Übungsstunde 12

Themenüberblick

- **Diskrete Fouriertransformation (DFT)**

  Kurze Repetition

  Diskrete Filter, Überabtastung, Unterabtastung

- **Fast Fourier Transform (FFT)**

  Cooley-Tukey FFT

- **Tipps für die Prüfung**

Aufgaben für diese Woche

123, **124**, **125**, **126**, **127**, **128**, **129**, **130**, **131**

Die meisten Übungen überschneiden sich mit letzter Woche.

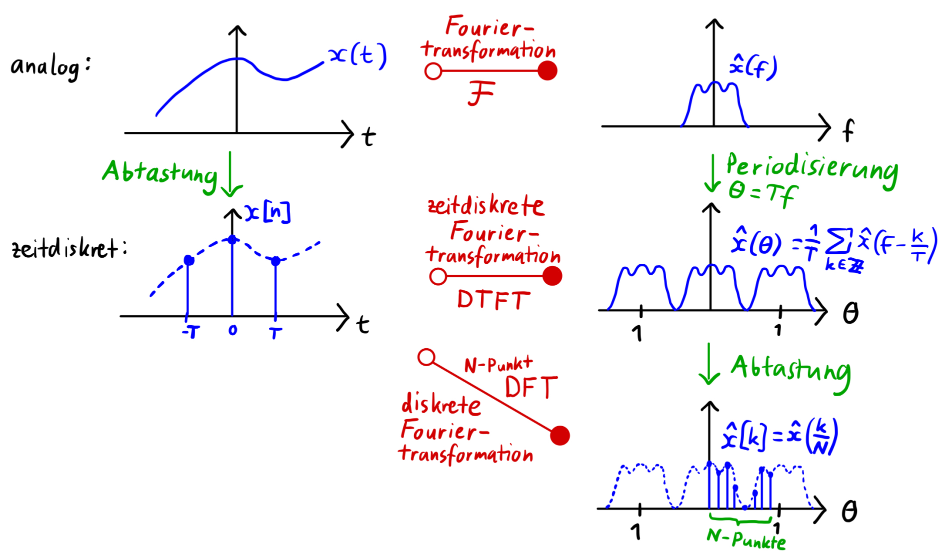
Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

Die DFT ist sehr wichtig! Es kommt immer eine ganze Aufgabe dazu an der Prüfung. (25 / 100P)

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

(DFT)	$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}$	$\hat{x}[k+N] = \hat{x}[k]$
(IDFT)	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\omega_N^{-kn}$	$x[n+N] = x[n]$
wobei	$\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$	

Visualisierung der verschiedenen Fouriertransformationen



Matrixdarstellung

Wir haben $\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}$, $\quad k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ N-1\}$ Somit:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \\ \hat{x}[2] \\ \vdots \\ \hat{x}[N-1] \end{bmatrix}}_{=:\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\text{DFT-Matrix } F_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Somit erhalten wir:

DFT

$\hat{\mathbf{x}} = F_N \mathbf{x}$

IDFT

$\mathbf{x} = \frac{1}{N} F_N^H \hat{\mathbf{x}}$

Die Spalten von F_N sind orthogonal aufeinander. Sei $\mathbf{f}_i$ die $i-$te Spalte von F_N. Es gilt $\langle \mathbf{f}_r,\ \mathbf{f}_s \rangle = \delta_{r,s}$

Es gilt $F_N F_N^H = N I_N$, wobei I_N die Identitätsmatrix der Dimension N ist.

Zyklische Faltung

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[l-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[l-n] x_2[n]$$

DFT

$$\hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k] \cdot \hat{x}_2[k]$$

In Matrixform sieht die zyklische Faltung wie folgt aus:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_3[0] \\ x_3[1] \\ \vdots \\ x_3[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[N-1] & \cdots & x_2[1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1}$$

Die zyklische Faltung wird durch die DFT-Matrix diagonalisiert:

$$\mathbf{X}_2 = \frac{1}{N} \mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N$$

Diskrete Filter

Wir haben gesehen, dass die DFT eines zeitdiskreten Signals der Länge N einer Abtastung von $\hat{x}(\theta)$ entspricht, wobei die Abtastfrequenz $\frac{1}{N}$ ist.

$$\hat{x}[k] = \hat{x}(\theta)\big|_{\theta=\frac{k}{N}}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Das entspricht der kritischen Abtastung ($N \times N$ Matrix). Was passiert, wenn wir nicht mit Frequenz $\frac{1}{N}$ sondern mit $\frac{1}{M}$, wobei $M > N$ (Überabtastung) oder $M < N$ (Unterabtastung) sein kann.

Die DFT-Formel sieht in diesen Fällen wie folgt aus:

$$\hat{x}\left(\frac{k}{M}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k \frac{n}{M}}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1$$

In Matrixform sieht das wie folgt aus:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_M & \omega_M^2 & \cdots & \omega_M^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \cdots & \omega_M^{(N-1)(M-1)} \end{bmatrix}}_{\text{Matrix } F} \mathbf{x} \qquad \omega_M = e^{-\frac{2\pi i}{M}}$$

Überabtastung ($M > N$)

- $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ (Länge N) und $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ (Länge M)
- $F_o \in \mathbb{C}^{M\times N}$, ($M > N$) hat mehr Zeilen als Spalten. Das Subscript o steht für oversampling.
- Aus $\hat{\mathbf{x}}$ (DFT-Vektor) können wir mithilfe einer Pseudoinversen $\mathbf{x}$ zurückgewinnen. Es gibt jedoch unendlich viele solche Inversen. (z.B. Moore-Penrose Pseudo-Inverse)
- Für die Rücktransformation gilt: $\mathbf{x} = \dfrac{1}{M} F_o^H \hat{\mathbf{x}}$, was folgendem Ausdruck entspricht:

$$x[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}[k] \omega_M^{-kn}, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Unterabtastung ($M < N$)

- $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ (Länge N) und $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ (Länge M)
- $F_u \in \mathbb{C}^{M\times N}$, ($M > N$) hat mehr Spalten als Zeilen. Das Subscript u steht für undersampling.
- Das Gleichungssystem $\hat{\mathbf{x}} = F_u \mathbf{x}$ ist unterbestimmt, i.e. wir haben M Gleichungen und N Unbekannte, wobei $M < N$.

  $\implies$ $\mathbf{x}$ kann nicht aus $\mathbf{x}$ zurückgewonnen werden.

Fast Fourier Transform (FFT)

Die FFT ist ein Algorithmus, welcher die DFT effizient berechnet. Konkret braucht eine $N-$Punkt DFT $\mathcal{O}(N^2)$ Operationen. Für eine $N-$Punkt DFT mit $N = 2^n,\ n \in \mathbb{N}$ kann der Rechenaufwand mittels FFT auf $4N\log_2(N)$, also auf $\mathcal{O}(N\log(N))$ reduziert werden.

DFT ist in $\mathcal{O}(N^2)$	**FFT** ist in $\mathcal{O}(N\log(N))$

Die DFT ist gegeben durch

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Idee: Wir zerlegen die $N-$Punkt DFT in zwei $\frac{N}{2}-$Punkt DFTs (geraden und ungeraden Anteil) und führen diesen Schritt rekursiv so lange durch, bis wir nur noch $2-$Punkt DFTs haben. Dafür nehmen wir an, dass unser Signal Länge $N = 2^n,\ n \in \mathbb{N}$ hat.

figure Rekursionsbaum

Am Ende haben wir nur noch $2-$Punkte DFTs:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} \hat{x}_r[0] &= x_r[0] + x_r[1] \\ \hat{x}_r[1] &= x_r[0] - x_r[1] \end{aligned}$$

FFT-Algorithmus von Cooley-Tukey

Wir versuchen die $N-$Punkt DFT als zwei $\frac{N}{2}-$Punkt DFTs (geraden und ungeraden Anteil) zu schreiben. (Annahme: N gerade, s.d. $\frac{N}{2} \in \mathbb{N}$ ist):

$$\begin{aligned}
\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} &= \sum_{n \text{ even}} x[n]\omega_N^{kn} + \sum_{n \text{ odd}} x[n]\omega_N^{kn} \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l]\omega_N^{k\cdot 2l} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l+1]\omega_N^{k(2l+1)} \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l]\left(\omega_N^2\right)^{kl} + \omega_N^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l+1]\left(\omega_N^2\right)^{kl}
\end{aligned}$$

Kunstgriff: $\omega_N^2 = e^{-\frac{4\pi i}{N}} = e^{-\frac{2\pi i}{(N/2)}} = \omega_{\frac{N}{2}}$

$$\implies \underbrace{\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l]\omega_{\frac{N}{2}}^{kl}}_{=:\hat{g}[k]} + \omega_N^k \underbrace{\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2l+1]\omega_{\frac{N}{2}}^{kl}}_{=:\hat{u}[k]}$$

Es folgt $\hat{x}[k] = \hat{g}[k] + \omega_N^k \hat{u}[k], \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$ wobei $\hat{g}[k]$ und $\hat{u}[k]$ $\frac{N}{2}$−Punkt DFTs sind, d.h.

$$\hat{g}[k] = \hat{g}\left[k + \frac{N}{2}\right] \qquad \hat{u}[k] = \hat{u}\left[k + \frac{N}{2}\right]$$

Prüfungsaufgabe: Sommer 2021, Aufgabe 3

★ (a) (5 Punkte) Gegeben seien N-Punkt Signale $x[n]$ und $y[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, mit den N-Punkt DFTs $\hat{x}[k]$ und $\hat{y}[k]$. Ist es möglich, dass für $x[n] \neq y[n]$, die DFTs $\hat{x}[k] = \hat{y}[k]$, für alle $k = 0, 1, \ldots, N-1$, erfüllen? Wenn ja, geben Sie ein entsprechendes Beispiel an. Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

★ (b) (6 Punkte) Bestimmen Sie, ob die 11-Punkt DFT der folgenden Signale reellwertig oder komplexwertig ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Sie müssen die DFTs der Signale dazu nicht explizit berechnen. Es reicht über Eigenschaften der Signale zu argumentieren.

$$x_1 = [2, 1, 3, 4, 0, 0, 2, 2, 4, 3, 1]$$
$$x_2 = [2, 2, 3, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 3, 2]$$
$$x_3 = [5, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 5]$$

★ (c) (9 Punkte) Berechnen Sie explizit die 4-Punkt DFT der folgenden Signale:

$$y_1 = [2, 0, 1, 0]$$
$$y_2 = [0, 2, 0, 1]$$
$$y_3 = [2, 0, -1, 0]$$

★ (d) (5 Punkte) Bestimmen Sie die 8-Punkt DFT des Signals $x[n] = 2 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

Prüfungsinformationen

- Die Prüfung dauert 180 min (3 Stunden).
- Es gibt 4 Aufgaben, die je 25 Punkte geben. (ca. 45 min pro Aufgabe)
- Einziges Hilfsmittel ist die Formelsammlung.

Kontur der Prüfung

1. Analoge Signale und Systeme, Systemeigenschaften
2. Abtasttheorem (Mischung analoge und zeitdiskrete Signale)
3. Zeitdiskrete Signale (entweder DTFT oder $\mathcal{Z}-$Transformation)
4. DFT

Tipps für die Prüfung

- Es gibt 20 alte Prüfungen. Löst möglichst viele davon, auch zweimal, wenn nötig!
- Die neueren Prüfungen sind relevanter und entsprechen in ihrer Kontur mehr derjenigen Prüfung, die ihr schreiben werdet.
- Nur 4 alte Prüfungen enthalten Aufgaben zu der $\mathcal{Z}-$Transformation. (Die letzten vier, das Thema ist also sehr prüfungsrelevant.) Schaut euch also die Aufgaben 114-122 dazu nochmals an.
- Schaut, dass ihr die Konzepte wie z.B. das Abtasttheorem gut versteht. Man kann in SST1 nämlich nicht einfach nur Aufgabentypen auswendig lernen, um die Prüfung zu bestehen.
- Substitutionen in Integralen und Summen müssen sitzen! Es werden zwar bei Rechenfehlern Teilpunkte gegeben, aber ihr verliert trotzdem einige Punkte wollt ihr nicht vergeben.
- Vegesst nicht eure Lösungswege zu begründen, Achsenbeschriftungen bei Skizzen etc.
- Falls ihr Teilaufgaben nicht schafft, könnt ihr, wenn ihr übrige Zeit habt, trotzdem weiterrechnen (z.B. mit Parametern), vielleicht bekommt ihr dafür einige Punkte.