SST1 Übungsstunde 7

Matteo Dietz

November 2024

Themenüberblick

- **Spezielle Eingangssignale von LTI-Systemen**:
  Repetition: Fourierreihen
  Plancherel und Parseval für periodische Signale

- **Anwendungen der FT auf LTI-Systeme**:
  Ideale Tiefpassfilter
  Bandbegrenzte Signale

Aufgaben für diese Woche

67, **68**, 69, **70**, 71, **72**, 73, 74, 75, **76**, **77**

69-74 waren schon letze Woche dabei.

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Repetition: Fourierreihen

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}, \quad \text{wobei} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} \mathrm{d}t$$

$x(t)$ wird gemäss Nr. 21 fouriertransformiert zu:

$$(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Fourierreihen: Eigenschaften

(i) Fourierreihen existieren nur für periodische Signale.

(ii) Periodische Signale haben immer ein "diskretes" Frequenzspektrum.

(iii) c_k sind die komplexen Koeffizienten und beschreiben das Signal im Frequenzbereich.

Periodische Signale an LTI-Systemen

- Eingangssignal: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$
- Dank Linearität, Stetigkeit und weil $\left(He^{2\pi i f_0 \cdot}\right)(t) = \hat{h}(f_0)e^{2\pi i f_0 t}$

$$\implies y(t) = (Hx)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right)}_{d_k} e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$$

- Das Ausgangssignal auf ein $T-$periodisches Eingangssignal ist auch $T-$periodisch.

Poissonsche Summenformel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$$

- **Beispiel**:

Plancherel und Parseval für $T-$periodische Signale

Es seien $x, y \in L^2([0, T])$ $T-$periodisch. Dann gilt:

Plancherelsche Identität für periodische Signale

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x \left(c_k^y\right)^*$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale

$$||x||^2_{L^2([0,T])} = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Parseval: Bemerkungen

- Wir betrachten hier den Fall $T = 1$.
- Die Parsevalsche Beziehung sagt zwei Dinge aus:
  1. Die L^2-Norm der Funktion ("Energie") kann statt aus einem Integral aus einer Summe (der Fourier-Koeffizienten im Betragsquadrat) berechnet werden.
  2. Die Fourierkoeffizenten klingen für $L^2([0,1])$ schneller als $\frac{1}{n}$ ab.

Parseval: Bemerkungen

- Wir leiten $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt}$ nach t ab:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi ik \underbrace{\cdot c_k \cdot}_{\hat{x}(k)} e^{2\pi ikt}$$

$\Longrightarrow$ für die Fourier-Koeffizienten der Ableitung von $x(t)$ gilt: $\hat{x}'(k) = 2\pi ik\hat{x}(k)$ und somit:

$$\widehat{x^{(n)}}(k) = (2\pi ik)^n \underbrace{\hat{x}(k)}_{c_k} \quad \text{und} \quad ||x^{(n)}||_{L^2}^2 = (2\pi)^{2n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2n} |\underbrace{\hat{x}(k)}_{c_k}|^2,$$

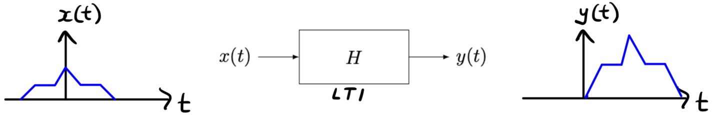
Parseval: Bemerkungen

- Direkte Verbindung zwischen Glattheit eines Signals und dem Abfall seiner Fourier-Koeffizienten:
- Je glatter das Signal, desto schneller ist der Abfall seiner Fourier-Koeffizienten, also desto schneller ist die Konvergenz der Fourierreihe.
- **Anwendung**: Sehr gute numerische Approximation von glatten Funktionen mittels kurzen Fourier-Summen. Unglatte Funktionen brauchen längere Fourier-Summen.

Aufgaben

- **Prüfungsaufgabe: Frühjahr 2024, Aufgabe 1.a) iii, iv und 1.d)i, ii**

Anwendung der FT auf LTI-Systeme



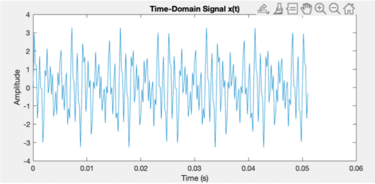
Def: Ein **verzerrungsfreies** System hat folgende Eigenschaften:

1. Input und Output haben die gleiche Form, d.h.

$$y(t) = kx(t-t_0) \;\overset{2.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet}\; \hat{y}(f) = \underbrace{ke^{-2\pi i f t_0}}_{=\hat{h}(f)}\hat{x}(f)$$

2. $\hat{h}(f) = |\hat{h}(f)|e^{i\varphi(f)} = ke^{i(-2\pi f t_0)} \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; h(t) = k\delta(t-t_0)$
3. Das System ist linear, stabil, kausal und zeitinvariant

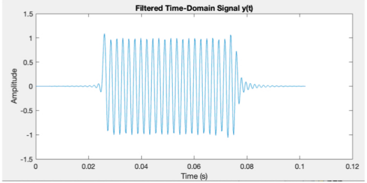
Tiefpassfilter: Beispiel



$$(x*h)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \hat{x}(f)\cdot\hat{h}(f)$$

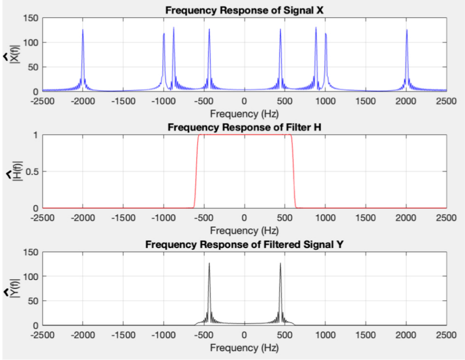
$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

(Hamming Window based Lowpass Filter)

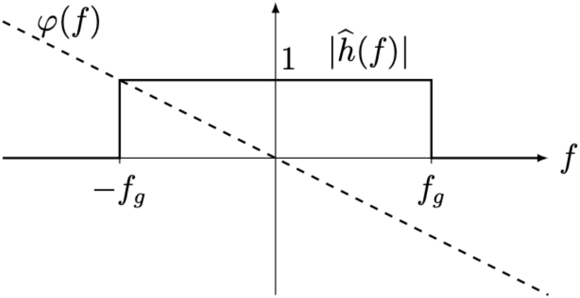


$$x(t) = \sum_{f\in F} \sin(2\pi t f / F_s)$$

$$F = \{440, 880, 1000, 2000\}$$



Idealisierte Tiefpassfilter



$$\hat{h}(f) = |\hat{h}(f)| e^{i\varphi(f)}, \quad \text{wobei} \quad |\hat{h}(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \varphi(f) = -2\pi f t_0$$

Idealisierte Tiefpassfilter

- $e^{i\varphi(f)}$ entspricht einer Zeitverzögerung von t_0.

- Wir schreiben $h(t) = \underbrace{\left|\hat{h}(f)\right|}_{=:\hat{h}_{id}(f)} e^{-2\pi i f t_0} \overset{2.}{\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ} h_{id}(t - t_0)$

- $h_{id}(t) = \dfrac{\sin(2\pi f_g t)}{\pi t} \overset{27.}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \hat{h}_{id}(f) = \begin{cases} 1, |f| \le f_g \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

- $\implies h(t) = h_{id}(t - t_0) = \dfrac{\sin(2\pi f_g (t - t_0))}{\pi (t - t_0)}$

Idealisierte Tiefpassfilter: Bemerkungen

1. Da $h(t) = 0 \; \forall t < 0$ **nicht gilt**, ist das ideale Tiefpassfilter **nicht kausal**.

2. Es gilt **nicht**, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \mathrm{d}t < \infty$.
   $\implies$ ideales Tiefpassfilter ist **nicht BIBO-stabil**.
   Grund: Riemann-Lebesgue Lemma

1.&2. $\implies$ Ideale Tiefpassfilter sind **nicht realisierbar** in der Praxis. Wir müssen das Filter kausal und BIBO-stabil machen!

Tiefpassfilter: Kausalisierung

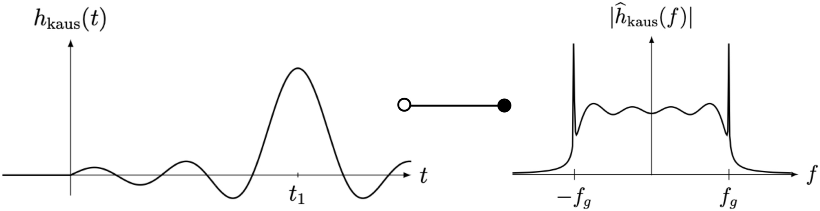
- Wir wollen Kausalität: $h(t) = 0 \; \forall t < 0$

- Im Zeitbereich: $h_{id}(t) = \dfrac{\sin(2\pi f_g t)}{\pi t}$

- Wir verschieben $h_{id}(t)$ um t_1, multiplizieren mit $\sigma(t)$ und erhalten $h(t) = 0 \; \forall t < 0$.

- Somit $h_{kaus}(t) = h_{id}(t - t_1)\sigma(t)$

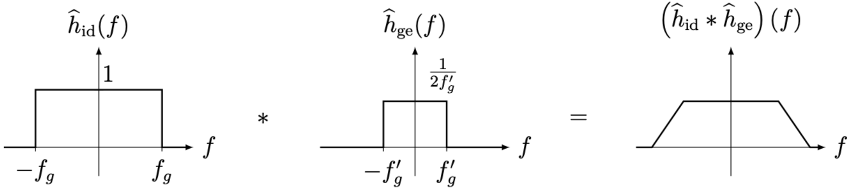
Tiefpassfilter: Kausalisierung



- Die dazugehörige Fouriertransformation $\hat{h}_{kaus}(f)$ verstärkt die Frequenzen bei $\pm f_g$ deutlich.
- $\implies$ h_{kaus} ist kein gutes Filter.

Tiefpassfilter: Stabilisierung

- Wir wollen $h(t)$ absolut integrierbar. Wir falten $(\hat{h}_{id} * \hat{h}_{ge})(f)$

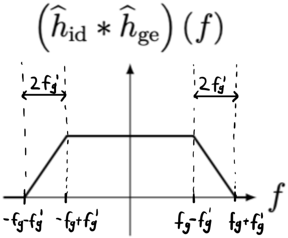


- Wir erhalten:

$$(\hat{h}_{id} * \hat{h}_{ge})(f) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; h_{id}(t)h_{ge}(t) \propto \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2} \in L^1$$

Tiefpassfilter: Stabilisierung

- Das resultierende Tiefpassfilter ist BIBO-stabil und sieht im Frequenzbereich aus wie folgt:



- Da dieses Filter nicht perfekt ist in den Bereichen $|f \pm f_g| \in [-f_g', f_g']$, versucht man f_g' so klein wie möglich zu wählen.

Bandbegrenzte Signale

- **Def**: Die **Bandbreite** des Signals x ist das kleinste W, so dass

$$(x * h_{\mathrm{TP},W})(t) = x(t), \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \text{ wobei}$$

$$h_{\mathrm{TP},W}(t) = \sin(2\pi W t)/(\pi t).$$

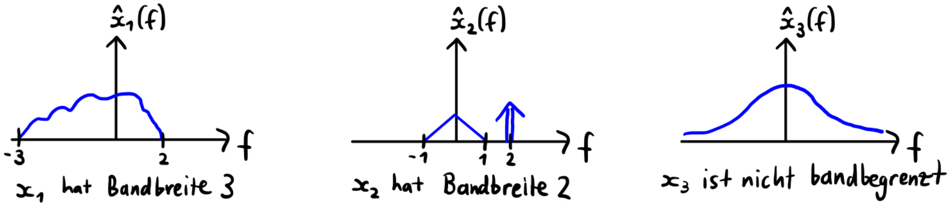
- Im Frequenzbereich bedeutet das

$$\hat{x}(f)\hat{h}_{\mathrm{TP},W}(f) = \hat{x}(f), \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}, \text{ und}$$

$$\hat{h}_{\mathrm{TP},W}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bandbreite

- **Intuitiv**: Die Bandbreite ist die betragsweise höchste Frequenz (positiv oder negativ), die in einem Signal enthalten ist.



Bandbreite: Bemerkungen

- Seien x_1, x_2 zwei Signale mit Bandbreite W_1 resp. W_2

  (i) $x_1(t) + x_2(t)$ hat Bandbreite $\max\{W_1, W_2\}$

  (ii) $(x_1 * x_2)(t)$ hat Bandbreite $\min\{W_1, W_2\}$

  (iii) $x_1(t)x_2(t)$ hat Bandbreite $\leq W_1 + W_2$

Bernstein'sche Ungleichung

Thm: Wenn $x(t)$ in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$x(t) = \int_{-W}^{W} g(f) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f, \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

wobei g eine absolut integrierbare Funktion ist, d.h. $g \in L^1$, dann:

$$\left| \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \right| \leq 4\pi W \sup_{\tau \in \mathbb{R}} |x(t)|, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bernstein'sche Ungleichung

- Dieses Kriterium liefert uns eine Abschätzung für die Ableitung von $x(t)$.
- Kleine Bandbreite $W \implies$ nur tiefe Frequenzen sind im Signal enthalten $\implies x(t)$ kann sich nur "langsam" ändern.

Aufgabe 68