



Università degli Studi di Trento

Dipartimento di Ingegneria Industriale
Corso di Fondamenti di Automatica

Docente: Panzani Giulio
giulio.panzani@studenti.unitn.it

Appunti del corso

Matteo Dalle Vedove
matteo.dallevedove@studenti.unitn.it

Anno Accademico 2020-2021
28 gennaio 2021

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Concetti base	2
2	Sistemi e loro classificazione	6
2.1	Rappresentazione di stato del sistema (spazio di stato)	8
2.1.1	Risoluzione generale	10
2.1.2	Sistemi a tempo discreto	11
2.2	Sistemi dinamici nel dominio del tempo	12
2.3	Movimento di equilibrio	13
2.3.1	Formula di Lagrange	14
2.4	Descrizione di sistemi non lineari	15
3	Teoria del controllo classico	17
3.1	Trasformata di Laplace	17
3.1.1	Proprietà della trasformata di Laplace	18
3.2	Trasformazione inversa: antitrasformata di Laplace	19
3.2.1	Antitrasformata di Laplace	20
3.3	Applicazione di Laplace a sistemi dinamici lineari tempo invarianti	24
3.3.1	Analisi del movimento di stato e uscita	24
3.4	Stabilità di un sistema	25
3.4.1	Stabilità del movimento per sistemi lineari tempo invarianti	26
3.4.2	Criteri di stabilità di sistemi lineari tempo invarianti tramite l'analisi della risposta all'impulso	27
3.4.3	Criteri di stabilità basati sull'analisi diretta del polinomio del denominatore	28
3.4.4	Stabilità per sistemi non lineari	31
3.5	Funzione di trasferimento per sistemi lineari tempo invarianti	32
3.5.1	Parametrizzazioni della funzione di trasferimento	33
3.6	Studio del legame ingresso-uscita	33
3.6.1	Risposta allo scalino	34
3.6.2	Effetti degli zeri sulla risposta allo scalino	37
3.6.3	Risposta ad un segnale sinusoidale	38
3.6.4	Classificazione di sistemi dinamici attraverso i diagrammi di Bode	42
3.7	Sistema a ritardo di tempo	42
4	Sistemi dinamici interconnessi	44
4.1	Schemi a blocchi	44
4.1.1	Connessioni elementari	44
4.1.2	Rappresentazione dei sistemi dinamici	45
4.2	Stabilità di sistemi interconnessi	45
4.2.1	Analisi delle radici del denominatore	46
4.2.2	Criterio di Nyquist	46
4.2.3	Criterio di Bode	47
5	Prestazioni dei sistemi di controllo	50
5.1	Analisi delle prestazioni	50
5.1.1	Funzione di sensitività complementare	50
5.1.2	Funzione della sensitività	52
5.1.3	Funzione della sensitività del controllo	53

5.2	Sintesi di sistemi di controllo	53
5.2.1	Stabilità del sistema di controllo	54
5.2.2	Specifiche del sistema	54
5.2.3	Calcolo del regolatore	55
6	Esercitazioni	56

Capitolo 1

Introduzione

L'**automatica** studia il **controllo di un sistema** in maniera autonoma/automatica, ossia senza l'intervento di un operatore.

Concetto 1.1: *L'**automatica** è la disciplina che studia come agire su un sistema in modo che il suo comportamento assomigli a quello desiderato, senza necessità di intervento manuale.*

Il **sistema** è un insieme di elementi fisici e/o concettuali il cui comportamento cambia nel tempo (e/o nello spazio) che interagiscono con il mondo circostante.

Gli **ingressi** sul sistema sono gli elementi esterni che possono indurre un cambiamento nel sistema oggetto di studio. Le **uscite** sono le informazioni in uscita dal sistema che si sta monitorando.

Il comportamento per essere simile a quello desiderato è strettamente correlato ad uno stato di **riferimento** predeterminato.

Per gestire il sistema è necessario determinare un **controllo**, ossia un algoritmo/oggetto che, tramite il riferimento, elabora gli input per generare le uscite prefissate.

L'automatica si occupa di risolvere un problema di controllo e/o decisione, senza alcun intervento umano esplicito. L'automatica è dunque una *tecnologia nascosta* (permette di gestire implicitamente le movimentazioni dei sistemi) e multidisciplinare.

L'automatica per essere così generale necessita di un certo livello di astrazione che è strettamente correlata a una **descrizione matematica** del problema.

1.1 Concetti base

Sistema Un **sistema**, schematicamente rappresentato tramite una *black box* come in figura 1.1, rappresenta il *confine* con l'ambiente esterno di una collezione di elementi (fisici e/o concettuali).



Le interazioni con l'ambiente esterno sono rappresentati da rami (freccie) collegate in ingresso alla scatola; in particolare gli **ingressi** che modificano le proprietà del sistema possono essere:

- di **controllo** u (spesso definiti semplicemente *ingressi*): valore che può essere impostato a piacimento dal controllore;
- di **disturbo** d : valori la cui evoluzione non può essere influenzata (e talvolta non è conosciuta).

Le **uscite** y descrivono l'evoluzione del sistema (o di alcune sue parti) e possono influenzare l'ambiente con cui interagiscono

In molti casi la scelta di catalogare una variabile come ingresso o uscita è puramente arbitraria e deve essere contestualizzata al problema da risolvere. Considerando l'esempio di un'automobile,

la coppia motrice T può essere un'uscita del motore verso il telaio dell'auto (che è il sistema) che è regolata da ingressi esterni (quantità di carburante, temperatura dell'aria...);

Controllo Il **controllo automatico** è il termine che denota un'azione che è applicata al sistema per farlo evolvere come desiderato. Il **controllore** (figura 1.2) è il sistema concettuale che presenta come ingressi le **specifiche del problema** y^0 , ossia l'*obiettivo* che il sistema deve perseguire. L'uscita di questo dispositivo è di fatto l'azione di controllo u sugli ingressi del sistema fisico S da controllare.

In generale possono essere presenti anche degli altri ingressi i .

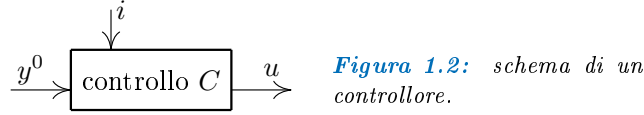


Figura 1.2: schema di un controllore.

Specifiche di controllo Il **riferimento** determina le **specifiche di controllo**, ossia è il valore della variabile y^0 (che generalmente può cambiare nel tempo) che dovrebbe raggiungere il sistema a regime.

Idealmente la variabile controllata y sia pari al segnale di riferimento y^0 in ogni condizione (indipendentemente dal rumore), anche se in un caso più realistico si vuole che la variabile controllata y minimizzi l'errore:

$$\underbrace{\text{errore}}_e = \underbrace{\text{valore di riferimento}}_{y^0} - \underbrace{\text{variabile controllata}}_0$$

Spesso i limiti delle specifiche di controllo sono limitate dalla grandezza della variabile di controllo stessa (per esempio una Panda non può accelerare come una Ferrari per via del motore implementato sulla stessa).

Sistema di controllo Un **sistema di controllo**, come in figura 1.3, è l'unione del controllore C con il sistema S da controllare.

In riferimento allo schema u sono dunque le variabili di controllo, y^0 i segnali di riferimento, i eventuali altri ingressi al controllore, d i disturbi e infine y le variabili del sistema da controllare.

Concetto 1.2: Il **problema di controllo** è quello di determinare le variabili di controllo u affinché le variabili da controllare y siano simili al segnale di riferimento y^0 :

$$y \simeq y^0$$

Questo deve valere per ogni possibile *traiettoria* del riferimento y^0 e dei disturbi d , ossia l'errore $e = y^0 - y$ deve essere il più piccolo possibile.

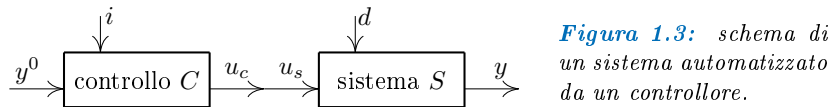


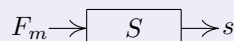
Figura 1.3: schema di un sistema automatizzato da un controllore.

Esempio 1.1: controllo di un sistema massa molla

FIGURA

In figura è possibile osservare il sistema da controllare composto da una massa m posta ad una distanza s dall'equilibrio e da una molla di coefficiente elastico k_n . Come ingressi del sistema si considera la forza applicata alla massa F_m (questa può dunque essere gestita dal controllore), mentre l'uscita è la posizione s . La specifica di controllo del meccanismo è che esso raggiunga la posizione s^0 .

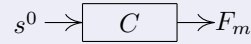
Si ipotizza inoltre l'assenza, attualmente, di disturbi esterni.



Analizzando il sistema S (dove è rappresentato l'ingresso $u = F_m$ e l'uscita $y = s$) è possibile descrivere l'equazione matematica che la governa, in funzione della forza esercitata dalla molla F_s . Dovendo essa, in modulo, essere pari alla forza F_m applicata è dunque possibile esplicitare il valore della posizione s in funzione dell'ingresso:

$$F_s = k_n s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{k_n} F_m$$

Prima strategia di controllo Un primo modo per controllare il sistema sarebbe quello di utilizzare il modello inverso.



Analizzando lo schema del controllore, per determinare la forza F_m da applicare per raggiungere la posizione s^0 è sufficiente considerare che

$$F_m = k_n s^0$$

Inserendo questa equazione in quella ricavata dal sistema è possibile verificare che l'errore del sistema è nullo in quanto $s = s^0$:

$$s = \frac{1}{k_n} F_m \xrightarrow{F_m = k_n s^0} s = s^0 \quad \Rightarrow \quad e = s^0 - s = 0$$

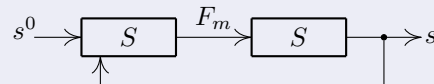
Questo sistema tuttavia per funzionare efficacemente prevede di conoscere precisamente il valore della costante k_n ; considerando un caso generale dove il coefficiente elastico è formulato come $k = k_n + \Delta k$ (ossia può presentare delle variazioni rispetto al caso *standard* con $k = k_n$), allora questa logica di controllo va in deficit.

Mantenendo inalterata la logica di controllo ma applicando la variazione alla legge del sistema è dunque possibile determinare l'errore e di questo sistema di controllo:

$$s = \frac{1}{k_n + \Delta k} F_m \xrightarrow{F_m = k_n s^0} e = s^0 - s = \frac{\Delta k}{k_n} s^0$$

Si osserva che l'errore e è tanto più grande quanto è grande lo scostamento Δk .

Seconda strategia di controllo Una seconda metodologia per controllare il sistema è quella di realizzare una retroazione creando un *sistema ad anello chiuso* (definito in seguito), portando l'uscita s del sistema come ingresso per il controllore come segue:



Un modo sensato per ridurre l'errore è quello di determinare la forza F_m in modo proporzionale all'errore:

$$F_m = \alpha e = \alpha (s^0 - s)$$

Il controllore seguendo questa legge permette di determinare un errore dipendente dal parametro α arbitrariamente scelto:

$$e = s^0 - s = \frac{s^0}{1 + \alpha/k}$$

Aumentando dunque il valore α è possibile diminuire l'errore del meccanismo.

MANCA IL GRAFICO FINALE E LA SUA DISCUSSIONE

Concetto 1.3: Si parla di sistema di controllo ad **anello aperto** quando le uscite del sistema non sono poste in retroazione al controllore; per funzionare adeguatamente questo sistema deve conoscere adeguatamente il funzionamento del sistema e i parametri dello stesso. Si parla di **anello chiuso** quando è presente una retroazione; questo permette in generale di diminuire l'errore (soprattutto determinato dai disturbi); questo sistema richiede un aumento

di complessità del controllore per via dei sensori che devono essere implementati sullo stesso per rilevare la retroazione.

Capitolo 2

Sistemi e loro classificazione

Il sistema, assimilato ad una black box, sono caratterizzati in generale dagli ingressi u , mentre y sono le uscite.

I **parametri** di un sistema sono le quantità che descrivono la struttura e le proprietà del sistema (per esempio la massa di un corpo e la sua geometria); tendenzialmente sono dei valori invarianti nel tempo.

Le **variabili** invece sono delle grandezze che descrivono l'evoluzione nel tempo del sistema, quali per esempio la posizione di un corpo e la sua velocità.

Classificazione dei sistemi

I sistemi possono essere classificati tramite i cosiddetti **assi di classificazione** (ogni sistema deve avere una classificazione rispetto ad ogni asse):

- sistemi lineari o non lineari;
- sistemi MIMO o SISO;
- sistemi tempo varianti o tempo invarianti;
- sistemi a tempo continuo o a tempo discreto;
- sistemi statici o dinamici.

Sistema statico Un **sistema** è detto **statico** se la relazione ingresso-uscita è descritta dall'equazione algebrica del tipo

$$y = f(u)$$

Intuitivamente ciò significa che per determinare l'uscita y al tempo t^* è sufficiente conoscere il valore degli ingressi u in quell'istante (la *storia* degli ingressi è ininfluenza alla determinazione dell'uscita). Sono anche detti sistemi *memory-less*.

Sistemi tempo varianti e invarianti Sono **tempo varianti** i sistemi la cui relazione di ingresso/uscita dipende esplicitamente dal tempo; algebricamente allora vuol dire che

$$y = f(u, t) \quad : \text{ sistema tempo variante}$$

Se, al contrario, la funzione f non dipende esplicitamente dal tempo t allora il sistema è detto **tempo invariante**:

$$y = f(u) \quad : \text{ sistema tempo invariante}$$

Sistemi MIMO e SISO Un sistema **MIMO** (*Multi Input Multi Output*) è un sistema che presenta più ingressi e più uscite, mentre analogamente un sistema **SISO** (*Single Input Single Output*) presenta un solo ingresso e una sola uscita.

Per esempio un sistema fisico MIMO statico tempo invariante allora la relazione f può essere determinata come

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(u_1, \dots, u_n) \\ &\vdots \\ y_p &= f_p(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Sistemi lineari e non Un sistema è lineare se l'equazione algebrica f soddisfa le condizioni di linearità rispetto agli ingressi u , ossia è *stabile* rispetto alla somma e al prodotto:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad \Rightarrow \quad f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2)$$

MANCA LA PARTE DELLE MATRICI

Sistemi a tempo continuo e discreto Nei sistemi a **tempo continuo** le variabili evolvono nel tempo t che è continuo. I sistemi a **tempo discreto** presentano variabili che evolvono in un tempo $k \in \mathbb{N}$ che assume valori discreti interi.

I sistemi a tempo discreto derivano:

- dall'approssimazione di sistemi a tempo continuo;
- sistemi dinamici descritti nativamente come una successione di eventi ad intervalli (come l'algoritmo di calcolo degli zeri di una funzione con il metodo di Newton o di bisezione).

Sistemi dinamici Sono **sistemi dinamici** quei sistemi rispetto ai quali per determinare il valore dell'uscita y al tempo t^* non è sufficiente conoscere l'ingresso u allo stesso tempo, ma è necessario conoscerne il suo trascorso temporale e dunque $u(t)$.

Per determinare l'uscita y al tempo t^* è dunque necessario conoscere sia la condizione iniziale del sistema al tempo t_0 (ossia il valore di una variabile) e tutta la storia temporale dell'ingresso $u(t)$ tra il tempo t_0 e t^* .

In particolare la condizione iniziale, che può essere indicata con $u(t_0)$, tiene memoria di tutto il passato trascorso del sistema.

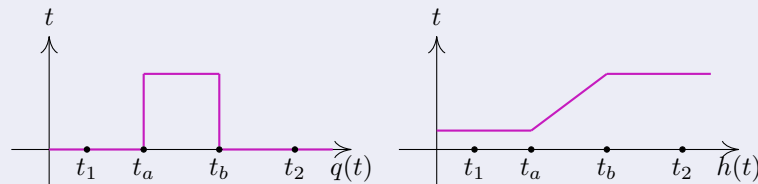
Sono dette **variabili di stato** (generalmente indicate con x) quelle variabili che occorre conoscere all'istante t_0 per calcolare $y(t^*)$ (ipotizzando di conoscere $u(t)$ per $t \in [t_0, t^*]$). Rispetto ai sistemi fisici le variabili di stato sono generalmente associate a fenomeni di accumulo di energia e/o massa (per esempio tensioni di condensatori, correnti negli induttori, posizione e dunque la sua energia potenziale, temperatura).

Per descrivere matematicamente i sistemi dinamici è dunque necessario utilizzare delle **equazioni differenziali** (ordinarie).

Esempio 2.1: bottiglia che si riempie

Si consideri il caso di una bottiglia nella quale si versa una portata di acqua $q = u$ (variabile di controllo) e del quale si vuole determinare il livello $h = y$ (variabile controllata) dell'acqua nella bottiglia.

E' dunque osservare i seguenti diagrammi per le variabili.



Ipotizzando il sistema come statico allora dovrebbe valere che ai tempi $t_1 \neq t_2$ segnati (dove $q(t_1) = q(t_2)$), il livello dell'acqua dovrebbe essere uguale, ma ciò non è verificato:

$$q(t_1) = q(t_2) \quad \rightarrow \quad h(t_1) \neq h(t_2) \quad : \text{ sistema dinamico}$$

Si verifica dunque che il sistema di controllo non è statico ma è dinamico. E' possibile dunque definire l'equazione differenziale che governa il problema: approssimando la bottiglia ad un

cilindro, la quantità di acqua Q presente nella bottiglia è pari a

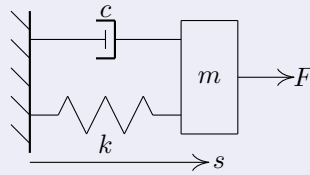
$$Q = \rho Ah$$

dove ρ è la densità dell'acqua, A è l'area della base e h è l'altezza del livello di liquido. La portata $q(t)$ immessa nella bottiglia varia la quantità complessiva di acqua, e dunque

$$\frac{d}{dt}Q = q \quad \rightarrow \quad \rho A \dot{h} = q \quad \Rightarrow \quad \dot{h} = \frac{1}{\rho A} q$$

Integrando questa equazione differenziale è possibile determinare il livello h in funzione del tempo e della portata q (anch'essa dipendente dal tempo).

Esempio 2.2: massa-molla-smorzatore



Si consideri lo schema meccanico in figura dove lo smorzatore c crea una resistenza proporzionale alla velocità. Definita la variabile s come lo spostamento della massa m , allora si verifica che l'equazione che governa il sistema è pari a

$$m\ddot{s} + c\dot{s} + ks = F$$

In questa equazione $m\ddot{s}$ rappresenta il termine di inerzia, il termine $c\dot{s}$ è dovuto allo smorzatore, ks dalla molla e F è la forza esterna.

2.1 Rappresentazione di stato del sistema (spazio di stato)

Il modo *universale* di scrivere le equazioni differenziali che caratterizzano i problemi dinamici determina la **rappresentazione di stato del sistema**.

Il primo modo per descrivere queste equazioni è determinato dall'insieme

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

Queste sono dette **equazioni di stato del sistema** e in queste equazioni x compare la derivata al primo ordine (e non superiore) delle variabili di stato.

Un altro insieme è quello determinato da

$$y = g(x, u, t)$$

e prendono il nome di **trasformazioni di uscita** in quanto legano le uscite y dalle variabili di stato x , dagli ingressi u e dal tempo t .

Equazioni di stato Le equazioni sono n equazioni differenziali del primo ordine; n rappresenta l'**ordine del sistema** ed è il numero di variabili di stato che compongono il sistema stesso.

Trasformazioni di uscita Le trasformazioni di uscita sono pari al numero p di equazioni algebriche (ognuna per ogni uscita del sistema).

Esempio 2.3

Si consideri il caso di un sistema dinamico MIMO, non lineare, tempo variante. La

rappresentazione di stato presenta n equazioni di stato come:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)\end{aligned}$$

Le trasformazioni di uscita saranno determinate invece come

$$\begin{aligned}y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ &\vdots \\ y_p &= g_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)\end{aligned}$$

Considerando invece un caso di un sistema dinamico MIMO, lineare e tempo invariante allora le equazioni di stato possono essere espresse come

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m\end{aligned}$$

Analogamente le trasformazioni di uscita sono determinate come:

$$\begin{aligned}y_1 &= c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1m}u_m \\ &\vdots \\ y_p &= c_{p1}x_1 + \dots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \dots + d_{pm}u_m\end{aligned}$$

E' possibile scrivere in maniera compatta queste relazioni utilizzando le matrici in quanto il sistema è lineare, ottenendo

$$\underline{\dot{x}} = \mathcal{A}\underline{x} + \mathcal{B}\underline{u} \quad \underline{y} = \mathcal{C}\underline{x} + \mathcal{D}\underline{u}$$

In questo caso deve valere che $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathcal{C} = \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

In generale la matrice \mathcal{A} è chiamata **matrice di stato** del sistema.

Sotto-classificazione dei sistemi dinamici I sistemi dinamici possono essere a loro volta classificati come

- **strettamente propri** quando è assente il meccanismo di azione diretta tra ingresso e uscita. y dipende solamente dalle variabili di stato che sono influenzate:
- non strettamente **proprio** quando è presente il meccanismo di azione diretta tra ingresso e uscita.

I sistemi statici possono essere considerati come una sotto-classe dei sistemi dinamici dove la trasformazione di uscita non contiene le variabili di stato x . In figura 2.1 è possibile osservare gli schemi associati ai vari tipi di sistemi dinamici in funzione del passaggio degli ingresso (o meno) attraverso le variabili di stato x .

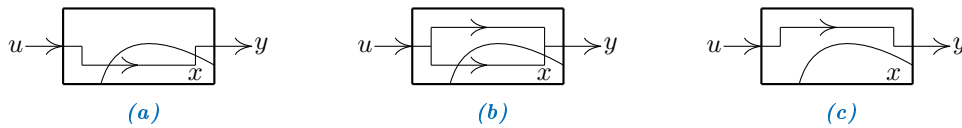


Figura 2.1: black box di un sistema strettamente proprio (a), non strettamente proprio (b) e statico (c).

Esempio 2.4: scrittura di un sistema in forma di stato

Considerando il caso della bottiglia come nell'esempio 2.1 (pag. 7), è possibile osservare che l'equazione differenziale che governa il problema è pari a

$$\dot{h} = \frac{1}{\rho A} q$$

In questa relazione $x = h$, $u = q$, e $y = h$. Il sistema dinamico è dato dunque dall'equazione di stato

$$\dot{h} = \dot{x} = \frac{1}{\rho A} u$$

e la trasformazione di uscita è determinata da $h = y = x$. Questo sistema di controllo è dunque dinamico, lineare, SISO, di ordine $n = 1$ e strettamente proprio.

$$\begin{cases} \dot{h} = \frac{1}{\rho A} u & : \text{equazione di stato} \\ h = y = x & : \text{trasformazione di uscita} \end{cases}$$

Nel caso del sistema massa-molla-smorzatore (esempio 2.2) l'equazione costitutiva era determinata essere $m\ddot{s} + c\dot{s} + ks = F$. Per determinare l'equazione di stato è dunque possibile seguire un *algoritmo* per la risoluzione generale del problema come segue.

2.1.1 Risoluzione generale

Per scrivere le **equazioni di stato** di un sistema è dunque possibile determinare un **sistema di risoluzione generale** seguendo i seguenti passaggi:

1. in primo luogo è possibile porre la derivata n -esima dell'uscita y come funzione generica φ delle derivate di ordine inferiore e degli ingressi u :

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \varphi \left(\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, u \right)$$

2. a questo punto è necessario determinare le variabili di stato x ; in particolare è possibile porre che la prima variabile di stato x_1 coincida con y , e continuando si determina

$$x_1 = y \quad \rightarrow \quad x_2 = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad \rightarrow \dots \quad \rightarrow \quad x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$$

3. ora si procede derivando dunque le variabili di stato rispetto al tempo, e dunque quello che si osserva è che

$$\dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = x_2 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = x_3 \quad \rightarrow \dots \quad \rightarrow \quad \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n} = \varphi(x_n, \dots, x_1, u)$$

E' dunque possibile osservare che la derivata \dot{x}_i della i -esima variabile di stato coincide con la $i + 1$ -esima variabile di stato. Questo è valido fino a x_n la cui derivata risulta coincidere con la funzione φ descritta nel punto 1; si osserva inoltre che essa ora è anche espressa in funzione delle variabili di stato x_i ;

4. sfruttando la derivata delle variabili di stato vista nel punto precedente è dunque possibile determinare un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine del tipo $\dot{x}_n = x_{n+1}$ che possono essere *semplicemente* risolte;
5. per determinare ora la trasformazione di uscita basta semplicemente considerare che l'uscita y coincide con la variabile di stato x_1 e dunque

$$\text{trasformazione di uscita:} \quad y = x_1$$

Esempio 2.5: applicazione del metodo generale al sistema massa-molla-smorzatore

Facendo riferimento al sistema massa-molla-smorzatore (esempio 2.2, pag. 8), la relazione differenziale che governa il sistema è pari a $m\ddot{s} + c\dot{s} + ks = F$. A questo punto è possibile applicare il sistema di risoluzione generale appena mostrato:

- in primo luogo si deve calcolare la funzione φ che permette di esprimere esplicitamente la derivata di ordine massimo che in questo caso è \ddot{s} :

$$\ddot{s} = \frac{1}{m}(-c\dot{s} - ks + u)$$

In questa relazione la forza F è sostituita con un generico ingresso u ;

- a questo punto è possibile definire le variabili di stato del problema che in questo caso risultano essere

$$x_1 = s \quad x_2 = \dot{s}$$

- derivando rispetto al tempo la prima variabile di stato si osserva, come visto nel caso generale, $\dot{x}_1 = \dot{s} = x_2$. Per quanto riguarda la seconda variabile di stato è invece necessario considerare che la sua derivata coincide con la funzione φ , arrivando al risultato

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = \ddot{s} &= \frac{1}{m}(-c\dot{s} - ks + F) \\ &= -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{u}{m} \end{aligned}$$

Il **sistema delle equazioni di stato** del problema risulta dunque essere lineare ed è pari a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{u}{m} \end{cases}$$

- per completare il problema è necessario individuare la trasformazione di uscita, che nel caso desiderato deve coincidere con la posizione s della massa e dunque

$$y = s = x_1$$

In realtà la trasformazione di uscita dipende in generale dalla caratteristica del sistema che si vuole monitorare. In alcuni casi sarebbe necessario per esempio conoscere la velocità $y = \dot{s} = x_2$ della massa, o in alcuni contesti conoscere entrambe le informazioni, ossia $y_1 = s = x_1$ e $y_2 = \dot{s} = x_2$.

Questo è un sistema dinamico di tipo lineare e dunque è possibile esprimere le matrici di stato \mathcal{A} e le altre matrici associate al problema (nel caso di voler conoscere come unica uscita la posizione s della massa) come

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/m \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = [1 \quad 0] \quad \mathcal{D} = [0]$$

Questo vale in quanto, considerando i vettori $\underline{x} = (x_1, x_2)$ delle variabili di stato, $\underline{u} = (u = F)$ dell'ingresso e $\underline{y} = (y_1 = s)$ del sistema, allora il sistema delle equazioni di stato e la trasformazione di uscita è espresso come

$$\begin{aligned} \text{equazione di stato:} \quad & \dot{\underline{x}} = \mathcal{A}\underline{x} + \mathcal{B}\underline{u} \\ \text{trasformazione di uscita:} \quad & \underline{y} = \mathcal{C}\underline{x} + \mathcal{D}\underline{u} \end{aligned}$$

2.1.2 Sistemi a tempo discreto

Analizzare un sistema dinamico a tempo discreto richiede una procedura diversa dal caso precedente di sistema a tempo continuo in quanto non esiste il concetto di derivata per tali tipi di sistemi.

Per rappresentare questo tipo di sistemi non è possibile utilizzare le equazioni differenziali ma

è necessario usare le **equazioni alle differenze finite**, ossia scrivendo le equazioni di stato come

$$\underline{x}(k+1) = f(\underline{x}(k), \underline{u}(k), k) \quad : \text{equazione di stato}$$

dove k è il generico istante del tempo discreto. Analogamente ai sistemi a tempo continuo la trasformazione di uscita è una equazione

$$\underline{y}(k) = g(\underline{x}(k), \underline{u}(k), k) \quad : \text{trasformazione di uscita}$$

Nel caso di sistemi lineari tempo invarianti allora le relazioni si semplificano ulteriormente assumendo la forma

$$\underline{x}(k+1) = \mathcal{A}\underline{x}(k) + \mathcal{B}\underline{u} \quad \underline{y}(k) = \mathcal{C}\underline{x}(k) + \mathcal{D}\underline{u}(k)$$

2.2 Sistemi dinamici nel dominio del tempo

In generale fino ad ora sono state esplicitate le variabili di stato sono state espresse come funzione del tempo, e per questo sono definite in tale dominio. Infatti fino ad ora le variabili di stato sono espresse come derivate del tempo nella forma:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

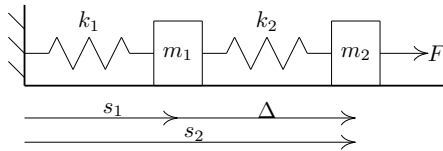


Figura 2.2: schema esemplificativo di due carrelli collegati tramite molle.

Scelta delle variabili di stato In generale la rappresentazione di stato di un sistema non è mai unica, ma è arbitraria. Considerando due carrellini mutuamente collegati da delle molle come in figura 2.2, dall'analisi dinamica è possibile ricavare il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} m_1 \ddot{s}_1 + k_1 s_1 + k_2 (s_2 - s_1) = 0 \\ m_2 \ddot{s}_2 + k_2 (s_2 - s_1) = F \end{cases}$$

Utilizzando il sistema di risoluzione mostrato in precedenza è possibile riscrivere tali equazioni nella forma di stato. Definendo infatti $x_1 = s$, $x_2 = \dot{s}$, $x_3 = s_2$, $x_4 = \dot{s}_2$ si arriva al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m_1} (-k_1 x_1 - k_2 x_3 + k_2 x_1) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} (-k_2 x_3 + k_2 x_4 + u) \end{cases}$$

Considerando di voler conoscere la posizione della seconda massa allora $y = x_3$.

Questa è una delle rappresentazioni del sistema in forma di stato, ma non è univoca. Infatti è possibile analizzare il problema considerando la distanza Δ tra i due carrelli. In questo caso si verifica che $s_2 = s_1 + \Delta$, $\dot{s}_2 = \dot{s}_1 + \dot{\Delta}$, $\ddot{s}_2 = \ddot{s}_1 + \ddot{\Delta}$ e dunque il sistema di equazioni differenziali può essere riscritto nella forma differenziale come

$$\begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = \dot{s}_1 \\ x_3 = \Delta \\ x_4 = \dot{\Delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m_1} (-k_1 x_1 + k_2 x_3) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} \left[\frac{m_2}{m_1} k_1 x_1 + \left(-\frac{m_2}{m_1} k_2 - k_2 \right) x_3 + u \right] \end{cases}$$

Ipotizzando di voler conoscere la posizione del secondo carrello allora si evince che la trasformazione di uscita è $y = x_1 + x_3$.

In base alla scelta delle variabili di stato che si decidono di utilizzare si osserva che le equazioni che caratterizzano che il sistema di stato possono assumere forme diverse (più o meno complesse) ma saranno sempre equivalenti tra loro. Nonostante le equazioni siano differenti, esse condividono alcune proprietà che sono dette **strutturali** e che non cambiano a seconda della rappresentazione fatta.

Ordine di un sistema Il numero di variabili necessarie per descrivere un sistema dinamico non è fisso in quanto dipende dal grado di complessità scelto per descrivere il sistema.

Considerando il caso del sistema dei due carrelli visto in precedenza (fig. 2.2), nel sistema di stato descritto erano state ricavate 4 variabili di stato. Considerando un caso in cui la seconda molla sia infinitamente più rigida (matematicamente $k_2 \gg k_1$), allora il sistema si riduce ad un caso come in figura 2.3.

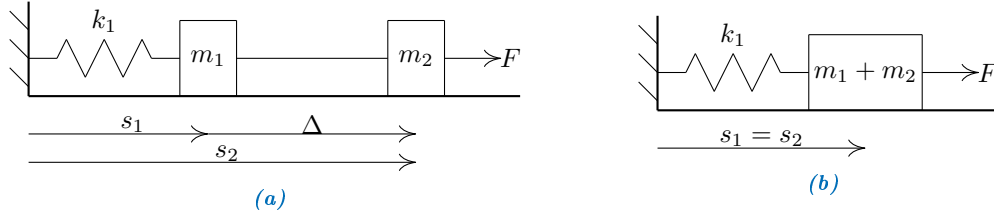


Figura 2.3: livelli di approssimazione nel caso in cui $k_2 \gg k_1$ del sistema in figura 2.2.

In questa nuova configurazione si può osservare che il numero di variabili di stato scendono a 2 (associate a posizione e velocità della massa congiunta); in generale il numero di variabili di stato dipende dalla complessità e della precisione che si richiede nella movimentazione del sistema stesso.

In generale fissata la complessità del problema, il numero di variabili di stato rimane sempre costante.

Esistono dei sistemi dinamici *speciali* che presentano un numero infinito di variabili di stato; in particolare essi sono

- sistemi descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali;
- il ritardo di tempo è un esempio importante dei controlli digitali; in particolare in questi casi l'equazione di uscita è espressa come

$$y(t) = u(t - \tau)$$

2.3 Movimento di equilibrio

In generale dato un sistema si indica con **movimento d'uscita** la grandezza $y(t)$, mentre $x(t)$ è il **movimento di stato**. $x(t)$ rappresenta la soluzione dell'equazione differenziale generica

$$\dot{x} = f(x, u) \rightarrow x(t)$$

Tramite essa è possibile ricavare semplicemente l'uscita y del sistema.

Nota 2.1: Per i sistemi tempo invarianti, allora sia $x(t)$ che $y(t)$ non dipendono dalla scelta dell'istante iniziale del tempo t_0 .

Per semplificare il problema è possibile ricorrere al calcolo del **movimento di equilibrio** di un sistema dinamico. Supponendo che $u = u^*$ sia un ingresso costante e anche $x(t) = x_0$ è un valore stazionario, allora $x(t)$ rimane sempre pari a x_0 nel tempo, allora esso è detto **stato di equilibrio** del sistema.

Nota 2.2: L'equilibrio di un sistema non è $x(t)$ quando $u(t) = k$ costante.

Per determinare il movimento di equilibrio di un sistema dinamico, partendo dall'equazione di riferimento $\dot{x} = f(x, u)$, se esiste allora esso è determinato partendo da $\dot{x} = 0$ e dunque

$$0 = f(x, u) \rightarrow x^*, u^*$$

Questo è in generale un sistema di equazioni algebriche non lineari che permette di determinare l'uscita di equilibrio $y^* = g(x^*, u^*)$.

Sistemi lineari Per semplificare l'analisi è possibile cercare di determinare il movimento di equilibrio di un sistema dinamico lineare tempo invariante. In questa situazione è possibile determinare il problema determinando

$$\underline{0} = \mathcal{A}\underline{x} + \mathcal{B}\underline{u} \quad , \quad y = \mathcal{C}\underline{x} + \mathcal{D}\underline{u}$$

Risolvendo in forma chiusa è possibile determinare il possibile movimento di equilibrio come

$$\underline{x}^* = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\underline{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{y} = \left(-\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D} \right) \underline{u}$$

Da questa formulazione si osserva dunque che l'equilibrio esiste se e solo se esiste la matrice \mathcal{A}^{-1} , ossia se $\det \mathcal{A} \neq 0$. In questa situazione allora il punto di equilibrio esiste ed è unico. Se $\det \mathcal{A} = 0$ allora è possibile che

- non ci siano soluzioni, e dunque non esiste l'equilibrio;
- esistono infinite soluzioni di equilibrio.

In questo caso la possibilità fra le due dipende solamente dalla grandezza \underline{u}^* .

Esempio 2.6

Si consideri il caso di una massa *tirata* da una forza F . Il sistema dinamico è descritto dal modello $m\ddot{s} = F$ che deve essere descritto in forma di stato. Definito dunque $x_1 = s$ e $x_2 = \dot{s}$ si ricava che

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m}F \xrightarrow{F=u} \frac{1}{m}u$$

Si osserva dunque che è un sistema dinamico lineare SISO tempo invariante e continuo. Essendo il sistema lineare, esso allora può essere scritto utilizzando la matrici

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = [1 \quad 0] \quad \mathcal{D} = [0]$$

Per determinare l'equilibrio è necessario calcolare il determinante $\det \mathcal{A}$, osservando che esso è nullo. Questo ci porta ad affermare che non c'è un solo equilibrio: ce ne sono infiniti o nessuno. Per capire in quale situazione è necessario scrivere le equazioni del sistema all'equilibrio:

$$\begin{cases} 0 = x_2^* \\ 0 = \frac{1}{m}u^* \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \dot{s} = 0, u^* = F = 0$$

Questo rappresenta il caso di una massa posizionata in un punto e successivamente abbandonata (forza nulla: $u = F = 0$). Per questo ci sono infinite posizioni di equilibrio. Se al contrario si fosse considerato $u^* \neq 0$ il sistema non ammette soluzioni e dunque non c'è alcun equilibrio.

Nota 2.3: Per i sistemi lineari esiste una formula per l'equilibrio e l'esistenza (o meno) dello stesso è argomentabile; per sistemi non lineari questo non è sempre vero in generale. Per i sistemi lineari i punti di equilibrio sono zero, uno o infiniti. Nel caso di sistemi lineari, oltre a queste 3 casistiche, esistono anche un numero finito (maggiore di 1) di punti di equilibrio.

Per calcolare il movimento di equilibrio in sistemi non lineari non esistono strumenti analitici generali, mentre per i sistemi lineari la soluzione al problema esiste ed è determinata dalla **formula di Lagrange**.

2.3.1 Formula di Lagrange

Utilizzando la **formula di Lagrange** è possibile esprimere il movimento di stato $x(t)$ (e la relativa uscita y) nel tempo (per qualsiasi ingresso e stato iniziale x_0) di un sistema lineare è determinato dall'equazione

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\mathcal{A}t} x_0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B} u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \mathcal{C} x(t) + \mathcal{D} u(t) = \mathcal{C} e^{\mathcal{A}t} x_0 + \mathcal{C} \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B} u(\tau) d\tau + \mathcal{D} u(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Si osserva che \mathcal{A} è una matrice, e dunque è necessario capire come effettuare l'esponenziale $e^{\mathcal{A}t}$: tale prodotto è detto **matrice esponenziale** (o **di transizione**) ed è calcolato tramite l'espressione

$$e^{\mathcal{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{A}t)^k}{k!} = I + \mathcal{A}t + \frac{\mathcal{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathcal{A}^3 t^3}{3!} + \dots$$

Si osserva dunque che il movimento delle grandezze $x(t)$ e $y(t)$ dipendono sia dalle condizioni iniziali x_0 , sia tutta la storia degli ingressi u dall'istante $t = t_0 = 0$ fino al tempo t^* che si sta descrivendo.

E' altresì possibile osservare che il movimento $x(t), y(t)$ dipende da due contributi mutuamente indipendenti: x_L , detto **movimento libero** del sistema, dipendente solamente dalle condizioni iniziali e quello *integrale* x_F dipendente solamente dal tempo pregresso ed è detto **movimento forzato**.

$$x_L(t) = e^{\mathcal{A}t} x_0 \quad x_F(t) = \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B} u(\tau) d\tau$$

Un'ultima proprietà dei sistemi dinamici lineari tempo invarianti è che vige il **principio di sovrapposizione degli effetti**:

- il movimento libero dipende linearmente dalle condizioni iniziali, ossia considerando una situazione x_0 data dalla somma $\alpha x'_0 + \beta x''_0$ (dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), allora è possibile osservare che

$$x_0 = \alpha x'_0 + \beta x''_0 \quad \Rightarrow \quad x_L = \alpha x'_L + \beta x''_L$$

- per analogia anche il movimento forzato dipende linearmente dall'ingresso $u(t)$, ossia dati due ingressi $u'(t)$ e $u''(t)$ (e due coefficienti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) vale che

$$u(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t) \quad \Rightarrow \quad x_F(t) = \alpha x'_F(t) + \beta x''_F(t)$$

Condensato questi risultati, considerando delle condizioni iniziali x'_0 e $u'(t)$ che generano $x'(t)$ e $y'(t)$ (e $x''_0, u''(t)$ generano $x''(t), y''(t)$) allora è possibile stabilire che per

$$\begin{cases} x_0 = \alpha x'_0 + \beta x''_0 \\ u(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t) \\ y(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t) \end{cases}$$

Utilità del principio di sovrapposizione La prima utilità di questo principio è che quando $u(t)$ è scomponibile come combinazione lineare di ingresso più *semplici*, allora è possibile studiare la combinazione lineare delle uscite che esse generano.

Un altro vantaggio di questo principio è che esso permette di studiare facilmente sistemi multi ingresso, in quanto è possibile combinare linearmente le singole uscite.

2.4 Descrizione di sistemi non lineari

I sistemi non lineari possono essere descritti tramite sistemi lineari tempi invarianti. Si consideri per esempio un sistema statico descritto dall'uscita $y = f(u)$ dipendente dall'ingresso u . Scelto un punto u^* rispetto al quale vale l'uscita $y^* = f(u^*)$ è possibile approssimare l'intorno di u^* ad un sistema lineare (nonostante in generale questo non è possibile) utilizzando la serie di Taylor troncandola al primo ordine.

Scegliendo dunque l'ingresso $u = u^* + \delta u$ (dove δu è un valore *piccolo*), è lecito chiedersi come varia l'uscita $y = y^* + \delta y$. Per ricavare la relazione (idealmente lineare) tra δu e δy è sufficiente sostituire le uguaglianze di u e y nel sistema originario, ottenendo che

$$y^* + \delta y = f(u^* + \delta u)$$

Espandendo tale relazione utilizzando la serie di Taylor fino al primo ordine si verifica che

$$f(u^* + \delta u) \approx \underbrace{f(u^*)}_{=y^*} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u^*} \delta u \quad \Rightarrow \quad \delta y = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u^*} \delta u$$

Quest'ultima relazione è l'espressione del coefficiente angolare della retta tangente a $y(u)$ nel punto u^* . Si osserva dunque che più ci allontana da u^* (ossia aumentando δu), maggiore è l'errore che si commette nell'utilizzare il modello lineare approssimato.

Estensione al sistema dinamico Considerando un sistema dinamico è necessario considerare il modello del sistema che determina lo stato $\dot{x} = f(x, u)$ e l'uscita $y = g(x, t)$. Scelte le condizioni iniziali x_0^* , u^* e il conseguente movimento x^* , y^* tali che $\dot{x}^* = f(x^*, u^*)$ e $y^* = g(x^*, u^*)$. Definito l'ingresso $u = u^* + \delta u$ perturbato rispetto al punto di approssimazione, è lecito chiedersi come variano $x = x^* + \delta x$ e $y = y^* + \delta y$ e dunque stabilire la relazione tra δu e $\delta x, \delta y$.

Come nel caso statico è dunque possibile sostituire al modello le *nuove* grandezze e poi si approssima utilizzando la serie di Taylor troncandola al primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}^* + \delta \dot{x} = f(x^* + \delta x, u^* + \delta u) \approx f(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} \delta u \\ y^* + \delta y = g(x^* + \delta x, u^* + \delta u) \approx g(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} \delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} \delta u \end{cases}$$

A questo punto è possibile osservare le relazioni esplicite tra δu e $\delta x, \delta y$

$$\delta \dot{x} = \delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} + \delta u \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*}, \quad \delta y = \delta x \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} + \delta u \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^*, u^*}$$

Questo rappresenta comunque un modello dinamico che tuttavia è lineare (nell'intorno di x^*, u^*). In particolare si osserva che il termine $\partial f / \partial x$ calcolata nel punto permette di stabilire la matrice di stato \mathcal{A} ; più in generale dunque

$$\mathcal{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} \quad \mathcal{B} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} \quad \mathcal{C} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} \quad \mathcal{D} = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^*, u^*}$$

Il modello risultante è tempo invariante fintanto che x^* e u^* sono dei termini costanti, ossia sono un movimento di equilibrio del sistema. Se il movimento non è di equilibrio allora il sistema rimane comunque lineare ma tempo variante: le matrici $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ dipendono dunque dal tempo t .

Capitolo 3

Teoria del controllo classico

In generale il *mondo* è descritto nel dominio del tempo t ; in particolare i modelli dello stesso sono descritti da equazioni differenziali che relazionano l'uscita $y(t)$ con l'ingresso $u(t)$. Questo tipo di analisi viene denominata **teoria del controllo moderno**.

La **teoria del controllo classico** invece non analizza il sistema sisma nel dominio del tempo, ma la analizza utilizzando una **variabile complessa** s ; in questo dominio i modelli non sono descritti da equazioni differenziali ma da equazioni algebriche (semplificando l'aspetto matematico). Per questo è necessario determinare l'operatore \mathcal{L} che permette di transitare dal dominio del tempo al dominio della variabile complessa e viceversa utilizzando \mathcal{L}^{-1} .

Vantaggi e svantaggi del controllo classico Vantaggio della teoria del controllo classico è che essa è più intuitiva in quanto non sono presenti equazioni differenziali ed è fortemente caratterizzata da grafici/disegni. Un problema di questa teoria è che essa non si presta bene allo studio di sistemi non lineari e/o MIMO.

Un vantaggio ulteriore di questa teoria è che permette di analizzare i sistemi nel dominio della frequenza.

3.1 Trasformata di Laplace

Lo strumento matematico che permette di effettuare il passaggio matematico dal dominio del tempo $t \in \mathbb{R}$ al dominio della variabile complessa $s \in \mathbb{C}$ è la **trasformata di Laplace** \mathcal{L} . In particolare la variabile complessa s è composta da una parte reale σ e una parte immaginaria ω come

$$s = \sigma + j\omega \quad \leftarrow j = \sqrt{-1} \quad (3.1)$$

Concetto 3.1: Considerando una funzione $f(t)$ nel tempo e la variabile complessa s , allora la funzione $F(s)$ definita come segue, se esiste, è chiamata **trasformata di Laplace** di $f(t)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \leftarrow s = \sigma + j\omega \quad (3.2)$$

Il problema dell'esistenza della trasformata dipende dalla convergenza dell'integrale ad un valore finito (e in generale è dipendente dal valore di s).

Trasformata di una funzione a scalino Considerando una funzione *a scalino* come in figura 3.1 dove per $t < 0$ la funzione f vale 0 e per $t > 0$ vale che $f(t) = 1$.

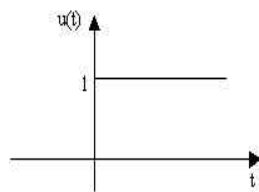


Figura 3.1: funzione scalino.

Nota 3.1: Tutti i segnali che studiamo in questo corso sono nulli per $t < 0$ in quanto al condizione iniziale del sistema è racchiusa dalle variabili di stato del sistema stesso.

Nota 3.2: Lo scalino è un segnale importante in quanto evidenzia sia le proprietà *di equilibrio* che le proprietà *transitorie* del sistema dinamico

A questo punto definita $f(t) = \text{scal}(t)$, allora

$$F(s) = \int_0^\infty \text{scal}(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty = -0 + \frac{1}{s}$$

La trasformata di Laplace della funzione scalino può dunque essere scritta come:

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[\text{scal}(t)] = \frac{1}{s} \quad (3.3)$$

Trasformata del segnale impulso L'impulso è un segnale di durata infinitesima e ampiezza infinita; questo tipo di segnale è comodo per modellare fenomeni impulsivi come gli urti. Esso ha inoltre un *legame a doppio filo* con le condizioni iniziali di un sistema dinamico. L'impulso è definito come

$$\text{imp}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{imp}_\epsilon(t) \quad \leftarrow \text{imp}_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

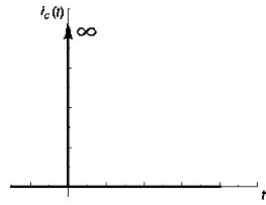


Figura 3.2: funzione impulso

Si può dunque osservare che l'area sottesa alla curva ha sempre valore unitario. Per calcolare la trasformata di Laplace di questa funzione allora è necessario considerare

$$F(s) = \int_0^\infty \text{imp}(t)e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon} e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-st}}{-s\epsilon} \right]_0^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-s\epsilon} - 1}{-s\epsilon} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[\text{imp}(t)] = 1 \quad (3.4)$$

3.1.1 Proprietà della trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace presenta 3 proprietà fondamentali, in particolare:

i) è un operatore lineare, e dunque

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]$$

ii) vale la traslazione nel dominio del tempo, ossia dato un ritardo τ la trasformazione

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = \mathcal{L}[f(t)] e^{-s\tau} = F(s) e^{-s\tau}$$

iii) vale la traslazione nel dominio della variabile complessa, ossia

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a) \quad a \in \mathbb{R}$$

Altre trasformazioni

Trasformazione esponenziale Considerando una funzione f che è esponenziale solamente per $t > 0$, ossia definita come $f(t) = e^{at} \text{scal}(t)$, allora la sua trasformata può essere determinata utilizzando le proprietà della trasformata stessa come traslazione del segnale impulso e dunque

$$\mathcal{L}[e^{at} \text{scal}(t)] = \frac{1}{s-a}$$

Trasformata di segnali (co)sinusoidali Considerando una funzione cosinusoidale $f(t) = \cos(\omega t) \text{scal}(t)$ solamente per valori di tempo positivo, allora essa può essere riscritta utilizzando la relazione di Eulero nella forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(\omega t) \text{scal}(t) \\ &= \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \text{scal}(t) \end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà della trasformata di Laplace è possibile esprimere la funzione nel dominio complesso secondo l'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega t} \text{scal}(t)] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-j\omega t} \text{scal}(t)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Effettuando le stesse considerazioni per segnali sinusoidali (solamente per tempi positivi) si ottiene la trasformata

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t) \text{scal}(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.5)$$

Utilizzando le proprietà della trasformata come traslazione nel dominio della variabile complessa, allora è possibile determinare il valore del

Proprietà E' possibile dimostrare che la derivata nel dominio di s coincide con la moltiplicazione per il tempo, utilizzando la relazione

$$-\frac{d}{ds} F(s) = \mathcal{L}[t f(t)]$$

3.2 Trasformazione inversa: antitrasformata di Laplace

L'**antitrasformata di Laplace** \mathcal{L}^{-1} permette di effettuare il passaggio dal dominio della variabile complessa s al dominio del tempo t , ossia nota $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, l'obiettivo è di determinare $f(t)$.

Per effettuare il passaggio da un dominio all'altro permettono di definire il valore di f all'istante di tempo iniziale $t = t_0 = 0$ utilizzando il **teorema del valore iniziale** e il valore asintotico della funzione per $t \rightarrow \infty$ utilizzando il **teorema del valore finale**.

Teorema del valore iniziale

Ipotesi di partenza per il teorema del valore iniziale è che la funzione $F(s)$ nella variabile complessa s sia esprimibile come il rapporto di due polinomi, e dunque $F(s)$ è una **trasformata di Laplace razionale**:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad : N(s), D(s) \text{ polinomi} \quad (3.6)$$

(co)seno esponenziale pari a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} \cos(\omega t) \text{scal}(t)] &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{at} \sin(\omega t) \text{scal}(t)] &= \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Derivata nel dominio del tempo Per determinare la trasformata della derivata di f (supponendo di conoscere $\mathcal{L}[f]$) basta applicare la legge

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s F(s) - f(0)$$

dove $f(0)$ sono le condizioni iniziali del sistema. Per questo motivo spesso si considera s come l'**operatore derivata**.

Integrale nel dominio del tempo Per determinare la trasformata di Laplace dell'integrale di una funzione vale che

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

L'espressione $1/s$ è detto dunque **operatore integrale**.

Trasformazione rampa Considerando un segnale rampa determinato come

$$\text{ramp}(t) = t \text{scal}(t)$$

allora la sua trasformata può essere calcolata considerando l'integrale della funzione scalino arrivando al risultato

$$\mathcal{L}[\text{ramp}(t)] = \frac{1}{s^2}$$

Esempio 3.1: trasformata razionale e non razionale

Un esempio di trasformata razionale è la funzione

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

Non è razionale una funzione del tipo $F(s) = \cos s$ e dunque su di essa non si può applicare il teorema del valore iniziale.

Enunciato Data la funzione di Laplace $F(s)$, allora il valore della funzione $f(t)$ al tempo iniziale $t = 0$ può essere calcolata come

$$f(t=0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad (3.7)$$

Teorema del valore finale

Analogamente al caso precedente è possibile applicare questo teorema solamente se la trasformata di Laplace $F(s)$ deve essere razionale e suoi **poli** (radici del denominatore $D(s)$) devono essere a parte reale negativa o devono essere nulli.

Enunciato Data la trasformata di Laplace $F(s)$, è possibile determinare il valore asintotico della funzione $f(t)$ nel dominio del tempo utilizzando la relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \quad (3.8)$$

3.2.1 Antitrasformata di Laplace

Per determinare l'espressione della funzione $f(t)$ nel dominio del tempo, nota $F(s)$, è possibile utilizzare l'**antitrasformata di Fourier**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} dt \quad t \geq 0 \quad \sigma \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

Nonostante questa espressione sia analiticamente corretta, tendenzialmente si utilizza il **metodo di Heaviside** per determinare l'antitrasformata \mathcal{L}^{-1} ; questo metodo può essere applicato solamente se la trasformata di Laplace $F(s)$ è razionale e il grado del denominatore deve essere maggiore (strettamente) del grado del numeratore ($\text{gr}(D) > \text{gr}(N)$) e si basa su due passaggi:

1. scomporre la trasformata $F(s)$ in una combinazione lineare di trasformate di Laplace note (come quelle viste in precedenza);
2. sfruttando la linearità dell'antitrasformata \mathcal{L}^{-1} è possibile determinare $f(t)$ come combinazione lineare delle antitrasformate note.

Nota 3.3: L'ipotesi di trasformata di Laplace $F(s)$ razionale risulta sempre verificata lavorando per sistemi dinamici lineari tempo invarianti. L'ipotesi sul grado dei polinomi risulta invece essere *facilmente aggirabile*.

La vera *difficoltà* nell'applicazione del metodo di Heaviside è quella calcolare la scomposizione della trasformata di Laplace $F(s)$.

Trasformata a poli reali distinti

Si consideri il caso di una trasformata $F(s)$ con poli reali distinti come

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)}$$

Verificato che $F(s)$ è razionale e che il grado del denominatore (3) è superiore al grado del numeratore (1), allora è possibile applicare il metodo di Heaviside.

A questo punto per applicare il metodo è necessario effettuare la scomposizione della funzione, in particolare cercando 3 coefficienti A, B, C tali che

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+6} + \frac{C}{s+1}$$

Supponendo di poter determinare i valori dei parametri A, B, C , allora l'antitrasformata dalla funzione risulta valere

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = A \operatorname{scal}(t) + B e^{-6t} \operatorname{scal}(t) + C e^{-t} \operatorname{scal}(t)$$

Per determinare i coefficienti è necessario effettuare la somma per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} &= \frac{A(s+6)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+6)}{s(s+6)(s+1)} \\ &= \frac{s^2(A+B+C) + s(7A+B+6C) + 6A}{s(s+6)(s+1)} \end{aligned}$$

A questo punto per determinare i coefficienti A, B, C è sufficiente considerare il sistema lineare ottenuto eguagliando i coefficienti (che Heaviside è riuscito a dimostrare essere sempre risolvibile) dei termini dei due numeratori:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 7A+B+6C=1 \\ 6A=2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{2}{15} \quad C = -\frac{1}{5}$$

Un secondo metodo per determinare i coefficienti è quello di considerare che polinomi equivalenti devono assumere lo stesso valore se sono valutati nello stesso punto; considerando i polinomi

$$\varphi_a(s) = s+2 \quad \varphi_b(s) = A(s+6)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+6)$$

Effettuando le valutazioni in *punti intelligenti* è possibile determinare i valori dei coefficienti del problema:

$$\begin{aligned} \varphi_a(0) &= \varphi_b(0) & \Rightarrow & 2 = 6A & \Rightarrow & A = \frac{1}{3} \\ \varphi_a(-1) &= \varphi_b(-1) & \Rightarrow & 1 = -5C & \Rightarrow & C = -\frac{1}{5} \\ \varphi_a(-6) &= \varphi_b(-6) & \Rightarrow & -4 = 30B & \Rightarrow & B = -\frac{2}{15} \end{aligned}$$

Si osserva dunque che i *valori intelligenti* in cui valutare il numeratore sono i poli della trasformata $F(s)$.

Trasformata a poli reali multipli

In questo caso è possibile considerare come trasformata di Laplace la seguente funzione rispetto alla quale valgono le ipotesi di Heaviside:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

Effettuando la **scomposizione di Heaviside** allora la trasformata precedente viene espressa come

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

Nota 3.4: Si deve porre attenzione ad aggiungere alla scomposizione anche i termini di ordine inferiore (delle radici multiple).

Tramite l'antitrasformazione è possibile definire

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = A \operatorname{scal}(t) + B \operatorname{ramp}(t) + C e^{-t} \operatorname{scal}(t)$$

Analogamente al caso precedente è possibile determinare i vari coefficienti valutando i polinomi in punti strategici:

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)} = \frac{As(s+1) + B(s+1) + Cs^2}{s^2(s+1)} = \frac{s^2(A+C) + s(A+B) + B}{s^2(s+1)}$$

Utilizzando il secondo metodo è possibile considerare il numeratore a sinistra φ_a e di destra φ_b e eguagliarli nei punti:

$$\begin{array}{lll} \varphi_a(0) = \varphi_b(0) & \Rightarrow & 2 = B \quad \Rightarrow B = 2 \\ \varphi_a(-1) = \varphi_b(-1) & \Rightarrow & 1 = C \quad \Rightarrow C = 1 \\ \varphi_a(-2) = \varphi_b(-2) & \Rightarrow & 0 = 2A - 2 + 4 \quad \Rightarrow A = -A \end{array}$$

Nota 3.5: In questo caso è stato possibile definire solamente 2 punti speciali; per determinare il terzo parametro è necessario scegliere in un'altro punto che non sia un polo.

Trasformata a poli complessi coniugati

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

Verificato che la trasformata di Laplace $F(s)$ soddisfa le ipotesi del metodo di Heaviside, allora è necessario determinare i poli come le radici del denominatore, ottenendo:

$$s_1 = 0 \quad s_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm j$$

Applicando la scomposizione di Heaviside sulla funzione di partenza è possibile seguire l'approccio delle radici reali distinte ottenendo il risultato

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{s(s + 1 + j)(s + 1 - j)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1 + j} + \frac{C}{s + 1 - j}$$

In questa relazione incognita è l'antitrasformata degli ultimi due termini; l'idea è di riuscire a combinare queste frazioni per ottenere un'espressione del tipo

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{\beta s + \alpha}{s^2 + 2s + 2} = \frac{A}{s} + \gamma \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} + \delta \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

Quest'ultima relazione (che deve essere verificata) permette di antitrasformare $F(s)$ ottenendo

$$f(t) = A \operatorname{scal}(t) + \gamma e^{at} \cos(\omega t) \operatorname{scal}(t) + \gamma e^{at} \sin(\omega t) \operatorname{scal}(t)$$

Determinazione dei coefficienti Per determinare i coefficienti A, α, β delle espressioni precedenti è sufficiente risolvere i sistemi lineari; in particolare:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{\beta s + \alpha}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s^2(A + \beta) + s(2A + \alpha) + 2A}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

Il sistema associato all'equivalenza è determinato da

$$\begin{cases} A + \beta = 0 \\ 2A + \alpha = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad \alpha = -1 \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

Concentrandoci sul termine dei poli complessi coniugati, è necessario effettuare la scomposizione per determinare i valori di γ e δ come visto in precedenza, ossia

$$\frac{-\frac{1}{2}s - 1}{s^2 + 2s + 2} = \gamma \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} + \gamma \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2} = \frac{\gamma s - \gamma a + \delta \omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

Eguagliando il denominatore si ottiene

$$s^2 + 2s + 2 = (s - a)^2 + \omega^2 = s^2 - 2as + (a^2 + \omega^2) \quad \Rightarrow \quad a = -1 \quad \omega = 1$$

Nota 3.6: ω prevederebbe anche una soluzione negativa, tuttavia si considera sempre il valore positivo in quanto associato ad una pulsazione di un segnale che non ha fisicamente senso se fosse negativa.

Eguagliando ora il numeratore si ottiene

$$-\frac{1}{2}s - 1 = \gamma s + \gamma + \delta \quad \Rightarrow \quad \gamma = \delta = -\frac{1}{2}$$

Trasformata a poli complessi coniugati multipli

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)^2}$$

Questa trasformata di Laplace presenta dunque 2 poli complessi coniugati di molteplicità algebrica doppia, con soli:

$$s_{1,2,3,4} = -1 \pm j$$

Analogamente al caso precedente si effettua una scomposizione di Heaviside per scomporre la trasformata nell'espressione del tipo

$$F(s) = \frac{\beta s + \alpha}{s^2 + 2s + 2} + \frac{\dots}{(s^2 + 2s + 2)^2}$$

Di questa relazione il primo addendo può essere antitrasformato considerando le relazioni viste in precedenza, mentre interessante è stabilire quanto vale il secondo termine. Considerando il termine nel dominio nel tempo come segue, esso può essere trasformato come

$$e^t \sin(\omega t) \text{scal}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}, \omega=1} \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = H(s)$$

Utilizzando le proprietà della trasformata di Laplace, moltiplicando nel tempo la funzione f permette di determinare

$$te^t \sin(\omega t) \text{scal}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}, \omega=1} -\frac{dH(s)}{ds} = -\left[-1(s^2 + 2s + 2)^{-2}(2s + 2) \right] = \frac{2s + 2}{(s^2 + 2s + 2)^2}$$

Questo rappresenta (intuitivamente) la rappresentazione del secondo termine per antitrasformare la funzione $F(s)$.

Grado del denominatore minore di quello del numeratore

Nota 3.7: Per sistemi lineari tempo invarianti al più può accadere che il grado del numeratore sia pari al grado del denominatore:

$$\text{gr}(D) = \text{gr}(N)$$

Per antitrasformare funzioni $F(s)$ con gradi di numeratore e denominatore uguali l'idea è quella di scomporre preliminarmente con Heaviside in una forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\tilde{N}(s)}{D(s)} + \alpha$$

In questo caso la trasformata razionale $\tilde{N}(s)/D(s)$ presenta un numeratore di grado inferiore e dunque, come visto in precedenza, può essere antitrasformato semplicemente. Il secondo termine α viene semplicemente antitrasformato in un valore $\alpha \text{imp}(t)$.

Esempio 3.2

$$F(s) = \frac{s+2}{s+3} \rightarrow \frac{\beta}{s+3} + \alpha$$

Per determinare i valori dei parametri α, β è sufficiente risolvere la relazione determinata da

$$\frac{s+2}{s+3} = \frac{\beta + (s+3)\alpha}{s+3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 3\alpha = 2 \end{cases}$$

Da questo sistema si determinano i parametri $\alpha = 1, \beta = -1$ e dunque la trasformata (e relativa antitrasformata) può essere espressa come

$$F(s) = \frac{-1}{s+3} + 1$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -1e^{-3t}\text{scal}(t) + \text{imp}(t)$$

3.3 Applicazione di Laplace a sistemi dinamici lineari tempo invarianti

In generale dato un sistema lineare tempo invariante descritto nella variabile del tempo t , la sua trasformazione può essere effettuata tramite la trasformata di Laplace \mathcal{L} secondo le espressioni:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u] & \Rightarrow \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{A}\mathcal{L}[x(t)] + \mathcal{B}\mathcal{L}[u(t)] \\ \mathcal{L}[y = \mathcal{C}x + \mathcal{D}u] & \Rightarrow \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{C}\mathcal{L}[x(t)] + \mathcal{D}\mathcal{L}[u(t)] \end{cases}$$

I vari vettori x, \dot{x}, y, u nel dominio del tempo possono essere riscritti, attraverso la trasformata \mathcal{L} , come dei vettori nel dominio della variabile complessa s con la nomenclatura $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Sfruttando le proprietà della trasformata, la derivata \dot{x} dello stato x può essere calcolata come $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x_0$, dove x_0 è il valore della variabile di stato al tempo $t = 0$.

Applicando queste definizioni ai sistemi definiti in precedenza è possibile riscrivere il sistema delle trasformate di Laplace come:

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = \mathcal{A}X(s) + \mathcal{B}U(s) \\ Y(s) = \mathcal{C}X(s) + \mathcal{D}U(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(sI - \mathcal{A}) = x_0 + \mathcal{B}U \\ Y = \mathcal{C}X + \mathcal{D}U \end{cases}$$

Invertendo opportunamente le equazioni è dunque possibile stabilire il valore dello stato X e dell'uscita Y nel dominio della variabile complessa s come:

$$\begin{aligned} X &= (sI - \mathcal{A})^{-1}x_0 + (sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}U \\ Y &= \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}x_0 + [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}]U \end{aligned} \quad (3.10)$$

In questa equazione è possibile osservare che gli *ingredienti* necessari a calcolare stato x e uscita y nel dominio del tempo si ritrovano anche tramite Laplace nel dominio della variabile complessa s ; nel tempo infatti era necessario conoscere le condizioni iniziali x_0 al tempo $t = 0$, come nel dominio di Laplace è noto x_0 , nel tempo è necessario conoscere la storia di $u(t)$ che è racchiusa in Laplace dal termine $U(s)$. La struttura del movimento di stato e uscita nel dominio della variabile complessa è consistente (ossia è presente un contributo di movimento libero e dal movimento forzato) come nella struttura del movimento nel dominio del tempo.

Il vantaggio di utilizzare il metodo di Laplace è che esso semplifica i calcoli per determinare la soluzione del movimento. In particolare alla matrice esponenziale (difficile da calcolare) è associata la matrice inversa $(sI - \mathcal{A})^{-1}$ e all'integrale per lo stato è associato il prodotto di matrici $(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}U$.

3.3.1 Analisi del movimento di stato e uscita

Considerando il movimento di stato e la matrice quadrata \mathcal{A} come composta da elementi a_{ij} , allora risulta evidente che

$$(sI - \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} s - a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & s - a_{nn} \end{bmatrix}$$

Per invertire questa matrice è necessario determinare il **polinomi caratteristico** della matrice pari a $\varphi(s) = \det(sI - \mathcal{A})$ e verificando che

$$(sI - \mathcal{A})^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11}(s) & \dots & k_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}(s) & \dots & k_{nn}(s) \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}}$$

dove $k_{ij}(s)$ sono dei polinomi in s di grado massimo pari a $n - 1$ in quanto collegati al calcolo dei complementi algebrici della matrice $sI - \mathcal{A}$.

Avendo espresso il termine $(sI - \mathcal{A})^{-1}$ come $\frac{1}{\varphi(s)}\mathcal{K}$, allora il termine $(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$ presente nell'equazione 3.10 può essere riscritto come

$$(sI - \mathcal{A})^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)}\mathcal{K}\mathcal{B} \rightarrow \frac{\mathcal{W}(s)}{\varphi(s)}$$

dove \mathcal{W} è un vettore ottenuta come combinazione lineare (dovuta a \mathcal{B}) di elementi presenti in $\mathcal{K}(s)$ che sono polinomi in s di grado al massimo $n - 1$.

Analogamente il termine $\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$, scelto per semplicità per un sistema di tipo SISO, può essere riscritto come un polinomio $M(s)$ che è combinazione lineare dovuta a \mathcal{B} e \mathcal{C} degli elementi polinomiali di \mathcal{K} e dunque di grado al più pari a $n - 1$:

$$\mathcal{C} \frac{1}{\varphi(s)}\mathcal{K}(s)\mathcal{B} + \mathcal{D} \xrightarrow{\text{SISO}} \frac{1}{\varphi(s)}\mathcal{C}\mathcal{K}\mathcal{B} + \mathcal{D} = \frac{1}{\varphi(s)}M(s) + \mathcal{D} = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

In questa espressione il numeratore $N(s)$ è un polinomio di grado al più n (minore di n se $\mathcal{D} = 0$).

Concetto 3.2: Lavorando con sistemi dinamici lineari tempo invarianti, le trasformate associate con cui si ha a che fare hanno la seguente caratteristica:

- sono sempre razionali, ossia le trasformate possono essere espresse come un rapporto di polinomi $F(s) = N(s)/D(s)$;
- il grado del numeratore è sempre minore o uguale al grado del denominatore ($\text{gr}(D) \geq \text{gr}(N)$).

3.4 Stabilità di un sistema

Dato un sistema dinamico descritto in forma di stato $\dot{x} = f(x, u)$ e $y = g(x, u)$, noti x_0 e $u(t)$ è allora possibile determinarne il relativo movimento. Una domanda che ci si può porre è quella di chiedersi cosa succede al movimento del sistema quando si cambiano i dati del problema rispetto ai valori nominali.

La **stabilità** studia dunque la **differenza** tra **movimento nominale** \hat{x}, \hat{y} e **movimento perturbato** \tilde{x}, \tilde{y} :

$$\text{stabilità:} \quad \|\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)\|$$

La perturbazione, in questo corso (per semplicità), si deve considerare applicata rispetto solamente alle variazioni delle condizioni iniziali $\tilde{x}_0 \neq \hat{x}_0$. Questa *riduzione* alla casualità nel considerare solamente la condizione iniziale deriva dal fatto che essa è la variabile del problema che è maggiormente incerta nella realtà. Si osserva inoltre che le perturbazioni sull'ingresso sono riconducibili a perturbazioni sulle condizioni iniziali x_0 del sistema stesso.

In linea generale la stabilità può essere studiata indifferentemente sia rispetto alle variabili di stato $\|\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)\|$ nella cosiddetta **stabilità interna**, me è anche possibile studiare la **stabilità esterna** dovuta all'equilibrio dell'uscita $\|\tilde{y}(t) - \hat{y}(t)\|$.

Concetto 3.3: La **stabilità di un movimento** rispetto a perturbazioni sulle condizioni iniziali x_0 rispetto al movimento nominale. Ad esse possono susseguirsi 3 possibilità:

1. il movimento perturbato diverge da quello nominale. In questo caso il movimento nominale è **instabile**;
2. il movimento perturbato è diverso da quello nominale ma *non si allontana troppo dallo*

stesso. In questo caso il movimento nominale è **stabile** (**semplicemente**);

3. il movimento perturbato converge al movimento nominale ed esso è detto **asintoticamente stabile**.

La classificazione delle proprietà di stabilità del movimento dipende strettamente dal sistema dinamico che si sta analizzando e dal modello utilizzato per o stesso (per esempio un pendolo con attrito è asintoticamente stabile, un pendolo senza attrito è stabile semplicemente).

Osservazioni In generale la stabilità di un movimento è una proprietà locale, ossia solo alcuni movimenti sono stabili e solamente in alcune condizioni e per una perturbazione limitata rispetto allo stato iniziale che si sta considerando. Si definisce dunque la **regione di attrazione** come l'insieme delle condizioni iniziali per cui il movimento è asintoticamente stabile al valore \hat{x}_0 . Quando la regione di attrazione coincide con tutte le possibili condizioni iniziali si parla di **stabilità asintotica globale**.

3.4.1 Stabilità del movimento per sistemi lineari tempo invarianti

Considerando la stabilità del movimento d'uscita $\|\tilde{y}(t) - \hat{y}(t)\|$, allora il movimento nominale nel caso di sistemi lineari tempo invariante può essere espresso nel dominio della variabile complessa come

$$\hat{Y}(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \hat{x}_0 + [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}] \hat{U}(s)$$

mentre il movimento perturbato (nel dominio della variabile complessa) è dato dall'espressione:

$$\tilde{Y}(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \tilde{x}_0 + [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}] \tilde{U}(s)$$

Algebricamente è possibile determinare la variazione di uscita Δy tra valore nominale e valore perturbato come

$$\Delta y(s) = \hat{Y}(s) - \tilde{Y}(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} (\hat{x}_0 - \tilde{x}_0) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \Delta x_0$$

A questo punto si osserva che la stabilità del movimento di un sistema lineare tempo invariante è associata al concetto di **movimento libero** del sistema. Inoltre la stabilità di questi sistemi non dipende dal particolare movimento considerato, ma assume *valenza generale* e dunque la proprietà di stabilità è una proprietà di sistema che vale per tutti i movimenti.

Si può anche osservare che la perturbazione Δx_0 sulla condizione iniziale è solamente un *fattore di scala* rispetto alla variazione ΔY_0 . Se si dimostra che il sistema è asintoticamente stabile, allora la regione di stabilità è globale.

Concetto 3.4: Lo studio del movimento di stato/uscita perturbato al fronte di cambiamenti/perturbazioni iniziali è equivalente (salvo alcune eccezioni che verranno discusse) allo studio del movimento dello studio d'uscita a fronte di un impulso in ingresso.

Questa affermazione non può essere attualmente dimostrata, ma risulterà essere verificata nel seguito. Questo concetto viene applicato per semplificare ulteriormente l'analisi dei sistemi.

E' possibile notare che l'approccio allo studio della stabilità analizzando la risposta all'impulso di un sistema è equivalente allo studio del movimento perturbato sulle condizioni iniziali per il seguente motivo; considerando la variazione dell'uscita

$$\Delta Y = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \Delta x_0$$

Considerando il segnale impulso che descrive $U(s) = 1$ allora

$$Y(s) = [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}] U(s) \xrightarrow{u(t)=\text{imp}} [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}] 1$$

Osservando le due relazioni è possibile che sia $\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}$, sia $\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}$ possono essere descritti come un rapporto di un polinomio (rispettivamente $N(s)$, $W(s)$) per il determinante $\det(sI - \mathcal{A})$ e dunque è possibile osservare l'analogia tra i due comportamenti.

E' altresì possibile notare che è più *conveniente* studiare la risposta all'impulso del sistema (anziché il relativo moto perturbato); considerano il caso di un sistema SISO di ordine n , allora l'uscita $\Delta Y(s)$ può dipendere da n condizioni iniziali Δx_0 e dunque

$$\Delta Y = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \Delta x_0 \quad 1 \text{ uscita, } n \text{ condizioni iniziali}$$

Nel caso *semplice* di considerare un solo impulso è possibile osservare che l'uscita dipende da una sola funziona

$$Y(s) = [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}] 1$$

3.4.2 Criteri di stabilità di sistemi lineari tempo invarianti tramite l'analisi della risposta all'impulso

In generale l'uscita $Y(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}$ può avere un comportamento convergente a 0 e dunque è possibile affermare che il **sistema** è **asintoticamente stabile**. Se l'uscita invece risulta divergere a $\pm\infty$, allora il **sistema** è detto **instabile** in quanto la piccola perturbazione provoca l'allontanamento del meccanismo dallo stato di equilibrio. Nel caso in cui l'uscita converge asintoticamente ad un valore non nullo, allora il **sistema** è **semplicemente stabile**.

Noto che l'uscita $Y(s) = N(s)/D(s)$ è espressa come il rapporto di un polinomio, allora applicando il metodo di Heaviside è possibile scomporla in una serie di fattori legate alla stessa dalle radici del denominatore:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A}{(\dots)} + \frac{B}{(\dots)} + \dots$$

Nel caso di radici del denominatore $D(s)$ semplici (non multiple) reali, allora le funzioni associate ai vari termini nel dominio del tempo sono delle funzioni esponenziali del tipo e^{-at} dove a è il coefficiente a numeratore della radice di $D(s)$ considerata. Quindi se le radici sono positive l'esponenziale diverge, per radici nulle l'esponenziale è costante e pari a 1 e per radici negative l'uscita tende a convergere a 0 nel dominio del tempo.

Nel caso invece di poli complessi coniugati distinti allora, come visto nella descrizione del metodo di Heaviside, si ottiene un segnale nella forma $e^{-\sigma t} \sin(\omega t)$; anche in questo caso il segnale (co)sinusoidale viene smorzato/amplificato dall'esponenziale come visto nel caso di radici reali.

Se le radici del denominatore sono multiple, allora i termini che costruiscono l'uscita che sono del tipo $1/s^2, 1/s^3$ tendono a divergere con legge polinomiale (le rispettive antitrasformate sono associate a t e t^2). Nel caso di radici del tipo

$$\frac{1}{(s+a)^2} \rightarrow te^{-at} \quad \begin{cases} \text{diverge se la radice è positiva } (a < 0) \\ \text{converge se la radice è negativa } (a > 0) \end{cases}$$

Teorema di stabilità per sistemi lineari tempo invarianti La stabilità di un sistema lineare tempo invariante dipende dalla sua risposta all'impulso e dunque

$$Y(s) = [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}] = \frac{N(s)}{\det(sI - \mathcal{A})}$$

In particolare il **sistema** è **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le radici del polinomio al denominatore hanno parte reale negativa, è **semplicemente stabile** se e solo se esiste una sola radice (non multipla) con parte reale nulla mentre le altre radici sono tutte a parte reale negativa; infine se esiste almeno una radice con parte reale positiva allora il sistema è **instabile**; è anche instabile la situazione in cui la radice a parte reale nulla è multipla.

In pratica l'analisi di stabilità di un sistema lineare tempo invariante si pratica calcolando in primo luogo l'uscita $Y(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}$ e successivamente vi si calcolano le radici del denominatore (ossia i **poli**) che lo compongono; solo in ultimo luogo si applica il criterio di stabilità.

Esempio 3.3: determinazione della stabilità di un sistema lineare tempo invariante

Si consideri un sistema di stato e uscita pari a

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U$$

Per studiare la stabilità di questo sistema dinamico è necessario effettuare il calcolo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s-4)} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s-4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 \\ s+2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2s-2}{(s+2)(s-4)} \end{aligned}$$

Osservando che le radici del denominatore sono $s_1 = -2, s_2 = 4$ di cui s_2 ha parte reale positiva, per il teorema della stabilità dei sistemi lineari tempo invarianti è possibile affermare che il sistema è instabile.

Un primo commento che si può effettuare è che le radici del denominatore $D(s)$ sono quelle di $\det(sI - \mathcal{A}) = \varphi(s)$, ossia coincidono con le radici del polinomio caratteristico della matrice \mathcal{A} (ossia i suoi **autovalori**); quest'ultimo percorso (calcolo degli autovalori) è tuttavia sconsigliato in quanto può portare in difetto il teorema di stabilità e dunque si perde la garanzia dell'operato. In generale dunque la stabilità di un sistema lineare tempo invariante dipende dalle proprietà della matrice di stato, tra cui i suoi autovalori (ma questa non è l'unica proprietà da verificare).

Nel caso di sistemi di ordine elevato (maggiori di 3) può risultare difficile calcolare le radici del denominatore $D(s)$ e per questo esistono dei nuovi criteri che permettono di controllare la stabilità senza determinare i poli (controllando i coefficienti).

3.4.3 Criteri di stabilità basati sull'analisi diretta del polinomio del denominatore

Questo tipo di criterio viene tendenzialmente utilizzato quando il polinomio al denominatore è tendenzialmente complesso e determinarne i poli non è *facile* ed immediato. In generale il polinomio $D(s)$ del denominatore può essere espresso come

$$D(s) = d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n$$

La **condizione necessaria di asintotica stabilità** afferma che tutti i coefficienti dei polinomi devono essere non nulli ($d_i \neq 0$) e tutti i coefficienti devono avere segni concordi. Quando ciò non è verificato è dunque possibile affermare che il sistema non è asintoticamente stabile. In generale per polinomi $D(s)$ relativamente piccoli (grado $n = 1, 2$) tale condizione oltre ad essere necessaria è anche sufficiente.

Esiste inoltre una **condizione necessaria e sufficiente di asintotica stabilità** si basa sul fatto che tutti i coefficienti della prima colonna della **tabella di Routh** devono essere diversi da zero e concordi in segno.

Tabella di Routh La tabella di Routh presenta come prima riga i coefficienti di pedice pari (zero compreso), mentre la seconda riga contiene i coefficienti di pedice dispari (se essi non sono presenti, si pone uno zero). Dato il polinomio di grado n , allora la tabella ha $n+1$ righe; le righe successive (indicate dalle lettere h, k, l) sono determinate secondo la legge

$$l_i = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix}$$

Esempio 3.4: tabella di Routh di un polinomio quadratico

Si consideri il polinomio di secondo grado del tipo $D(s) = d_0 s^2 + d_1 s + d_2$; la matrice di Routh deve dunque essere composta da 3 righe e risulta valere

prima riga	d_0	d_2	d_2	\dots	Tabella 3.1: <i>tabella di Routh</i>
seconda riga	d_1	d_3	d_5	\dots	
	\vdots				
	h_1	h_2	h_3	\dots	
	k_1	k_2	k_3	\dots	
	l_1	l_2	l_3	\dots	

prima	d_0	d_2
seconda	d_1	0
terza	$* = d_2$	0

Il termine $*$ della terza riga (prima colonna) è ottenuta verificando che

$$* = -\frac{1}{d_1} \det \begin{bmatrix} d_0 & d_2 \\ d_1 & 0 \end{bmatrix} = d_2$$

A questo punto è possibile osservare che i coefficienti della tabella coincidono con i coefficienti del polinomio caratteristico $D(s)$; nel caso quadratico in particolare la condizione necessaria di avere coefficienti $d_i \neq 0$ non nulli e concordi, allora tale criterio diventa anche sufficiente.

Relazione tra autovettori e poli A questo punto è lecito chiedersi la relazione che si istituisce tra gli autovalori della matrice di stato \mathcal{A} e i poli del polinomio associato alla matrice $\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$. In precedenza sembra che gli autovalori della matrice \mathcal{A} coincidessero con i poli della matrice mostrata, ma questo non sempre è verificato.

Si consideri per esempio il sistema dinamico del tipo

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U$$

In questo caso gli autovalori della matrice di stato \mathcal{A} sono due valori coincidenti nulli $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Se questi valori coincidessero con i poli di $D(s)$, allora per i criteri di stabilità si potrebbe affermare che il sistema è instabile. Effettuando tuttavia i calcoli è possibile calcolare

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} \cancel{s} & 0 \\ 0 & \cancel{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s} \end{aligned}$$

A questo punto si verifica che il polinomio al denominatore è pari a $D(s) = s$: il sistema è dunque stabile in quanto è presente una sola radice nulla (e non due come si sarebbe affermato considerando gli autovalori della matrice \mathcal{A}).

In generale è possibile utilizzare gli autovalori della matrice di stato solamente se essi sono *regolari*, ossia se molteplicità geometrica e algebrica degli autovalori coincidano, in altri casi non si può garantire l'uguaglianza.

Per enunciare dunque un criterio di stabilità analogo a quello visto applicato alle radici di $D(s)$ ma applicato agli autovalori della matrice di stato \mathcal{A} occorrerebbe analizzare altre proprietà della matrice.

Esiste inoltre un'altra importante considerazione da fare quando si relazionano i poli di $\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$ e gli autovalori della matrice di stato \mathcal{A} : essa prende il nome di **presenza di parti nascoste in un sistema dinamico**. In particolare gli autovettori/autovalori di \mathcal{A} sono associati alla stabilità interna del sistema, mentre analizzando la risposta all'impulso del sistema si controlla la stabilità esterna del sistema stesso. Queste risposte che noi abbiamo approssimato come uguali, non sono sempre verificate.

Esempio 3.5

Si consideri il sistema dinamico modellato dalle espressioni

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad Y = [1 \quad 1] X$$

Essendo la matrice di stato \mathcal{A} triangolare inferiore è possibile affermare che gli autovalori della stessa coincidono con i valori sulla diagonale $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. Considerando invece il polinomio razionale $\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$ si determina che esso è pari a

$$\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} = \frac{\cancel{s-1}}{(\cancel{s-1})(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Si osserva dunque che il denominatore $D(s)$ presenta una sola radice pari a $s_1 = -2$ (la radice $\lambda_1 = 1$ è stata dunque *persa*); questo è dovuto al fatto che sono presenti delle *parti nascoste* nel sistema dinamico.

DA RIVEDERE QUESTA PARTE lezione 30 marzo

Esempio 3.6

Si consideri il sistema dinamico modellato dalle espressioni

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad Y = [0 \quad 1] X$$

Essendo la matrice di stato \mathcal{A} triangolare gli autovalori della stessa si trovano sulla diagonale e sono pari a $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. Considerando invece il polinomio razionale $\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$ svolgendo i calcoli si determina che esso vale

$$\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} = \frac{s-1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s+2}$$

Come nell'esempio precedente si osserva con gli autovalori della matrice di stato \mathcal{A} non coincidono con il polo del denominatore $D(s)$ che vale $s_1 = -2$

FARE SCHEMA E RIVEDERE

Nota L'ispezione delle equazioni di stato non sempre permette di individuare se il sistema è completamente raggiungibile/osservabile; strumenti che possono essere utilizzati per rispondere a questo tipo di quesito sono:

- l'analisi dell'ordine del polinomio $D(s)$ rispetto all'ordine del sistema;
- effettuare dei test specifici di raggiungibilità e di osservabilità.

Osservazioni sulla stabilità di sistemi lineari tempo invarianti Ipotizzando (per semplicità) che il sistema sia completamente raggiungibile/osservabile, allora la stabilità di un sistema lineare tempo invariante è una **proprietà strutturale** del sistema stesso, ossia rappresentazioni equivalenti del sistema (scelta diversa delle variabili di stato) non impatta sulle conclusioni che si ottengono per la stabilità.

Un'altra osservazione che si può asserire rispetto a sistemi asintoticamente stabili è che l'uscita asintotica ($y(t \rightarrow \infty)$) dipende solamente dall'ingresso $u(t)$ e non dalle condizioni iniziali del sistema. Questo generalmente è dunque un aspetto desiderato nelle applicazioni reali in quanto *eliminano* gli effetti di disturbo.

Per sistemi lineari tempo invarianti asintoticamente stabili l'equilibrio esiste ed è sempre unico; per questo tipo di sistemi tutti gli autovalori sono a parte reale negativa e dunque il determinante della matrice di stato è diverso da 0. In questo caso dunque esiste l'inversa di \mathcal{A} che permette di determinare l'unico equilibrio del sistema. Da questa osservazione deriva che in questo tipo di sistema per ingressi costanti l'uscita asintotica tende al movimento di equilibrio.

3.4.4 Stabilità per sistemi non lineari

La stabilità è associata al movimento, e non ai sistemi, per questo può essere solamente associata ai sistemi lineari tempo invarianti (per come visto in precedenza) ed è dunque una cosa che va tenuta a mente. Per affrontare questo tipo di problema esistono delle particolari tecniche.

Noi in particolare analizziamo tecniche adatte allo studio della stabilità del movimento di equilibrio del sistema.

Metodo indiretto di Lyapunov Questo metodo per analizzare la stabilità del movimento di sistemi non lineari si basa sulla linearizzazione del sistema attorno al movimento di equilibrio stesso che risulta in un sistema lineare tempo invariante (analizzabile con i criteri precedentemente mostrati).

Se analizzando il problema il sistema lineare risulta essere semplicemente stabile in realtà non si può asserire alcuna conclusione per quanto riguarda la stabilità del sistema non lineare di origine.

Metodo grafico per sistemi scalari Un secondo metodo per analizzare sistemi non lineari scalari (ossia di ordine 1) è quello di utilizzare un metodo grafico che si basa sull'interpretazione del grafico stesso. L'idea è quella dunque di simulare graficamente l'effetto di una perturbazione delle condizioni iniziali (influenzando di fatto la variabile di stato) e analizzare cosa accade al movimento perturbato.

Le operazioni da eseguire possono essere riassunte nei seguenti passi:

1. in primo luogo si rappresenta la dinamica del sistema non lineare facendo riferimento al suo movimento di equilibrio in un diagramma. Questo significa rappresentare l'equazione $\dot{x} = f(x, \underline{u})$ che regola la dinamica del sistema non lineare. Essendo il sistema scalare questa funzione dipende solamente da una variabile x e per questo può essere rappresentata nel piano cartesiano;
2. nel grafico è possibile individuare i punti di equilibrio del sistema, ossia i punti in cui la funzione f intercetta l'asse delle ascisse (in quanto i punti di equilibrio sono gli stati x per i quali la loro derivata è nulla e dunque $f(x, \underline{u}) = \dot{x} = 0$). Indichiamo dunque con x^* il punto di equilibrio (ossia il movimento nominale \hat{x});
3. a questo punto è possibile provare a perturbare il movimento per studiare l'andamento del movimento perturbato

Lezion 13/04 Di fatto la stabilità, che studia la risposta di una perturbazione δx_0 sullo stato (stabilità interna), noi la analizziamo come la risposta all'impulso (perché nel mondo di Laplace l'impulso diventa una costante) che determina la stabilità esterna. Questo ha permesso di stabilire un criterio di stabilità basato sulle radici del polinomio $D(s)$.

Relazioni tra stabilità interna ed esterna Se il sistema è completamente raggiungibile / osservabile, allora il concetto di stabilità interna coincide con quello di stabilità esterna; in questo caso si osserva che il denominatore $D(s)$ coincide con il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ della matrice di stato \mathcal{A} e i poli di $D(s)$ coincidono con gli autovalori della matrice di stato stessa.

L'analisi di stabilità interna si basa sia sugli autovalori della matrice di stato \mathcal{A} , sia dai suoi autovettori.

Un sistema è detto **BIBO** (*Bounded Input, Bounded Output*) stabile se e solo se ad ogni ingresso limitato corrisponde un'uscita anch'essa limitata. A questo punto si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema SISO lineare tempo invariante sia BIBO stabile è che le radici del denominatore $D(s)$ siano tutte a parte reale negativa.

Equilibrio per sistemi non lineari Per determinare la stabilità dell'equilibrio di sistemi non lineari è possibile effettuare l'analisi del sistema linearizzato (analizzandone i poli), oppure è possibile impostare un metodo grafico che tuttavia vale solamente per sistemi scalari.

Quest'ultimo metodo approccia lo studio di stabilità riprendendo la definizione originaria di stabilità come perturbazione sulle condizioni iniziali (per sistemi scalari, essendoci una sola variabile di stato, il concetto di raggiungibilità / osservabilità si banalizzano e *non sono un problema*).

Un'ulteriore osservazione può essere effettuata analizzando la stabilità di un sistema linearizzato; considerando un primo sistema del tipo

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = x^3 + u \\ y = x \end{cases}$$

effettuando l'analisi con il metodo grafico si osserva che l'equilibrio $\bar{x} = 0$ (considerando $\bar{u} = 0$) è instabile in quanto allontanandosi leggermente dalla posizione, si ha una divergenza della variabile di stato. Effettuando una linearizzazione del sistema si determinano le matrici che la caratterizzano che sono

$$\mathcal{A} = [0] \quad \mathcal{B} = [1] \quad \mathcal{C} = [1] \quad \mathcal{D} = [0]$$

Si osserva dunque che $\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D} = \frac{1}{s}$ e il denominatore $D(s) = s$ è uno scalare la cui radice è $s = 0$; nel caso di sistema lineare il sistema sarebbe caratterizzato dalla definizione *semplicemente stabile* che è incongruente con la definizione ottenuta dalla via grafica.

Tuttavia non è possibile asserire che un sistema linearizzato semplicemente stabile è in realtà instabile, in quanto considerando il sistema

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = -x^3 + u \\ y = x \end{cases}$$

graficamente risulta osservabile che il sistema è stabile, mentre dalla linearizzazione si porterebbe ad affermare che il sistema rimane sempre semplicemente stabile.

In generale dunque quando il sistema linearizzato è semplicemente stabile, allora non è possibile asserire alcuna conclusione sulla stabilità del sistema stesso.

3.5 Funzione di trasferimento per sistemi lineari tempo invarianti

Dato un sistema dinamico lineare tempo invariante

$$y(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}x_0 + [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}]U(s)$$

Imponendo una condizione iniziale per cui $x_0 = 0$ allora è possibile scrivere il sistema dipendente dalla **funzione di trasferimento** $\mathcal{G}(s)$ del sistema:

$$y(s) = \underbrace{[\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}]}_{\mathcal{G}(s)} U(s)$$

La funzione di trasferimento rappresenta di fatto il legame tra ingresso e uscita del sistema espressa nel dominio di Laplace. Questa funzione dipende solamente dalle caratteristiche del sistema. Considerando che nel dominio del tempo l'uscita sarebbe scritta come

$$y(t) = \mathcal{C} \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B} u(\tau) d\tau + \mathcal{D} u(t)$$

e chiaramente è molto più *complessa* che la funzione di trasferimento nel dominio della variabile complessa s ottenuta tramite la trasformata di Laplace.

Note sulla funzione di trasferimento La funzione di trasferimento può essere calcolata in due modi:

- tramite definizione come segue, rispetto alla quale è necessario conoscere il modello $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ del sistema

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$$

- un'altro metodo è quello di calcolare la funzione di trasferimento come

$$\mathcal{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Questo è un metodo sperimentale in quanto potendo determinare degli ingressi $u(t)$ e rilevando l'uscita $y(t)$, tramite la trasformata di Laplace, è possibile determinare la funzione di trasferimento senza nemmeno conoscere il modello del sistema.

Inoltre è possibile osservare che la funzione di trasferimento rappresenta la trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema (dal fatto che la trasformata $\mathcal{L}(\text{imp}(t)) = 1$, allora $Y(s) = \mathcal{G}(s) \cdot 1$).

Nel caso di un sistema SISO, la funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$ è data da un rapporto tra un numeratore $N(s)$, che determinano gli **zeri** della funzione di trasferimento, e un denominatore $D(s)$ che ne determina i **poli**. Nel caso di un sistema MIMO la funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$ è di fatto una **matrice di trasferimento** nella quale ogni elemento è un rapporto tra un numeratore e un denominatore (che è sempre costante) e rappresenta il legame tra l' i -esima uscita e il j -esimo ingresso.

A questo punto l'analisi di stabilità di sistemi lineari tempo invarianti si effettua studiando la posizione nel piano complesso dei poli della funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$. Quando il sistema è completamente raggiungibile/osservabile, i poli della funzione di trasferimento coincidono con gli autovalori della matrice di stato \mathcal{A} .

La funzione di trasferimento è inoltre una proprietà strutturale dei sistemi lineari tempo invarianti, ossia essa è indipendente dalla scelta del riferimento diverso per le variabili di stato

3.5.1 Parametrizzazioni della funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$ può essere espressa in maniera alternativa; essa sarà sempre composta da un rapporto tra il numeratore $N(s)$ e il denominatore $D(s)$, dove tuttavia è possibile osservare un'insieme di forme equivalenti nella **forma fattorizzata** o nella **forma polinomiale** considerando l'esempio

$$(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

A questo punto è possibile scrivere le 3 formulazioni alternative: polinomiale (dove i $2n-1$ parametri sono i coefficienti α_i, β_i dei polinomi), forma fattorizzata di Nyquist (dove $z_i = \eta_i + i\alpha_i$ sono gli zeri reali e **CONTROLLARE**) e forma fattorizzata di Bode

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(s) &= \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0} \\ &= \frac{\rho \prod_i (s - z_i) \prod_i (s^2 + 2\eta_i \alpha_i s + \alpha_i^2)}{s^g \prod_i (s - p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)} \\ &= \frac{\mu \prod_i (\tau_i s + 1) \prod_i \left(\frac{s^2}{\alpha_i^2} + 2\frac{\eta_i}{\alpha_i} s + 1 \right)}{s^g \prod_i (T_i s + 1) \prod_i \left(\frac{s^2}{\omega_i^2} + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} s + 1 \right)} \end{aligned}$$

DA TERMINARE

Sistema ritardo di tempo Considerando il **sistema ritardo di tempo** la cui funzione d'uscita $y(t) = u(t - \tau)$ può essere rappresentato nel dominio della variabile complessa secondo la funzione di trasferimento

$$\mathcal{G}(s) = e^{-\tau s}$$

Questa è una funzione di trasferimento non razionale (non è un rapporto di polinomi) trascendente ed è un sistema dinamico che può dare alcuni problemi.

3.6 Studio del legame ingresso-uscita

Per poter studiare nel dettaglio il legame tra gli ingressi e l'uscita è necessario comprendere il significato dei parametri (poli, zeri, smorzamenti...) della funzione di trasferimento. In particolare per studiare la relazione è necessario studiare un sistema dinamico sollecitato:

- ingresso a scalino $u(t) = \text{scal}(t)$;
- ingresso sinusoidale $u(t) = \sin(\omega t)$.

3.6.1 Risposta allo scalino

La risposta allo scalino è *interessante* da studiare in quanto permette di capire come il sistema reagisce ad una variazione istantanea dell'ingresso e come il sistema evolve nel tempo. Se il sistema è inoltre lineare, allora è necessario studiare solamente lo scalino unitario in quanto ogni altro scalino è determinato utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti.

RIPRENDERE IL GRAFICO

Le *caratteristiche salienti* della risposta al segnale sono:

- le caratteristiche iniziali della risposta quali il valore $y_0 = y(0)$ (ed eventualmente le sue derivate $\dot{y}_0, \ddot{y}_0, \dots$);
- il valore asintotico y_∞ dell'uscita, ossia l'uscita y per $t \rightarrow \infty$;
- le caratteristiche del transitorio quali il tempo di assestamento t_a (dopo quanto tempo la risposta si assesta al valore finale), il periodo T (o frequenza) di eventuali oscillazioni, il valore di picco y_{max} della risposta, la sovraelongazione (*overshoot*) definita come $s\% = |y_{max} - y_\infty|/y_\infty \cdot 100$.

L'obiettivo è dunque quello di mettere in relazione i parametri della funzione di trasferimento con i parametri della risposta allo scalino.

Sistemi del primo ordine Considerando sistemi di ordine unitario aventi dunque un solo polo (e considerando che esso non abbia zeri). Se la funzione di trasferimento è del tipo $\mathcal{G}(s) = \mu/s$ (dove μ è il guadagno e $g = 1$ è il tipo del sistemi) allora il polo è nell'origine, mentre se esso non è centrato nell'origine può essere espresso come

$$\mathcal{G}(s) = \mu \frac{1}{Ts + 1}$$

dove μ è il guadagno e T è la costante di tempo del polo T .

Considerando il primo caso in cui $\mathcal{G}(s) = \mu/s$, la risposta allo scalino è determinata considerando la trasformata di Laplace dell'ingresso:

$$Y(s) = \mathcal{G}(s) U(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1}{s} = \frac{\mu}{s^2}$$

Per calcolare il valore iniziale dell'uscita è possibile usare il **teorema del valore iniziale (COLLEGAMENTO)** per il quale

$$y_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\mu}{s^2} = 0$$

Per calcolare la velocità \dot{y}_0 al tempo iniziale è sufficiente ri-applicare il teorema del valore iniziale alla derivata dell'uscita che nel caso in questione vale

$$\dot{y}_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s H(s) \xrightarrow{H(s)=\mathcal{L}[\dot{y}(t)]} \lim_{s \rightarrow \infty} s [s Y(s) - y_0] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \mu$$

Per calcolare invece il valore asintotico dell'uscita è possibile utilizzare il **teorema del valore finale**; verificato che l'uscita $Y(s)$ è razionale con poli a parte reale negativa e pulsazione nulla allora

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s} = \pm\infty$$

Per calcolare le proprietà transitorie è necessario determinare l'espressione completa di $y(t)$ antitrasformando la funzione di trasferimento con Heaviside; in questo caso l'operazione è facile e vale

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mu}{s^2}\right) = \mu \text{ramp}(t) = \mu t \text{scal}(t)$$

Nota 3.8: Essendo il sistema non asintoticamente stabile ($\mathcal{G}(s)$ ha un polo in $s = 0$), allora non è BIBO stabile; infatti per un ingresso *limitato* rappresentato dallo scalino $u(t) = \text{scal}(t)$ non corrisponde un'uscita limitata.

A questo punto è possibile osservare che μ influenza l'*ampiezza* (pendenza) della rampa; se il tipo è positivo non nullo ($g > 0$) allora la risposta non si assesta a nessun valore di regime (il tipo g si dimostra influenzare y_∞).

Considerando sistemi di ordine unitario con poli a parte reale e dunque con funzione di trasferimento del tipo

$$\mathcal{G}(s) = \mu \frac{1}{Ts + 1}$$

Anche in questo caso l'uscita del sistema, nel dominio della variabile complessa, vale

$$Y(s) = \mathcal{G}(s) U(s) = \mu \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s} = \mu \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

Anche in questo caso applicando il teorema del valore iniziale si osserva valere che $y_0 = 0$ e $\dot{y}_0 = \mu/T$, mentre per il teorema del valore finale è possibile calcolare $y_\infty = \mu$ (solamente se $T > 0$, altrimenti il polo sarebbe a parte reale positiva e il teorema non varrebbe). Le caratteristiche transitorie possono essere determinate antitrasformando l'uscita con il teorema di Heaviside; in particolare il risultato dell'operazione è

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-t/T}\right)$$

GRAFICO

In questo caso, analizzando il grafico dell'uscita per $T > 0$, è possibile osservare che non sono presenti oscillazioni $T = 0$ e anche l'elongazione percentuale è nulla in quanto $y_{max} = y_0$. Matematicamente il tempo di assestamento coincide con valore infinito in quanto $y(t) = y_\infty$ solamente a tale valore, anche se nella pratica si definisce il tempo di assestamento il valore di t_A tale che

$$|y(t_A) - y_\infty| \leq \epsilon y_\infty$$

dove ϵ è un parametro arbitrario minore di 1. Fissato il valore di $\epsilon = 0.01$, allora il tempo di assestamento t_a è pari al valore $4.6T \approx 5T$; tale valore è ottenuto per inversione dell'equazione.

Nota 3.9: Si può osservare che maggiore è la distanza del polo dall'asse immaginario, minore è il tempo di assestamento. Con questa definizione è dunque possibile pensare che un sistema con polo nell'origine sia un sistema infinitamente lento. Il tempo di assestamento non dipende dal guadagno μ , ma solamente dal valore T .

Sistemi del secondo ordine Considerando un sistema del secondo ordine con 2 poli non nulli coincidenti può essere espresso dalla funzione di trasferimento del tipo

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mu}{(Ts + 1)^2}$$

Applicando la struttura della risposta all'ingresso scalino $u(t) = \text{scal}(t)$ vista per i sistemi del primo ordine è possibile osservare che l'ingresso iniziale $y_0 = 0$ è sempre nullo; anche la derivata prima $\dot{y}_0 = 0$ è nulla ed è solamente la derivata seconda $\ddot{y}_0 = \mu/T^2$ il valore che risulta essere legata al guadagno.

Nota 3.10: A livello induttivo è possibile pensare che il numero di poli è legato all'ordine della prima derivata non nulla al tempo iniziale.

Tramite il teorema del valore finale (considerando un sistema asintoticamente stabile) è possibile determinare l'uscita asintotica $y_\infty = \mu$ (questa considerazione vale per ogni tipo di sistema anche di ordine superiore). Per quanto riguarda le caratteristiche transitorie è necessario calcolare $y(t)$ antitrasformando la scomposizione di Heaviside. Effettuando gli opportuni calcoli l'uscita risulta valere

$$y(t) = \text{DAVEDEREDASLIDE}$$

DIAGRAMMA

Anche in questo caso la sovra-elongazione percentuale è nulla e il periodo di oscillazione è nullo (non si ha di fatto alcuna oscillazione). Il tempo di assestamento ad $\epsilon = 1\%$ vale

$$t_a \approx 6.64T$$

A questo punto è possibile osservare che sistemi di ordine superiore a poli coincidenti sono più *lenti* di sistemi a ordine inferiore.

Se la funzione di trasferimento presenta i 2 poli reali non coincidenti, allora la funzione di trasferimento può essere espressa nella forma di Bode come

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mu}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad T_1 > T_2$$

Analizzando questa tipo di funzione di trasferimento si può dimostrare che $y_0 = \dot{y}_0 = 0$, mentre $\ddot{y}_0 = \frac{\mu}{T_1 T_2}$; per quanto riguarda il valore finale non si hanno ulteriori modifiche rispetto ai poli coincidenti, e dunque se il sistema è asintoticamente stabile $y_\infty = \mu$.

Per quanto riguarda le caratteristiche transitorie è necessario calcolare $y(t)$ del tipo

$$Y(s) = \frac{\mu}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{sT_1 + 1} + \frac{C}{sT_2 + 1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \text{Ascal}(t) + B e^{-t/T_1} + C e^{-t/T_2} = \mu \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right)$$

Anche in questo caso, essendo la risposta esponenziale, il periodo di oscillazione non è definito e la sovra-elongazione percentuale è nulla. Il tempo di assestamento non può essere calcolato direttamente (facilmente) in quanto dipendente simultaneamente sia da T_1 che T_2 ; è tuttavia possibile asserire le seguenti affermazioni:

- se $T_1 \simeq T_2$ sono dei poli di grandezza simile, allora il comportamento del sistema è paragonabile a quello dei sistemi del secondo ordine a poli coincidenti e dunque $t_a = 6.64T$;
- se $T_2 \ll T_1$ allora il sistema si comporta come un sistema di polo T_1 e dunque $t_a = 5T$.
- in tutti gli altri casi il transitorio è un valore compreso tra $5T$ e $6.64T$.

Considerando un sistema 2 poli complessi coniugati nella forma

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mu}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + 1}$$

dove μ è il guadagno, ξ è lo smorzamento e ω_n è la pulsazione naturale; effettuando i calcoli con il teorema del valore iniziale e finale si determina $y_0 = \dot{y}_0 = 0$, $\ddot{y}_0 = \mu\omega_n^2$, $y_\infty = \mu$ (questo vale solamente per sistemi asintoticamente stabili e dunque $\xi > 0$). L'espressione transitoria di questo tipo di funzione assume la forma del tipo

$$y(t) = \mu \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi) \right]$$

dove ϕ è una fase dipendente dai parametri ξ e ω_n . In questa espressione è possibile osservare che la risposta converge a μ (come ci si aspettava) e nel transitorio presenta delle oscillazioni di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2\pi}{\text{Im}}$$

ossia è dovuto alla sola parte immaginaria dei poli; aumentando il valore della parte immaginaria è dunque possibile diminuire il periodo di oscillazione (infatti per sistemi a poli reali $\text{Im} = 0$ e dunque il periodo è infinito e si può osservare l'effetto sinusoidale). La sovra-elongazione percentuale può essere invece calcolata come

$$S_{\%} = 100 e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 100 e^{-\text{Re}/\text{Im}}$$

Il tempo di assestamento dipende dall'evoluzione dell'esponenziale $e^{-\xi\omega_n t}$ che modula il valore asintotico; si dimostra dunque che il tempo di assestamento può essere determinato come

$$t_a = \frac{5}{\xi\omega_n} = \frac{5}{|\text{Re}|}$$

AGGIUNGERE LE FIGURE E LE CONSIDERAZIONI

3.6.2 Effetti degli zeri sulla risposta allo scalino

Rispetto all'analisi dei poli, l'effetto degli zeri è meno generalizzabile e dunque in questo caso si analizzeranno solamente dei casi particolari.

Zeri reali Considerando una funzione di trasferimento con zero reale nell'origine (in $s = 0$), allora essa presenta tipo $g \leq -1$ (si osserva che è impossibile avere sia poli che zeri nulli contemporaneamente). Considerando per esempio un sistema del primo ordine con funzione del tipo

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mu s}{Ts + 1}$$

Si ipotizza anche che il sistema sia asintoticamente stabile (in quanto altrimenti la soluzione divergerebbe a ∞).

Nota 3.11: L'ordine di un sistema dinamico è lo stesso sia nel dominio del tempo (dove rappresenta la dimensione della matrice di stato) che nel dominio della variabile complessa (dove rappresenta il numero di poli della funzione di trasferimento).

Applicando il teorema del valore iniziale è possibile calcolare l'uscita iniziale che risulta valere $y_0 = \mu/T$. Per il teorema del valore finale è possibile determinare $y_\infty = 0$; questo avviene per il fatto che s rappresenta la derivata di una costante che pertanto è sempre nulla. In generale l'effetto dello zero nell'origine è quello di *derivare* (nel tempo) la risposta del sistema senza lo zero che convergeva ad un valore costante.

L'effetto di uno zero in $s = 0$ è dunque quello di annullare la risposta asintotica del sistema.

Per determinare gli effetti transitori è necessario antitrasformare l'uscita nel dominio del tempo; per fare questo è necessario scomporre con Heaviside del tipo

$$\frac{s\mu}{(Ts + 1)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts + 1} \quad \rightarrow \quad y(t) = A\text{scal}(t) + Be^{-t/T}$$

La risposta del sistema senza considerare dunque lo zero nullo è diversa, tuttavia essendo la struttura medesima il transitorio è governato dall'esponenziale la cui costante di tempo dipende solamente dalla posizione del polo: $t_A \approx 5T$.

In generale gli zeri modificano l'andamento della risposta ma non la sua durata.

Zeri reali non più nell'origine In questo caso la funzione di trasferimento può essere espressa come

$$\mathcal{G}(s) = \mu \frac{\tau s + 1}{Ts + 1} \quad T > 0, \tau \in \mathbb{R}$$

Il valore iniziale della risposta, applicando il teorema del valore iniziale, risulta valere $y_0 = \mu \frac{\tau}{T} \neq 0$, mentre il valore finale del sistema vale $y_\infty = \mu$. A questo punto è possibile osservare come il valore di τ influenza l'andamento della risposta allo scalino

Sistemi di ordine 2 a poli reali Considerando una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathcal{G}(s) = \mu \frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad T_1, T_2 > 0, \tau \in \mathbb{R}$$

Applicando il teorema del valore iniziale risulta valere $y_0 = 0$ e $\dot{y}_0 = \mu \frac{\tau}{T_1 T_2}$. Più in generale l'ordine della prima derivata di $y(t)$ non nulla in $t = 0$ coincide con il grado relativo della funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$, ossia è la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri. Il valore asintotico della funzione vale $y_\infty = \mu$.

Riassunto degli effetti degli zeri sulla risposta allo scalino

- lo zero nell'origine annulla la risposta asintotica y_∞ ;
- gli zeri destri (per cui $\tau < 0$) sono associati al comportamento della risposta inversa;
- gli zeri sinistri ($\tau > 0$) vicini all'asse immaginario (più dei poli) portano ad una sovraelongazione;

- se i poli sono vicini agli zeri, essi si annullano; in particolare lo zero può mascherare la presenza di un polo;
- il numero degli zeri può influenzare il comportamento iniziale (tendono a *velocizzare* la risposta iniziale che dipende dal grado relativo della funzione di trasferimento);
- gli zeri hanno un effetto sulla risposta allo scalino non *notevole*

Risposta allo scalino per sistemi arbitrariamente complessi Considerando un sistema arbitrariamente complesso la cui funzione di trasferimento espressa nella forma di Bode del tipo

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (\tau_i s + 1) \prod_i \left(\frac{s^2}{\alpha_i^2} + 2 \frac{\eta_i}{\alpha_i} s + 1 \right)}{\prod_i (T_i s + 1) \prod_i \left(\frac{s^2}{\omega_i^2} + 2 \frac{\xi_i}{\omega_i} s + 1 \right)}$$

Per quanto riguarda le caratteristiche iniziali della risposta è sufficiente porre le derivate fino a quella di ordine r (dove r è il grado relativo -1) nulle

$$y_0 = \dot{y}_0 = \dots = y_0^{(r)} = 0 \quad r = \text{grado relativo} - 1$$

Per quanto riguarda invece le caratteristiche asintotiche è possibile affermare che

$$y_\infty = \begin{cases} \pm\infty & \text{se asintoticamente instabile} \\ \mu & \text{se asintoticamente stabile} \\ 0 & \text{se asintoticamente stabile con zeri in } s = 0 \text{ (} g \leq -1 \text{)} \end{cases}$$

Per quanto riguarda le caratteristiche transitorie è possibile affermare che l'uscita $y(t)$ è una composizione di tutte le singolarità presenti; in particolare si può approssimare il comportamento del transitorio considerando solamente le caratteristiche delle singolarità più lente, dette **dominanti**. Questo permette di affermare che

$$t_a = \frac{5}{|\text{Re}_{\text{poli dominanti}}|} \quad T = \frac{2\pi}{\text{Im}_{\text{poli dominanti}}}$$

Per quanto riguarda la sovra-elongazione $S\%$ essa dipende dai poli complessi coniugati dominanti e dagli reali vicini all'asse immaginario (in questo caso l'entità della sovra-elongazione si valuta con una simulazione). Fra i comportamenti notevoli si menziona la risposta inversa dovuta a zeri destri *dominanti*.

Singolarità dominanti Le singolarità dominanti sono quelle più vicine all'asse immaginario. Se un polo e uno zero sono molto vicini tra loro possono essere trascurati in quanto il loro effetto tenderà ad essere mutuamente compensato.

Nota 3.12: Non sempre la regola della vicinanza all'asse immaginario è facile da applicare.

3.6.3 Risposta ad un segnale sinusoidale

Si analizza ora la risposta di un sistema lineare tempo invariante con un segnale sinusoidale. A questo proposito è impossibile applicare il teorema del valore finale per calcolare y_∞ ; questo perché per le ipotesi di funzionamento $Y(s)$ deve essere razionale e deve avere poli con parte reale negativa oppure appartenere all'origine degli assi.

Nel caso di risposta ad un segnale sinusoidale l'uscita vale

$$Y(s) = \mathcal{G}(s)U(s) = G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e dunque esistono due poli complessi coniugati con parte reale nulla (e dunque non verificano l'ipotesi).

Teorema della risposta in frequenza Il teorema della risposta in frequenza si basa sull'ipotesi che la funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$ deve essere asintoticamente stabile (ragionamento sulla BIBO stabilità) e l'ingresso deve valere $u(t) = \bar{A} \sin(\bar{\omega}t + \bar{\phi})$ dove \bar{A} è l'ampiezza, $\bar{\omega}$ è la pulsazione del segnale e $\bar{\phi}$ è la fase del segnale.

Il teorema afferma che il valore asintotico y_∞ del sistema dinamico è dato dall'espressione

$$y_\infty = \bar{A} |\mathcal{G}(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega}t + \bar{\phi} + \angle \mathcal{G}(j\bar{\omega})) \quad (3.11)$$

dove \angle è la fase della funzione di trasferimento.

A questo punto è possibile osservare che l'uscita del sistema è ancora una sinusoide la cui pulsazione è uguale a quella del segnale in ingresso (queste considerazioni valgono solamente per sistemi lineari tempo invarianti, non valgono in generale per altri sistemi). Il sistema dinamico di fatto modifica l'ingresso:

- l'ampiezza della sinusoide viene modificata dal fattore moltiplicativo $|\mathcal{G}(j\bar{\omega})|$;
- si introduce uno sfasamento determinato da $\angle \mathcal{G}(j\bar{\omega})$.

L'entità dei termini $\mathcal{G}(j\bar{\omega})$ non sono costanti ma dipendono di fatto dalla pulsazione $\bar{\omega}$.

Questo teorema permette inoltre di ricavare il tempo di assestamento associato al transitorio prima che raggiunga un valore costante e che vale

$$t_a = \frac{5}{|\text{Re}_{\text{poli dominanti}}|}$$

In generale infatti la dinamica dei transitori del sistema dipende solamente dalle proprietà del sistema (in questo caso la parte reale dei poli dominanti) e non dall'ingresso del sistema.

E' importante studiare la risposta alla sinusoide di un sistema dinamico per via della teoria associata alla serie/trasformata di Fourier. Per la teoria della serie di Fourier dato un segnale in ingresso $u(t)$ periodico di periodo T , allora il segnale può essere scomposto in una serie di tante sinusoidi di ampiezza H e sfasamento ϕ (dipendenti dalle varie pulsazioni ω) come segue:

$$u(t) = \sum_{\omega=0}^{\infty} H(\omega) \sin(\omega t + \phi(t)) \quad (3.12)$$

dove $\omega = N \frac{2\pi}{T}$ con $N = 0, 1, \dots, \infty$. Fourier dunque riuscì a calcolare le relazioni per determinare $H(\omega)$ e $\phi(\omega)$.

Nel caso di segnali non periodici si estende la teoria di Fourier apportando le seguenti modifiche: la sommatoria diventa un integrale, $H(\omega)$ e $\phi(\omega)$ non sono più funzioni discrete ma continue.

Condensando la teoria di Fourier con il teorema della risposta in frequenza ci permette di calcolare y_∞ per qualunque ingresso $u(t)$ applicando il principio di sovrapposizione degli effetti di tutti i contributi sinusoidali ottenuti dalla serie:

$$y_\infty = \sum_{\omega=0}^{\infty} \left[H(\omega) |\mathcal{G}(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega) + \angle \mathcal{G}(j\omega)) \right] \quad (3.13)$$

Da un punto di vista applicativo è impossibile sommare infiniti termini e dunque nella pratica la sommatoria è troncata dopo un determinato numero finito di termini ω .

Risposta in frequenza Come appena visto, la teoria di Fourier permette di interpretare i segnali non più nel dominio del tempo, ma nel **dominio della frequenza** tramite la definizione dello **spettro del segnale** composto dalle funzioni $H(\omega)$ e $\phi(\omega)$. Tuttavia l'ingresso $u(t)$ nel tempo può essere descritto nel dominio della variabile complessa tramite la trasformata di Laplace che permette di determinare $U(s)$.

Analizzando lo spettro del segnale nel dominio della frequenza si osserva che il termine $H(\omega)$ è definito positivo in quanto rappresenta il modulo (ampiezza) dei segnali (co)sinusoidali, mentre la fase $\phi(\omega)$ può essere sia positiva che negativa. In generale l'informazione più *interessante* è quella associata al modulo $H(\omega)$ dell'ingresso $u(t)$ nel dominio della frequenza in quanto tale valore permette di capire il comportamento qualitativo del segnale nel tempo.

Considerando uno spettro con valori di modulo $H(\omega)$ alto per frequenze elevate, allora il segnale in ingresso $u(t)$ associato presenta prevalentemente oscillazioni ad alta frequenza che rendono *instabile*

il segnale; se invece dopo una certa frequenza ω il modulo si attenua, il segnale ricostruito avrà solamente componenti notevoli a bassa frequenza.

L'applicazione del teorema della risposta in frequenza suggerisce un'interpretazione ulteriore dei sistemi dinamici, analoga a quella vista dei segnali nel dominio del tempo (tramite le equazioni di stato $\dot{x} = Ax + Bu$ e $y = Cx + Du$) e nel dominio della variabile complessa (dove la descrizione è effettuata mediante la funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$). Nel dominio della frequenza è possibile descrivere il sistema (in analogia al dominio di Laplace) in funzione delle componenti $|\mathcal{G}(j\omega)|$ e $\angle \mathcal{G}(j\omega)$ della **risposta in frequenza** $\mathcal{G}(j\omega)$ del sistema dinamico.

Nota 3.13: Si osserva che la risposta in frequenza $\mathcal{G}(j\omega)$ è un numero complesso e si può ricavare dalla funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$ imponendo per l'appunto $s = j\omega$ (con $j = \sqrt{-1}$ costante immaginaria); considerando per esempio un sistema del primo ordine è possibile esprimere la funzione di trasferimento nel dominio della frequenza come

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{G}(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2} = \frac{2-j\omega}{(j\omega+2)(2-j\omega)} = \underbrace{\frac{2}{4+\omega^2}}_{\text{Re}(\mathcal{G})} - j \underbrace{\frac{\omega}{4+\omega^2}}_{\text{Im}(\mathcal{G})}$$

La risposta in frequenza, osservando anche la nota precedente, è dunque strettamente dipendente dalla pulsazione ω del segnale in ingresso; questa funzione è *ben definita* per sistemi lineari tempo invarianti, mentre per altri tipi di sistemi (anche asintoticamente instabili) l'analisi può essere estesa utilizzando altri operatori matematici (per sistemi non asintoticamente stabili tuttavia non è possibile applicare il teorema della risposta in frequenza).

Essendo $\mathcal{G}(j\omega)$ un numero complesso, allora essa può essere espressa tramite due metodologie duali equivalenti:

- tramite il modulo $|\mathcal{G}(j\omega)|$ e la fase $\angle \mathcal{G}(j\omega)$
- tramite la descrizione della parte reale $\text{Re}(\omega)$ e immaginaria $\text{Im}(\omega)$ della funzione.

Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

Le metodologie principali per la rappresentazione della risposta in frequenza $\mathcal{G}(j\omega)$ di un segnale è possibile utilizzare sia i **diagrammi di Bode** dove si rappresentano in due diagrammi distinti il modulo e la fase in funzione della frequenza, sia il **diagramma polare** (figura 3.3)

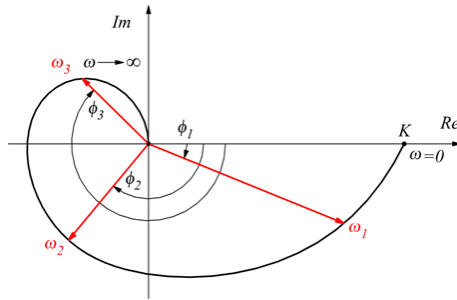


Figura 3.3: diagramma polare di una funzione di trasferimento.

Rappresentazione dei diagrammi di Bode Il modulo di una risposta in frequenza viene rappresentato nel diagramma di Bode espresso in decibel, ossia tramite un *riscaldamento* logaritmico dell'ordinata:

$$|\mathcal{G}(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |\mathcal{G}(j\omega)| \quad \leftrightarrow \quad |\mathcal{G}(j\omega)| = 10^{|\mathcal{G}(j\omega)|_{dB}/20}$$

In questo caso, nonostante $|\mathcal{G}(j\omega)|$ sia definito positivo, è possibile avere un modulo espresso in decibel che può essere negativo. I diagrammi di Bode sono inoltre rappresentati in una scala semilogaritmica, ossia l'ascissa non è lineare ma contiene il logaritmo di ω . In questa scala l'ascissa nulla non coincide con il valore $\omega = 0$, in quanto $\log(0) = 1$. Ad ogni unità nell'asse logaritmico corrisponde un incremento di una **decade** di ω , ossia di un fattore moltiplicativo pari a 10.

In generale si utilizzando i **diagrammi di Bode asintotici** che sono costituiti solamente da rette e spezzate; tali diagrammi sono detti asintotici in quanto si trascurano le variazioni nell'intorno dei poli.

E' possibile affermare che per poli e zeri complessi coniugati, il fattore di smorzamento non impatta sul tracciamento dei diagrammi, e dunque per la rappresentazione è possibile considerare 2 poli (zeri) complessi coniugati come 2 poli reali coincidenti. La differenza tra poli e zeri è che essi presentano diagrammi di Bode del modulo *opposti* (ossia i poli hanno una pendenza positiva, gli zeri hanno pendenza negativa).

A questo punto per effettuare la rappresentazione sul diagramma è possibile effettuare i seguenti passaggi:

1. nota la funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$, essa deve essere convertita nella forma di Bode per ricavare i parametri

$$\mu, g, T, \tau, \omega_n, \alpha$$

2. partendo da pulsazioni tendenti a zero ($\omega \rightarrow 0$), e dunque da sinistra del diagramma, si traccia il contributo dovuto sia al guadagno μ che al tipo g della funzione. In particolare la retta associata a questo contributo ha pendenza pari a $-20g \frac{dB}{dec}$ e ha intercetta con l'asse x in corrispondenza della pulsazione

$$\bar{\omega} = |\mu|_{dB}^{1/g}$$

3. a questo punto è necessario posizionare sull'ascissa i poli e gli zeri (siano essi reali o complessi coniugati):

$$\omega_{p,r} = \frac{1}{|T|} \quad \omega_{p,cc} = \omega_n \quad \omega_{z,r} = \frac{1}{|\tau|} \quad \omega_{z,cc} = \alpha$$

4. in corrispondenza delle pulsazioni trovate, andando da sinistra verso destra, si modifica la retta iniziale nel seguente modo: per un polo reale la pendenza deve diminuire di un valore $-20dB/dec$ (che diventa $-40dB/dec$ per 2 poli complessi coniugati), mentre per uno zero reale la pendenza aumenta di un valore $20dB/dec$ (che diventa $40dB/dec$ se ci sono 2 zeri complessi coniugati).

Diagramma di fase Gli step da seguire per rappresentare i diagrammi asintotici della fase nel diagramma di Bode sono i seguenti:

1. come nel diagramma del modulo è necessario determinare i parametri della funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$: $\mu, g, T, \tau, \omega_n, \alpha$. Anche in questo caso il diagramma è semi-logaritmico (l'ascissa contiene il logaritmo di ω); l'asse delle ordinate contenente la fase viene misurato generalmente in gradi;
2. partendo dall'estrema sinistra del diagramma ($\omega \rightarrow 0$), è necessario tracciare il contributo del guadagno ω e del tipo g della funzione che è sempre associato ad un contributo costante (e dunque una retta orizzontale). In particolare il valore della fase della funzione di trasferimento si misura come

$$\angle \mathcal{G}(\omega) = \angle \mu - g 90^\circ$$

dove $\angle \mu = 0^\circ$ per $\mu > 0$ e $\angle \mu = -180^\circ$ per $\mu < 0$;

3. analogamente al passaggio 3 della rappresentazione del modulo nel diagramma di Bode, è necessario determinare posizionare sulle ascisse i poli ω_p e gli zeri ω_z (se complessi coniugati, si può considerare che essi siano una sovrapposizione di due poli reali con lo stesso valore);
4. a questo punto partendo da sinistra nel diagramma, ogni volta che si incontra una singolarità si cambia il valore della retta orizzontale della fase di un valore

$$\Delta \phi = \pm m 90^\circ$$

dove m è il numero di singolarità coincidenti nella posizione che si sta considerando; per quanto riguarda la scelta del segno \pm si deve considerare il segno della parte reale della singolarità che si sta considerando secondo i valori:

$$+ \quad \text{se} \quad \begin{cases} \text{zeri} & \text{Re} \leq 0 \\ \text{poli} & \text{Re} > 0 \end{cases} \quad - \quad \text{se} \quad \begin{cases} \text{zeri} & \text{Re} > 0 \\ \text{poli} & \text{Re} \leq 0 \end{cases}$$

Confronto tra diagrammi asintotici e reali

I diagrammi fino ad ora rappresentati sono delle spezzate che rappresentano il comportamento asintotico della funzione di trasferimento nel dominio della frequenza.

Confrontando i diagrammi del modulo **SCARICARE LE FIGURE** del diagramma di Bode ad un polo reale, è possibile osservare che per pulsazioni lontane dalla pulsazione ω_0 del polo i diagrammi sono coincidenti, mentre nell'intorno di una decade dal punto si ha uno scostamento rispetto al caso ideale con valore massimo in corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega_0$ con un'attenuazione di $-3dB$.

FIGURA

Nel caso di poli complessi coniugati, se la componente ξ tende al valore unitario, il diagramma converge a quello di due poli reali coincidenti, mentre più diverge il valore di ξ da 1, più il diagramma diverge da quello asintotico nell'intorno della pulsazione ω_0 . In particolare per $\xi \rightarrow 0$ il modulo tende a valore infinito. Questo è dovuto al fenomeno della **risonanza**.

FIGURA

Quantitativamente se si verifica che lo smorzamento assume valore $\xi = \sqrt{2}/2$, allora esiste un massimo del modulo nel diagramma reale in corrispondenza della pulsazione $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, ossia coincidente con la parte immaginaria dei poli. Per determinare il valore del massimo del picco si calcola come

$$|\mathcal{G}(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1 - \xi^2}} \quad |\mathcal{G}(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\xi|}$$

Nel caso di zeri complessi coniugati (caratterizzati dal parametro η associato alla parte immaginaria) si ha l'effetto contrario rispetto a quello degli zeri, ossia di **antirisonanza** dove il modulo tende ad un valore infinito negativo ($|\mathcal{G}|_{dB} \rightarrow -\infty$, allora $\mathcal{G} \rightarrow 0$). Questo è dovuto alla *proprietà bloccante* degli zeri: con uno zero nell'origine, la risposta allo scalino di un sistema coincide con il valore 0, mentre se lo zero complesso coniugato è una sinusoide ad una pulsazione particolare l'uscita tende comunque a 0.

Diagramma di fase Per quanto riguarda il diagramma di fase di un sistema ad un solo polo reale **FIGURA**, è possibile osservare che alla pulsazione caratteristica ω_0 la pendenza della curva reale è posta a $45^\circ/dec$ e dunque si può ipotizzare che il cambio di fase avviene in un intervallo di 2 decadi centrato in ω_0 . In generale i diagrammi asintotici della fase sono molto diversi da quelli reali.

Al contrario se lo smorzamento ξ tende a 0, il diagramma di fase reale si avvicina a quello asintotico. In generale i diagrammi asintotici della fase vengono utilizzati solo in maniera qualitativa, non quantitativa, e se necessario si calcola la fase manualmente.

3.6.4 Classificazione di sistemi dinamici attraverso i diagrammi di Bode

E' possibile dunque pensare di analizzare i sistemi dinamici in funzione del tipo di filtraggio che il sistema effettua sugli ingressi cui esso è sottoposto. Un sistema dinamico può infatti essere considerato come un filtro passa alto/basso/banda.

3.7 Sistema a ritardo di tempo

Un **sistema a ritardo di tempo** del tipo $y(t) = u(t - \tau)$ è particolare in quanto ha ordine infinito e non ha associato alcuna equazione differenziale. Considerando la proprietà di traslazione nel tempo della trasformata di Laplace, è possibile affermare che la **funzione di trasferimento** del sistema a ritardo di tempo vale

$$\mathcal{G}(s) = e^{-\tau s}$$

Si può dunque osservare che questo è un sistema la cui funzione di trasferimento è trascendente (ossia non ha la struttura tipica di una funzione lineare tempo invariante che è un rapporto di polinomi). Per questo fatto un sistema dinamico contenente un ritardo di tempo non può essere analizzato tramite il teorema del valore iniziale/finale in quanto decade la condizione di razionalità della funzione \mathcal{G} .

Considerando un sistema la cui funzione di trasferimento $\mathcal{G}(s)$ vale $\frac{1}{s+10}$ traslata nel tempo, allora la sua risposta allo scalino si può modellare come

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\mathcal{G}} \underbrace{\frac{1}{s}}_U e^{-\tau s}$$

Per poter tuttavia utilizzare i teoremi del valore iniziale/finale si può aggirare il problema pensando di applicare il teorema alla funzione $\tilde{Y}(s) = \mathcal{G}(s) U(s)$ e successivamente si *trasla* opportunamente il risultato nel tempo. Il tempo di traslazione τ deve essere sommato anche al tempo di assestamento t_a che si determinerebbe dall'analisi della funzione di trasferimento razionale.

Risposta in frequenza La risposta in frequenza di un sistema a ritardo di tempo è sufficiente calcolare sostituire con $j\omega$ la coordinata s nella funzione di trasferimento che diventa $\mathcal{G}(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$. Rappresentando la funzione nei diagrammi di Bode (**ref FIGURA**) si osserva che il modulo, in decibel, è sempre nullo mentre la fase dei segnali è sempre pari a $-\tau\omega$.

FIGURE DIAG DI BODE

Capitolo 4

Sistemi dinamici interconnessi

4.1 Schemi a blocchi

La discussione sui **sistemi dinamici interconnessi** è la base per capire come funzionano i sistemi in retroazione e si basa sullo studio del comportamento derivante dal collegamento di 2 o più sistemi dinamici. 10 maggio

Per capire come i sistemi sono interconnessi si ricorre al formalismo grafico degli **schemi a blocchi**; questo tipo di rappresentazione permette di analizzare anche connessioni molto complesse in maniera sistematica e relativamente *semplice*.

Gli elementi costitutivi della rappresentazione sono:

- il **blocco** che rappresenta il sistema dinamico; esso è caratterizzato dai suoi ingressi (a sinistra), dalle uscite (a destra) e presenta all'interno la sua funzione di trasferimento \mathcal{G} che permette di scrivere l'*equazione costitutiva* $Y = \mathcal{G}U$ del sistema;
- il **nodo sommatore**, rappresentato da un pallino, nel quale entrano le *freccie* (con eventuale segno negativo se i valori devono essere invertiti) che devono essere sommate rispetto all'unica freccia uscente dal nodo;
- la **diramazione**, ossia una *linea* la cui estremità è un pallino dal quale partono altre linee di valore uguale alla diramazione in ingresso.

4.1.1 Connessioni elementari

Tra tutte le connessioni che si possono realizzare, è possibile individuarne 3 di fondamentali:

- esiste la **connessione in serie**, dove *due scatole vengono poste una in fila all'altra*, ossia l'uscita della prima coincide con l'ingresso della seconda (e il processo si può iterare). La loro connessione risulta in un'altro sistema lineare la cui funzione di trasferimento vale

$$\mathcal{G}_{\text{serie}} = \prod_i \mathcal{G}_i$$

Tale espressione, riferita ad un sistema di due blocchi, può essere dimostrata esplicitando le equazioni costitutive dei 2 blocchi e l'equazione della diramazione:

$$\begin{cases} Y_2 = \mathcal{G}_2 U_2 \\ Y_1 = \mathcal{G}_1 U_1 \\ U_2 = Y_1 \end{cases} \quad Y = Y_2 = \mathcal{G}_{\text{serie}} U = \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1 U_1$$

- la seconda connessione fondamentale è il **parallelo** dove uno stesso ingresso viene imposto a due (o più) blocchi le cui uscite si sommano; si dimostra che la funzione di trasferimento equivalente $\mathcal{G}_{\text{parallelo}}$ realizzata dai blocchi in parallelo vale

$$\mathcal{G}_{\text{parallelo}} = \sum_i \mathcal{G}_i$$

Considerando il caso di 2 blocchi in parallelo, allora è possibile scrivere l'equazione del nodo sommatore $Y = Y_1 + Y_2$, mentre note le due equazioni costitutive $Y_i = \mathcal{G}_i U_i$ e noto che $U_1 = U_2 = U$, allora

$$Y = (\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2)U$$

- la connessione in **retroazione**, come in **figura**, può essere analizzata a partire dalle equazioni caratteristiche del problema:

$$\begin{cases} Y_1 = Y \\ U_2 = Y \\ Y_1 = \mathcal{G}_1 W \\ W = U \pm Y_2 \\ Y_2 = \mathcal{G}_2 U_2 \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{\mathcal{G}_1}{1 \mp \underbrace{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}_{\mathcal{G}_{\text{feedback}}}} U$$

In generale la funzione di trasferimento di un qualsiasi sistema di trasferimento è dato dal rapporto della funzione di trasferimento della *linea di mandata* e la somma tra 1 e la *funzione d'anello*:

$$\mathcal{G}_{\text{feedback}} = \frac{\text{f.d.t. linea di andata}}{1 \mp \text{funzione d'anello}}$$

4.1.2 Rappresentazione dei sistemi dinamici

In generale i sistemi dinamici rappresentano come ingressi sia l'ingresso *proprio* u , ma anche un disturbo d : il sistema dinamico dunque può essere modellato come un parallelo di un blocco contenente la funzione di trasferimento modellante l'ingresso \mathcal{G}_u e quello dovuto al disturbo \mathcal{G}_d (questo vale per sistemi lineari tempo invarianti, non in generale per altri sistemi).

Nei sistemi dinamici in retroazione è possibile anche inserire gli effetti, sul ramo in retroazione, di rumore come un blocco con funzione di trasferimento $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{\text{noise}}$. In generale nello studio dei sistemi di controllo si trascurano in prima battuta gli effetti dovuti ai disturbi e ai rumori.

4.2 Stabilità di sistemi interconnessi

Connessione in serie e in parallelo Considerando che la funzione di trasferimento di un generico sistema lineare tempo invariante può essere espresso come un rapporto di polinomi $\mathcal{G}_i = N_i/D_i$, allora è possibile osservare che la **funzione di trasferimento** complessiva della **serie** è una funzione polinomiale che ha come zeri l'unione degli zeri delle due funzioni iniziali, e come poli l'unione dei due poli iniziali:

$$\mathcal{G}_{\text{serie}} = \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 = \frac{N_1}{D_1} \frac{N_2}{D_2} = \frac{N}{D}$$

Considerando invece la **connessione in parallelo** non è possibile calcolare gli zeri come diretta conseguenza degli zeri dei blocchi di partenza, tuttavia i poli è possibile osservare che coincidono con l'unione dei poli iniziali:

$$\mathcal{G}_{\text{parallelo}} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 = \frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 D_2 + N_2 D_1}{D_1 D_2} = \frac{N}{D}$$

In realtà essendo importanti per la stabilità soprattutto la posizione dei poli, è possibile concludere che connessioni in serie/parallelo di due sistemi asintoticamente stabili risulta in un sistema che è anch'esso asintoticamente stabile. Ne consegue che se anche uno dei due sistemi è instabile, anche allora il sistema complessivo lo sarà: la connessione in serie/parallelo dunque non permette di stabilizzare un sistema dinamico inizialmente instabile, in ogni caso!

Sistemi retro-azionati Si dimostra dunque che l'unico collegamento *utile* a stabilizzare un sistema instabile è il collegamento in retroazione; esplicitando infatti le funzioni di trasferimento \mathcal{G}_1 del ramo di mandata e \mathcal{G}_2 nel ramo in retroazione è possibile calcolare la funzione di trasferimento complessiva come

$$\mathcal{G}_{\text{feedback}} = \frac{\mathcal{G}_1}{1 \mp \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2} = \frac{N_1/D_1}{1 \mp \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}} = \frac{N_1 D_2}{D_1 D_2 \mp N_1 N_2} = \frac{N}{D}$$

Osservando il denominatore D della funzione di trasferimento risultante è possibile notare che i nuovi poli ottenuti non coincidono, in maniera generale, con le radici del polinomio di partenza; dunque non è detto che il collegamento di due sistemi asintoticamente stabili non è detto che sia anch'esso asintoticamente stabile, tuttavia un sistema instabile può essere stabilizzato tramite un'opportuna retroazione con un altro sistema dinamico.

Criteri di stabilità per sistemi retro-azionati

La stabilità di un sistema retro-azionato, come appena osservato, dipende sostanzialmente studiando le proprietà della funzione di guadagno d'anello $L(s) = \mathcal{G}_1(s)\mathcal{G}_2(s)$, e non dal tipo di connessione/ordine tra i due blocchi nello schema.

4.2.1 Analisi delle radici del denominatore

Un primo modo per studiare la stabilità del sistema retro-azionato è quello di studiare le radici della funzione di trasferimento risultante, definita dalla funzione $1 \mp L(s) = D_L(s) + N_L(s) = D_f(s)$, dove D_f rappresenta il denominatore di G_{feedback} e N_L, D_L rappresentano numeratore e denominatore della funzione di guadagno di anello $L(s)$.

Considerazioni sulla stabilità possono essere dunque effettuate con i metodi già descritti in precedenza per l'analisi di sistemi dinamici, tuttavia per sistemi di ordine elevato il calcolo delle radici della funzione $1 + L(s) = 0$ diventa complesso (in quanto anch'esso di grado elevato) ed è dunque utilizzare dei metodi alternativi basati sui coefficienti.

Si osserva inoltre che i criteri fino ad ora utilizzati non possono essere applicati se nell'anello sono presenti dei sistemi a ritardo di tempo del tipo $1 + Le^{-\tau s}$ (in quanto il denominatore di \mathcal{G}_f non è più un polinomio).

4.2.2 Criterio di Nyquist

Il **criterio di Nyquist** è un metodo grafico che permette, sotto forti ipotesi, di determinare la stabilità (o meno) del sistema dinamico osservando il diagramma polare della funzione di trasferimento (dipendente dalla pulsazione ω).

In particolare le ipotesi da verificare per utilizzare il criterio sono:

- non devono essere presenti *parti nascoste* instabili nel calcolo del guadagno di anello $L(s)$;
- il sistema deve retro-azionato negativamente.

Il **diagramma di Nyquist** di una funzione di trasferimento è l'unione del diagramma polare della funzione $\mathcal{G}(j\omega)$ con il suo specchio rispetto all'asse reale.

Per determinare la stabilità del sistema è necessario calcolare il numero P di poli del guadagno d'anello $L(s)$ con parte reale positiva, il numero N di *giri* del diagramma di Nyquist attorno al punto -1 contati positivamente se fatti in senso antiorario. A questo punto **condizione necessaria** e **sufficiente** di asintotica stabilità del sistema retro-azionato è che:

- N sia ben definito;
- che $N = P$.

Intuitivamente si *gira* attorno al punto -1 per via del fatto che $1 + L(s) = 0 \rightarrow L(s) = -1$.

Esempio 4.1: studio della stabilità tramite il criterio di Nyquist

Si consideri un sistema in retroazione negativa la cui funzione d'anello vale $L(s) = \frac{10}{s+1}$. In questo caso essendo il sistema semplice, basterebbe studiare la stabilità calcolando le radici del polinomio $1 + L(s) = 0$ (che porta al risultato $s = -11$ la cui conclusione è che il sistema è asintoticamente stabile). La soluzione $s = -11$ rappresenta il polo della funzione d'anello; aumentando tale valore è possibile migliorare la velocità della risposta del sistema.

Volendo tuttavia applicare il criterio di Nyquist è necessario rappresentare il diagramma polare; per fare questo è possibile sfruttare delle *regole* qui descritte:

1. verificare che $\mathcal{G}(s)$ non abbia poli sull'asse immaginario (ossia con parte reale nulla): se ciò si verificasse non è possibile rappresentare i diagrammi di Nyquist;
2. si tracciano i diagrammi di Bode della funzione $G(j\omega)$ che si vuole analizzare;

3. il diagramma polare viene dunque creato *per punti* scegliendo delle particolari pulsazioni ω , soprattutto per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$. In particolare per $\omega \rightarrow 0$ si osserva che $|\mathcal{G}(j0)| = 20dB = 10$ e la fase vale $\angle G(j0) = 0^\circ$; per $\omega \rightarrow \infty$ si calcola $|\mathcal{G}(j\infty)| = -\infty dB = 0$ e $\angle \mathcal{G}(j\infty) = -90^\circ$. Intuitivamente il diagramma di Nyquist è una linea che unisce i due punti e deve vivere nel 4 semipiano in quanto sia modulo che fase sono sempre decrescenti.
4. chiudo il diagramma di Nyquist specchiando il diagramma appena tracciato. Il verso di percorrenza è quello delle pulsazioni crescenti sul piano del diagramma polare; sul ramo specchiato il verso della freccia è tale da *non creare scontri*.

A questo punto è necessario verificare le ipotesi del teorema di Nyquist: essendo $L(s)$ nota, non sono state effettuate *cancellazioni critiche*; inoltre si considera il sistema come in retroazione negativa. A questo punto è necessario calcolare il numero di poli a parte positiva dell'anello che risulta valere $P = 0$; questo valore coincide con il numero di giri $N = 0$ del diagramma di Nyquist percorsi in senso antiorario rispetto al punto -1 e dunque il **sistema è asintoticamente stabile**.

Estensione del criterio di Nyquist Supponendo di voler studiare la stabilità di un sistema a retroazione negativa la cui funzione d'anello è moltiplicata per una costante reale del tipo $kL(s)$, con $k \in \mathbb{R}$; supponendo di conoscere il diagramma di Nyquist di $L(s)$, per studiare la stabilità è sufficiente considerare che k tende ad espandere/contrarre il diagramma di $L(s)$ già noto.

Tuttavia questa operazione può risultare complessa, quindi alternativamente è possibile pensare di spostare il punto -1 in modo da ottenere un risultato relativamente equivalente; in particolare il punto spostato assume valore $-1/k$.

Nota 4.1: Tale espressione si ricava partendo dal fatto che il guadagno d'anello da studiare vale $1 + kL(s) = 0$; in particolare le due soluzioni equivalenti

$$kL(s) = -1 \quad \leftrightarrow \quad L(s) = -\frac{1}{k}$$

Nel primo caso è necessario riscalarlo il diagramma di $L(s)$, mentre nel secondo è sufficiente spostare il punto -1 ; ai fini del calcolo della stabilità le due operazioni sono equivalenti.

Con questa estensione è possibile rimuovere l'ipotesi di retroazione negativa nel teorema di Nyquist; in particolare per studiare la stabilità di un sistema in retroazione positiva è sufficiente considerare che il denominatore della funzione di trasferimento vale $1 - L(s)$ che è equivalente ad una retroazione negativa con guadagno d'anello pari a $-L(s)$ (ossia equivale allo studio di un anello in retroazione negativa con $k = -1$ e dunque *contando i giri* intorno al punto 1).

Nota 4.2: Tracciare i diagrammi di Nyquist per funzioni L con poli puramente immaginari è difficile in quanto sostituendo $s \rightarrow \pm j\omega$ nella funzione, si osserva che il modulo di L , per una certa pulsazione, tende a valore infinito.

Esempio 4.2: diag. con polo immaginario

Considerando la funzione d'anello $L(s) = \frac{1}{s}$, è possibile osservare che il grafico è una retta che esplode a valore infinito.

4.2.3 Criterio di Bode

A questo punto è possibile introdurre questo terzo metodo per lo studio della stabilità della funzione di anello per ovviare alle situazioni in cui il disegno della rappresentazione dei diagrammi di Nyquist sia laboriosa; inoltre nonostante non vi siano impedimenti nell'approccio di Nyquist alla funzione $L(s)$ in presenza di ritardi di tempo, nella pratica l'applicazione del teorema risulta impossibile.

Inoltre serve un criterio che possa essere applicato ad una funzione $L(s)$ con poli a parte reale nulla.

Enunciato Il **criterio di Bode** si basa sul tracciamento dei diagrammi Bode e si applica su sistemi in cui si ha il ritardo di tempo e/o in cui ci sono poli di $L(s)$ puramente immaginari. Le ipotesi del teorema sono:

- non devono essere presenti delle parti nascoste di $L(s)$ *critiche*;
- che il numero di poli a parte positiva P sia sempre nullo (il sistema di partenza deve dunque essere asintoticamente stabili; non può essere applicato a sistemi instabili ad anello aperto);
- il diagramma di Bode del modulo di $L(s)$ attraversa l'asse a $0dB$ una volta sola *dall'alto verso il basso* (per frequenze crescenti);
- il sistema deve essere a retroazione negativa.

A questo punto è possibile definire la **pulsazione critica** ω_c la pulsazione per la quale il modulo, in decibel, si annulla (oppure $|L(j\omega_c)| = 1$ non in decibel); per calcolare tale valore è possibile:

- usare la definizione;
- osservare la pulsazione ω_c dal diagramma asintotico di Bode del modulo.

A questo punto si determina la **fase critica** $\phi_c = \angle L(j\omega_c)$ da definizione (in quanto i diagrammi asintotici sono troppo approssimati). Dati ϕ_m il **margin di fase** pari a $180^\circ - |\phi_c|$ e il **guadagno della funzione d'anello** μ_L , allora condizione necessaria e sufficiente di asintotica stabilità del sistema retro-azionato è che sia margine di fase che guadagno d'anello siano entrambi positivi:

$$\text{asintotica stabilità} \quad \Leftrightarrow \quad \phi_m > 0 \quad \mu_L > 0$$

Interpretazione del criterio di Bode Questo criterio deriva, di fatto, da quello di Nyquist. I parametri μ_L e ϕ_m di fatto permettono di capire se il valore di N è nullo o meno; noto infatti che $P = 0$ applicando il teorema di Nyquist è possibile dedurre direttamente se il sistema è asintoticamente stabile (per $N = 0$, mentre se $N \neq 0$ il sistema è instabile).

Considerando il segno del margine di fase ϕ_m positivo, allora ad esso corrisponde $N = 0$, mentre se esso è negativo $N \neq 0$.

Considerando invece il modulo μ_L , se esso è positivo (considerando $\phi_m > 0$) si dimostra che $N = 0$ riconducendo l'analisi della fase di un guadagno di anello premoltiplicato per un valore negativo contando dunque i giri intorno al punto 1.

Questo criterio è semplice in quanto basta verificare preliminarmente che μ_L sia positivo: se risultasse negativo si conclude subito che il sistema non è asintoticamente stabile.

Risposta del criterio a sistemi con ritardo di tempo Considerando un sistema a ritardo di tempo, la prima ipotesi sulle *cancellazioni critiche* è verificata (in quanto non si può semplificare con un polinomio); anche l'ipotesi sul numero di poli a parte reale positiva è verificata (in quanto il ritardo, di per se, non modifica la stabilità del sistema in anello aperto; il calcolo di P dipende solamente dalla parte razionale di $L(s)$); la terza ipotesi rimane verificata in quanto il ritardo di tempo non inficia sul modulo, in decibel, della funzione $L(s)$; anche l'ipotesi sulla retroazione negativa non può essere smentita in quanto dipende dallo schema di controllo (e non dalla presenza del ritardo).

La presenza del ritardo non influenza il calcolo della pulsazione ω_c ; il ritardo introduce uno sfasamento che cambia la fase critica ϕ_c che tuttavia può essere valutata, partendo dalla pulsazione $\tilde{\phi}_c$ critica del sistema non ritardato, tramite l'equazione

$$\phi_c = \tilde{\phi}_c - \tau \omega_c$$

Esempio 4.3: stabilità con il criterio di Bode

Considerando la funzione di guadagno ad anello $L(s) = \frac{10}{s+1}$, la stabilità può essere determinata con il criterio di Bode. Considerando infatti che tutte le ipotesi sono verificate, dal diagramma del modulo si ricava la pulsazione critica $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$. A questo punto è necessario calcolare la fase critica calcolando $L(j\omega_c)$:

$$L(j\omega_c) = \frac{10}{j10+1} \quad \Rightarrow \quad \angle L(j\omega_c) = \angle 10 - \angle(j\omega_c + 1) = 0 - \arctan\left(\frac{10}{1}\right) = -84.3^\circ$$

$$\phi_m = 180^\circ - |-84.3^\circ| = 95.7^\circ$$

Osservato che il margine di fase ϕ_m è positivo e il guadagno di anello $\mu_L = 10$ è anch'esso positivo, allora è possibile concludere che il sistema retro-azionato è asintoticamente stabile.

Interpretazione del margine di fase Il valore del **margine di fase** ϕ_m , definito in precedenza, 18 maggio è legato al massimo ritardo di tempo ammissibile nel sistema retro-azionato.

Immaginando un sistema di controllo retro-azionato con guadagno d'anello $\tilde{L}(s)$ e ritardo di ingresso pari a τ (guadagno $e^{-\tau s}$). L'origine di questo ritardo può derivare dalla realizzazione digitale dei sistemi elettronici (per via dei ritardi di comunicazione e tempi di elaborazione). Il margine di fase dunque permette di stabilire qual'è il massimo valore di ritardo τ oltre il quale il sistema retro-azionato è instabile (nell'ipotesi in cui il sistema non *in ritardo* sia asintoticamente stabile).

Disegnando il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento e calcolati la pulsazione critica ω_c e il margine di fase ϕ_m , l'aggiunta del margine di fase comporta una rotazione del grafico di un valore proporzionale a τ . In particolare lo sfasamento dovuto al ritardo di fase vale $\Delta\phi = -\tau_{max}\omega_c$ e uguagliandolo al margine di fase ϕ_m si ottiene che

$$\tau_{max} = \frac{\phi_m}{\omega_c}$$

Margine di guadagno Si consideri il caso di un circuito in retroazione di cui è noto il guadagno d'anello \tilde{L} che tuttavia è pre-moltiplicato per un guadagno k costante di valore sconosciuto. L'idea è dunque capire quanto vale il valore k_{max} che rende il sistema retro-azionato instabile (nel caso in cui \tilde{L} sia in origine asintoticamente stabile), e tale valore prende il nome di **margine di guadagno**.

Per essere il sistema stabile, allora il numero di giri del diagramma di Nyquist rispetto al punto -1 deve essere nullo; incrementando k di fatto si ha l'espansione del diagramma di Nyquist rispetto all'origine del piano. A questo punto nota la distanza a del diagramma di Nyquist dall'origine che si può determinare come $a = |L(j\omega_\pi)|$ dove l'angolo ω_π vale $\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$. A questo punto il margine di guadagno vale

$$k_m = \frac{1}{a}$$

Capitolo 5

Prestazioni dei sistemi di controllo

In generale la funzione di trasferimento \mathcal{G}_f di un sistema retro-azionato dipende sia dalla funzione di trasferimento $R(s)$ del **regolatore**, sia dalla funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema controllato.

In generale un sistema presenta l'ingresso di riferimento \bar{y} , i disturbi d e **boh** n che, tramite una notazione matriciale della funzione di trasferimento $\mathcal{G}_f(s)$ permette di calcolare l'uscita y , l'errore e e l'uscita u (in ingresso al sistema).

Osservando lo schema del sistema da analizzare è possibile calcolare le singole funzioni di trasferimento che legano i vari ingressi con le varie uscite, osservando che

$$\bar{y} \rightarrow y \quad : \quad F(s) = \frac{L}{1+L} \quad \bar{y} \rightarrow u \quad : \quad Q(s) = \frac{R}{1+L} \quad S(s) = \frac{1}{1+L}$$

RIVEDERE

$$\begin{pmatrix} y \\ e \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ d \\ n \end{pmatrix}$$

La funzione $S(s)$ viene denominata **funzione di sensitività** (**PERCHE?!**), $F(s)$ è la **funzione di sensitività complementare** (complementare in quanto $S + F = 1$) e $Q(s)$ è la **funzione di sensibilità del controllo** (in quanto compare solamente per calcolare la variabile di controllo u).

Si osserva che in ogni funzione di trasferimento F, S, Q il denominatore è comune e pari a $1 + L$, con L funzione d'anello (che giustamente è indipendente dall'ingresso/uscita considerato per il sistema). Inoltre le funzioni $F(s)$ e $S(s)$ dipendono esplicitamente solo da $L(s)$. Questo significa che l'analisi delle prestazioni è diversa rispetto a quanto descritto nel capitolo precedente; in particolare scelto il regolare R è possibile calcolare le caratteristiche di L e dunque delle funzioni F ed S .

Compromesso sulla scelta del regolatore **RISCRIVERE**

5.1 Analisi delle prestazioni

5.1.1 Funzione di sensitività complementare

In generale la funzione di sensitività complementare $F(s)$ permette di relazionare il valore desiderato \bar{y} con l'uscita y del sistema, e per migliorare le prestazioni si vuol far sì che $F(s)$ si comportasse come un filtro passa basso di guadagno unitario.

A questo punto per collegare le caratteristiche di $F(s)$ con il guadagno d'anello è necessario esplicitare l'espressione di quest'ultimo:

$$F(s) = \frac{L}{1+L} = \frac{N_L/D_L}{1+N_L/D_L} = \frac{N_L}{D_L+N_L}$$

Da questa espressione è possibile verificare come gli zeri di $F(s)$ coincidano con quelli di $L(s)$; volendo esprimere in genere $F(s)$ con un'espressione del tipo

$$F(s) \sim \frac{\mu_f \text{ zeri dominanti}}{s^g \text{ poli dominanti}}$$

Per ricavare il valore μ_f/s^g è necessario studiare il limite per s che tende a zero della funzione $F(s)$:

$$\frac{\mu_f}{s^g} = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu_l/s^{g_l}}{1 + \mu_l/s^{g_l}}$$

A questo punto è possibile osservare come le proprietà a bassa frequenza della sensitività complementare $F(s)$ (ossia il rapporto μ/s^g) dipende direttamente dalle proprietà a bassa frequenza del guadagno d'anello $L(s)$; in particolare effettuando delle semplificazioni è possibile calcolare il valore dei parametri della sensitività complementare:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu_l/s^{g_l}}{1 + \mu_l/s^{g_l}} \rightarrow \begin{cases} \mu_f = \frac{\mu_l}{1+\mu_l} & \text{se } g_l = 0 \\ \mu_f = 1 & \text{se } g_l \geq 1 \\ \mu_f = \mu_l \text{ e } g_f = g_l & \text{se } g_l < 0 \end{cases}$$

Si osserva dunque che sono presenti uno o più poli nella funzione d'anello nell'origine ($g_l \leq 1$), allora ad esso è associato un termine di tipo integrativo $1/s$ che risulterà essere utile in quanto nei sistemi di controllo PID garantiranno l'unitarietà del guadagno della funzione d'anello.

Calcolare esplicitamente i poli della funzione di sensitività complementare $F(s)$ risulta essere piuttosto difficile e per questo essi vengono dedotti analizzando il diagramma del modulo di Bode: in particolare se la pendenza dello stesso cala allora si ha un polo, mentre se la pendenza sale si ha uno zero. Considerando la relazione esplicita della sensitività, si dimostra che il modulo della stessa dipende direttamente dal guadagno della funzione d'anello.

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} = f(|L(j\omega)|)$$

Nell'ipotesi in cui il guadagno d'anello $|L|$ è molto maggiore del valore unitario (e dunque in decibel $|L|_{dB} \gg 0$), allora è possibile considerare che

$$|F| \approx \frac{|L|}{|L|} = 1 \quad \text{se } |L| \gg 1 \leftrightarrow |L|_{dB} \gg 0$$

Al contrario è possibile effettuare la semplificazione inversa nel caso in cui il guadagno sia molto inferiore del valore unitario e dunque

$$|F| \approx \frac{|L|}{1} = |L| \quad \text{se } |L| \ll 1 \leftrightarrow |L|_{dB} \ll 0$$

A questo punto per progettare un buon regolatore si richiede che la funzione d'anello sia di tipo positivo ($g > 0$), oppure se lo stesso è nullo si vuole avere un guadagno d'anello molto alto.

Ricerca dei poli dominanti Solitamente i poli dominanti sono quelli *lenti*, ossia con pulsazione ω piccola; tuttavia questa *regola* non è generale. In particolare se lo smorzamento ξ di un polo a pulsazione veloce è particolarmente piccolo, allora è possibile che tale polo sia dominante (in quanto si ha un picco di risonanza particolarmente pronunciato).

In generale nel progetto di sistemi di controllo non si vuole mai avere un picco di risonanza, e in generale si vuole che il sistema si comporti come un filtro passa basso. Questo comporta una semplificazione sui diagrammi di Bode e la pulsazione del filtro passa basso associato alla funzione di sensitività complementare F coincide con la pulsazione critica ω_c del guadagno d'anello.

A questo punto è necessario capire se i poli sono reali oppure complessi coniugati (e determinarne dunque lo smorzamento). Per rispondere alla domanda si parte calcolando l'eventuale smorzamento dei poli (supponendo che esista) considerando che il picco del modulo in corrispondenza della pulsazione critica vale

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{2|\xi|} \Rightarrow \xi = \sin(\phi_m/2) \approx \frac{\phi_m[^\circ]}{100}$$

Per effettuare questa operazione è possibile verificare i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} |F(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} \xrightarrow[L(j\omega_c)=e^{j\phi_c}]{|L(j\omega_c)|=1} \frac{1}{|1 + e^{j\phi_c}|} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos^2 \phi_c) + \sin^2 \phi_c}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \phi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \phi_m)}} = \frac{1}{2 \sin(\phi_m/2)} \end{aligned}$$

Dal risultato che otteniamo nel calcolo dello smorzamento ξ permette di stabilire dunque se i poli sono reali o complessi coniugati; in particolare se $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora i poli possono essere considerati come complessi coniugati, mentre se $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora i poli sono considerati come reali; ciò significa che per $\phi_m < 75^\circ$ allora i poli sono complessi coniugati (per $\phi_m > 75^\circ$ i poli sono considerati reali coincidenti).

A questo punto noto che il tempo di assestamento vale $t_a = 5/|Re|$, allora per $\phi_m > 75^\circ$ allora si ha un polo reale con tempo di assestamento $t_a = 5/\omega_c$, mentre se $\phi_m < 75^\circ$ (2 poli complessi coniugati) allora

$$t_a = \frac{5}{\omega_c \xi} = \frac{5}{\omega_c \frac{\phi_m}{100}}$$

5.1.2 Funzione della sensitività

Si analizza ora la sensitività $S(s)$ che permette di correlare il riferimento \bar{y} con l'errore e di inseguimento. Tale funzione può essere riscritta come

$$S(s) = \frac{1}{1+L} = \frac{D_L}{D_L + N_L}$$

Si osserva così che gli zeri di S coincidono con i poli della funzione d'anello L , mentre i poli di S coincidono con quelli della sensitività complementare.

A questo punto si determina guadagno e tipo analizzando il limite per $s \rightarrow 0$ (come nel caso precedente) arrivando ai risultati

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \mu_l / s^{g_l}} \rightarrow \mu_s = \begin{cases} \frac{1}{1+\mu_l} \text{ e } g_s = 0 & \text{se } g_l = 0 \\ 1/\mu_l \text{ e } g_s = -g_l & \text{se } g_l \geq 1 \\ 1 \text{ e } g_s = 0 & \text{se } g_l < 0 \end{cases}$$

Questi risultati sono compatibili rispetto a quanto visto nell'analisi della sensitività complementare: infatti se $g_l = 0$ l'uscita y tende asintoticamente al valore di riferimento \bar{y} e conseguentemente l'errore e deve convergere a zero (considerazioni analoghe possono essere svolte per tutte le casistiche).

Principio del modello interno Considerando di calcolare l'errore asintotico e_∞ per un ingresso di riferimento $\bar{y}(s) = A/s^r$, allora per il teorema del valore finale si osserva che

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s^r} = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \frac{A}{s^{r-1}}$$

Nel caso in cui $g_l \geq 1$ allora il limite si può riscrivere come

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_l} s^{g_l} \frac{A}{s^{r-1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{\mu_l} s^{g_l - r + 1}$$

Ponendo $r = 1$ (associato ad un riferimento a scalino) allora per avere un errore asintotico nullo è necessario imporre che $g_l \geq 1$; se invece si sceglie $r = 2$ (associato ad un riferimento a rampa) per avere errore asintotico nullo si deve avere $g_l \geq 2$. In generale fissato il valore di r , allora per avere errore asintotico nullo si deve avere $g_l \geq r$.

In generale il **principio del modello interno** afferma che *per ottenere un errore asintotico nullo, a fronte di un riferimento $\bar{y}(s)$, occorre che in $L(s)$ sia presente il modello di $\bar{y}(s)$* .

Studiando la posizione di poli e zeri della funzione di sensitività $S(s)$ è possibile analizzare la risposta in frequenza del sistema; in particolare studiando il modulo si osserva che lo stesso è funzione del modulo della funzione d'anello:

$$\begin{aligned} |S(j\omega)| &= \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} = f(|L(j\omega)|) \\ &\approx \begin{cases} |S| = \frac{1}{|L|} \leftrightarrow |S|_{dB} = -|L|_{dB} & \text{se } |L| \gg 1, \omega \ll \omega_c \\ |S| = 1 \leftrightarrow |S|_{dB} = 0dB & \text{se } |L| \ll 1, \omega \gg \omega_c \end{cases} \end{aligned}$$

Si osserva dunque che il comportamento della funzione di sensitività si comporta come un filtro passa alto con frequenza di taglio ω_c coincidente con quella della funzione di sensitività complementare $F(s)$ (che si comporta tuttavia come un filtro passa basso). Questo significa che i poli

della funzione di sensitività $S(s)$ coincidono con quelli della funzione di sensitività complementare $F(s)$. Questo può anche essere intuitivamente dimostrato considerando che il denominatore di $S(s)$ e $F(s)$ sono uguali, e dunque i poli non possono che non essere coincidenti.

5.1.3 Funzione della sensitività del controllo

La **sensitività di controllo** $Q(s)$ permette di correlare il riferimento \bar{y} , disturbi e rumori d, n con l'ingresso al sistema controllato u ; in particolare si era dimostrato valere che tale funzione è calcolata come $Q = \frac{R}{1+L} = f(R, L)$, ossia dipende sia dal guadagno d'anello ma anche dalla funzione di trasferimento dovuta al regolatore R . Questo fatto rende più *difficoltoso* approssimare il progetto del controllore per come fin'ora introdotto, agendo di fatto solo su $L(s)$.

D'altra parte è possibile anche osservare che le caratteristiche di $Q(s)$ (che determina di fatto l'andamento di u) sono *secondarie* rispetto ai risultati delle funzioni F, S che determinano l'andamento dell'uscita y e dell'errore e . Nella pratica dunque si progetta il regolare in modo da ricavare dei risultati desiderabili su y, e , mentre il calcolo di $Q(s)$ si fa *a posteriori* solamente per dimensionare l'**azione di controllo**, ossia gli attuatori.

Nota E' in realtà possibile riscrivere la formulazione di $G(s)$ in maniera più *agevola*; in particolare si dimostra che

$$Q(s) = \frac{R}{1+L} \frac{G}{G} = \frac{L}{1+L} G^{-1} = F(s) G^{-1}(s)$$

$$\Rightarrow F(s) = G(s) Q(s)$$

Da questa relazione è possibile calcolare $|F|_{dB} = |G|_{dB} + |Q|_{dB}$; per *velocizzare* un sistema dinamico è necessario *spostare* verso ω più alte il polo della funzione $F(s)$; essendo il guadagno $G(s)$ del sistema da controllare prestabilito, è necessario compensare la differenza con la presenza di una sensitività di controllo $Q(s)$ tale da mantenere le relazioni sul modulo appena viste.

In generale quando $|F| \sim |G|$ l'azione del sistema di controllo Q è piccola, mentre diventa valore diventa importante nei punti in cui le funzioni di trasferimento di F e G diventano diverse: maggiore è la modifica di G , maggiore è l'azione di controllo necessario.

Concetto 5.1: Per cambiare la dinamica di un sistema non basta *progettare bene* un regolatore, ma occorre anche dell'*energia*, ossia l'azione di controllo, tanto maggiore quanto sono le modifiche al sistema originario.

5.2 Sintesi di sistemi di controllo

La **sintesi** è il processo di progettazione del regolatore in modo che il sistema controllato si comporti come richiesto; in particolare nel dominio di Laplace un processo di sintesi di un sistema può essere caratterizzato dai seguenti passaggi:

- si scelgono le caratteristiche desiderate del sistema, quali le risposte dell'uscita y , dell'errore e ...
- si traducono le caratteristiche desiderate in proprietà desiderate della funzione d'anello $L(s)$;
- si disegna/progetta/calcola una funzione d'anello $L(s)$ compatibile con le caratteristiche appena determinate;
- nota la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema da controllare, si calcola il regolare tramite inversione del guadagno d'anello:

$$L(s) = R(s)G(s) \quad \rightarrow \quad R(s) = \frac{L(s)}{G(s)}$$

Questo processo prende il nome di **sintesi di $R(s)$ tramite il *loop shaping***.

5.2.1 Stabilità del sistema di controllo

Il primo passaggio nella sintesi del sistema di controllo è assicurarsi che lo stesso, alla fine del processo, risulti asintoticamente stabile:

- se il sistema da controllare era già in origine asintoticamente stabile (per cui il numero di poli a parte reale positiva $P = 0$ sia nulla) è sufficiente analizzare la stabilità tramite il criterio di Bode. Si deve dunque garantire, per la funzione d'anello, che sia il guadagno μ_L che margine di fase ϕ_m siano positivi non nulli e che l'attraversamento del diagramma del modulo di Bode attraversi l'intercetta orizzontale una sola volta *dall'alto verso il basso*.
- se il sistema da controllare è invece instabile in partenza il progetto del regolare diventa più complesso e si può effettuare utilizzando delle tecniche di progettazione diverse (che si vede alla magistrale) oppure utilizzando il metodo degli *anelli in cascata* (ossia si crea un anello interno il cui scopo è quello di stabilizzare il sistema, mentre l'anello esterno su cui si innesta il primo viene progettato per ottenere i risultati desiderati).

5.2.2 Specifiche del sistema

La scelta delle **specifiche del sistema** possono essere suddivise in quelle **asintotiche** (o *statiche*) e **dinamiche**.

Specifiche asintotiche Le specifiche asintotiche studiano il comportamento del sistema controllato a livello asintotico, ossia per $t \rightarrow \infty$, per ingressi *canonici* (come lo scalino o la rampa, ossia segnali per cui vale il teorema del valore finale) e per ingressi sinusoidali (ossia per ingressi per cui è necessario considerare il teorema della risposta in frequenza).

Esempi di specifiche asintotiche per ingressi canonici possono essere che l'errore siano compresi entro degli intervalli specifici ($|e_\infty| < h$, $y_\infty > h$). A questo punto è possibile eseguire i seguenti passaggi:

- si calcola la funzione di trasferimento (chiamata, per esempio, $W(s)$) che lega l'ingresso all'uscita, ossia che permette di calcolare le funzioni $F(s)$, $S(s)$, ...
- applico il teorema del valore finale; considerando l'esempio di voler stabilire l'errore asintotico è sufficiente calcolare

$$|e_\infty| = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s)\bar{y}(s)$$

- a questo punto si ottiene un'espressione funzione dei parametri g_L, μ_L del guadagno d'anello: a questo punto si impone la specifica e si trovano i valori di g_L e μ_L .

Considerando invece segnali in ingressi sinusoidali il processo è analogo, tuttavia non si applica più il teorema del valore finale ma quello della risposta in frequenza.

Specifiche dinamiche Lo studio delle specifiche dinamiche si basa sul determinare caratteristiche come il tempo di assestamento t_a o l'elongazione percentuale $s\%$, ossia determinare la posizione dei poli in anello chiuso. Considerando per esempio un tempo di assestamento t_a che deve essere inferiore ad un tempo specifico h , è possibile determinare la pulsazione angolare critica ω_c nel caso in cui i poli siano reali o complessi:

$$t_a = \begin{cases} \frac{5}{\omega_c} & \text{se } \phi_m \geq 75^\circ \\ \frac{5}{\omega_c \frac{\phi_m}{100}} & \text{se } \phi_m < 75^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_c > \frac{5}{h} \\ \omega_c \frac{\phi_m}{100} > \frac{5}{h} \end{cases}$$

Nel caso di specifica sulla sovra-elongazione $s\% < h$, è necessario effettuare delle considerazioni sullo smorzamento ξ (e dunque sul margine di fase) del sistema considerando che $s\% = f(\xi) = f(\phi_m/100)$.

In generale imporre la pulsazione critica ω_c non è difficile in quanto basta *disegnare* il diagramma di Bode di $L(s)$ in modo da rispettare tale condizione; più complesso è invece determinare il margine di fase in quanto lo stesso viene calcolato *a posteriori* in maniera analitica.

Per questo in generale si utilizza un procedimento iterativo:

1. ipotizzo una funzione d'anello $L(s)$ compatibile con le specifiche viste fino ad ora;
2. si calcola il margine di fase ϕ_m della soluzione ipotizzata;
3. si verifica la specifica sul margine di fase; in particolare se essa non risulta essere accettabile si ritorna al punto 1, altrimenti il processo si può concludere in quanto si è trovata una soluzione accettabile.

In generale non ci sono delle *regole* generali per capire come modificare la funzione d'anello per spostare il margine di fase, tuttavia è possibile osservare questi fatti (non sempre sono verificati, però possono dare una buona idea del comportamento del sistema):

- più è grande il tipo $g_L > 0$ della funzione d'anello, più piccolo è il margine di fase; questo è dovuto al fatto che nel calcolo di ϕ_m si ha una riduzione di fase dovuta ai contributi $\phi_c = -g_L 90^\circ$;
- aumentare la pulsazione critica ω_c porta una riduzione del margine di fase ϕ_m .

5.2.3 Calcolo del regolatore

A questo punto, definita la funzione d'anello L e studiato il comportamento del sistema da controllare G , è possibile ricavare il controllore R tramite la relazione L/G . In generale questa operazione è piuttosto *immediata* e non presenta criticità, tuttavia ci sono casi in cui $L(s)$ deve avere una particolare *struttura* per la quale, altrimenti, si troverebbe un risultato sbagliato per il regolatore:

- se il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ presenta poli con parte reale positiva. In questo caso effettuando l'operazione di divisione L/G si ottiene un regolatore $R(s)$ anch'esso con un polo a parte reale positiva, e dunque il regolatore sarebbe instabile. In questo caso la soluzione che si può utilizzare è quella di includere gli zeri *destri* di $G(s)$ nella funzione d'anello $L(s)$;
- se il sistema da controllare presenta una funzione $G(s)$ contenente un ritardo di tempo è necessario includere in $L(s)$ tale ritardo.

Può inoltre accadere che, nel calcolo di R , che la stessa abbia più zeri che poli (e dunque la definiamo R^*), cosa che è impossibile (non esistono sistemi dinamici che hanno più zeri che poli). Per ovviare a questo problema si aggiungono poli ad R^* ad alta frequenza e lontani dalle singolarità di R^* e L : essendo ad alta frequenza infatti il loro effetto *svanisce* rapidamente senza compromettere il progetto originario.

Capitolo 6

Esercitazioni