SST1 Übungsstunde 11

Matteo Dietz

December 2024

Themenüberblick

- **Diskrete Fouriertransformation (DFT)**
  Herleitung, Visualisierung, Matrixdarstellung
- **Lineare und Zyklische Faltung**
  Zirkulante Matrizen
  Anwendungen der DFT auf LTI-Systeme

Aufgaben für diese Woche

123, **124**, **125**, **126**, **127**, **128**, **130**, **131**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Die DFT ist sehr wichtig! Es kommt immer eine ganze Aufgabe dazu an der Prüfung. (25 / 100 Punkte)

DFT: Herleitung

- Wir betrachten ein Signal $x[n]$ endlicher Länge N.
- Die DTFT des Signals ist

$$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi i\theta n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi i\theta n}$$

- $\hat{x}(\theta)$ ist kontinuierlich. Wir tasten $\hat{x}(\theta)$ im Frequenzbereich ab.

$$\hat{x}[k] := \hat{x}\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi i \frac{k}{N}}$$

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

(DFT) $$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} \qquad \hat{x}[k+N] = \hat{x}[k]$$

(IDFT) $$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\omega_N^{-kn} \qquad x[n+N] = x[n]$$

wobei $$\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

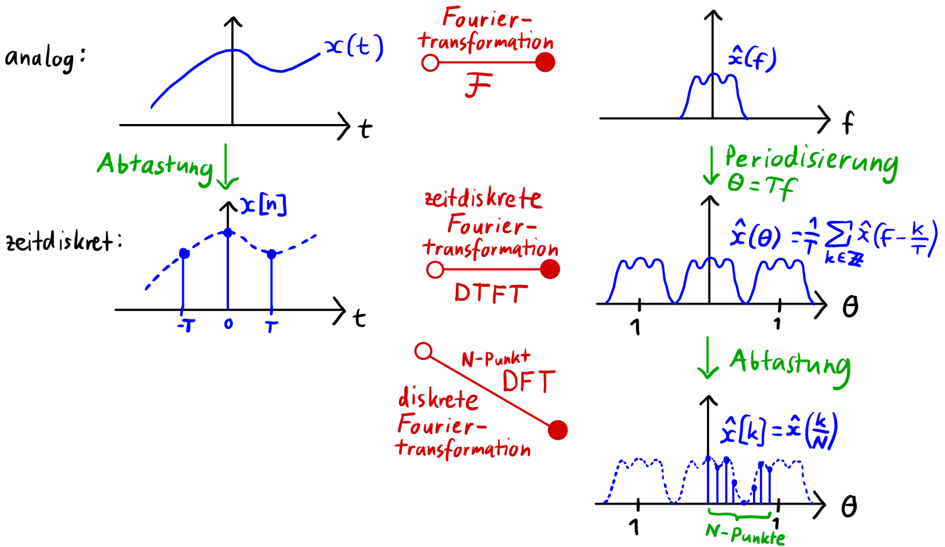
DFT: Bemerkungen

1. ω_N^l ist $N-$periodisch, denn:
   $\omega_N^{l+N} = e^{-\frac{2\pi i}{N}(l+N)} = e^{-\frac{2\pi i l}{N}} e^{-2\pi i} = \omega_N^l$

2. Es folgt: $\hat{x}[k+N] = \hat{x}[k]$. **Die DFT-Signale sind als** $N-$**periodisch zu interpretieren!**

3. **Abtastung im Frequenzbereich entspricht Periodisierung im Zeitbereich**.

DFT: Visualisierung



DFT: Matrixdarstellung

Wir haben $\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}, \qquad k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ N-1\}$ Somit:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \\ \hat{x}[2] \\ \vdots \\ \hat{x}[N-1] \end{bmatrix}}_{=:\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\text{DFT-Matrix } F_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

DFT: Matrixdarstellung

Somit erhalten wir:

DFT

$\hat{\mathbf{x}} = F_N \mathbf{x}$

IDFT

$\mathbf{x} = \frac{1}{N} F_N^H \hat{\mathbf{x}}$

Die Spalten von F_N sind orthogonal aufeinander: $\langle \mathbf{f}_r, \ \mathbf{f}_s \rangle = \delta_{r,s}$

Es gilt $F_N F_N^H = N I_N$

DFT: Entwicklung in eine ONB

Die DFT ist entspricht einer Entwicklung des Vektors $\mathbf{x}$ in eine orthonormale Basis (ONB) in $\mathbb{C}^N$:

$$\mathbf{x} = \underbrace{\frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H\mathbf{F}_N}_{\mathbf{I}_N}\mathbf{x} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix}\mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \cdots & \mathbf{f}_{N-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{f}_0^H \\ \mathbf{f}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N-1}^H\end{bmatrix}\mathbf{x} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\langle\mathbf{x},\ \mathbf{f}_l\rangle\mathbf{f}_l$$

DFT: Beispiel

Was ist die 2-Punkte DFT von $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{weil } \omega_2 = e^{-\frac{2\pi i}{2}} = -1, \quad \text{dann:}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 123

Zyklische Faltung

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[l-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[l-n] x_2[n]$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \text{DFT}$$

$$\hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k] \cdot \hat{x}_2[k]$$

Zyklische Faltung: Bemerkungen

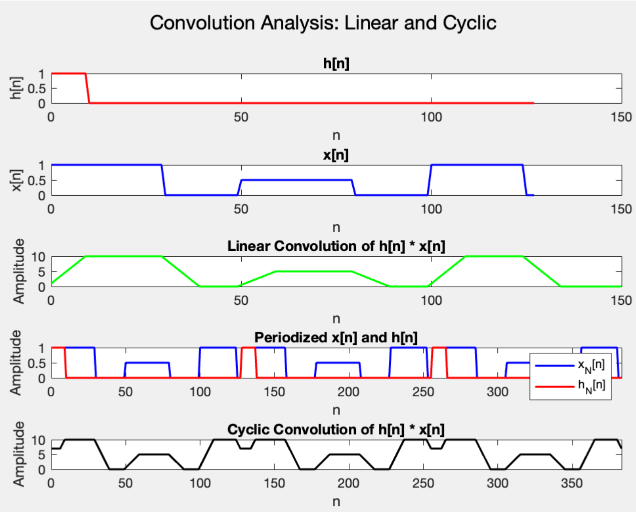
1. **Elementweise Multiplikation im Frequenzbereich entspricht einer zyklischen Faltung im Zeitbereich**
2. $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ werden $N-$**periodisch fortgesetzt**, d.h. $x_2[l-n] = x_2[l-n+N] \neq 0$ ist möglich
3. Zyklische Faltungen können schnell mittels FFT berechnet werden.

Lineare Faltung

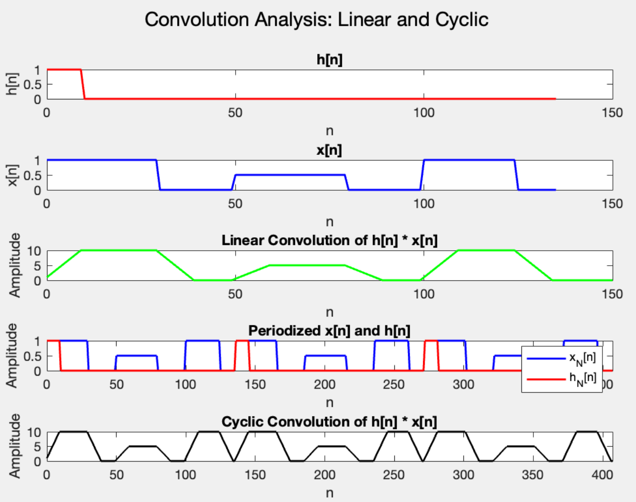
$x_1[n]$ hat Länge L und $x_2[n]$ hat Länge P. Wir wollen berechnen:

$$x_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1[l] \cdot x_2[n-l] = \sum_{l=-0}^{L-1} x_1[l] \cdot x_2[n-l]$$

Lineare vs Zyklische Faltung: Aliasing



Lineare vs Zyklische Faltung: kein Aliasing



Lineare Faltung: Kochrezept

1. Zero-Padding (mit Nullen auffüllen) der Signale $x_1[n]$ und $x_2[n]$ auf die Länge $N \geq P + L - 1$
2. Berechnen der N-Punkte DFT $\hat{x}_1[k]$ und $\hat{x}_2[k]$
3. Berechnen des punktweisen Produktes $\hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k] \cdot \hat{x}_2[k]$
4. Inverse N-Punkte DFT von $\hat{x}_3[k]$
   Wir erhalten $\tilde{x}_3[n]$, die periodische Fortsetzung von $x_3[n]$

Zyklische Faltung: Matrixdarstellung

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[l-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[l-n] x_2[n]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_3[0] \\ x_3[1] \\ \vdots \\ x_3[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3} = \begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[-1] & \cdots & x_2[-N+1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[-N+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\star}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[N-1] & \cdots & x_2[1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}$$

Zyklische Faltung: Matrixdarstellung

$$\frac{1}{N}\mathbf{F}_N\mathbf{X}_2\mathbf{F}_N^H = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & \hat{x}_2[0] & \cdots & \hat{x}_2[0] \\ \hat{x}_2[1] & \hat{x}_2[1]\omega_N & \cdots & \hat{x}_2[1]\omega_N^{N-1} \\ \hat{x}_2[2] & \hat{x}_2[2]\omega_N^2 & \cdots & \hat{x}_2[2]\omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_2[N-1] & \hat{x}_2[N-1]\omega_N^{N-1} & \cdots & \hat{x}_2[N-1]\omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}\mathbf{F}_N^H$$

$$= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_N}\mathbf{F}_N^H$$

Zyklische Faltung: Matrixdarstellung

$$= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} N\mathbf{I}_N = \begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix}$$

Somit $\mathbf{X}_2 = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N$

Bemerkungen

1. Eigenvektoren einer zirkulanten Matrix $=$ Spalten der normalisierten DFT-Matrix $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}_N^H$
   Dazugehörige Eigenwerte sind durch die DFT der ersten Spalte der zirkulanten Matrix gegeben

2. Vgl. zeitkontinuierlicher Fall: $e^{2\pi i f_0 t}$ Eigenfunktionen von LTI-Systemen sind und $\hat{h}(f)$ die dazugehörigen Eigenwerte

3. **Die zyklische Faltung wird durch die DFT diagonalisiert.**

Anwendung DFT auf LTI-Systeme

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{h}[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N \mathbf{x}$$

$$\Big\downarrow \text{DFT}$$

$$\mathbf{F}_N \mathbf{y} = \underbrace{\frac{1}{N}\mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^H}_{\mathbf{I}_N} \begin{bmatrix} \hat{h}[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}[N-1] \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{h}[0]\hat{x}[0] \\ \hat{h}[1]\hat{x}[1] \\ \vdots \\ \hat{h}[N-1]\hat{x}[N-1] \end{bmatrix}$$

LTI-Systeme kommutieren

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 &= \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{h}_1[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_1[N-1] \end{bmatrix} \underbrace{\mathbf{F}_N \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H}_{\mathbf{I}_N} \begin{bmatrix} \hat{h}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_2[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N \\
&= \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{h}_1[0]\hat{h}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_1[N-1]\hat{h}_2[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N \\
&= \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{h}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_2[N-1] \end{bmatrix} \underbrace{\mathbf{F}_N \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H}_{\mathbf{I}_N} \begin{bmatrix} \hat{h}_1[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_1[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N \\
&= \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1
\end{aligned}
$$

Prüfungsaufgabe: Sommer 2020, Aufgabe 3.a) und b)