

SST1 Übungsstunde 10

Matteo Dietz

December 2024

- **\mathcal{Z} -Transformation**

Definition, Konvergenzgebiete und Eigenschaften

Zusammenhang zu Laplace Transformation und DTFT

Anwendung auf zeitdiskrete LTI-Systeme

Aufgaben für diese Woche

114, 115, 116 117 118, **119, 120**, 121, **122**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

\mathcal{Z} -Transformation

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

- Die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ kann möglicherweise divergieren.

\implies Wir müssen Konvergenzgebiete betrachten.

Konvergenzgebiet (ROC)

$$\text{ROC}_X = \{z \in \mathbb{C} : X(z) \text{ konvergiert absolut}\}$$

- $z = re^{2\pi i\theta} \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}e^{-2\pi in\theta}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}|$

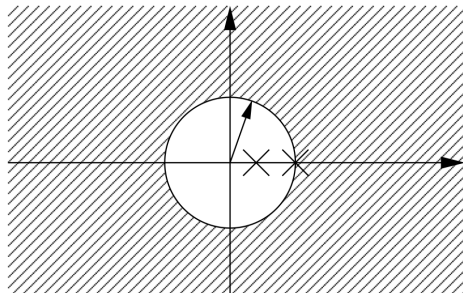
\implies ROC hängt nur von $|z| = r$ ab.

\implies ROC besteht aus Kreisscheiben um $z = 0$:

$$\text{ROC}_X = \{x \in \mathbb{C} : 0 \leq R_- < |z| < R_+ \leq \infty\}$$

\implies Konvergenzgebiet muss **zusammenhängend** sein.

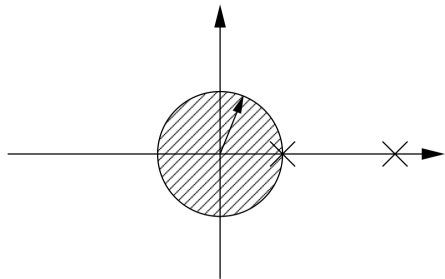
ROC: Rechtsseitige Signale



$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

\mathcal{Z} -Transformation $X(z)$ ist rational und $x[n]$ rechtsseitig
 \Rightarrow ROC = Region in der komplexen Ebene **außerhalb des betragsweise grössten Poles** von $X(z)$ möglicherweise inklusive $|z| = \infty$.

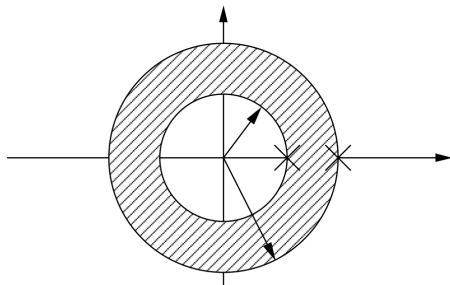
ROC: Linksseitige Signale



$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^M x[n]z^{-n}$$

\mathcal{Z} -Transformation $X(z)$ ist rational und $x[n]$ linksseitig \Rightarrow ROC = Region in der komplexen Ebene **innerhalb des betragsweise kleinsten Poles** von $X(z)$ ausser möglicherweise $z = 0$.

ROC: Beidseitige Signale



Beidseitiges Signal = Summe
rechtsseitiges und linksseitiges
Signal

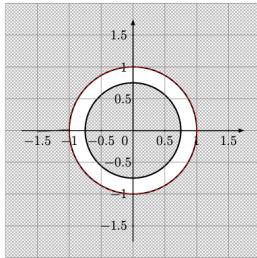
ROC enthält die Schnittmenge
der ROCs vom rechtsseitigen
und linksseitigen Signal.

ROC: Signale endlicher Länge

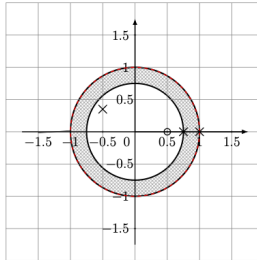
- Ein Signal endlicher Länge nimmt nur an einer **endlichen Anzahl an Stellen** Werte ungleich null an.
z.B. für n mit $-\infty < N \leq n \leq M < \infty$
- \mathcal{Z} -Transformation ist die Summe einer endlichen Anzahl Terme und muss somit für $z \neq 0, \infty$ konvergieren, weil dann jeder Term der Summe endlich ist.
- Die ROC kann aber muss nicht $z = 0$ oder ∞ enthalten.

Aufgabe 115: ROCs

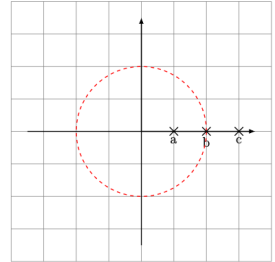
a)



b)

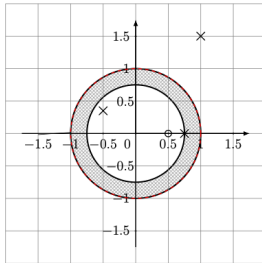


c)

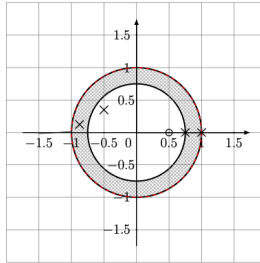


Aufgabe 115: ROCs

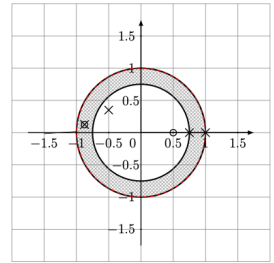
d.i)



d.ii)



d.iii)



Eigenschaften der \mathcal{Z} -Transformation

- **Linearität:**

$$\mathcal{Z}\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z)$$

Das Konvergenzgebiet ist mindestens $\text{ROC}_X \cap \text{ROC}_Y$

- **Zeitverschiebung:**

$$\mathcal{Z}\{x[n - n_0]\} = z^{-n_0}X(z)$$

Das Konvergenzgebiet bleibt gleich.

Eigenschaften der \mathcal{Z} -Transformation

- **Faltung:**

$$y[n] = (x * h)[n] \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad Y(z) = X(z)H(z)$$

Das Konvergenzgebiet ist mindestens $\text{ROC}_X \cap \text{ROC}_Y$

- **Umkehrformel:**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

C = geschlossener Pfad in der ROC im Gegenuhrzeigersinn

Z-Transformation: Formelsammlung

92.	$x[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
93.	$y[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$Y(z)$	$R_{y-} < z < R_{y+}$
94.	$ax[n] + by[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$aX(z) + bY(z)$	$\max(R_{x-}, R_{y-}) < z < \min(R_{x+}, R_{y+})$
95.	$x[n + n_0]$	$\circ \text{---} \bullet$	$z^{n_0} X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
96.	$z_0^n x[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$ z_0 R_{x-} < z < z_0 R_{x+}$
97.	$nx[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
98.	$x^*[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
99.	$x[-n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x+}} < z < \frac{1}{R_{x-}}$
100.	$\Re\{x[n]\}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
101.	$i\Im\{x[n]\}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2j}(X(z) - X^*(z^*))$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
102.	$(x * y)[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X(z)Y(z)$	$\max(R_{x-}, R_{y-}) < z < \min(R_{x+}, R_{y+})$
103.	$x[n]y[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{X(v)}{v} Y\left(\frac{z}{v}\right) dv$	$R_{x-} R_{y-} < z < R_{x+} R_{y+}$
104.	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	$\max(R_{x-}, 1) < z < R_{x+}$

Z-Transformation: Formelsammlung

105.	$\delta[n]$	$\circ \bullet$	1	$\forall z$
106.	$\sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
107.	$-\sigma[-n-1]$	$\circ \bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
108.	$\alpha^n \sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z > \alpha $
109.	$-\alpha^n \sigma[-n-1]$	$\circ \bullet$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z < \alpha $
110.	$n\sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
111.	$-n\sigma[-n-1]$	$\circ \bullet$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z < 1$
112.	$\sin(\alpha n) \sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\frac{z \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$	$ z > 1$
113.	$\cos(\alpha n) \sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\frac{z(z - \cos(\alpha))}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$	$ z > 1$
114.	$\rho^n \sin(\alpha n) \sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\frac{\rho z \sin(\alpha)}{z^2 - 2\rho z \cos(\alpha) + \rho^2}$	$ z > \rho$
115.	$\rho^n \cos(\alpha n) \sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\frac{z(z - \rho \cos(\alpha))}{z^2 - 2\rho z \cos(\alpha) + \rho^2}$	$ z > \rho$
116.	$\sin(\alpha n + \varphi) \sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\frac{z^2 \sin(\varphi) + z \sin(\alpha - \varphi)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$	$ z > 1$
117.	$\frac{1}{n}, \quad n > 0$	$\circ \bullet$	$\log_e \left(\frac{z}{z-1} \right)$	$ z > 1$
118.	$\frac{1 - e^{-\alpha n}}{n} \sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\alpha + \log_e \left(\frac{z - e^{-\alpha}}{z-1} \right)$	$ z > 1, \alpha > 0$
119.	$\frac{\sin(\alpha n)}{n} \sigma[n]$	$\circ \bullet$	$\alpha + \arctan \left(\frac{\sin(\alpha)}{z - \cos(\alpha)} \right)$	$ z > \cos(\alpha), \alpha > 0$

\mathcal{Z} -Transformation \leftrightarrow Laplace-Transformation

$$\begin{aligned} (\mathcal{Z}\text{-Transf.:}) \quad X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ (\text{Laplace:}) \quad X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \end{aligned}$$

Die \mathcal{Z} -Transformation ist das zeitdiskrete Analogon zur Laplace-Transformation.

\mathcal{Z} -Transformation \leftrightarrow DTFT

$$(\mathcal{Z}\text{-Transf.}) \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$(\text{DTFT:}) \quad \hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi in\theta}$$

Die DTFT ist die \mathcal{Z} -Transformation **ausgewertet auf dem Einheitskreis** in der komplexen Ebene

Aufgabe 122: \mathcal{Z} -Transformation \leftrightarrow DTFT

Es sei $x[n] = \delta[n + 3] + \delta[n - 3]$

- a) Berechnen Sie die \mathcal{Z} -Transformierte $X(z)$ von $x[n]$.
- b) Schliessen Sie aus dem Ergebnis in a) auf die zeitdiskrete Fouriertransformierte $\hat{x}(\theta)$ von $x[n]$.
- c) Berechnen Sie den Betrag und die Phase von $\hat{x}(\theta)$.

Anwendungen \mathcal{Z} -Transformation auf LTI-Systeme

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

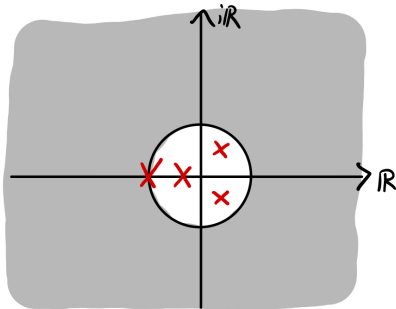
95.

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) Y(z) = \left(\sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Kausalität

Das LTI-System ist kausal, falls $h[n]$ **rechtsseitig** ist, d.h. wenn ROC_H ausserhalb der betragsweise grössten Poles liegt.

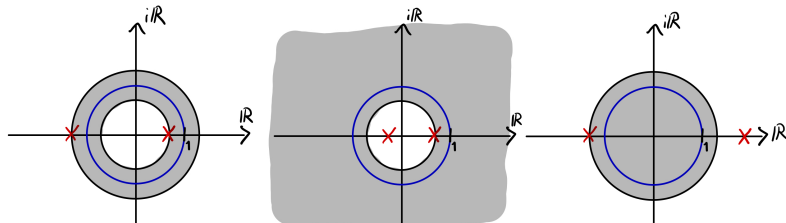


BIBO-Stabilität

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty \text{ mit } |z| = 1$$

LTI-System BIBO-stabil, falls **Einheitskreis** $\subseteq \text{ROC}_H$ liegt,
d.h. wenn $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \text{ROC}_H$.

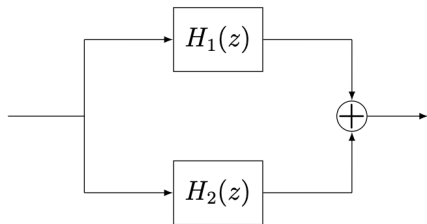
Wenn $H(z)$ rational ist, ist es eine Äquivalenz.



Serien- und Parallelschaltung von LTI-Systemen

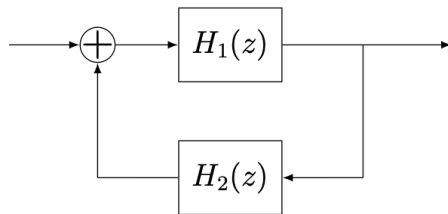


$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$



$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

Rückkopplung



$$X(z)H_1(z) + H_2(z)Y(z)H_1(z) = Y(z)$$

$$X(z)H_1(z) = Y(z)(1 - H_1(z)H_2(z))$$

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$$

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 3