Übungsstunde 11

Themenüberblick

- **Diskrete Fouriertransformation (DFT)**

  Herleitung, Visualisierung, Matrixdarstellung

  Zirkulante Matrizen

- **Lineare und Zyklische Faltung**

  Anwendungen der DFT auf LTI-Systeme

Aufgaben für diese Woche

123,

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Herleitung

In der Realität können wir nur endliche Signale verarbeiten. Sei $x[n]$ ein Signal endlicher Länge N, dann ist $x[n] = 0 \;\forall n \notin \{0,\ \ldots,\ N-1\}$ Die DFT des Signals ist

$$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi i\theta n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi i\theta n}$$

$\hat{x}(\theta)$ ist noch kontinuierlich. Wir tasten also $\hat{x}(\theta)$ im Frequenzbereich ab. Als Abtastfrequenz wählen wir $\frac{1}{N}$, damit wir wieder ein Signal der Länge N erhalten.

$$\hat{x}[k] := \hat{x}\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi i\frac{k}{N}}$$

$\hat{x}[k]$ entspricht genau der DFT von $x[n]$. $\quad (x[n] \overset{\text{DFT}}{\circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet} \hat{x}[k])$

(**DFT**)	$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}$	$\hat{x}[k+N] = \hat{x}[k]$
(**IDFT**)	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\omega_N^{-kn}$	$x[n+N] = x[n]$
wobei	$\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$	

Bemerkungen

1. ω_N^l ist $N-$periodisch, denn: $\omega_N^{l+N} = e^{-\frac{2\pi i}{N}(l+N)} = e^{-\frac{2\pi il}{N}}e^{-2\pi i} = \omega_N^l$
2. Es folgt: $\hat{x}[k+N] = \hat{x}[k]$. **Die DFT-Signale sind als $N-$periodisch zu interpretieren!**
3. **Abtastung im Frequenzbereich entspricht Periodisierung im Zeitbereich**.

Visualisierung

figure

Matrixdarstellung

Wir haben $\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}, \qquad k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ N-1\}$ Somit:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \\ \hat{x}[2] \\ \vdots \\ \hat{x}[N-1] \end{bmatrix}}_{=:\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\text{DFT-Matrix } F_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Somit erhalten wir:

DFT	**IDFT**
$\hat{\mathbf{x}} = F_N \mathbf{x}$	$\mathbf{x} = \frac{1}{N} F_N^H \hat{\mathbf{x}}$

Die Spalten von F_N sind orthogonal aufeinander. Sei $\mathbf{f}_i$ die $i-$te Spalte von F_N. Es gilt $\langle \mathbf{f}_r,\ \mathbf{f}_s \rangle = \delta_{r,s}$

Es gilt $F_N F_N^H = N I_N$, wobei I_N die Identitätsmatrix der Dimension N ist.

Die DFT ist entspricht einer Entwicklung des Vektors $\mathbf{x}$ in eine orthonormale Basis (ONB) in $\mathbb{C}^N$:

$$F_N x = ... = \sum$$

Beispiel

Was ist die 2-Punkte DFT von $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{weil } \omega_2 = e^{-\frac{2\pi i}{2}} = -1, \quad \text{dann:}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 123

Zyklische Faltung

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[l-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[l-n] x_2[n]$$

$$\text{DFT}\ \circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k] \cdot \hat{x}_2[k]$$

Bemerkungen

1. Die **elementweise Multiplikation im Frequenzbereich entspricht einer zyklischen Faltung im Zeitbereich**.

2. $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ werden $N-$**periodisch fortgesetzt**, das heisst konkret, dass $x_2[l-n] = x_2[l-n+N] \neq 0$ sein kann.

In der Praxis wollen wir nicht unbedingt immer mit $N-$periodisch fortgesetzten Signalen arbeiten, sondern mit Signalen endlicher Länge. D.h. wir wollen konkret meistens ein Signal x_1 der Länge L, d.h. $x_1[n] = 0$ für $n < 0$ und $n > L-1$ mit einem Signal x_2 der Länge P, d.h. $x_2[n] = 0$ für $n < 0$ und $n > P-1$ falten. (**lineare Faltung**) Es gibt jedoch schnelle Algorithmen zur Berechnung der zyklischen Faltung, indem man über die FFT die zu faltenden Signale in den Frequenzbereich transformiert, diese elementweise multiplizieren und das erhaltene Signal rückttransformieren via IFFT. Deswegen versuchen wir jetzt einen Weg zu finden, wie wir die lineare Faltung über eine zyklische Faltung berechnen können.

Lineare Faltung

kochrezept etc

Jetzt haben wir einen Weg gesehen, wie wir eine lineare Faltung durch eine zyklischen Faltung berechnen können mithilfe der DFT. Nun schauen wir uns die zyklische Faltung nochmals etwas genauer an, um ihre Anwendungen auf LTI-Systeme etwas genauer zu untersuchen.

Zyklische Faltung in Matrixdarstellung

Wir beginnen wieder bei:

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2[l-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[l-n]x_2[n]$$

Dieser Ausdruck sieht in Matrixdarstellung wie folgt aus:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_3[0] \\ x_3[1] \\ \vdots \\ x_3[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3} = \begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[-1] & \cdots & x_2[-N+1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[-N+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\star}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[N-1] & \cdots & x_2[1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}$$

Wobei wir in ($\star$) die N-Periodizität des Signales $\mathbf{x}_2$ angewandt haben.

$\mathbf{X}_2$ ist eine **zirkulante Matrix**. Eine zirkulante Matrix ist durch den (einen) Vektor $\mathbf{x}_2[n]$ vollständig bestimmt.

Wir berechnen nun:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\mathbf{F}_N\mathbf{X}_2\mathbf{F}_N^H &= \frac{1}{N}\left[...\right]\mathbf{F}_N^H \\
&= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \underbrace{[...]}_{\mathbf{F}_N}\mathbf{F}_N^H \\
&= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} N\mathbf{I}_N = \begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \\
\text{Somit } \mathbf{X}_2 &= \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N
\end{aligned}
$$

Bemerkungen

1. Die Eigenvektoren einer zirkulanten Matrix sind die Spalten der normalisierten DFT-Matrix $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}_N^H$ und die dazugehörigen Eigenwerte sind die DFT der ersten Spalte der zirkulanten Matrix gegeben.

2. Dies entspricht im zeitkontinuierlichen Fal der Eigenschaft, dass die Funktionen $e^{2\pi i f_0 t}$ Eigenfunktionen von LTI-Systemen sind und $\hat{h}(f)$ die dazugehörigen Eigenwerte. Anstelle von $e^{2\pi i f_0 t}$ haben wir hier die Spalten von $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}_N^H$ und anstelle von $\hat{h}(f)$ die Werte $\hat{h}[k]$.

3. Die Faltung wird durch die DFT diagonalisiert.

Anwendung der DFT auf LTI-Systeme

Wir wenden nun obige Berechnungen auf LTI-Systeme an. Falls $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ das Eingangssignal, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{h}$ die Impulsantwort und $\mathbf{x}_3 = \mathbf{y}$ das Ausgangssignal ist, dann erhalten wir:

$$
\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{h}[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N\mathbf{x}
$$

DFT

$$\mathbf{F}_N\mathbf{y} = \underbrace{\frac{1}{N}\mathbf{F}_N\mathbf{F}_N^H}_{\mathbf{I}_N}\begin{bmatrix}\hat{h}[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}[N-1]\end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\hat{h}[0]\hat{x}[0] \\ \hat{h}[1]\hat{x}[1] \\ \vdots \\ \hat{h}[N-1]\hat{x}[N-1]\end{bmatrix}$$

(Faltung Zeitbereich -¿ Multiplikation Frequenzbereich)

Wie bereits im zeitkontinuierlichen Fall kommutieren auch im (endlichen) zeitdiskreten Fall zwei LTI-Systeme mit Impulsantworten $\mathbf{h}_1$ und $\mathbf{h}_2$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 &= \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H\begin{bmatrix}\hat{h}_1[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_1[N-1]\end{bmatrix}\underbrace{\mathbf{F}_N\frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H}_{\mathbf{I}_N}\begin{bmatrix}\hat{h}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_2[N-1]\end{bmatrix}\mathbf{F}_N \\
&= \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H\begin{bmatrix}\hat{h}_1[0]\hat{h}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_1[N-1]\hat{h}_2[N-1]\end{bmatrix}\mathbf{F}_N \\
&= \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H\begin{bmatrix}\hat{h}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_2[N-1]\end{bmatrix}\underbrace{\mathbf{F}_N\frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H}_{\mathbf{I}_N}\begin{bmatrix}\hat{h}_1[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{h}_1[N-1]\end{bmatrix}\mathbf{F}_N \\
&= \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1
\end{aligned}$$

Alte Prüfungsaufgabe