# SST1 Übungsstunde 4

Matteo Dietz

October 2024

# Themenüberblick

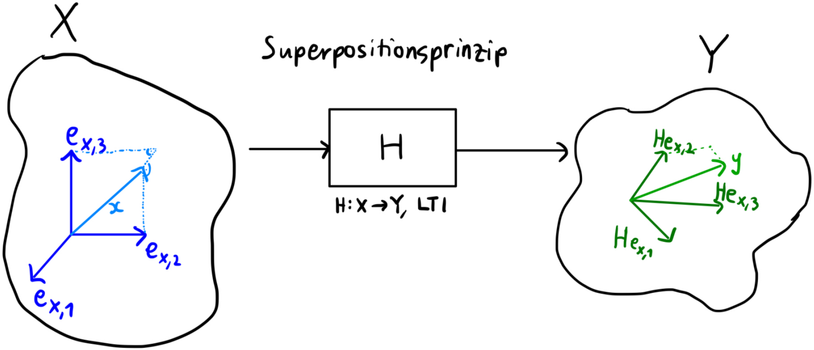
- **Analoge LTI Systeme im Zeitbereich**:
  Impulsantwort
  Faltung, Eigenschaften der Faltung, Graphische Faltung
  Eigenschaften der Impulsantwort

# Aufgaben für diese Woche

**31**, **33**, 34, **35**, 36, **37**, **38**, **39**, **40**, **41**, **42**, **43**, 44, **45**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

# Analoge LTI-Systeme im Zeitbereich



# Impulsantwort

**LTI-Systeme sind vollständig durch ihre Impulsantwort $h := (H\delta)(t)$ definiert.**

Wir können dem System einen $\delta-$Impuls als Input geben und den Output betrachten und dieser Output charakterisiert das LTI-System vollständig.

# Herleitung

# Herleitung

# Herleitung

# Impulsantwort von LTI-Systemen

Ein LTI-System antwortet auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit dem Ausgangssignal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau := x * h$$

wobei $h(t) = (H\delta)(t)$ die **Impulsantwort** des Systems ist.

# Aufgabe 42.a)

# Existenz des Faltungsintegrals

- Das Faltungsintegral zweier Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

kann divergieren.

- Die **Young'sche Ungleichung** stellt sicher, dass eine Faltung zweier Signale existiert.

# Repetition: $L^p$

- $L^p := \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty \right\}$
- **p-Norm**: $||x||_p := \left( \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}$
- **Spezialfall**: $||x||_\infty := \inf\{ C \geq 0 : |x(t)| \leq C, \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \}$

# Young'sche Ungleichung: Theorem

- Seien $x$ und $h$ (messbare) Funktionen, sodass $||x||_p,\ ||h||_q < \infty$ für $p, q$ mit $1 \leq p, q \leq \infty$. Man setze:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

Dann gilt: $||x * h||_r \leq ||x||_p ||h||_q$.

# Young'sche Ungleichung: Spezialfälle

- $x_1 \in L^p,\ 1 \leq p \leq \infty,\ x_2 \in L^1 \implies ||x_1 * x_2||_p \leq ||x_1||_p ||x_2||_1$ und damit $x_1 * x_2 \in L^p$

- $x_1 \in L^2,\ x_2 \in L^2 \implies |(x_1 * x_2)(t)| \leq ||x_1||_2 ||x_2||_2,\ t \in \mathbb{R}$ und damit $x_1 * x_2 \in L^\infty$

# Eigenschaften der Faltung

1. **kommutativ**: $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$
2. **assoziativ**: $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$
3. **distributiv**: $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$
4. **linear in beiden Argumenten**:
   $x_1 * (\alpha x_2 + \beta x_3) = \alpha(x_1 * x_2) + \beta(x_1 * x_3)$

# Analytische Berechnung der Faltung: Aufgabe 41

# Graphische Faltung: Kochrezept

**Ziel**: Wir wollen $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$ berechnen.

1) $x(\tau)$ spiegeln um $\tau = 0$, um $x(-\tau)$ zu erhalten.
2) Das gespiegelte $x(\tau)$ um $t$ verschieben.
   - nach rechts für $t > 0$
   - nach links für $t < 0$

   $\Longrightarrow x(t-\tau) = x(-(\tau - t))$
3) Das gespiegelte & verschobene $x(\tau)$ mit $h(\tau)$ multiplizieren.
   $\Longrightarrow x(t-\tau)h(\tau)$
4) Integrieren & den Wert von $y(t)$ bei $t$ eintragen.
5) Zurück zu 2) mit neuem $t$.

# Graphische Faltung: Hinweise

**Hinweise**: Vergesst nicht, dass die Faltung kommutativ ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Spiegelt und verschiebt das einfachere Signal und fixiert das kompliziertere!

# Aufgabe 39.a)

# Eigenschaften der Impulsantwort

- Kausalität
- Gedächtnis
- BIBO-Stabilität

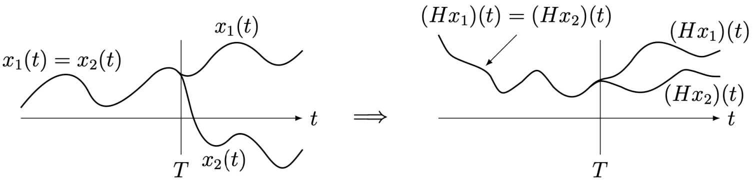
# Repetition: Kausalität

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **kausal**, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und jedes $T \in \mathbb{R}$ gilt

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \text{für alle } t \leq T$$

$$\implies (Hx_1)(t) = (Hx_2)(t), \quad \text{für alle } t \leq T$$

# Repetition: Kausalität




- **Intuition**: Das Ausgangssignal zu dem Zeitpunkt $T$ ist nur von dem momentanen oder vergangenen Zeitpunkten abhängig.
- Echtzeitrealisierungen sind immer kausal.

# Repetition: Gedächtnis

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **gedächtnislos**, wenn für alle $x \in X$ und alle Zeitpunkte $t_0 \in \mathbb{R}$ das Ausgangssignal $(Hx)(t)$ zum Zeitpunkt $t_0$ nur von $x(t_0)$ abhängt.

- Sonst heisst das System **gedächtnisbehaftet**.

- Gedächtnislosigkeit $\implies$ Kausalität (aber nicht umgekehrt)

# Repetition: BIBO-Stabilität

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **BIBO-stabil**, wenn:

  für alle $x \in X$ mit $|x(t)| \leq B_x < \infty$, für alle $t$, existiert ein $B_y \in \mathbb{R}$ mit $B_y < \infty$, sodass

  $|y(t)| \leq B_y$, für alle $t$, wobei $y = Hx$.

# Zusammenfassung: Eigenschaften der Impulsantwort

**Kausalität**

Das LTI-System ist kausal $\Leftrightarrow h(t) = 0$ für $t < 0$.

**Gedächtnislosigkeit**

Das LTI-System $H$ ist gedächtnislos $\Leftrightarrow$

$$y(t) = (Hx)(t) = \alpha x(t), \quad \alpha \in \mathbb{C} \Leftrightarrow h(t) = \alpha\delta(t)$$

**BIBO-Stabilität**

Wenn $h \in L^1$, dann ist das LTI-System BIBO-stabil.

# Aufgaben

- **Aufgabe 45**
- **Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1**