Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dept. of Information Technology and Electrical Engineering

Übungsstunde 5

Themenüberblick

- **Verallgemeinerte Funktionen:**

  Funktionale

  $\delta-$Funktion und ihre Eigenschaften

  Ableitung verallgemeinerter Funktionen

- **Einführung Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich:**

  Fouriertransformation: Definition, Eigenschaften und Beispiele

  Dualität der Fouriertransformation

  Plancherelsche Identität und Parsevalsche Beziehung

Aufgaben für diese Woche

46, 47, **48**, **49**, **50**, **51**, 52, 53, **54**, **55**, **56**, **57**, 58, **59**, **60**, 61, **62**, 63, **64**, 65, **66**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Verallgemeinerte Funktionen

Dieses Kapitel ist nicht wirklich prüfungsrelevant. Es dient mehr zur theoretischen Herleitung und eurem Verständnis der Deltafunktion.

Funktional

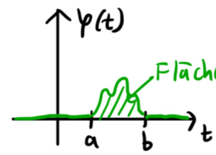
Ein Funktional ist eine Funktion, deren Definitionsmenge eine Teilmenge eines linearen Raumes X ist und deren Zielmenge aus Skalaren besteht.

Mittelwertsatz der Integration: $\exists \xi \in [a, b]$, sodass $\ell_x(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)x(t)dt = x(\xi) \int_a^b \varphi(t)dt$

$$\ell_x : X \to \mathbb{C}$$

$$\varphi(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \int_a^b \varphi(t)x(t)\,dt =: \ell_x(\varphi)$$

- $\varphi(t) \geq 0 \quad \forall t$
- $\varphi(t) = 0 \quad \forall t \notin [a, b]$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1$



Herkömmlicher Funktionenbegriff als Spezialfall

Deltafolge

Eine Deltafolge $\delta_n(t)$ hat folgende Eigenschaften:

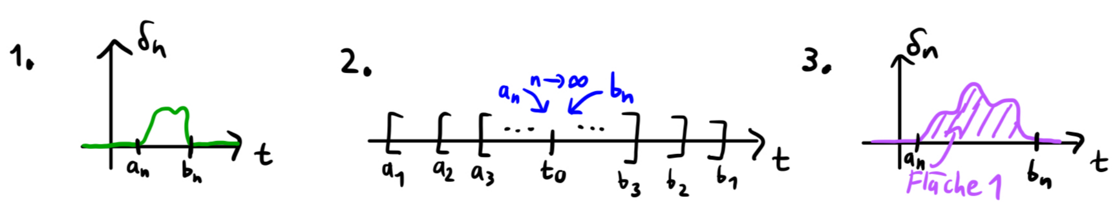
1. $\delta_n(t) \begin{cases} \geq 0, & \forall t \in I_n = [a_n, b_n] \\ = 0, & \forall t \notin I_n \end{cases}$

2. Die Intervalle I_n bilden eine Intervallverschachtelung für $t_0 \in \mathbb{R}$, d.h. die Intervalle, auf denen $\delta_n(t) \geq 0$ werden immer schmäler: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq t_0 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$

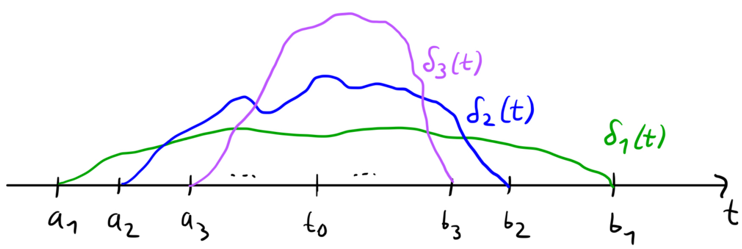
   und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = t_0$

3. Normierung: $\forall n$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t)\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{b_n} \delta_n(t)\mathrm{d}t = 1$

   Graphisch sehen Punkte 1.-3. wie folgt aus:



Eine mögliche Deltafolge wäre zum Beispiel:



Wir nehmen nun den Grenzwert für $n \to \infty$ und erhalten die **Dirac-Delta** "Funktion":

$$\delta_{t_0}(t) := \lim_{n\to\infty} \delta_n(t) \begin{cases} \to \infty, & t = t_0 \\ = 0, & t \neq t_0 \end{cases} = \delta(t - t_0)$$

Die Dirac-Delta Funktion ist im herkömmlichen Sinn keine echte Funktion. Ihre Eigenschaften sind, dass sie Breite 0, Höhe $\to \infty$ und Fläche 1 hat.

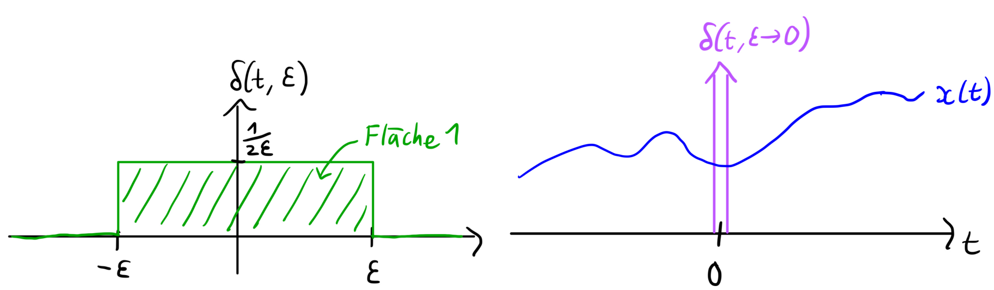
Die Deltafunktion

Wir betrachten die Funktion:

$$\delta(t, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |t| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann $\ell_x(\delta(t,\varepsilon)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t,\varepsilon)\mathrm{d}t = x(\xi)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t,\varepsilon)\mathrm{d}t = x(\xi)$

Wir lassen $\varepsilon \to 0$, dann $\xi \to 0$ und somit $\lim_{\varepsilon\to 0} \ell_x(\delta(t,\varepsilon)) = x(0)$. Man schreibt $\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta(t,\varepsilon)$



$$\implies \delta(t)x(t) = \delta(t)x(0), \quad \text{dann} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)\mathrm{d}t = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = x(0)$$

Eigenschaften der $\delta-$Funktion

Die folgenden Eigenschaften sind sehr wichtig für die Aufgaben in SST1. Am wichtigsten sind die **3.** und **5.** Eigenschaft. Diese muss man in jeder Prüfung mehrfach anwenden.

1. **Symmetrie**:

   $\delta(t) = \delta(-t)$

   $\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t)$

2. **Multiplikation mit einer Funktion**:

   $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

   $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$

3. **Siebeigenschaft**:

   $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)\mathrm{d}t = x(0)$

   $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)\mathrm{d}t = x(t_0)$

4. **Verschiebung/Skalierung des Parameters**:

   $\delta(at + b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$

5. **Die $\delta-$Funktion ist das Einselement der Faltung**:

   $(x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = x(t)$

   $(x * \delta(\cdot - t_0))(t) = x(t - t_0)$

6. **Einheitssprungfunktion**:

   $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \sigma(t)$

Ableitung von verallgemeinerten Funktionen

Mit D bezeichnen wir den Ableitungsoperator, $x'(t)$ beschreibt die konventionelle Definition der Ableitung einer stetigen, differenzierbaren Funktion, wie wir es aus Analysis 1 kennen, und t_0 ist eine Sprungstelle von $x(t)$.

$$(Dx)(t) = x'(t) + (x(t_0^+) - x(t_0^-))\delta(t - t_0)$$

Bemerkung

Die Impulsantwort ist definiert als $h(t) = (H\delta)(t)$ und die Sprungantwort als $a(t) = (H\sigma)(t)$.

$$\text{Da } \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t) \text{ haben wir } \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = h(t)$$

Aufgabe 50

Welche der folgenden verallgemeinerten Funktionen sind identisch?

a) $2t^2\delta(t-1)$

b) $(t+2)\delta(t-1)$

c) $2e^{t-1}\delta(1-t)$

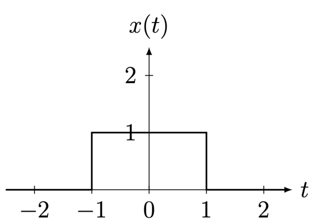
d) $(t+2)^2\delta(3t-3)$

Aufgabe 51

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Signale bzw. verallgemeinerter Funkionen:

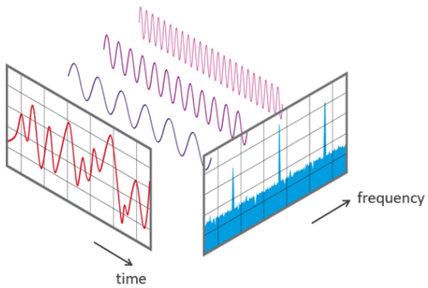
a) $x(t) = |t|$

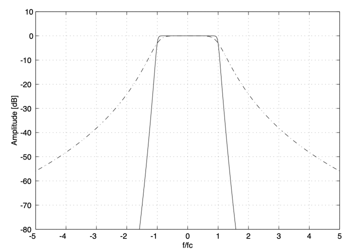
c)



Analoge Lineare Systeme im Frequenzbereich

Motivation





Das Frequenzspektrum ist ein mächtiges Werkzeug in SST1, da es wesentliche Eigenschaften von Signalen und Systemen offenbart, die im Zeitbereich verborgen bleiben. Wir können Signale in ihre Frequenzkomponenten zerlegen und somit Systeme für spezifische Aufgaben entwerfen und optimieren. Im Bereich der Signalverarbeitung ermöglicht das Frequenzspektrum effizientes Filtern, noise reduction und feature extraction. In der Kommunikationstechnik erleichtert es Modulation, Datenkompression und channel analysis für eine klarere Signalübertragung. In der Schaltungstheorie vereinfacht die Frequenzanalyse das Rechnen mit Wechselstromsignalen und hilft Ingenieuren, stabile und effiziente Schaltungen zu entwickeln. Diese Ansätze sind in vielen Bereichen grundlegend und liefern Einsichten und Lösungen, die durch eine reine Zeitbereichsanalyse nicht möglich wären.

Fouriertransformation

Die Fouriertransformation (FT) ist definiert durch:

$$\hat{x}(f) = (\mathcal{F}x)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i f t}\mathrm{d}t$$

Die dazugehörige Rücktransformation (IFT) ist dann:

$$x(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}f$$

Wichtiger Hinweis: in KomA/NuS 2 war die Fouriertransformation und ihre Rücktransformation definiert als:

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Da wir in SST1 t und f als Parameter haben anstatt t und ω, haben wir dank $\omega = 2\pi f$ und somit wegen $\mathrm{d}\omega = 2\pi\mathrm{d}f$ kein Vorfaktor $1/(2\pi)$ in der Rücktransformation.

Die Fouriertransformation ist eine **lineare Transformation**:

$$(\mathcal{F}(\alpha x_1 + \beta x_2))(f) = \alpha\hat{x_1}(f) + \beta\hat{x_2}(f)$$

Formelsammlung

Aufgabe 58.b)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Signale:

b) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi t), & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

Aufgabe 64.

Für die gegebenen Fouriertransformierten $\hat{x}(f)$ berechne man die zugehörigen Zeitsignale $x(t)$.

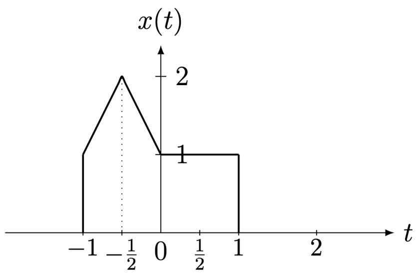
b) $\hat{x}(f) = \cos(8\pi f + \frac{\pi}{3})$

Aufgabe 60.

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Signale:

b) $x(t) = te^{-2t}\sigma(t)$

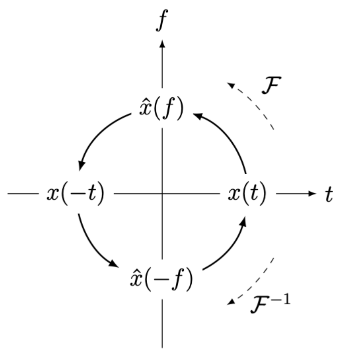
c)



Zentrale Eigenschaften der Fouriertransformation

Dualität der Fouriertransformation

Man kann die Fouriertransformation als Rotation in der Zeit-Frequenz-Ebene betrachten:



$$\begin{aligned} x(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{x}(f) \\ \widehat{x}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ x(-f) \\ x(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{x}(-f) \\ \widehat{x}(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ x(f). \end{aligned}$$

Somit erhält die Fouriertransformationstabelle viel mehr Informationen als nur $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \hat{x}(f)$

Beispiel: In der Formelsammlung steht

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_0}, & |t| \leq T_0 \\ 0, & |t| \geq T_0 \end{cases} \quad \circ\!\!\xrightarrow{\ 29.\ }\!\!\bullet \quad \frac{\sin^2(\pi T_0 f)}{\pi^2 T_0 f^2}$$

Wir suchen nun $\mathcal{F}\left\{\frac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 f_0 t^2}\right\}(f)$, was wir jedoch nicht in der Formelsammlung finden können.

Da aber $\hat{x}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ x(-f)$ gilt, können wir die gewünschte Transformation wie folgt berechnen:

Planscherelsche Identität und Parsevalsche Beziehung

Die beiden Beziehungen, um welche es in diesem Abschnitt geht, gehören meiner Meinung (und der Meinung vieler Mathematiker) nach, zu den wichtigsten und schönsten Eigenschaften der Fouriertransformation:

Plancherelsche Identität:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{y}^*(f) \mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

Parsevalsche Beziehung:

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2 \mathrm{d}f = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = ||\hat{x}||^2$$

Parsevalsche Beziehung

Wenn wir zuerst die **Parsevalsche Beziehung** betrachten, können wir aus $||x||^2 = ||\hat{x}||^2$ schliessen, dass die Fouriertransformation eine Isometrie bezüglich der L^2-Norm, also eine längenerhaltende bijektive Transformation ist.

Man kann die Parsevalsche Beziehung sehr gut für die Berechnung der **Energie eines Signales** verwenden.

Plancherelsche Identität

Wenden wir uns nun der **Plancherelschen Identität** für Fouriertransformationen zu:

Theorem: Wenn $x, y \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt $\langle x, y \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$

Somit ist die Fouriertransformation nicht nur längenerhaltend, sondern auch winkelerhaltend.

Beweis:

Wenn wir nun in der Plancherelschen Identität $y = x$ wählen, so folgt daraus direkt die Parsevalsche Beziehung.

Aufgabe 66

Von einem Signal $x(t)$ ist die Fouriertransformierte gegeben als

$$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Energie des Signals $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$ gegeben durch

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Sommer 2020 4.a)

⋆ (a) (14 Punkte) Es sei $T \in \mathbb{R}_+,\ a \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \cos(2\pi t) + a \sin(2\pi t), \quad t \in \mathbb{R},$$

das gemäss

$$y(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

abgetastet wird.

i. (4 Punkte) Berechnen Sie das Spektrum $\hat{x}(f)$ des Signals $x(t)$.
ii. (4 Punkte) Berechnen Sie das Spektrum $\hat{y}(f)$ des Signals $y(t)$.
iii. (6 Punkte) Kann der Parameter a für $T = 1$ eindeutig aus $y(t)$ bestimmt werden? *Hinweis: Betrachten Sie* $\hat{y}$.