Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dept. of Information Technology and Electrical Engineering

Übungsstunde 12

Themenüberblick

- **Diskrete Fouriertransformation (DFT)**

  Kurze Repetition

  Diskrete Filter, Überabtastung, Unterabtastung

- **Fast Fourier Transform (FFT)**

  Cooley-Tukey FFT

- **Tipps für die Prüfung**

Aufgaben für diese Woche

123, **124**, **125**, **126**, **127**, **128**, **129**, **130**, **131**

Die meisten Übungen überschneiden sich mit letzter Woche.

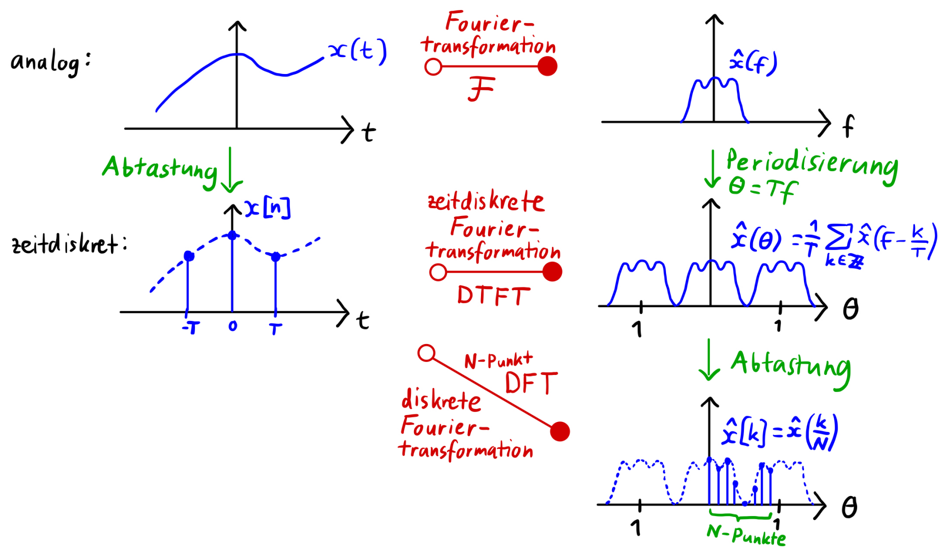
Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Die DFT ist sehr wichtig! Es kommt immer eine ganze Aufgabe dazu an der Prüfung. (25 / 100P)

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

(**DFT**)	$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}$	$\hat{x}[k+N] = \hat{x}[k]$
(**IDFT**)	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\omega_N^{-kn}$	$x[n+N] = x[n]$
wobei	$\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$	

Visualisierung der verschiedenen Fouriertransformationen



Matrixdarstellung

Wir haben $\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}, \qquad k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ N-1\}$ Somit:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \\ \hat{x}[2] \\ \vdots \\ \hat{x}[N-1] \end{bmatrix}}_{=:\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\text{DFT-Matrix } F_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Somit erhalten wir:

DFT	**IDFT**
$\hat{\mathbf{x}} = F_N \mathbf{x}$	$\mathbf{x} = \frac{1}{N} F_N^H \hat{\mathbf{x}}$

Die Spalten von F_N sind orthogonal aufeinander. Sei $\mathbf{f}_i$ die $i-$te Spalte von F_N. Es gilt $\langle \mathbf{f}_r,\ \mathbf{f}_s \rangle = \delta_{r,s}$

Es gilt $F_N F_N^H = N I_N$, wobei I_N die Identitätsmatrix der Dimension N ist.

Zyklische Faltung

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[l-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[l-n] x_2[n]$$

DFT

$$\hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k] \cdot \hat{x}_2[k]$$

Diskrete Filter

Wir haben gesehen, dass die DFT eines zeitdiskreten Signals der Länge N einer Abtastung von $\hat{x}(\theta)$ entspricht, wobei die Abtastfrequenz $\frac{1}{N}$ ist.

$$\hat{x}[k] = \hat{x}(\theta)\big|_{\theta=\frac{k}{N}}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Das entspricht der kritischen Abtastung ($N \times N$ Matrix), aber was passiert bei Über-/Unterabtastung?

Überabtastung ($M > N$)

$$\hat{x}\left(\frac{k}{M}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k \frac{n}{M}}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1$$

In Matrixform sieht das wie folgt aus:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_M & \omega_M^2 & \cdots & \omega_M^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \cdots & \omega_M^{(N-1)(M-1)} \end{bmatrix}}_{\text{Matrix } F_0} \mathbf{x} \qquad \omega_M = e^{-\frac{2\pi i}{M}}$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ (Länge N) und $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ (Länge M)
- $F_0 \in \mathbb{C}^{M\times N}$, ($M > N$) hat mehr Zeilen als Spalten
- Aus $\hat{\mathbf{x}}$ (DFT-Vektor) können wir mithilfe einer Pseudoinversen $\mathbf{x}$ zurückgewinnen.
- Für die Rücktransformation gilt: $\mathbf{x} = \dfrac{1}{M} F_0^H \hat{\mathbf{x}}$, was folgendem Ausdruck entspricht:

$$x[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}[k] \omega_M^{-kn}, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Unterabtastung ($M < N$)

Fast Fourier Transform (FFT)

Die FFT ist ein Algorithmus, welcher die DFT effizient berechnet. Konkret braucht eine $N-$Punkt DFT $\mathcal{O}(N^2)$ Operationen. Für eine $N-$Punkt DFT mit $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ kann der Rechenaufwand mittels FFT auf $4N \log_2(N)$, also auf $\mathcal{O}(N \log(N))$ reduziert werden.

DFT ist in $\mathcal{O}(N^2)$	**FFT** ist in $\mathcal{O}(N \log(N))$

Die DFT ist gegeben durch

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Idee: Wir zerlegen die $N-$Punkt DFT in zwei $\frac{N}{2}-$Punkt DFTs (geraden und ungeraden Anteil) und führen diesen Schritt rekursiv so lange durch, bis wir nur noch $2-$Punkt DFTs haben. Dafür nehmen wir an, dass unser Signal Länge $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ hat.

figure Rekursionsbaum

Am Ende haben wir nur noch $2-$Punkte DFTs:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \implies \begin{array}{l} \hat{x}_r[0] = x_r[0] + x_r[1] \\ \hat{x}_r[1] = x_r[0] - x_r[1] \end{array}$$

FFT-Algorithmus von Cooley-Tukey

Wir versuchen die $N-$Punkt DFT als zwei $\frac{N}{2}-$Punkt DFTs (geraden und ungeraden Anteil) zu schreiben. (Annahme: N gerade, s.d. $\frac{N}{2} \in \mathbb{N}$ ist):

$$\begin{aligned} \hat{x}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} = \sum_{n \text{ even}} x[n]\omega_N^{kn} + \sum_{n \text{ odd}} x[n]\omega_N^{kn} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l]\omega_N^{k\cdot 2l} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l+1]\omega_N^{k(2l+1)} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l]\left(\omega_N^2\right)^{kl} + \omega_N^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l+1]\left(\omega_N^2\right)^{kl} \end{aligned}$$

Kunstgriff: $\omega_N^2 = e^{-\frac{4\pi i}{N}} = e^{-\frac{2\pi i}{(N/2)}} = \omega_{\frac{N}{2}}$

$$\implies \underbrace{\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l]\omega_{\frac{N}{2}}^{kl}}_{=:\hat{g}[k]} + \omega_N^k \underbrace{\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l+1]\omega_{\frac{N}{2}}^{kl}}_{=:\hat{u}[k]}$$

Es folgt $\hat{x}[k] = \hat{g}[k] + \omega_N^k \hat{u}[k], \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$ wobei $\hat{g}[k]$ und $\hat{u}[k]$ $\frac{N}{2}-$Punkt DFTs sind, d.h.

$$\hat{g}[k] = \hat{g}\left[k + \frac{N}{2}\right] \qquad \hat{u}[k] = \hat{u}\left[k + \frac{N}{2}\right]$$

Prüfungsinformationen

- Die Prüfung dauert 180 min (3 Stunden).
- Es gibt 4 Aufgaben, die je 25 Punkte geben. (ca. 45 min pro Aufgabe)
- Einziges Hilfsmittel ist die Formelsammlung.

Kontur der Prüfung

1. Analoge Signale und Systeme, Systemeigenschaften
2. Abtasttheorem (Mischung analoge und zeitdiskrete Signale)
3. Zeitdiskrete Signale (entweder DTFT oder $\mathcal{Z}-$Transformation)
4. DFT

Tipps für die Prüfung

- Es gibt 20 alte Prüfungen. Löst möglichst viele davon, auch zweimal, wenn nötig!
- Die neueren Prüfungen sind relevanter und entsprechen in ihrer Kontur mehr derjenigen Prüfung, die ihr schreiben werdet.
- Nur 4 alte Prüfungen enthalten Aufgaben zu der $\mathcal{Z}-$Transformation. (Die letzten vier, das Thema ist also sehr prüfungsrelevant.) Schaut euch also die Aufgaben 114-122 dazu nochmals an.
- Schaut, dass ihr die Konzepte wie z.B. das Abtasttheorem gut versteht. Man kann in SST1 nämlich nicht einfach nur Aufgabentypen auswendig lernen, um die Prüfung zu bestehen.
- Substitutionen in Integralen und Summen müssen sitzen! Es werden zwar bei Rechenfehlern Teilpunkte gegeben, aber ihr verliert trotzdem einige Punkte wollt ihr nicht vergeben.
- Vegesst nicht eure Lösungswege zu begründen, Achsenbeschriftungen bei Skizzen etc.
- Falls ihr Teilaufgaben nicht schafft, könnt ihr, wenn ihr übrige Zeit habt, trotzdem weiterrechnen (z.B. mit Parametern), vielleicht bekommt ihr dafür einige Punkte.