SST1 Übungsstunde 3

Matteo Dietz

September 2024

Organisatorisches

- Ich bin im Militär nächste Woche (15. Oktober)
- Vorlesungsskript und Übungsskript auf der Vorlesungswebsite
  Username: sigsys2024,   Passwort: Fourier2024
- Link zu meinen Handouts ebenfalls auf der Vorlesungswebsite

Themenüberblick

- **Systeme und Systemeigenschaften:**
  Linearität, Nullraum und Bildraum, Stetigkeit
  Das inverse System
  Darstellung linearer Systeme über Matrizen

- **Eigenschaften zeitkontinuierlicher linearer Systeme**
  Zeitinvarianz, Kausalität, Gedächtnis, BIBO-Stabilität

Aufgaben für diese Woche

25, 26, **27**, **28**, **29**, 30, **32**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Systeme

Ein System hat folgendes Blockschaltbild:

$$x \longrightarrow \boxed{\quad H \quad} \longrightarrow y$$

x : Eingangssignal

y : Ausgangssignal

Dabei ist $x \in X$ und $y \in Y$, wobei X und Y lineare Räume sind.

Repetition: Linearität

- Ein System $H : X \to Y$ ist **linear**, wenn:
  (i) **Additivität**: $H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2$, für alle $x_1, x_2 \in X$
  (ii) **Homogenität**: $H(\alpha x) = \alpha Hx$, für alle $x \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$
- Falls das System $(i) \vee (ii)$ nicht erfüllt, heisst H **nichtlinear**.

Repetition: Linearität

- Wenn H ein lineares System ist, dann muss $H0 = 0$ immer gelten.
- Wenn dies also nicht erfüllt ist, dann muss H nichtlinear sein.

Nullraum

- Sei $H : X \to Y$ ein lineares System

  Der Nullraum von H ist die Teilmenge von X definiert durch $\mathcal{N}(H) = \{x \in X : Hx = 0\}$.

  $\mathcal{N}(H)$ ist ein linearer Unterraum von X.

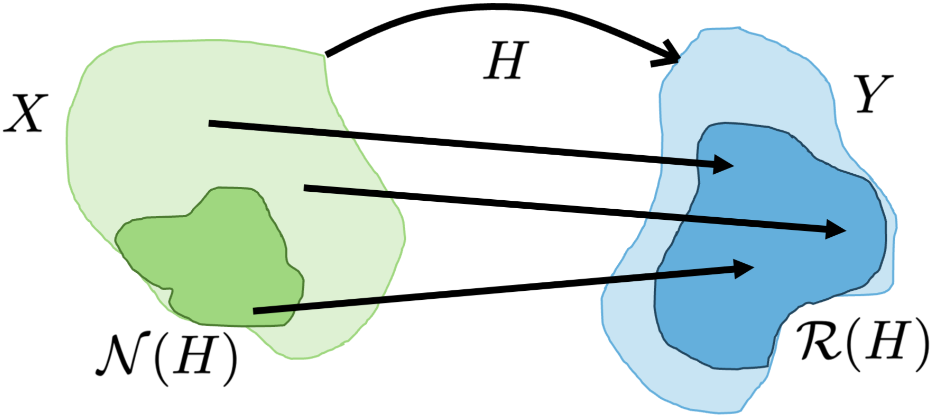
Bildraum

- Sei $H : X \to Y$ ein lineares System

  Der Bildraum von H ist die Teilmenge von Y definiert durch $\mathcal{R}(H) = \{y = Hx : x \in X\}$.

  $\mathcal{R}(H)$ ist ein linearer Unterraum von Y.

Nullraum und Bildraum



Stetige Systeme

- **Theorem:** Das System H ist **linear und stetig**
  $\Leftrightarrow$ Für jede konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ gilt:

$$H\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i H x_i$$

$\varepsilon - \delta$ Stetigkeit

- Seien $(X, ||\cdot||)$ und $(Y, ||\cdot||)$ normierte lineare Räume.

  Das System $H : X \to Y$ ist **stetig** in $x_0 \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängiges $\delta > 0$ gibt, so dass:

  $\forall x \in X$ mit $||x - x_0|| < \delta$ folgt, dass $||Hx - Hx_0|| \leq \varepsilon$.

Das Inverse System

- $H : X \to Y$ ist **invertierbar**, wenn $G : Y \to X$ existiert, sodass: $GH = I_X$ und $HG = I_Y$,

  wobei I_X bzw. I_Y die Identitätsabbildungen auf X bzw. Y sind. (D.h. $I_X x = x$, für alle $x \in X$ und $I_Y y = y$, für alle $y \in Y$.)

- Man schreibt $H^{-1} = G$.

Das Inverse System

- Wenn ein System invertierbar ist, dann ist seine Inverse **eindeutig**.

Das Inverse System

- Die Inverse eines linearen Systems ist auch linear.

Darstellung linearer Systeme über Matrizen

- Wir betrachten allgemeine endlich-dimensionale lineare Systeme $H : X \to Y$ und beschreiben diese durch eine Matrix.

- Die linearen Räume X und Y haben als Basen $B_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $B_2 = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

$$y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m$$

Darstellung linearer Systeme über Matrizen

Darstellung linearer Systeme über Matrizen

Darstellung linearer Systeme über Matrizen

- In Matrixform:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

- Die $m \times n$ Matrix $\mathbf{H}$ stellt das System H in den Basen B_1 und B_2 dar.

Aufgabe 25 & 26

Eigenschaften zeitkontinuierlicher linearer Systeme

- Zeitinvarianz
- Kausalität
- Gedächtnis
- BIBO-Stabilität

Zeitinvarianz

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **zeitinvariant**, wenn

$$HT_\tau x = T_\tau Hx, \text{ für alle } x \in X, \ \tau \in \mathbb{R}$$

  Zeitverschiebungsoperator: $(T_\tau x)(t) := x(t - \tau)$

- Ein System, das nicht zeitinvariant ist, heisst **zeitvariant**.

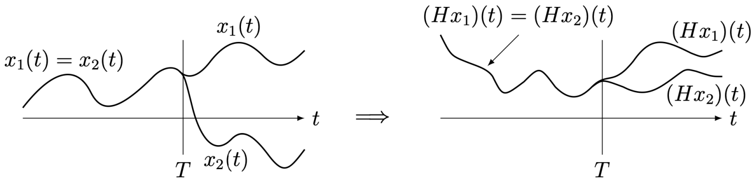
- **Intuition**: Zeitverschiebung am Eingang des Systems führt zu derselben Zeitverschiebung am Ausgang des Systems.

Kausalität

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **kausal**, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und jedes $T \in \mathbb{R}$ gilt

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \text{für alle } t \leq T$$
$$\implies (Hx_1)(t) = (Hx_2)(t), \quad \text{für alle } t \leq T$$

Kausalität



- **Intuition**: Das Ausgangssignal zu dem Zeitpunkt T ist nur von dem momentanen oder vergangenen Zeitpunkten abhängig.
- Echtzeitrealisierungen sind immer kausal.

Gedächtnis

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **gedächtnislos**, wenn für alle $x \in X$ und alle Zeitpunkte $t_0 \in \mathbb{R}$ das Ausgangssignal $(Hx)(t)$ zum Zeitpunkt t_0 nur von $x(t_0)$ abhängt.
- Sonst heisst das System **gedächtnisbehaftet**.
- Gedächtnislosigkeit $\implies$ Kausalität (aber nicht umgekehrt)

BIBO-Stabilität

- **Definition**: Ein System $H : X \to Y$ ist **BIBO-stabil**, wenn:

  für alle $x \in X$ mit $|x(t)| \leq B_x < \infty$, für alle t, existiert ein $B_y \in \mathbb{R}$ mit $B_y < \infty$, sodass

  $|y(t)| \leq B_y$, für alle t, wobei $y = Hx$.

Aufgaben 28, 29 & Prüfungsaufgabe