SST1 Übungsstunde 12

Matteo Dietz

December 2024

Themenüberblick

- **Repetition: Diskrete Fouriertransformation (DFT)**
  Visualisierung, Matrixdarstellung, Zyklische Faltung
  Diskrete Filter, Überabtastung, Unterabtastung
- **Fast Fourier Transform (FFT)**
  Cooley-Tukey FFT
- **Tipps für die Prüfung**

Aufgaben für diese Woche

123, **124**, **125**, **126**, **127**, **128**, **129**, **130**, **131**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Die DFT ist sehr wichtig! Es kommt immer eine ganze Aufgabe dazu an der Prüfung. (25 / 100 Punkte)

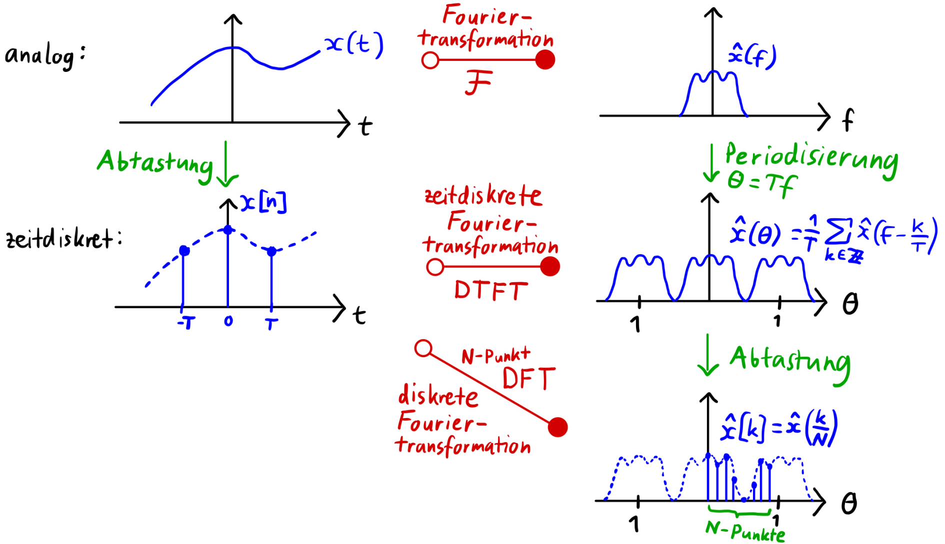
Diskrete Fouriertransformation (DFT)

(DFT) $$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} \qquad \hat{x}[k+N] = \hat{x}[k]$$

(IDFT) $$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\omega_N^{-kn} \qquad x[n+N] = x[n]$$

wobei $\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$

DFT: Visualisierung



DFT: Matrixdarstellung

Wir haben $\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}, \qquad k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ N-1\}$ Somit:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \\ \hat{x}[2] \\ \vdots \\ \hat{x}[N-1] \end{bmatrix}}_{=:\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\text{DFT-Matrix } F_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

DFT: Matrixdarstellung

Somit erhalten wir:

DFT

$\hat{\mathbf{x}} = F_N \mathbf{x}$

IDFT

$\mathbf{x} = \frac{1}{N} F_N^H \hat{\mathbf{x}}$

Die Spalten von F_N sind orthogonal aufeinander: $\langle \mathbf{f}_r,\ \mathbf{f}_s \rangle = \delta_{r,s}$

Es gilt $F_N F_N^H = N I_N$

Formelsammlung: DFT Eigenschaften

76.	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\, e^{2\pi i k n/N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i k n/N}$
77.	$x[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i k N_0/N}\, \hat{x}[k]$
78.	$e^{2\pi i k_0 n/N}\, x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k-k_0]$
79.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*[-k]$
80.	$x^*[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*[k]$
81.	$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, y[n-m]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k]\hat{y}[k]$
82.	$x[n]y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{x}[m]\hat{y}[k-m]$
83.	$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*[-n]\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}[k]\}$
84.	$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x^*[-n]\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}[k]\}$
85.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\hat{x}[k] + \hat{x}^*[-k]\right)$
86.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\hat{x}[k] - \hat{x}^*[-k]\right)$

Formelsammlung: DFT Transformationspaare

87.	$e^{2\pi i k_0 n/N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$N\delta[k-k_0]$
88.	$\cos\left(\frac{2\pi k_0}{N}n\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{N}{2}(\delta[k+k_0-N]+\delta[k-k_0])$
89.	$\sin\left(\frac{2\pi k_0}{N}n\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{iN}{2}(\delta[k+k_0-N]-\delta[k-k_0])$
90.	$\delta[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1
91.	$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le N_1\\ 1, & N-N_1\le n\le N-1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\frac{\pi k}{N}}$

Zyklische Faltung

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[l-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[l-n] x_2[n]$$

$$\text{DFT} \; \circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k] \cdot \hat{x}_2[k]$$

Elementweise Multiplikation im Frequenzbereich entspricht einer zyklischen Faltung im Zeitbereich

Zyklische Faltung: Matrixdarstellung

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[l-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[l-n] x_2[n]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_3[0] \\ x_3[1] \\ \vdots \\ x_3[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[N-1] & \cdots & x_2[1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}$$

Zyklische Faltung: Matrixdarstellung

$$\mathbf{X}_2 = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N$$

1. **Die zyklische Faltung wird durch die DFT diagonalisiert.**

2. Eigenvektoren einer zirkulanten Matrix = Spalten der normalisierten DFT-Matrix $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}_N^H$

Diskrete Filter

Diskrete ideale Filter haben eine Impulsantwort mit $N-$Punkt DFT:

$$\hat{h}[k] = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{D} \text{ (Durchlassbereich)} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{N} \mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{h}[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N \\ &= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \cdots & \mathbf{f}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}[N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N^H \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{l \in \mathcal{D}} \mathbf{f}_l \mathbf{f}_l^H \end{aligned}$$

Diskrete Filter

Filter auf ein Signal $\mathbf{x}$ angewandt:

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{l\in\mathcal{D}} \mathbf{f}_l \mathbf{f}_l^H\right)\mathbf{x} = \frac{1}{N}\sum_{l\in\mathcal{D}} \langle \mathbf{x},\ \mathbf{f}_l\rangle \mathbf{f}_l$$

Filter $\mathbf{H}$ entspricht einer orthogonalen Projektion auf $\mathcal{R}(\mathbf{H})$:

(i) $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}$

(ii) $\mathbf{H} = \mathbf{H}^H$

DFT: Abtastung

- DFT eines zeitdiskreten Signals der Länge N entspricht Abtastung von $\hat{x}(\theta)$ (DTFT) mit Abtastfrequenz $\frac{1}{N}$

$$\hat{x}[k] = \hat{x}(\theta)\big|_{\theta=\frac{k}{N}}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

- Das ist kritische Abtastung ($N \times N$ Matrix)

- Was passiert, wenn wir Überabtasten oder Unterabtasten?

DFT: Abtastung

Wir tasten nun nicht mit Frequenz $\frac{1}{N}$ sondern mit $\frac{1}{M}$ ab

$$\hat{x}\left(\frac{k}{M}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k \frac{n}{M}}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1$$

In Matrixform:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_M & \omega_M^2 & \cdots & \omega_M^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \cdots & \omega_M^{(N-1)(M-1)} \end{bmatrix}}_{\text{Matrix } F} \mathbf{x} \qquad \omega_M = e^{-\frac{2\pi i}{M}}$$

DFT: Überabtastung ($M > N$)

- $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ (Länge N) und $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ (Länge M)
- $F_o \in \mathbb{C}^{M\times N}$, ($M > N$) hat mehr Zeilen als Spalten
- Aus $\hat{\mathbf{x}}$ können wir mittels Pseudoinversen $\mathbf{x}$ zurückgewinnen.
- Rücktransformation: $\mathbf{x} = \frac{1}{M} F_o^H \hat{\mathbf{x}}$, also:

$$x[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}[k] \omega_M^{-kn}, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

DFT: Unterabtastung ($M < N$)

- $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ (Länge N) und $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ (Länge M)
- $F_u \in \mathbb{C}^{M \times N}$, ($M < N$) hat mehr Spalten als Zeilen
- Gleichungssystem $\hat{\mathbf{x}} = F_u \mathbf{x}$ ist unterbestimmt: M Gleichungen und N Unbekannte, wobei $M < N$.

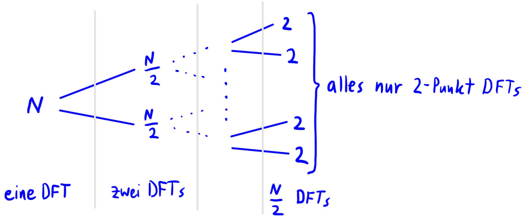
  $\implies$ $\mathbf{x}$ kann nicht aus $\hat{\mathbf{x}}$ zurückgewonnen werden.

Fast Fourier Transform (FFT): Idee

Die DFT ist sehr rechenaufändig:

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}, \qquad k = 0,\ 1,\ \dots,\ N-1$$

Idee: Wir zerlegen das Signal $x[n]$ rekursiv in geraden und ungeraden Anteil bis wir nur noch "Teilsignale" der Länge 2 haben:



Fast Fourier Transform (FFT): Idee

Am Ende haben wir nur noch 2-Punkt DFTs

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} \hat{x}_r[0] &= x_r[0] + x_r[1] \\ \hat{x}_r[1] &= x_r[0] - x_r[1] \end{aligned}$$

DFT ist in $\mathcal{O}(N^2)$ **FFT** ist in $\mathcal{O}(N \log(N))$

FFT: Cooley-Tukey Algorithmus

- **Annahme**: N gerade, sodass $\frac{N}{2} \in \mathbb{N}$
- Wir versuchen die $N-$Punkt DFT als zwei $\frac{N}{2}-$Punkt DFTs (geraden und ungeraden Anteil) zu schreiben:

FFT: Cooley-Tukey Algorithmus

Kunstgriff: $\omega_N^2 = e^{-\frac{4\pi i}{N}} = e^{-\frac{2\pi i}{(N/2)}} = \omega_{\frac{N}{2}}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l]\omega_{\frac{N}{2}}^{kl}}_{=:\hat{g}[k]} + \omega_N^k \underbrace{\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l+1]\omega_{\frac{N}{2}}^{kl}}_{=:\hat{u}[k]}$$

$$\Longrightarrow \hat{x}[k] = \hat{g}[k] + \omega_N^k \hat{u}[k], \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1 \text{ wobei:}$$

$$\hat{g}[k] = \hat{g}\left[k + \frac{N}{2}\right] \qquad \hat{u}[k] = \hat{u}\left[k + \frac{N}{2}\right]$$

Prüfungsaufgabe: Sommer 2021, Aufgabe 3

Prüfungsinformationen

- Die Prüfung dauert 180 min (3 Stunden).
- Es gibt 4 Aufgaben, die je 25 Punkte geben. (ca. 45 min pro Aufgabe)
- Einziges Hilfsmittel ist die Formelsammlung.

Kontur der Prüfung

1. Analoge Signale und Systeme, Systemeigenschaften
2. Abtasttheorem (Mischung analoge und zeitdiskrete Signale)
3. Zeitdiskrete Signale (entweder DTFT oder $\mathcal{Z}-$Transformation)
4. DFT

Tipps für die Prüfung

- 20 alte Prüfungen. Löst möglichst viele davon!
- Die neueren Prüfungen sind relevanter.
- Nur 4 alte Prüfungen enthalten Aufgaben zu der $\mathcal{Z}-$Transformation. Schaut Aufgaben 114-122 dazu nochmals an!
- Konzepte wie z.B. das Abtasttheorem gut verstehen!

Tipps für die Prüfung

- Substitutionen in Integralen und Summen müssen sitzen!
- Lösungswege, Achsenbeschriftungen bei Skizzen etc. nicht vergessen!
- Falls ihr Teilaufgaben nicht schafft, könnt ihr, wenn ihr übrige Zeit habt, trotzdem weiterrechnen (z.B. mit Parametern), vielleicht bekommt ihr dafür einige Punkte.