Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dept. of Information Technology and Electrical Engineering

Übungsstunde 9

Themenüberblick

- **Repetition: Abtasttheorem**
- **Zeitdiskrete Signale und Systeme**

  Zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT)

  Zeitdiskrete LTI-Systeme und Systemeigenschaften

  Differenzengleichungen

Aufgaben für diese Woche

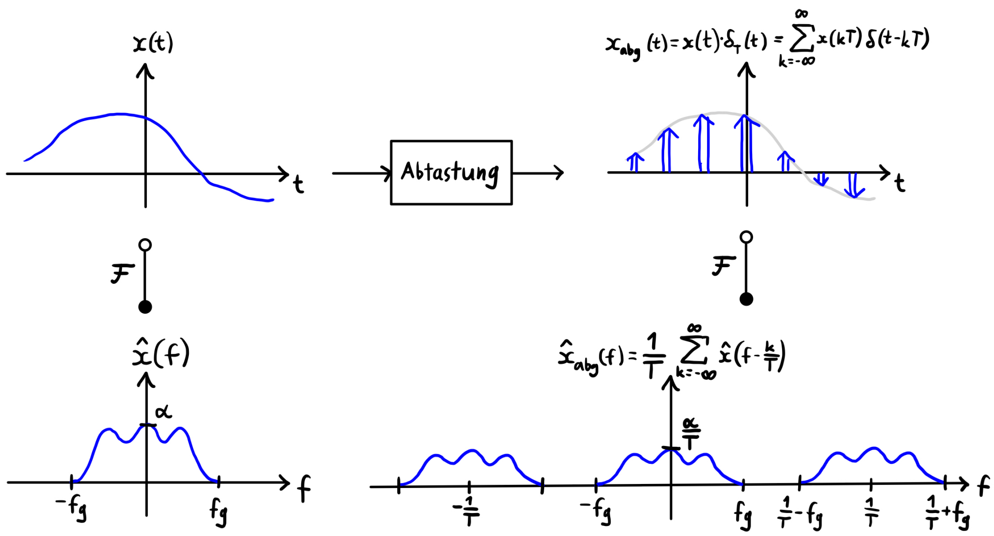
97, 98, 99, 100, 101, **102**, **103**, **104**, 105, 106, **107**, **108**, 109, **110**, **111**, **112**, 113

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Abtasttheorem

Abgetastete Signale im Frequenzbereich

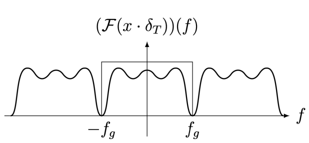
$$x_{abg.}(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \quad \overset{20.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad \hat{x}_{abg.}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



Die Abtastung im Zeitbereich entspricht einer Periodisierung im Frequenzbereich.

Die Abtastung von $x(t)$ erzeugt im Frequenzbereich um Skalierungsfaktor $\frac{1}{T}$ skalierte Kopien von $\hat{x}(f)$, die um $f_s = \frac{1}{T}$ verschoben sind, wobei T die Abtastperiode ist.

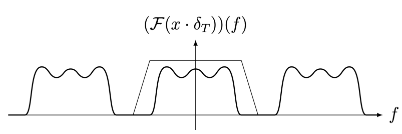
Kritische Abtastung



$$f_s = 2f_g$$

Wir können das Signal mit einem idealen Tiefpassfilter der Breite $W = f_g$ rekonstruieren.

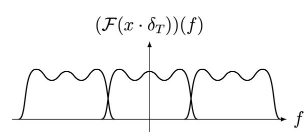
Überabtastung



$$f_s > 2f_g$$

In diesem Fall können wir sogar einen stabilen Tiefpassfilter verwenden. Überabtastung mit $f_s > 2f_g$ garantiert nicht nur, dass perfekte Rekonstruktion möglich ist, sondern hilft im Allgemeinen auch, die Empfindlichkeit auf Rauschen im Abtastprozess zu verringern.

Unterabtastung



$$f_s < 2f_g$$

Es gibt **Aliasing**. Mit Hilfe eines Tiefpassfilters erhalten wir keine perfekte Version von $\hat{x}(f)$, eine Rekonstruktion des ursprünglichen Signals ohne Informationsverluste ist somit nicht möglich.

Abtasttheorem

Ein Signal mit der Bandbreite f_g kann aus seinen Abtastwerten, genommen mit einer Rate von $f_s \geq 2f_g$, eindeutig rekonstruiert werden. Die kritische Rate $f_s = 2f_g$ wird als **Nyquistrate** bezeichnet.

Rekonstruktion

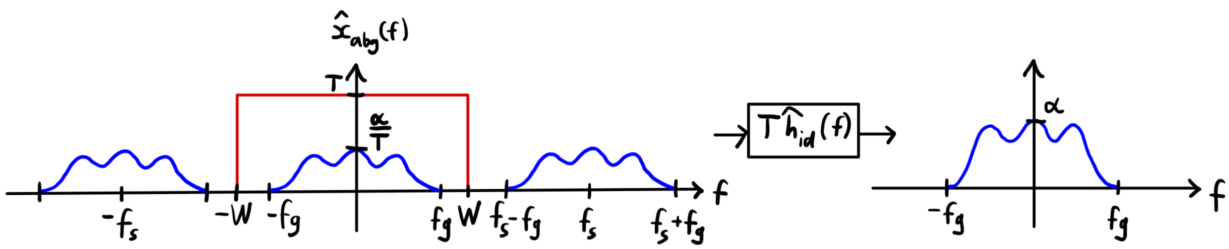
Im Allgemeinen ist die Rekonstruktion eines Signals aus seinen Abtastwerten gegeben durch:

$$y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)h(t - kT)$$

wobei $h(t)$ die Impulsantwort eines Filters ist. Im Falle der kritischen Abtastung brauchen wir für die Rekonstruktion einen idealen Tiefpassfilter $h(t) = h_{id}(t)$ mit Breite $W = f_g = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$.

$$\hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad h_{id}(t) = \frac{\sin(2\pi W t)}{\pi t}$$

Deswegen gilt bei der kritischen Abtastung: $y(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}$



Zeitdiskrete Signale

Eine Abtastung im Zeitbereich ergibt eine periodische Fortsetzung des Spektrums, d.h.

$$\hat{x}_{\text{abg}}(f) = \mathcal{F}\{x \cdot \delta_T\}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

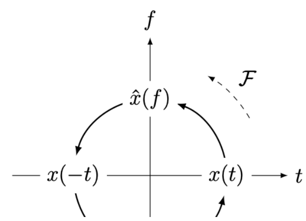
Dieses Signal ist $\frac{1}{T}$−periodisch und besitzt somit eine Fourierreihendarstellung. Wir verwenden im Folgenden die Poissonsche Summenformel und die Dualität der Fouriertransformation.

Poissonsche Summenformel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t + kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k/T)e^{2\pi ikt/T}$$

$$\text{Substitution: } h \to \hat{x},\ t \to f,\ T \to \frac{1}{T}$$

Dualität der Fouriertransformation

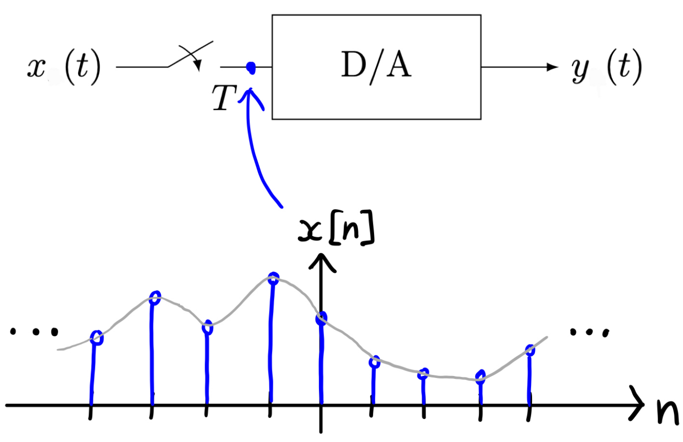


$$\Longrightarrow \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}\cdot T\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{\hat{x}}(kT)}_{x(-kt)} e^{2\pi ikfT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-kT)e^{2\pi ikfT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(kT)}_{c_k} e^{-2\pi ikfT}$$

Indem wir im letzen Schritt die Summationsreihenfolge gewechselt haben ($k \to -k$), haben wir das abgetastete Signal im Frequenzbereich $\hat{x}_{\text{abg}}(f)$ als komplexe Fourierreihe dargestellt. Die **Abtastwerte** $x(kT)$ sind die Koeffizienten der Fourierreihe des Spektrums $\hat{x}_{\text{abg}}(f)$.

Notation für Zeitdiskrete Signale

$$\boxed{x_d[k] := x(kT), \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}, \text{ nimmt nur ganze Zahlen als Argument}}$$



Zeitdiskrete Signale im Frequenzbereich

Wir definieren $\theta = Tf$ und erhalten somit mithilfe der Formel von oben

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k] e^{-2\pi i k\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-2\pi i kTf} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta - k}{T}\right) = \hat{x}_d(\theta)$$

Somit erhalten wir die Zeitdiskrete Fouriertransformation (*Discrete Time Fourier Transform*):

(DTFT) $$\hat{x}_d(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-2\pi i n\theta}$$

(IDTFT) $$x_d[n] = \int_0^1 \hat{x}_d(\theta) e^{2\pi i n\theta} \mathrm{d}\theta$$

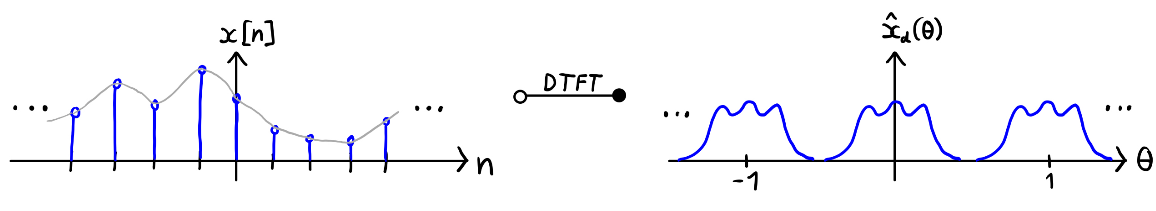
Rücktransformation:

$$\int_0^1 \hat{x}_d(\theta) \cdot e^{2\pi i n\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_d[l] e^{-2\pi i l\theta}\right) \cdot e^{2\pi i n\theta}\mathrm{d}\theta = \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_d[l]}_{\text{unabhg. von } \theta} \cdot \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi i(n-l)\theta}\mathrm{d}\theta}_{\delta[n-l]}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_d[l]\delta[n-l] = x_d[n]$$

Bemerkungen:

- Die DTFT transformiert ein Signal von einem **diskreten Zeitbereich** in einen **kontinuierlichen Frequenzbereich**.
- $\theta = Tf = \frac{f}{f_s}$ ist die **relative Frequenz**. (T = Abtastperiode und f_s = Abtastfrequenz)
- $\hat{x}_d(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta - k}{T}\right)$ ist **1-periodisch** in θ.



Formelsammlung: Fouriertransformation zeitdiskreter Signale (DTFT)

54.	$x[n] = \int_0^1 \hat{x}(\theta)\, e^{2\pi i n\theta} \mathrm{d}\theta$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n\theta}$
55.	$x[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i N_0\theta}\hat{x}(\theta)$
56.	$e^{2\pi i n\theta_0}x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta-\theta_0)$
57.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(-\theta)$
58.	$x[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-\theta)$
59.	$(x*y)[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta)\hat{y}(\theta)$
60.	$x[n]y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x}*\hat{y})(\theta)$ **(siehe [2])**
61.	$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(\theta)\}$
62.	$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(\theta)\}$
63.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) + \hat{x}^*(\theta))$
64.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) - \hat{x}^*(\theta))$
65.	$nx[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\hat{x}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$
66.	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-2\pi i\theta}}\hat{x}(\theta) + \frac{1}{2}\hat{x}(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-k)$

67.	$\delta[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i N_0\theta}$
68.	$e^{2\pi i\theta_0 n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-\theta_0-k)$
69.	$\cos(2\pi\theta_0 n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta+\theta_0-k)+\delta(\theta-\theta_0-k)\right)$
70.	$\sin(2\pi\theta_0 n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta+\theta_0-k)-\delta(\theta-\theta_0-k)\right)$
71.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\theta-\frac{k}{N}\right)$
72.	$\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-2\pi i\theta}} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-k)$
73.	$a^n\sigma[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-ae^{-2\pi i\theta}}$
74.	$\frac{\sin(2\pi n\alpha)}{\pi n}, \quad 0<\alpha<1/2$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\begin{cases}1, & \lvert\theta\rvert \le \alpha\\ 0, & \alpha < \lvert\theta\rvert \le 1/2\end{cases}$ **(1-periodisch)**
75.	$x[n] = \begin{cases}1, & \lvert n\rvert \le N_1\\ 0, & \lvert n\rvert > N_1\end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\sin\big((2N_1+1)\pi\theta\big)}{\sin(\pi\theta)}$

Zeitdiskrete Systeme

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\quad H \quad} \longrightarrow y[n] \qquad\qquad y = Hx$$

Die folgenden Eigenschaften sind im zeitdiskreten Bereich analog definiert wie im zeitkontinuierlichen. (Vgl. ÜS 3)

Linearität

- $H(\alpha x_1 + x_2) = \alpha H x_1 + H x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Zeitinvarianz

- $H(x[\cdot - n_0]) = (Hx)[\cdot - n_0] \quad \forall x \in X,\ \forall n_0 \in \mathbb{Z}$

Kausalität

- $x_1[n] = x_2[n] \quad \forall n \leq n_0 \implies (Hx_1)[n] = (Hx_2)[n] \quad \forall n \leq n_0 \quad \forall x_1, x_2 \in X,\ \forall n_0 \in \mathbb{Z}$

BIBO-Stabilität

- $\forall x \in X$ mit $|x[n]| \leq B_x < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies \exists B_y < \infty$ mit $|(Hx)[n]| \leq B_y \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Kronecker-Delta Funktion

Die Kronecker-Delta Funktion ist definiert als

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

Es gilt $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$

Zeitdiskrete LTI-Systeme

Ein zeitdiskretes System ist LTI, wenn es linear und zeitinvariant ist. Die Systemantwort von zeitdiskreten LTI-Systemen lautet:

$$y[n] = (Hx)[n] = H\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[\cdot - k]\right)[n] \overset{\text{Lin.}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(H(\delta[\cdot - k])\right)[n] \overset{\text{Zeitinv.}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\underbrace{(H\delta)[n-k]}_{=:h[n-k]}$$

Die zeitdiskrete Impulsantwort ist definiert als $h[n] = (H\delta)[n]$

Die Antwort von einem LTI-System ist also:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \quad \overset{\text{DTFT}}{\underset{59}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet}} \quad \hat{y}(\theta) = \hat{x}(\theta)\hat{h}(\theta)$$

Systemeigenschaften Zeitdiskreter LTI-Systeme

Ein LTI-System heisst ...

- **kausal**, genau dann wenn: $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$
- **BIBO-stabil**, wenn: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$, (also $h \in l^1$)

Prüfungsaufgabe Frühjahr: 2017, Aufgabe 3.a)

a) (14 Punkte) Wir betrachten das zeitdiskrete LTI-System H_1 mit der Impulsantwort

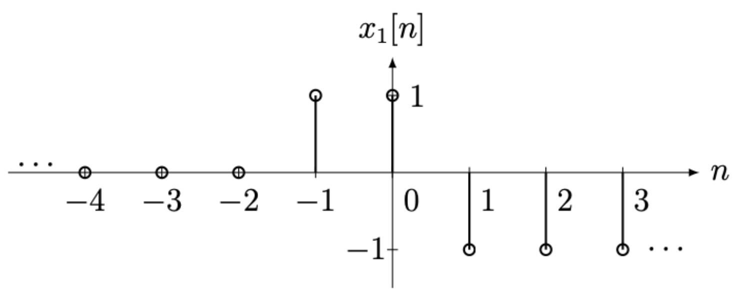
$$h_1[n] = 4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\sigma[n]$$

i. Bestimmen Sie die Sprungantwort $a_1[n]$ von H_1 (d.h., das Ausgangssignal für das Eingangssignal $\sigma[n]$).

Hinweis: Für $q \neq 1$ gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

ii. Bestimmen Sie das Ausgangssignal für das Eingangssignal

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{-1, 0\}, \\ -1, & n \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Leiten Sie das Resultat als Funktion der Sprungantwort a_1 her. Begründen Sie die Schritte in Ihrer Herleitung über die Eigenschaften von LTI-Systemen.

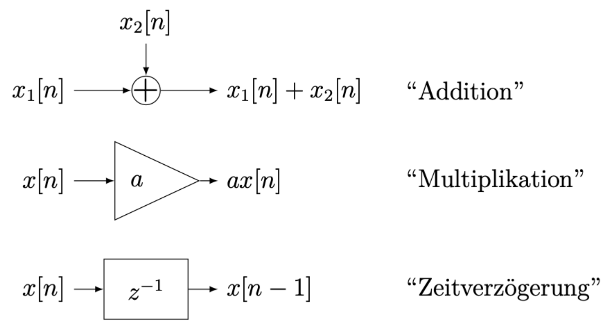
iii. Geben Sie eine allgemeine hinreichende Begründung für BIBO-Stabilität eines zeitdiskreten LTI-Systems an. Zeigen Sie mithilfe dieser Bedingung, dass H_1 BIBO-stabil ist.

Differenzengleichungen

Die Eingangs-Ausgangsbeziehung vieler zeitdiskreter LTI-Systeme kann mithilfe von Differenzengleichungen beschrieben werden. Diese Differenzengleichungen haben die Form:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

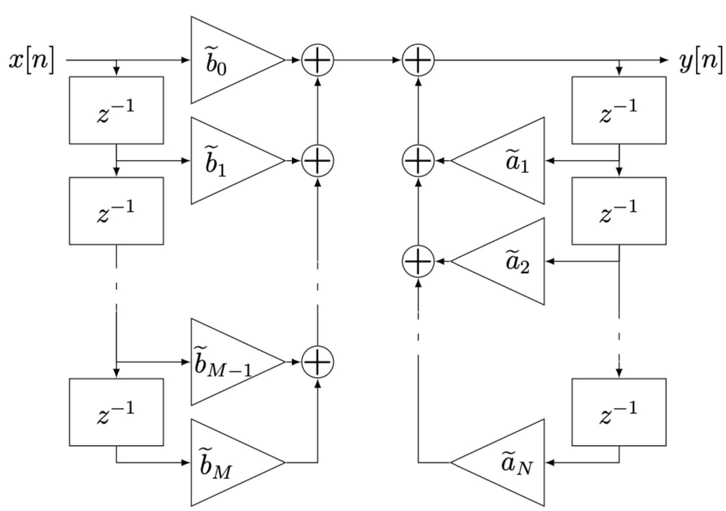
Um Differenzengleichungen zu beschreiben sind Blockschaltbilder sehr hilfreich. In Blockschaltbildern verwenden wir die folgenden Elemente:



Wenn wir obige Differenzengleichung umformen, erhalten wir:

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \implies y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x[n-m]$$

$$\text{Wir setzen } -\frac{a_k}{a_0} = \tilde{a}_k \text{ und } \frac{b_m}{a_0} = \tilde{b}_m \implies y[n] = \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_k \underset{\hat{y}(\theta)e^{-2\pi i k\theta}}{y[n-k]} + \sum_{m=0}^{M} \tilde{b}_m \underset{\hat{x}(\theta)e^{-2\pi i m\theta}}{x[n-m]}$$



Beispiel

Wir betrachten ein LTI-System beschrieben durch die Differenzengleichung:

$$2y[n] - 3y[n-3] = x[n] + 6x[n-1] - 8x[n-7]$$

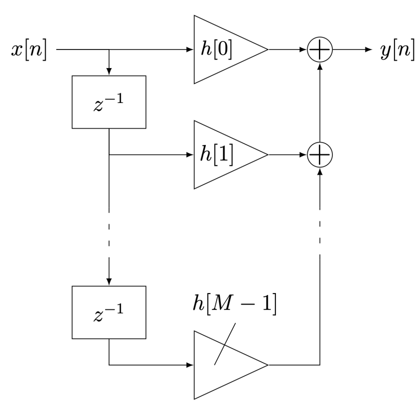
Ziel: Suche $\hat{h}(\theta) = \dfrac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)}$. Um die Fouriertransformierte der Impulsantwort zu finden, nehmen wir die DTFT auf beiden Seiten der Differenzengleichung.

Dank $x[n - N_0] \overset{55.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} e^{-2\pi i N_0 \theta}\hat{x}(\theta)$ haben wir: $\left(\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-2\pi i k\theta}\right)\hat{y}(\theta) = \left(\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-2\pi i m\theta}\right)\hat{x}(\theta)$

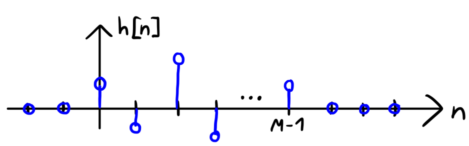
Somit $\hat{h}(\theta) = \dfrac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)} = \dfrac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-2\pi i m\theta}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-2\pi i k\theta}}$

FIR-Filter (Finite Impulse Response)

Die Impulsantwort von FIR-Filtern hat eine **endliche Länge**. Eine Konsequenz davon ist, dass FIR-Filter keine Rückkopplungen haben.

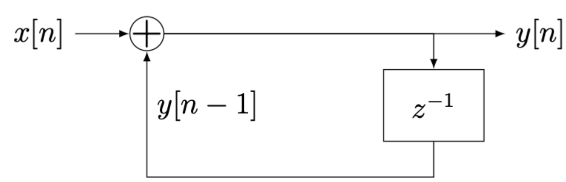


$$y[n] \overset{\text{LTI}}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n-l] = \sum_{l=0}^{M-1} h[l]x[n-l]$$



IIR-Filter (Infinite Impulse Resplonse)

Die Impulsantwort von IIR-Filtern hat **unendliche Länge**. Das Blockschaltbild hat Rückkopplungen, welche oft zu Stabilitätsproblemen führen. Wenn $h[n]$ unendlich lang ist, kann es gut sein, dass die Impulsantwort nicht absolut summierbar ist.



$$y[n] = x[n] + y[n-1] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{\text{LTI}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\Longrightarrow h[n-k] = \sigma[n-k] \Leftrightarrow h[n] = \sigma[n]$$

Dieses System ist nicht BIBO-stabil!

Prüfungsaufgabe: Frühjahr: 2017, Aufgabe 3.b)

b) (11 Punkte) Wir betrachten nun das zeitdiskrete LTI-System H_2 mit Frequenzgang

$$\hat{h}_2(\theta) = \frac{7e^{4\pi i\theta}}{1 - \frac{1}{12}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{12}e^{-4\pi i\theta}}$$

i. Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_2[n]$ von H_2. Ist H_2 kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Bestimmen Sie die zu H_2 gehörige Differenzengleichung.