Tecnica delle Costruzioni
Prof.: Fontanari Vigilio

Matteo Dalle Vedove

Anno Accademico 2020-2021
3 maggio 2021

Indice

Parte I

Meccanica dei solidi

Capitolo 1

Tensori

Capitolo 2

Solidi di Cauchy e analisi di tensione

La **meccanica dei solidi**, il cui primo sviluppo fu dovuto a Cauchy, supera l'approccio particellare della **materia** che viene invece considerata come un **solido continuo**. In particolare ogni volume elementare viene scomposto in volumi elementari infinitesimi caratterizzati dalle stesse proprietà del materiale.

> **Nota:** Un volume elementare, per poter pensare che abbia una distribuzione di proprietà uniforme, prevede che esso sia composto da milioni di atomi; tuttavia questo insieme, dal punto di vista macroscopico, è molto piccolo (e dunque infinitesimo).

2.1 Azioni di volume e di superficie

Per effettuare la descrizione di un solido nella meccanica dei solidi è dunque necessario capire come è possibile rappresentare le azioni che agiscono sullo stesso.

Concetto 2.1: Si definiscono le **azioni di volume** tutte quelle che azioni che sono dovute al volume degli elementi infinitesimi (come per esempio la forza peso), mentre sono **azioni di superficie** quelle che si manifestano sul contorno del sistema di analisi (come per esempio la pressione di un fluido).

Definita l' **azione di volume intensiva** $\boldsymbol{q}_v$ che agisce sul corpo, il contributo di azione infinitesima associato ad ogni volume elementare è dunque calcolato come

$$d\boldsymbol{F}_v = \boldsymbol{q}_v \, dV \tag{2.1}$$

Analogamente nota l' **azione di superficie intensiva** $\boldsymbol{p}$ che si espleta su una superficie Ω, la forza dovuta all'elemento infinitesimo può essere calcolata come

$$d\boldsymbol{F}_\Omega = \boldsymbol{p} \cdot d\Omega \tag{2.2}$$

2.2 Solidi di Cauchy

A questo punto è lecito cercare di capire quale sia l'effetto delle azioni intensive $\boldsymbol{q}_v$ e $\boldsymbol{p}$. Per iniziare ad analizzare questi effetti, si consideri un piano del corpo di versore normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ passante per un generico punto A di area Ω. Rispetto alla superficie tagliata a livello locale si determinano delle azioni di reazione $\boldsymbol{R}$ e di momento $\boldsymbol{M}$; per il principio di azione reazione sulla superficie opposta Ω^- (di versore $-\hat{\boldsymbol{n}}$) si dovranno dunque istituire delle reazioni $\boldsymbol{R}^- = -\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{M}^- = -\boldsymbol{M}$.

L'idea è dunque quella di rendere tali relazioni sulle reazioni interne indipendenti dalla superficie effettuando i rapporti $\boldsymbol{R}/\Omega$ e $\boldsymbol{M}/\Omega$, ponendo il limite della superficie al valore infinitesimo.

Concetto 2.2: Si definiscono i **solidi di Cauchy** tutti quei solidi il cui limite dell'azione interna riferita all'area tende ad un vettore univoco detto **vettore di tensione** $\boldsymbol{t}$, misurato in *Pascal*, calcolato come

$$\boldsymbol{t} = \lim_{\Omega \to 0} \frac{\boldsymbol{R}}{\Omega} \qquad \left[\frac{N}{m^2}\right] = [Pa] \tag{2.3}$$

mentre deve essere nullo il limite rispetto al momento:

$$\lim_{\Omega \to 0} \frac{\boldsymbol{M}}{\Omega} = 0$$

Nota: Esistono dei solidi, detti **polari** o ***di Cosserat*** (che non vengono studiati in questo corso) per cui

$$\lim_{\Omega \to 0} \frac{\boldsymbol{M}}{\Omega} = \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{0}$$

E' possibile osservare che il vettore della tensione $\boldsymbol{t}$ dipende:

- dalla posizione A rispetto alla quale si effettua il taglio del volume, rappresentato dal vettore posizione $\boldsymbol{r}_A$. In questo caso essendo la tensione dipendente dalla posizione, allora a livello matematico essa è definita tramite un **campo vettoriale**;
- dalla direzione $\boldsymbol{n}$ del versore della sezione rispetto alla quale si effettua il limite.

Potendo esprimere il vettore tensione come $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{r}_A, \hat{\boldsymbol{n}}\big)$ e per via del principio di azione-reazione sulle due facce della superficie di taglio è possibile osservare che

$$\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{r}_A, -\hat{\boldsymbol{n}}\big) = -\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{r}_A, \hat{\boldsymbol{n}}\big)$$

Il vettore della tensione $\boldsymbol{t}$ viene calcolato partendo da un versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ predeterminato, tuttavia a livello reale è possibile determinare infiniti valori di tensione associate alle infinite direzioni che può assumere $\hat{\boldsymbol{n}}$.

2.2.1 Componenti del vettore tensione

Si consideri un piano Π di normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ tagliante il solido di Cauchy nel punto A; su tale superficie è possibile determinare due versori $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{q}}$ mutuamente perpendicolari che, insieme al versore $\hat{\boldsymbol{n}}$, permettono di determinare una base ortonormale dello spazio tridimensionale.

Concetto 2.3: Potendo definire il vettore di tensione $\boldsymbol{t}_n$ rispetto al piano individuato, è possibile calcolare le **componenti di tensione** nella terna di versori $\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{q}}$ effettuando il prodotto scalare tra tensione e versore:

$$t_{nn} = \boldsymbol{t}_n \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \qquad t_{qn} = \boldsymbol{t}_n \cdot \hat{\boldsymbol{q}} \qquad t_{rn} = \boldsymbol{t}_n \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.4}$$

In particolare il termine t_{nn} rappresenta l' **azione di trazione/compressione** che, moltiplicata per l'area di Π, agisce sulla superficie, mentre le componenti t_{qn} e t_{rn} rappresentano le **azioni di scorrimento** . Da queste definizione è anche possibile definire la **componente totale di scorrimento**

$$|\tau_{qn}| = \sqrt{t_{qn}^2 + q_{rn}^2}$$

Dato in generale un sistema di riferimento cartesiano è possibile esprimere il **vettore di tensione** ottenuto da una superficie di versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ come

$$\boldsymbol{t}_n = \Big(t_{xn}, t_{yn}, t_{zn}\Big) \tag{2.5}$$

Nota: Dato un sistema di riferimento cartesiano, ogni versore utilizzato può essere descritto da una terna dei suoi coseni direttori, ossia $\hat{\boldsymbol{n}} = \big(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\big)$, $\hat{\boldsymbol{q}} = \big(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\big)$ e $\hat{\boldsymbol{r}} = \big(\beta_x, \beta_y, \beta_z\big)$. In maniera più esplicita il vettore di tensione di normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ può dunque essere espresso come

$$\boldsymbol{t}_n = \Big(t_{nn}, t_{qn}, t_{rn}\Big) = \Big(\boldsymbol{t}_n \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{t}_n \cdot \hat{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{t}_n \cdot \hat{\boldsymbol{r}}\Big)$$

2.2.2 Tensore di Cauchy

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano di versori $\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ centrato nel punto di taglio A. Considerando che il piano di taglio Π abbia versore normale il vettore $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ (piano perpendicolare all'asse x), allora è possibile calcolare il **vettore di tensione** rispetto a tale direzione di taglio; in particolare applicando l'equazione 2.4 si ricava il vettore

$$\boldsymbol{t}_x = \big(t_{xx}, t_{yx}, t_{zx}\big)$$

Per analogia se si suppone di tagliare il solido rispetto ad un piano di normale $\hat{\boldsymbol{j}}$ si ottiene il vettore $\boldsymbol{t}_y = \big(t_{xy}, t_{yy}, t_{zy}\big)$, mentre tagliando lungo $\hat{\boldsymbol{k}}$ il vettore $\boldsymbol{t}_z = \big(t_{xz}, t_{yz}, t_{zz}\big)$.

Concetto 2.4: I vettori $\boldsymbol{t}_x, \boldsymbol{t}_y, \boldsymbol{t}_z$ appenda descritti rappresentano le **componenti speciali di tensione** ; questi vettori rappresentano la base rispetto alla quale ogni altro vettore di tensione può essere espresso mediante combinazione lineare.
Questi vettori danno origine al **tensore di Cauchy** $\mathcal{S}$ definito come

$$\mathcal{S} = \Big[\ \boldsymbol{t}_x \mid \boldsymbol{t}_y \mid \boldsymbol{t}_z\ \Big] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Nota: E' possibile osservare dunque le componenti a trazione (del tipo t_{xx}) vengono sostituite dalla lettera greca $\sigma_{xx} = \sigma_x$, mentre le componenti di taglio (del tipo t_{xy}) vengono sostituite dall'espressione τ_{xy}.

Capitolo 3

Analisi di deformazione

Capitolo 4

Problema generale della meccanica dei solidi

Capitolo 5

Materiale elastico

Capitolo 6

Limiti del modello lineare elastico e crisi del componente

Parte II

Analisi di elementi monodimensionali

Capitolo 7

La trave

Capitolo 8

Modello di Saint Venant

Il modello più semplice per studiare una trave è formulato da Saint Venant che, tramite delle opportune ipotesi semplificative, permette di facilitare la descrizione del problema.

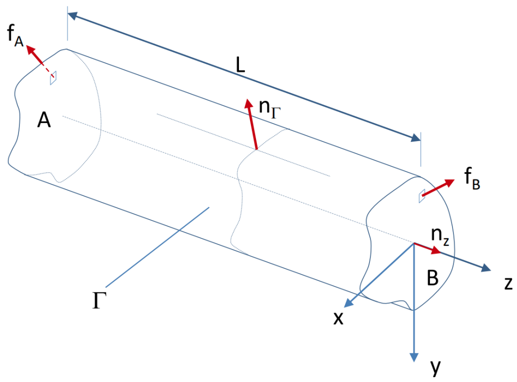

Figura 8.1: *schema di riferimento della trave di Saint Venant*

Concetto 8.1: Il **solido di Saint Venant**, figura 8.1, è descritto da una trave di lunghezza L sull'asse congiungente gli estremi A e B. La terna di riferimento per l'analisi è posta con z coincidente all'asse della trave, mentre gli assi x, y sono posti in modo da formare un **sistema baricentrico principale** (per cui $I_{xy} = S_x = S_y = 0$).
Le **ipotesi semplificative** necessarie per utilizzare il modello sono:

- che la lunghezza L dell'asse sia di molto maggiore delle lunghezze caratteristiche delle sezioni. La trave deve essere rettilinea (o con raggio di curvatura molto alto) e la sezione deve essere costante (o variare blandamente lungo l'asse) e sempre perpendicolare all'asse in ogni punto della trave;
- che il mantello Γ sia scarico e che non siano presenti azioni di volume $\boldsymbol{b}$. L'unico carico esterno che può essere applicato deve essere posto in corrispondenza delle basi A e B.

In generale nota la distribuzione di azioni superficiali $\boldsymbol{f}_A$ su una base (A in questo caso), è possibile creare un sistema staticamente equivalente di risultante $\boldsymbol{R}_A$ e momento $\boldsymbol{M}_A$ rispetto al sistema baricentrico della trave:

$$\boldsymbol{R}_A = \int_{\Omega_A} \boldsymbol{f}_A \, d\Omega \qquad \boldsymbol{M}_A = \int_{\Omega_A} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}_A \, d\Omega$$

In condizioni statiche è inoltre necessario che la risultante delle forze sul corpo sia nulla, da cui l'equazione $\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B = \boldsymbol{0}$, mentre bilanciando il momento rispetto al polo A si ricava che $\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B + \boldsymbol{O}_A\boldsymbol{O}_B \times \boldsymbol{R}_B = \boldsymbol{0}$.

Concetto 8.2: Si definisce dunque il **postulato di Saint Venant** per il quale *noto che sulle basi A, B della trave la tensione interna coincide con quella applicata dalle forze distribuite $\boldsymbol{f}_A, \boldsymbol{f}_B$, ad una distanza paragonabile alla dimensione caratteristica massima della base lo stato di tensione non dipende più dalla distribuzione delle azioni $\boldsymbol{f}$, ma solamente dalla risultante delle forze $\boldsymbol{R}$ e dal momento risultante $\boldsymbol{M}$.*
La distanza dalla base rispetto alla quale lo stato di tensione dipende solamente dalla risultante è chiamata **distanza di estinzione** ; nella fascia compresa tra base e distanza di estinzione non vale dunque il modello di Saint Venant.

Osservazione: La distanza di estinzione è tanto minore quanto più compatta è la sezione della trave stessa.

8.1 Stato tensionale

Nel modello di Saint Venant è possibile considerare la trave come composta da delle fibre longitutinali (lungo l'asse z) che possono reagire solamente a sforzi normali σ_{zz} e ad azioni tangenziali del tipo τ_{xz}, τ_{yz}; le altre azioni infatti sarebbero attivate solamente in corrispondenza di azioni sul mantello, cosa che per ipotesi del modello è scaratata.

In generale il modello può essere accettato fintanto che $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} \ll \sigma_{zz}, \tau_{xz}\tau_{yz}$ e dunque il **tensore di Cauchy** si riduce ad uno stato tensionale piano del tipo

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma_{zz}} = \sigma_{zz}\hat{\boldsymbol{k}} \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_{yz}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \tau_{xz}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{8.1}$$

Come è possibile osservare ogni vettore di tensione può essere scomposto in una componente normale alle sezioni $\boldsymbol{\sigma_{zz}}$ e in una componente di tipo tangenziale $\boldsymbol{\tau}$.

Concetto 8.3: La **soluzione** del problema di Saint Venant si basa dunque sul determinare il **campo scalare** associato all'azione normale $\sigma_{zz}(x, y)$ e al **campo vettoriale** $\boldsymbol{\tau}(x, y)$ associato alle componenti tangenziali.

Per il postulato di Saint Venant è possibile osservare che le componenti da determinzare $\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (funzioni della posizione), oltre la distanza di estinzione, sono indipendente della azioni di superficie $\boldsymbol{f}$ ma dipendono solamente dalle risultanti delle forze $\boldsymbol{R} = \big(T_x, T_y, N\big)$ e dei momenti $\boldsymbol{M} = \big(M_x, M_y, M_z\big)$.

Concetto 8.4: Nelle fasce di validità del modello di Saint Venant è dunque possibile istituire un' **equivalenza statica** tra le azioni staticamente equivalenti $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}$ e lo stato di tensione interno e dunque:

$$\begin{aligned} T_x &= \int_{\Omega_s} \tau_{xz}(x, y)\, d\Omega_s & T_y &= \int_{\Omega_s} \tau_{yz}(x, y)\, d\Omega_s \\ N &= \int_{\Omega_s} \sigma_{zz}(x, y)\, d\Omega_s & M_z &= \int_{\Omega_s} \Big(x\,\tau_{yz}(x, y) - y\,\tau_{xz}(x, y)\Big)\, d\Omega_s \\ M_x &= \int_{\Omega_s} y\,\sigma_{zz}(x, y)\, d\Omega_s & M_y &= \int_{\Omega_s} x\,\sigma_{zz}(x, y)\, d\Omega_s \end{aligned} \tag{8.2}$$

Osservazione: Osservando l'equivalenza statica nel modello di Saint Venant (eq. 8.2) è possibile osservarae come la reazione normale N e i momenti flettenti M_x, M_y siano associati solamente al campo scalare σ_{zz}, e dunque ad un tensore del tipo

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Al contrario il momento torcente M_z è associato alla presenza delle componenti τ_{xz} e τ_{yz} che, di conseguenza, generano delle azioni taglianti T_x, T_y; queste azioni di fatto determinano il tensore di Cauchy del tipo

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

8.1.1 Equilibrio indefinito, condizioni al contorno e legame costitutivo

Equilibrio indefinito Come visto nell'equazione 8.1, lo stato tensionale di una trave sotto le ipotesi di Saint Venant è piano; considerando che per ipotesi le azioni di volume sono nulle ($\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$) allora è possibile riscrivere le **equazioni di equilibrio indefinito** per il problema come:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Le prime due equazioni dimostrano dunque che le **componenti tangenziali** τ_{xz}, τ_{yz} del vettore $\boldsymbol{\tau}$ sono **indipendenti** dalla coordinata assiale z, mentre la terza equazione lega la divergenza del campo delle azioni di taglio con la variazione lungo l'asse si σ_{zz}:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) = -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \begin{cases} = 0 & : \text{campo solenoidale, linee di flusso chiuse} \\ \neq 0 & : \text{campo non solenoidale, linee di flusso aperte} \end{cases}$$

Condizioni al contorno L'ipotesi di Saint Venant afferma che il mantello sia sempre scarico; scelto un qualsiasi punto sull contorno avente direzione normale uscente $\hat{\boldsymbol{n}}_\Gamma = (\alpha_x, \alpha_y, 0)$ al punto considerato sul mantello Γ, allora si deve verificare che lo stato di tensione in quel punto sia nullo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y = \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_\Gamma = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\tau} \perp \hat{\boldsymbol{n}}_\Gamma$$

Si osserva dunque che sul mantello il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ deve necessariamente essere ortogonale alla normale del mantello $\hat{\boldsymbol{n}}_\Gamma$ (e dunque deve essere tangente alla superficie del mantello Γ stesso).

Nota: In questo caso il versore $\hat{\boldsymbol{n}}_\Gamma$ presenta l'ultima componente nulla in quanto, per ipotesi, la sezione è costante lungo l'asse della trave, e dunque il mantello non può avere componente normale nell'asse z. In caso di variazioni blande della sezione si avrebbe l'introduzione di tale fattore, che tuttavia sarebbe approssimabile al valore nullo.