SST1 Übungsstunde 2

Matteo Dietz

September 2024

Organisatorisches

- Study-Center dienstags 18:15-19:00 im ETZ E7
  Kommt in den ersten 15 Minuten des Study-Centers!
- Vorlesungsskript und Übungsskript auf der Vorlesungswebsite
  Username: sigsys2024, Passwort: Fourier2024
- Link zu meinen Handouts ebenfalls auf der Vorlesungswebsite

Themenüberblick

- **Kurze Repetition:**
  Unterräume, Normierte Lineare Räume

- **Hilberträume:**
  Inneres Produkt, Orthogonalität, Orthonormalsysteme, L^2 als unendlich dimensionaler normierter Raum, Gram-Schmidt

- **Systeme und Systemeigenschaften:**
  Linearität, Nullraum, Bildraum, Stetigkeit

Aufgaben für diese Woche

16, 17, **18**, **19**, 20, **21**, 22, **23**, **24**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Lineare Unterräume

- **Definition:** Ein linearer Unterraum ist eine **nichtleere Teilmenge** ($\tilde{X}$) eines linearen Raumes X, wenn gilt:

  (i) $x_1 + x_2 \in \tilde{X}$, für alle $x_1, x_2 \in \tilde{X}$.

  (ii) $\alpha x \in \tilde{X}$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $x \in \tilde{X}$.

Repetition: Funktionsräume

- Für eine nichtleere Menge S definiert man den linearen Raum X als Menge aller Funktionen von S nach $\mathbb{C}$, wobei die Addition und die skalare Multiplikation wie folgt definiert sind:

$(+)$ $\forall x_1, x_2 \in X \qquad +: X \times X \to X$

$$(x_1 + x_2)(s) = x_1(s) + x_2(s) \;\; \forall s \in S$$

$(\cdot)$ $\forall \alpha \in \mathbb{C},\; x \in X \qquad \cdot: \mathbb{C} \times X \to X$

$$(\alpha \cdot x)(s) = \alpha x(s)$$

Repetition: Normierte Lineare Räume

- **Definition:** Ein normierter linearer Raum ist ein Paar $(X, ||\cdot||)$ bestehend aus einem linearen Raum X und einer Norm auf X.

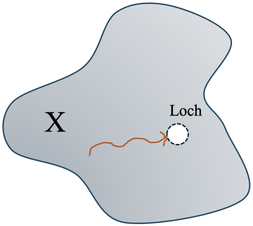
Hilberträume

- Ein Hilbertraum ist ein **linearer Raum**. Dieser Raum ist

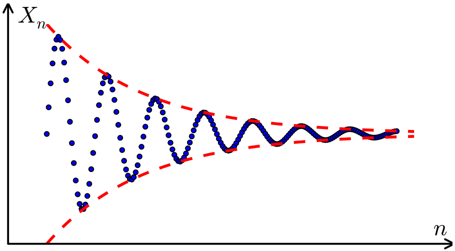
  (i) ausgestattet mit einem **inneren Produkt**.

  (ii) **vollständig** bezüglich der induzierten Norm dieses inneren Produktes.

Vollständigkeit



Kein Hilbertraum



Cauchy-Folge

Inneres Produkt: Definition

- Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ in einem linearen Raum X heisst **inneres Produkt**, wenn folgende Eigenschaften gelten:

  (i) Additivität im 1. Argument: $\langle x+y,\ z\rangle = \langle x,\ z\rangle + \langle y,\ z\rangle$

  (ii) Homogenität im 1. Argument: $\langle \alpha x,\ y\rangle = \alpha\langle x,\ y\rangle$

  (iii) Konjugierte Symmetrie: $\langle x,\ y\rangle = \langle y,\ x\rangle^*$

  (iv) Positive Definitheit: $\langle x,\ x\rangle \geq 0$ und $\langle x,\ x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Inneres Produkt: Bemerkungen

- Additiv im 2. Argument:
  $\langle x,\ y + z\rangle = \langle y + z,\ x\rangle^* = \langle y,\ x\rangle^* + \langle z,\ x\rangle^* = \langle x,\ y\rangle + \langle x,\ z\rangle$
- komplexe Konjugation:
  $\langle x,\ \alpha y\rangle = \langle \alpha y,\ x\rangle^* = \alpha^*\langle y,\ x\rangle^* = \alpha^*\langle x,\ y\rangle$

Inneres Produkt: Induzierte Norm

- Sei X ein linearer Raum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$
- $||x|| := \sqrt{\langle x,\ x \rangle}$ ist die von diesem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **induzierte Norm**.

Orthogonalität

- Sei X ein linearer Raum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
  $x_1, x_2 \in X$ sind **orthogonal**, falls $\langle x_1,\ x_2 \rangle = 0$.

- **Bemerkungen:**
  (i) Orthogonalität $\implies$ Lineare Unabhägnigkeit

  (ii) n paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem linearen Raum der Dimension n bilden eine orthonormale Basis in diesem Raum.

Satz des Pythagoras

$$\boxed{\text{Wenn } \langle x,\ y\rangle = 0, \quad \text{dann} \quad ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2}$$

Beweis:

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\langle u,\ v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$$

Intuition für $\mathbb{R}^2$: $$|\langle u,\ v\rangle| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \underbrace{|\cos\angle(u,\ v)|}_{\in[0,1]}$$

Aufgabe 16

Vollständiges Orthonormalsystem

- $\{e_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ in X ist ein vollständiges Orthonormalsystem für den Hilbertraum X, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

  1. $\langle e_l,\ e_{l'} \rangle = \begin{cases} 1, & l = l' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, für $l, l' \in \mathbb{Z}$
  2. Für jedes $x \in X$ gilt $||x||^2 = \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} |\langle x,\ e_l \rangle|^2$

L^2 als unendlich dimensionaler normierter Raum

- $L^2([0,1])$ ist der lineare Raum der auf $[0,1]$ quadratisch integrierbaren Signale. Formal:

$$L^2\left([0,1]\right) = \left\{ x : [0,1] \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_0^1 |x(t)|^2 < \infty \right\}$$

- $L^2([0,1])$ ist **unendlich dimensional**.
- $\{e^{2\pi int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ist eine **ONB** in diesem Raum

L^2 als unendlich dimensionaler normierter Raum

L^2 als unendlich dimensionaler normierter Raum

Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren

- Sei $\{w_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

  Dann existiert eine **ONB** $\{v_i\}_{i=1}^n = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit:

  $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_j\} = \text{Span}\{w_1, \ldots, w_j\}$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren

Algorithmus

Für $j = 1,\ 2, \ldots, n$:

$$v'_j = w_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_i,\ w_j \rangle}{\langle v_i,\ v_i \rangle} v_i$$

$$v_j = \frac{v'_j}{||v'_j||}$$

$$j \to j + 1$$

Aufgabe 18

Systeme & Beispiele

Ein System hat folgendes Blockschaltbild:

$$x \longrightarrow \boxed{\quad H \quad} \longrightarrow y$$

$x:$ Eingangssignal
$y:$ Ausgangssignal

Dabei ist $x \in X$ und $y \in Y$, wobei X und Y lineare Räume sind.

Linearität

- Ein System $H : X \to Y$ ist **linear**, wenn:

  (i) **Additivität**: $H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2$, für alle $x_1, x_2 \in X$

  (ii) **Homogenität**: $H(\alpha x) = \alpha Hx$, für alle $x \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$

- Falls das System $(i) \vee (ii)$ nicht erfüllt, heisst H **nichtlinear**.

Linearität: Bemerkungen

- Wenn H ein lineares System ist, dann muss $H0 = 0$ immer gelten.
- Wenn dies also nicht erfüllt ist, dann muss H nichtlinear sein.

Aufgabe 23

Aufgabe 24

Nullraum

- Sei $H : X \to Y$ ein lineares System

  Der Nullraum von H ist die Teilmenge von X definiert durch $\mathcal{N}(H) = \{x \in X : Hx = 0\}$.

  $\mathcal{N}(H)$ ist ein linearer Unterraum von X.

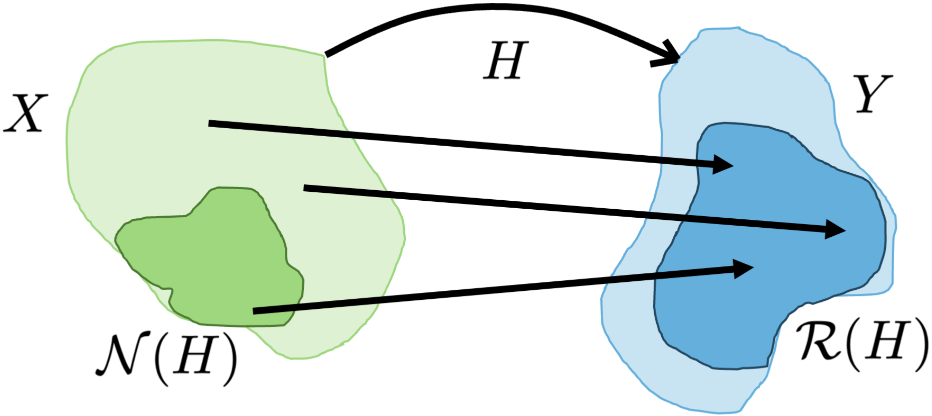
Bildraum

- Sei $H : X \to Y$ ein lineares System

  Der Bildraum von H ist die Teilmenge von Y definiert durch $\mathcal{R}(H) = \{y = Hx : x \in X\}$.

  $\mathcal{R}(H)$ ist ein linearer Unterraum von Y.

Nullraum und Bildraum



Stetige Systeme

- **Theorem:** Das System H ist **linear und stetig**
  $\Leftrightarrow$ Für jede konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ gilt:

$$H\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i H x_i$$

$\varepsilon - \delta$ Stetigkeit

- Seien $(X, ||\cdot||))$ und $(Y, ||\cdot||))$ normierte lineare Räume.

  Das System $H : X \to Y$ ist **stetig** in $x_0 \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängiges $\delta > 0$ gibt, so dass:

  $\forall x \in X$ mit $||x - x_0|| < \delta$ folgt, dass $||Hx - Hx_0|| \leq \varepsilon$.