SST1 Übungsstunde 9

Matteo Dietz

November 2024

Themenüberblick

- **Repetition: Abtasttheorem**
- **Zeitdiskrete Signale und Systeme**

  Zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT)

  Zeitdiskrete LTI-Systeme und Systemeigenschaften

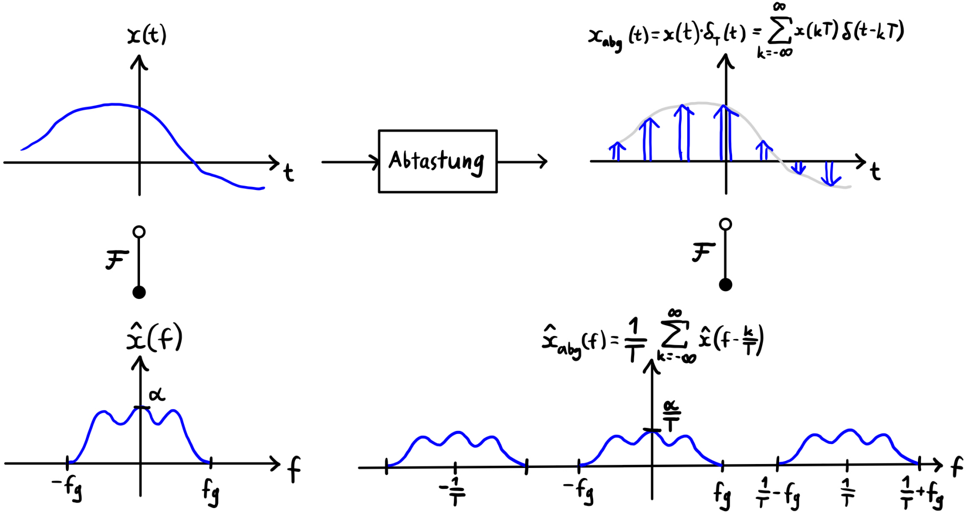
  Differenzengleichungen

Aufgaben für diese Woche

97, 98, 99, 100, 101, **102**, **103**, **104**, 105, 106, **107**, **108**, 109, **110**, **111**, **112**, 113

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Abgetastete Signale im Frequenzbereich



Abgetastete Signale im Frequenzbereich

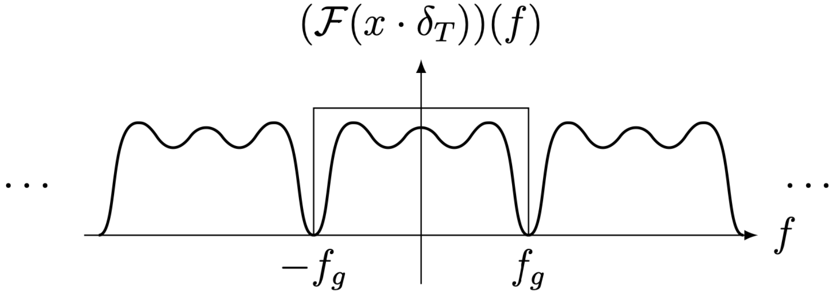
$$x_{abg.}(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

$$\overset{20.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad \hat{x}_{abg.}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Die **Abtastung im Zeitbereich** entspricht einer **Periodisierung im Frequenzbereich**. (Die Kopien sind um Faktor $\frac{1}{T}$ skaliert.)

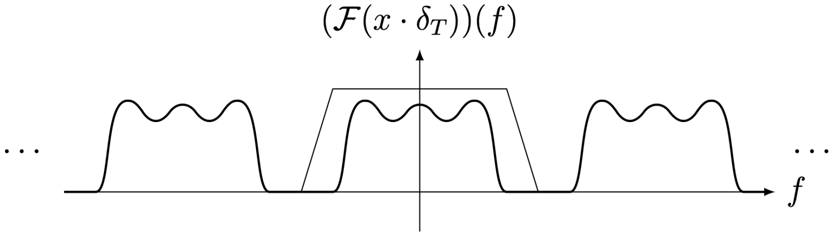
- f_g ist die Bandbreite von $x(t)$, $f_s := \dfrac{1}{T}$ ist die Abtastfrequenz

1. Kritische Abtastung: $f_s = 2f_g$



$\implies$ Wir können das Signal mit einem idealen Tiefpassfilter der Breite $W = f_g$ rekonstruieren

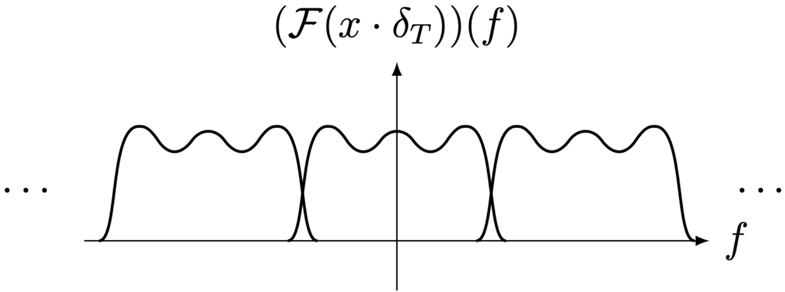
2. Überabtastung: $f_s > 2f_g$



Vorteile an Überabtastung:

1. Wir können einen stabilen Tiefpassfilter verwenden.
2. Überabtastung verringert die Empfindlichkeit auf Rauschen.

3. Unterabtastung: $f_s < 2f_g$

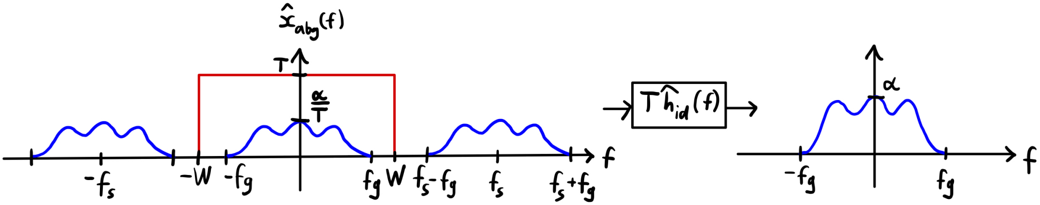


Es gibt **Aliasing**. Mit Hilfe eines Tiefpassfilters erhalten wir keine perfekte Version von $\hat{x}(f)$.

Abtasttheorem

Ein Signal mit der Bandbreite f_g kann aus seinen Abtastwerten, genommen mit einer Rate von $f_s \geq 2f_g$, eindeutig rekonstruiert werden.
Die kritische Rate $f_s = 2f_g$ wird als **Nyquistrate** bezeichnet.

Rekonstruktion



Rekonstruktion

- Allgemeine Rekonstruktion eines Signals aus Abtastwerten:

$$\boxed{y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)h(t-kT)}$$

- Kritische Abtastung $\implies$ idealer Tiefpassfilter mit Breite

$$W = f_g = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T} \implies \hat{h}_{id}(f) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; h_{id}(t) = \frac{\sin(2\pi W t)}{\pi t}$$

$$\implies y(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$$

Zeitdiskrete Signale

Abtastung im Zeitbereich $\implies$ periodische Fortsetzung des Spektrums:

$$\hat{x}_{\text{abg}}(f) = \mathcal{F}\{x \cdot \delta_T\}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

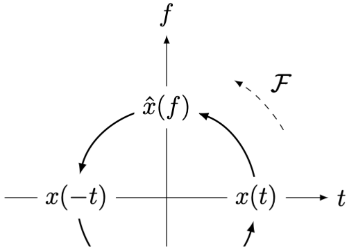
Dieses Signal ist $\frac{1}{T}-$periodisch und besitzt somit eine Fourierreihendarstellung.

Poisson & Dualität

Poissonsche Summenformel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t+kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k/T)e^{2\pi ikt/T}$$

Dualität der Fouriertransformation



Zeitdiskrete Signale im Frequenzbereich

$$\hat{x}_{\text{abg}}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}\cdot T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{\hat{x}}(kT)}_{x(-kt)} e^{2\pi i k f T}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-kT) e^{2\pi i k f T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(kT)}_{x_d[k]=c_k} e^{-2\pi i k f T}$$

$\Longrightarrow$ Darstellung als komplexe Fourierreihe: **Abtastwerte** $x(kT)$ sind die Koeffizienten der Fourierreihe des Spektrums $\hat{x}_{\text{abg}}(f)$.

Zeitdiskrete Signale im Frequenzbereich

Wir definieren $\theta = Tf$ und erhalten mithilfe der Formel von oben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k] e^{-2\pi i k\theta} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-2\pi i k T f} \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta - k}{T}\right) = \hat{x}_d(\theta)
\end{aligned}$$

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

(DTFT) $$\hat{x}_d(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-2\pi i n\theta}$$

(IDTFT) $$x_d[n] = \int_0^1 \hat{x}_d(\theta) e^{2\pi i n\theta} \mathrm{d}\theta$$

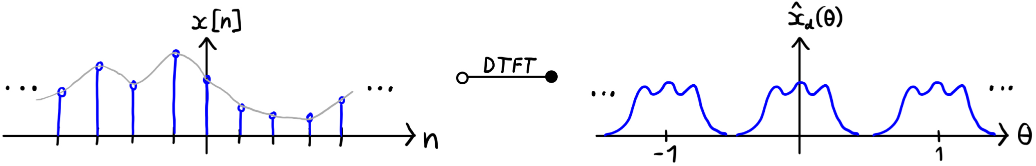
Rücktransformation

DTFT: Bemerkungen

- diskreter Zeitbereich $\overset{\text{DTFT}}{\circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet}$ kontinuierlicher Frequenzbereich
- $\theta = Tf = \frac{f}{f_s}$ ist die **relative Frequenz**
  (T = Abtastperiode und f_s = Abtastfrequenz)
- $\hat{x}_d(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta - k}{T}\right)$ ist **1-periodisch** in θ.

DTFT: Bemerkungen

- $\hat{x}_d(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta - k}{T}\right)$ ist **1-periodisch** in θ.



DTFT: Formelsammlung

54.	$x[n] = \int_0^1 \hat{x}(\theta)\, e^{2\pi i n\theta} \mathrm{d}\theta$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n\theta}$
55.	$x[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i N_0 \theta}\hat{x}(\theta)$
56.	$e^{2\pi i n\theta_0} x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta-\theta_0)$
57.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(-\theta)$
58.	$x[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-\theta)$
59.	$(x*y)[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta)\hat{y}(\theta)$
60.	$x[n]y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x}*\hat{y})(\theta)$ **(siehe [2])**
61.	$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(\theta)\}$
62.	$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(\theta)\}$
63.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) + \hat{x}^*(\theta))$
64.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) - \hat{x}^*(\theta))$
65.	$nx[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\hat{x}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$
66.	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-2\pi i\theta}}\hat{x}(\theta) + \frac{1}{2}\hat{x}(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta-k)$

DTFT: Formelsammlung

67.	$\delta[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i N_0 \theta}$
68.	$e^{2\pi i \theta_0 n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta-\theta_0-k)$
69.	$\cos(2\pi\theta_0 n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta+\theta_0-k)+\delta(\theta-\theta_0-k)\right)$
70.	$\sin(2\pi\theta_0 n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta+\theta_0-k)-\delta(\theta-\theta_0-k)\right)$
71.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta-\frac{k}{N}\right)$
72.	$\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-2\pi i\theta}}+\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta-k)$
73.	$a^n\sigma[n], \quad \lvert a\rvert<1$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-ae^{-2\pi i\theta}}$
74.	$\frac{\sin(2\pi n\alpha)}{\pi n}, \quad 0<\alpha<1/2$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\begin{cases} 1, & \lvert\theta\rvert \le \alpha \\ 0, & \alpha < \lvert\theta\rvert \le 1/2 \end{cases}$ (1-periodisch)
75.	$x[n]=\begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\sin\big((2N_1+1)\pi\theta\big)}{\sin(\pi\theta)}$

Zeitdiskrete Systeme & Eigenschaften

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\quad H \quad} \longrightarrow y[n] \qquad\qquad y = Hx$$

- **Linearität**

  $$H(\alpha x_1 + x_2) = \alpha H x_1 + H x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

- **Zeitinvarianz**

  $$H(x[\cdot - n_0]) = (Hx)[\cdot - n_0] \quad \forall x \in X,\ \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

Zeitdiskrete Systeme & Eigenschaften

- **Kausalität**

  $$x_1[n] = x_2[n] \;\; \forall n \leq n_0 \implies (Hx_1)[n] = (Hx_2)[n]$$
  $$\forall n \leq n_0 \quad \forall x_1, x_2 \in X, \; \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

- **BIBO-Stabilität**

  $$\forall x \in X \text{ mit } |x[n]| \leq B_x < \infty \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$$
  $$\implies \exists B_y < \infty \text{ mit } |(Hx)[n]| \leq B_y \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$$

Kronecker-Delta Funktion

Die Kronecker-Delta Funktion ist definiert als

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

Es gilt $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$

Zeitdiskrete LTI-Systeme

- Die Systemantwort von zeitdiskreten LTI-Systemen lautet: $y[n] = (Hx)[n] =$
- Die zeitdiskrete Impulsantwort ist definiert als $h[n] = (H\delta)[n]$

Zeitdiskrete LTI-Systeme

- Die Antwort von einem LTI-System ist also:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

$$\overset{\text{DTFT}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad \hat{y}(\theta) = \hat{x}(\theta)\hat{h}(\theta)$$

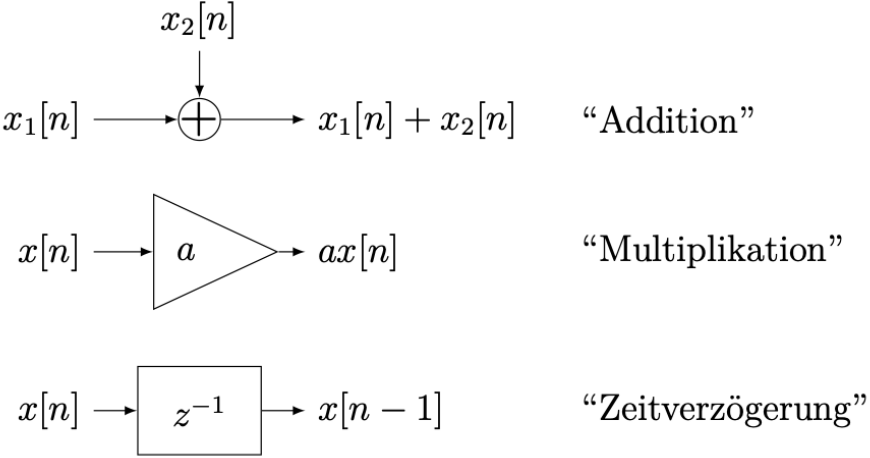
Systemeigenschaften Zeitdiskreter LTI-Systeme

Ein LTI-System heisst ...

- **kausal**, genau dann wenn: $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$
- **BIBO-stabil**, wenn: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$, (also $h \in l^1$)

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2017, Aufgabe 3.a)

Blockschaltbilder



Differenzengleichungen

- Viele zeitdiskrete LTI-Systeme lassen sich beschreiben durch:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

- Umformen dieser Gleichung ergibt:

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$$\implies y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x[n-m]$$

Differenzengleichungen

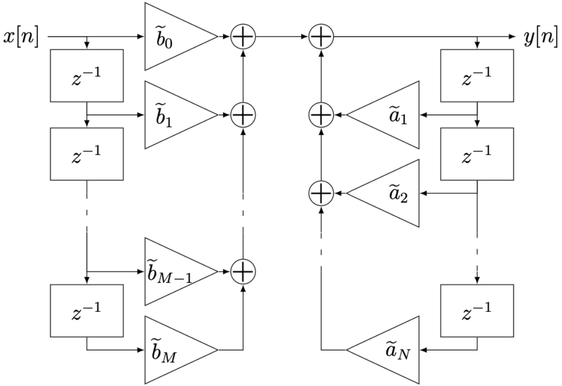
$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x[n-m]$$

Wir setzen $-\dfrac{a_k}{a_0} = \tilde{a}_k$ und $\dfrac{b_m}{a_0} = \tilde{b}_m$

$$\implies y[n] = \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_k \quad y[n-k] \quad + \sum_{m=0}^{M} \tilde{b}_m \quad x[n-m]$$

$$y[n-k] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \hat{y}(\theta) e^{-2\pi i k \theta} \qquad x[n-m] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \hat{x}(\theta) e^{-2\pi i m \theta}$$

Differenzengleichungen



$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_k y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} \tilde{b}_m x[n-m]$$

Differenzengleichungen: Beispiel

- LTI-System beschrieben durch:

$$2y[n] - 3y[n-3] = x[n] + 6x[n-1] - 8x[n-7]$$

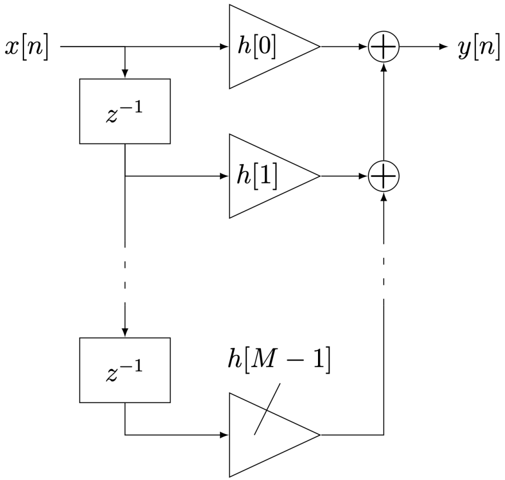
- **Ziel**: Suche $\hat{h}(\theta) = \dfrac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)}$.
- Es gilt: $x[n-N_0] \overset{55.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} e^{-2\pi i N_0 \theta}\hat{x}(\theta)$
- DTFT auf beiden Seiten ergibt:

Differenzengleichungen: Beispiel

- DTFT $\Longrightarrow \left(\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-2\pi i k\theta}\right) \hat{y}(\theta) = \left(\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-2\pi i m\theta}\right) \hat{x}(\theta)$

- Somit $\hat{h}(\theta) = \frac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-2\pi i m\theta}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-2\pi i k\theta}}$

FIR-Filter

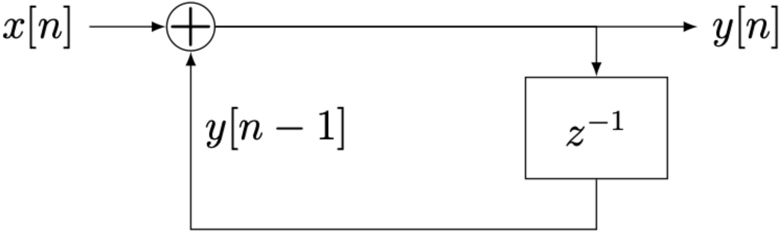


- Impulsantwort hat **endliche Länge**
- FIR-Filter haben keine Rückkopplungen

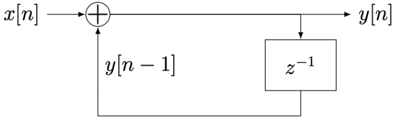
$$y[n] \overset{\text{LTI}}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n-l]$$
$$= \sum_{l=0}^{M-1} h[l]x[n-l]$$

IIR-Filter

Die Impulsantwort von IIR-Filtern hat **unendliche Länge**. Das Blockschaltbild hat Rückkopplungen $\implies$ oft Stabilitätsproblemen



IIR-Filter



$$y[n] = x[n] + y[n-1] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{\text{LTI}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\implies h[n-k] = \sigma[n-k] \Leftrightarrow h[n] = \sigma[n]$$

Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2017, Aufgabe 3.b)