SST1 Übungsstunde 1

Matteo Dietz

September 2024

Organisatorisches

- Übungsstunde dienstags 16:15-18:00 im HG E22
- Study-Center dienstags 18:15-19:00 im ETZ E7
- Vorlesungsskript und Übungsskript auf der Vorlesungswebsite
  Username: sigsys2024,   Passwort: Fourier2024

Organisatorisches

- Bonussystem: Es gibt dieses Semester keinen Bonus in SST1
- Ich werde jede Woche ein kurzes Skript auf meiner Website hochladen. Der Link zu meiner Website ist auf der Vorlesungswebsite.

Hinweise

- Geht in die Vorlesung!
- Macht Aufgaben während des Semesters und schiebt nicht alles für die Lernphase auf!

Themenüberblick

- **Einführung Signale:**
  Einteilung der Signale und einfache Beispielsaufgaben

- **Lineare Algebra Recap:**
  Lineare Räume und Unterräume:
  Lineare Unabhängigkeit, Basen, Koordinaten, Dimensionsbegriff, duale Basen, Funktionsräume, Normen, Skalarprodukte, Orthogonalität

Aufgaben für diese Woche

1, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, 7, **8**, **9**, 10, **11**, 12, 13, 14, **15**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Lineare Räume

Definition: Ein linearer Raum über $\mathbb{C}$ ist eine nichtleere Menge X zusammen mit

(i) einer Abbildung $+ : X \times X \to X$, genannt Addition und notiert mit $x_1 + x_2$,

(ii) einer Abbildung von $\mathbb{C} \times X$ nach X, genannt skalare Multiplikation und notiert mit αx,

so, dass Addition und skalare Multiplikation folgende Eigenschaften erfüllen:

(A1) Kommutativität $(+)$: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$, für alle $x_1, x_2 \in X$.

(A2) Assoziativität $(+)$: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$, für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$.

(A3) Nullelement $(+)$: $\exists! 0 \in X$, so dass $0 + x = x$, für alle $x \in X$.

(A4) Inverses Element $(+)$: $\forall x \in X \;\; \exists! -x \in X$, so dass $x + (-x) = 0$.

(SM1) Assoziativität $(\cdot)$: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $x \in X$

(SM2) Einselement $(\cdot)$: $1x = x$, für alle $x \in X$.

(A&SM1) Distributivgesetz: $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, und alle $x_1, x_2 \in X$.

(A&SM2) Distributivgesetz: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, und alle $x \in X$.

Aufgabe 7

Lineare Unterräume

- **Definition:** Ein linearer Unterraum ist eine **nichtleere Teilmenge** ($\tilde{X}$) eines linearen Raumes X, wenn gilt:

  (i) $x_1 + x_2 \in \tilde{X}$, für alle $x_1, x_2 \in \tilde{X}$.

  (ii) $\alpha x \in \tilde{X}$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $x \in \tilde{X}$.

Aufgabe 9

Basen in linearen Räumen

Definition: Eine Teilmenge $\{x_i\}_{i=1}^n$ des linearen Raumes X ist linear abhängig, wenn es zugehörige Skalare $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ gibt, die **nicht alle gleich Null** sind und so, dass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0.$$

Wenn $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ impliziert, dass $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, dann ist die Teilmenge $\{x_i\}_{i=1}^n$ linear unabhängig.

Basen in linearen Räumen

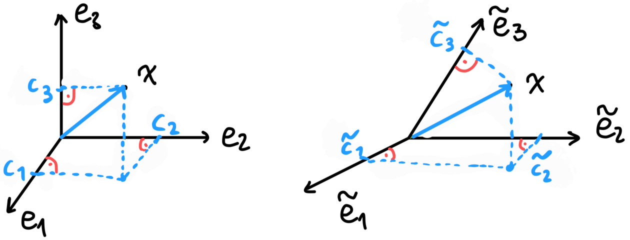
- Die **Basis** eines linearen Raums X ist eine Menge von Vektoren in X, die linear unabhängig sind und jedes Element x des gesamten Raumes X durch eindeutige Linearkombination erzeugen können.

Basen in linearen Räumen

- **Formale Definition:** Die Menge $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{M}$, $\mathbf{e}_k \in \mathbb{C}^M$, ist eine Basis für $\mathbb{C}^M$, wenn:

1. $\operatorname{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{M} = \mathbb{C}^M$
2. $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{M}$ linear unabhängig ist.

Basen in linearen Räumen



Koordinaten $c_k := \langle \mathbf{x},\ \mathbf{e}_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, M$

Analysematrix

$$\text{Analysematrix} \quad \mathbf{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M^H \end{bmatrix}$$

$$\text{Koordinaten} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M^H \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \ \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{e}_M, \ \mathbf{x} \rangle \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

Dimensionsbegriff

- **Dimension** M
  - $=$ maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente im linearen Raum
  - $=$ Anzahl Basiselemente **jeder** Basis dieses linearen Raumes
- Wenn es kein endliches M gibt, $\implies$ X unendlich-dimensional.

Duale Basen

- Eine Menge $\{\tilde{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^{M}$, $\tilde{\mathbf{e}}_k \in \mathbb{C}^M$, $k = 1, \ldots, M$ heisst dual zu einer Basis $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{M}$, wenn:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{M} \langle \mathbf{x},\ \mathbf{e}_k \rangle \tilde{\mathbf{e}}_k, \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$$

Duale Basen einer ONB

- Die duale Basis einer Orthonormalbasis ist sie selbst.
  $\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_k, \quad$ für alle $k = 1, \ldots, M$, denn dann gilt trivialerweise:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{M} \langle \mathbf{x},\ \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$$

Duale Basen einer allgemeinen Basis

- **Synthesematrix:** $\tilde{\mathbf{T}}^H = [\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_M]$
- Setze $\tilde{\mathbf{T}}^H = \mathbf{T}^{-1}$, um eine duale Basis zu finden.

$$\implies \tilde{\mathbf{T}}^H \mathbf{T}\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_M] \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x},\ \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x},\ \mathbf{e}_M \rangle \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{M} \langle \mathbf{x},\ \mathbf{e}_k \rangle \tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{x},$$

Aufgabe 11

Funktionsräume

- Für eine nichtleere Menge S definiert man den linearen Raum X als Menge aller Funktionen von S nach $\mathbb{C}$, wobei die Addition und die skalare Multiplikation wie folgt definiert sind:

$$(+) \quad \forall x_1, x_2 \in X \qquad + : X \times X \to X$$
$$(x_1 + x_2)(s) = x_1(s) + x_2(s) \;\; \forall s \in S$$

$$(\cdot) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},\; x \in X \qquad \cdot : \mathbb{C} \times X \to X$$
$$(\alpha \cdot x)(s) = \alpha x(s)$$

Norm

- **Definition:** Eine reelle Funktion $||\cdot||$, definiert auf einem linearen Raum X, ist eine Norm auf X, wenn gilt:

(N1) Nichtnegativität: $||x|| \geq 0$, für alle $x \in X$

(N2) Dreiecksungleichung: $||x_1 + x_2|| \leq ||x_1|| + ||x_2||$, für alle $x_1, x_2 \in X$

(N3) Homogenität: $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$, für alle $x \in X$

(N4) Definitheit: $||x|| = 0$ dann, und nur dann, wenn $x = 0$

Normierte Lineare Räume

- **Definition:** Ein normierter linearer Raum ist ein Paar $(X, ||\cdot||)$ bestehend aus einem linearen Raum X und einer Norm auf X.

Beispiele für Normierte Lineare Räume

- linearer Raum $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit einer der folgenden Normen:

Summennorm (1-Norm): $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Euklidische Norm (2-Norm): $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

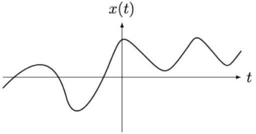
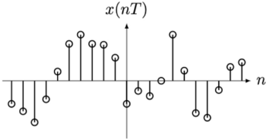
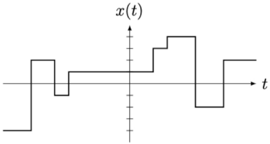
p-Norm: $||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$

Maximumsnorm: $||\mathbf{x}||_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

Beispiele für Normierte Lineare Räume

- linearer Raum $L^p := \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty\}$ mit der Norm $||x||_{L^p} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$
- linearer Raum $l^p := \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p < \infty\}$ mit der Norm $||x||_{l^p} := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p\right)^{1/p}$

Einteilung der Signale

Zeit / Signal-amplitude	kontinuierlich	diskret
kontinuierlich	analoge Signale 	zeitdiskrete Signale 
diskret	amplitudendiskrete Signale 	digitale Signale