ETH
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DITET
Dept. of Information Technology and Electrical Engineering

Übungsstunde 6

Themenüberblick

- **Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich:**

  Kurze Repetition: Fouriertransformation und Eigenschaften

  Eigenfunktionen von LTI Systemen

  Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich

  Kaskadierung von LTI-Systemen

- **Spezielle Eingangssignale von LTI-Systemen**

  Allgemeine Schwingungen

  Sinusförmige Eingangssignale

  Einschaltvorgänge

  Periodische Eingangssignale und Fourierreihen

  Deltakamm und Poissonsche Summenformel

Aufgaben für diese Woche

Nochmals dieselben wie letzte Woche und **69**, **70**, **71**, **72**, 73, **74**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Eigenschaften der Fouriertransformation

Definition

$$\text{(FT)} \qquad \hat{x}(f) = (\mathcal{F}x)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift}\mathrm{d}t$$

$$\text{(IFT)} \quad x(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{2\pi ift}\mathrm{d}f$$

Riemann-Lebesgue Lemma

Es sei x ein absolut integrierbares Signal, d.h. $x \in L^1$. Dann ist $(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f)$ stetig und $\lim_{|f|\to\infty} \hat{x}(f) = 0$.

Formelsammlung

1.	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, e^{2\pi ift}\mathrm{d}f$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi ift}\mathrm{d}t$
2.	$x(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi ift_0}\hat{x}(f)$
3.	$e^{2\pi if_0t}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f-f_0)$
4.	$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(-f)$
5.	$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-f)$
6.	$x(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\,\hat{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
7.	$(x * y)(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f)\hat{y}(f)$
8.	$x(t)y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x} * \hat{y})(f)$
9.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(f)\}$
10.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(f)\}$
11.	$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) + \hat{x}^*(-f))$
12.	$i\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) - \hat{x}^*(-f))$
13.	$t^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\mathrm{d}^n\hat{x}(f)}{\mathrm{d}f^n}$
14.	$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(2\pi if)^n\hat{x}(f)$
15.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi if}\hat{x}(f) + \frac{1}{2}\hat{x}(0)\delta(f)$

Repetition: Parseval und Plancherel

Plancherelsche Identität:

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\hat{y}^*(f)\mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$$

Parsevalsche Beziehung:

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2\mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{x}\rangle = ||\hat{x}||^2$$

Aufgabe 66

Von einem Signal $x(t)$ ist die Fouriertransformierte gegeben als

$$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Energie des Signals $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$ gegeben durch

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\mathrm{d}t$$

Prüfungsaufgabe: Sommer 2019, Aufgabe 2

2. **Aufgabe** (25 Punkte) Während die herkömmliche Fourier-Transformation die globalen spektralen Charakteristika eines Signals wiedergibt, beschreibt die Kurzzeit-Fourier-Transformation (englisch short-time Fourier transform, kurz STFT) die zeitliche Evolution des Spektrums eines Signals. Die STFT eines allgemeinen Signals $x(t)$ bezüglich der Fensterfunktion $w(t)$ ist gegeben durch

$$F_x^w(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w^*(t-\tau) e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t.$$

★ (a) (7 Punkte) Berechnen Sie für eine allgemeine Fensterfunktion $w(t)$ die STFT des Signals

$$y(t) = x(t - t_0) \cos(2\pi f_0 t)$$

in Abhängigkeit von $F_x^w(\tau, f)$.

★ (b) (9 Punkte) Ziel dieser Teilaufgabe ist es das Signal $x(t)$ aus der STFT $F_x^w(\tau, f)$ zurückzugewinnen. Dazu betrachten wir eine zweite allgemeine Fensterfunktion $v(t)$ und setzen

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_x^w(\tau, f) v(t-\tau) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}f.$$

Welche Bedingung müssen $w(t)$ und $v(t)$ erfüllen, damit $y(t) = x(t)$ gilt?

★ (c) (9 Punkte) Das Spektrogramm des Signals $x(t)$ bezüglich der Fensterfunktion $w(t)$ is

$$S_x^w(\tau, f) = |F_x^w(\tau, f)|^2.$$

Berechnen Sie die Energie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^w(\tau, f) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}f$$

des Spektrogramms in Abhängigkeit von $\|x\|$ und $\|w\|$ für allgemeines $x(t)$ und allgemeine Fensterfunktion $w(t)$, wobei

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t} \qquad \text{und} \qquad \|w\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 \mathrm{d}t}.$$

Eigenfunktionen analoger LTI-Systeme

Reminder: Eigenvektoren x (z.B. Vektoren in $\mathbb{R}^n$) sind Vektoren, die die Gleichung $Hx = \lambda x$ erfüllen, wobei H ein System (z.B. eine Matrix) ist. λ nennt man den dazugehörigen Eigenwert.

Wir wollen nun die Eigenfunktionen von analogen LTI Systemen finden. Das heisst, wir wollen $x(t)$ finden, sodass $y(t) = (Hx)(t) = \lambda x(t)$ gilt.

$$x \longrightarrow \boxed{\quad H \quad} \longrightarrow y$$

x : Eingangssignal
y : Ausgangssignal

Eingangssignal: Wähle $x(t) = e^{2\pi i f_0 t}$ (komplexe Exponentialfunktion)

Wir wenden nun darauf das LTI-System H an:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_0 (t-\tau)} h(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{2\pi i f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-2\pi i f_0 \tau}\mathrm{d}\tau}_{\hat{h}(f_0)}$$

$$\text{Es folgt:} \qquad (He^{2\pi i f_0 \cdot})(t) = \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}$$

Kunstgriff:
Die Funktionen $e^{2\pi i f_0 t}$ sind Eigenfunktionen von LTI-Systemen mit zugehörien Eigenwerten $\hat{h}(f_0)$

Antwort von LTI-Systemen im Frequenzbereich

Somit gilt $\boxed{\widehat{(x * h)}(f) = \hat{x}(f)\hat{h}(f)}$ und in ähnlicher Weise $\boxed{\widehat{(x \cdot h)}(f) = (\hat{x}(f) * \hat{h}(f))}$

$$(x * h)(t) \quad \circ\!\!\xrightarrow{\;7.\;}\!\!\bullet \quad \hat{x}(f)\hat{h}(f)$$

$$x(t)h(t) \quad \circ\!\!\xrightarrow{\;8.\;}\!\!\bullet \quad (\hat{x} * \hat{h})(f)$$

Als Folge dessen gilt für LTI Systeme $y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\hat{h}(f)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}f$

Wir können LTI-Systeme mit folgenden drei Blockschaltbildern darstellen:

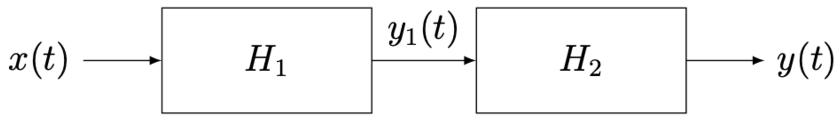
$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$ beschreibt $y(t) = (Hx)(t)$

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$ beschreibt $y(t) = (x * h)(t)$

$x(t) \longrightarrow \boxed{\hat{h}(f)} \longrightarrow y(t)$ beschreibt $\hat{y}(f) = \hat{x}(f)\hat{h}(f)$

Kaskadierung von LTI-Systemen

Wir betrachten die Kaskadierung von zwei LTI-Systemen H_1 und H_2. Die Frage ist nun, ob H_1 und H_2 kommutieren, bzw. ob gilt, dass $H_1 H_2 = H_2 H_1$.



Antwort: Ja, **LTI-Systeme kommutieren!**

Grund: (Theorem, das nicht in SST1 behandelt wird):

Es seien A und B zwei lineare Operatoren auf einem linearen Raum V ausgestattet mit einem positiv definiten inneren Produkt. (z.B. A und B LTI-Systeme, beliebige Matrizen, etc.) Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) A und B besitzen eine gemeinsame Eigenbasis.

(ii) A und B kommutieren.

Wie wir zuvor gesehen haben, haben LTI-Systeme die komplexen Exponentialfunktionen als gemeinsame Eigenbasis. Somit kommutieren LTI-Systeme.

Sidenote: Dieses Theorem ist ausserdem essentiell für Physik 2, wobei man in diesem Fall $\hat{A}$ und $\hat{B}$ als *Hermitian Operators* bezeichnet, die genau dann kommutieren, wenn sie eine gemeinsame Eigenbasis haben. (Dieses Kriterium kann v.a. in Quantum Mechanics sehr hilfreich sein.)

Berechnen wir nun konkret die Kaskadierung der beiden LTI-Systeme H_1 und H_2. Dazu nehmen wir $x(t) = e^{2\pi i f_0 t}$ (Eigenfunktion) und rechnen:

Die Kaskadierung von LTI-Systemen ist somit wieder ein LTI-System mit $\hat{h}(f) = \hat{h}_1(f) \cdot \hat{h}_2(f)$ d.h. $h(t) = (h_1 * h_2)(t)$.

Spezielle Eingangssignale

Allgemeine Schwingungen

Wir betrachten das Eingangssignal $x(t) = e^{st}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \text{wobei } s = \sigma + i2\pi f_0, \quad \mathfrak{Re}(s) = \sigma \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0, \end{cases}$

dann $x(t) = e^{\sigma t} e^{i2\pi f_0 t}, \quad \mathfrak{Re}(x(t)) = e^{\sigma t}\cos(2\pi f_0 t)$

$e^{\sigma t}$ beschreibt die Einhüllende und $e^{i2\pi f_0 t}$ beschreibt die Schwingung.

Der Ausgang eines Systemes mit Impulsantwort $h(t)$ ist dann:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} \mathrm{d}\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau}_{=\mathrm{H}(s)}$$

$\mathrm{H}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau$ ist die **Laplace-Transformierte** von $h(t)$.

Sinusförmiges Eingangssignal

Wir betrachten das Eingangssignal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi f_0 t} e^{-i\varphi_0}$

Die blau markierten Signale sind die Eigenfunktionen. Als Ausgangssignal erhalten wir:

$$y(t) = (Hx)(t) = \tfrac{1}{2}\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} \underbrace{\hat{h}(-f_0)}_{=\hat{h}^*(f_0)} e^{-i2\pi f_0 t} e^{-i\varphi_0}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0} + \left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0}\right)^*\right) = \mathfrak{Re}\left(\hat{h}(f_0) e^{i2\pi f_0 t} e^{i\varphi_0}\right)$$

$$= |\hat{h}(f_0)| \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_0 + \arg(\hat{h}(f_0))\right), \text{ da } \hat{h}(f_0) \text{ komplexwertig sein kann.}$$

Somit ist das Ausgangssignal auf ein sinusförmiges Eingangssignal ein skalierter und verschobener Sinus, der mit derselben Frequenz oszilliert wie das Eingangssignal.

Einschaltvorgänge

Wir betrachten das Eingangssignal $x(t) = e^{2\pi i f_0 t}\sigma(t) \qquad$ (Eigenfunktionen aber nur für $t \geq 0$)

Der stationäre Zustand des Ausgangssignals ist $y(t) \xrightarrow{t\to\infty} \hat{h}(f_0) e^{2\pi i f_0 t}$

Das heisst unendlich lange nach dem Einschalten hat der Einschaltvorgang keinen Einfluss mehr. Das System befindet sich im eingeschwungenen Zustand (steady state). (Herleitung im Skript s.54)

Fourierreihen

Was passiert, wenn der Input $x(t)$ ein beliebiges periodisches Signal ist?

Aus KomA, Ana2 und NuS2 wissen wir, dass wir jede periodische Funktion als Fourierreihe darstellen können. Wir nehmen also an, dass unser Eingangssignal $x(t)$ $T-$periodisch ist. Dann:

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}, \quad \text{wobei} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} \mathrm{d}t \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Gemäss Nr. 21 aus der Formelsammlung wird dieses $x(t)$ fouriertransformiert zu:

$$(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Eigenschaften der Fourierreihen

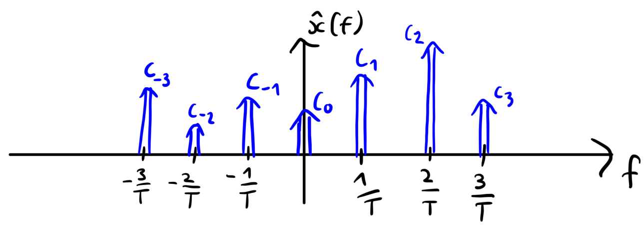
(i) Fourierreihen existieren nur für periodische Signale.

(ii) Periodische Signale haben immer ein "diskretes" Frequenzspektrum.

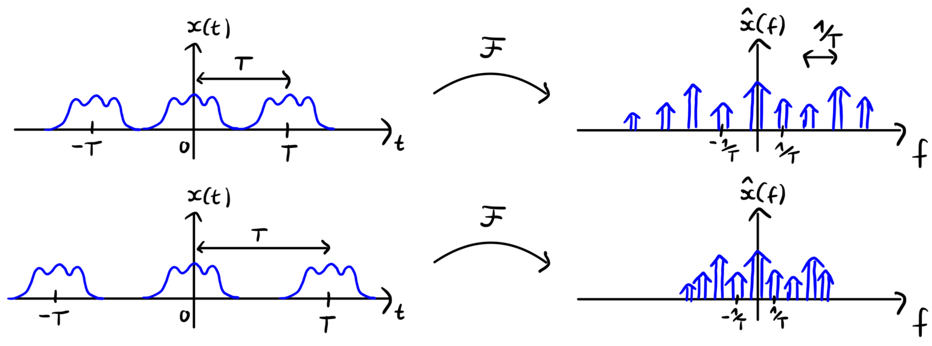
(iii) c_k sind die komplexen Koeffizienten und beschreiben das Signal im Frequenzbereich.

Wir schreiben $x(t) = x(t+T) \circ\!\!-\!\!\bullet\, c_k$

Die c_k beschreiben die Gewichte des Deltakamms.



Eigentlich ist das Spektrum kontinuierlich, da es für alle Frequenzen definiert ist, es hat jedoch nur an Vielfachen von $1/T$ Komponenten, die ungleich null sind.



Wenn $T \to \infty$, dann $1/T \to 0$ und somit wird die Fourierreihe zu einem Integral. Das "diskrete" Spektrum wird kontinuierlich.

Periodische Eingangssignale an LTI-Systemen

Eingangssignal: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$

Zur Erinnerung: $\left(He^{2\pi i f_0 \cdot}\right)(t) = \hat{h}(f_0)e^{2\pi i f_0 t}$, wobei $e^{2\pi i f_0 t}$ Eigenfunktionen sind. Hier mit $f_0 = \frac{k}{T}$

Dank Linearität und Stetigkeit gilt $\left(Hx\right)(t) = \left(H \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k \cdot}{T}}\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(He^{\frac{2\pi i k \cdot}{T}}\right)(t)$

$$\boxed{\implies y(t) = (Hx)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right)}_{d_k} e^{\frac{2\pi i k t}{T}}}$$

Das Ausgangssignal auf ein $T-$periodisches Eingangssignal ist auch $T-$periodisch.

Deltakamm

Ein Deltakamm ist die Summe von um T zeitverschobenen Deltafunktionen. (Periode T)

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad \circ\!\!\xrightarrow{51.}\!\!\bullet \quad c_k = \frac{1}{T} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Die Antwort eines LTI-Systems auf den Deltakamm $\delta_T(t)$ berechnet sich wie folgt:

$$y(t) \overset{\text{LTI}}{=} (h * \delta_T)(t) = \left(h * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - kT)\right)(t) \overset{\text{LIN}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(h * \delta(\cdot - kT)\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT),$$

wobei wir in der letzten Umformung verwendet haben, dass die $\delta-$Funktion das Einselement der Faltung ist.

Poissonsche Summenformel

Somit antworten LTI-Systeme auf das Eingangssignal $x(t) = \delta_T(t)$ mit $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$.

$y(t)$ ist $T-$periodisch und kann somit als Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$ entwickelt werden.

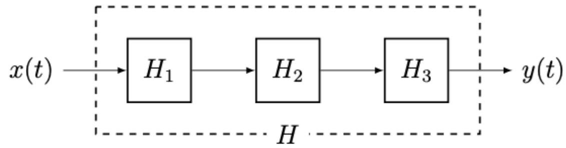
Wegen $x(t) \circ\!\!\xrightarrow{51.}\!\!\bullet \frac{1}{T}\ \forall k \in \mathbb{Z}$ und da gemäss oben $d_k = c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right)$ erhalten wir:

Poissonsche Summenformel: $$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}}$$

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.a) ii, iii, iv

Aufgabe 1 (25 Punkte)

★ (a) (7 Punkte) Gegeben sei folgendes System H,



bestehend aus dem LTI-System H_1 mit Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$(H_1 x)(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-|t-\tau|} \, d\tau,$$

dem LTI-System H_2 mit Impulsantwort

$$h_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi f_g t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 2 f_g, & t = 0 \end{cases}, \quad f_g > 0,$$

und dem System H_3 mit Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$(H_3 x)(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

★ i. (1 Punkt) Ist das System H_3 ein LTI-System?
Hinweis: Sie können die Stetigkeit des Operators $\frac{dx(t)}{dt}$ ohne Beweis annehmen.

★ ii. (3 Punkte) Berechnen Sie $\widehat{h}_1(f)$ und $\widehat{h}_2(f)$, wobei h_1 die Impulsantwort des LTI-Systems H_1 ist, und stellen Sie die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Systems H_3 im Frequenzbereich dar, d.h., bestimmen Sie $\widehat{(H_3 x)}(f)$ als Funktion von $\widehat{x}(f)$.

iii. (1 Punkt) Ist das Gesamtsystem H ein LTI-System? Wenn ja, geben Sie die Fouriertransformierte $\widehat{h}(f)$ der zugehörigen Impulsantwort h an.

iv. (2 Punkte) Am Eingang des Gesamtsystems H liegt das Signal

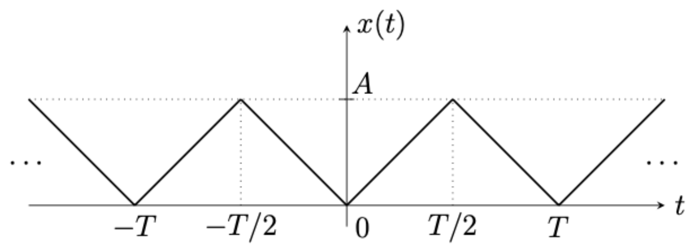
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t / T}, \; T > 0, \; c_k \in \mathbb{C},$$

an. Berechnen Sie die Fourierreihe des Ausgangssignals $y(t) = (Hx)(t)$ in Abhängigkeit von c_k, T und f_g.

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.d) i, ii

★ (d) (10 Punkte) Gegeben sei das T-periodische Signal

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{2A}{T}t, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{2A}{T}t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases},$$



mit $A > 0,\ T > 0$.

★ i. (8 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/T}$ in Abhängigkeit von A.
Hinweis: Das folgende unbestimmte Integral kann hilfreich sein.

$$\int t e^{at}\, dt = \frac{e^{at}(at-1)}{a^2}, \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

ii. (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt.$$

Benutzen Sie dieses Resultat in Kombination mit der Parsevalschen Beziehung für zeitkontinuierliche periodische Signale, um zu beweisen, dass

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$