ETH
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

D ITET
Dept. of Information Technology and Electrical Engineering

Übungsstunde 10

Themenüberblick

- **$\mathcal{Z}$-Transformation**

  Definition, Konvergenzgebiete und Eigenschaften der $\mathcal{Z}$-Transformation

  Zusammenhang zwischen $\mathcal{Z}$-Transformation, Laplace Transformation und DTFT

  Anwendungen der $\mathcal{Z}$-Transformation auf zeitdiskrete LTI-Systeme

Aufgaben für diese Woche

114, **115**, 116 117 118, **119**, **120**, 121, **122**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

$\mathcal{Z}$-Transformation

Definition

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

Es kann sein, dass die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ möglicherweise nicht konvergiert. Deswegen ist die $\mathcal{Z}$-Transformation nur im Konvergenzgebiet definiert.

Konvergenzgebiet, Region of Convergence (*ROC*)

$$\mathrm{ROC}_X = \{z \in \mathbb{C} \;:\; X(z) \text{ konvergiert absolut}\}$$

Es sei $z = re^{2\pi i\theta}$, somit $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]r^{-n}e^{-2\pi in\theta}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]r^{-n}\right|$

$\implies$ ROC hängt nur von $|z| = r$ ab.

$\implies$ ROC besteht aus Kreisscheiben zentriert um den Ursprung. Also hat ROC_X die Form:

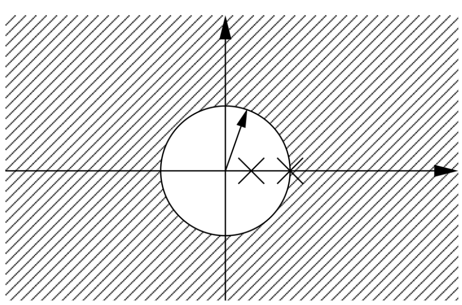
$$\mathrm{ROC}_X = \{x \in \mathbb{C} \;:\; 0 \leq R_- < |z| < R_+ \leq \infty\}$$

Somit folgt, dass das Konvergenzgebiet **zusammenhängend** sein muss.

Wenn die $\mathcal{Z}$-Transformation $X(z)$ von $x[n]$ rational ist, dann enthält die ROC keine Pole, sondern die ROC ist durch die Pole beschränkt oder das Konvergenzgebiet geht ins Unendliche. Diese Eigenschaft ist eine triviale Konsequenz vom Fakt, dass $X(z)$ bei einem Pol gegen unendlich geht und somit nicht konvergiert.

Wir unterscheiden bezüglich des Konvergenzgebietes zwischen vier verschiedenen Fällen:

1. **Rechtsseitiges Signal**



Wenn $x[n]$ ein rechtsseitiges Signal ist und der Kreis $|z| = r_0$ in der ROC ist, dann sind alle z mit $|z| > r_0$ ebenfalls in der ROC.

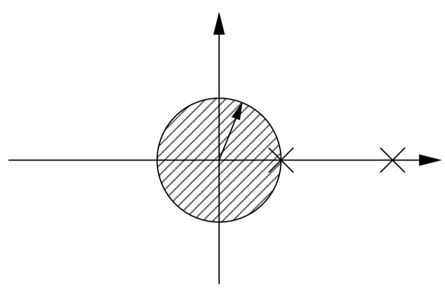
$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Ein rechtsseitiges Signal ist immer null vor einem gewissen Wert von $n = N_1$. Wenn nun der Kreis $|z| = r_0$ in der ROC liegt, dann ist $x(n)r_0^{-n}$ absolut summierbar. Wenn wir nun $|z| = r_1 > r_0$ betrachten, dann zerfällt r_1^{-n} schneller als r_0^{-n} für steigende n. Also ist $x(n)r_1^{-n}$ ebenfalls absolut summierbar. $z = \infty$ kann aber muss nicht in der ROC enthalten sein.

- $N_1 < 0$: Die Summe enthält Terme von z mit positiven Exponenten, welche unbeschränkt werden für $|z| \to \infty$. Deshalb enthält die ROC eines rechtsseitigen Signales im Allgemeinen nicht $|z| = \infty$.
- $N_1 \geq 0$: Für kausale Signale hingegen, d.h. für Sequenzen, die null sind für $n < 0$, ist N_1 positiv, somit beinhaltet die ROC $|z| = \infty$.

Wenn die $\mathcal{Z}$-Transformation $X(z)$ von $x[n]$ rational ist und $x[n]$ rechtsseitig ist, dann ist die ROC die Region in der komplexen Ebene **ausserhalb des betragsweise grössten Poles** von $X(z)$ (möglicherweise inklusive $|z| = \infty$).

2. **Linksseitiges Signal**



Wenn $x[n]$ ein linksseitiges Signal ist und wenn der Kreis $|z| = r_0$ in der ROC liegt, dann liegen alle z mit $0 < |z| < r_0$ ebenfalls in der ROC.

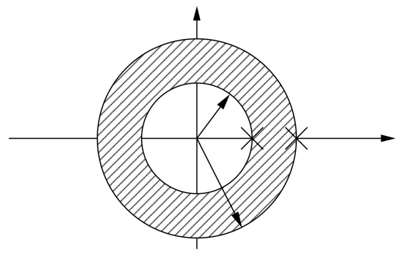
$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{M} x[n]z^{-n}$$

Die Argumentation ist analog zu rechtsseitigen Signalen. $z = 0$ kann aber muss nicht in der ROC enthalten sein.

- $M > 0$: $X(z)$ enthält negative Exponenten von z, welche unbeschränkt werden für $|z| \to 0$. Deshalb enthalten linksseitige Signale im Allgemeinen nicht $z = 0$.
- $M \leq 0$: In diesem Fall enthält die ROC $z = 0$.

Wenn die $\mathcal{Z}$-Transformation $X(z)$ von $x[n]$ rational ist und $x[n]$ linksseitig ist, dann ist die ROC die Region in der komplexen Ebene **innerhalb des betragsweise kleinsten Poles** von $X(z)$ (ausser wie bereits gesagt möglicherweise $z = 0$).

3. **Beidseitiges Signal**



   Ein beidseitiges Signal kann als Summe von einem rechtsseitigen und einem linksseitigen Signal geschrieben werden. Diese Summe konvergiert dort, wo beide Komponenten kovergieren. Somit enthält die ROC die Schnittmenge der ROCs vom rechtsseitigen und linksseitigen Signal.

4. **Signale endlicher Länge**

   Ein Signal endlicher Länge nimmt nur an einer endlichen Anzahl an Stellen Werte ungleich null an, also z.B. für n mit $-\infty < N \leq n \leq M < \infty$. Also ist die $\mathcal{Z}$-Transformation die Summe einer endlichen Anzahl Terme und muss somit für $z \neq 0, \infty$ konvergieren, weil dann jeder Term der Summe endlich ist. Die ROC kann aber muss nicht $z = 0$ oder ∞ enthalten.

Eigenschaften der $\mathcal{Z}$-Transformation

- **Linearität**:

$$\mathcal{Z}\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z)$$

  Das Konvergenzgebiet ist mindestens $\mathrm{ROC}_X \cap \mathrm{ROC}_Y$

- **Zeitverschiebung**:

$$\mathcal{Z}\{x[n - n_0]\} = z^{-n_0} X(z)$$

  Das Konvergenzgebiet bleibt gleich.

- **Faltung**:

$$y[n] = (x * h)[n] \quad \circ\!\!\stackrel{\mathcal{Z}}{-\!\!-\!\!-}\!\!\bullet \quad Y(z) = X(z)H(z)$$

  Das Konvergenzgebiet ist mindestens $\mathrm{ROC}_X \cap \mathrm{ROC}_Y$

- **Umkehrformel**:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$$

  C ist ein kreisförmiger Pfad im Gegenuhrzeigersinn in der ROC. Diese Umkehrformel sagt gemäss Residuumssatz (aus KomA) nichts anderes aus als dass $x[n] = \sum$ (Residuen an den Polen von $X(z)z^{n-1}$ ausgewertet).

  Dieses Integral muss man in SST1 jedoch sozusagen nie berechnen, man muss in den allermeisten Fällen die Transformationstabellen in der Formelsammlung verwenden.

Aufgabe 115

In den folgenden Pol-Nullstellen Diagrammen sind die ROCs in grau schraffiert und der Einheitskreis in Rot dargestellt.

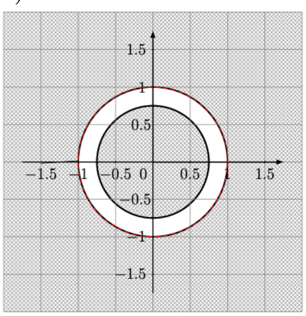
a) Gibt es eine $\mathcal{Z}$-Transformierte mit einer solchen ROC?

b) Betrachten Sie das Pol-Nullstellendiagramm der $\mathcal{Z}$-Transformierten $X(z)$. Das zugrundeliegende Signal $x[n]$ ist gegeben durch eine Summe von Exponentialfunktionen. Welche Pole entsprechen linksseitigen und welche rechtsseitigen Exponentialfunktionen?

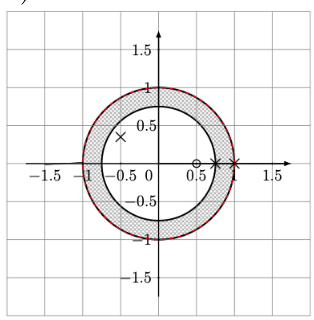
c) Charakterisieren Sie die möglichen zugehörigen ROCs dieses Pol-Nullstellen Diagramms.

d) Gibt es eine $\mathcal{Z}$-Transformierte, die den folgenden Pol-Nullstellen Diagrammen mit eingezeichneter ROC entsprechen?

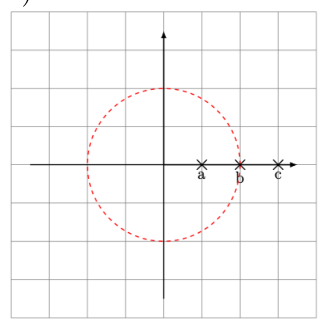
a)



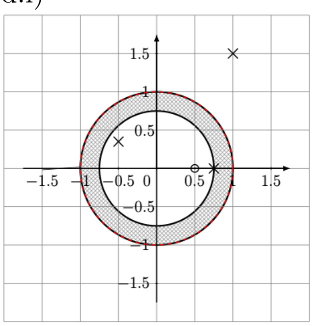
b)



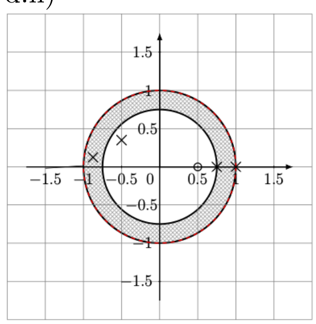
c)



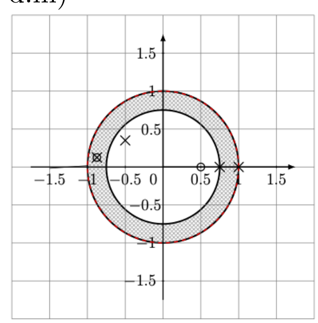
d.i)



d.ii)



d.iii)



5 $\mathcal{Z}$–Transformation

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{n-1} dz \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Die in der Tabelle angegebenen Bereiche sind die Konvergenzringe der zweiseitigen $\mathcal{Z}$–Transformation und können in einzelnen Fällen auch grösser sein.

92.	$x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
93.	$y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$Y(z)$	$R_{y_-} < \lvert z\rvert < R_{y_+}$
94.	$ax[n] + by[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a\,X(z) + b\,Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < \lvert z\rvert < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
95.	$x[n+n_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$z^{n_0} X(z)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
96.	$z_0^n x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\lvert z_0\rvert R_{x_-} < \lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert R_{x_+}$
97.	$nx[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-z\,\frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
98.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*(z^*)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
99.	$x[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x_+}} < \lvert z\rvert < \frac{1}{R_{x_-}}$
100.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
101.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(X(z) - X^*(z^*))$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
102.	$(x * y)[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)\,Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < \lvert z\rvert < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
103.	$x[n]\,y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{X(v)}{v} Y\left(\frac{z}{v}\right) dv$	$R_{x_-}R_{y_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}R_{y_+}$
104.	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-z^{-1}}\,X(z)$	$\max(R_{x_-}, 1) < \lvert z\rvert < R_{x_+}$

Einige $\mathcal{Z}$–Transformationspaare

105.	$\delta[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1	$\forall z$
106.	$\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
107.	$-\sigma[-n-1]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
108.	$\alpha^n\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
109.	$-\alpha^n\sigma[-n-1]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
110.	$n\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
111.	$-n\sigma[-n-1]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert < 1$
112.	$\sin(\alpha n)\,\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z\sin(\alpha)}{z^2-2z\cos(\alpha)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
113.	$\cos(\alpha n)\,\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z(z-\cos(\alpha))}{z^2-2z\cos(\alpha)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
114.	$\rho^n\sin(\alpha n)\,\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\rho z\sin(\alpha)}{z^2-2\rho z\cos(\alpha)+\rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
115.	$\rho^n\cos(\alpha n)\,\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z(z-\rho\cos(\alpha))}{z^2-2\rho z\cos(\alpha)+\rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
116.	$\sin(\alpha n+\varphi)\,\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z^2\sin(\varphi)+z\sin(\alpha-\varphi)}{z^2-2z\cos(\alpha)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
117.	$\dfrac{1}{n},\quad n>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\log_e\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
118.	$\dfrac{1-e^{-\alpha n}}{n}\,\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\alpha+\log_e\left(\dfrac{z-e^{-\alpha}}{z-1}\right)$	$\lvert z\rvert > 1,\ \alpha>0$
119.	$\dfrac{\sin(\alpha n)}{n}\,\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\alpha+\arctan\left(\dfrac{\sin(\alpha)}{z-\cos(\alpha)}\right)$	$\lvert z\rvert > \cos(\alpha),\ \alpha>0$

Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a-aq^{n+1}}{1-q}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad \text{für } |q|<1.$$

Zusammenhang zwischen $\mathcal{Z}$-Transformation und Laplace Transformation

$$(\mathcal{Z}\textbf{-Transf.:}) \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad\qquad (\textbf{Laplace:}) \qquad X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

Die $\mathcal{Z}$-Transformation ist das zeitdiskrete Analogon zur Laplace-Transformation. Die Beziehung zwischen $\mathcal{Z}$-Transformation und Laplace-Transformation kann man verstehen wie die Beziehung zwischen DTFT und der zeitkontinuierlichen Fouriertransformation.

Zusammenhang zwischen $\mathcal{Z}$-Transformation und DTFT

$$(\mathcal{Z}\textbf{-Transf.:}) \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad\qquad (\textbf{DTFT:}) \qquad \hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i n \theta}$$

Wenn wir nun die Definition der $\mathcal{Z}$-Transformation mit der DTFT formal vergleichen, dann sehen wir, dass die DTFT nichts anderes ist als die $\mathcal{Z}$-Transformation für $z = e^{2\pi i \theta}$. Das heisst, die DTFT ist ein Spezialfall der $\mathcal{Z}$-Transformation, nämlich die $\mathcal{Z}$-Transformation **ausgewertet auf dem Einheitskreis** in der komplexen Ebene.

Die Multiplikation von $x[n]$ (dem Wert des Signals im Zeitbereich zum Zeitpunkt n) mit $e^{-2\pi i n \theta}$ kann interpretiert werden als eine **Rotation** von $x[n]$ in der komplexen Ebene um einen Winkel von $-2\pi i n \theta$. Das Vorzeichen ist eine Konvention und kommt aus dem negativen Exponenten der DTFT Formel.

Die DTFT summiert nun die Beiträge des Signals zu allen Zeitpunkten, $-\infty < n < \infty$, nach diesen Rotationen. Diese Aufsummierung misst im Grunde wie viel der Frequenz $\omega = 2\pi\theta$ im Signal $x[n]$ präsent ist.

Wieso der Einheitskreis?

In der DTFT beschränken wir $z = e^{2\pi i \theta}$ auf den Einheitskreis, denn die DTFT analysiert ein Signal auf rein **oszillatorisches Verhalten**. Punkte auf dem Einheitskreis entsprechen **komplexen Sinuswellen verschiedener Frequenzen**. Indem die DTFT die Beiträge von $x[n]e^{-2\pi i n \theta}$ summiert, "projiziert" sie $x[n]$ auf diese Sinuswellen, um zu bestimmen, wie stark $x[n]$ bei jeder Frequenz schwingt. So findet man die "Frequenzbestandteile" eines Signals $x[n]$ (wie wenn man z.B. einen Ton in einzelne Noten zerlegt).

Unterschied zur $\mathcal{Z}$-Transformation

In der $\mathcal{Z}$-Transformation erlaubt $z = re^{2\pi i \theta}$ eine Analyse ausserhalb des Einheitskreises, indem eine radiale Komponente r eingeführt wird. Diese Magnitude r ermöglicht es uns, das Verhalten des Signals zu untersuchen:

- Wenn es gedämpft ist ($|z| < 1$), wie bei Signalen, die im Laufe der Zeit abklingen.

- Wenn es verstärkt wird ($|z| > 1$), wie bei wachsenden Signalen.

Warum brauchen wir sowohl $\mathcal{Z}$-Transformation als auch DTFT?

Die DTFT eignet sich für die Analyse im Frequenzbereich, ist jedoch auf den Einheitskreis beschränkt. Sie konzentriert sich auf das Verständnis von Signalen im Hinblick auf ihren Frequenzinhalt, was ideal für Aufgaben wie **Spektralanalyse** und den **Entwurf von Filtern** ist. Auf der anderen Seite generalisiert die $\mathcal{Z}$-Transformation die DTFT, indem sie die Analyse eines Signals in der gesamten komplexen Ebene ermöglicht, nicht nur auf dem Einheitskreis. Die $\mathcal{Z}$-Transformation ist nützlich, um das Verhalten von Systemen in Bezug auf Pole und Nullstellen zu verstehen und ist somit vielseitiger für die Systemanalyse. Sie bietet einen mathematischen Rahmen zur Analyse und **Gestaltung von Systemen**, einschliesslich **Stabilität**, **Kausalität** und **transientem Verhalten**.

Aufgabe 122

Es sei $x[n] = \delta[n+3] + \delta[n-3]$

a) Berechnen Sie die $\mathcal{Z}$-Transformierte $X(z)$ von $x[n]$.

b) Schliessen Sie aus dem Ergebnis in a) auf die zeitdiskrete Fouriertransformierte $\hat{x}(\theta)$ von $x[n]$.

c) Berechnen Sie den Betrag und die Phase von $\hat{x}(\theta)$.

Anwendungen der $\mathcal{Z}$-Transformation auf zeitdiskrete LTI-Systeme

Wir betrachten wie bei der DTFT LTI-Systeme, die durch Differenzengleichungen beschrieben werden können:

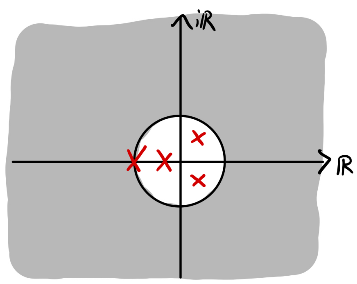
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \quad \overset{95.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad \left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}\right) X(z)$$

Die **Übertragungsfunktion** ist somit gegeben durch:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Kausalität

Das LTI-System ist kausal, falls $h[n]$ **rechtsseitig** ist, d.h. wenn ROC_H ausserhalb der betragsweise grössten Poles liegt.

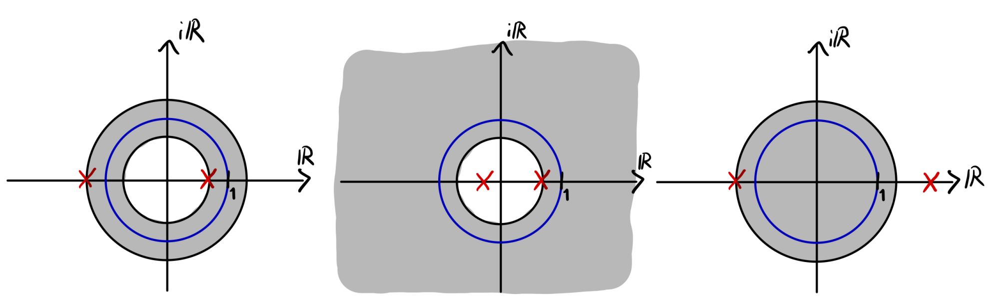


BIBO-Stabilität

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty \text{ mit } |z| = 1$$

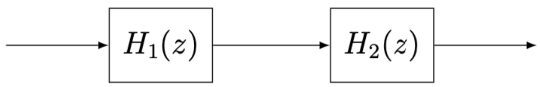
Das heisst, das LTI-System ist BIBO-stabil, falls der **Einheitskreis in der ROC$_H$** liegt, d.h. wenn $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\} \subseteq \mathrm{ROC}_H$. Wenn $H(z)$ rational ist, ist es eine Äquivalenz.

Beidseitig **Rechtsseitig** **Linksseitig**



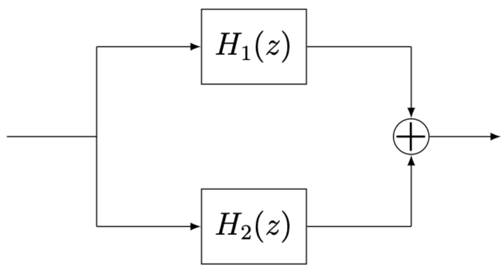
Zusammenschaltung von LTI-Systemen

1. **Serienschaltung**:



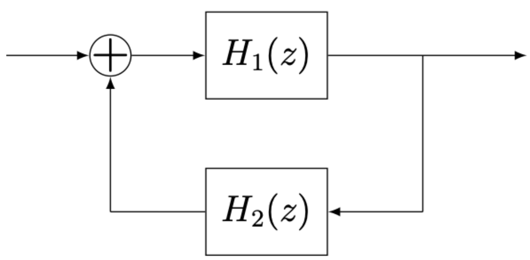
$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

2. **Parallelschaltung**:



$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

3. **Rückkopplung**:



$$X(z)H_1(z) + H_2(z)Y(z)H_1(z) = Y(z)$$
$$X(z)H_1(z) = Y(z)(1 - H_1(z)H_2(z))$$
$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$$

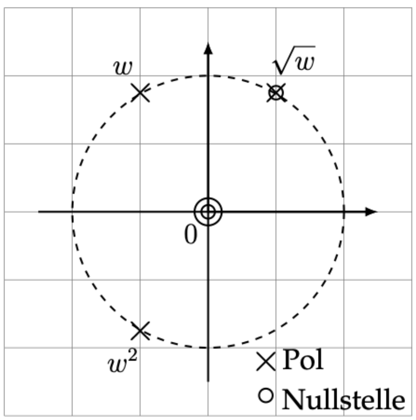
Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2023, Aufgabe 3

★ (a) Es sei $y[n] = x[-n] + n^2 x[n]$, wobei $x[n]$ ein beliebiges zeitdiskretes Signal mit $\mathcal{Z}$-Transformierter $X(z)$ ist.

★ i. Berechnen Sie die $\mathcal{Z}$-Transformierte $Y(z)$ von $y[n]$ als Funktion von $X(z)$.

ii. (1 Punkt) Berechnen Sie die Summe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} y[n]$ als Funktion von $X(1)$, $X'(1)$ und $X''(1)$, wobei $X'(z)$ und $X''(z)$ für die 1. respektive 2. Ableitung von $X(z)$ steht.

★ (b) Man betrachte das folgende Pol-Nullstellen Diagramm für die $\mathcal{Z}$-Transformierte $H(z)$, wobei der doppelte Kreis um 0 eine Nullstelle zweiter Ordnung bezeichnet. Es sei $w = e^{\frac{i2\pi}{3}}$.



★ i. Zeigen Sie, dass $H(z) = \dfrac{1}{1 + z^{-1} + z^{-2}}$.

Hinweis: Sie dürfen in den folgenden Teilaufgaben mit dem Ausdruck für $H(z)$ weiterrechnen, auch wenn Sie die Herleitung nicht finden. Benutzen Sie zudem die Identitäten $w^3 = 1$ und $1 + w + w^2 = 0$.

★ ii. Berechnen Sie die zu $H(z)$ gehörige Impulsantwort $h[n]$, so dass das System kausal ist.

★ iii. Kann man für $H(z)$ eine ROC wählen, so dass das System BIBO-stabil ist? Kann man für $H(z/2)$ eine ROC wählen, so dass das System BIBO-stabil ist? In beiden Fällen, falls ja, geben Sie die entsprechende ROC an. Begründen Sie Ihre Antworten.

★ (c) Zeigen Sie, dass die $\mathcal{Z}$-Transformierte von $x[Mn]$, für $M \in \mathbb{N}$, gegeben ist durch

$$\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X\left(z^{1/M}\mathrm{e}^{\frac{2\pi i m}{M}}\right),$$

d.h.

$$x[Mn] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X\left(z^{1/M}\mathrm{e}^{\frac{2\pi i m}{M}}\right).$$