SST1 Übungsstunde 5

Matteo Dietz

October 2024

Philosophisches

- Roughly speaking, wie viele Studenten gehen ca. zur Vorlesung?

- Fokussiert euch in SST1 mehr auf Essenz als auf Strategie!

Themenüberblick

- **Verallgemeinerte Funktionen:**
  Funktionale
  $\delta-$Funktion und ihre Eigenschaften
  Ableitung verallgemeinerter Funktionen

Themenüberblick

- **Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich:**
  Fouriertransformation: Definition, Eigenschaften und Beispiele
  Dualität der Fouriertransformation
  Plancherelsche Identität und Parsevalsche Beziehung

Aufgaben für diese und nächste Woche

46, 47, **48**, **49**, **50**, **51**, 52, 53, **54**, **55**, **56**, **57**, 58, **59**, **60**, 61, **62**, 63, **64**, 65, **66**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Verallgemeinerte Funktionen: Funktionale

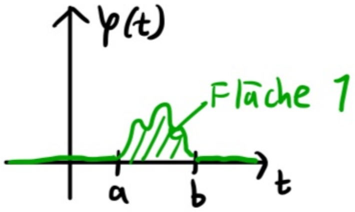
- **Definition:** Ein **Funktional** ist eine Funktion, deren Definitionsmenge eine Teilmenge eines linearen Raumes X ist und deren Zielmenge aus Skalaren besteht.

$$\ell_x : X \to \mathbb{C}$$

$$\varphi(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \int_a^b \varphi(t)\,x(t)\,dt =: \ell_x(\varphi)$$

Funktionale

- $\varphi(t) \geq 0 \quad \forall t$
- $\varphi(t) = 0 \quad \forall t \notin [a,b]$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1$



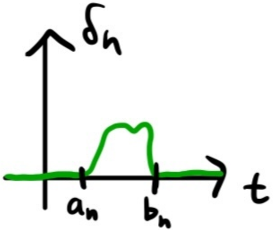
- **Mittelwertsatz** der Integration:

$$\exists \xi \in [a,b], \text{ sodass } \ell_x(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)x(t)dt = x(\xi)\int_a^b \varphi(t)dt$$

Deltafolgen

- Eine Deltafolge $\delta_n(t)$ hat folgende Eigenschaften:

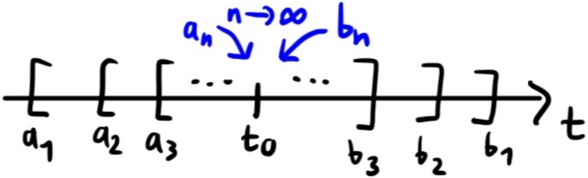
1. $$\delta_n(t) \begin{cases} \geq 0, & \forall t \in I_n = [a_n, b_n] \\ = 0, & \forall t \notin I_n \end{cases}$$



Deltafolgen

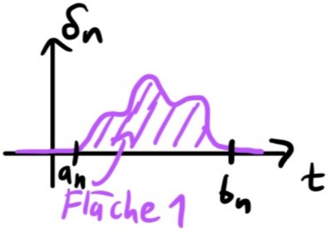
2. Die Intervalle I_n bilden eine **Intervallverschachtelung** für $t_0 \in \mathbb{R}$, d.h. die Intervalle, auf denen $\delta_n(t) \geq 0$ werden immer schmäler: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq t_0 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = t_0$$

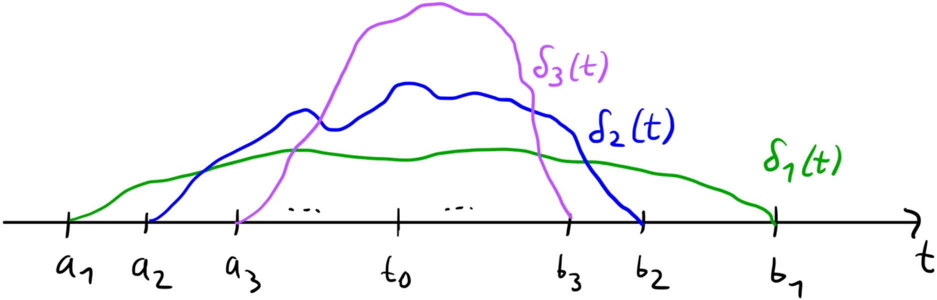


Deltafolgen

3. **Normierung**: $\forall n$ gilt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t)\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{b_n} \delta_n(t)\mathrm{d}t = 1$



Deltafolgen



Dirac-Delta

- Wir nehmen den Grenzwert für $n \to \infty$ und erhalten die **Dirac-Delta** "Funktion":

$$\delta_{t_0}(t) := \lim_{n\to\infty} \delta_n(t) \begin{cases} \to \infty, & t = t_0 \\ = 0, & t \neq t_0 \end{cases} = \delta(t - t_0)$$

- Eigenschaften: Breite 0, Höhe $\to \infty$ und Fläche 1

Deltafunktion

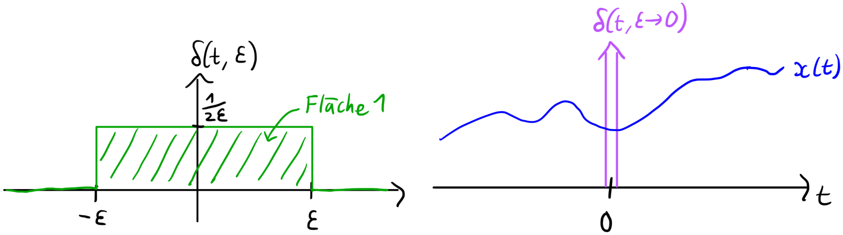
- Wir betrachten die Funktion:

$$\delta(t,\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |t| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\ell_x(\delta(t,\varepsilon)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t,\varepsilon)\mathrm{d}t = x(\xi)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t,\varepsilon)\mathrm{d}t = x(\xi)$

- Wir lassen $\varepsilon \to \infty$, dann $\xi \to 0$ und somit $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ell_x(\delta(t,\varepsilon)) = x(0)$. Man schreibt $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(t,\varepsilon)$

Deltafunktion



$$\implies \delta(t)x(t) = \delta(t)x(0), \quad \text{dann}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)\mathrm{d}t = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = x(0)$$

Eigenschaften der Deltafunktion

1. **Symmetrie**:
   $\delta(t) = \delta(-t)$
   $\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t)$

2. **Multiplikation mit einer Funktion**:
   $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$
   $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$

Eigenschaften der Deltafunktion

3. **Siebeigenschaft**:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)\mathrm{d}t = x(0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)\mathrm{d}t = x(t_0)$$

Eigenschaften der Deltafunktion

4. **Verschiebung/Skalierung des Parameters**:

$$\delta(at + b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$$

Eigenschaften der Deltafunktion

5. **Die $\delta-$Funktion ist das Einselement der Faltung**:

$$(x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = x(t)$$

$$(x * \delta(\cdot - t_0))(t) = x(t - t_0)$$

Eigenschaften der Deltafunktion

6. **Einheitssprungfunktion**:
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \sigma(t)$$

Ableitung verallgemeinerter Funktionen

- **Notation**:

  $D =$ Ableitungsoperator

  $x'(t) =$ konventionelle Definition der Ableitung einer stetigen, differenzierbaren Funktion (Vgl. Analysis 1)

  $t_0 =$ eine Sprungstelle von $x(t)$

$$(Dx)(t) = x'(t) + (x(t_0^+) - x(t_0^-))\delta(t - t_0)$$

Bemerkung

- Impulsantwort $h(t) := (H\delta)(t)$
- Sprungantwort $a(t) := (H\sigma)(t)$

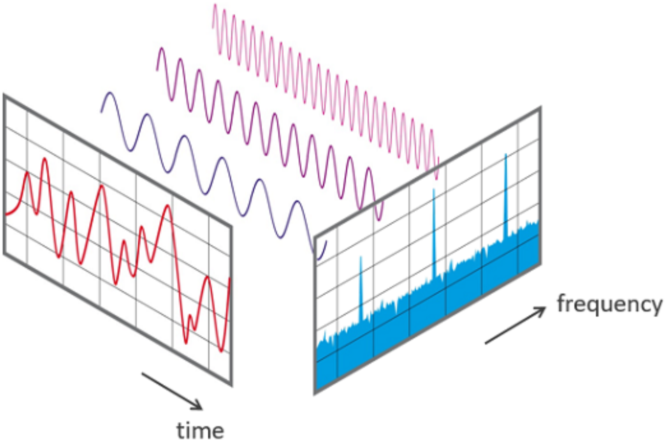
$$\text{Da } \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t) \quad \text{haben wir} \quad \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = h(t)$$

Aufgaben

- **Aufgabe 50**
- **Aufgabe 51**

Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich

- **Motivation**



Fouriertransformation

- **Fouriertransformation (FT)**:

$$\hat{x}(f) = (\mathcal{F}x)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t$$

- **Inverse Fouriertransformation (IFT)**:

$$x(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f$$

Fouriertransformation: Hinweise

- KomA/NuS 2: FT und IFT waren definiert als:

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

- In SST1 haben wir t und f als Parameter anstatt t und ω
- $\omega = 2\pi f \implies \mathrm{d}\omega = 2\pi \mathrm{d}f \implies$ kein Vorfaktor $1/(2\pi)$ in IFT

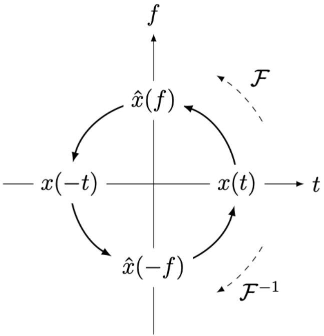
Fouriertransformation: Hinweise

- Die Fouriertransformation ist eine **lineare Abbildung**. (**Additivität** & **Homogenität**)
- Berechnet die FT und IFT mithilfe der Transformationstabellen.
- An der Prüfung muss man eigentlich nie die Integrale der FT berechnen. Es gibt immer einen Kunstgriff, nachdem man die FT von der Tabelle ablesen kann.

Aufgaben

- **Aufgabe 58.b)**
- **Aufgabe 60.b)**
- **Aufgabe 64.b)**

Dualität der Fouriertransformation



$$\begin{aligned}
x(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \ \widehat{x}(f)\\
\widehat{x}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \ x(-f)\\
x(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \ \widehat{x}(-f)\\
\widehat{x}(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \ x(f).
\end{aligned}$$

Beispiel

Parseval und Plancherel

Plancherelsche Identität:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{y}(f) \mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

Parsevalsche Beziehung:

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2 \mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = ||\hat{x}||^2$$

Plancherelsche Identität

- **Theorem**: Wenn $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt $\langle x, y \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$
  $\implies \mathcal{F}$ ist längenerhaltend und winkelerhaltend
- **Beweis**:

Aufgaben

- **Aufgabe 66**
- **Prüfungsaufgabe: Sommer 2020, Aufgabe 4.a)**