



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Fisica “Enrico Fermi”

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Dal continuous-time random walk
all’equazione di Fokker-Planck
frazionaria

Seminario di Sistemi Complessi

Matteo Di Sante

26 Settembre 2025

ÍNDICE

INDICE

Capitolo I - Introduzione al CTRW e brevi cenni di calcolo frazionario

- A. Introduzione al Continuous Time Random Walk (CTRW)
- B. Cenni di calcolo frazionario
- C. Casi particolari del CTRW

Capitolo II - Il limite diffusivo del CTRW e l'equazione di diffusione frazionaria nel tempo e nello spazio (FDE)

- A. Il limite diffusivo del CTRW disaccoppiato
- B. Equazione diffusiva frazionaria nello spazio e nel tempo (FDE)
- C. Simulazioni Monte Carlo del CTRW

Capitolo III - l'equazione di Fokker-Planck frazionaria (FPPE)

- A. Derivazione della FFPE a partire dalla Master Equation Generalizzata (GME)
- B. Time-FFPE: una soluzione analitica tramite l'espansione in autofunzioni
- C. Una soluzione della T-FFPE passando per l'equazione di Schrödinger
- D. Una mappa tra la soluzione diffusiva e la soluzione sub-diffusiva per la T-FFPE

Capitolo IV - Il processo di Ornstein-Uhlenbeck frazionario nel tempo

- A. Soluzione analitica
- B. Soluzione con integrazione numerica della mappa

CAPITOLO I

INTRODUZIONE AL CTRW

E

BREVI CENNI DI CALCOLO FRAZIONARIO

Introduzione al Continuous Time Random Walk (CTRW)



Riferimenti principali:

1. Uncoupled continuous-time random walks: Solution and limiting behavior of the master equation.
E Scalas, R Gorenflo, F Mainardi - Physical Review E, 2004
2. The random walk guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach.
R.Metzler, J.Klafter - Physics Reports 339 (2000) 1-77

Per Continuous time random walks (CTRW) si intende un *point process with reward* (o *Compound Renewal Process*) [\[A.1\]](#).

Il CTRW (1D) è un processo costituito da due componenti:

1. Point process: sequenza di i.i.d. V.A. positive $\{\tau_i\}$ (tempi di attesa).

L'istante dell'n-esimo salto è $t_n = t_0 + \sum_{i=1}^n \tau_i$ con $t_0 = 0$.

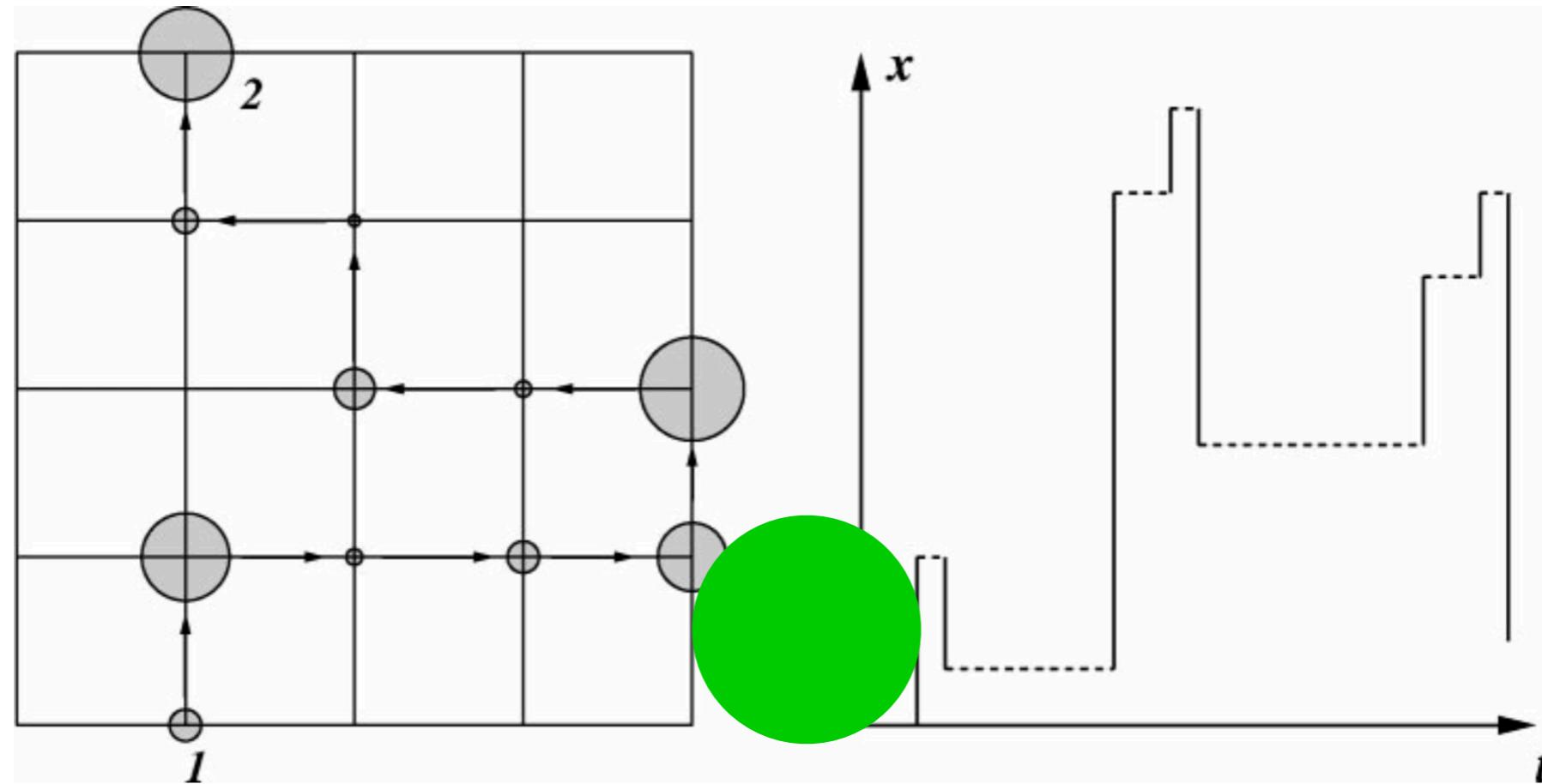
2. Rewards: R.V.s i.i.d., non necessariamente positive $\{\xi_i\}$ (lunghezza dei salti da un punto al successivo)

La posizione di un camminatore con $x(t)$ e $N(t) = \max\{n : t_n \leq t\}$ è data da

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i.$$

- Una realizzazione del processo è data da una funzione costante a tratti, ovvero una successione di gradini di diversa alzata (ξ_i) e pedata (τ_i)

N.B. Si sta supponendo che i salti avvengano “istantaneamente” \Rightarrow Il CTRW è adatto alla descrizione di quei fenomeni in cui il tempo di permanenza nei siti è molto maggiore del tempo necessario per compiere il salto: $\forall i \Delta t_{\text{salto-i}} \ll \tau_i$



Reticolo 2D (sinistra)

- I cerchi rappresentano i "siti" di sosta.
- Il diametro del cerchio è proporzionale al tempo di attesa speso in quel sito prima del salto successivo.
- Le lunghezze dei salti rimangono equidistanti in questo esempio.

Diagramma spazio-tempo (destra)

- Rappresentazione 1D dell'evoluzione (x, t) .
- Sia la lunghezza del salto che il tempo di attesa sono variabili casuali derivate da densità di probabilità.

- Generalmente τ_i, ξ_i non sono indipendenti \Rightarrow pdf congiunta $\varphi(\xi, \tau)$
- $\varphi(\xi, \tau)d\xi d\tau$ è la probabilità di fare un salto con:
 - 1)lunghezza nell'intervallo $(\xi, \xi + d\xi)$;
 - 2)un tempo di attesa nel sito di partenza nell'intervallo $(\tau, \tau + d\tau)$.

Def: $\mathbb{P}(X \in [x, x + dx], T \in [t, t + dt]) = p(x, t)dxdt$ è la probabilità di trovare il camminatore in $[x, x + dx]$ al tempo $[t, t + dt]$ data la condizione iniziale $x(t_0 = 0) = 0$.

$p(x, t)$ è legata con $\varphi(\xi, \tau)$ e con la condizione iniziale $x(t_0 = 0) = 0 \leftrightarrow p(x, 0) = \delta(x)$ dalla seguente equazione integrale:

$$p(x, t) = \delta(x)\Psi(t) + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \varphi(x - x', t - t') p(x', t')$$

N.B. $\Psi(\tau)$ è detta probabilità di sopravvivenza, ed è legata alla pdf marginale del tempo di attesa $\phi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \tau)d\xi$ dalla relazione $\Psi(\tau) = 1 - \int_0^\tau \phi(\tau')d\tau' = \int_\tau^\infty \phi(\tau')d\tau'$

Soluzione formale dell'equazione integrale per $p(x, t)$


$$p(x, t) = \delta(x)\Psi(t) + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \varphi(x - x', t - t') p(x', t')$$

La soluzione si ottiene nel dominio di Laplace-Fourier.

1. Applicazione di \mathcal{F} $[\hat{f}](k) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} dx$ ad ambo i membri di 

$$\hat{p}(k, t) = \Psi(t) + \int_0^t dt' \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \varphi(x - x', t - t') p(x', t') \right]$$

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \varphi(x - x', t - t') p(x', t') \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dx' e^{ik(x-x')} e^{ikx'} \varphi(x - x', t - t') p(x', t')$$

Cambio variabile: $x = y + z$, $x' = z \Rightarrow |J| = 1 \Rightarrow dx dx' = dy dz$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy dz e^{iky} e^{ikz} \varphi(y, t - t') p(z, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{iky} \varphi(y, t - t') \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{ikz} p(z, t') = \hat{\varphi}(k, t - t') \hat{p}(k, t')$$

Dunque l'applicazione di \mathcal{F} porta alla seguente scrittura:

$$\hat{p}(k, t) = \Psi(t) + \int_0^t dt' \hat{\varphi}(k, t - t') \hat{p}(k, t')$$

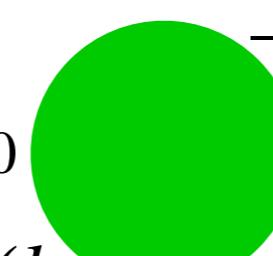


2) Applicazione di $\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ ad ambo i membri di



Riconoscendo in $\int_0^t dt' \hat{\varphi}(k, t - t') \hat{p}(k, t')$ la convoluzione $(\hat{p} \star \hat{\varphi})(t)$, si ottiene:

$$\tilde{\hat{p}}(k, s) = \tilde{\Psi}(s) + \tilde{\hat{p}}(k, s) \tilde{\hat{\varphi}}(k, s)$$



Equazione fondamentale del CTRW

$$\tilde{\hat{p}}(k, s) = \tilde{\Psi}(s) \frac{1}{1 - \tilde{\hat{\varphi}}(k, s)}$$

Riprendendo $\tilde{p}(k, s) = \tilde{\Psi}(s) \frac{1}{1 - \tilde{\phi}(k, s)}$

E ricordando che $\Psi(t) = \int_t^\infty \phi(\tau) d\tau = 1 - \int_0^t \phi(\tau) d\tau$ si ha $\tilde{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{\tilde{\phi}(s)}{s}$

L'ultimo passaggio è giustificato dalla proprietà di \mathcal{L} sulla convoluzione tra $\phi(\tau)$

e la funzione di Heaviside $u(t)$: $\mathcal{L} \left[\int_0^\infty u(\tau) \phi(\tau) d\tau \right] = \mathcal{L}[(\phi \star u)(t)](s) = \frac{1}{s} \tilde{\phi}(s)$

$$\tilde{p}(k, s) = \tilde{\Psi}(s) \frac{1}{1 - \tilde{\phi}(k, s)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}(k, s) = \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\phi}(k, s)}$$

N.B. Per ottenere la soluzione $p(x, t)$ è necessario invertire la trasformata di Laplace-Fourier $\tilde{p}(k, s)$.

→ Nel seguito verrà ricavata una soluzione analitica ipotizzando $\varphi(\xi, \tau) = \lambda(\xi)\phi(\tau)$ e per due diversi casi (particolari) di $\phi(\tau)$

Caso disaccoppiato $\varphi(\xi, \tau) = \lambda(\xi)\phi(\tau)$

$$|\tilde{\phi}(s)|, |\hat{\lambda}(k)| < 1 \text{ per } s, k \neq 1$$

$$p(x, t) = \delta(x)\Psi(t) + \int_0^t dt' \varphi(t - t') \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \lambda(x - x') p(x', t'). \quad (\text{M.E. integrale})$$

$$\tilde{p}(k, s) = \tilde{\Psi}(s) \frac{1}{1 - \tilde{\phi}(k, s)} \longrightarrow \tilde{p}(k, s) = \tilde{\Psi}(s) \frac{1}{1 - \tilde{\phi}(s)\hat{\lambda}(k)} = \tilde{\Psi}(s) \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\phi}(s)\hat{\lambda}(k)]^n$$

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[(\tilde{\phi})^n](t) \cdot \mathcal{F}^{-1}[(\hat{\lambda})^n](x)$$

Analisi di $\mathcal{F}^{-1}[(\hat{\lambda})^n](x)$

Osservazione: $[\hat{\lambda}(k)]^n$ è la trasformata di Fourier della pdf del singolo salto, $\lambda(x)$, convoluta con se stessa n volte: $\mathcal{F}[\lambda_n](k) = [\hat{\lambda}(k)]^n$ (teorema di convoluzione)

$$\text{con } \lambda_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{n-1} d\xi_{n-2} \dots d\xi_1 \lambda(x - \xi_{n-1}) \lambda(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) \dots \lambda(\xi_1)$$

Dunque vale $\mathcal{F}^{-1}[(\hat{\lambda})^n] = \lambda_n(x)$

N.B. $\lambda_n(x)$ è la pdf dello spostamento totale compiuto in n-salti (per ξ_i i.i.d)

Analisi di $\mathcal{L}^{-1}[\tilde{\Psi} \cdot (\tilde{\phi})^n](t)$

Con un'idea analoga a quanto visto poc'anzi si può definire:

$$\phi_n(\tau) = \int_0^\tau \int_0^{\tau_{n-1}} \dots \int_0^{\tau_1} d\tau_{n-1} d\tau_{n-2} \dots d\tau_1 \phi(t - \tau_{n-1}) \phi(\tau_{n-1} - \tau_{n-2}) \dots \phi(\tau_1)$$

Così come per $\lambda_n(x)$, $\phi_n(t)$ è $\phi(\tau)$ convoluta con se stessa n volte: $\mathcal{L}[\phi_n] = (\tilde{\phi}(s))^n$
 $\phi_n(t)$ è la pdf che l' n -esimo salto avvenga all'istante t (nel caso di τ_i i.i.d)

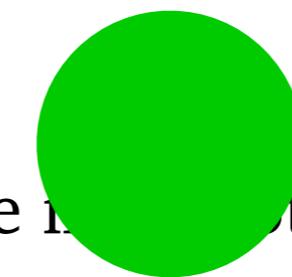
Osservazione: la pdf che fino all'istante t siano fatti n salti, $p(n, t)$, si può scrivere

come: $p(n, t) = \int_0^t \phi_n(t - \tau) \Psi(\tau) d\tau$

- τ è l'intervallo di tempo che intercorre tra t e l'istante dell' n -esimo salto $t - \tau$
- $\phi_n(t - \tau)$ è la pdf di compiere l' n -esimo salto nell'istante $t - \tau$
- $\Psi(\tau)$ è la probabilità di non saltare nell'intervallo di tempo τ

Dato che $p(n, t)$ è una convoluzione vale $\mathcal{L}[p(n, t)](n, s) = \tilde{\phi}_n(s) \tilde{\Psi}(s) = \tilde{\Psi}(s) (\tilde{\phi}(s))^n$
 $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\Psi} \cdot (\tilde{\phi})^n](t) = p(n, t)$

- $p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\Psi} \cdot (\tilde{\phi})^n](t) \mathcal{F}^{-1}[(\hat{\lambda})^n](x)$
 - $\mathcal{L}^{-1}[\tilde{\Psi} \cdot (\tilde{\phi})^n](t) = p(n, t)$
 - $\mathcal{F}^{-1}[(\hat{\lambda})^n] = \lambda_n(x)$
- $p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, t) \lambda_n(x)$



Osservazione: la $p(x, t)$ è scritta come la somma di n per tutti gli n di:

- La pdf che fino all'istante t siano stati compiuti n salti: $p(n, t)$
- La pdf dello spostamento totale compiuto con n salti: $\lambda_n(x)$

→ $p(x, t)$ può essere anche vista come una media pesata di $\lambda_n(x)$, con pesi le probabilità che all'istante t siano avvenuti n salti.

→ $p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, t) \lambda_n(x)$ descrive un jump process $(\{\xi_i\} \leftrightarrow \lambda_n(x))$ subordinato a un renewal process $(\{\tau_i\} \leftrightarrow p(n, t))$.

Cenni di calcolo frazionario

Riferimenti principali:

- 1) Fractional Calculus - Models and Numerical Methods, II edition. CNC Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos - Vol. 5. World Scientific
D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo
- 2) Fractional Equations and Models, T. Sandev & Z. Tomovski - Springer

Perchè il calcolo frazionario?

- **Obiettivo:** introdurre alcune definizioni e proprietà base del calcolo frazionario, utili nel contesto del CTRW e della diffusione frazionaria.

► Il limite della derivata classica

La derivata ordinaria $\frac{d}{dt}$ è un operatore locale: descrive il cambiamento istantaneo e non tiene conto del passato.

Molti fenomeni reali mostrano effetti **memoria e non-località**

Idea chiave: L'operatore frazionario (integrale o derivata di ordine non intero) è intrinsecamente **non-locale**: per calcolare la derivata frazionaria in un punto è necessario integrare su tutto l'intervallo precedente.

- La non località rende il calcolo frazionario lo strumento ideale per descrivere la diffusione anomala.

N.B. Si suppone sufficiente regolarità della funzione integranda tale da rendere applicabili gli operatori di integrale e derivata.

Integrale frazionario (sinistro) di Riemann-Liouville

$${}_{RL}I_{a+}^{\alpha}[f(t)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a; \alpha > 0)$$

Derivata frazionaria (sinistra) di Riemann-Liouville

$${}_{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} I_{a+}^{n-\alpha} f(x) \quad (x > a)$$

con $n = -[-\alpha] = \begin{cases} [\alpha] + 1 & \text{for } \alpha \notin \mathbb{N}_0 \\ \alpha & \text{for } \alpha \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$ e $[.]$ che denota la parte intera

- Per $\alpha = n \in \mathbb{N}_0 \rightarrow ({}_{RL}D_{a+}^0 f)(x) = f(x), ({}_{RL}D_{a+}^n f)(x) = f^{(n)}(x)$

→ I casi particolari in cui $a = 0$ sono spesso utilizzati in letteratura, perché in questo caso tali operatori frazionari hanno una trasformata di Laplace semplice

Alcune Proprietà

- Per $0 < \alpha < 1$ si ha che ${}^{\text{RL}}D_{a+}^{\alpha} 1(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$

Warning: la derivata frazionaria di R-L di una costante è diversa da 0.

- Per $0 < \alpha < 1$ e per $j = 1, 2, \dots, n = [\alpha]$ si ha che $({}^{\text{RL}}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) = 0$ da cui segue che $(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = 0 \iff y(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x-a)^{\alpha-j}$ con $n = [\alpha] + 1$ e $c_j \in \mathbb{R}$

- $({}^{\text{RL}}D_{a+}^{\alpha} {}^{\text{RL}}I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x)$ vale quasi ovunque sul dominio $[a, b]$ di f

- **Trasformata di Laplace:** per $n = [\alpha] + 1$ si ha:

$$(\mathcal{L}^{\text{RL}}D_{0+}^{\alpha} f)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k ({}^{\text{RL}}I_{0+}^{n-\alpha} f)(0+)$$

Derivata di Caputo

- La derivata di Caputo $\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t)$ è strettamente legata alla derivata di R-L.
- Per una funzione $f(t)$, sufficientemente regolare, la deriva di Caputo è definita, per $0 < \beta \leq 1$, tramite la sua trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) \right] = s^\beta \tilde{f}(s) - s^{\beta-1} f(0^+)$$

N.B. La trasformata di Laplace della derivata di Caputo è più semplice da usare rispetto a quella di RL, poiché nella prima compare la condizione iniziale $f(0^+)$ mentre in RL compare un termine poco fisico quale $({}^{RL}I_{0+}^{\beta} f)(0+)$. Inoltre $\frac{d^\beta c}{dt^\beta} = 0$

- ▶ Per $\beta = 1$ ci si riduce alla derivata di ordine 1
- ▶ Per $\beta < 1$ vale la seguente equazione:

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{df}{d\tau} \frac{1}{(t-\tau)^\beta} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{f(0^+)}{t^\beta} \right] = {}^{RL}D_t^\beta f(t) - \frac{f(0^+) t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}$$

Con $f(0^+)$ condizione iniziale.

- ▶ L'ordine di integrale e derivata è scambiato rispetto alla derivata di R-L. È verificata $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = ({}^{RL} I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x)$

Derivata di Riesz

É un operatore pseudo-differenziale non locale.

La derivata di Riesz di ordine $\alpha \in (0,2]$ è definita tramite la sua trasformata di Fourier.

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^\alpha}{d|x|^\alpha} f \right] (k) = -|k|^\alpha \hat{f}(k)$$

- ▶ Per $\alpha = 2$ si ritrova l'usuale derivata secondo ordine.
- ▶ Per $\alpha < 2$ vale la seguente equazione:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d|x|^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\pi} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \int_0^\infty \frac{f(x + \xi) - 2f(x) + f(x - \xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi$$

- La non località dell'operatore emerge immediatamente dall'impiego dell'integrale
- Come nei casi precedenti, l'operatore è applicabile solo alle funzioni che presentano le necessarie condizioni regolarità.

Calcolo frazionario

Funzione di Mittag-Leffler ad un parametro β

$$E_\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\beta n + 1)}$$

- Per $0 < \beta < 1$ la Mittag-Leffler mostra un comportamento:
 1. $t \ll 1$: decadimento di tipo strutturale exponential $e^{-t^\beta/a}$ con $a = \Gamma(\beta + 1)$
 2. $t \gg 1$: decadimento a legge di potenza $bt^{-\beta}$ con $b = \frac{\Gamma(\beta)\sin(\beta\pi)}{\pi}$
- $E_1(t) = e^t$
- $E_2(t) = \cosh(\sqrt{t})$
- **N.B.** La proprietà che rende $E_\beta(t)$ fondamentale nell'ambito della dinamica frazionaria è la seguente:

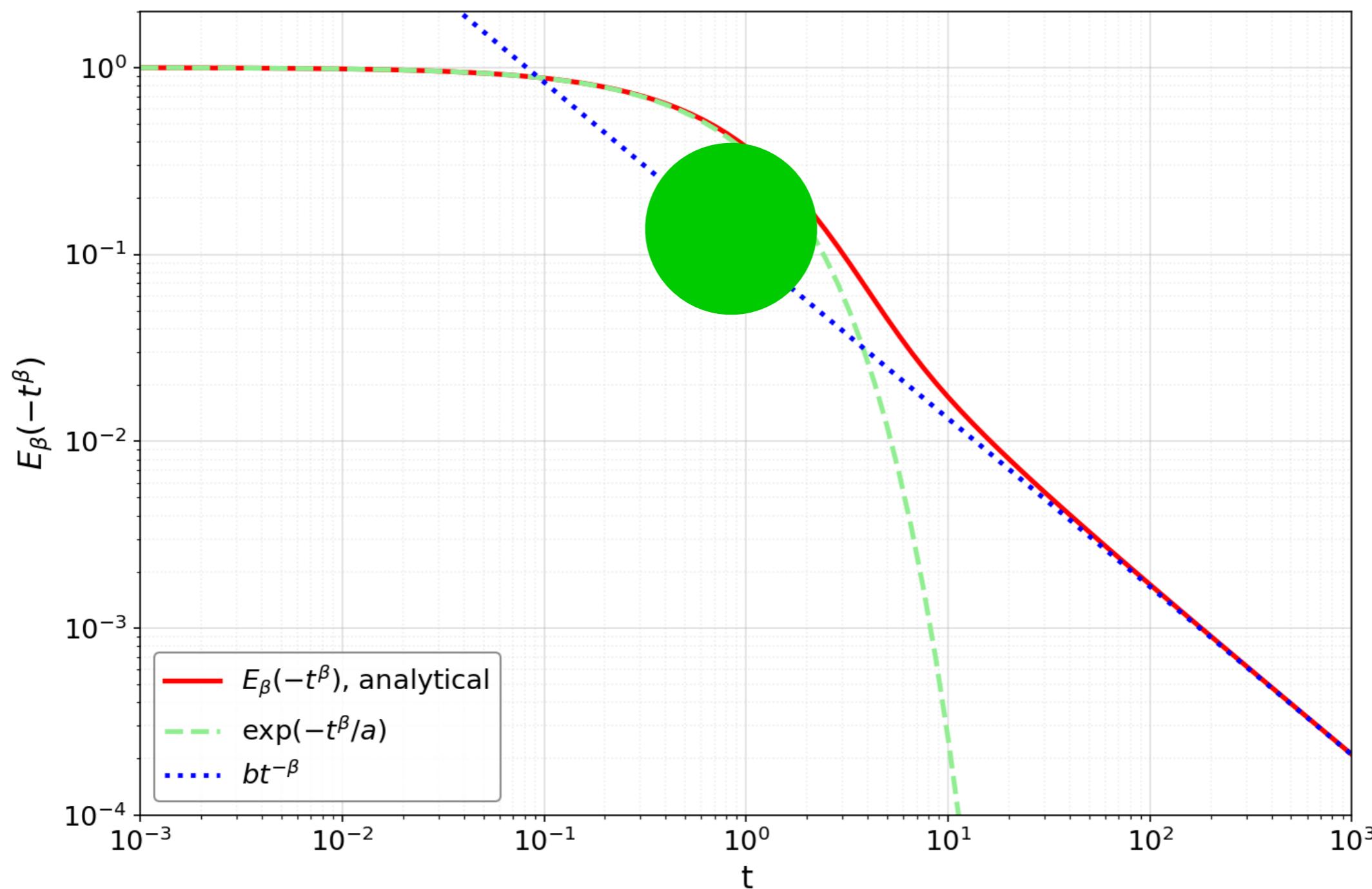
$$\mathcal{L} [E_\beta(-t^\beta)](s) = \frac{s^{\beta-1}}{1+s^\beta} \text{ con } t \in \mathbb{R}_+$$

Calcolo frazionario

La generazione dei punti di $E_\beta(-t^\beta)$ sfrutta la seguente rappresentazione integrale:

$$E_\beta(-t^\beta) = \int_0^\infty \exp(-\mu t) g(\mu) d\mu \quad \text{con} \quad g(\mu) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\beta\pi)}{\mu^{1+\beta} + 2\cos(\beta\pi)\mu + \mu^{1-\beta}}$$

$\beta = 0.9$



Casi particolari del CTRW: verso una dinamica frazionaria

Riferimento principale: Uncoupled continuous-time random walks:
Solution and limiting behavior of the master equation.
E Scalas, R Gorenflo, F Mainardi - Physical Review E, 2004

CTRW “diffusivo”

Soluzione analitica per $p(x, t)$ data una pdf $\phi(\tau)$ esponenziale

- $\phi(\tau) = \mu e^{-\mu\tau} \rightarrow$ Probabilità di sopravvivenza $\Psi(t) = \int_{\tau}^{\infty} \mu e^{-\mu t} dt = e^{-\mu t}$
 - È necessario trovare $p(n, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{p}(n, s)] = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\Psi}(s)(\tilde{\phi}(s))^n]$
 - $\tilde{\Psi}(s) = \frac{1}{\mu + s} \Rightarrow \tilde{\phi}(s) = \frac{\mu}{\mu + s} \tilde{p}(n, s) = \frac{\mu^n}{(\mu + s)^{n+1}}$
 - $\mathcal{L}^{-1}[\tilde{p}(n, s)] = \mu^n \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\mu + s)^{n+1}}\right]$
- $\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\mu + s)^{n+1}}\right] = \frac{e^{-\mu t}}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{tu} \frac{n!}{u^{n+1}} du = \frac{e^{-\mu t}}{n!} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{u^{n+1}}\right] = \frac{e^{-\mu t}}{n!} t^n$
- $\Rightarrow p(n, t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$ è la distribuzione di Poisson
- $\longrightarrow p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} \lambda_n(x)$

Il limite diffusivo di $p(x, t)$

Punto chiave: la distribuzione dei tempi di attesa è esponenziale

- La distribuzione esponenziale $\phi(\tau)$ possiede una media finita $\langle \tau \rangle = 1/\mu$
 → L'orologio interno del camminatore “ticchetta” ad un ritmo medio costante: il camminatore non rimane mai bloccato in una posizione “per troppo tempo” (eventualità che invece porterebbe ad un comportamento sub-diffusivo)

- Approssimazione per $t \rightarrow \infty$ di $p(n, t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$ con $\langle n \rangle = \mu t$ e $\sigma = \sqrt{\mu t}$

Per $t \rightarrow \infty$ $\sqrt{\mu t} \ll \mu t \Rightarrow$ Le fluttuazioni attorno al valore medio diventano trascurabili rispetto al valor medio; ciò si traduce in una distribuzione $p(n, t)$ che si concentra sempre più attorno al suo valor medio \Rightarrow Si può trattare n come una variabile deterministica: $n \approx \mu t$.

- Limite spaziale (CLT): ammettendo una $\lambda(x)$ con media zero e varianza $\sigma^2 < \infty$ vale il teorema del limite centrale: $\lambda_n(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(\frac{x^2}{2n\sigma^2}\right)$

Il limite diffusivo di $p(x, t)$

Dunque riprendendo $p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} \lambda_n(x)$:

- $p(x, t)$, che è la media pesata di $\lambda_n(x)$ con la poissoniana, si riduce nel valutare $\lambda_n(x)$ per $n = \mu t$;
- λ_n è a sua volta distribuita gaussianamente per il CLT .

Allora vale che $\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} \lambda_n(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\mu t \sigma^2}\right)$

Ponendo $D = \frac{1}{2} \mu \sigma^2$ (coefficiente diffusivo) si ritrova la classica soluzione diffusiva

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

da cui lo scaling diffusivo $\langle x^2 \rangle \sim t$

La probabilità di sopravvivenza usata poc'anzi, $\Psi(\tau) = e^{-\mu\tau}$, soddisfa la seguente ODE: $\frac{d}{d\tau}\Psi(\tau) = \mu\Psi(\tau)$ con $\mu, \tau > 0$ e $\Psi(0^+) = 1$

La più semplice generalizzazione frazionaria della precedente ODE è:

$$\boxed{\frac{d^\beta}{d\tau^\beta}\Psi(\tau) = -\Psi(\tau) \text{ con } \tau > 0, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \Psi(0^+) = 1}$$

Problema
di Cauchy

dove l'operatore $\frac{d^\beta}{d\tau^\beta}$ è la derivata frazionaria di Caputo.

L'equazione frazionaria porta a:

- rilassamento anomalo di $\Psi(\tau)$ (Non esponenziale);
- code a potenza per la pdf $\phi(\tau)$.

Applicando al problema di Cauchy frazionario la trasformata di Laplace e sfruttando la seguente proprietà della derivata di Caputo

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) \right] (s) = s^\beta \tilde{f}(s) - s^{\beta-1} f(0^+),$$

si ottiene $\tilde{\Psi}(s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + 1}$

Ricordando che la trasformata di Laplace della funzione di Mittag-Leffler è

$$\mathcal{L}[E_\beta(\pm t^\beta)](s) = \int_0^\infty e^{-tz} E_\beta(\pm t^\beta) dt = \frac{z^{\beta-1}}{z^\beta \mp 1}, \quad \Re(z) > 0, \Re(\beta) > 0.$$

si osserva che vale $\Psi(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\Psi}(s)] = E_\beta(-\tau^\beta)$.

N.B. Si è trovato che la soluzione al problema di Cauchy frazionario

$$\frac{d^\beta}{d\tau^\beta} \Psi(\tau) = -\Psi(\tau) \text{ con } \tau > 0, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \Psi(0^+) = 1$$

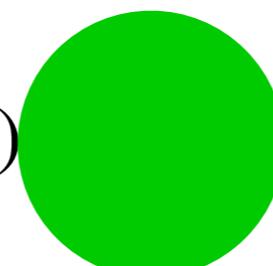
é la funzione di Mittag-Leffler

Pdf $\phi(t)$ connessa alla ODE frazionaria

Andamenti limite di $\Psi(\tau) = E_\beta(-\tau^\beta)$:

- $0 \leq \tau \ll 1 \Rightarrow \Psi(\tau) = E_\beta(-\tau^\beta) \simeq 1 - \frac{\tau^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \simeq \exp(-\tau^\beta/\Gamma(\beta + 1))$
- $\tau \rightarrow +\infty \Rightarrow \Psi(\tau) \sim \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{\Gamma(\beta)}{\tau^\beta}$

Warning: $\beta = 1$ non corrisponde a $\Psi(t) = \exp(-t)$



Osservazione: $\phi(t) = -\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau}$

$$\bullet \quad 0 \leq \tau \ll 1 \Rightarrow \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \exp(-\tau^\beta/\Gamma(\beta + 1))$$

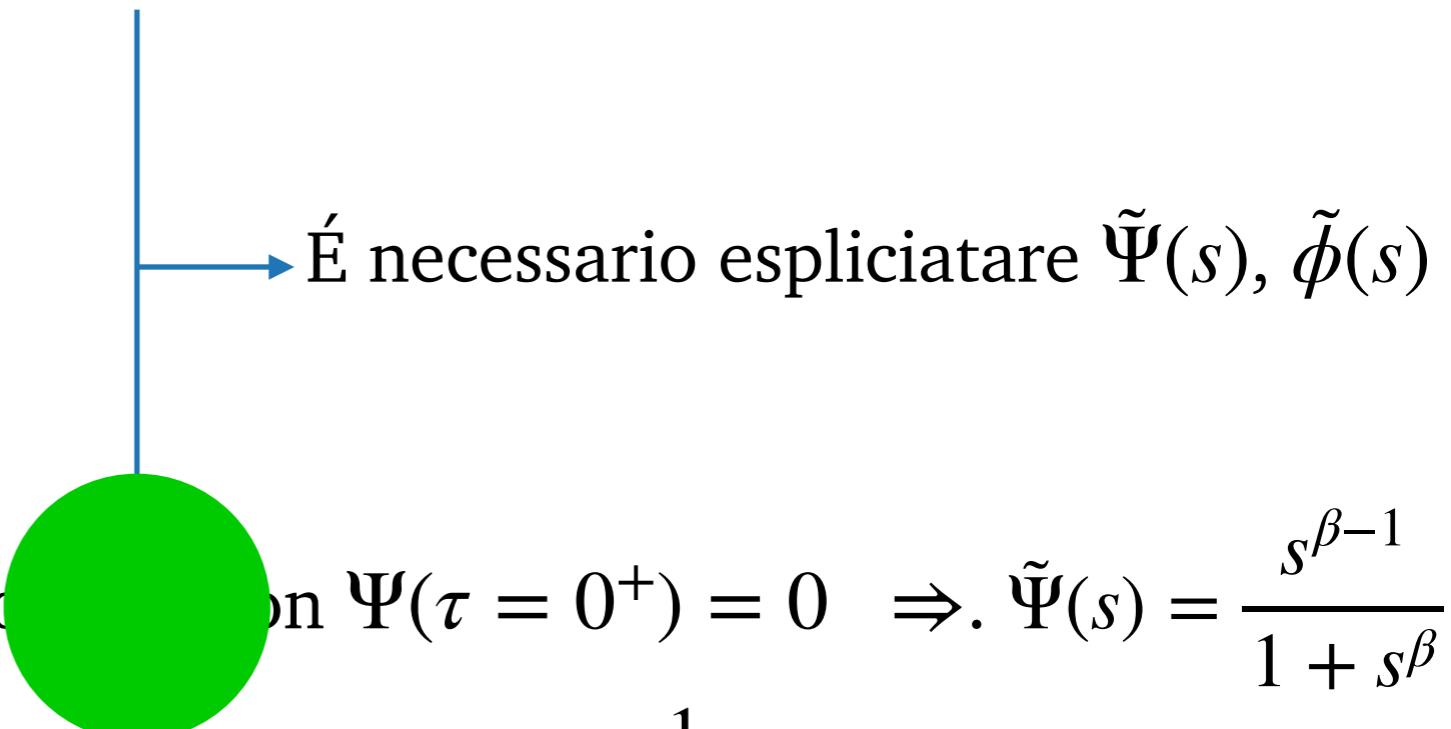
$$\bullet \quad \text{Per } 0 < \beta < 1, \tau \rightarrow +\infty \Rightarrow \phi(t) \sim \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\tau^{\beta+1}},$$

Poiché $1 < \beta + 1 < 2 \Rightarrow \phi(t)$ è normalizzabile

Warning: $\langle \tau \rangle = +\infty$

Obiettivo: Trovare $P(x, t)$ nel caso frazionario $\Psi(\tau) = E_\beta(-\tau^\beta)$

$$\begin{cases} p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, t) \lambda_n(x) \\ p(n, t) = \mathcal{L}^{-1} [\tilde{\Psi}(s) (\tilde{\phi}(s))^n] \end{cases}$$



- $\tilde{\Psi}(s)$ è la soluzione della ODE frazionaria $s^{\beta-1} \tilde{\Psi}(s) + \tilde{\Psi}(s) = 0$ con $\tilde{\Psi}(\tau = 0^+) = 0 \Rightarrow \tilde{\Psi}(s) = \frac{s^{\beta-1}}{1 + s^\beta}$
- Per definizione di $\Psi(\tau)$ vale $\tilde{\phi}(s) = 1 - s\tilde{\Psi}(s) \Rightarrow \tilde{\phi}(s) = \frac{1}{1 + s^\beta}$.

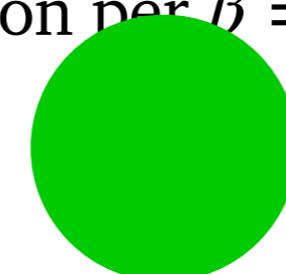
$$\Rightarrow \tilde{p}(n, s) = \frac{1}{(1 + s^\beta)^n} \frac{s^{\beta-1}}{1 + s^\beta}$$

Eq. 1.80 di [L.1]: $\mathcal{L}[t^{\beta n} E_\beta^{(n)}(-t^\beta)](s) = n! \frac{s^{\beta-1}}{(1 + s^\beta)^{n+1}}$ con $E_\beta^{(n)}(-t^\beta) := \frac{d^n}{dz^n} E_\beta(z)$

Dunque $p(n, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{p}(n, s)] = \frac{t^{\beta n}}{n!} E_\beta^{(n)}(-t^\beta)$

$$p(n, t) = \frac{t^{\beta n}}{n!} E_{\beta}^{(n)}(-t^{\beta}) :$$

- Generalizza la distribuzione di Poisson $p(n, t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$, trovata per $\phi(t) = \mu e^{-\mu t}$, nel caso di rilassamento anomalo $(0 < \beta < 1)$.
- Si riduce alla distribuzione di Poisson per $\beta = 1$ dove $E_1(-t) = e^{-t}$.



Dunque la soluzione analitica della master equation integrale per un CTRW con $\Psi(\tau) = E_{\beta}(-\tau^{\beta})$ è data da:

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\beta n}}{n!} E_{\beta}^{(n)}(-t^{\beta}) \lambda_n(x)$$

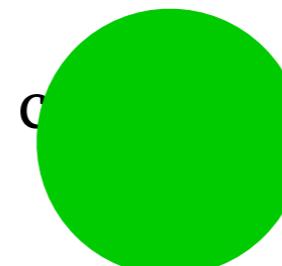
Check di consistenza della soluzione trovata

Normalizzazione da soddisfare: $\forall t \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx = 1 \Leftrightarrow \forall t, \hat{p}(k=0, t) = 1$

$$\hat{p}(k=0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\beta n}}{n!} E_{\beta}^n(-t^{\beta}) \hat{\lambda}_n(k=0)$$

Essendo $\lambda_n(x)$ una pdf, essa rispetta la condizione di normalizzazione: $\hat{\lambda}_n(k=0) = 1$

$$\Rightarrow \hat{p}(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\beta n}}{n!} E_{\beta}^n(-t^{\beta}) \star$$



I. Ricordando che per una f sufficientemente regolare vale $f(a + \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \delta^n$

II. Identificando in $\star a = -t^{\beta}$ e $\delta = +t^{\beta}$ si ha la seguente catena di uguaglianze:

$$\hat{p}(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\beta n}}{n!} E_{\beta}^n(-t^{\beta}) = E_{\beta}((-t^{\beta} + t^{\beta})) = E_{\beta}(0) = 1$$

CTRW con diverse $\phi(t)$

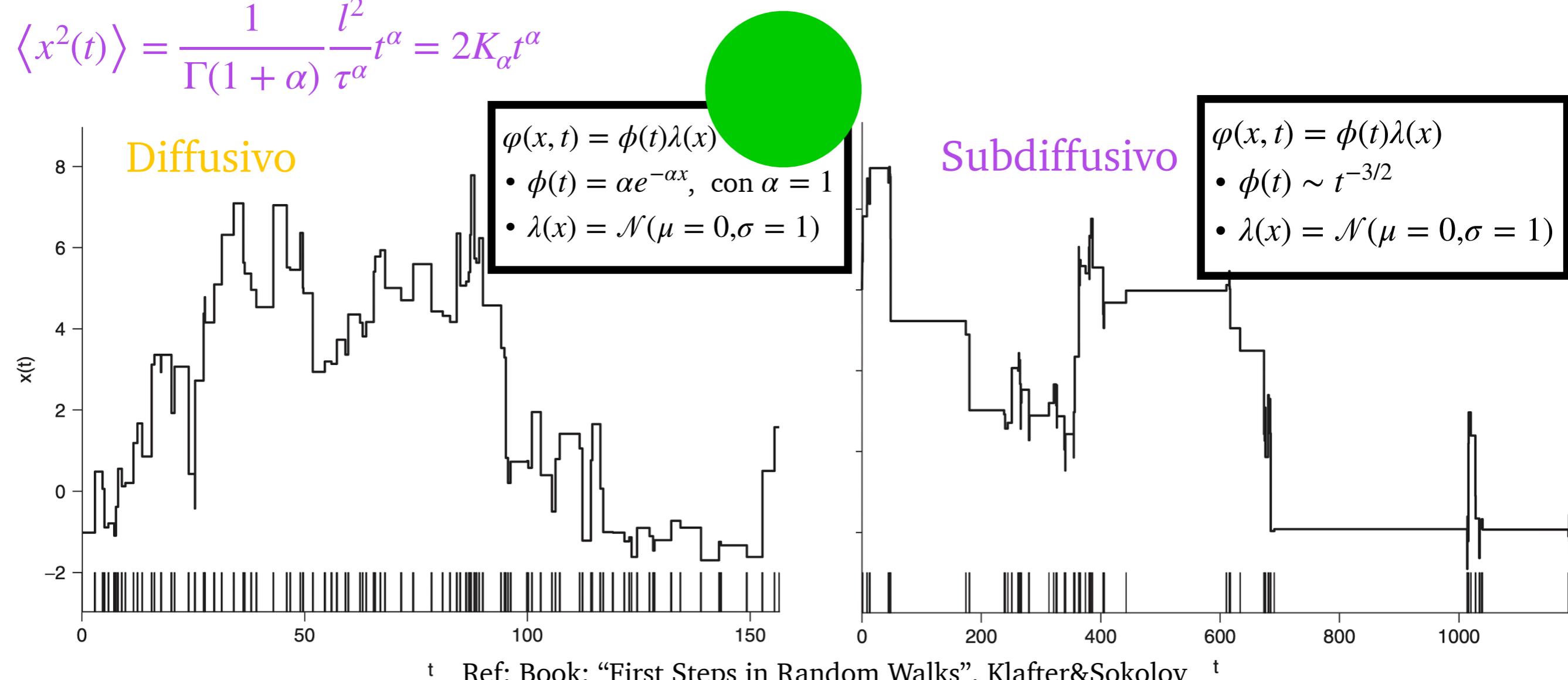
L'impiego di $\phi(t)$ con (caso A) o senza(caso B) media $\langle t \rangle = \tau$ definita, porta a comportamenti qualitativi e quantitativi molto diversi.

Assumendo $\lambda(x)$ t.c $\langle x^2 \rangle = l^2 < \infty$ e nel limite $x, t \rightarrow +\infty$ si ha:

Caso A: comportamento **diffusivo** con $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ con $D = \frac{l^2}{2\tau}$

Caso B: comportamento **sub-diffusivo** che per $\phi(t) \sim \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\tau^\beta}{t^{1+\beta}}$ con $\beta \in (0,1)$ porta ad avere

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{l^2}{\tau^\alpha} t^\alpha = 2K_\alpha t^\alpha$$



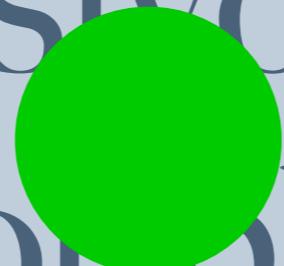
CAPITOLO II

IL LIMITE DIFFUSIVO DEL CTRW



L'EQUAZIONE DI DIFFUSIONE
FRAZIONARIA NEL TEMPO E NELLO SPAZIO

Il limite diffusivo del CTRW uncoupled



Riferimento principale:

Uncoupled continuous-time random walks: Solution and limiting behavior of the master equation.

E Scalas, R Gorenflo, F Mainardi - Physical Review E, 2004

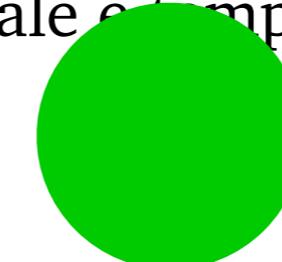
Limite diffusivo

Data la soluzione trovata del CTRW con “rilassamento frazionario”:

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\beta n}}{n!} E_{\beta}^{(n)}(-t^{\beta}) \lambda_n(x)$$

E interessante approfondire il comportamento del CTRW con “rilassamento frazionario” nel cosiddetto limite diffusivo, ovvero nel limite di passi e tempi di attesa sempre più piccoli.

Idea di base: scalare la variabile spaziale e temporale rispettivamente di un fattore h e r con $h, r \rightarrow 0$ in modo appropriato.



Si definiscono:

- $t_n(r) = (r\tau_1 + r\tau_2 + \dots + r\tau_n)$, con $t_0(r) = 0$
- $x_n(h) = h\xi_1 + h\xi_2 + \dots + h\xi_n$, con $x_0(h) = 0$

Le pdf delle variabili scalate e non sono legate dalle seguenti relazioni:

$$1. \phi_r(\tau) = \frac{\phi(\tau/r)}{r}, \tau > 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\phi}_r(s) = \tilde{\phi}(rs)$$

$$2. \lambda_h(\xi) = \frac{\lambda(\xi/h)}{h} \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi}_r(h) = \hat{\phi}(hk)$$

Limite diffusivo

L'equazione fondamentale del CTRW per le variabili riscalate è:

$$\tilde{p}(k, s) = \frac{1 - \tilde{\phi}_r(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\phi}_r(s)\hat{\lambda}_h(k)}$$

Lo studio del limite diffusivo è condotto per:

- ▶ la classe di $\psi(\tau)$ ($\leftrightarrow \phi(t)$) del **tipo Mittag-Leffler**
- ▶ un'ampia classe di $\lambda(x)$ (**simmetria e coda a potenza**):
 $\lambda(x) = [b + \epsilon(|x|)]|x|^{-(\alpha+1)}$ con $b > 0$, $\alpha \in (0,2)$ e con $\lim_{|x| \rightarrow 0} \epsilon(|x|) = 0$

Sviluppo di $\phi(r\tau)$

- ▶ Dalle proprietà di $\Psi(\tau) = E_\beta(t)$ si ricava $\phi(r\tau) \sim \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{\Gamma(\beta+1)}{(r\tau)^{\beta+1}}$ per $\tau \rightarrow +\infty$
- ▶ Vale che $\tilde{\phi}_r(s) = \tilde{\phi}(rs) = 1 - c_1(rs)^\beta + o(r^\beta)$, $r \rightarrow 0$
- ▶ Nel caso in esame in cui $\tilde{\phi}(rs) = \frac{1}{1 + (rs)^\beta}$ si ha $c_1 = 1$. (Cfr $\mathcal{L}[\phi(t)](s)$)

Limite diffusivo

Sviluppo di $\lambda(hx)$

Consideriamo la classe delle pdf simmetriche [$\lambda(-\xi) = \lambda(\xi)$] scrivibili come:

$$\lambda(x) = [b + \epsilon(|x|)] |x|^{-(1+\alpha)}$$

con $\epsilon(|x|) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$ e con $b > 0$ e $\alpha \in (0,2)$

→ Per $n \rightarrow \infty$, la somma di n R.V.s della forma $\lambda(x)$ tende ad una distribuzione stabile di Levy.

→ Per $h \rightarrow 0$ si ha $\hat{\lambda}_h(k) = \hat{\lambda}(hk) = 1 - c_2(h|k|)^\alpha + o(h^\alpha)$

$$\text{con } c_2 = \frac{b\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)}$$

N.B: lo sviluppo di $\hat{\lambda}_h(k)$ è valido anche per le pdf con $\sigma^2 < \infty$.

In quest' ultimo caso $\alpha = 2$ e $c_2 = \sigma^2/2$.

N.B: così come sottolineato da Scalas et. Al, gli andamenti per $r, h \rightarrow 0$ non sono banali da ricavare.

Limite diffusivo

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \tilde{p}(k, s) = \frac{1 - \tilde{\phi}_r(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\phi}_r(s) \hat{\lambda}_h(k)} \\ \bullet \quad & \tilde{\phi}_r(s) \approx 1 - c_1(rs)^\beta \\ \bullet \quad & \hat{\lambda}_h(k) \approx 1 - c_2(h|k|)^\alpha \end{aligned} \quad \begin{array}{c} | \\ r, h \rightarrow 0 \end{array} \quad \tilde{p}_{r,h}(k, s) \sim \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + \frac{c_2 h^\alpha}{c_1 r^\beta} |k|^\alpha}$$

Imponendo la seguente relazione di scala $c_1 r^\beta = c_2 h^\alpha$ si ottiene per $r, h \rightarrow 0$:

$$\tilde{p}_{r,h}(k, s) \rightarrow \text{[green circle]} = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + |k|^\alpha}$$

Equazione diffusiva frazionaria nello spazio e nel tempo

Riferimento principale: Uncoupled continuous-time random walks:
Solution and limiting behavior of the master equation.
E Scalas, R Gorenflo, F Mainardi - Physical Review E, 2004

Nel limite di passi e tempi di attesa sempre più piccoli, $h, r \rightarrow 0$ con $c_1 r^\beta = c_2 h^\alpha$, la soluzione del CTRW nello spazio di L-F tende a:

$$\tilde{p}_{r,h}(k, s) \rightarrow \tilde{u}_{\alpha,\beta}(k, s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + |k|^\alpha}$$

Osservazione cruciale: La funzione $\tilde{u}(k, s)$ è la trasformata di L-F della funzione di Green (soluzione fondamentale) del seguente problema di Cauchy per la diffusione frazionaria nel tempo e nello spazio:

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1$$

$$u(x, 0^+) = \delta(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0$$

Free boundary conditions: $u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0, \forall t > 0$

- $\partial^\beta / \partial t^\beta$ è la derivata di Caputo.
- $\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha}$ è la derivata frazionaria di Riesz.

$$1. \quad \mathcal{L} \left[\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u(x, t) \right] (x, s) = s^\beta \tilde{u}(x, s) - s^{\beta-1} u(x, 0^+)$$

$$2. \quad \mathcal{F} \left[\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial |x|^\alpha} \right] = - |k|^\alpha \hat{f}(k)$$

Applicando \mathcal{F} e \mathcal{L} a $\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t)$ e usano le proprietà 1. e 2. si ottiene

$$s^\beta \tilde{u}_{\alpha, \beta}(k, s) - s^{\beta-1} = - |k|^\alpha \tilde{u}_{\alpha, \beta}(k, s) \quad \text{ovvero} \quad \tilde{u}(k, s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + |k|^\alpha}$$

\Rightarrow Il collegamento tra il limite diffusivo del CTRW in esame con la FDE è dunque:

$$\tilde{p}_{r,h}(k, s) \rightarrow \tilde{u}_{\alpha, \beta}(k, s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + |k|^\alpha}, \text{ per } r, h \rightarrow 0 \text{ e } c_1 r^\beta = c_2 h^\alpha$$

Discussione del limite diffusivo

Formalmente il passaggio al limite ha dimostrato l'equivalenza asintotica tra $\tilde{p}_{r,h}(k, s)$ e $\tilde{u}_{\alpha,\beta}(k, s)$ nel dominio di Laplace-Fourier.

→ L'equivalenza asintotica nel dominio spazio-temporale tra la master equation del CTRW

$$p(x, t) = \delta(x)\Psi(t) + \int_0^t dt' \left(\dots \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \lambda(x - x') p(x', t')$$

e l'equazione diffusiva frazionaria

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t)$$

è assicurata dal teorema di continuità per le sequenze di funzioni caratteristiche unita all'applicazione del teorema analogo per le sequenze di trasformate di Laplace

⇒ Si ha convergenza debole (in distribuzione) della soluzione del CTRW alla soluzione di FDE, con medesime condizioni iniziali.

Soluzione della FDE

Soluzione della FDE nel dominio spazio-temporale

La convergenza discussa [implica](#) che la soluzione $p(x, t)$ trovata in precedenza per il CTRW con $\Psi(\tau) = E_\beta(-\tau^\beta)$ converge debolmente a

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{\beta/\alpha}} W_{\alpha, \beta} \left(\frac{x}{t^{\beta/\alpha}} \right)$$

Dove $W_{\alpha, \beta}(u) = \mathcal{F}^{-1} [E_\beta(-|k|^\alpha)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iku} E_\beta(-|k|^\alpha)$

- $W_{\alpha, \beta}(u)$ è una pdf che evolve nel tempo ed appartiene alla classe delle Fox-H functions.

Warning: Per come è stata trovata la FDE, formalmente il collegamento con il CTRW è solo nel caso di $\Psi(\tau) = E_\beta(-\tau^\beta)$, ovvero $\phi(\tau) = -\frac{d}{d\tau} E_\beta(-\tau^\beta)$

Universalità della Mittag-Leffler: Nel libro “Anomalous Transport” cap. 4, Gorenflo e Mainardi mostrano che una generica waiting-time distribution si deforma gradualmente verso la densità $\phi(t) = -\frac{d}{dt} E_\beta(-t^\beta)$ via via che lo scaling temporale tende a zero ($\phi_\tau(t) = \phi(t/\tau)/\tau$).

Limite notevole della FDE

Per $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ la FDE si riduce all'equazione della diffusione ordinaria:

$$\text{La funzione } W_{\alpha,\beta}(u) = \mathcal{F}^{-1} [E_\beta(-|k|^\alpha)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-iku} E_\beta(-|k|^\alpha)$$

$$\text{diventa } W_{2,1}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-iku} \frac{e^{-u^2/4}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(k+i\frac{u}{2})} dk = \frac{e^{-u^2/4}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow u_{2,1}(x, t) = \frac{1}{t^{1/2}} W_{2,1}\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \text{ è la soluzione per la diffusione ordinaria con costante di diffusione } D = 1$$

Limite notevole della FDE

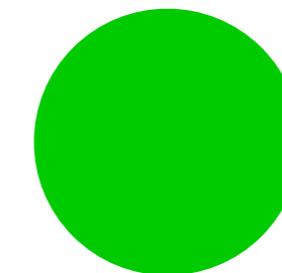
Tornando all'equazione di scala $c_1 r^\beta = c_2 h^\alpha$ e riscrivendola nella forma

$$h = Cr^{\beta/\alpha}$$

si osserva che nel caso $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ si ritrova lo scaling tipico del processo di Wiener, che il processo stocastico limite per un CTRW con:

A. $\phi(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$

B. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \lambda(x) dx < \infty$



Nei restanti casi $\alpha \in (0,2)$ e $\beta \in (0,1)$, il processo limite del CTRW

ha una pdf descritta da $u(x, t) = \frac{1}{t^{\beta/\alpha}} W_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{t^{\beta/\alpha}}\right)$.

Simulazioni Monte Carlo del CTRW



Riferimento principale:

Monte Carlo simulation of uncoupled continuous-time random walks
yielding a stochastic solution of the space-time fractional diffusion equation.
D.Fulger, E.Scalas, G.Germano, PHYSICAL REVIEW E 77, 021122 2008

Simulazioni del CTRW

Simulazioni Monte Carlo del CTRW con:

- una distribuzione Lévy α -stabile per la lunghezza dei salti;
- una probabilità di sopravvivenza del tipo Mittag-Leffler di parametro β .

Idea di base: sfruttare le simulazioni del CTRW per ottenere una soluzione approssimata dell'equazione di diffusione frazionaria sia nel tempo (β) che nello spazio (α).



- E richiesta la generazione di numeri causali distribuiti secondo una Levy α -stabile e una Mittag-Leffler(β):
- Poiché il campionamento della Mittag-Leffler era considerato problematico, in articoli precedenti si è ricorso all'uso della distribuzione di Pareto. Tuttavia l'uso della Pareto è limitato a $t \rightarrow \infty$ e a valori di β non troppo vicini ad 1.

N.B. Uno dei contributi del paper è aver riportato un algoritmo diretto e piuttosto semplice per la generazione di numeri causali distribuiti secondo una Mittag-Leffler.

Simulazioni del CTRW

Come già visto, la soluzione del problema di Cauchy per la FDE

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t) \text{ con } u(x, 0^+) = \delta(x)$$

è data da:

$$u(x, t) = t^{-\beta/\alpha} W_{\alpha, \beta} \left(\frac{x}{t^{\beta/\alpha}} \right) \text{ con } W_{\alpha, \beta}(\xi) = \mathcal{F}^{-1} \left[E_\beta(-|k|^\alpha) \right] (\xi)$$

Al fine di approssimare $u(x, t)$ è necessario simulare:

1. salti distribuiti con $L_\alpha(\xi) = \mathcal{F}^{-1} [\exp(-|\xi|^\alpha)]$
2. tempi di attesi distribuiti con $\phi(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \ln \left(\mathcal{F}^{-1}[e^{-\tau}] \right)$

⇒ Un'approssimazione in senso debole (cfr. Convergenza debole della soluzione del CTRW alla soluzione della FDE) della soluzione della FDE si ottiene con:

1. riscalamento di $\tau \rightarrow \gamma_t \cdot \tau$ e di $x \rightarrow \gamma_x \cdot x$ con $\gamma_x = \gamma_t^{\beta/\alpha}$ (cfr $c_1 r^\beta = c_2 h^\alpha$ visto prima)
2. limite per $\gamma_t \rightarrow 0$ ($\Rightarrow \gamma_x \rightarrow 0$)
3. plot dell'istogramma di $p_{\gamma_x, \gamma_t}(x, t; \alpha, \beta)$ che converge **debolmente** a $u(x, t; \alpha, \beta)$ per $\gamma_t, \gamma_x \rightarrow 0$.

Warning: data la convergenza debole, la singolarità in $x = 0$ di $p_{\gamma_x, \gamma_t}(x, t; \alpha, \beta)$ è sempre presente per ogni valore finito di γ_t e γ_x .

La singolarità è il termine $\delta(x)\Psi(t)$ dell'equazione integrale del CTRW.

Simulazioni del CTRW

Generazione di numeri random da una Levy α -stable

$$L_\alpha(\xi) = \mathcal{F}^{-1} [\exp(-|\gamma_x k|^\alpha)]$$

Il metodo di campionamento si deve a Chambers, Mallows, Stuck

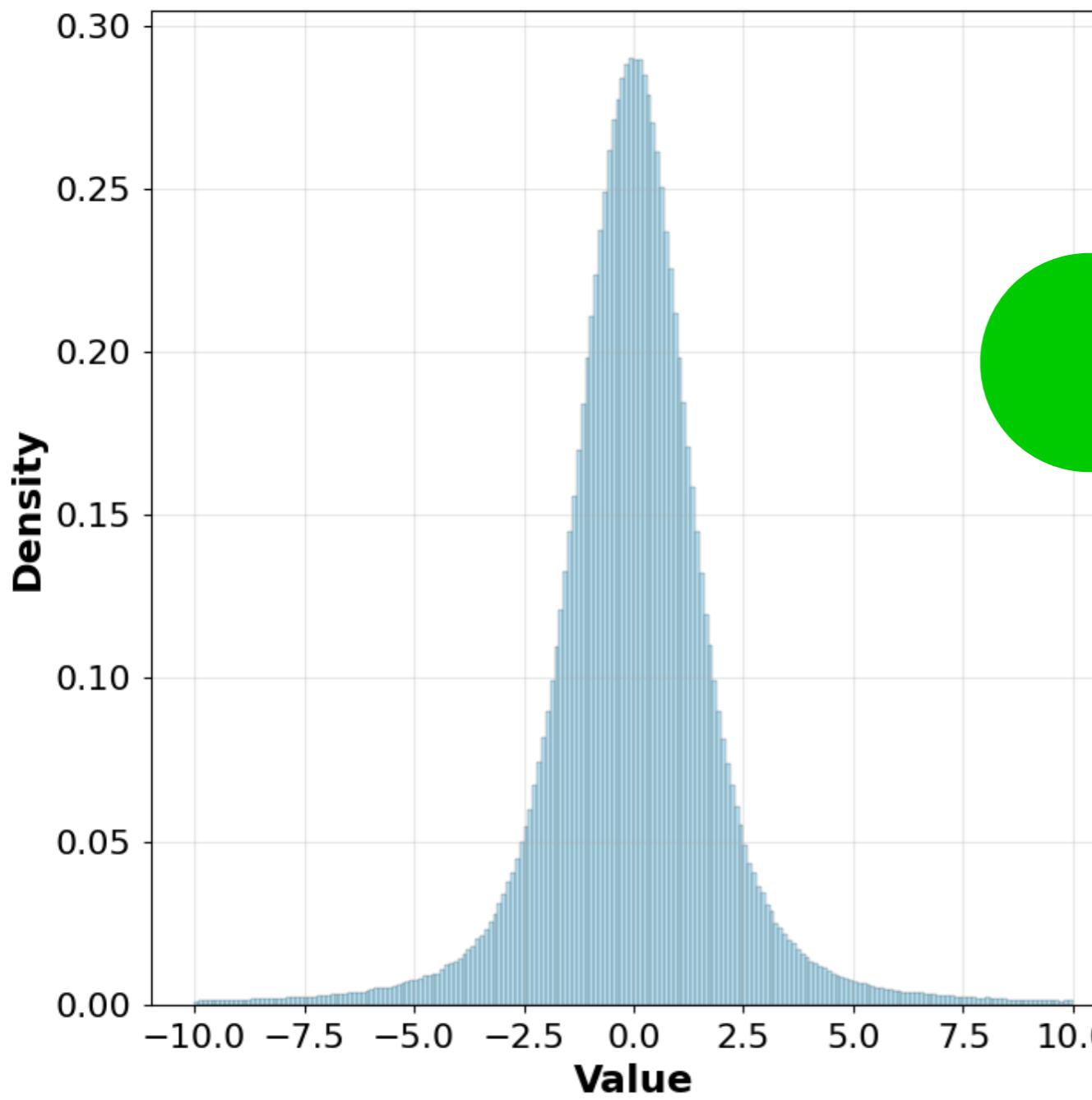
- ▶ Sampling di $u, v \in (0,1)$ R.V.s indipendenti distribuite con $U([0,1])$
- ▶ Siano $\phi = \pi(v - 1/2)$ e γ_x parametro scalare
- ▶ La seguente R.V ξ_α è distribuita secondo una Levy α -stable:

$$\xi_\alpha = \gamma_x \left(\frac{-\ln u \cos \phi}{\cos((1-\alpha)\phi)} \right)^{1-1/\alpha} \frac{\sin(\alpha\phi)}{\cos \phi}$$

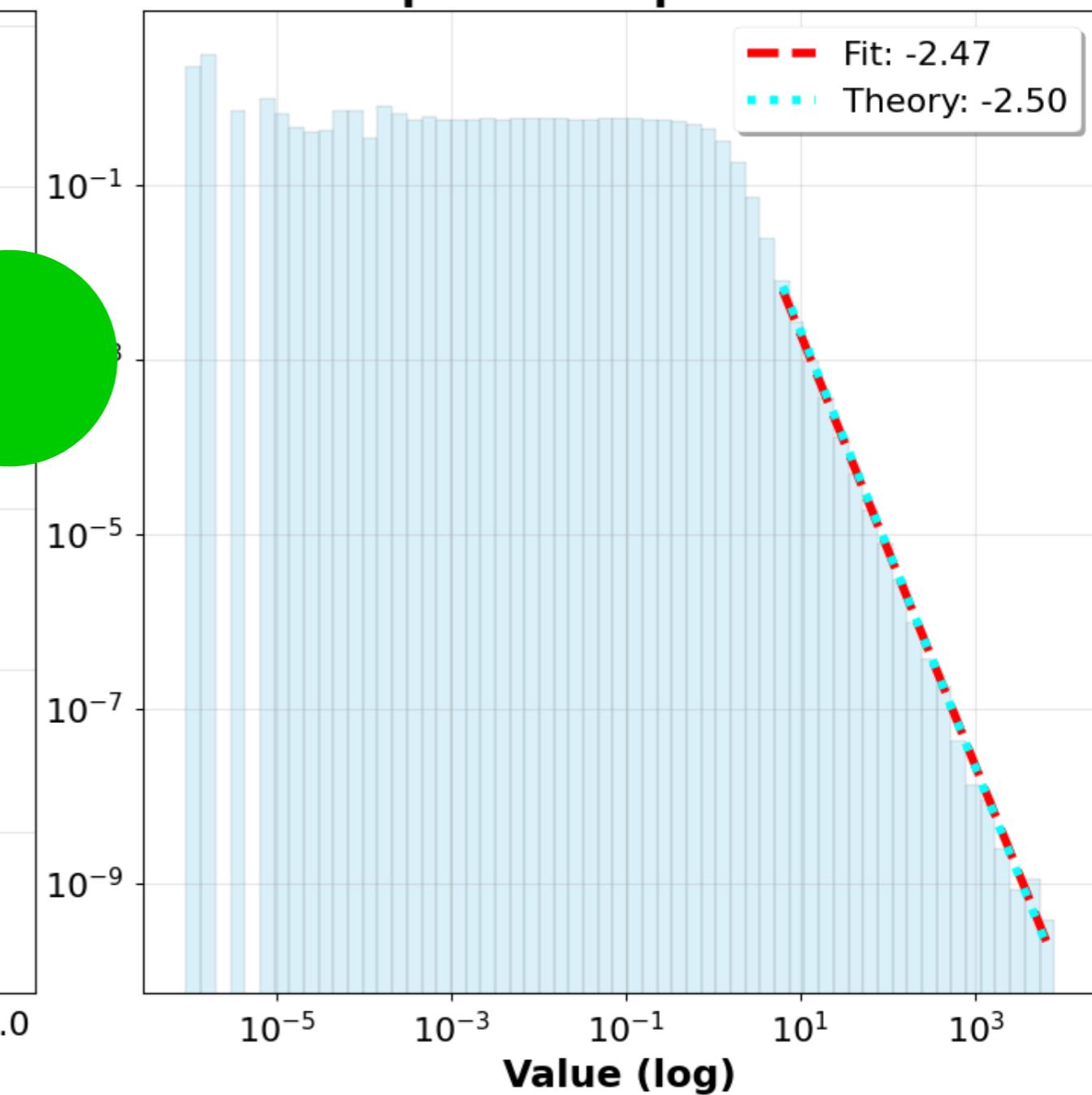
- Per $\alpha = 2$: $\xi_\alpha \rightarrow \xi_2 = 2\gamma_x \sqrt{-\ln u} \sin \phi$, ovvero il metodo Box-Muller per il sampling di due gaussiane standard indipendenti.
- Per $\alpha = 1$: $\xi_\alpha \rightarrow \xi_1 = \gamma_x \tan \phi$ si ha il sampling della distribuzione di Cauchy

$$\gamma_x = 1$$

Lévy α -Stable (Linear)
 $\alpha = 1.5$



Lévy Positive Tail (Log-Log)
Expected Slope ≈ -2.5



Generazione di numeri random da una Mittag-Leffler

Il metodo si deve a Kozubowski e Rachev ma è grazie agli autori l'aver riportato il metodo nel contesto della dinamica frazionaria.

- ▶ Sampling di $u, v \in (0,1)$ R.V.s indipendenti distribuite con $U([0,1])$
- ▶ γ_t parametro di scala
- ▶ La seguente R.V è ha una Completa Gamma-CDF $\Psi(\tau)$ del tipo Mittag-Leffler di parametro β :

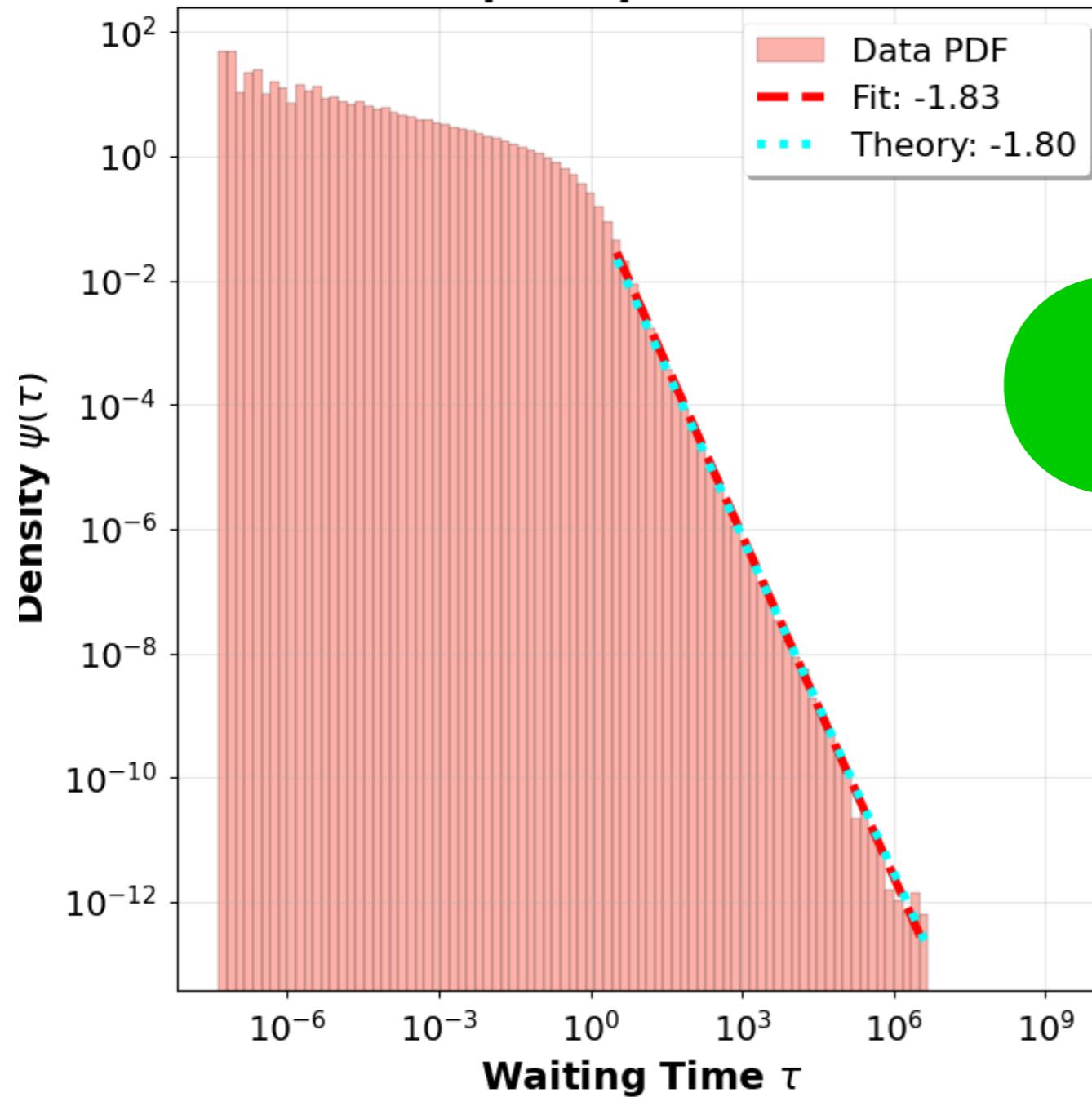
$$\tau_\beta = -\gamma_t \ln u \left(\frac{\sin(\beta\pi)}{\tan(\beta\pi v)} - \cos(\beta\pi) \right)^{1/\beta}$$

- Per $\beta = 1$: $\tau_\beta \rightarrow \tau_1 = -\gamma_t \ln u$, che notoriamente corrisponde alla generazione di numeri random τ_1 distribuiti esponenzialmente con $1/\lambda = \gamma_t$

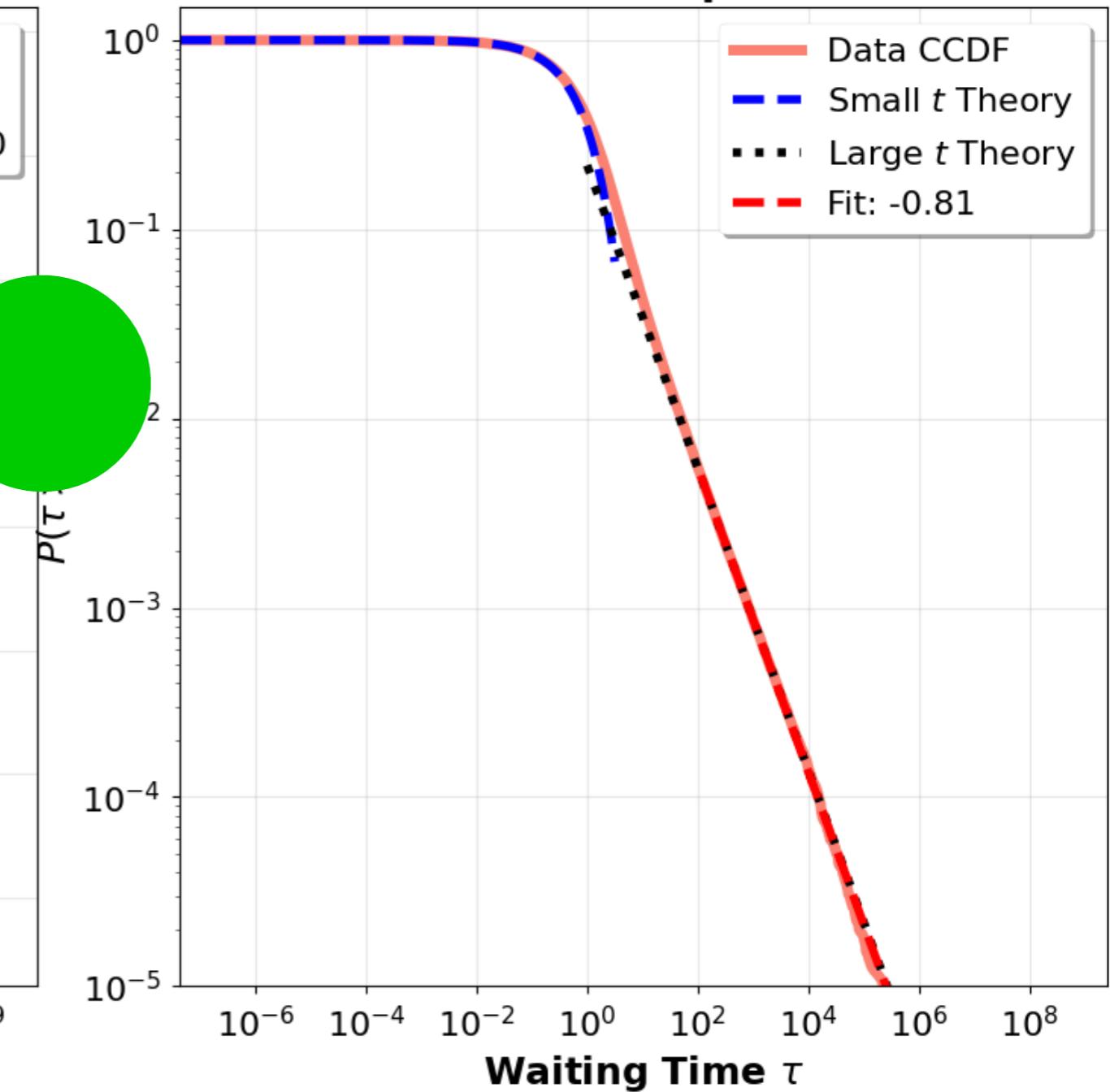
Generazione di numeri casuali $\sim \text{ML-}\beta$ 53

$$\gamma_t = 1$$

Mittag-Leffler PDF
Exp. Slope ≈ -1.8



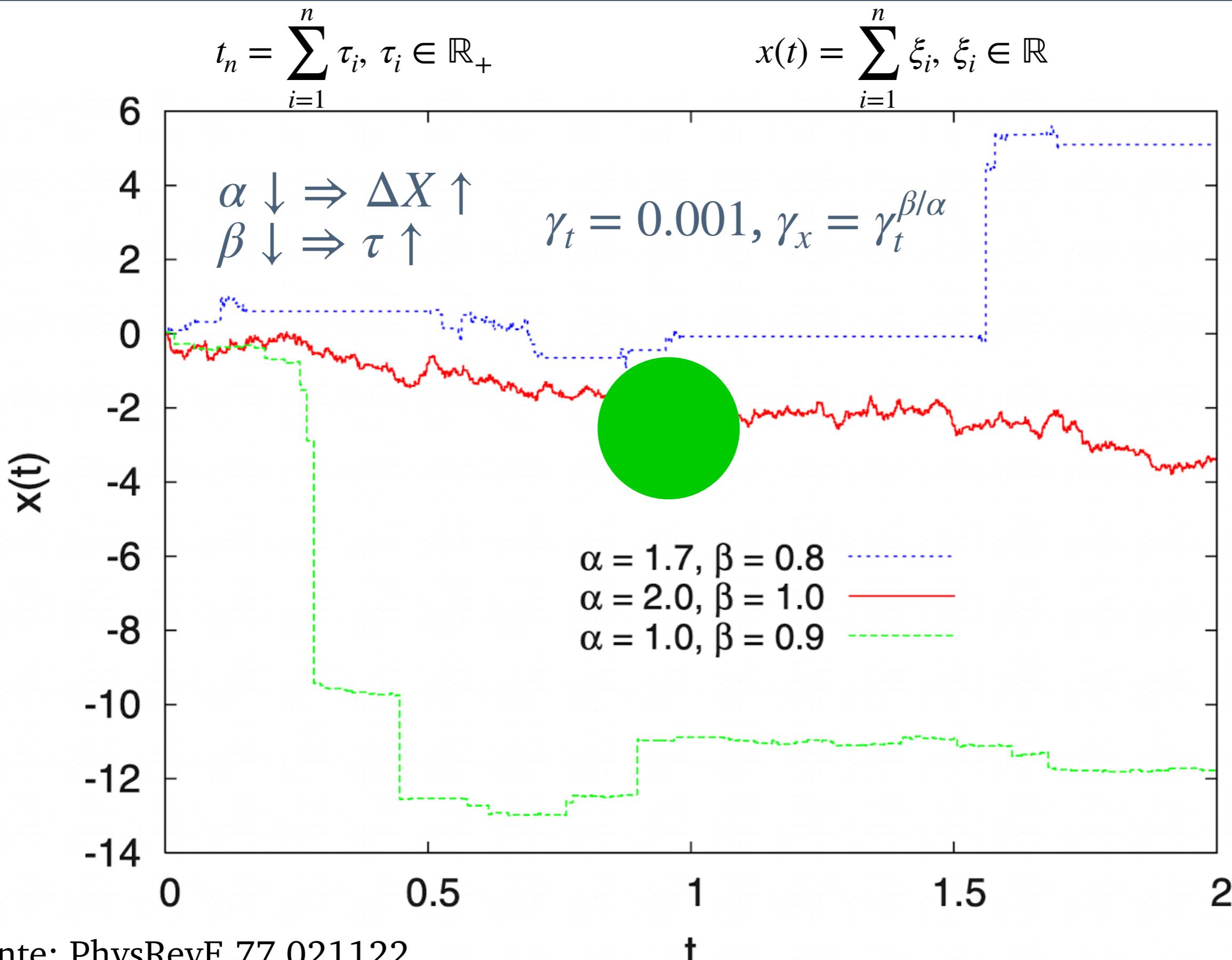
Survival Function $\Psi(t)$
Theoretical Slope ≈ -0.8



Simulazioni del CTRW

$$t_n = \sum_{i=1}^n \tau_i, \tau_i \in \mathbb{R}_+$$

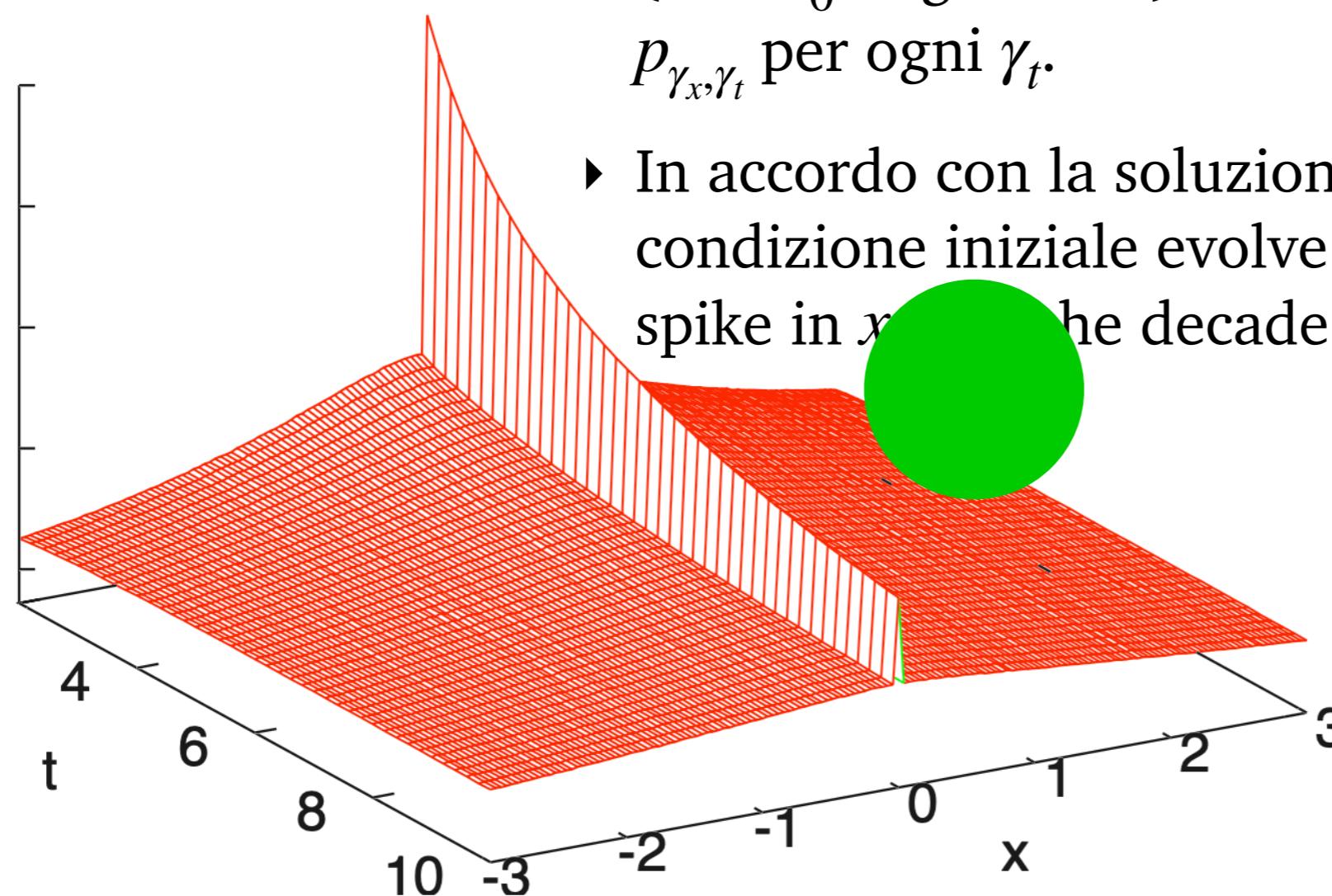
$$x(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i, \xi_i \in \mathbb{R}$$



Simulazioni del CTRW

Evoluzione di $p_{\gamma_x, \gamma_t}(x, t; \alpha, \beta)$ per $\alpha = 1.7$, $\beta = 0.8$, $\gamma_t = 0.1$

$p_{\gamma_x, \gamma_t}(x, t; \alpha, \beta)$



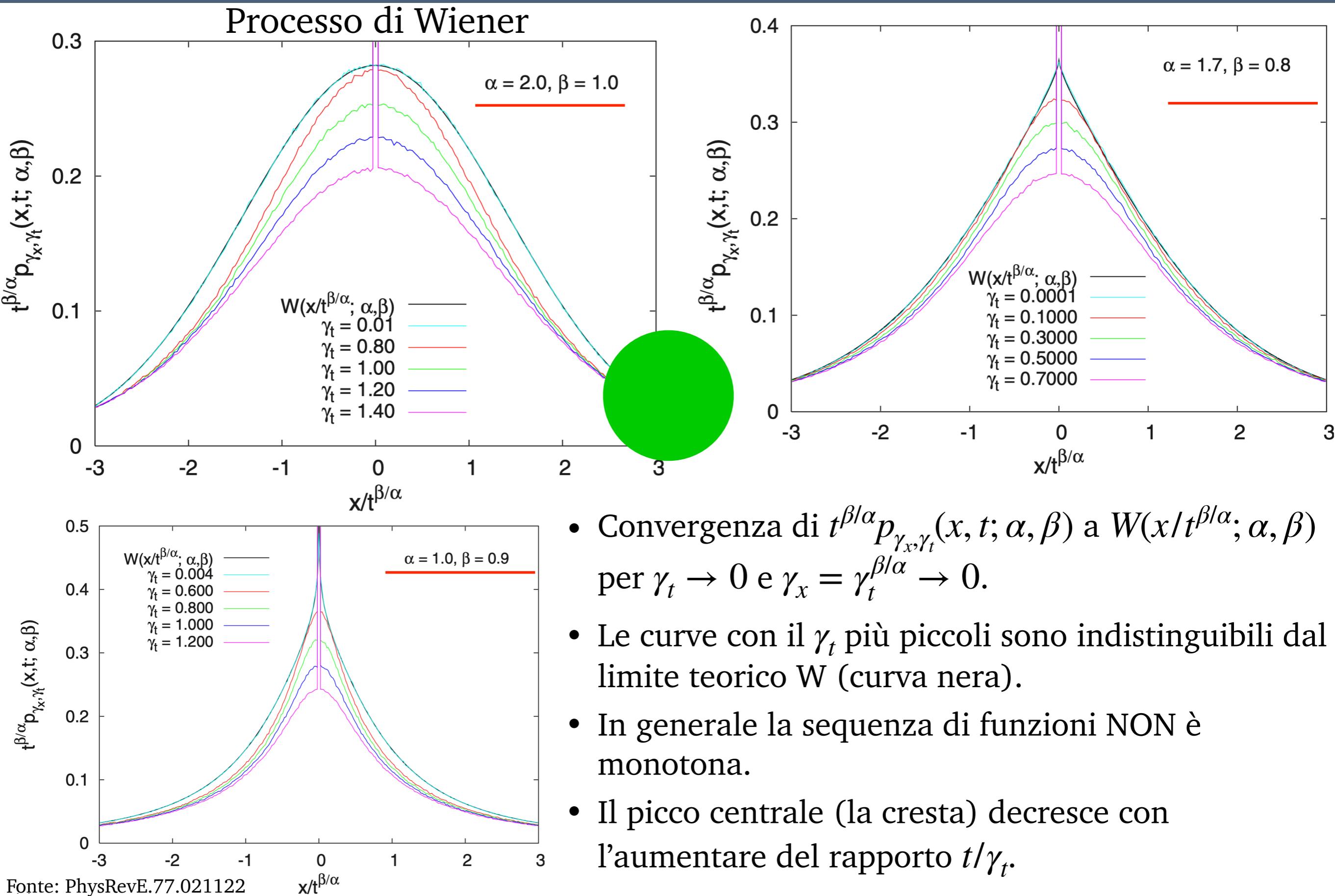
- ▶ Poiché la convergenza è in senso debole, per $x = 0$ ($x = x_0$ in generale) si ha sempre una singolarità di p_{γ_x, γ_t} per ogni γ_t .
- ▶ In accordo con la soluzione integrale del CTRW, la condizione iniziale evolve come $\delta(x)\Psi(t)$; è visibile lo spike in $x = 0$, che decade con l'aumentare di t

$p_{\gamma_x, \gamma_t}(x, t; \alpha, \beta)$ è approssimata con l'istogramma costruito a partire da (molte) simulazioni del CTRW

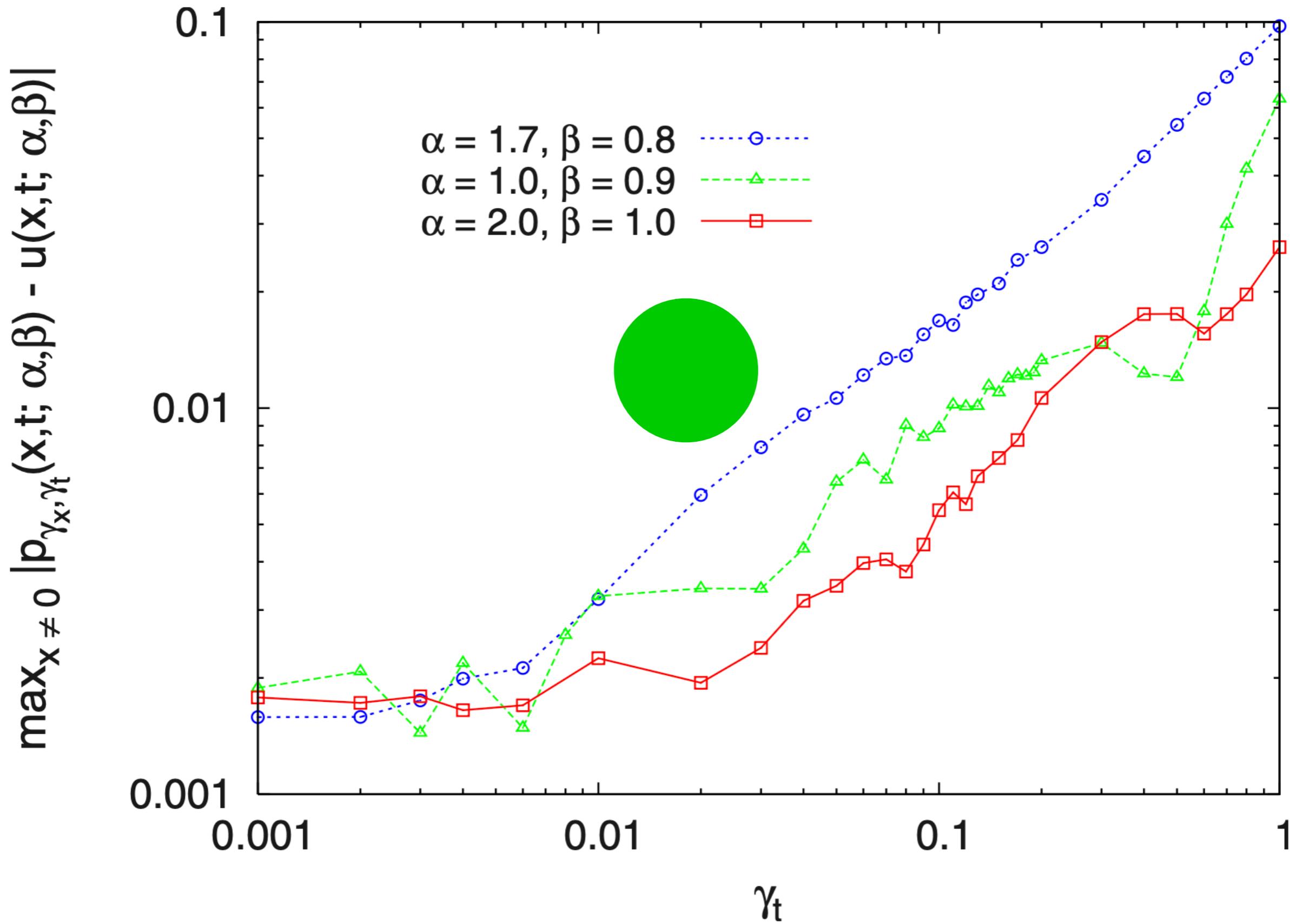
La cresta in $x = 0$ ha come massa $\Psi(t) = E_\beta \left((-t/\gamma_t)^\beta \right) = P(0^+, t) - P(0^-, t)$

con $P(x, t) = \int_{-\infty}^x p(u, t) du$

Convergenza di $p_{\gamma_x, \gamma_t}(x, t; \alpha, \beta)$ a $u(x, t; \alpha, \beta)$ per $t = 2$



Convergenza di $\max_{x \neq 0} |p_{\gamma_x, \gamma_t}(x, t; \alpha, \beta) - u(x, t; \alpha, \beta)|$ per $\gamma_t, \gamma_x \rightarrow 0$



CAPITOLO III

L' EQUAZIONE DI
FOKKER-PLANCK FRAZIONARIA (FPPE)

Derivazione della FFPE a partire dalla Master Equation Generalizzata (GME)

Riferimento principale: Deriving fractional Fokker-Planck equations from a generalised master equation.
R. Metzler, E.Barkai, J.Klafter, Europhys. Lett., 46 (4), pp. 431-436 (1999)

Derivazione della FFPE

Scopo principale: ricavare l'equazione di Fokker-Planck Frazionaria (FFPE) a partire da una Master Equation Generalizzata (GME) derivata da un random walk non omogeneo nello spazio.

Rottura dell'invarianza spaziale: il modello introduce un potenziale esterno. Questo rompe l'invarianza spaziale tipica dei modelli puramente diffusivi.

- *Conseguenza:* A differenza della puramente diffusiva equazione di diffusione frazionaria (FDE), nella FFPE viene esplicitamente **il termine di Drift**.

Origine dei termini frazionari: l'estensione frazionaria emerge dall'uso di distribuzioni con code a potenza ("Heavy-tailed"):

1. **Tempo (time-fractional):** distribuzioni dei tempi di attesa a coda lunga → generano effetti di **memoria** a lento decadimento (sistemi vicini all'equilibrio termico).
2. **Spazio (space-fractional):** distribuzioni dei salti a coda lunga → portano a un **laplaciano generalizzato** nella FFPE.

Classificazione della diffusione

La diffusione anomala è caratterizzata da uno scaling della varianza del tipo:
 $\langle \Delta x^2 \rangle \propto K_\gamma t^\gamma$ con $\gamma \neq 1$ e $[K_\gamma] = L^2 T^{-\gamma}$

Classificazione:

- $0 < \gamma < 1$: **moto sub-diffusivo.** Cause: "Trapping" (tempi di attesa lunghi), "Crowding" molecolare (difficoltà a farsi strada)
Esempi: 1)diffusione delle proteine all'interno della cellula, 2)trasporto in mezzi porosi.
- $\gamma = 1$: **moto diffusivo.** Esempio: moto browniano.
- $1 < \gamma < 2$: **moto super-diffusivo.** Una possibile causa è legata alla presenza di salti con una pdf con code a potenza.
Esempio: trasporto cellulare attivo (contro il gradiente di concentrazione).
- $\gamma = 2$: **moto balistico.** Esempio: moto rettilineo uniforme.
- $\gamma > 2$: **moto iper-diffusivo.** Osservato in alcuni sistemi ottici.

Diffusione standard $\gamma = 1$

La diffusione standard in presenza di un potenziale esterno è descritta dall'equazione di Fokker-Plank:

$$\partial_t P = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D_1(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_2(x) \right] P(x, t) = L_{FP} P(x, t)$$

- D_1 è associato al drift dovuto al potenziale esterno.
- D_2 è il coefficiente di diffusione.

→ Applicando \mathcal{F} alla FPE si ottiene:

$$\dot{P}(k, t) = -ik\{D_1(k) * P(k, t) + D_2(k) * P(k, t)\} = L_{FP}(k)P(k, t)$$

N.B. Senza perdere di generalità è possibile mappare la F-P con $D_2(x)$ in un'equazione con coefficiente di diffusione costante K_1 [\[Risken: Ref. L.3, Pag. 97\]](#) (Dettagli in [\[A.20\]](#)):

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_1} + K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] P(x, t) = L_{FP} P(x, t)$$

dove si è introdotto il potenziale $V(x) = -m\eta_1 \int^x D_1(x') dx' \rightarrow D_1(x) = -V'(x)/m\eta_1$

Obiettivo: introdurre una FPPE facendo uso di un certo operatore frazionario L_{FFP} e della derivata frazionaria alla Caputo, tale da avere una struttura analoga a $\dot{P}(x, t) = L_{FP} P(x, t)$.

Master Equation Generalizzata

La derivazione della FPPE si basa sulla scrittura di una master equation generalizzata simile a quella già vista per il CTRW

Master Equation Generalizzata (GME)

$$\dot{P}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt' K(x, x'; t - t') P(x', t')$$

- Il kernel $K(x, x', t - t')$ in generale introduce correlazioni spaziali e una memoria, rendendo il processo non markoviano.
- **N.B.** Si assume che $K(x, x', t - t')$ dipenda solo dagli intervalli di tempo $|t - t'|$

Obiettivo: scrivere un kernel che tenga conto della presenza di un potenziale esterno $V(x)$ e tale da portare ad un diffusione anomala.

Per fare ciò si vuole che $K(x, x', t - t')$:

- sia dipendente dalla posizione per tener conto della rottura dell'invariata spaziale introdotta da $V(x)$;
- abbia un lento decadimento (legge di potenza) nel tempo e nello spazio in modo tale da consentire salti e tempi di attesa “lunghi”.

Ansatz: $K(x, x', t - t') = \Lambda(x, x')\phi(t - t')$

Random Walk 1D locale

Un random walk 1D su reticolo con salti locali (± 1) è descritto dalla master equation discreta

$$P_j(t + \Delta t) = A_{j-1}P_{j-1}(t) + B_{j+1}P_{j+1}(t)$$

- A_j : probabilità di saltare a destra partendo dal sito j .
- B_j : probabilità di saltare a sinistra partendo dal sito j .
- Normalizzazione: $A_j + B_j = 1$.

Passando al limite continuo $(j - (j \pm 1))\Delta x \rightarrow 0$ e operando un'espansione di Taylor in t e x si ritrova la FPE nel limite in cui:

- $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$;
- $\Delta x^2/\Delta t \rightarrow$ costante.

In particolare i coefficienti dell'operatore L_{FP} sono dati da:

$$1. \frac{V'(x)}{m\eta_1} =: \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} [B(x) - A(x)]$$

$$2. K_1 =: \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

Random Walk 1D non locale

Dal locale al non locale

La Master Equation standard è locale (solo salti $j \pm 1$).

Per descrivere la diffusione anomala spaziale è necessario includere salti a lungo raggio ammettendo transizioni da siti distanti ($j \pm n \rightarrow j$):

$$P_j(t + \Delta t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{j,n} P_{j-n}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{j,n} P_{j+n}(t)$$

con la normalizzazione $\sum_{n=1}^{\infty} (A_{j,n} + B_{j,n}) = 1$

Obiettivo: ottenere il limite continuo della GME di cui sopra includendo:

1. non-località dei salti.
2. rottura dell'invarianza spaziale (anisotropia dovuta a un potenziale esterno).

Ansatz: dato $K(x, x', t - t') = \Lambda(x, x')\phi(t - t')$ si assume per $\Lambda(x, x')$ una forma del tipo:

$$\Lambda(x, x') =: \lambda(|x - x'|) [A(x')\Theta(x - x') + B(x')\Theta(x' - x)]$$

Nota: $\lambda(|x - x'|)$ determina la lunghezza del salto, $([\dots])$ introduce il bias dovuto al potenziale.

Introduzione della Memoria Temporale

Per descrivere dinamiche non markoviane, il kernel temporale viene definito in termini di una funzione di memoria $\phi(t - t')$.

Significato Fisico: esempio di $\phi(t)$ è la PDF dei tempi di attesa (Waiting Time Distribution) tra due eventi successivi (CTRW).

Il limite nel continuo Passando al continuo in x e t , la master equation discreta:

$$P_j(t + \Delta t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{j,n} P_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{j,n} P_{j+n}(t)$$

evolve nell'equazione di bilancio integrale (**EBI**):

$$P(x, t) = \Psi(t)P_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt' \phi(t - t') \Lambda(x, x') P(x', t')$$

- $P_0(x) = P(x, 0)$ è la condizione iniziale
- $\Psi(t) = 1 - \int_0^t dt' \phi(t')$ è la probabilità di sopravvivenza

N.B. Il termine aggiuntivo $\Psi(t)P_0(x)$ è necessario per la conservazione della probabilità: rappresenta la frazione di particelle che, al tempo t , non ha ancora effettuato il primo salto.

EBI in spazio di Laplace: partendo dalla EBI in spazio (x, t) vista in precedenza, la sua trasformata di Laplace in (x, s) è:

$$\tilde{P}(x, s) = P_0(x) \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{s} + \tilde{\phi}(s) \int \Lambda(x, x') \tilde{P}(x', s) dx'$$

Ricostruzione della derivata temporale: per arrivare alla forma di una Master Equation, si deve ricostruire l'equazione $s\tilde{P}(x, s) - P_0(x)$ (che corrisponde a $\partial_t P$). Esplicitando $P_0(x)$ nell'equazione sopra si ha:

$$P_0(x) = \frac{s}{1 - \tilde{\phi}(s)} \tilde{P}(x, s) - \frac{s\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)} \int \Lambda(x, x') \tilde{P}(x', s) dx'$$

che inserito in $s\tilde{P}(x, s) - P_0(x)$ produce:

$$s\tilde{P}(x, s) - P_0(x) = \frac{s\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)} \left[\int \Lambda(x, x') \tilde{P}(x', s) dx' - \tilde{P}(x, s) \right]$$

Equivalenza EBI \leftrightarrow GME (Kernel)

Identificazione del Kernel $\tilde{K}(x, x'; s)$ in Laplace: per scrivere l'equazione nella forma standard $\int \tilde{K} \tilde{P} dx'$, portiamo il termine $-\tilde{P}$ sotto integrale usando la delta di Dirac $\delta(x - x')$:

$$s\tilde{P}(x, s) - P_0(x) = \frac{s\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)} \int [\Lambda(x, x') - \delta(x - x')] \tilde{P}(x', s) dx'$$

Si identifica così il kernel totale: $\tilde{K}(x, x'; s) = \frac{s\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)} \cdot \underbrace{[\Lambda(x, x') - \delta(x - x')]}_{\Sigma(x, x')} \text{ (Spazio)}$

$\tilde{M}(s)$ (Memoria)

$$\implies s\tilde{P}(x, s) - P_0(x) = \int \tilde{K}(x, x'; s) \tilde{P}(x', s) dx'$$

Dal Laplace al tempo: in spazio (x, t) il kernel assume la forma seguente:

$$K(x, x'; t) = \Sigma(x, x') \cdot \mathcal{L}^{-1}[\tilde{M}(s)] = [\Lambda(x, x') - \delta(x - x')] \cdot M(t)$$

L'equazione  trasforma come $\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt' K(x, x'; t - t') P(x', t')$

Esplicitando il kernel si può anche scrivere:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int_0^t dt' M(t - t') \int_{-\infty}^{+\infty} dx' [\Lambda(x, x') - \delta(x - x')] P(x', t')$$

\Rightarrow Dunque si è mostrato come la EBI è equivalente alla GME con il kernel trovato

Ipotesi: tempi di attesa distribuiti esponenzialmente: assumiamo che la distribuzione dei tempi di attesa sia quella di un processo di Poisson standard (assenza di memoria intrinseca):

$$\phi(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \tilde{\phi}(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{s\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)} = \frac{s \cdot \left(\frac{1}{1 + s\tau}\right)}{1 - \left(\frac{1}{1 + s\tau}\right)} = \frac{1}{\tau} = \text{[Redacted]} \Rightarrow M(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\tau} \right] = \frac{1}{\tau} \delta(t)$$

Conseguenza sulla GME: inserendo questo Kernel nell'equazione generale, l'integrale “di memoria” (su t') sparisce:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \underbrace{\int_0^t \frac{1}{\tau} \delta(t-t') [\dots] dt'}_{M(t-t')} = \frac{1}{\tau} \left[\int \Lambda P dx' - P \right]$$

Conclusione: Una $\phi(t)$ esponenziale distrugge la memoria del sistema ($M(t) \sim \delta(t)$), riconducendo la Generalized Master Equation alla Master Equation classica (markoviana).

L'EBI descrive la dinamica attraverso convoluzioni nel tempo (memoria) e nello spazio (non località):

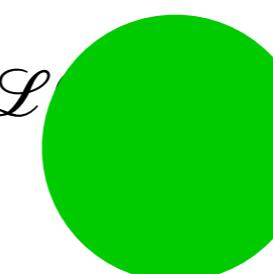
$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt' \phi(t - t') \Lambda(x, x') P(x', t') + \Psi(t) P_0(x) \quad (\text{EBI})$$

Passaggio allo Spazio (k, s): sfruttando il teorema sulla convoluzione l'equazione integrale si semplifica notevolmente.

Trasformata di Laplace:

$$1. \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \left[\int_0^t dt' \phi(t - t') P(x', t') \right] = \mathcal{L}[P(x', t')] = \phi(s) P(x', s)$$

$$2. \mathcal{L}[\Psi(t)] = \tilde{\Psi}(s) = \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{s}$$



Trasformata di Fourier:

$$1. \mathcal{F}\left[\int P \Lambda\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P(x', s) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \Lambda(x, x') \right] =: \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P(x', s) \Lambda(k, x') =: \Lambda(k) \cdot [P(k, s)]$$

$$2. \mathcal{F}[P_0(x)] = P_0(k); \text{ per } P_0(x) = \delta(x) \text{ si ha } P_0(k) = 1$$

Attenzione: la Natura del Kernel $\Lambda(k)$: a causa della rottura di simmetria introdotta dalla forza esterna $F(x)$, il termine spaziale $\Lambda(k)$ non è una semplice funzione moltiplicativa, ma agisce come un operatore sulla densità di probabilità $P(k, s)$.

La sua definizione richiede quindi di esplicitare l'azione su una funzione test.

Obiettivo: Esplicitare matematicamente come agisce $\Lambda(k)$ e presentare l'equazione riordinata pronta per il limite idrodinamico (FFPE).

Esplicitazione dell'Operatore $\Lambda(k)$: risolvendo l'integrale di convoluzione ([cfr Appendice A.5](#)) sfruttando la scomposizione direzionale (pesi A e B), si trova:

$$\Lambda(k)P(k, t) = \lambda_C(k)P(k, t) + i\lambda_S(k)\{[B(k) - A(k)] * P(k, t)\} \quad 1$$

dove $\lambda_C(k)$ e $\lambda_S(k)$ sono le trasformate spaziale di $\lambda(r)$

$$\lambda_C(k) = \int_0^\infty \cos(kr)\lambda(r)dr \quad \lambda_S(k) = \int_0^\infty \sin(kr)\lambda(r)dr$$

EBI in spazio Fourier-Laplace: riordinando i termini trovati in precedenza:

$$P(k, s) - \frac{P_0(k)}{s} = \phi(s)\Lambda(k)P(k, s) - \frac{\phi(s)}{s}P_0(k) \quad \text{con } P_0(k) = P(k, t=0) \quad 2$$

N.B. 1 e 2 insieme agli sviluppi asintotici ($x, t \rightarrow \infty \iff s, k \rightarrow 0$) di $\lambda_S(k)$, $\lambda_C(k)$ e $\phi(s)$ sono alla base della derivazione della FFPE

Obiettivo: Definire gli "ingredienti" asintotici da inserire nella EBI in spazio FL.

Statistiche anomale

Per descrivere fenomeni anomali su grandi scale, si assume un comportamento asintotico a legge di potenza per la distribuzione dei salti e dei tempi di attesa:

Spazio: $\lambda(x) \sim \frac{c_1 \sigma^\alpha}{|x|^{1+\alpha}}, \quad \alpha \in (1,2) \Rightarrow \langle x^2 \rangle = \infty$

Le trasformate $\lambda_C(k)$ e $\lambda_S(k)$ hanno il seguente andamento asintotico ($k \rightarrow 0$)
 (cfr. Appendici [A.6](#), [A.7](#) e [A.3](#))

- $\lambda_C(k) \sim 1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha$
- $\lambda_S(k) \sim \frac{2}{\alpha} \sigma k$ (linearità dovuta al momento primo finito per $\alpha > 1$)

Tempo: $\phi(t) \sim \frac{c_2 \tau^\beta}{t^{1+\beta}}, \quad \beta \in (0,1) \Rightarrow \langle t \rangle = \infty$ (tempo di attesa medio divergente)

La trasformata di Laplace $\tilde{\phi}(s)$ per $s \rightarrow 0^+$ è data dal teorema tauberiano:

$$\phi(s) \sim 1 - (s\tau)^\beta$$

Warning: τ è una costante di tempo caratteristica

N.B. Sostituendo queste espressioni nella EBI riordinata spazio F-L, si otterrà la forma esplicita della FFPE.

Regimi

- **Sub-diffusione:** $\alpha = 2$ (Gauss) e $\beta < 1$ (trappole temporali).
- **Super-diffusione:** $\alpha < 2$ (salti lunghi) e $\beta = 1$ (senza memoria).
- **Diffusione anomala mista:** $\alpha < 2$ e $\beta < 1$ (Competizione tra salti lunghi e tempi di attesa lunghi).

Recupero del caso classico: Per $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ (statistiche gaussiane e poissoniane) le espansioni si riducono ai termini standard e si ritrova l'equazione di Fokker-Planck per la normale diffusione browniana.

$$\lambda_C(k) \sim 1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha \implies \lambda_C(k) \sim 1 - \sigma^2 k^2$$

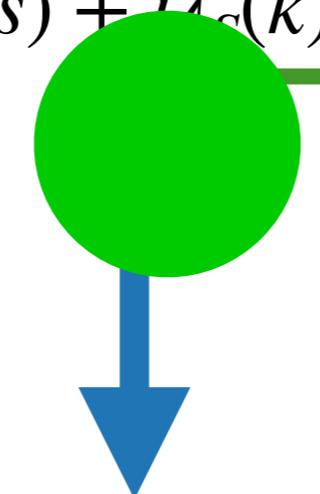
$$\lambda_S(k) \sim \frac{2}{\alpha} \sigma k \implies \lambda_S(k) \sim \sigma k$$

$$\phi(s) \sim 1 - (s\tau)^\beta \implies \phi(s) \sim 1 - s\tau$$

Derivazione della FPPE

Passando in spazio di Laplace (\mathcal{L} agisce solo su $P(k, t) \rightarrow P(k, s)$) e considerando il limite di grandi scale spaziali e temporali ($s, k \rightarrow 0$), inseriamo gli sviluppi asintotici di $\phi(s)$ e $\lambda_{C,S}(k)$ per esplicitare l'azione dell'operatore $\Lambda(k)$:

$$\Lambda(k)P(k, s) = \underline{\lambda_C(k)}P(k, s) + i\underline{\lambda_s(k)}\{[A(k) - B(k)] * P(k, s)\}$$



★ $\Lambda(k)P(k, s) = \underline{(1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha)}P(k, s) + i\underline{\frac{2}{\alpha}}\sigma k\{[A(k) - B(k)] * P(k, s)\}$

Il passaggio successivo è inserire ★ nella EBI

$$sP(k, s) - s\phi(s)[\Lambda(k)P(k, s)] = P_0(k)[1 - \phi(s)]$$

Derivazione della FPPE

Sostituzione degli Sviluppi Inserendo $\phi(s) \sim 1 - (s\tau)^\beta$ e l'azione dell'operatore $\Lambda(k)$ su P nella EBI si ottiene:

$$sP - s[1 - (s\tau)^\beta] \left[(1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha)P + i \frac{2\sigma}{\alpha} k \{ [B(k) - A(k)] * P \} \right] = P_0(k)(s\tau)^\beta$$

Sviluppando il prodotto a sinistra e trascurando i termini misti di ordine $s^{\beta+1} |k|^\alpha$ e $s^{\beta+1} k$ (ordine superiore rispetto a $s |k|^\alpha$ e $s^{\beta+1}$):

$$\cancel{sP} - [\cancel{sP} - s\sigma^\alpha |k|^\alpha P + s \cdot (\text{Termine Drift}) - s(s\tau)^\beta P] = P_0(s\tau)^\beta$$

Infine portando i termini temporali a sinistra e quelli spaziali a destra, dividendo ambo i membri per $s\tau^\beta$ si ottiene:

$$s^\beta P(k, s) - s^{\beta-1} P_0(k) = - |k|^\alpha \frac{\sigma^\alpha}{\tau^\beta} P + ik \frac{2\sigma}{\alpha \tau^\beta} \{ [B(k) - A(k)] * P \}$$

Cfr. appendice [A.8](#) per conti più dettagliati

Derivazione della FPPE

Identificazione dei Coefficienti di Trasporto

$$P(k, s)s^\beta - s^{\beta-1}P_0(k) = -ik\frac{2}{\alpha}\frac{\sigma}{\tau^\beta}\{[A(k) - B(k)] * P(k, s)\} - |k|^\alpha\frac{\sigma^\alpha}{\tau^\beta}P(k, s)$$

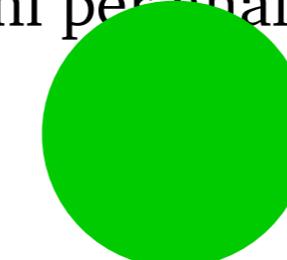
Definizioni

Confrontando il membro destro con la trasformata di Fourier della FPE

$$-ik\{D_1(k) * P(k, t)\} - k^2\{D_2(k) * P(k, t)\}$$

si possono scrivere le seguenti definizioni per analogia:

- **Drift:** $D_1(k) = \frac{2\sigma}{\alpha\tau^\beta}[A(k) - B(k)]$



(Nota: Se $A > B \Rightarrow D_1 > 0$ il segno è coerente con la velocità fisica).

- **Diffusione generalizzata:** $K_\beta^\alpha = \frac{\sigma^\alpha}{\tau^\beta}$

N.B. poiché compare $|k|^\alpha$ e non k^2 l'operatore associato non è $\frac{d^2}{dx^2}$.

⇒ L'operatore adatto che produce $|k|^\alpha$ in spazio k è la **derivata frazionaria di Riesz**, già vista nella derivazione dell'equazione di diffusione frazionaria. Essa infatti ha la proprietà seguente:

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^\alpha P(x, s)}{\partial |x|^\alpha} \right] = -|k|^\alpha P(k, s)$$

Derivazione della FPPE

L'Operatore di Fokker-Planck Frazionario

Spazio k: si definisce l'operatore $L_{FFP}(k)$ coerentemente con i coefficienti trovati:

$$L_{FFP}(k)P(k, s) = -ik \frac{2}{\alpha} \frac{\sigma}{\tau^\beta} \{ [A(k) - B(k)] * P(k, s) \} - |k|^\alpha \frac{\sigma^\alpha}{\tau^\beta} P(k, s)$$

Coefficienti: ricordando quanto visto per L_{FP} , si osserva che vale:

A. $-D_1(x) = \frac{2}{\alpha} \frac{\sigma}{\tau^\beta} [B(x) - A(x)] = -\frac{V'(x)}{m\eta_\beta}$

B. $K_\beta^\alpha = \frac{\sigma^\alpha}{\tau^\beta}$

Rappresentazione nello spazio Reale: applicando \mathcal{F}^{-1} si ottiene $L_{FFP}(x)$

$$L_{FFP}(x)P(x, s) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_\beta} + K_\beta^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} \right] P(x, s) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D_1(x) + K_\beta^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} \right] P(x, s)$$

N.B. Il termine di drift non è impattato dalla dinamica frazionaria nello spazio; conserva la medesima struttura del caso standard.

Derivazione della FPPE

Dopo l'applicazione di \mathcal{F}^{-1} l'equazione nello spazio delle coordinate (x, s) assume la forma compatta:

$$s^\beta P(x, s) - s^{\beta-1} P_0(x) = L_{FFP}(x)P(x, s)$$

Antitrasformata di Laplace: applicando \mathcal{L}^{-1} all'intera equazione:

- **Membro destro (spaziale)** - L'operatore $L_{FFP}(x)$ non agisce su s ($\leftrightarrow t$):

$$\mathcal{L}^{-1}[L_{FFP}(x)P(x, s)] = L_{FFP}(x) \quad \mathcal{L}^{-1}[P(x, s)] = L_{FFP}(x)P(x, t)$$

- **Membro sinistro (temporale)** - Si riconosce la struttura della derivata di Caputo:

$$\mathcal{L}^{-1} [s^\beta P(x, s) - s^{\beta-1} P_0(x)] = \frac{\partial^\beta P(x, t)}{\partial t^\beta}$$

La FFPE: uguagliando i membri ed esplicitando l'operatore $L_{FFP}(x)$ si scrive:

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} P(x, t) = L_{FFP}(x)P(x, t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_\beta} + K_\beta^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} \right] P(x, t)$$

Formalmente la FFPE è un'equazione integro-differenziale alle derivate parziali.

LA FFPE nello spazio e nel tempo

Commenti su $\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} P(x, t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_\beta} + K_\beta^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} \right] P(x, t)$

- L'equazione descrive la competizione tra il decadimento "lento" della memoria (sub-diffusione temporale β) e i salti lunghi "heavy-tailed" (super-diffusione spaziale α).
- In analogia con il caso standard, la soluzione formale è data da $P(x, t) = E_\beta(L_{FFP}t^\beta)P(x, 0)$

Separazione delle variabili

Cercando una soluzione del tipo $P_n(x, t) = \varphi_{n,\alpha}(x) T_{n,\beta}(t)$ la FFPE si disaccoppia in due equazioni agli autovalori indipendenti:

- **Spaziale:** $L_{FFP}(x)\varphi_{n,\alpha}(x) = -\lambda_n \varphi_{n,\alpha}(x)$.
 - Nel caso libero ($V = \text{cost}$) le $\varphi_{n,\alpha}(x)$ sono distribuzioni stabili di Levy di indice α .
 - In presenza di un potenziale con $V'(x) \neq 0$ le $\varphi_{n,\alpha}(x)$ vengono generalmente deformate, mantenendo comunque le code a potenza.

- **Temporale:** $\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} T_{n,\beta}(t) = -\lambda_n T_{n,\beta}(t)$.

L'equazione temporale è soddisfatta dalla funzione di Mittag-Leffler:

$$T_{n,\beta}(t) = E_\beta(-\lambda_n t^\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n t^\beta)^k}{\Gamma(1 + \beta k)} \sim \frac{1}{\lambda_n t^\beta} \quad (t \rightarrow \infty)$$

Propagatore

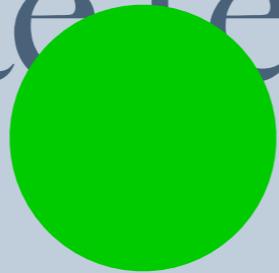
- La soluzione della FFPE è dunque data da $P_{\alpha,\beta}(x, t) = \sum_n c_n \varphi_{n,\alpha}(x) T_{n,\beta}(t)$
- Nel caso $P(x,0) = \delta(x - x') = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,\alpha}(x') \varphi_{n,\alpha}(x)$ la soluzione è data da:

$$P_{\alpha,\beta}(x, t | x', 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,\alpha}(x') \varphi_{n,\alpha}(x) E_{\beta}(-\lambda_n t^{\beta})$$

Conseguenze Fisiche

- ▶ **Varianza infinita:** a causa della natura della componente spaziale ($\alpha < 2$), la varianza diverge per ogni $t > 0$: $\langle x^2(t) \rangle = \infty$.
- ▶ **Non markovianità:** il decadimento a legge di potenza nel tempo indica che il sistema ha "memoria" della condizione iniziale molti più a lungo rispetto al caso diffusivo classico (esponenziale).

Time-FFPE: una soluzione analitica tramite l'espansione in autofunzioni



Riferimenti principali:

- 1) Anomalous Diffusion and Relaxation Close to Thermal Equilibrium: A Fractional Fokker-Planck Equation Approach. R. Metzler, E. Barkai, J. Klafter, Phys. Rev. Lett., 82(18), pp. 3563–3567 (1999)
- 2) H. Risken, The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications, Springer.

L'equazione modello: $\alpha = 2$, $0 < \beta < 1$ - La TFFPE descrive la competizione tra un termine di drift esterno e una diffusione "rallentata" dalla memoria:

$$\frac{\partial^\beta P(x, t)}{\partial t^\beta} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_\beta} + K_\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] P(x, t)$$

- **Rilassamento anomalo:** a differenza della FPE classica, i modi di rilassamento non decadono esponenzialmente ma seguono la funzione di $E_\beta(-t/\tau)^\beta$, esibendo code a legge di potenza.

1. **Diffusione libera ($V = 0$): sub-diffusione** - In assenza di forze, il sistema mostra una crescita della varianza più lenta rispetto al processo di Brown:

$$\langle x^2(t) \rangle_0 = \frac{2t}{\Gamma(1+\rho)} \quad (\text{Sub-diffusione})$$

→ Derivazione in [Appendice [A.9](#)]

2. **Termodinamica: relazione di fluttuazione-dissipazione** - Se il potenziale $V(x)$ è confinante $\left(t.c. Z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-V(x)} dx < \infty \right)$ si ha spettro discreto con $\lambda_0 = 0 \Rightarrow$ Il sistema rilassa verso uno stato stazionario. Affinché tale stato coincida con l'equilibrio termico di Boltzmann ($P_{st} \propto e^{-V/k_B T}$), è necessario imporre:

$$K_\beta = \frac{k_B T}{m\eta_\beta} \quad (\text{I relazioni di Einstein generalizzata})$$

→ Derivazione in [Appendice [A.10](#)]

3. **Legame drift-diffusione (II relazione di Einstein generalizzata)** - In presenza di forza costante ($V(x) = -Fx$), il drift anomalo $\langle x(t) \rangle_F$ e le fluttuazioni all'equilibrio $\langle x^2(t) \rangle_0$ sono legati dalla temperatura:

$$\underbrace{\langle x(t) \rangle_F}_{\text{Drift anomalo}} = \frac{F}{2k_B T} \quad \underbrace{\langle x^2(t) \rangle_0}_{\text{MSD libero}} = \frac{F}{m\eta_\beta} \frac{t^\beta}{\Gamma(1 + \beta)}$$

→ Derivazione in [Appendice A.11 - A]

Soluzione formale della T-FFPE (Operatore di Evoluzione)

In analogia col caso classico (dove l'evoluzione è data da $U(t) = e^{L_{FP}t}$), la soluzione formale è definita dall'operatore di evoluzione temporale frazionario $U(t) = E_\beta(L_{FP}t^\beta)$:

$$P(x, t) = E_\beta(L_{FP}t^\beta)P(x, 0)$$

Verifica: sfruttando la proprietà della derivata di Caputo $\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} E_\beta(\lambda t^\beta) = \lambda E_\beta(\lambda t^\beta)$ si dimostra che la soluzione soddisfa l'equazione:

$$\underbrace{\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left[E_\beta(L_{FP}t^\beta)P(x, 0) \right]}_{P(x, t)} = \underbrace{L_{FP} E_\beta(L_{FP}t^\beta)P(x, 0)}_{P(x, t)} = L_{FP}P(x, t) \quad (\text{C.V.D.})$$

Obiettivo: trovare la soluzione della TFFPE disaccoppiando la dinamica temporale dalla struttura spaziale.

1. **L'ansatz di fattorizzazione:** si cerca una soluzione particolare come prodotto di due funzioni indipendenti: $P_n(x, t) = \varphi_n(x)T_n(t)$.

Sostituendo nella TFFPE $\frac{\partial^\beta P}{\partial t^\beta} = L_{FP}P$ e dividendo per $\varphi_n T_n$:

$$\frac{1}{T_n(t)} \frac{\partial^\beta T_n(t)}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\varphi_n(x)} L_{FP}[\varphi_n(x)] = -\lambda_n$$

I due membri dipendono da variabili diverse (t e x). Devono essere uguali a una costante di separazione $-\lambda_n$ (autovalore).

2. Il problema temporale (risolto)

L'evoluzione temporale di ogni modo è governata da un'equazione frazionaria lineare:

$$\frac{d^\beta T_n}{dt^\beta} = -\lambda_n T_n \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = E_\beta(-\lambda_n t^\beta)$$

Risultato: ogni modo decade secondo una funzione di Mittag-Leffler.

3. Il problema spaziale (da analizzare)

La struttura spaziale è determinata dall'equazione agli autovalori: $L_{FP}\varphi_n(x) = -\lambda_n\varphi_n(x)$

Nota: L'operatore di Fokker-Planck L_{FP} non è autoaggiunto (hermitiano).

→ Per garantire l'esistenza di una base ortonormale completa e giustificare l'espansione in serie, è necessario prima trasformare questo operatore (slide successive).

Fattorizzazione dell'operatore L_{FP}

Obiettivo: maneggiare L_{FP} per ottenere un operatore hermitiano

L'operatore L_{FP} non è autoaggiunto: non è consentito l'uso del teorema spettrale per garantire una base ortonormale.

Strategia: riscrivere L_{FP} in una forma fattorizzata per poi trasformarlo in un operatore simmetrico L .

- **Il potenziale adimensionale:** si definisce il potenziale scalato $\Phi(x) = V(x)/k_B T$. Sfruttando la relazione di Einstein generata ($K_\beta = k_B T/m\eta_\beta$), il coefficiente di drift si riscrive come:
- $$\frac{V'(x)}{m\eta_\beta} \rightarrow K_\beta \Phi'(x)$$
- **Fattorizzazione:** sostituendo nell'operatore e raccogliendo K_β , si nota che la somma di drift e diffusione si può riscrivere come:

$$\underbrace{\Phi'(x)P + \frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{Drift} + \text{Diffusione}} \equiv \underbrace{e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} (e^{\Phi(x)} P)}_{\text{Derivata compatta}}$$

→ Dettagli di calcolo in appendice [A.13]

⇒ Dunque l'operatore assume la struttura finale compatta: $L_{FP} = K_\beta \frac{\partial}{\partial x} e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)}$

La simmetria nascosta di L_{FP}

Il problema: rispetto al prodotto scalare standard, l'operatore L_{FP} non è autoaggiunto a causa del termine di drift.

→ Dimostrazione in appendice [[A.14](#)]

$L_{FP}^\dagger \neq L_{FP}$ \Rightarrow Impossibile applicare il teorema spettrale

Verso la soluzione: H.Risken [[Ref. I.8](#)] dimostra che l'operatore possiede una simmetria intrinseca se considerato in uno spazio con metrica data dal peso $e^{\Phi(x)}$.

Si definisce il prodotto scalare pesato: $\langle u, v \rangle_{e^\Phi} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{\Phi(x)}dx$

In questo spazio metrico modificato, vale la relazione di simmetria:

$$\langle u, L_{FP}v \rangle_{e^\Phi} = \langle L_{FP}u, v \rangle_{e^\Phi}$$

→ Dimostrazione in [Appendice [A.15](#)]

⇒ Segue che l'operatore L_{FP} è autoaggiunto per $\langle \rangle_{e^\Phi}$: $L_{FP}^\dagger = L_{FP}$ in $\langle \rangle_{e^\Phi}$

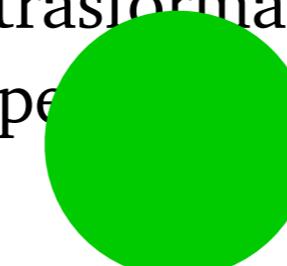
Verso l'operatore autoaggiunto L

Strategia: verso l'operatore hermitiano L

Sebbene L_{FP} sia autoaggiunto in $\langle \cdot \rangle_{e^\Phi}$, per calcolare agevolmente λ_n e φ_n è conveniente ricondursi alla teoria spettrale che impiega il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Idea chiave: si cerca una trasformazione unitaria che assorba il peso e^Φ , distribuendolo equamente tra le due funzioni del prodotto scalare.

Ciò consente di definire, tramite una trasformazione di similitudine, un nuovo operatore L che risulta hermitiano rispetto al prodotto scalare standard.



Trasformazione delle funzioni: $\varphi_n(x) \rightarrow \psi_n(x) \equiv e^{\frac{\Phi(x)}{2}} \varphi_n(x)$

(In questo modo il prodotto scalare pesato diventa standard: $\int \varphi^2 e^\Phi = \int \psi^2$)

Derivazione dell'operatore L : l'equazione originale $L_{FP} \varphi_n = -\lambda_n \varphi_n$ diventa $L \psi_n = -\lambda_n \psi_n$

$$L_{FP} \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} \psi_n \right) = -\lambda_n \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} \psi_n \right) \xrightarrow{e^{\Phi/2}} \underbrace{\left(e^{\frac{\Phi}{2}} L_{FP} e^{-\frac{\Phi}{2}} \right) \psi_n}_{L} = -\lambda_n \psi_n$$

L'operatore autoaggiunto L

$$L = e^{\frac{\Phi}{2}} L_{FP} e^{-\frac{\Phi}{2}}$$

- Dimostrazione di L operatore autoaggiunto in [Appendice [A.16](#)]
- Potenziale Φ che rende l'operatore autoaggiunto in [Appendice [A.18](#)]

Proprietà di L ($V(x)$ potenziale confinante)

1. **Spettro discreto e non negativo**: $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ [Appendice [A.17](#)]
 - N.B. Il fatto che $\lambda_n \geq 0$ garantisce che le soluzioni decadano nel tempo verso l'equilibrio (modi smorzati con $E_\beta(-\lambda_n t^\beta)$).
2. **Ortonormalità**: le $\{\psi_n\}$ formano una base ortonormale $\left(\int \psi_n \psi_m = \delta_{nm} \right)$.
3. Le autofunzioni di L_{FP} e L sono legate da $\varphi_n(x) = e^{-\frac{\Phi(x)}{2}} \psi_n(x)$.
4. $\psi_n(x)$ e $\varphi_n(x)$ condividono lo stesso spettro di autovalori.

Il propagatore

Completezza

Le autofunzioni $\{\psi_n\}$ formano una base completa nello spazio L^2 , quindi vale la chiusura:

$$\delta(x - x') = \sum_n \psi_n(x) \psi_n(x') = e^{\frac{\Phi(x) + \Phi(x')}{2}} \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n(x') = e^{\Phi(x')} \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n(x')$$

* Poiché l'espressione è valida sotto il vincolo della delta, possiamo porre $e^{\Phi(x)} = e^{\Phi(x')}$.

Si preferisce la forma in x' perché costante rispetto all'operatore L_{FP} che agisce su x .

Il propagatore

Applicando l'operatore di evoluzione temporale alla condizione iniziale si scrive:

$$P(x, t | x', t') = \underbrace{e^{\Phi(x') - \Phi(x)}}_{E_\beta} [L_{FP}(t - t')^\beta] \delta(x - x')$$

Sfruttando l'espressione ricavata sopra per la $\delta(x - x')$:

$$P(x, t | x', t') = e^{\Phi(x')} \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n(x') \underbrace{\left(E_\beta [L_{FP}(t - t')^\beta] \varphi_n(x) \right)}_{E_\beta(-\lambda_n(t-t')^\beta) \varphi_n(x)}$$

Ritornando alle funzioni ψ_n per simmetria finale:

$$P(x, t | x', t') = e^{\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{2}} \sum_n \psi_n(x) \psi_n(x') E_\beta(-\lambda_n(t - t')^\beta)$$

- Il pre-fattore $e^{-\Delta\Phi/2}$ rompe la simmetria spaziale privilegiando le zone a basso potenziale.
- La sommatoria costituisce un kernel hermitiano che descrive l'evoluzione dei modi di rilassamento del sistema, disaccoppiati dal peso statistico di equilibrio $e^{-\Phi}$

Limite asintotico ($t \rightarrow \infty$): Per tempi lunghi, il termine dominante della sommatoria è quello associato a $\lambda_0 = 0$

$$P_{st}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(x, t | x') = e^{\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{2}} \psi_0(x) \psi_0(x')$$

Come derivato analiticamente in [Appendice [A.10](#)] imponendo che $P_{st} = P_{eq}$ con P_{eq} distribuzione di Boltzmann si può scrivere:

$$P_{st}(x) = P_{eq}(x) \propto e^{-\Phi(x)}$$

Identificazione dello stato fondamentale confrontando le due espressioni sopra, si ricava:

$$\psi_0(x) \propto \sqrt{P_{eq}(x)} = e^{-\frac{\Phi(x)}{2}}$$

Nota: i termini in x' si elidono cancellando la memoria della condizione iniziale

Rilassamento lento: la dinamica di avvicinamento all'equilibrio è anomala.

Per tempi lunghi ($\lambda_1 t^\beta \gg 1$), l'andamento asintotico della Mittag-Leffler implica che la deviazione dall'equilibrio decada come una legge di potenza (dominata da λ_1):

$$P(x, t) - P_{st}(x) \propto \frac{(t - t')^{-\beta}}{\lambda_1 \Gamma(1 - \beta)}$$

Risoluzione della T-FFPE tramite un'analogia quantistica

Riferimento principale:
H. Risken, The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications, Springer.

Riscrittura dell'operatore L

Si consideri la seguente FPE standard:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = L_{FP}P = -\frac{\partial}{\partial x}D_1(x)P + K_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}P$$

Applicando la trasformazione $\psi(x, t) = e^{\Phi(x)/2}P(x, t)$, l'equazione diventa:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\psi \quad (L = e^{\frac{\Phi}{2}}L_{FP}e^{-\frac{\Phi}{2}} \text{ operatore hermitiano})$$

Forma esplicita di L : svolgendo i calcoli (cfr. Appendice [A.18](#) e [A.19](#))

L assume la forma seguente:

$$L = K_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{eff}(x)$$

$$\text{con potenziale efficace } V_{eff}(x) = \frac{1}{4}\frac{D_1^2(x)}{K_1} + \frac{1}{2}D'_1(x)$$

N.B. La forma funzionale del drift $D_1(x)$ determina la topologia di V_{eff} .

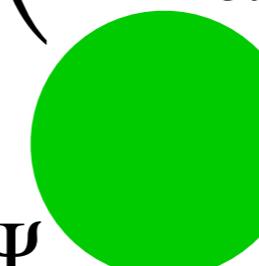
L'equazione diffusiva trasformata è formalmente identica all'equazione di Schrödinger con tempo immaginario: $t_{Sc} = -i\hbar t$:

- **FPE trasformata:**

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\psi = \left(+K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{eff}(x) \right) \psi$$

- **Schrödinger con $t_{Sc} = -i\hbar t$:**

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t_{Sc}} = H\Psi \quad \xrightarrow{t_{Sc} = -i\hbar t} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -H\Psi = \left(+\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x) \right) \Psi$$



Risultati

1. L ha la medesima struttura di $-H$
2. Prendendo le soluzioni dell'equazione di Schrödinger con $V = V_{eff}$ e sostituendo $m \rightarrow \hbar^2/2K_1$ e $t_{sc} \rightarrow -i\hbar t$, si ottengono gli autostati di L

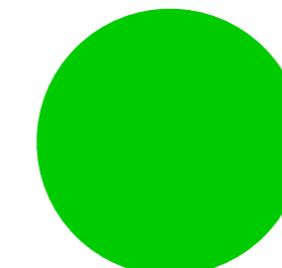
Mappa tra gli spettri $E_n \leftrightarrow \lambda_n$

Poiché $L = -H$, le equazioni agli autovalori sono speculari:

- **Quantistica:** $H\psi_n = +E_n\psi_n$
- **Diffusione:** $L\psi_n = -\lambda_n\psi_n$

Sostituendo $L = -H \implies -H\psi_n = -\lambda_n\psi_n \implies H\psi_n = \lambda_n\psi_n$

Conclusione: $\lambda_n = E_n$



Per trovare i λ_n del sistema diffusivo:

1. Prendere la formula analitica nota per i livelli energetici $E_n(\hbar, m, \omega)$.
2. Sostituire la massa m con i parametri diffusivi: $m \rightarrow \hbar^2/2K_1$.
3. Imporre l'identità dei potenziali $V = V_{eff}$ per fissare i parametri (es. ω).

Risultato: La costante \hbar si elide e si ottengono i λ_n in funzione di K_1 e “ $D_1(x)$ ”.

Sebbene l'analogia sia stata derivata per la FPE standard, il risultato è valido anche per la T-FFPE:

$$\frac{\partial^\beta P}{\partial t^\beta} = L_{FP}P$$

Poiché la derivata frazionaria agisce solo sul tempo, l'operatore spaziale L_{FP} (e il suo trasformato hermitiano L) rimane invariato.

⇒ Le autofunzioni spaziali $\psi_n(x)$ e gli autovalori λ_n calcolati via Schrödinger sono gli stessi per il caso anomalo.

Espansione della Soluzione:

La soluzione completa della T-FFPE si ottiene ponendo la base spaziale con il rilassamento temporale frazionario:

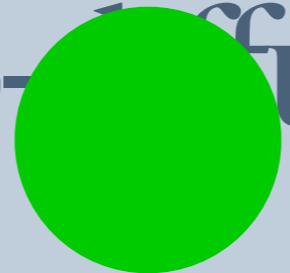
$$P(x, t | x', t') = e^{\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n(x') E_\beta(-\lambda_n(t - t')^\beta)$$

Dove:

- $\psi_n(x)$: autostati dell'hamiltoniana equivalente.
- λ_n : livelli energetici di H espressi in funzione di K_1 e “ $D_1(x)$ ” .
- E_β : Funzione di Mittag-Leffler

Conclusione: un complesso problema integro-differenziale in x e t è stato ridotto alla risoluzione di un'equazione di Schrödinger stazionaria

Una mappa tra la soluzione diffusiva e la soluzione sub-diffusiva per la T-FFPE



Riferimento principale:

Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application.
E.Barkai, PHYSICAL REVIEW E, VOLUME 63, 046118 - 2001

La mappa integrale

L'ansatz integrale: la soluzione $P_\beta(x, t)$ dalla T-FFPE è costruita trasformando la soluzione markoviana della FP standard, $P_1(x, \tau)$, attraverso una “randomizzazione” del tempo:

$$P_\beta(x, t) = \int_0^{+\infty} n(\tau, t) P_1(x, \tau) d\tau$$

Interpretazione fisica: è come se il sistema possedesse due “orologi”:

- Tempo fisico (t): il tempo misurato in laboratorio (include i periodi di stasi causa trapping).
- Tempo operativo (τ): rappresenta l' "età di vita" del sistema. Misura l'evoluzione effettiva nello spazio delle fasi e, a differenza di t , durante gli eventi di intrappolamento ("congelamento" del tempo interno).

Nota: nel caso della diffusione standard, i due orologi sono sincronizzati ($\tau = t$).

Nel caso frazionario, la relazione tra i due tempi diventa stocastica ($\tau \neq t$).

Il ruolo del kernel $n(\tau, t)$

La funzione $n(\tau, t)$ è la densità di probabilità che lega i due tempi. Rappresenta la probabilità che, all'istante fisico t , il sistema abbia maturato un'età operativa τ .

➡ **Sintetizzando:** l'integrale costruisce la soluzione P_β sommando le densità spaziali $P_1(x, \tau)$ corrispondenti a ogni possibile tempo operativo τ , ciascuna pesata con la probabilità $n(\tau, t)$ che tale tempo sia stato effettivamente raggiunto all'istante t .

L'origine della mappa integrale

La dinamica subdiffusiva $X(t)$ può essere interpretata come la composizione di due processi stocastici indipendenti:

$$X(t) = X_1(S(t))$$

→ L'evoluzione del sistema è separata in una componente geometrica e una temporale.

Le componenti del processo

- $X_1(\tau)$ (processo genitore): è un processo di Markov rispetto a τ . Definisce la topologia delle traiettorie nello spazio delle fasi (es. processo di Wiener).
 - Significato: descrive la dinamica spaziale "pura", ovvero l'evoluzione geometrica che il sistema seguirebbe in un flusso temporale omogeneo (assenza di trapping), determinando gli spostamenti indipendentemente dai tempi di attesa.
- $S(t)$ (processo direttore): è il subordinatore inverso (o "operational time clock"), un processo temporale non negativo e non decrescente che mappa il tempo fisico t nel tempo operativo τ .
 - $S(t)$ è l'inverso del subordinatore $T(\tau)$ (maggiori dettagli in [Appendice [A.21](#)])

L'origine della mappa integrale

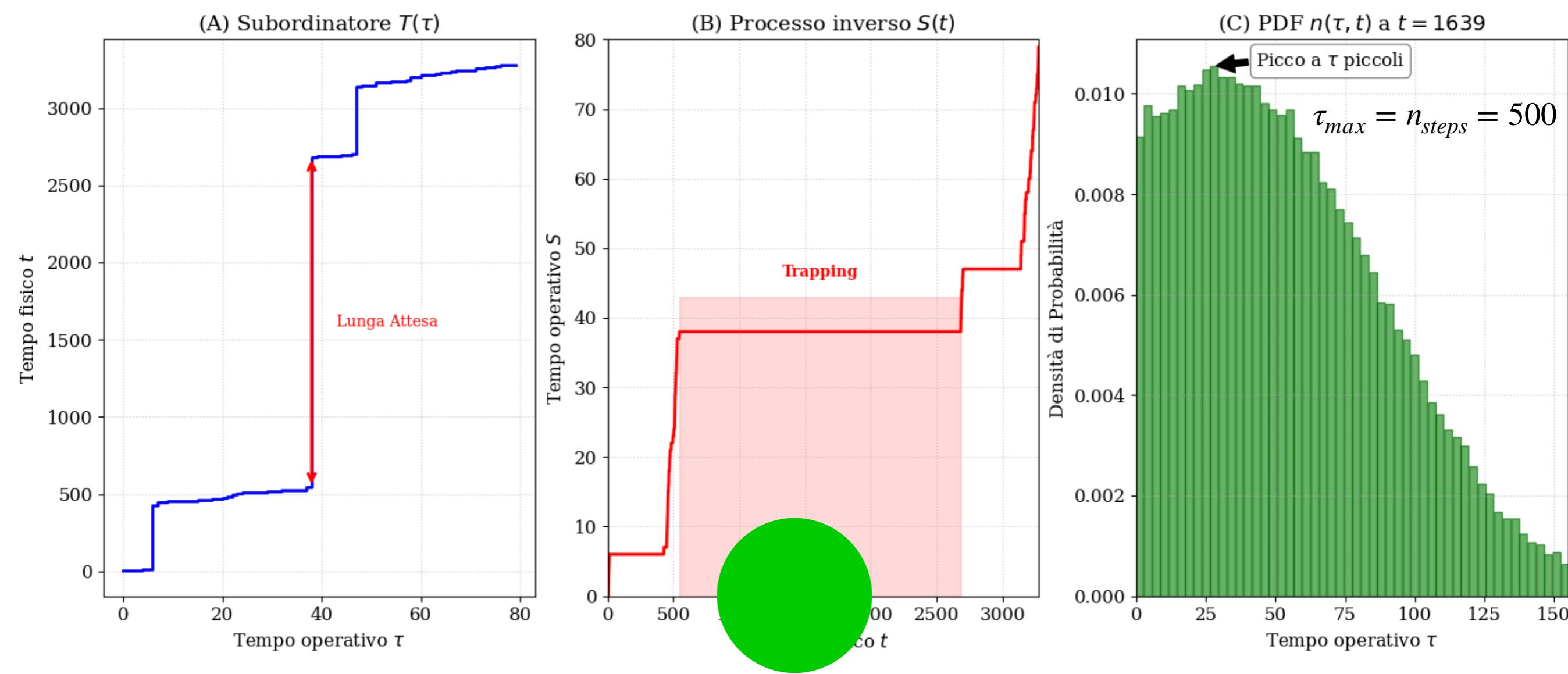
Assumendo che la geometria (X_1) e la cronologia (S) siano stocasticamente indipendenti, la densità di probabilità totale $P_\beta(x, t)$ si ottiene marginalizzando rispetto al tempo operativo:

$$P_\beta(x, t) = \int_0^\infty \underbrace{P_1(x, \tau)}_{\text{PDF genitore}} \cdot \underbrace{n(\tau, t)}_{\text{PDF direttore}} d\tau$$

Dove $n(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{P}(S(t) \leq \tau)$ è la densità del processo direttore $S(t)$.

La mistura di gaussiane $(\sigma \propto \sqrt{\tau})$ nell'integrazione non è più una gaussiana:

- ▶ poiché nella subdiffusione i tempi operativi τ tendono ad essere piccoli (a causa dei lunghi intrappolamenti), $n(\tau, t)$ pesa molto le gaussiane strette (τ piccolo).
- ▶ Questo crea una distribuzione $P_\beta(x, t)$ che ha una cuspide in x_0 : rappresenta le particelle che sono rimaste ferme.
- Diffusione standard ($\beta = 1$): $n(\tau, t) = \delta(\tau - t)$
- Sfruttando la relazione $S(t) \leq \tau \iff T(\tau) \geq t \implies n(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{P}(T(\tau) > t)$



- A. Campionamento degli incrementi ΔT da una distribuzione Lévy stabile.
 $(\alpha = 0.6, \beta = 1, loc = 0, scale = 1)$. Tempo fisico t : somma cumulativa degli incrementi.
- B. Griglia temporale lineare di 2000 punti.
Determinazione del numero di passi operativi τ completati per ogni istante t (tempo di primo passaggio). \Rightarrow I salti in $T(\tau)$ vengono mappati in plateau in $S(t)$ (periodi di trapping)
- C. Simulazione Monte Carlo di 100.000 particelle, selezionando solo quelle che hanno raggiunto il tempo di osservazione target ($t_{fix} = 1639$).
Registrazione dello stato τ delle particelle idonee al tempo fisico $t_{fix} = 1639$. \rightarrow Istogramma normalizzato

Derivazione del kernel $n(\tau, t)$ (1)

1. L'equazione di partenza

Si considera la T-FFPE in spazio di Laplace (variabile $t \rightarrow s$), includendo la condizione iniziale $P(x, 0) = \delta(x - x_0)$:

$$s^\beta \tilde{P}_\beta(x, s) - s^{\beta-1} \delta(x - x_0) = L_{FP} \tilde{P}_\beta(x, s)$$

2. Sostituzione dell'ansatz

L'ansatz integrale $\tilde{P}_\beta(x, s) = \int_0^\infty \tilde{n}(\tau, s) P_1(x, \tau) d\tau$ viene inserito nell'equazione.

Poiché l'operatore spaziale agisce solo su P_1 e non su \tilde{n} e la proprietà fondamentale della FP standard $\partial_\tau P_1 = L_{FP} P_1$, si ottiene:

$$L_{FP} \int_0^\infty \tilde{n}(\tau, s) P_1(x, \tau) d\tau = \int_0^\infty \tilde{n}(\tau, s) \underbrace{\frac{\partial P_1(x, \tau)}{\partial \tau}}_{L_{FP} P_1} d\tau$$

3. Integrazione per parti

Per isolare P_1 dalla derivata temporale, si esegue un'integrazione per parti del termine a destra:

$$\int_0^\infty \tilde{n}(\tau, s) \frac{\partial P_1}{\partial \tau} d\tau = \underbrace{\left[\tilde{n}(\tau, s) P_1(x, \tau) \right]_0^\infty}_{\text{Termini di bordo}} - \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{n}(\tau, s)}{\partial \tau} P_1(x, \tau) d\tau$$

Analisi dei termini di bordo e raggruppamento

4. Valutazione dei limiti $[...]\Big|_0^\infty$

Viene valutato il termine di bordo $\left[\tilde{n}(\tau, s) P_1(x, \tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=\infty}$:

- **Limite superiore ($\tau \rightarrow \infty$)**: $\tilde{n}(\infty, s) = 0$ (per l'integrabilità della PDF) e P_1 è limitata.
 \Rightarrow Il termine si annulla.
- **Limite inferiore ($\tau \rightarrow 0$)**: $P_1(x, 0) = \delta(x - x_0)$. $\Rightarrow -\tilde{n}(0, s)P_1(x, 0) = -\tilde{n}(0, s)\delta(x - x_0)$.

5. L'equazione risultante

Sostituendo il risultato dell'integrazione per i termini di bordo nell'equazione originale, si ha:

$$s^\beta \int_0^\infty \tilde{n} P_1 d\tau - s^{\beta-1} \delta(x - x_0) = \left[-\tilde{n}(0, s) \delta(x - x_0) - \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tau} P_1 d\tau \right]$$

6. Raggruppamento

Riorganizzando i termini e raggruppando i coefficienti rispetto all'integrale di P_1 e alla Delta di Dirac, l'equazione diviene:

$$\int_0^\infty \left[s^\beta \tilde{n}(\tau, s) + \frac{\partial \tilde{n}(\tau, s)}{\partial \tau} \right] P_1(x, \tau) d\tau + [\tilde{n}(0, s) - s^{\beta-1}] \delta(x - x_0) = 0$$

Derivazione del kernel $n(\tau, t)$ (3)

$$\int_0^\infty \left[s^\beta \tilde{n}(\tau, s) + \frac{\partial \tilde{n}(\tau, s)}{\partial \tau} \right] P_1(x, \tau) d\tau + [\tilde{n}(0, s) - s^{\beta-1}] \delta(x - x_0) = 0$$

7. Condizioni di validità generale

Affinché l'equazione precedente sia valida $\forall x$ e indipendentemente dalla specifica forma della soluzione $P_1(x, \tau)$, è necessario che i termini che moltiplicano la δ e l'integrale su P_1 si annullino separatamente:

- **Condizione A (su δ)** - Determina la condizione iniziale in τ :

$$\tilde{n}(0, s) - s^{\beta-1} = 0 \quad \text{cioè} \quad \tilde{n}(0, s) = s^{\beta-1}$$

- **Condizione B (sull'integrale)** - Determina l'evoluzione differenziale del kernel:

$$\frac{\partial \tilde{n}(\tau, s)}{\partial \tau} + s^\beta \tilde{n}(\tau, s) = 0 \implies \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tau} = -s^\beta \tilde{n}$$

8. Soluzione esplicita in Laplace

Risolvendo l'equazione differenziale con la condizione iniziale derivata, si ottiene:

$$\tilde{n}(\tau, s) = \underbrace{s^{\beta-1}}_{\text{Cond. Iniziale}} \cdot \underbrace{e^{-s^\beta \tau}}_{\text{Decadimento}}$$

Questa funzione coincide con la trasformata della densità associata al processo inverso di un subordinatore stabile. (“*inverse one sided Levy stable density*”).

Derivazione del kernel $n(\tau, t)$ (4)

La soluzione $\tilde{n}(\tau, s) = s^{\beta-1}e^{-s^\beta\tau}$ nel dominio del tempo: $n(\tau, t)$

9. Identità fondamentale (densità stabile unilatera $l_\beta(z)$ con $0 < \beta < 1$) - $\mathcal{L}\{l_\beta(z)\}(s) = e^{-s^\beta}$

10. Scaling temporale - Applicando la proprietà di scaling $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)\right\} = F(ks)$ con $k = \tau^{1/\beta}$, si ottiene la trasformata del termine esponenziale:

$$\mathcal{L}\left\{g(t, \tau) = \frac{1}{\tau^{1/\beta}}l_\beta\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\}(s) = e^{-(s\tau^{1/\beta})^\beta} = e^{-\tau s^\beta}$$

11. Relazione differenziale

L'espressione del kernel in Laplace $\tilde{n}(\tau, s) = s^{\beta-1}e^{-\tau s^\beta}$ può essere riscritta come la derivata rispetto a s della funzione appena trovata:

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-\tau s^\beta}\right) = -\tau\beta s^{\beta-1}e^{-\tau s^\beta} = -\tau\beta\tilde{n}(\tau, s) \implies \tilde{n}(\tau, s) = -\frac{1}{\tau\beta} \frac{d}{ds}\left(e^{-\tau s^\beta}\right)$$

12. Antitrasformata della derivata e $n(\tau, t)$

Ricordando la proprietà della trasformata di Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t)$, possiamo antitrasformare termine a termine:

$$n(\tau, t) = -\frac{1}{\tau\beta} \cdot [-t \cdot g(t, \tau)] = \frac{t}{\tau\beta}g(t, \tau) \implies n(\tau, t) = \frac{1}{\beta} \frac{t}{\tau^{1+1/\beta}} l_\beta\left(\frac{t}{\tau^{1/\beta}}\right)$$

1. Fondazione microscopica (il subordinatore)

Il tempo fisico $T(\tau)$ è la somma cumulativa di τ tempi di attesa elementari i.i.d. ΔT_i con varianza infinita ($\phi(t) \sim t^{-(1+\beta)}$). In forza del CLT Generalizzato (e usando l'espansione Tauberiana per $s \rightarrow 0$), la pdf di $T(\tau)$ converge a una legge stabile unilaterale con:

$$\mathcal{L}\{T(\tau)\}(s) \approx (1 - s^\beta)^\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau s^\beta}$$

2. Dal processo al kernel

Possiamo derivare $n(\tau, t)$ sfruttando la dualità tra il tempo fisico T e l'età operativa S :

$$n(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{P}[S \geq \tau] = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{P}[T(\tau) \geq t]$$

3. Calcolo esplicito

La trasformata di Laplace della CDF complementare si ottiene dalla statistica del subordinatore derivata sopra:

$$\mathcal{L}\{\mathbb{P}[T(\tau) \geq t]\}(s) = \frac{1 - \mathcal{L}\{T(\tau)\}}{s} = \frac{1 - e^{-\tau s^\beta}}{s}$$

Derivando rispetto a τ :

$$\tilde{n}(\tau, s) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1 - e^{-\tau s^\beta}}{s} \right] = s^{\beta-1} e^{-\tau s^\beta}$$

⇒ L'approccio probabilistico restituisce esattamente lo stesso kernel dell'ansatz analitico.

Proprietà della mappa

Normalizzazione e positività

Poiché $P_1(x, \tau)$ è una PDF e $n(\tau, t)$ è una PDF (densità dei tempi di attesa):

- $P_\beta(x, t)$ è automaticamente positiva ($P_\beta \geq 0$)
- $P_\beta(x, t)$ è correttamente normalizzata

Ripristino delle unità fisiche

L'analisi è stata condotta in forma adimensionale.

Reintroducendo i coefficienti di diffusione K_1 e K_β : $P_\beta(x, t) = \int_0^\infty n(\tau, t) P_1(x, \tau_{phys}) d\tau$

La relazione di scaling tra i tempi è dettata dal rapporto dei coefficienti: $\tau_{phys} = \frac{K_\beta}{K_1} \tau = t'$

$$P_\beta(x, t) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{K_\beta}{K_1} \right)^{1/\beta} t \int_0^\infty \frac{1}{t'^{1+1/\beta}} l_\beta \left(\frac{K_\beta^{1/\beta} t}{K_1^{1/\beta} t'^{1/\beta}} \right) P_1(x, t') dt'$$

N.B. K_1 è un parametro puramente strumentale che serve a definire il processo ausiliario P_1 . Sostituendo la forma esplicita di P_1 nell'integrale, tutti i termini K_1 si elidono.
 ⇒ La fisica di $P_\beta(x, t)$ dipende solo dal coefficiente frazionario K_β .

L'espansione in autofunzioni della soluzione P_1 dell'equazione di FP standard è:

$$P_1(x, \tau) = e^{\frac{\Phi_0 - \Phi}{2}} \sum_n \psi_n(x) \psi_n(x_0) e^{-\lambda_n \tau}$$

Applicazione della mappa: sostituendo P_1 nell'integrale di subordinazione, l'integrale agisce solo sulla componente temporale esponenziale:

$$P_\beta(x, t) = e^{\frac{\Phi_0 - \Phi}{2}} \sum_n \psi_n(x) \psi_n(x_0) \int_0^\infty n(\tau, t) e^{-\lambda_n \tau} d\tau$$

N.B. Tenendo conto della trasformata di Laplace del kernel ($\tilde{n} \sim e^{-\tau u^\beta}$), si può dimostrare che l'integrale coincide con la funzione di Mittag-Leffler [Appendice [A.22](#)]:

$$\int_0^\infty n(\tau, t) e^{-\lambda_n \tau} d\tau = E_\beta(-\lambda_n t^\beta)$$

⇒ Si ritrova la soluzione P_β espansa in autofunzioni:

$$P_\beta(x, t) = e^{\frac{\Phi_0 - \Phi}{2}} \sum_n \psi_n(x) \psi_n(x_0) E_\beta(-\lambda_n t^\beta)$$

CAPITOLO IV

IL PROCESSO DI ORNSTEIN–
UHLENBECK FRAZIONARIO NEL TEMPO

Soluzione analitica

Riferimento principale:
H. Risken, The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications, Springer.

Il processo O-U frazionario

Si consideri la T-FFPE per il processo O-U caratterizzato da drift lineare $D_1(x) = -\theta x$. Richiamando l'analogia quantistica, la trasformazione unitaria $\psi(x, t) = P(x, t)e^{\Phi(x)/2}$ (con $\Phi(x) = \theta x^2/2K_\beta$) mappa l'evoluzione spaziale nell'operatore hermitiano:

$$L = K_\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{eff}(x)$$

Il potenziale armonico: la forma lineare del drift determina un potenziale efficace equivalente ad un oscillatore armonico traslato:

$$V_{eff}(x) = \frac{D_1^2(x)}{4K_\beta} + \text{[redacted circle]} = \theta \left(\frac{\theta x^2}{4K_\beta} - \frac{1}{2} \right)$$

Fattorizzazione di L in operatori bosonici

Introducendo la coordinata scalata $\xi = \sqrt{\frac{\theta}{2K_\beta}}x$ (ξ adimensionale), si definiscono gli operatori di creazione b^\dagger e distruzione b :

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right), \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right)$$

Sostituendo queste espressioni, si dimostra l'equivalenza algebrica tra l'operatore differenziale L e la sua forma fattorizzata [Appendice [A.23](#)]:

$$L = -\theta b^\dagger b$$

Scelta della base e autovalori di L

Poiché $L = -\theta b^\dagger b$, risulta naturale lavorare nella base $\{|n\rangle\}$ che diagonalizza l'operatore numero $N = b^\dagger b$.

Proprietà: gli autostati $|n\rangle$ di N sono tali che $N|n\rangle = n|n\rangle$, con $n \in \mathbb{N}$ (cfr. [A.27]).

$$L = -\theta b^\dagger b \implies L = -\theta N$$

Considerando l'equazione agli autovalori $L|n\rangle = -\lambda_n|n\rangle$ si ottiene lo spettro di L :

$$L|n\rangle = -\theta(N|n\rangle) \implies -\theta n|n\rangle = -\lambda_n|n\rangle$$

Gli autovalori sono dunque dati da $\lambda_n = n\theta$.

Condizione di esistenza dello stato fondamentale

Lo spettro è limitato inferiormente ($\lambda_n \geq 0$).

N.B. Per evitare autovalori negativi (fisicamente inaccettabili perché le soluzioni divergerebbero nel tempo e non sarebbero normalizzabili nello spazio), deve esistere uno stato di vuoto $|0\rangle$ che arresta la discesa:

$$b|0\rangle = 0 \implies \lambda_0 = 0$$

(L'operatore b^\dagger permette poi di risalire la scala degli autovalori [Appendice A.26])

Autofunzioni $\psi_n(x)$

Lo stato fondamentale (gaussiana)

La condizione $b|0\rangle = 0$ si traduce nell'equazione differenziale $(\partial_\xi + \xi)\phi_0(\xi) = 0$, la cui soluzione normalizzata è:

$$\phi_0(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\xi^2/2} \implies \psi_0(x) = \left(\frac{\theta}{2\pi K_\beta} \right)^{1/4} e^{-\frac{\theta}{4K_\beta}x^2}$$

Stati eccitati e polinomi di Hermite

Gli autostati superiori si ottengono applicando n volte l'operatore di creazione b^\dagger allo stato fondamentale:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n \psi_0(x)$$

L'azione di $(b^\dagger)^n$ sulla gaussiana genera i polinomi di Hermite fisici

$$H_n(\xi) = H_n\left(\sqrt{\frac{\theta}{2K_\beta}}x\right) \text{ (cfr. [Appendice A.24]) :}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) \psi_0(x)$$

La soluzione della T-FFPE del processo di O-U frazionario è data da:

$$P_\beta(x, t | x_0, 0) = \frac{\psi_0(x)}{\psi_0(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n(x_0) E_\beta(-n\theta t^\beta)$$

(Prefattore: $e^{(\Phi_0 - \Phi)/2} \equiv e^{(\xi_0^2 - \xi^2)/2} \equiv \psi_0(x)/\psi_0(x_0)$).

Sostituendo le forme esplicite $\psi_n(\xi) \propto H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$:

$$P_\beta(x, t | x_0, 0) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi K_\beta}} \frac{H_n(\xi) H_n(\xi_0)}{2^n n!} E_\beta(-n\theta t^\beta)$$

$$P_\beta(x, t | x_0, 0) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi K_\beta}} e^{-\frac{\theta x^2}{2K_\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n\left(\sqrt{\frac{\theta}{2K_\beta}} x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{\theta}{2K_\beta}} x_0\right) E_\beta(-n\theta t^\beta)$$

Nota

Il termine gaussiano globale $e^{-\xi^2}$ nasce dal prodotto tra il pre-fattore di trasformazione $(e^{-\xi^2/2})$ e la gaussiana contenuta nelle autofunzioni $(e^{-\xi^2/2})$.

I termini esponenziali in $x_0 (e^{\xi_0^2/2} \cdot e^{-\xi_0^2/2})$ si semplificano.

Verifica della consistenza - Per validare il risultato, si considera il limite classico $\beta = 1$: il rilassamento diventa esponenziale $(E_\beta(-n\theta t^\beta) \rightarrow e^{-n\theta t})$

La serie infinita che definisce $P_\beta(x, t | x_0, 0)$ si somma esattamente grazie alla formula di Mehler:

$$P_1 \propto \underbrace{e^{-\xi^2}}_{\text{Prefattore}} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{2^n n!} e^{-\theta t}}_{\text{Somma di Mehler}}^n \xrightarrow{\text{Calcolo}} \text{Gaussiana}$$

Svolgendo i calcoli algebrici (cfr. [Appendice [A.25](#)]), si ritrova la densità di probabilità del processo O-U standard nel caso $\mu = 0$:

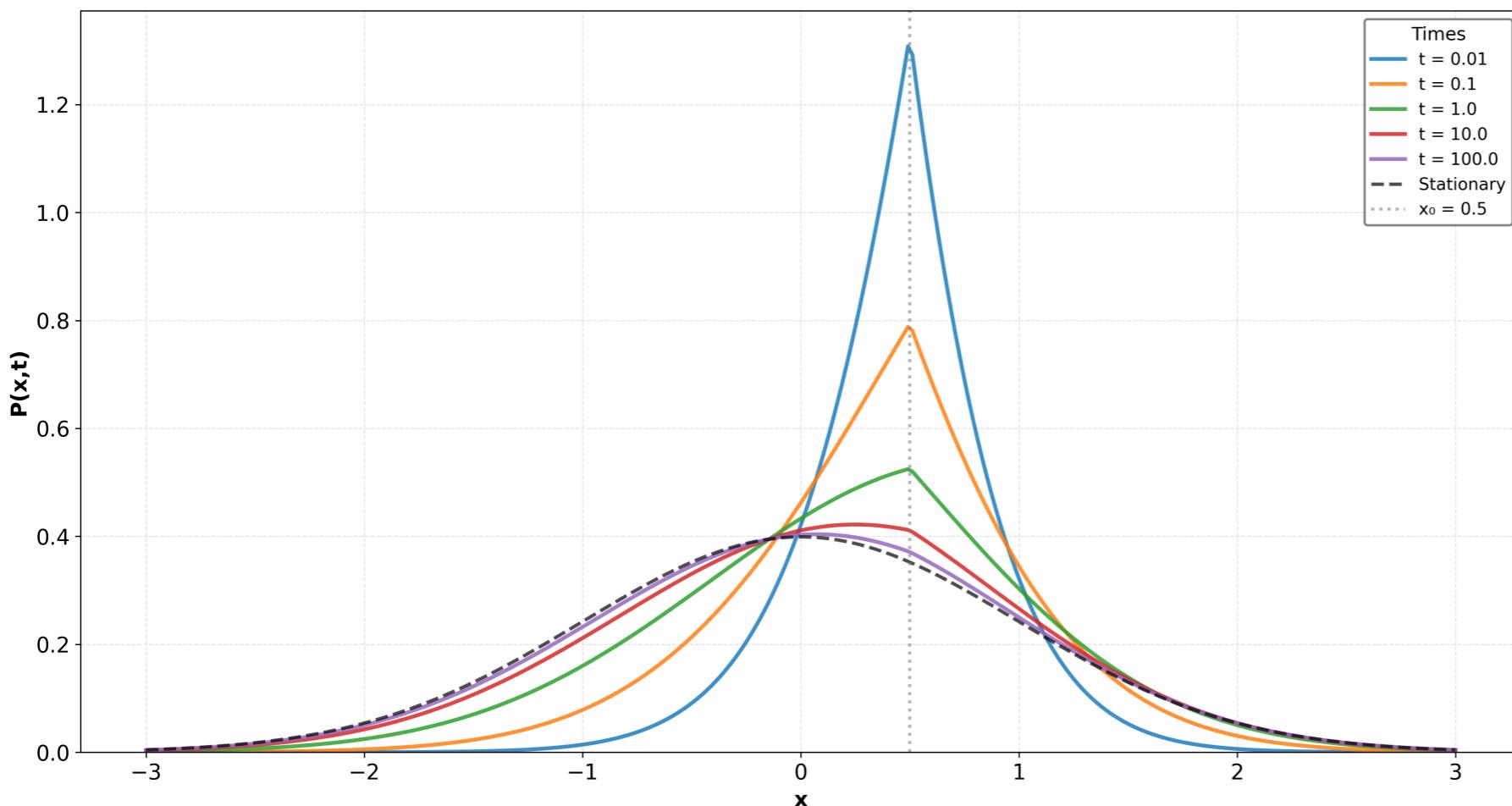
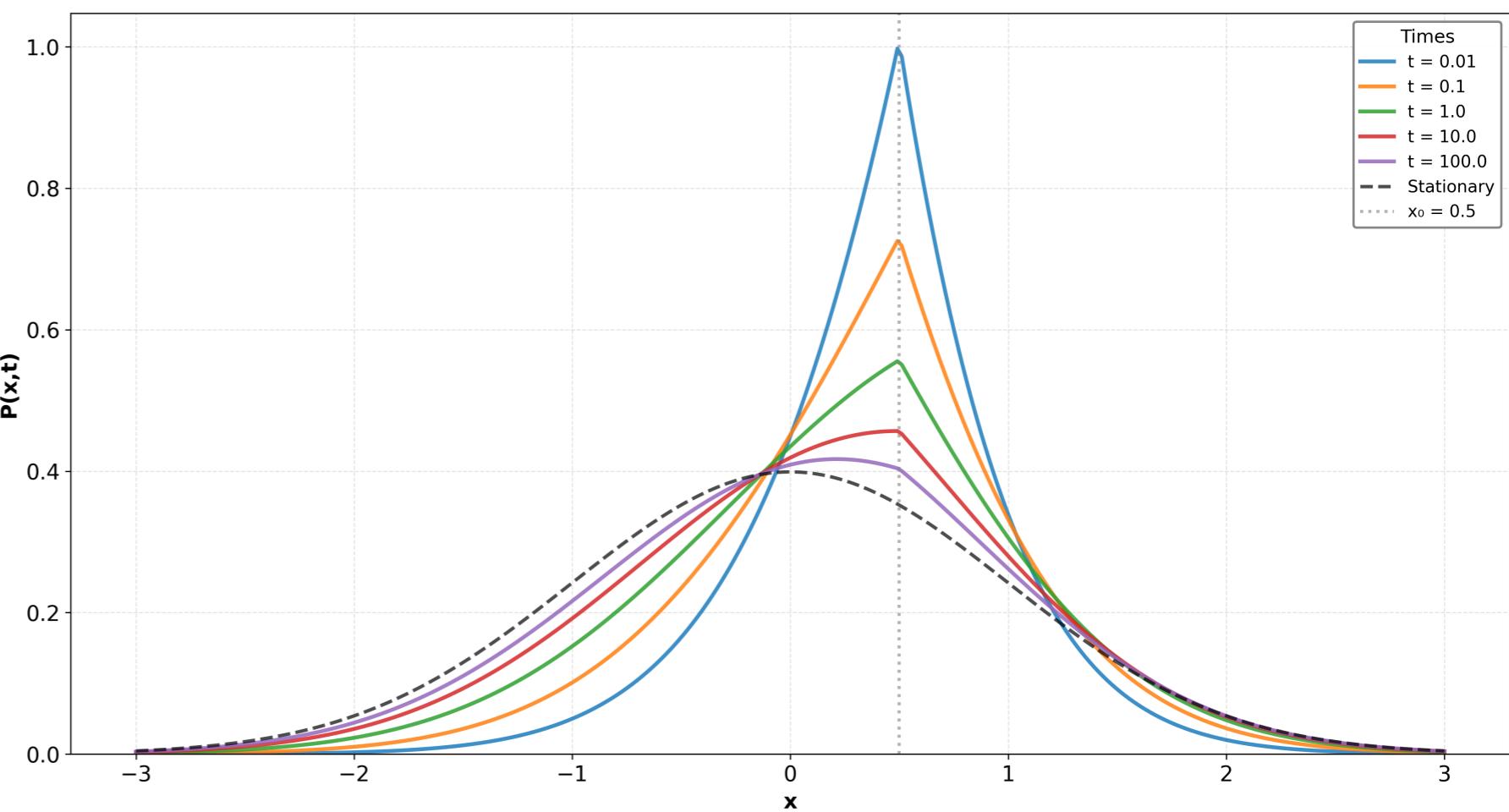
$$P_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left[-\frac{(x - x_0 e^{-\theta t})^2}{2\sigma^2(t)} \right] \text{ con } \sigma^2(t) = \frac{K_1}{\theta} (1 - e^{-2\theta t})$$

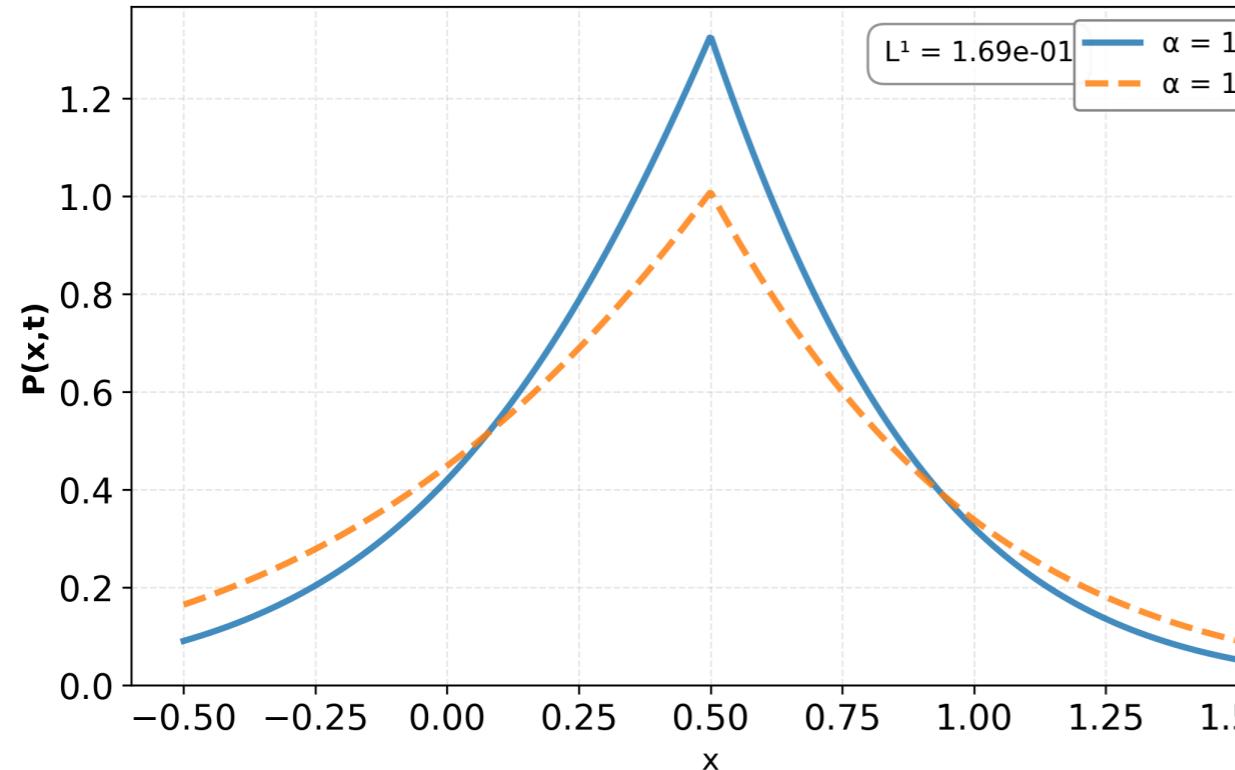
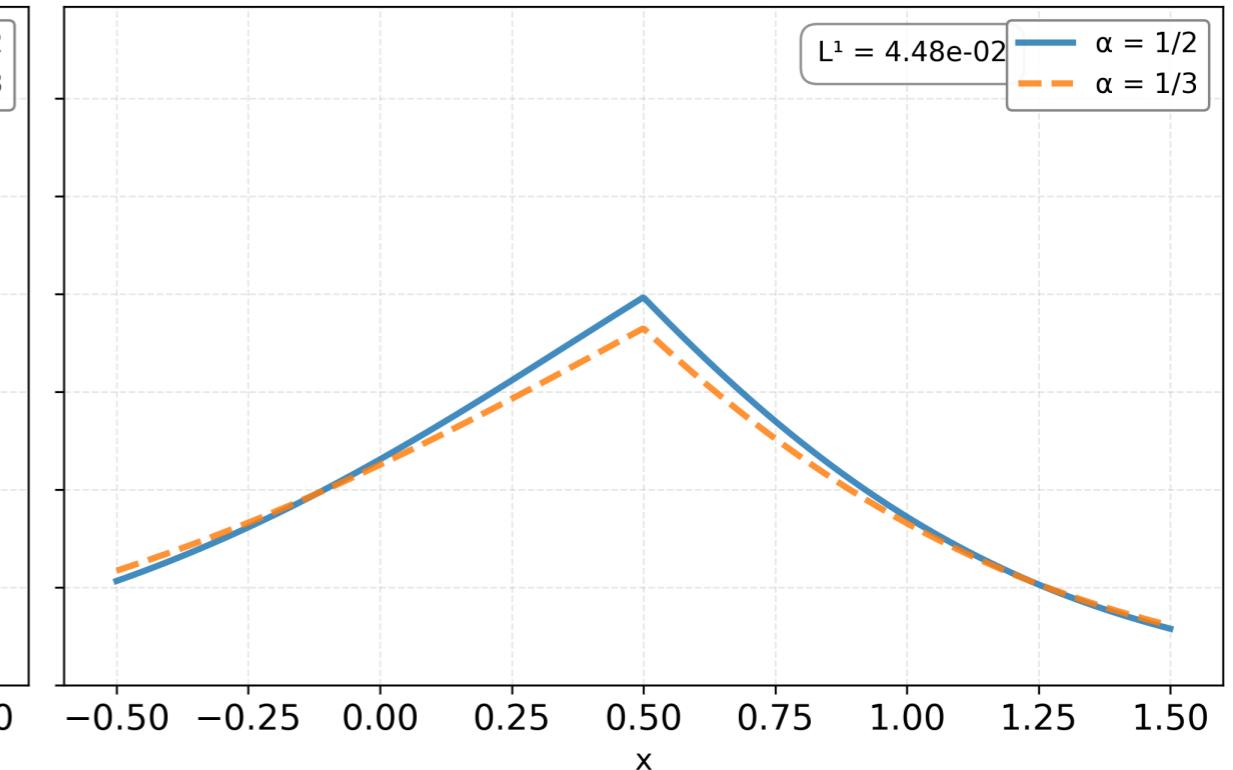
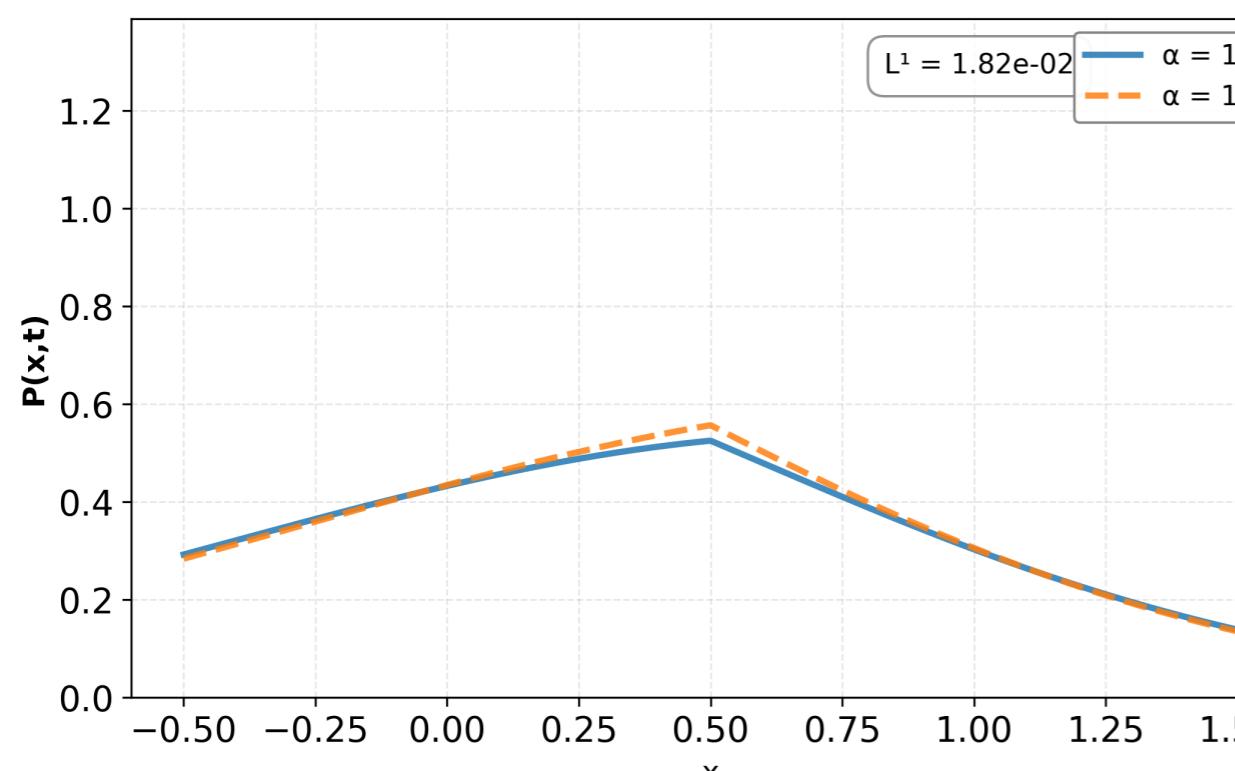
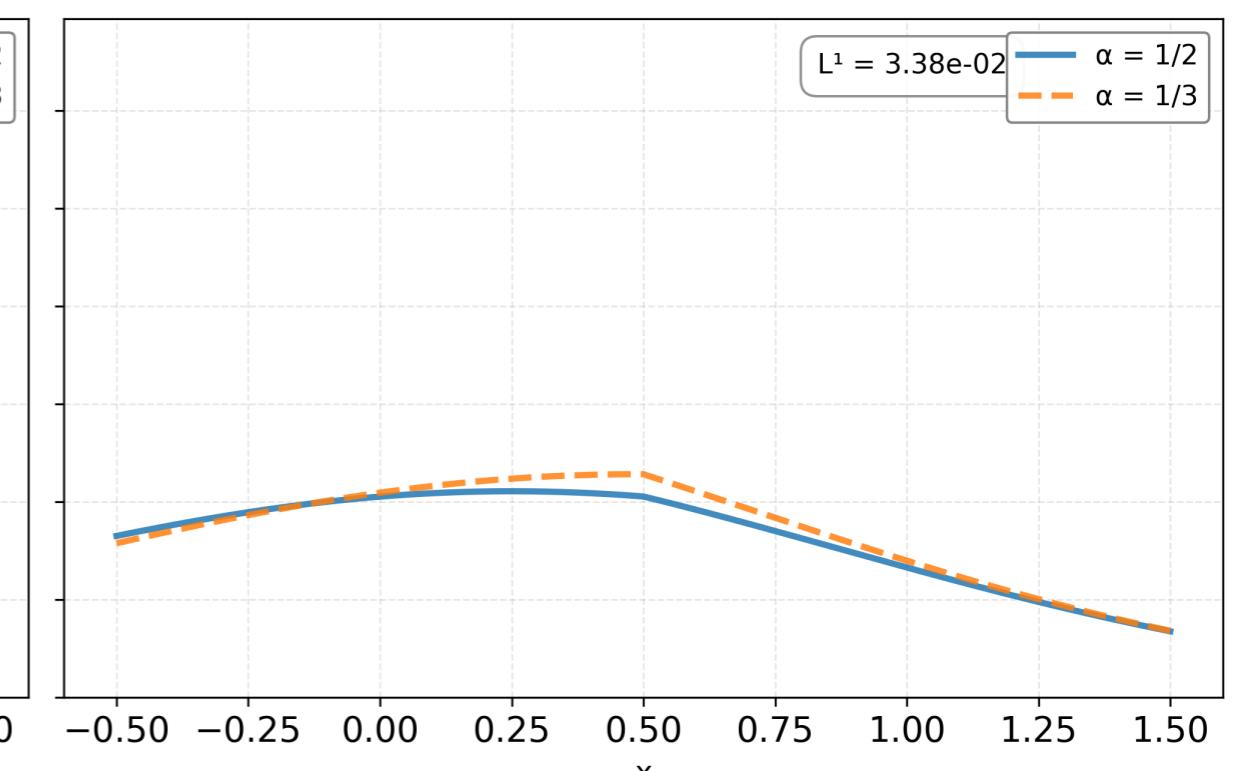
Soluzione con integrazione numerica della mappa

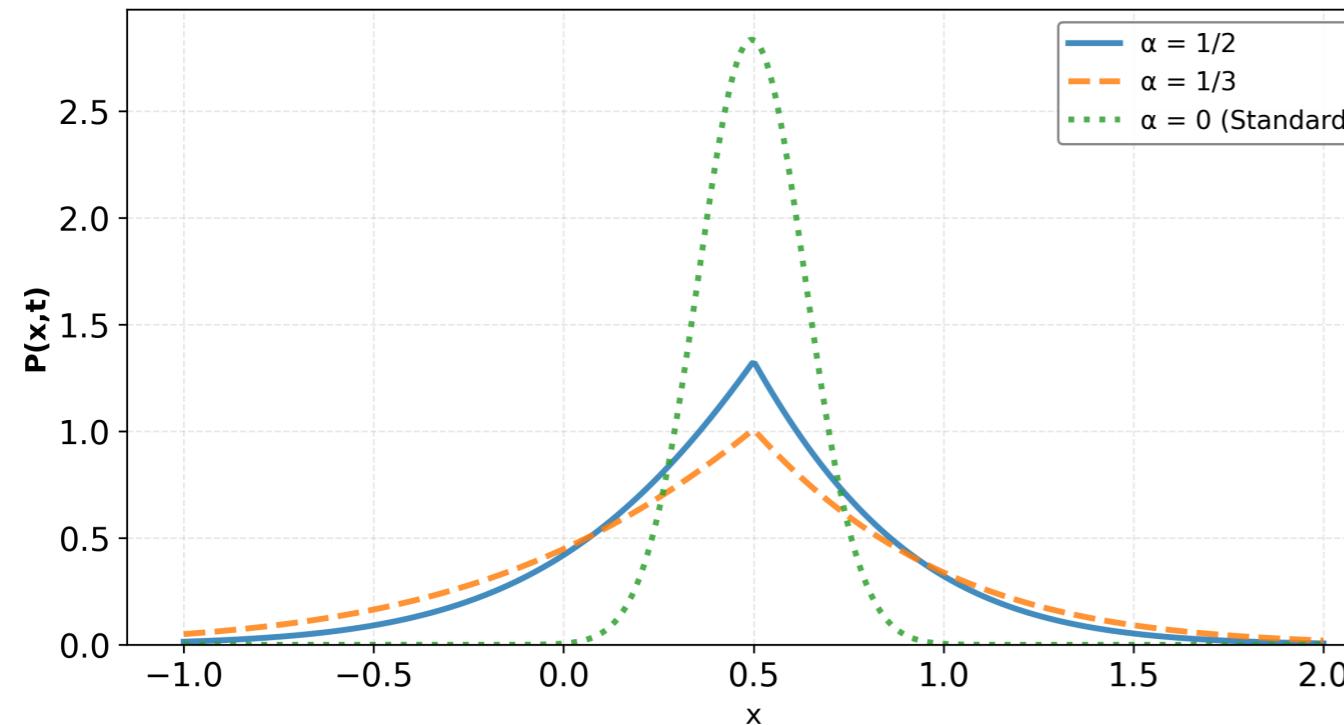
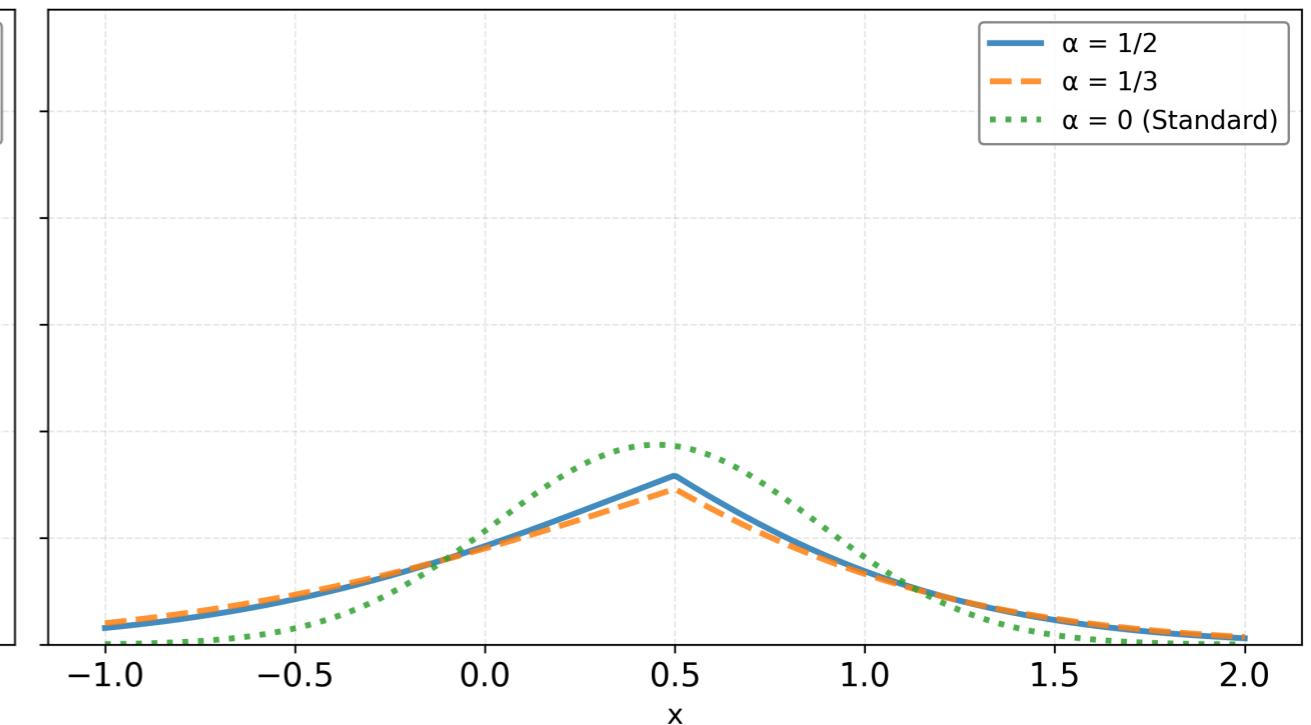
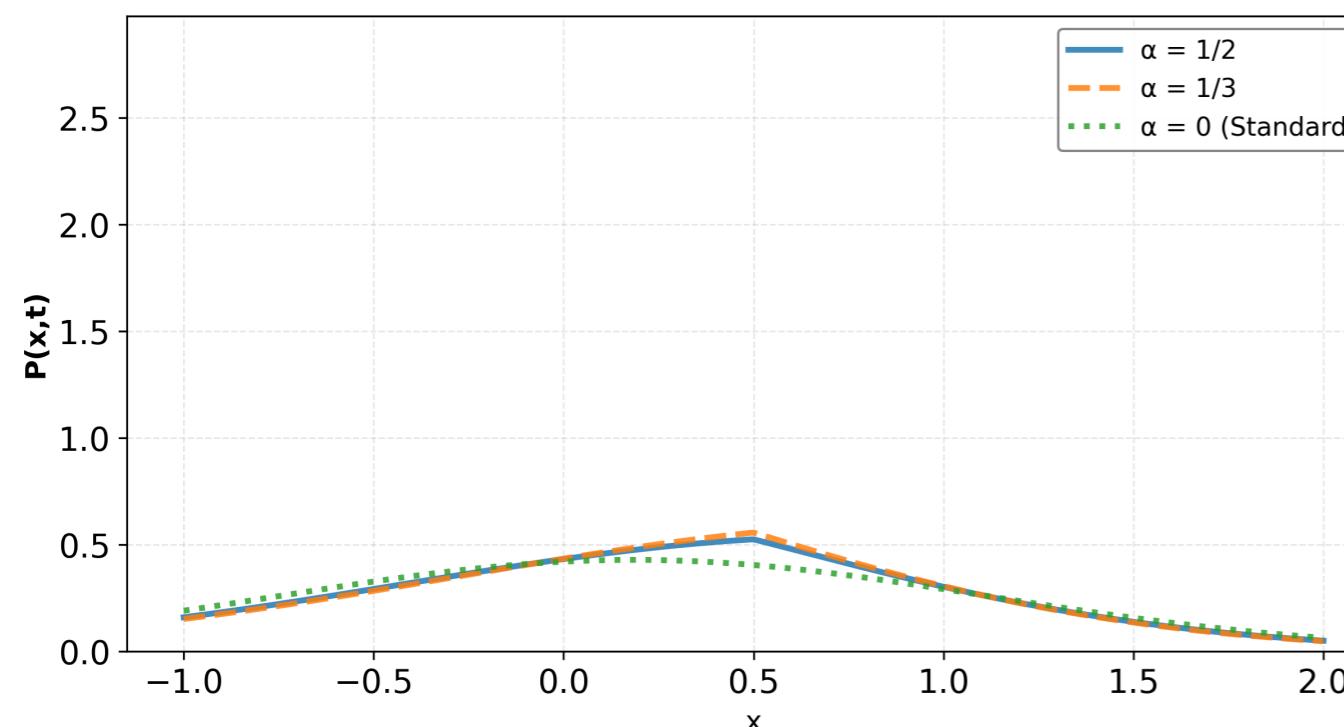
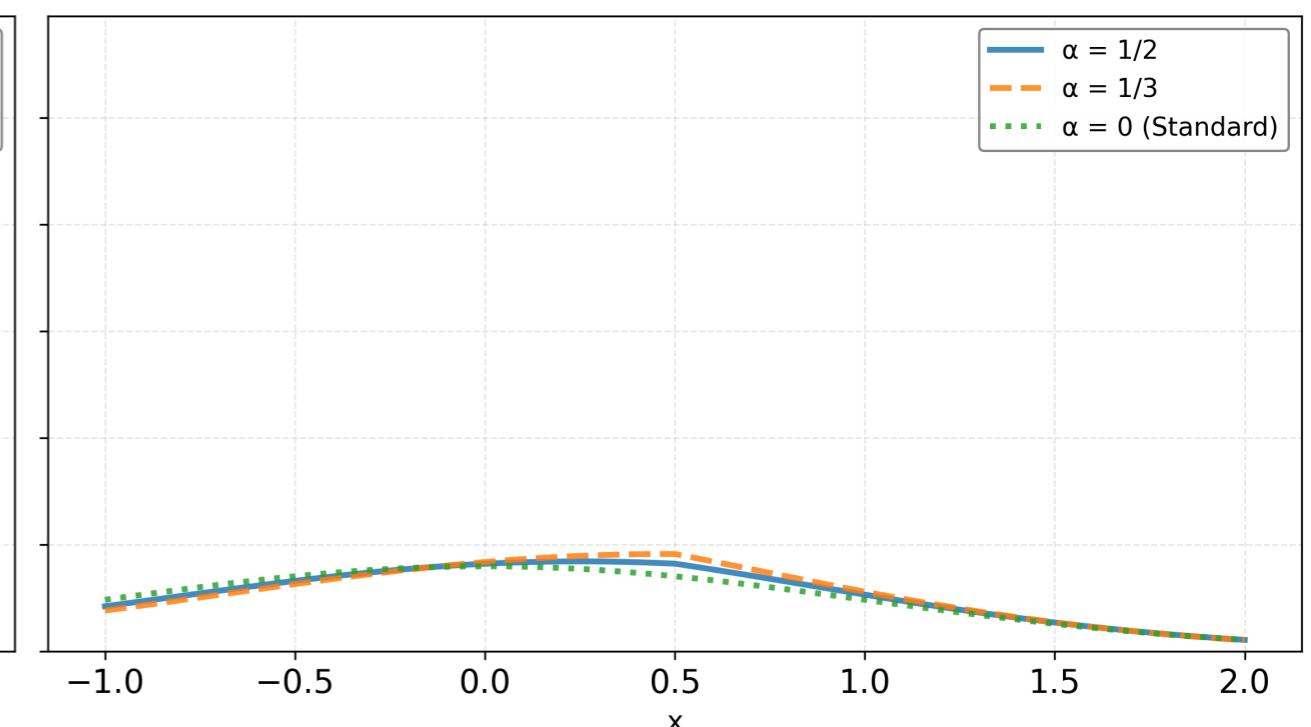
Casi analizzati

One sided Levy Stable Pdf con $\alpha = 1/2$ (Smirnov's density) e $\alpha = 1/3$:

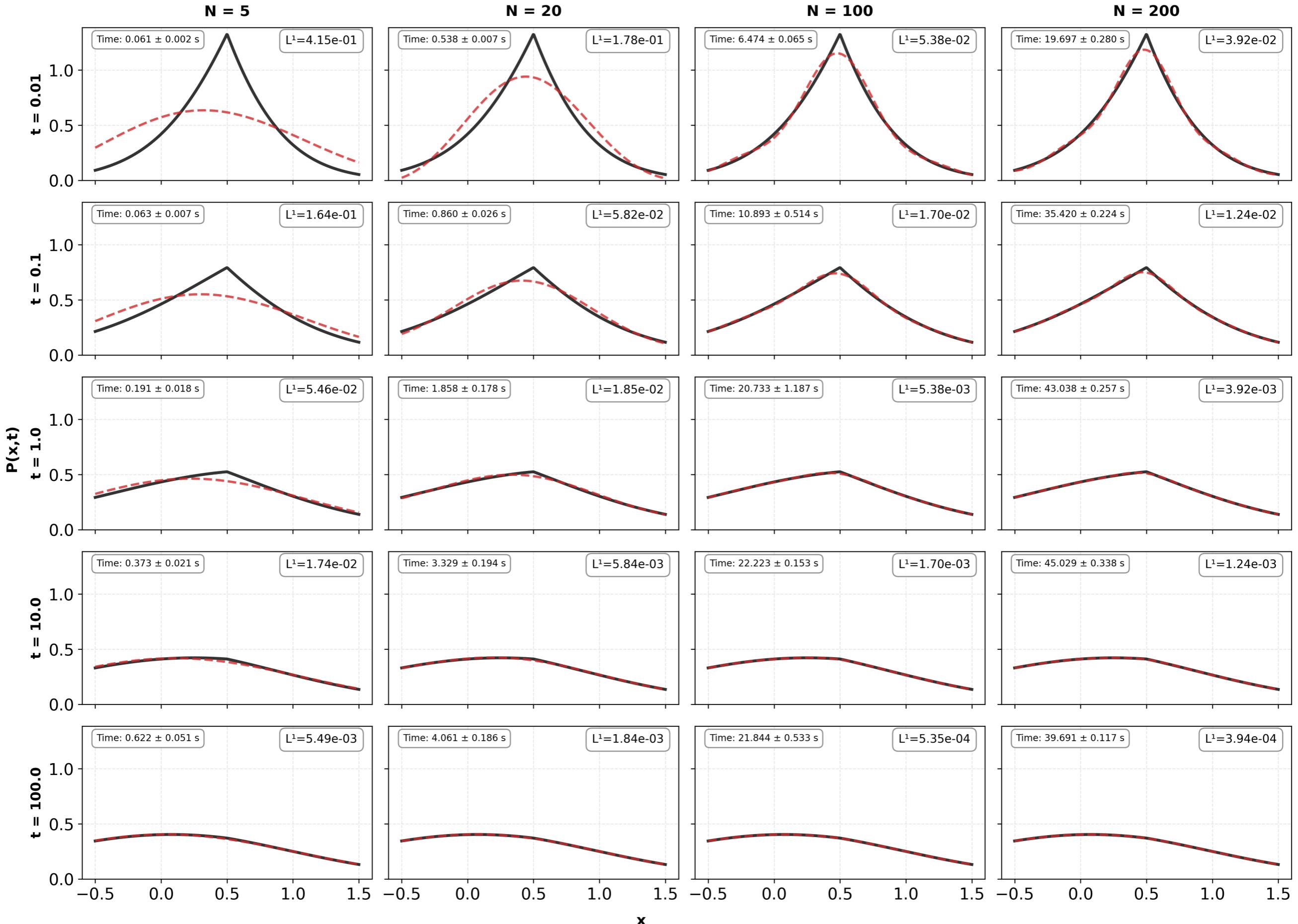
- $$l_{1/2}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-3/2} e^{-1/(4z)}$$
- $$l_{1/3}(z) = \frac{1}{3\pi} z^{-3/2} K_{1/3}\left(\frac{2}{\sqrt{27z}}\right)$$
 con $K_{1/3}$ funzione di Bessel modificata del II tipo

Fractional OU Process: $\alpha = 1/2$ (Smirnov)**Fractional OU Process: $\alpha = 1/3$** 

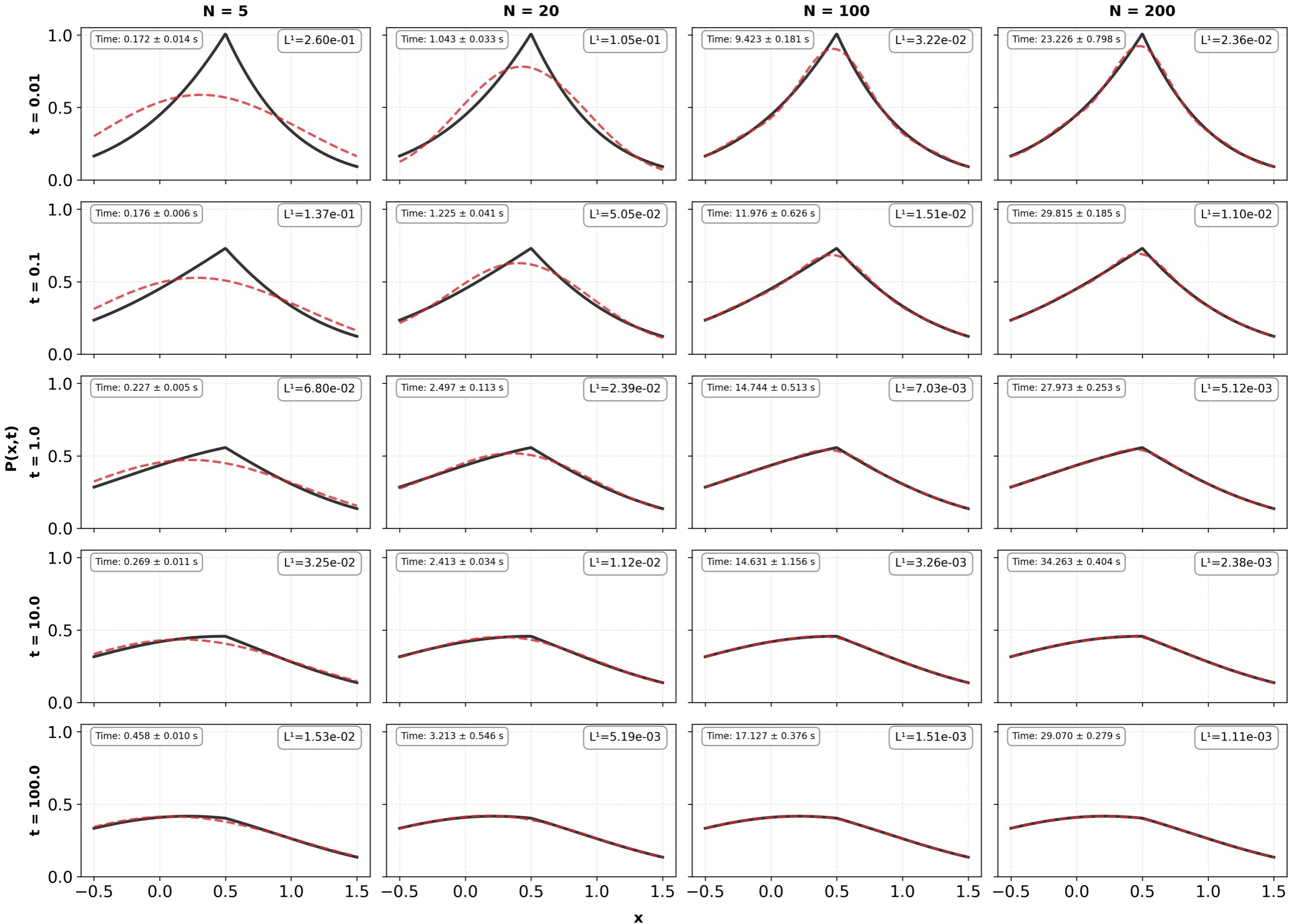
Comparison: $\alpha = 1/2$ vs $\alpha = 1/3$
 $t = 0.01$

 $t = 0.1$

 $t = 1.0$

 $t = 10.0$


Comparison: Fractional ($\alpha \neq 0$) vs Non-Fractional ($\alpha = 0$) Cases
 $t = 0.01$  **$t = 0.1$**  **$t = 1.0$**  **$t = 10.0$** 

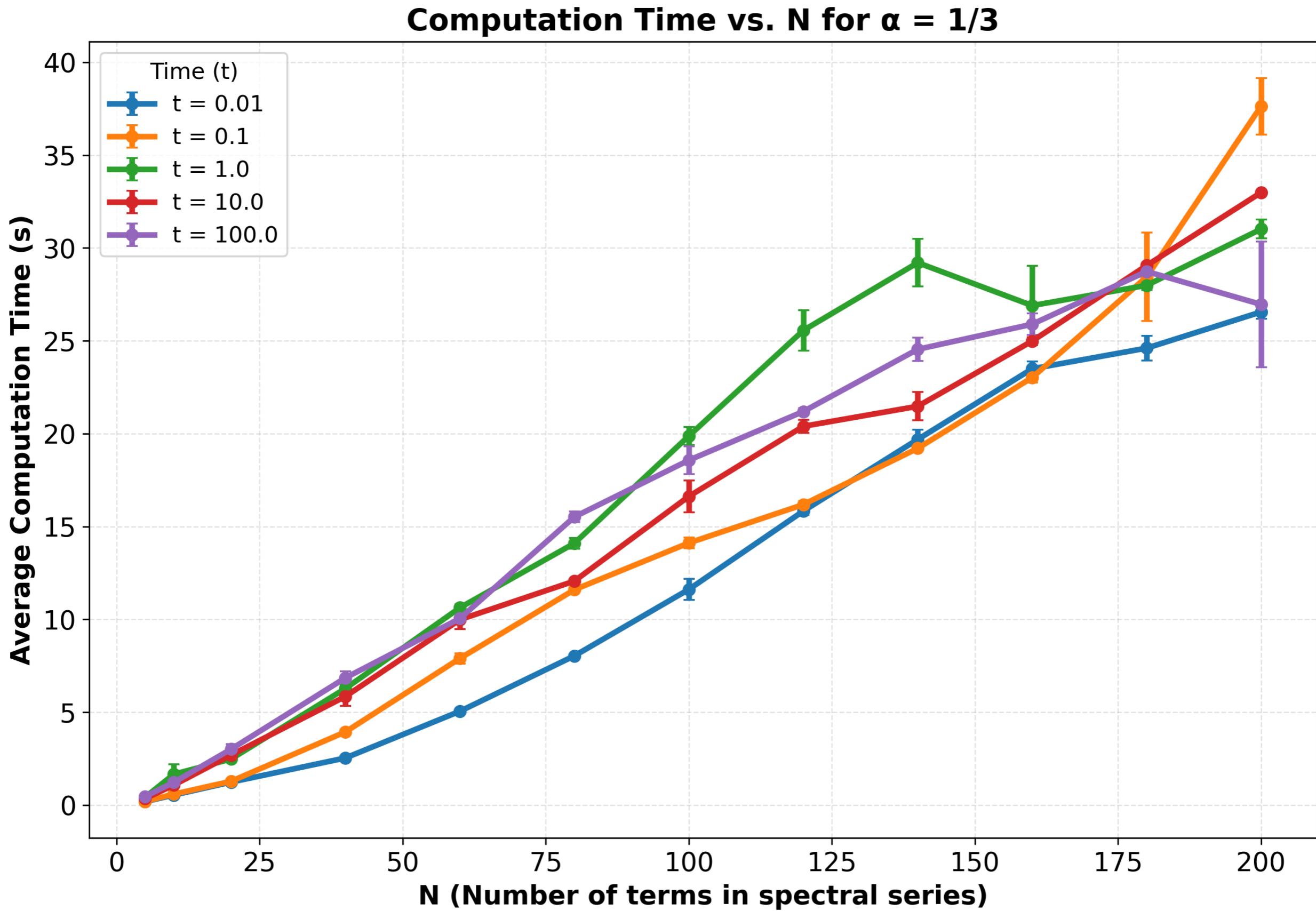
$\theta = K_{1/2} = 1 \rightarrow$ Spectral Series (Eq.18) vs Integral Map - $\alpha = 1/2$ (Smirnov)



$$\theta = K_{1/3} = 1 \rightarrow \text{Spectral Series (Eq.18) vs Integral Map - } \alpha = 1/3$$



Time cost per la soluzione spettrale



BIBLIOGRAFIA

Bibliografia

Articoli

- ▶ [A.1]: [Uncoupled continuous-time random walks: Solution and limiting behavior of the master equation.](#) E Scalas, R Gorenflo, F Mainardi - Physical Review E, 2004
- ▶ [A.2]:
- ▶ [A.3]: Deriving fractional Fokker-Planck equations from a generalised master equation. R. Metzler and E. Barkai and J. Klafter - Europhysics Letters 1999
- ▶ [A.4]:
- ▶ [A.5]:

Libri

- ▶ [L.1]: [I. Podlubny, Fractional Differential Equations ~Academic Press, San Diego, 1999.](#)
- ▶ [L.2]: [Klages, Rainer et al. “Anomalous transport : foundations and applications.” \(2008\).](#)
- ▶ [L.3]: H.Risken, The Fokker-Planck Equation - Methods of Solution and Applications
- ▶ [L.4]: Geoffrey R. Grimmett, David R. Stirzaker - Probability and Random Processes, 4th edition

GRAZIE PER L'ATTENZIONE !



APPENDICI

Ref: First steps in Random Walks (Book)

Teorema

Se per $t \rightarrow \infty f(t) \sim t^{\rho-1}L(t)$, con:

- $\rho \in (0, \infty)$
- $L(t)$ una funzione che varia lentamente in t

$$\Rightarrow \tilde{f}(s) \sim \Gamma(\rho)s^{-\rho}L(1/s)$$

Esempio di $f(t)$

$$\Psi(\tau) \sim \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{\Gamma(\beta)}{\tau^\beta} \text{ con } \beta \in (0,1) \text{ e } t \gg 1$$

Normale ($\mu = 0$)

$$\mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

t-Student ($\mu = 0$)

$$T(x; \nu, \gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\gamma\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\gamma^2\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

$$m_{2n} = (2n-1)!! \frac{\Gamma(\nu/2 - n)}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\gamma^2\nu}{2}\right)^n, \quad 2n < \nu$$

Per i nostri scopi ($2 < \nu < 4$) $m_2 = \sigma^2 = \gamma^2 \frac{\nu}{\nu - 2}$

A.2 - Le proprietà di alcune distribuzioni 129

Distribuzioni di Levy (o stabili) $L_{\mu,\beta}(x)$ (1)

- Stabili sotto convoluzione.
- Permettono di estendere il teorema del limite centrale al caso della somma di variabili random (R.V.) i.i.d X_i , distribuite secondo una pdf $p(x)$ con varianza infinita.

- $L_{\mu,\beta}(x)$ è un attrattore per la distribuzione limite di $\hat{S}_N = A_N + \frac{1}{B_N} \sum_{i=1}^N X_i$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(x < \hat{S}_N < x + dx) = L_{\mu,\beta}(x)dx$$

- Definita la funzione caratteristica $\hat{L}_{\mu,\beta}(z) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\mu,\beta}(x) e^{ikx} dx$,

*Vi sono almeno 11 parametrizzazioni per $\hat{L}_{\mu,\beta,c,\gamma}$

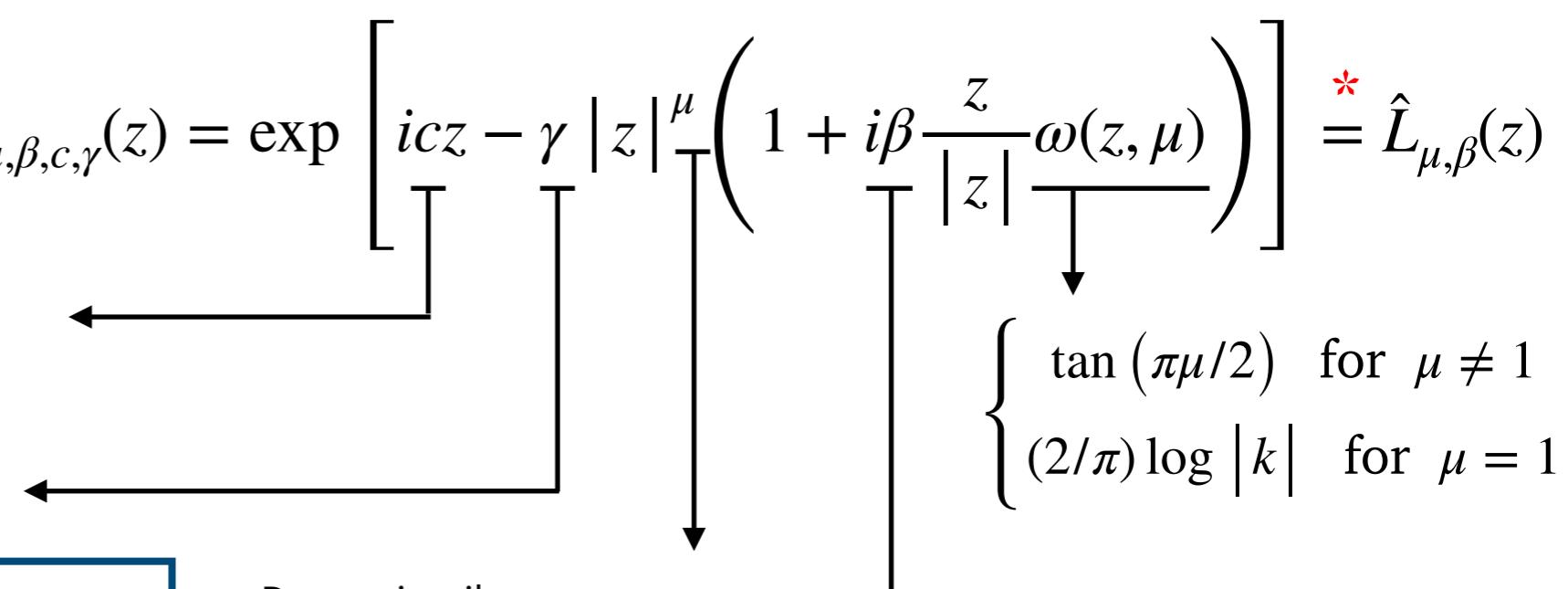
una distribuzione è di Levy $\Leftrightarrow \hat{L}_{\mu,\beta,c,\gamma}(z) = \exp \left[icz - \gamma |z|^\mu \left(1 + i\beta \frac{z}{|z|} \omega(z, \mu) \right) \right] = \hat{L}_{\mu,\beta}(z)$

Parametro di shift: $c \in \mathbb{R}$

Determina dove è centrata $L_{\mu,\beta}(x)$

Parametro di scala: $\gamma \in \mathbb{R}^+$

Determina la dilatazione di $L_{\mu,\beta}(x)$



$$X_1 \sim L_{\mu,\beta,c,\gamma}$$

$$X_2 \sim L_{\mu,\beta,c,\gamma} \Rightarrow Y = X_1 + X_2 \sim L_{\mu,\beta,c',\gamma'}$$

Determina il comportamento asintotico di $L_{\mu,\beta}(x)$.

Parametro di asimmetria: $\beta \in [-1,1]$

A.2 - Le proprietà di alcune distribuzioni 130

Teorema: La densità di probabilità $p(x)$ appartiene al bacino di attrazione della pdf stabile $L_{\alpha,\beta}(x)$

($0 < \alpha < 2$) se e solo se: $p(x) \sim \frac{\mu a^\alpha \gamma_\pm}{|x|^{1+\alpha}}$ for $x \rightarrow \pm \infty$

$$\gamma = \gamma_\mu = \frac{\pi(\gamma_+ + \gamma_-)}{2\mu\Gamma(\mu)\sin(\pi\mu/2)} \quad \beta = \frac{|\gamma_- - \gamma_+|}{\gamma_+ + \gamma_-}$$

Consideriamo $\alpha \neq 1$

PAG 12 bouchaud

Distribuzioni di Levy centrate nell'origine ($c = 0$)



I termini $\propto \frac{1}{x^{1+n\mu}}$ per $n > 1$, subleading rispetto al termine $\propto \frac{1}{x^{1+\mu}}$ per $|x| \rightarrow \pm \infty$, possono essere rilevanti per x finito

$$\hat{L}_{\mu,\beta}(z) = \exp \left[-\gamma_\mu |z|^\mu \left(1 + i\beta \frac{z}{|z|} \tan(\pi\mu/2) \right) \right] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} L_\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n!} \frac{a_\mu^n}{x^{1+n\mu}} \Gamma(1+n\mu) \sin\left(\frac{\pi\mu n}{2}\right)$$

Distribuzioni di Levy centrate nell'origine e simmetriche ($c, \beta = 0$)

$$\hat{L}_\mu(z) = \exp(-\gamma_\mu |z|^\mu)$$

Distribuzioni di Levy centrate nell'origine, simmetriche e troncate esponenzialmente

$$\hat{L}_\mu^t(z) = \exp \left[-\gamma_\mu \frac{(\lambda^2 + z^2)^{\frac{\mu}{2}} \cos(\mu \arctan(|z|/\lambda)) - \lambda^\mu}{\cos(\pi\mu/2)} \right] \text{ per } 1 < \mu \leq 2$$

$$c_1, c_3 = 0$$

$$c_n = (-i)^n \frac{d^n}{dz^n} \log \hat{L}_\mu^t(z) \Big|_{z=0} \quad \begin{aligned} c_2 &= \sigma^2 = \mu(\mu-1) \frac{\gamma_\mu}{|\cos \pi\mu/2|} \lambda^{\mu-2} \\ &\kappa = \lambda_4 = \frac{c_4}{c_2^2} = \frac{(3-\mu)(2-\mu)}{\mu(\mu-1)\gamma_\mu \lambda^\mu} \left| \cos \frac{\pi\mu}{2} \right| \end{aligned}$$

Sia $f(x)$ una funzione simmetrica con code a potenza: $f(x) \approx \frac{C}{|x|^{1+\alpha}}$ per $|x| > L$
 $\alpha \in (0,2)$

Obiettivo: trovare $\hat{f}(k)$ nella regione $|k| \ll 1$

$$\Delta(k) = \hat{f}(0) - \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(1 - e^{-ikx}) dx$$

$$f(x) \text{ simmetrica} \Rightarrow \Delta(k) = 2 \int_0^{\infty} f(x)(1 - \cos(kx)) dx = \text{Core} + \text{Tail}$$

$$\underline{\text{Core}}: 2 \int_0^L f(x)(1 - \cos(kx)) dx \approx 2 \int_0^L f(x) \frac{k^2 x^2}{2} dx \propto k^2 \text{ per } |k| \ll 1$$

$$\underline{\text{Tail}}: 2C \int_L^{+\infty} \frac{1 - \cos(kx)}{x^{1+\alpha}} dx \xrightarrow{u = kx} 2C \int_{KL}^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{(u/k)^{1+\alpha}} \frac{du}{k}$$

$$2Ck^\alpha \int_{KL}^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{1+\alpha}} du \approx 2Ck^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{1+\alpha}} du \text{ per } |k| \ll 1$$

$$2Ck^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{1+\alpha}} du$$

- Regione $u \ll 1$: $1 - \cos(u) \approx u^2/2 \rightarrow \int_0^1 u^{1-\alpha} du$ converge
- Regione $u \gg 1$: $0 < |1 - \cos(u)| < 2$, $\alpha \in (0,2) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\alpha}}$ converge

Dunque $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{1+\alpha}} du$ è solo un numero I_α .

Pertanto $I_{tail} = 2CI_\alpha |k|^\alpha$

$$\Delta(k) = 2 \int_0^\infty f(x)(1 - \cos(kx))dx = \text{Core} + \text{Tail}$$

$$\text{Core} \sim k^2$$

$$\text{Tail} \sim |k|^\alpha$$

$$\text{Per } |k| \ll 1: \Delta(k) = Ak^2 + B|k|^\alpha \approx B|k|^\alpha$$

Dunque si è trovato che per una funzione $f(x)$ simmetrica con code a potenza

$$f(x) \approx \frac{C}{|x|^{1+\alpha}} \text{ per } |x| > L \text{ e con } \alpha \in (0,2)$$

la sua trasformata di Fourier è scrivile come:

$$\hat{f}(k) = 1 + B|k|^\alpha + o(|k|^\alpha) \text{ per } |k| \rightarrow 0$$

A.4 - Da $\tilde{u}(k, s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + |k|^\alpha}$ a $u(x, t) = \frac{1}{t^{\beta/\alpha}} W_{\alpha, \beta} \left(\frac{x}{t^{\beta/\alpha}} \right)$

Trasformata inversa di Laplace

Ricordando che vale $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + a} \right\} = E_\beta(-at^\beta)$ si ha:

$$\tilde{u}(\kappa, s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + |\kappa|^\alpha} \longrightarrow \hat{u}(\kappa, t) = E_\beta(-|\kappa|^\alpha t^\beta)$$

Trasformata inversa di Fourier & Scaling

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\kappa x} \hat{u}(\kappa, t) d\kappa$$

Cambio di variabile: $q = \kappa t^{\beta/\alpha} \implies \kappa = qt^{-\beta/\alpha}, \quad d\kappa = t^{-\beta/\alpha} dq$

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{\beta/\alpha}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iq\left(\frac{x}{t^{\beta/\alpha}}\right)} E_\beta(-|q|^\alpha) dq \right]$$

Identificando $W_{\alpha, \beta}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iku} E_\beta(-|\kappa|^\alpha) d\kappa$ si ottiene: $u(x, t) = \frac{1}{t^{\beta/\alpha}} W_{\alpha, \beta} \left(\frac{x}{t^{\beta/\alpha}} \right)$

1. Definizione del kernel in spazio reale

$$\Lambda(x, x') = \lambda(|x - x'|)[A(x')\Theta(x - x') + B(x')\Theta(x' - x)]$$

2. Trasformata di Fourier dell'Integrale di Convoluzione

$$\tilde{I}(k, s) = \int dx e^{-ikx} \int dx' P(x', s) \lambda(|x|) [A(x')\Theta(x - x') + B(x')\Theta(x' - x)]$$

Ponendo $y = x - x' \Rightarrow x = x' + y$, si fattorizza l'esponenziale $e^{ik(x'+y)}$:

$$\tilde{I}(k, s) = \int dx' e^{-ikx'} P(x', s) \underbrace{\left[\int dy e^{-iky} \lambda(|y|) [A(x')\Theta(y) + B(x')\Theta(-y)] \right]}_{J(k, x')}$$

3. Calcolo dell'integrale interno J

Grazie alle Θ , si divide l'integrale in salti a destra ($y > 0$) e sinistra ($y < 0$):

$$J(k, x') = A(x') \int_0^\infty e^{-iky} \lambda(y) dy + B(x') \int_{-\infty}^0 e^{-iky} \lambda(|y|) dy$$

Usando la formula di Eulero e ponendo $z = -y$ nel secondo integrale:

- **Termine A:** $\int_0^\infty (\cos ky - i \sin ky) \lambda(y) dy = \lambda_C(k) - i\lambda_S(k)$
- **Termine B:** $\int_0^\infty (\cos kz + i \sin kz) \lambda(z) dz = \lambda_C(k) + i\lambda_S(k)$

4. Risultato finale

Sostituendo in J e raggruppando:

$$J = \lambda_C(k)[A(x') + B(x')] + i\lambda_S(k)[B(x') - A(x')] \\ \underbrace{\hspace{10em}}_1$$

L'integrale esterno su x' diventa:

$$\tilde{I}(k, s) = \lambda_C(k)\mathcal{F}[P] + \mathcal{F}[(B(x) - A(x))P(x, s)]$$

Applicando il teorema della convoluzione al secondo termine, si ottiene:

$$\Lambda(k)P(k, s) = \lambda_C(k)P(k, s) + i\lambda_S(k)\{[B(k) - A(k)] * P(k, s)\}$$

A.6 - Derivazione di $\lambda_C(k)$

Obiettivo: Derivare il comportamento diffusivo anomalo, ovvero mostrare come le code pesanti ($\sim x^{-(1+\alpha)}$) generano un termine non-analitico $|k|^\alpha$ che sostituisce il classico k^2 della diffusione normale.

La trasformata unilatera coseno è definita come: $\lambda_C(k) = \int_0^\infty \cos(kx)\lambda(x)dx$

Sfruttando la normalizzazione $\int_0^\infty \lambda(x)dx = 1$ si può scrivere:

$$1 - \lambda_C(k) = \int_0^\infty [1 - \cos(kx)]\lambda(x)dx$$

N.B. Per $k \rightarrow 0$ il comportamento è dominato dalle code della distribuzione
 \Rightarrow Si sostituisce $\lambda(x) \sim c_1 \sigma^\alpha x^{-(1+\alpha)}$ nell'integrale

$$\Rightarrow 1 - \lambda_C(k) \approx \int_0^\infty [1 - \cos(kx)] \frac{c_1 \sigma^\alpha}{x^{1+\alpha}} dx$$

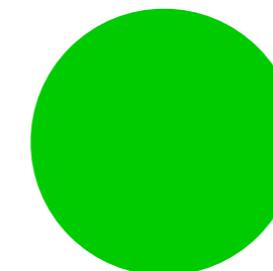
Cambio di variabile: $y = kx \Rightarrow x = y/k$ e $dx = dy/k$

$$\Rightarrow 1 - \lambda_C(k) \approx c_1 \sigma^\alpha \int_0^\infty [1 - \cos(y)] \frac{1}{(y/k)^{1+\alpha}} \frac{dy}{k}$$

A.6 - Derivazione di $\lambda_C(k)$

Portando fuori k si ottiene: $1 - \lambda_C(k) \approx c_1 \sigma^\alpha k^\alpha \underbrace{\int_0^\infty \frac{1 - \cos(y)}{y^{1+\alpha}} dy}_{\text{Costante } C_\alpha}$

- Raggruppando le costanti nel termine σ^α si trova $\lambda_C(k) \sim 1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha$



A.7 - Derivazione di $\lambda_S(k)$

Obiettivo: Giustificare la forma classica del Drift, ovvero mostrare che finché la lunghezza media del salto è finita ($\alpha > 1$), il termine di trasporto rimane lineare ($\sim k$), preservando la struttura standard del drift anche in regime anomalo.

La trasformata unilatera coseno è definita come: $\lambda_S(k) = \int_0^\infty \sin(kx)\lambda(x)dx$

N.B. Per grandi lunghezze d'onda ($k \rightarrow \infty$) l'argomento del seno è piccolo nella regione dove è concentrata la probabilità: $\sin(kx) \approx kx$.

$$\Rightarrow \lambda_S(k) \approx \int_0^\infty kx\lambda(x)dx = k \int_0^\infty x\lambda(x)dx$$

Esistenza del momento primo: L'integrale $\langle x \rangle = \int_0^\infty x\lambda(x)dx$ rappresenta la media della distanza di salto.

Poiché assumiamo $\alpha \in (1,2)$, la coda decade come $x^{-(1+\alpha)}$ con esponente > 2 .

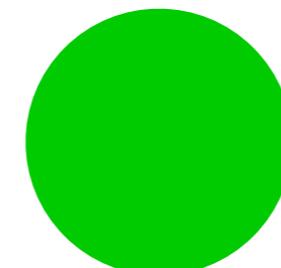
N.B. Questo garantisce l'esistenza della media: $\alpha > 1 \implies \langle x \rangle < \infty$

A.7 - Derivazione di $\lambda_S(k)$

Dall'esistenza di $\langle x \rangle$ segue che $\lambda_S(k) \approx \langle x \rangle k$.

[Ref. A.3] usa la seguente parametrizzazione $\langle x \rangle = \frac{2}{\alpha} \sigma$ da cui segue:

$$\lambda_S(k) \sim \frac{2}{\alpha} \sigma k$$



A.8 - Calcoli derivazione della FPPE 142

Inserendo $\Lambda(k)P(k, s) = (1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha)P(k, s) + i\frac{2}{\alpha}\sigma k\{[A(k) - B(k)] * P(k, s)\}$ e $\phi(s) = 1 - (s\tau)^\beta$

in $sP(k, s) - P_0(k) = s\phi(s)\Lambda(k)P(k, s) - \phi(s)P_0(k)$ si ottiene:

$$sP(k, s) - P_0(k) = [s - s(s\tau)^\beta] \left[(1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha)P(k, s) + i\frac{2}{\alpha}\sigma k\{[A(k) - B(k)] * P(k, s)\} \right] - [1 - (s\tau)^\beta]P_0(k)$$

$$sP(k, s) = [s - s(s\tau)^\beta] \left[(1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha)P(k, s) + i\frac{2}{\alpha}\sigma k\{[A(k) - B(k)] * P(k, s)\} \right] + (s\tau)^\beta P_0(k)$$

Si trascurano i termini misti $s^{\beta+1}|k|^\alpha$ e $s^{\beta+1}k$ (ordini superiori rispetto a $s|k|^\alpha$ e $s^{\beta+1}$)

\Rightarrow Si riescono a separare i termini in s e in k . Si ottiene:

$$sP(k, s) = sP(k, s) - s\sigma^\alpha |k|^\alpha P(k, s) + i\frac{2}{\alpha}\sigma ks\{[A(k) - B(k)] * P(k, s)\} - s(s\tau)^\beta P(k, s) + (s\tau)^\beta P_0(k)$$

$$P(k, s)\tau^\beta s^{\beta+1} - \tau^\beta s^\beta P_0(k) = + ik\frac{2}{\alpha}\sigma s\{[B(k) - A(k)] * P(k, s)\} - |k|^\alpha s\sigma^\alpha P(k, s)$$

Dividendo per $\tau^\beta s$:

$$P(k, s)s^\beta - s^{\beta-1}P_0(k) = + ik\frac{2}{\alpha}\frac{\sigma}{\tau^\beta}\{[B(k) - A(k)] * P(k, s)\} - |k|^\alpha \frac{\sigma^\alpha}{\tau^\beta}P(k, s)$$

A.9 - TFFPE - $\langle x^2 \rangle_0$

Obiettivo: Derivare di $\langle x^2 \rangle_0$ in funzione di t in assenza di un campo di forza esterno ($F = 0$).

La TFFPE nello spazio di Laplace con $P_0(x) = \delta(x)$ assume la forma:

$$s\tilde{P}(x, s) - \delta(x) = s^{1-\beta} \left[-\frac{F}{m\eta_\beta} \frac{\partial}{\partial x} + K_\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \tilde{P}(x, s)$$

Strategia: si moltiplica per x^2 e si integra su tutto lo spazio $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$:

- **Membro SX:** $\int x^2 [s\tilde{P} - \delta(x)] dx = s\langle \tilde{x}^2(s) \rangle - 0$
- **Membro DX:** $s^{1-\beta} K_\beta \int x^2 \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} dx$
 - *Integrazione per parti (I):* $[x^2 \partial_x \tilde{P}]_{-\infty}^{+\infty} - \int 2x \partial_x \tilde{P} dx = 0 - \int 2x \partial_x \tilde{P} dx$
 - *Integrazione per parti (II):* $-[2x \tilde{P}]_{-\infty}^{+\infty} + \int 2 \tilde{P} dx = 0 + \frac{2}{s}$ poiché $\int \tilde{P} dx = 1/s$.
- **Risultato in Laplace:** $s\langle \tilde{x}^2 \rangle = s^{1-\beta} K_\beta \left(\frac{2}{s} \right) \Rightarrow \langle \tilde{x}^2(s) \rangle = 2K_\beta s^{-(1+\beta)}$.
- **Antitrasformata ($s \rightarrow t$):** usando $\mathcal{L}^{-1}[s^{-(1+\beta)}] = \frac{t^\beta}{\Gamma(1+\beta)}$, otteniamo:

$$\langle x^2(t) \rangle_0 = \frac{2K_\beta}{\Gamma(1+\beta)} t^\beta$$

Obiettivo: dimostrare la relazione tra K_β e η_β (relazione di Einstein generalizzata) imponendo l'equilibrio termico.

1. **L'Equazione nello Stato Stazionario** Partiamo dalla FFPE con derivata temporale di Caputo (definita nel caso di forze esterne e diffusione normale $\alpha=2$):

$$\frac{\partial^\beta P(x, t)}{\partial t^\beta} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V'(x)}{m\eta_\beta} P(x, t) + K_\beta \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right] = - \frac{\partial}{\partial x} S(x, t)$$

Cerchiamo la soluzione stazionaria $P_{st}(x)$ di $\frac{\partial^\beta P_{st}}{\partial t^\beta} = 0$ imponendo $\frac{\partial^\beta P_{st}}{\partial t^\beta} = 0$.

L'equazione per $P_{st}(x)$ si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V'(x)}{m\eta_\beta} P_{st}(x) + K_\beta \frac{\partial P_{st}(x)}{\partial x} \right] = 0$$

Assumendo condizioni al bordo naturali ($x_{\min} = -\infty, x_{\max} = +\infty$) si ha che:

$P(x = \pm\infty, t) = 0$ e $S(x = \pm\infty, t) = 0$

Poiché per $P_{st}(x)$ la corrispondente $S(x) = \text{cost}$ si ha che $\forall x S(x) = 0$:

$$\frac{V'(x)}{m\eta_\beta} P_{st}(x) + K_\beta \frac{\partial P_{st}(x)}{\partial x} = 0$$

2. **Soluzione stazionaria:** separando le variabili e integrando:

$$\frac{dP_{st}}{P_{st}} = -\frac{1}{m\eta_\beta K_\beta} V'(x) dx \implies \ln P_{st}(x) = -\frac{V(x)}{m\eta_\beta K_\beta} + C$$

Da cui segue la forma della distribuzione stazionaria della FFPE:

$$P_{st}(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{V(x)}{m\eta_\beta K_\beta}\right)$$

3. **Confronto con la distribuzione di Boltzmann** Un sistema fisico in contatto con un bagno termico a temperatura T , all'equilibrio, segue la statistica di Boltzmann-Gibbs:

$$P_{eq}(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{V(x)}{k_B T}\right)$$

Affinché il modello “anomalo” sia fisicamente coerente, la soluzione stazionaria P_{st} deve coincidere con l'equilibrio P_{eq} .

⇒ Confrontando gli esponenti si ottiene la relazione di Einstein generalizzata, che lega le fluttuazioni anomale (K_β) alla dissipazione frazionaria η_{beta} tramite la temperatura T :

$$K_\beta = \frac{k_B T}{m\eta_\beta}$$

Obiettivo: derivare la dipendenza del drift dal tempo nel caso di $F = \text{cost}$

La FFPE nello spazio di Laplace con $P_0(x) = \delta(x)$ assume la forma:

$$s\tilde{P}(x, s) - \delta(x) = s^{1-\beta} \left[-\frac{F}{m\eta_\beta} \frac{\partial}{\partial x} + K_\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \tilde{P}(x, s)$$

Strategia: si moltiplica la TFFPE per x integriamo:

- **Membro SX:** $\int x[s\tilde{P} - \delta(x)]dx = \langle \tilde{x}(s) \rangle$.
- **Membro DX (Diffusione):** il termine con ∂_{xx} si annulla per le condizioni al bordo naturali.
- **Membro DX (Drift):** $-s^{1-\beta} \frac{F}{m\eta_\beta} \int x \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} dx$.
 - *Integrazione per parti:* $\int x \partial_x \tilde{P} dx = [x\tilde{P}]_{-\infty}^{+\infty} - \int \tilde{P} dx = 0 - \frac{1}{s}$.
- **Risultato in Laplace:** $s\langle \tilde{x} \rangle = -s^{1-\beta} \frac{F}{m\eta_\beta} \left(-\frac{1}{s} \right) \implies \langle \tilde{x}(s) \rangle = \frac{F}{m\eta_\beta} s^{-(1+\beta)}$.
- **Antitrasformata ($s \rightarrow t$):** otteniamo l'espressione per il “drift anomalo”:

$$\langle x(t) \rangle_F = \frac{F}{m\eta_\beta} \frac{t^\beta}{\Gamma(1+\beta)}$$

Obiettivo: derivare la II relazione di Einstein generalizzata nel caso di $F = \text{cost}$

Confrontando il drift con il MSD e sapendo che vale la relazione di fluttuazione-

dissipazione generalizzata $K_\beta = \frac{k_B T}{m\eta_\beta}$, facciamo il rapporto:

$$\frac{\langle x(t) \rangle_F}{\langle x^2(t) \rangle_0} = \frac{\frac{F}{m\eta_\beta} \frac{t^\beta}{\Gamma}}{\frac{2K_\beta t^\beta}{\Gamma}} = \frac{F}{2m\eta_\beta \Gamma \beta} = \frac{F}{2m\eta_\beta \left(\frac{k_B T}{m\eta_\beta}\right)} = \frac{F}{2k_B T}$$

Riorganizzando i termini, ritroviamo l'equazione che lega il drift alle fluttuazioni (MSD):

$$\langle x(t) \rangle_F = \frac{F}{2k_B T} \langle x^2(t) \rangle_0$$

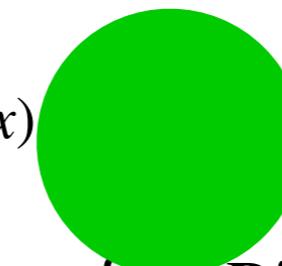
Obiettivo: si vuole dimostrare che $\Phi'(x)P(x) + \frac{\partial P}{\partial x} = e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} (e^{\Phi(x)}P(x))$

1. Sviluppiamo il termine tra parentesi:

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{\Phi(x)}P(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)} \right) P(x) + e^{\Phi(x)} \frac{\partial P(x)}{\partial x} = \Phi'(x)e^{\Phi(x)}P(x) + e^{\Phi(x)}P'(x)$$

2. Ripristiniamo il prefattore $e^{-\Phi(x)}$

$$e^{-\Phi(x)} [\Phi'(x)e^{\Phi(x)}P(x) + e^{\Phi(x)}P'(x)] = \Phi'(x)P(x) + P'(x)$$



Conclusione: l'espressione ottenuta coincide con il termine di Drift + Diffusione originale:

$$L_{FP}P = K_\beta \frac{\partial}{\partial x} [\Phi'P + P'] = K_\beta \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi P) \right]$$

Obiettivo: dimostrare che l'operatore aggiunto L_{FP}^\dagger è diverso dall'operatore di partenza L_{FP} .

1. Definizione di operatore hermitiano

Sia $H = L^2$ spazio di Hilbert: L è un operatore hermitiano se, $\forall u, v \in H$:

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^\dagger v \rangle = \langle u, Lv \rangle \Rightarrow \int u(Lv) dx = \int (Lu)v dx$$

In questo caso si ha $L^\dagger = L$. Altrimenti $L^\dagger \neq L$

2. Analisi termine per termine: Scriviamo L_{FP} evidenziando drift e diffusione:

$$L_{FP}v = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(K_\beta \Phi' v)}_{\text{Drift}} + \underbrace{K_\beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{Diffusione}}$$

Slide successiva: calcolo dell'integrale $\langle u, L_{FP}v \rangle$

Diffusione (simmetrico):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u \left(K_\beta v'' \right) dx = \underbrace{[...]}_0 - \int u' K_\beta v' dx = \underbrace{[...]}_0 + \int (K_\beta u'') v dx$$

Drift (termine problematico non simmetrico)

$$\begin{aligned} \int u \left[\partial_x (K_\beta \Phi' v) \right] dx &= [u K_\beta \Phi' v] - \int (\partial_x u) K_\beta \Phi' v dx \\ &= \underbrace{\int v \left[-K_\beta \Phi'(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u \right] dx}_{L_{Drift}^\dagger u} \end{aligned}$$

Warning: l'operatore che agisce su u (ovvero L_{FP}^\dagger) ha il termine di drift col segno opposto e una struttura diversa rispetto a L_{FP} :

$$L_{FP} : +\partial_x (\Phi' \cdot)$$

$$L_{FP}^\dagger : -\Phi' \partial_x (\cdot)$$

$$L_{FP}^\dagger \neq L_{FP} \implies L_{FP} \text{ non è hermitiano}$$

A.15 - $e^\Phi L_{FP}$ operatore autoaggiunto

Obiettivo: Dimostrare che $I = \langle W_1, e^\Phi L_{FP} W_2 \rangle = \langle (e^\Phi L_{FP})^\dagger W_1, W_2 \rangle = \langle e^\Phi L_{FP} W_1, W_2 \rangle$.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1 e^\Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_\beta e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi W_2) \right] \right\} dx$$

$\xrightarrow{\text{Int. per parti}}$ $\underbrace{\left[W_1 e^\Phi \cdot K_\beta e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi W_2) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K_\beta e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi W_2) \right] \frac{\partial}{\partial x} (W_1 e^\Phi) dx}_{\text{Termine di Bordo (B.T.)}}$

$$\text{B.T.} = - \left[\underbrace{W_1 e^\Phi}_{\sim \text{Polinomio}} \cdot \underbrace{S}_{\rightarrow 0} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0, \text{ con } S(x) = \frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi W_2) \text{ corrente di probabilità}$$

Nota: Per le classi di potenziali confinanti standard (es. armonico), le autofunzioni sono date dal prodotto di polinomi ortogonali per il peso di Boltzmann: $\varphi_n(x) \propto Q_n(x) e^{-\Phi(x)}$. Anche nel caso generale, il decadimento esponenziale $e^{-\Phi}$ domina asintoticamente su qualsiasi crescita polinomiale del pre-fattore. Pertanto, il termine $We^\Phi \sim Q_n(x)$ cresce solo polynomialmente e il termine di bordo va a zero venendo dominato dal decadimento esponenziale contenuto nella corrente $S(S \propto e^{-\Phi})$

$$I = -K_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Phi(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi W_1) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi W_2) \right] dx$$

\implies Dunque I è simmetrico per scambio di W_1 con W_2

$\implies \langle W_1, e^\Phi L_{FP} W_2 \rangle = \langle W_2, e^\Phi L_{FP} W_1 \rangle$ C.V.D.

A.16 - L è autoaggiunto

$$\begin{aligned}
 \langle u, Lv \rangle &= \int u \left[e^{\frac{\Phi}{2}} L_{FP} \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} v \right) \right] dx \\
 &= \underbrace{\int u \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} \cdot e^{\Phi} \right) \left[L_{FP} \left(e^{-\frac{\Phi}{2}} v \right) \right] dx}_{=e^{\Phi/2}} \\
 &= \int \left(ue^{-\frac{\Phi}{2}} \right) \left[L_{FP} \left(ve^{-\frac{\Phi}{2}} \right) \right] dx \\
 &= \int \left[L_{FP} \left(ue^{-\frac{\Phi}{2}} \right) \right] \left(ve^{-\frac{\Phi}{2}} \right) e^{\Phi} dx \\
 &= \underbrace{\int \left[e^{\Phi} e^{-\frac{\Phi}{2}} L_{FP} \left(ue^{-\frac{\Phi}{2}} \right) \right] v dx}_{=e^{\Phi/2} L_{FP} e^{-\Phi/2} u = Lu} \\
 &= \langle Lu, v \rangle
 \end{aligned}$$

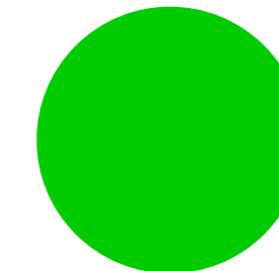
A.17 - Non negativa dei λ_n

Partiamo da $L_{FP}\varphi_n = -\lambda_n \varphi_n$. Moltiplichiamo per $\varphi_n e^\Phi$ e integriamo:

$$-\lambda_n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^2 e^\Phi dx}_{\|\varphi_n\|_{e^\Phi}^2 > 0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n e^\Phi (L_{FP}\varphi_n) dx = I$$

Sostituendo la forma esplicita di L_{FP} $\left(L_{FP}\varphi_n = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_\beta e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} (e^{\Phi(x)} \varphi_n) \right] \right)$ e integrando per parti:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(\varphi_n e^\Phi)}_f \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[K_\beta e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi \varphi_n) \right]}_{g'} dx$$



$$= \underbrace{[f \cdot g]_{-\infty}^{+\infty}}_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_n e^\Phi) \left[K_\beta e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi \varphi_n) \right] dx = -K_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Phi} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi \varphi_n) \right]^2}_{\geq 0} dx$$

$$-\lambda_n \|\varphi_n\|_{e^\Phi}^2 = -K_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Phi} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} (e^\Phi \varphi_n) \right]^2}_{\geq 0} dx \implies \lambda_n = K_\beta \frac{\int e^{-\Phi} [\dots]^2 dx}{\|\varphi_n\|_{e^\Phi}^2} \geq 0 \quad (\text{C.V.D.})$$

A.18 - Φ t.c. L è autoaggiunto

1. Preparazione dell'Operatore L_{FP} : per applicare la trasformazione, riscriviamo L_{FP} evidenziando le potenze dell'operatore di derivazione ∂_x :

$$L_{FP} = -\partial_x D_1(x) + \partial_x^2 D_2(x)$$

La trasformazione $L = e^{\frac{\Phi}{2}} L_{FP} e^{-\frac{\Phi}{2}}$ agisce sostituendo ogni operatore ∂_x con l'operatore trasformato \hat{d} :

$$\partial_x \longrightarrow \hat{d} = \left(\partial_x - \frac{\Phi'(x)}{2} \right)$$

2. Sostituzione nell'Operatore: sostituendo \hat{d} in L_{FP} , otteniamo l'espressione formale di L :

$$L = -\underbrace{\left(\partial_x - \frac{\Phi'}{2} \right) D_1}_{\text{Termine A}} \underbrace{\left(\partial_x - \frac{\Phi'}{2} \right) D_2}_{\text{Termine B}}$$

3. Svolgimento dei prodotti operatoriali:

- **Termine A:**

$$-\partial_x D_1 + \frac{\Phi'}{2} D_1 = -D_1 \partial_x - D'_1 + \frac{1}{2} D_1 \Phi'$$

- **Termine B:**

- ▶ Espandiamo prima il prodotto interno: $\left(\partial_x - \frac{\Phi'}{2} \right) D_2 = \partial_x D_2 - \frac{1}{2} \Phi' D_2 = D_2 \partial_x + D'_2 - \frac{1}{2} D_2 \Phi'$

- ▶ Ora applichiamo il primo operatore al risultato:

$$\left(\partial_x - \frac{\Phi'}{2} \right) \left[D_2 \partial_x + D'_2 - \frac{1}{2} D_2 \Phi' \right] = D_2 \partial_x^2 + 2D'_2 \partial_x + D''_2 + -\frac{1}{2} (D_2 \Phi')' - \frac{1}{2} D_2 \Phi' \partial_x - \frac{\Phi'}{2} (D_2 \partial_x + D'_2 - \frac{1}{2} D_2 \Phi')$$

A.18 - Φ t.c. L è autoaggiunto

Raccogliendo i termini simili si ottiene:

$$\text{Termine B} = D_2 \partial_x^2 + (2D'_2 - D_2 \Phi') \partial_x + \left(D''_2 - \frac{1}{2}(D_2 \Phi')' - \frac{1}{2}D'_2 \Phi' + \frac{1}{4}D_2(\Phi')^2 \right)$$

Sommando i contributi dei Termini A e B, il coefficiente totale della derivata prima ∂_x è:

$$\text{Coeff}(\partial_x) = -D_1 + 2D'_2 - D_2 \Phi'$$

La condizione di Sturm-Liouville

Un operatore differenziale L è hermitiano se assume la forma simmetrica di Sturm-Liouville:

$$L_{SL} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) - q(x)$$

Nel nostro caso, il termine di ordine massimo è $D_2 \partial_x^2$, quindi identifichiamo $p(x) = D_2(x)$.

Espandendo la derivata del prodotto nella forma di Sturm-Liouville, vediamo come deve apparire il termine di derivata prima:

$$L_{SL} = D_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D'_2(x) \frac{\partial}{\partial x} - q(x)$$

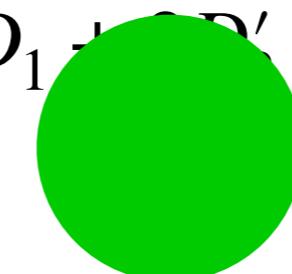
\Rightarrow Condizione necessaria: il coefficiente di ∂_x deve essere esattamente la derivata spaziale della diffusione $D'_2(x)$.

A.18 - Φ t.c. L è autoaggiunto

2. Imposizione della Condizione su Φ : confrontiamo la forma target con il coefficiente di ∂_x calcolato nella slide precedente:

- Coefficiente calcolato: $-D_1 + 2D'_2 - D_2\Phi'$
- Coefficiente richiesto (L_{SL}): D'_2

Uguagliando i due coefficienti: $-D_1 + 2D'_2 - D_2\Phi' = D'_2$



Risolvendo per $\Phi'(x)$:

$$D'_2 - D_1 - D_2\Phi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi'(x) = \frac{D'_2(x) - D_1(x)}{D_2(x)}$$

N.B. L'equazione differenziale per $\Phi(x)$ definisce il potenziale tale per cui $L = e^{\Phi/2} L_{FP} e^{-\Phi/2}$ è hermitiano rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$

A.19 - I potenziali V_{gen} e V_{eff}

Potenziale generalizzato $V_{gen}(x)$

Con riferimento a Appendice [A.18](#), i termini di L nel suo sviluppo A+B che non contengono derivate formano il potenziale $-q(x) = -V_{gen}(x)$.

Dallo sviluppo dei termini A e B si trova che:

$$-V_{gen} = -D'_1 + \frac{1}{2}D_1\Phi' + D''_2 - \frac{1}{2}(D_2\Phi')' - \frac{1}{2}D'_2\Phi' + \frac{1}{4}D_2(\Phi')^2$$

Sostituendo $\Phi' = \frac{D'_2 - D_1}{D_2}$ e semplificando

$$V_{gen}(x) = \frac{1}{4} \frac{(D'_2 - D_1)^2}{D_2} + \frac{1}{2}D'_1 - \frac{1}{2}D''_2$$

Potenziale efficace $V_{eff}(x)$

Ponendo $D_2 = K_1$ costante $\rightarrow D'_2 = D''_2 = 0$

- Il potenziale diventa: $V_{eff}(x) = \frac{D_1(x)^2}{4K_1} + \frac{1}{2}D'_1(x)$
- L'operatore diventa $L = K_1\partial_x^2 - V_{eff}(x)$

A.20 - Normalizzazione della FPE

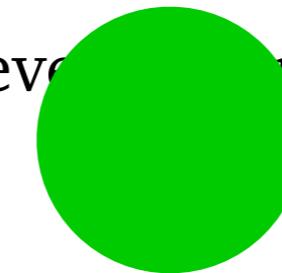
A.20 - Normalizzazione della FPE

Il subordinatore $T(\tau)$ [Ref. [L.4](#)]

Si definisce il processo dei “tempi di attesa accumulati” $T(\tau)$ come un processo di Lévy strettamente crescente:

$T(\tau) = \text{tempo fisico necessario per accumulare un tempo operativo } \tau$

- Gli incrementi ΔT (tempi di attesa) sono indipendenti e stazionari.
- I ΔT seguono una legge di potenza asintotica del tipo $\phi(t) \sim t^{-(1+\beta)}$ con $0 < \beta < 1$
- Questo processo genera i trapping events (quando il tempo fisico t avanza, τ procede a salti)



Il subordinatore inverso $S(t)$

$S(t)$ definisce il processo inverso di $T(\tau)$ come il tempo di primo passaggio:

$$S(t) = \inf\{\tau > 0 : T(\tau) > t\}$$

- **Significato:** $S(t)$ rappresenta il tempo operativo accumulato dal sistema al tempo fisico t .
- **Traiettorie:** le realizzazioni di $S(t)$ sono continue, non decrescenti e con derivata nulla quasi ovunque → Il sistema passa la maggior parte del tempo fermo. Presentano dei plateau in corrispondenza dei salti di $T(\tau)$, durante i quali il tempo fisico scorre ma il sistema è "congelato".

A.22 - L'identità di Mittag-Leffler

Obiettivo: dimostrare formalmente $\int_0^\infty n(\tau, t) e^{-\lambda_n \tau} d\tau = E_\beta(-\lambda_n t^\beta)$

Calcolando la trasformata di Laplace del membro di sinistra e usando la proprietà di linearità:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^\infty n(\tau, t) e^{-\lambda_n \tau} d\tau \right\}(s) = \int_0^\infty \tilde{n}(\tau, s) e^{-\lambda_n \tau} d\tau =$$

Sostituendo $\tilde{n}(\tau, s) = s^{\beta-1} e^{-\tau s^\beta}$ (trovato nella derivazione):

$$= s^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\tau s^\beta} \cdot e^{-\lambda_n \tau} d\tau = s^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-(s^\beta + \lambda_n)\tau} d\tau = s^{\beta-1} \cdot \frac{1}{s^\beta + \lambda_n} = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + \lambda_n}$$

L'espressione ottenuta coincide con la trasformata di Laplace della funzione di Mittag-Leffler:

$$\mathcal{L}\{E_\beta(-\lambda_n t^\beta)\}(s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + \lambda_n}$$

Per il teorema di unicità, l'uguaglianza è dimostrata.

A.23 - Equivalenza $L = -\theta b^\dagger b$

Obiettivo: verifica formale che $-\theta b^\dagger b = K_\beta \partial_x^2 - V_{eff}(x)$.

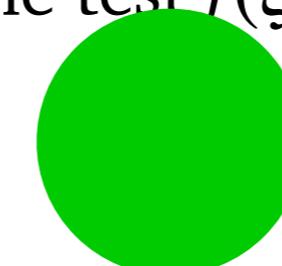
1. Espansione del prodotto $b^\dagger b$

Sostituiamo le definizioni in coordinate scalate ξ :

$$b^\dagger b = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\partial_\xi + \xi) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\xi + \xi) = \frac{1}{2} (-\partial_\xi + \xi) (\partial_\xi + \xi)$$

Applicando il prodotto a una funzione test $f(\xi)$ e usando l'identità

$-\partial_\xi(\xi f) = -f - \xi \partial_\xi f$ si scrive:



$$b^\dagger b f = \frac{1}{2} \left[-\partial_\xi^2 f - \underbrace{\xi \partial_\xi f + \xi \partial_\xi f}_{=0} - f + \xi^2 f \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (\xi^2 - 1) \right] f$$

2. Ritorno alle variabili fisiche

Moltiplicando per $-\theta$ e usando $\partial_\xi^2 = \frac{2K_\beta}{\theta} \partial_x^2$:

$$-\theta b^\dagger b = -\theta \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{2K_\beta}{\theta} \right) \partial_x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta x^2}{2K_\beta} - 1 \right) \right] = K_\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \theta \left(\frac{\theta x^2}{4K_\beta} - \frac{1}{2} \right) = K_\beta \partial_x^2 - V_{eff}(x)$$

Obiettivo: mostrare l'emergere dei polinomi di Hermite dall'azione di b^\dagger .

1. Primo stato eccitato ($n = 1$)

Applichiamo $b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\partial_\xi + \xi)$ allo stato fondamentale $\psi_0 \propto e^{-\xi^2/2}$:

$$\psi_1 \propto b^\dagger e^{-\frac{\xi^2}{2}} \propto \left(-\partial_\xi(e^{-\frac{\xi^2}{2}}) + \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right)$$

Poiché $-\partial_\xi(e^{-\xi^2/2}) = \xi e^{-\xi^2/2}$:

$$\psi_1 \propto (\xi + \xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} = 2\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} \propto H_1(\xi)\psi_0$$

2. Secondo stato eccitato ($n = 2$)

Applichiamo nuovamente b^\dagger al risultato precedente ($2\xi e^{-\xi^2/2}$):

$$\psi_2 \propto \left(-\partial_\xi + \xi \right) (2\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}})$$

- Derivata del prodotto: $-\partial_\xi(2\xi e^{-\xi^2/2}) = -(2e^{-\xi^2/2} - 2\xi^2 e^{-\xi^2/2})$.

Sommando il termine moltiplicativo $2\xi^2 e^{-\xi^2/2}$ si ottiene:

$$\psi_2 \propto (2\xi^2 - 2 + 2\xi^2)e^{-\frac{\xi^2}{2}} = (4\xi^2 - 2)e^{-\frac{\xi^2}{2}} \propto H_2(\xi)\psi_0$$

Obiettivo: dimostrare la convergenza alla soluzione gaussiana classica nel limite $\beta = 1$

Nel limite markoviano, ponendo $\rho = e^{-\theta t}$, la sommatoria si scrive: $S(\xi, \xi_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)H_n(\xi_0)}{2^n n!} \rho^n$

L'identità del kernel di Mehler permette di chiudere la somma:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{\rho^2(\xi^2 + \xi_0^2) - 2\rho\xi\xi_0}{1 - \rho^2} \right]$$

Ricostruzione della soluzione

Moltiplichiamo S per $A = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi K_\beta}} e^{-\xi^2}$, il prefattore di normalizzazione di $P_\beta(x, t | x_0, 0)$:

$$P_1 = A \cdot S = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi K_\beta}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp \left[-\xi^2 + \frac{2\xi\xi_0\rho - (\xi^2 + \xi_0^2)\rho^2}{1 - \rho^2} \right]$$

Esponente $= -\frac{(\xi - \xi_0\rho)^2}{1 - \rho^2}$, Prefattore $= \sqrt{\frac{\theta}{2\pi K_\beta(1 - \rho^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}}$, con $\sigma^2(t) = \frac{K_\beta}{\theta}(1 - \rho^2)$

Sostituendo $\xi = x\sqrt{\theta/2K_\beta}$ nell'esponente si ottiene la soluzione del processo O-U standard centrato in 0:

$$P_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left[-\frac{(x - x_0 e^{-\theta t})^2}{2\sigma^2(t)} \right]$$

A.26 - Azione di b^\dagger e spettro $\{\lambda_n\}$

Obiettivo: dimostrare che $L(b^\dagger | n \rangle) = -(\lambda_n + \theta)(b^\dagger | n \rangle)$.

1. Commutatore fondamentale

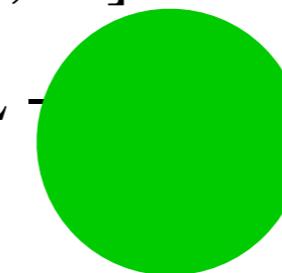
Calcoliamo il commutatore tra l'operatore $L = -\theta b^\dagger b$ e l'operatore di creazione b^\dagger :

$$[L, b^\dagger] = [-\theta b^\dagger b, b^\dagger] = -\theta (b^\dagger [b, b^\dagger] + [b^\dagger, b^\dagger] b)$$

Poiché $[b, b^\dagger] = 1$ e $[b^\dagger, b^\dagger] = 0$, otteniamo:

$$[L, b^\dagger] = -\theta b^\dagger$$

Questo implica la relazione: $Lb^\dagger = b^\dagger L -$



2. Azione sull'autostato

Applichiamo L allo stato $b^\dagger | n \rangle$, sapendo che $L | n \rangle = -\lambda_n | n \rangle$:

$$\begin{aligned} L(b^\dagger | n \rangle) &= (b^\dagger L - \theta b^\dagger) | n \rangle \\ &= b^\dagger(L | n \rangle) - \theta b^\dagger | n \rangle \\ &= b^\dagger(-\lambda_n | n \rangle) - \theta b^\dagger | n \rangle \\ &= -(\lambda_n + \theta)(b^\dagger | n \rangle) \end{aligned}$$

Conclusioni

Lo stato $b^\dagger | n \rangle$ è ancora un autostato di L , ma con autovalore aumentato di θ .

Iterando questo processo da $\lambda_0 = 0$, si ottiene lo spettro equispaziato $\lambda_n = n\theta$.

A.27 - Spettro di N

Obiettivo: dimostrare che gli autovalori di $N = b^\dagger b$ sono tali che $n \in \mathbb{N}$

1. Commutatore con l'operatore di salita

Calcoliamo come N commuta con b^\dagger :

$$[N, b^\dagger] = [b^\dagger b, b^\dagger] = b^\dagger[b, b^\dagger] + [b^\dagger, b^\dagger]b = b^\dagger$$

→ Questo implica che $Nb^\dagger = b^\dagger N + b^\dagger = b^\dagger(N + 1)$.

2. Azione sugli autostati

Se $|n\rangle$ è autostato con autovalore n , applichiamo N allo stato $b^\dagger |n\rangle$:

$$N(b^\dagger |n\rangle) = b^\dagger(N + 1)|n\rangle = b^\dagger(n + 1)|n\rangle = (n + 1)(b^\dagger |n\rangle)$$

⇒ b^\dagger incrementa l'autovalore di un'unità intera.

3. La condizione di fondo

La norma dello stato deve essere non negativa:

$$\|b |n\rangle\|^2 = \langle n | b^\dagger b | n \rangle = n \langle n | n \rangle \geq 0 \Rightarrow n \geq 0.$$

La sequenza di discesa $b |n\rangle$ deve interrompersi a un valore $n = 0$ t.c. $b |0\rangle = 0$.

Partendo da 0 e applicando b^\dagger , si generano tutti gli interi $n \in \mathbb{N}$.