und kann somit als Fourierreihe $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$ entwickelt werden.

Poissonsche Summenformel

- Dank $x(t) \overset{51.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!\bullet} \frac{1}{T} \, \forall k \in \mathbb{Z}$ und $d_k = c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right)$ erhalten wir:

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi ikt}{T}}}$$

Aufgaben

- **Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.a)ii, iii, iv und 1.d)i, ii**