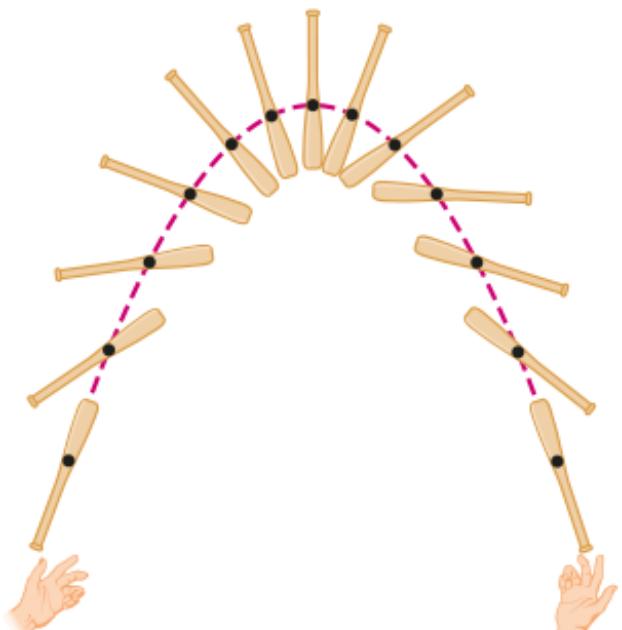


Corpo rigido

Un **corpo rigido** è un corpo in cui le distanze relative tra tutte le sue particelle rimangono costanti nel tempo, indipendentemente dalle forze che agiscono su di esso. In altre parole, un corpo rigido non subisce deformazioni sotto l'azione di forze esterne.

Matematicamente, questo implica che per ogni coppia di particelle P_1 e P_2 di un corpo rigido, la distanza tra di esse $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ non cambia nel tempo. Pertanto, il corpo rigido si muove come una singola unità senza alterazioni nella sua forma.



Il moto di un corpo rigido è una combinazione di traslazione e rotazione.

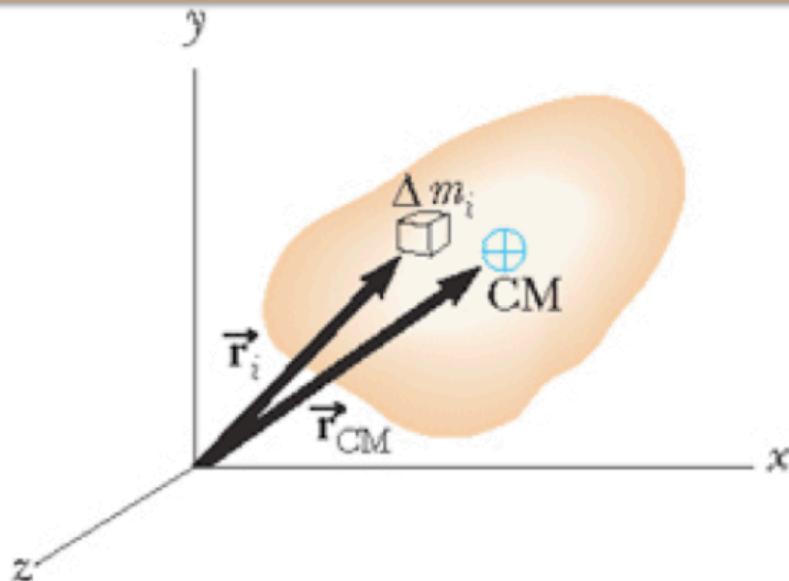
Centro di massa del corpo rigido

Per un corpo omogeneo di massa M e volume V il vettore posizione del centro di massa è:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho dV$$

Se il corpo è omogeneo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV$$

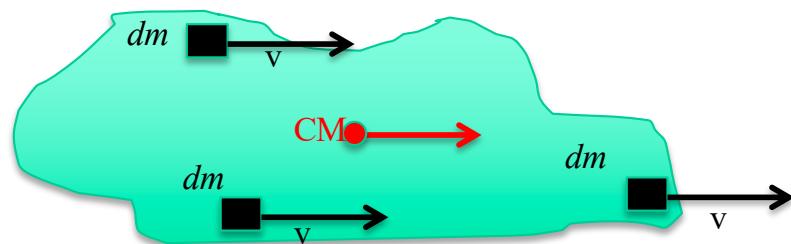


La quantità di moto di un corpo rigido è:

$$\vec{p}_{corpo\ rigido} = \vec{p}_{CM} = M \vec{v}_{CM} = M \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

Moto di pura traslazione: velocità

Traslazione: Ogni punto del corpo rigido si sposta della stessa quantità lungo una traiettoria parallela. In questo caso, il corpo rigido si muove come se tutte le sue particelle fossero vincolate a un singolo punto di riferimento.



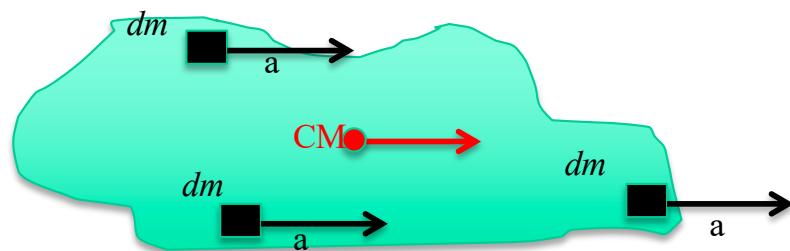
- Tutte le particelle che costituiscono il corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo.
- Tutti i punti del corpo rigido si muovono con la stessa velocità, \vec{v} , che coincide con la velocità del centro di massa:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM}$$

Moto di pura traslazione: accelerazione

Nel caso di pura traslazione, tutte le particelle hanno la stessa accelerazione, che è quella del centro di massa:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\int \vec{a} dm}{M} = \vec{a} \frac{\int dm}{M} \equiv \vec{a}$$



Come nel caso dei sistemi di punti materiali, abbiamo (prima equazione cardinale per il corpo rigido):

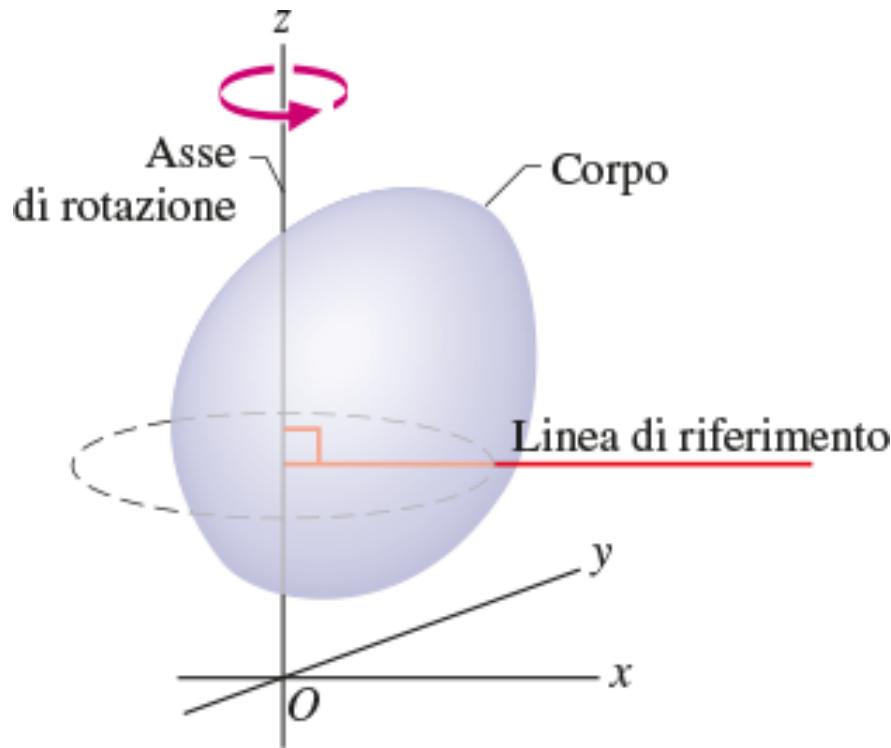
$$M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ris,ext}$$

- Il centro di massa di un corpo rigido si muove come un punto materiale di massa totale M soggetto alla sola risultante delle forze esterne.

Se la risultante delle forze esterne agenti sul corpo rigido è nulla, la velocità del centro di massa rimane costante in modulo, direzione e verso.

Moto di pura rotazione

Rotazione: Ogni punto del corpo rigido si muove lungo una traiettoria circolare attorno a un asse fisso. In questo caso, il corpo rigido ruota intorno a un asse di rotazione, e la velocità angolare è la stessa per tutte le particelle del corpo.



- La dinamica della rotazione è determinata dal teorema del momento angolare (seconda equazione cardinale per il corpo rigido):

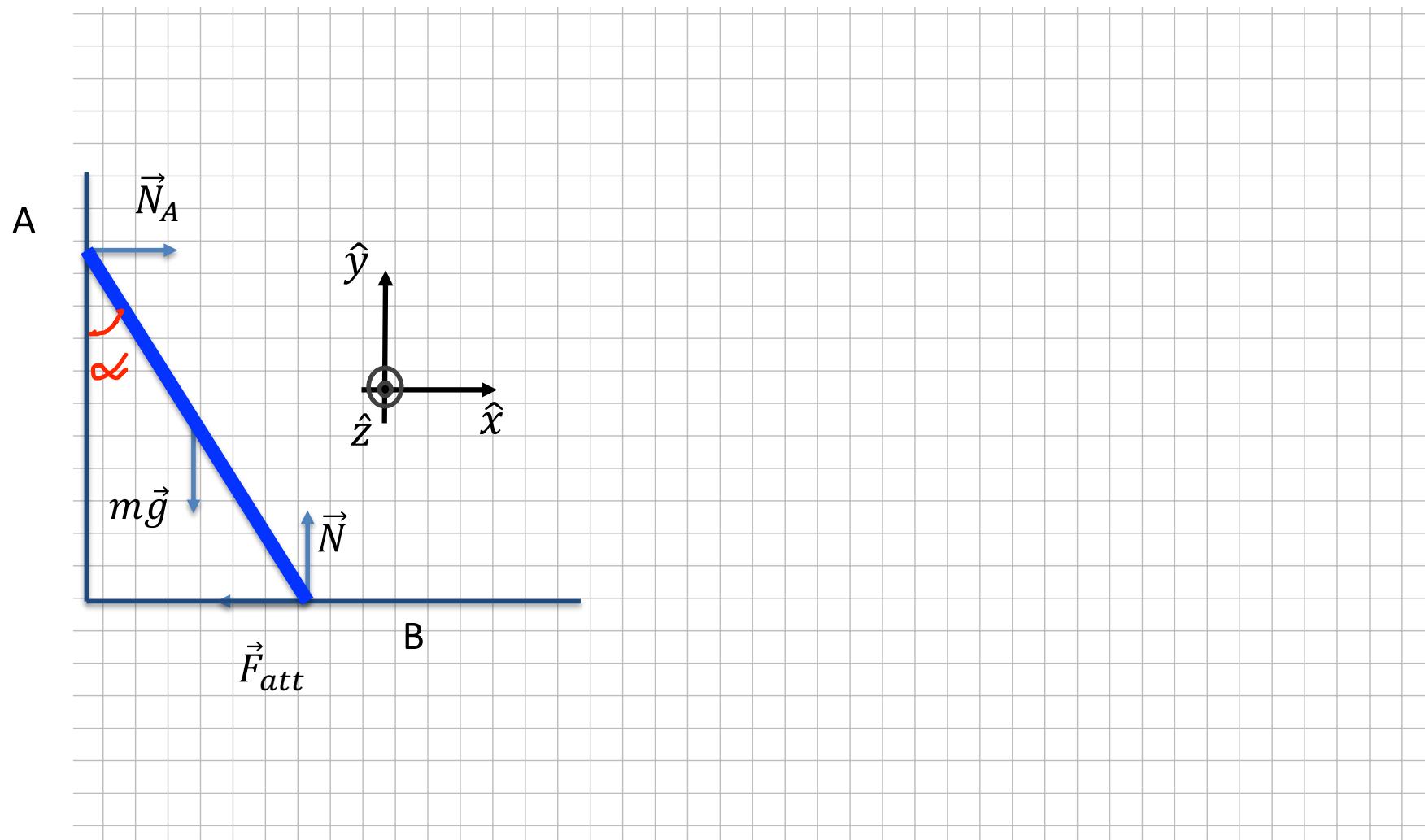
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i} = \vec{\tau}_{ext}$$

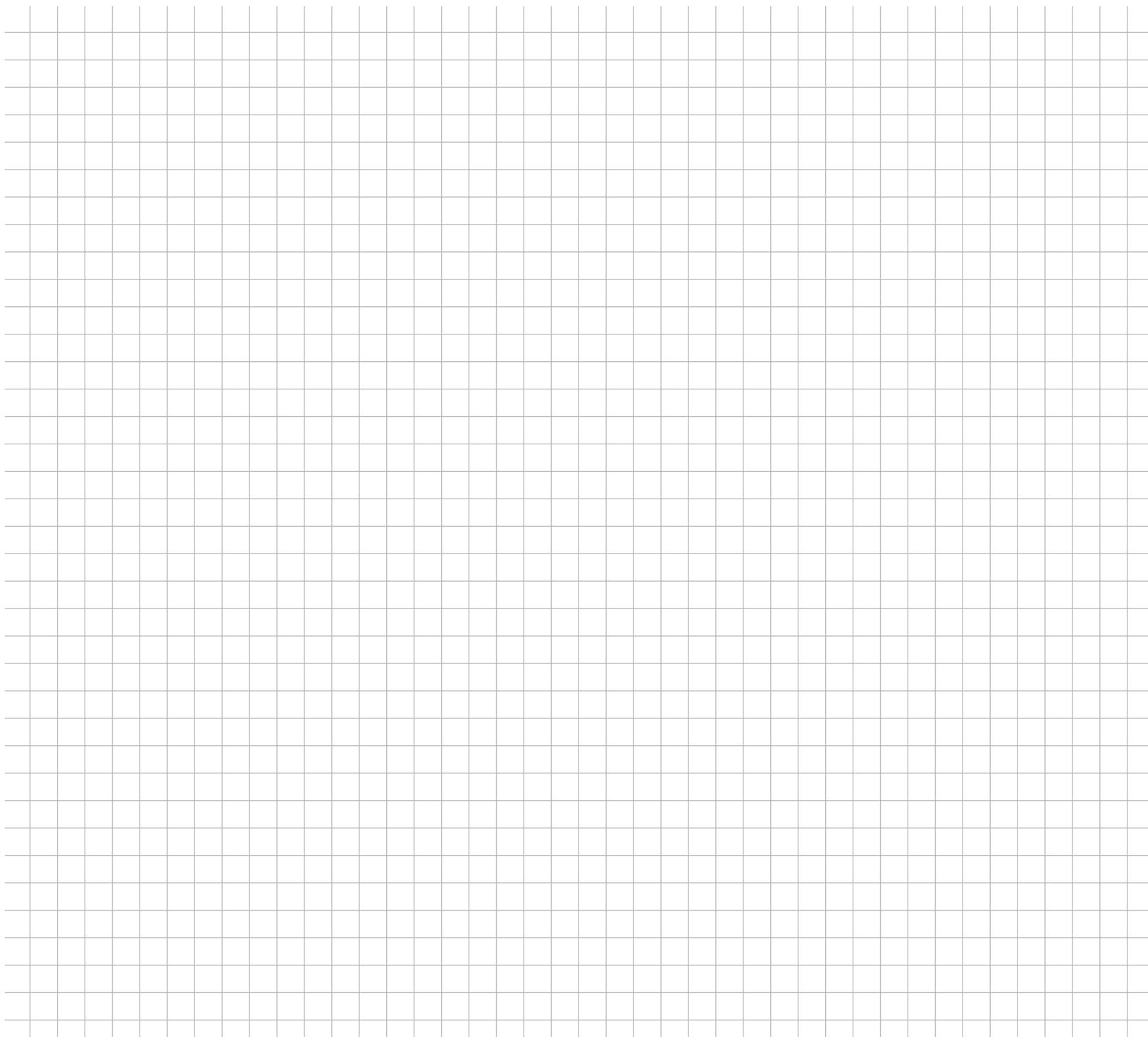
dove \vec{r}_i sono i punti di applicazione delle forze $\vec{F}_{ext,i}$.

Esercizio

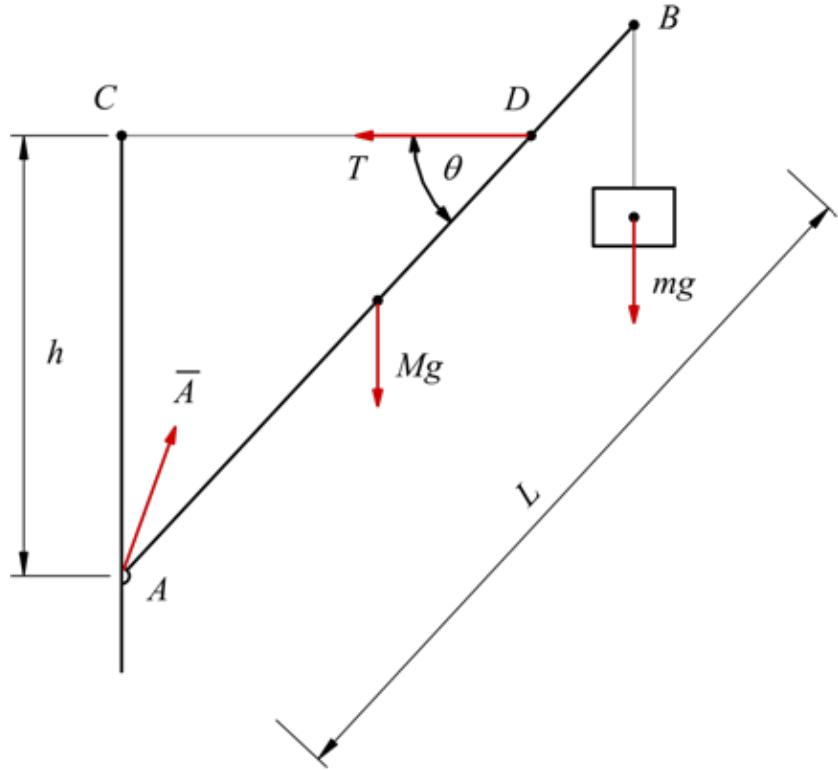
Un' asta di lunghezza l e massa m , è appoggiata su due pareti (una verticale e una orizzontale). Sul piano orizzontale è presente attrito ($\mu_s = 0.2$) mentre la parete verticale è liscia. Determinare:

- l'angolo massimo (α_{max}) di equilibrio.





Esercizio

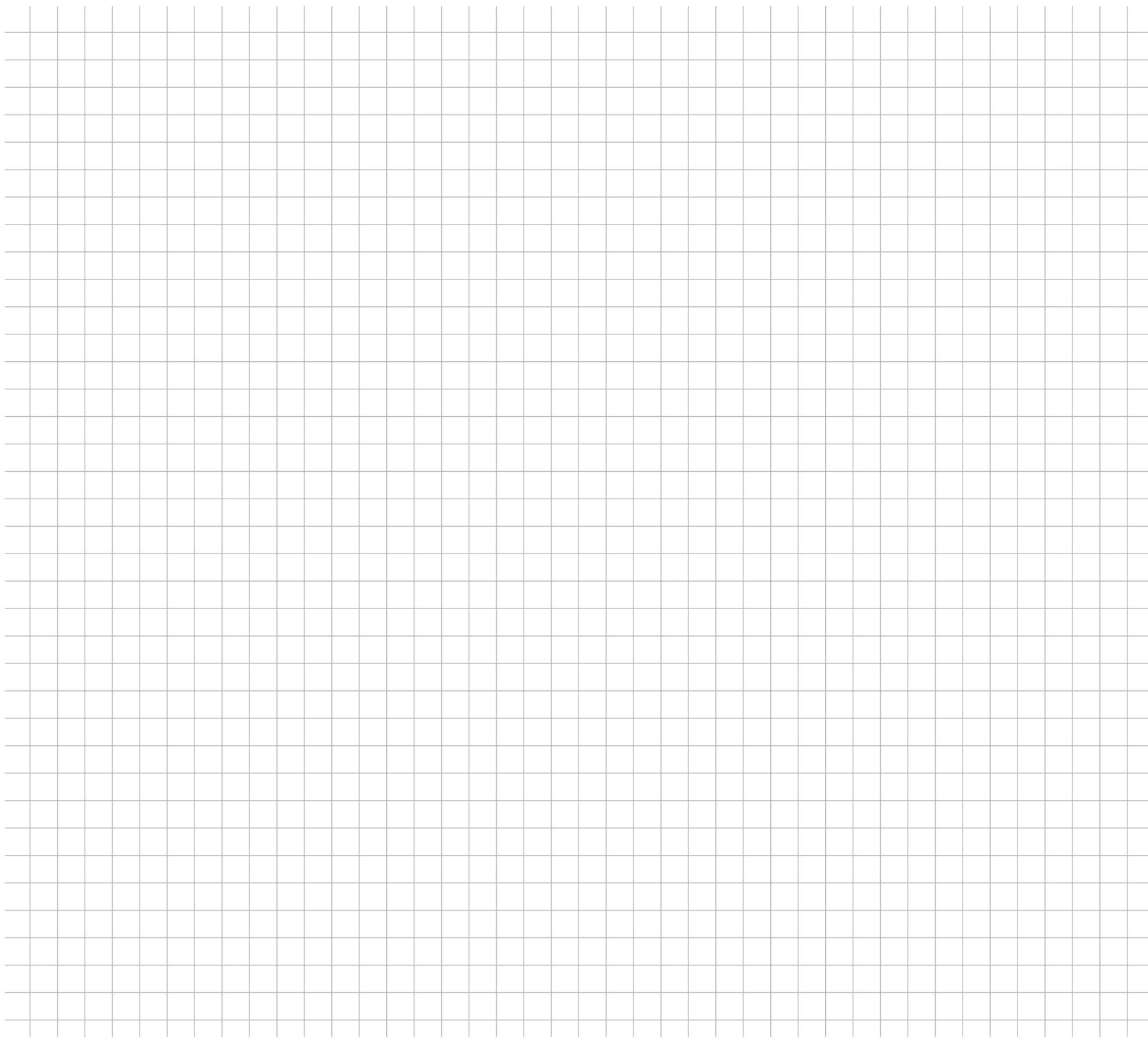


Una massa m è sostenuta nel sistema in figura da un'asta rigida di lunghezza L e di massa M .

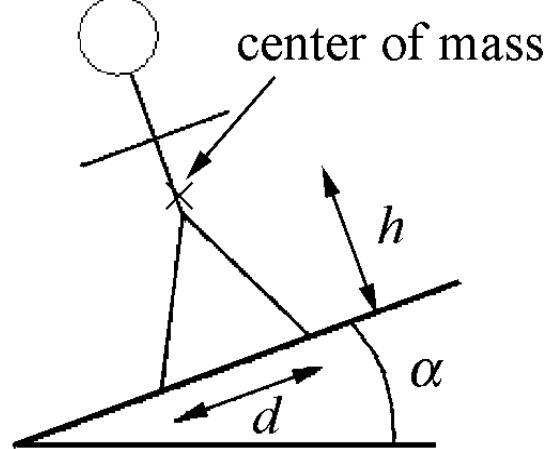
Il sistema è mantenuto in equilibrio grazie a un filo ideale, collegato alla parete nel punto C e all'asta in D in modo che sia orizzontale.

L'asta, è libera di ruotare attorno a un perno in A ed è inclinata di un angolo θ . La distanza AC è h . Determinare:

- La tensione del filo.
- La reazione del perno.

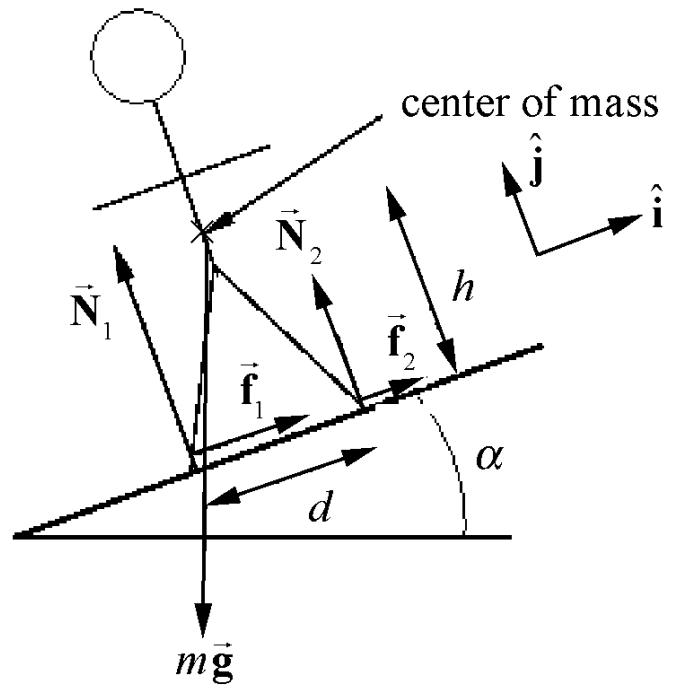


Esercizio



Una persona sta in piedi su una collina inclinata ad un angolo α rispetto all'orizzontale. Le gambe della persona sono separate da una distanza d , con un piede in alto e uno in basso lungo la pendenza. Il centro di massa della persona si trova ad una distanza h dal suolo, perpendicolare alla collina, a metà strada tra i piedi. Si assume che il coefficiente di attrito statico tra i piedi della persona e la collina sia sufficientemente alto da impedire lo scivolamento.

- Qual è il valore della forza normale su ciascun piede?
- A che distanza devono trovarsi i piedi affinché la forza normale sul piede più alto sia esattamente zero? Questo è il momento in cui la persona inizia a ruotare e a cadere.



Energia potenziale gravitazione per i corpi rigidi

Consideriamo un sistema di N particelle. Siano y_i le altezze delle particelle rispetto a un riferimento per il quale si ha $U_{grav}(0) = 0$. L'energia potenziale gravitazionale del sistema è:

$$U_{grav} = \sum_{i=1}^N m_i g y_i = g \sum_{i=1}^N m_i y_i = \frac{Mg}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i = Mgy_{CM}$$

Per un corpo rigido:

$$U_{grav} = Mgy_{CM},$$

con:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm$$

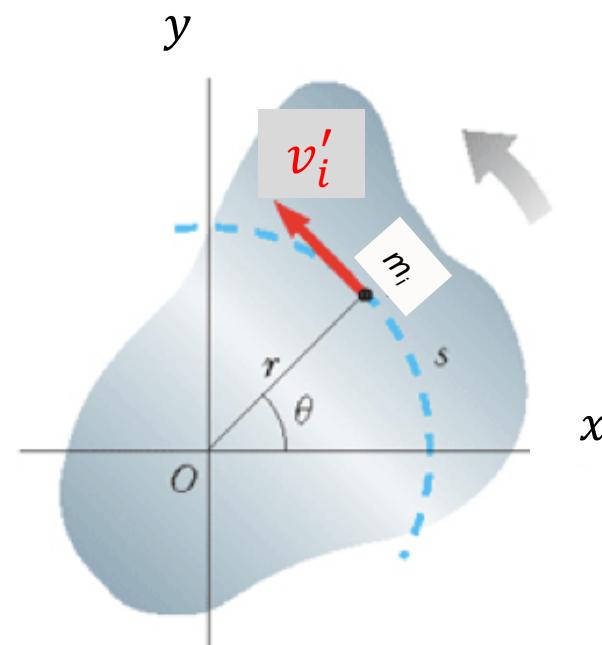
Cioè l'energia potenziale gravitazionale di un corpo rigido è la stessa di un punto materiale di stessa massa posto ad altezza y_{CM} .

Energia cinetica per i corpi rigidi

Applichiamo il teorema di Koenig per l'energia cinetica ad un corpo rigido che trasla e ruota attorno a un asse passante per il centro di massa:

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i'^2$$

In questo caso, ciascuna massa m_i descrive una circonferenza con velocità angolare ω su un piano ortogonale all'asse di rotazione (z nell'immagine). La velocità della singola massa rispetto al centro di massa, dal quale dista r_i , ha modulo $v_i' = \omega r_i$.



L'energia cinetica è:

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2.$$

Definiamo il momento di inerzia rispetto all'asse passante dal centro di massa:

$$I_{CM} = \sum_i m_i r_i^2,$$

otteniamo:

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = K_{tr} + K_{rot}.$$

Calcolo del momento di inerzia

Per un sistema di punti materiali, rispetto a un asse S :

$$I_S = \sum_i m_i r_i^2$$

Rispetto al centro di massa:

$$I_{CM} = \sum_i m_i (r'_i)^2$$

Per un corpo rigido continuo, rispetto a un polo S :

$$I_S = \int r^2 dm = \int r^2 \rho(r) dV$$

Rispetto al centro di massa:

$$I_{CM} = \int (r')^2 dm = \int (r')^2 \rho(r') dV'$$

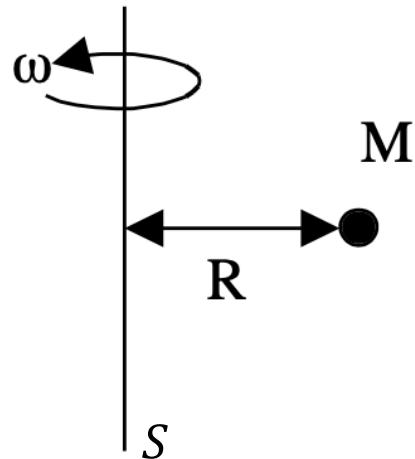
Per un corpo rigido omogeneo, rispetto a un polo S :

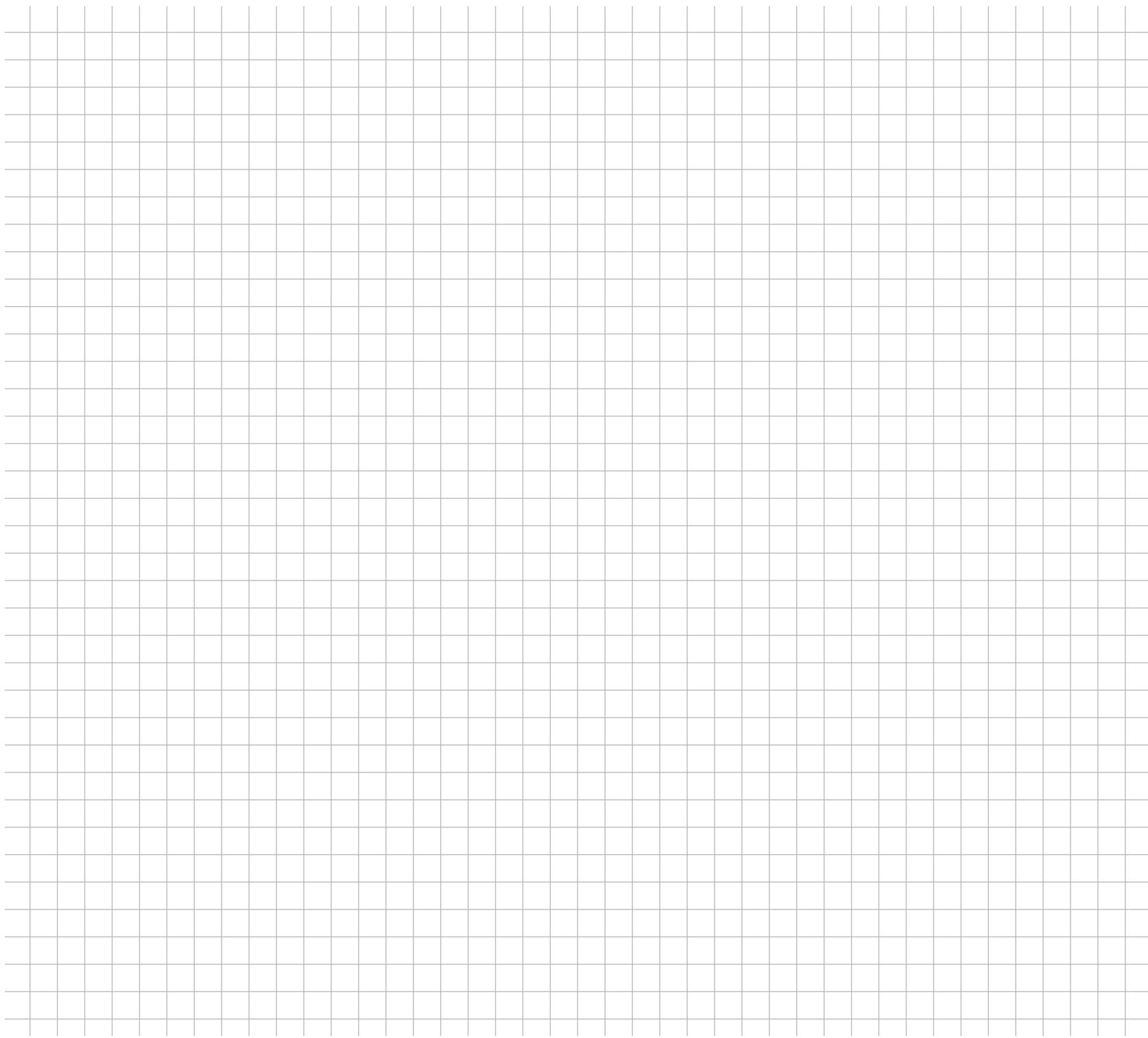
$$I_S = \rho \int r^2 dV$$

Rispetto al centro di massa:

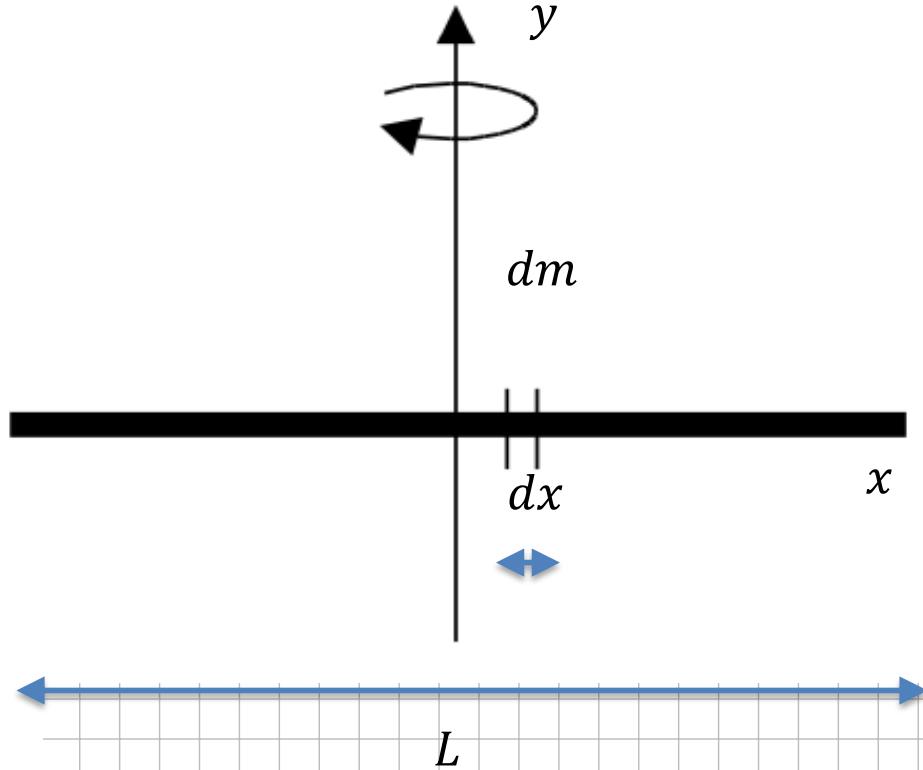
$$I_{CM} = \rho \int (r')^2 dV'$$

Esempio: momento di inerzia di un punto materiale

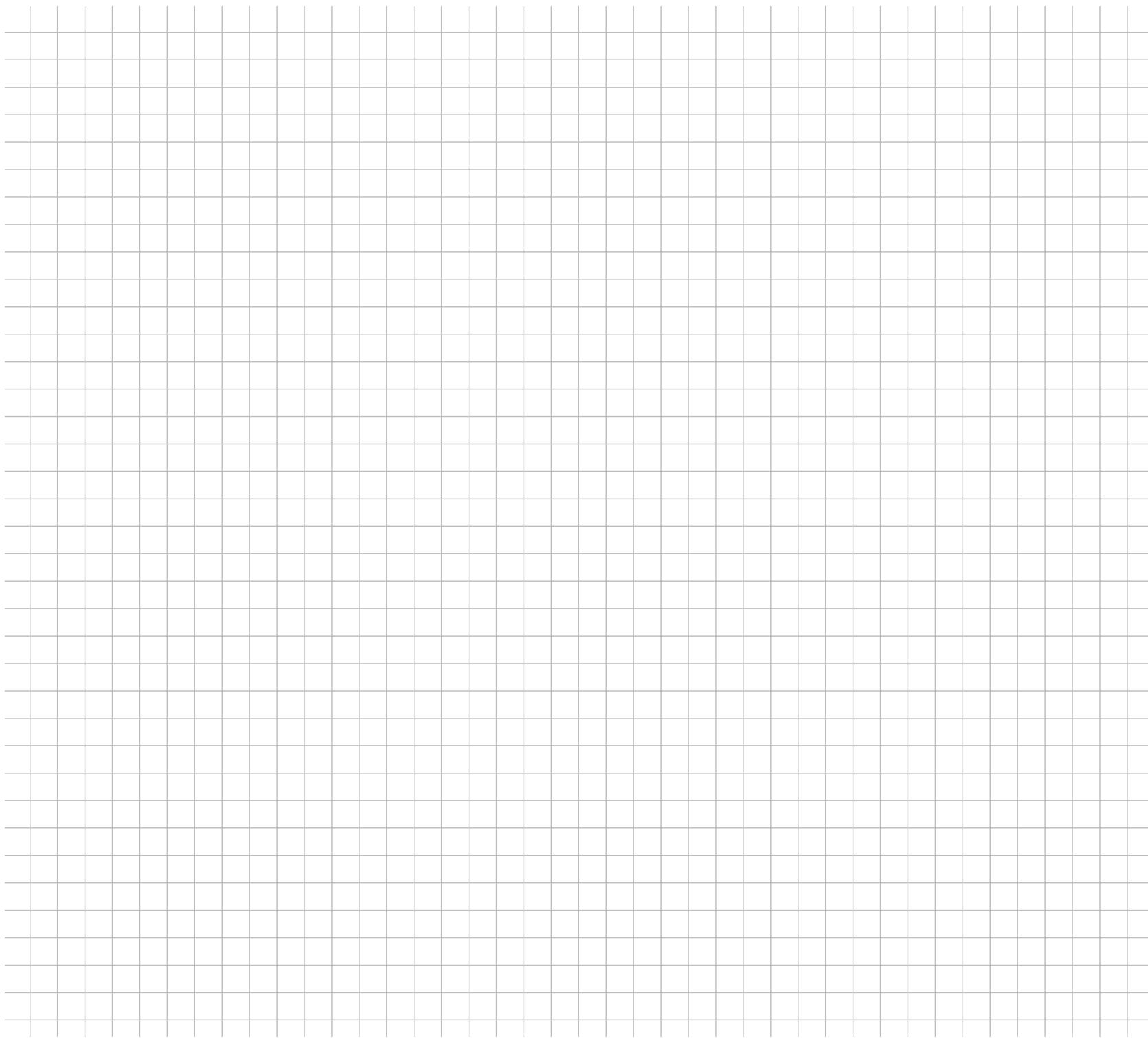




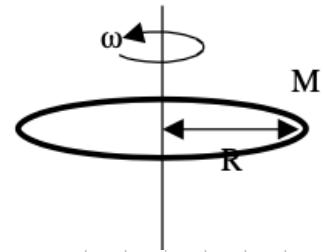
Esempio: momento di inerzia di una sbarra

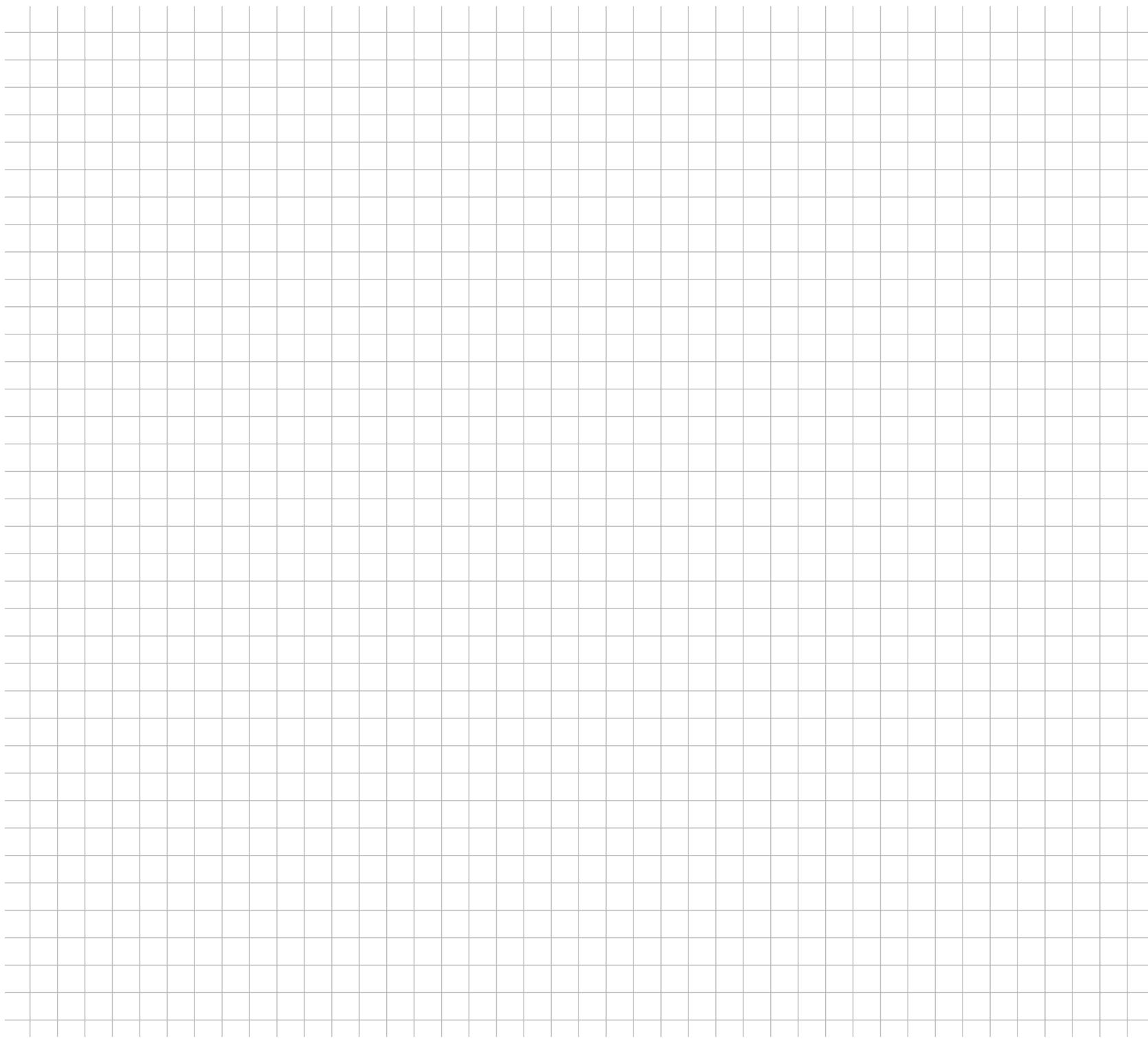


Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse y (passante per il centro di massa) per una sbarra sottile di lunghezza L e massa M .

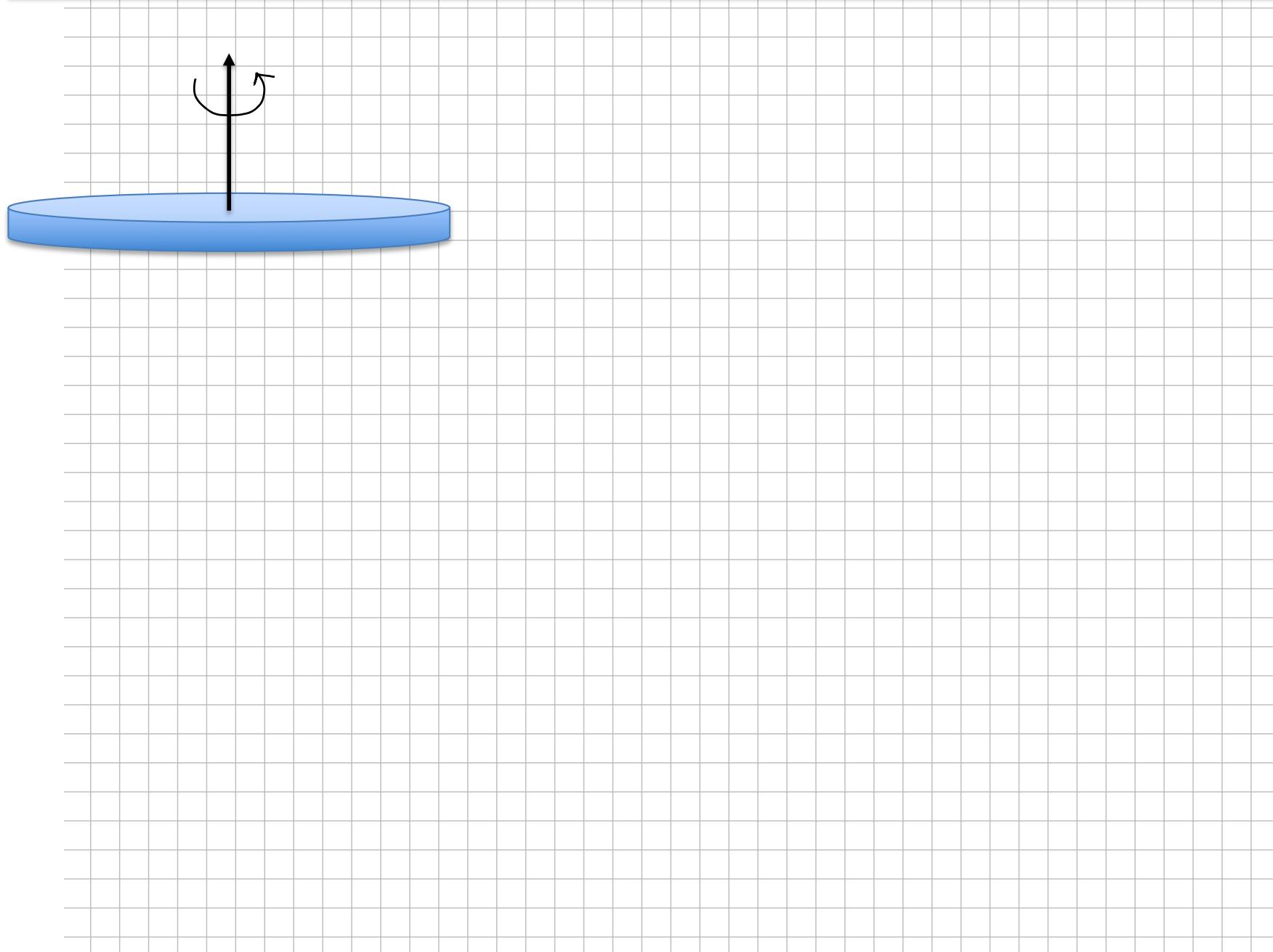


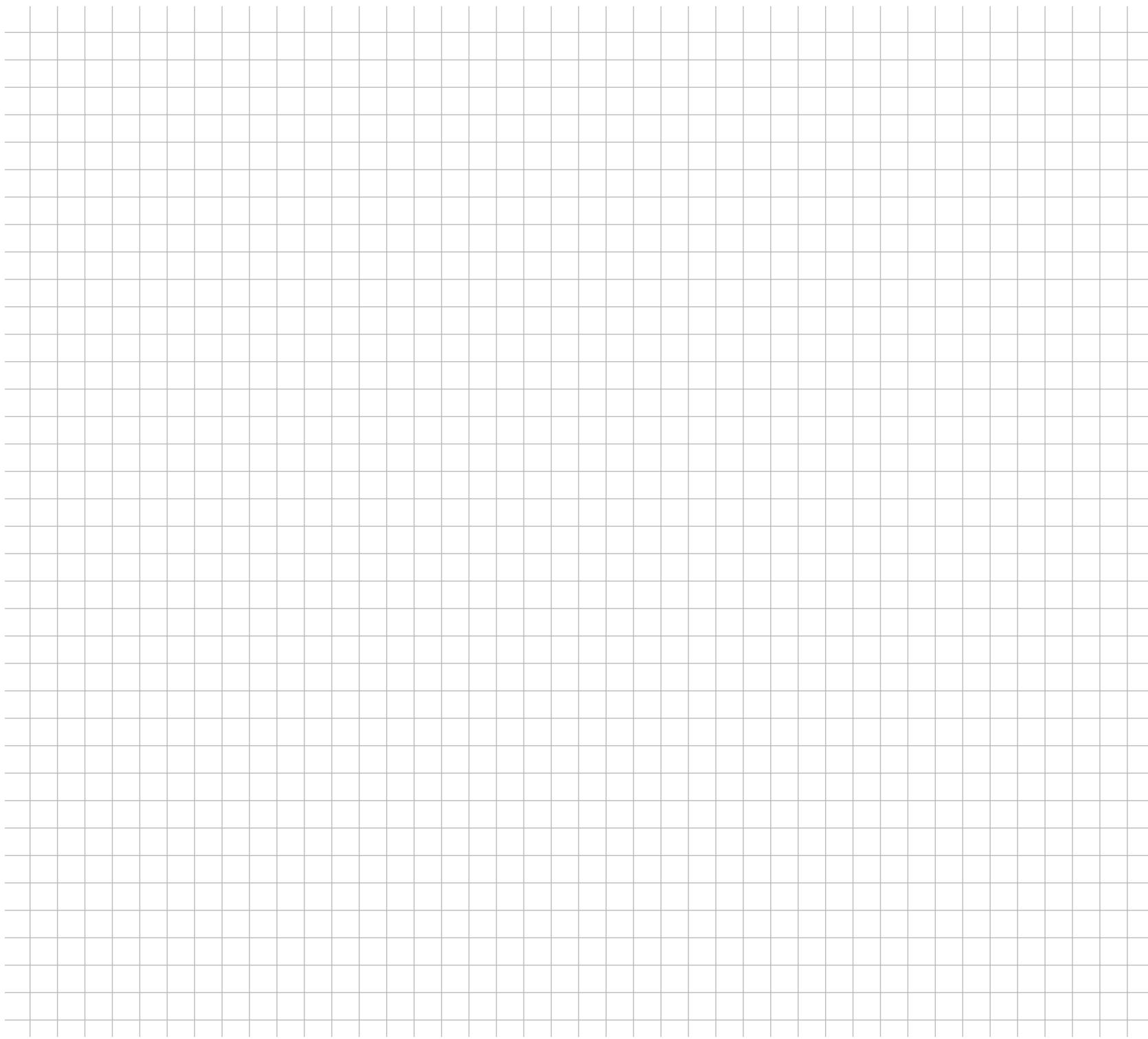
Esempio: momento di inerzia di un anello



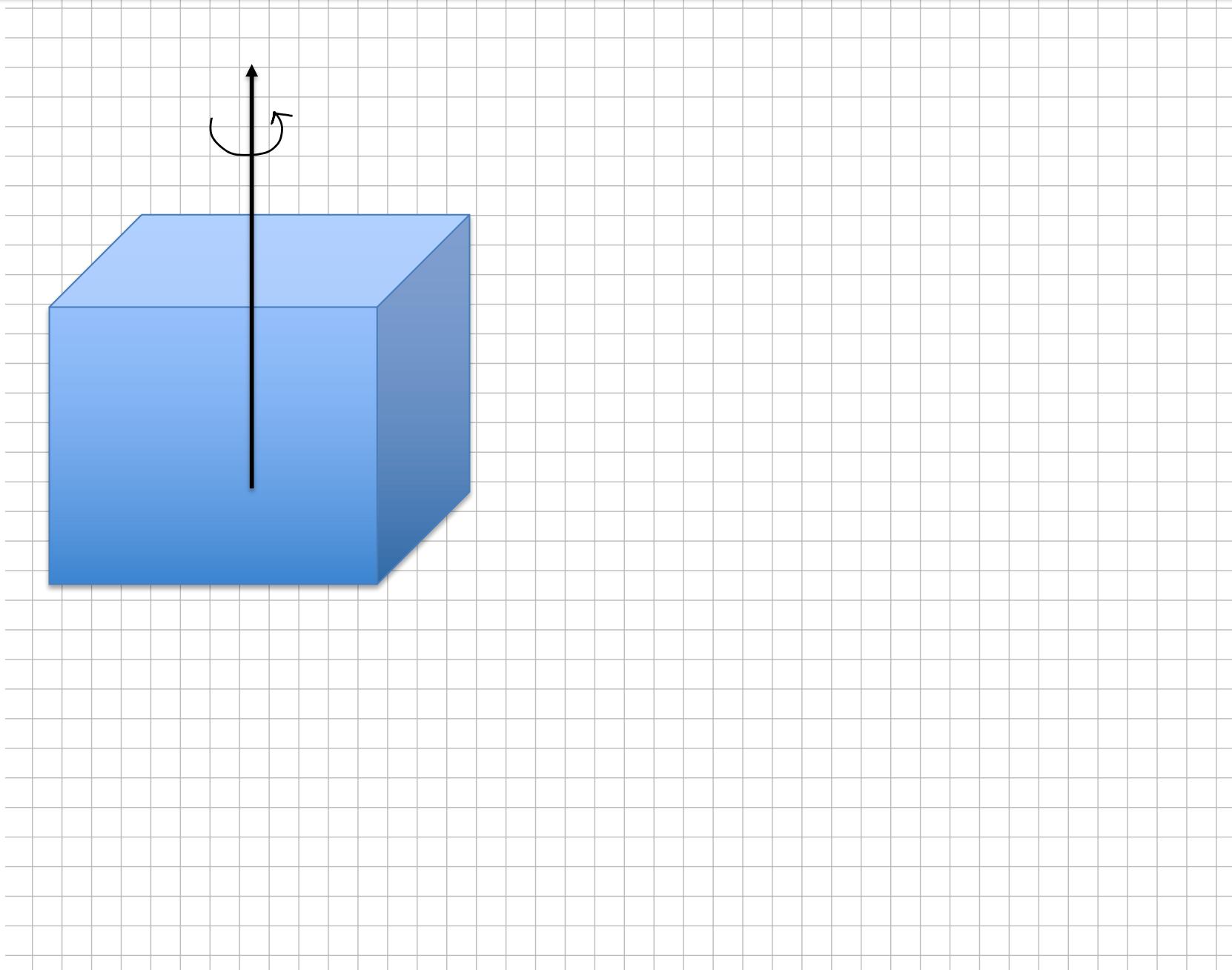


Esempio: momento di inerzia di un disco omogeneo





Esempio: momento di inerzia di un cubo omogeneo



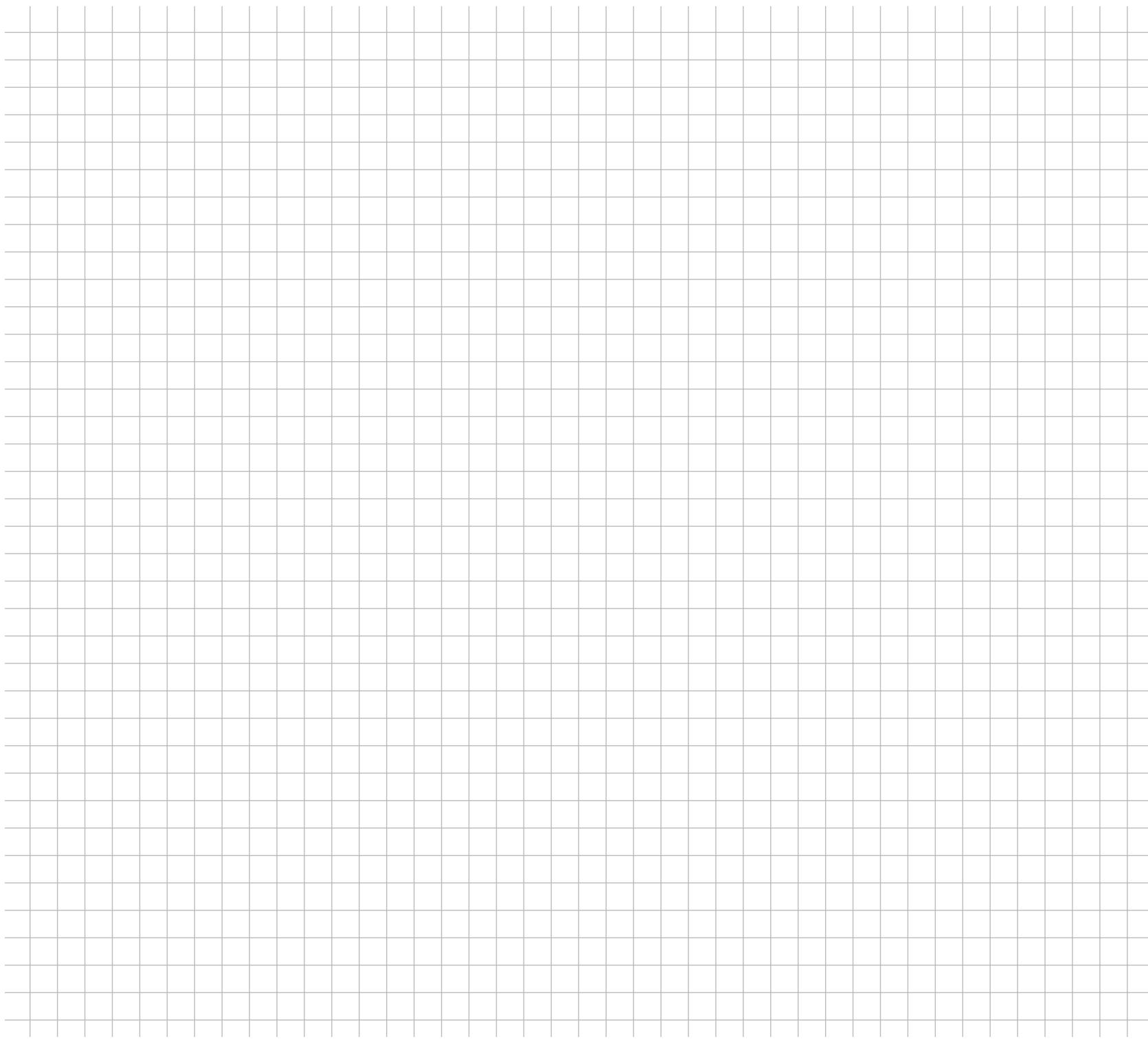
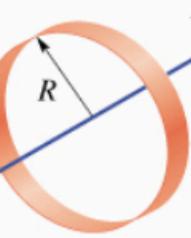
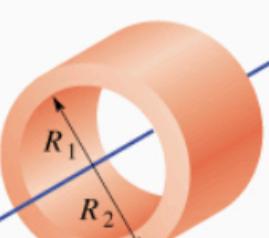
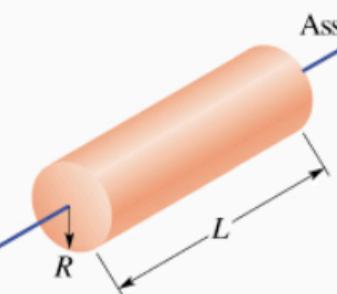
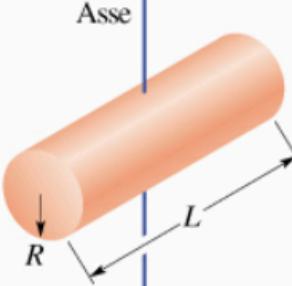
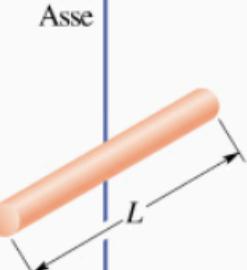
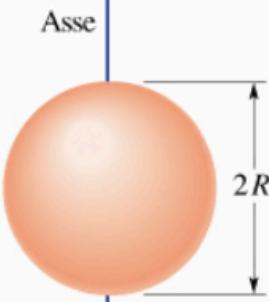
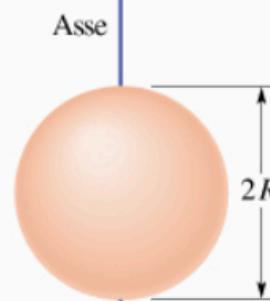
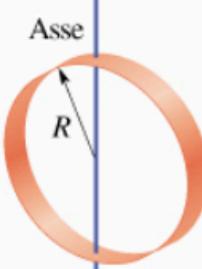
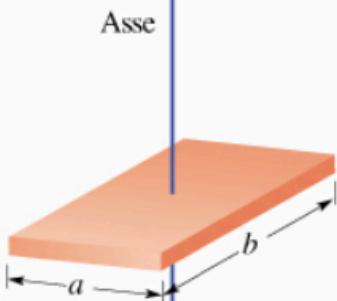


Tabella momenti di inerzia

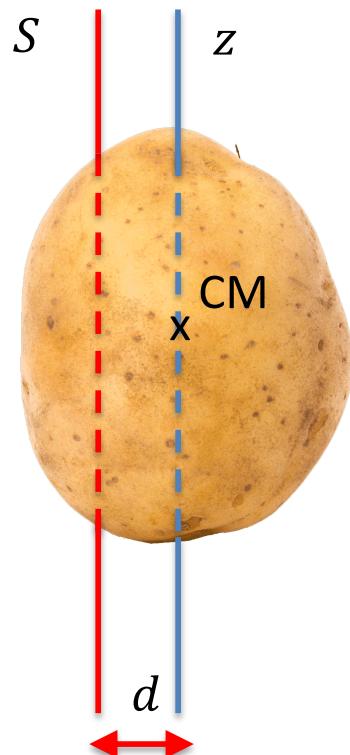
 <p>Anello rispetto all'asse centrale</p> $I = MR^2$	 <p>Cilindro anulare rispetto all'asse centrale</p> $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	 <p>Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse centrale</p> $I = \frac{1}{2}MR^2$
 <p>Cilindro pieno (o disco) rispetto a un diametro passante per il centro</p> $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$	 <p>Barra sottile rispetto a un asse passante per il centro e perpendicolare alla lunghezza</p> $I = \frac{1}{12}ML^2$	 <p>Sfera piena rispetto a un diametro</p> $I = \frac{2}{5}MR^2$
 <p>Sfera cava (o guscio) sottile, rispetto a un diametro</p> $I = \frac{2}{3}MR^2$	 <p>Anello rispetto a un diametro</p> $I = \frac{1}{2}MR^2$	 <p>Lastra rispetto a un asse perpendicolare passante per il centro</p> $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

Teorema di Steiner o degli assi paralleli

Consideriamo un corpo rigido che ha momento di inerzia I_{CM} rispetto ad un asse z passante per il centro di massa.

Il teorema di Steiner afferma che il momento di inerzia I_S rispetto ad un asse S parallelo z e distante d da questo, è dato da:

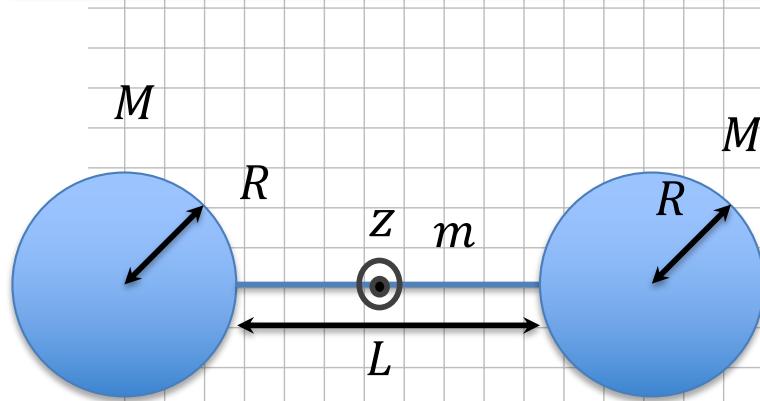
$$I_S = I_{CM} + Md^2$$



Dimostrazione del teorema di Steiner

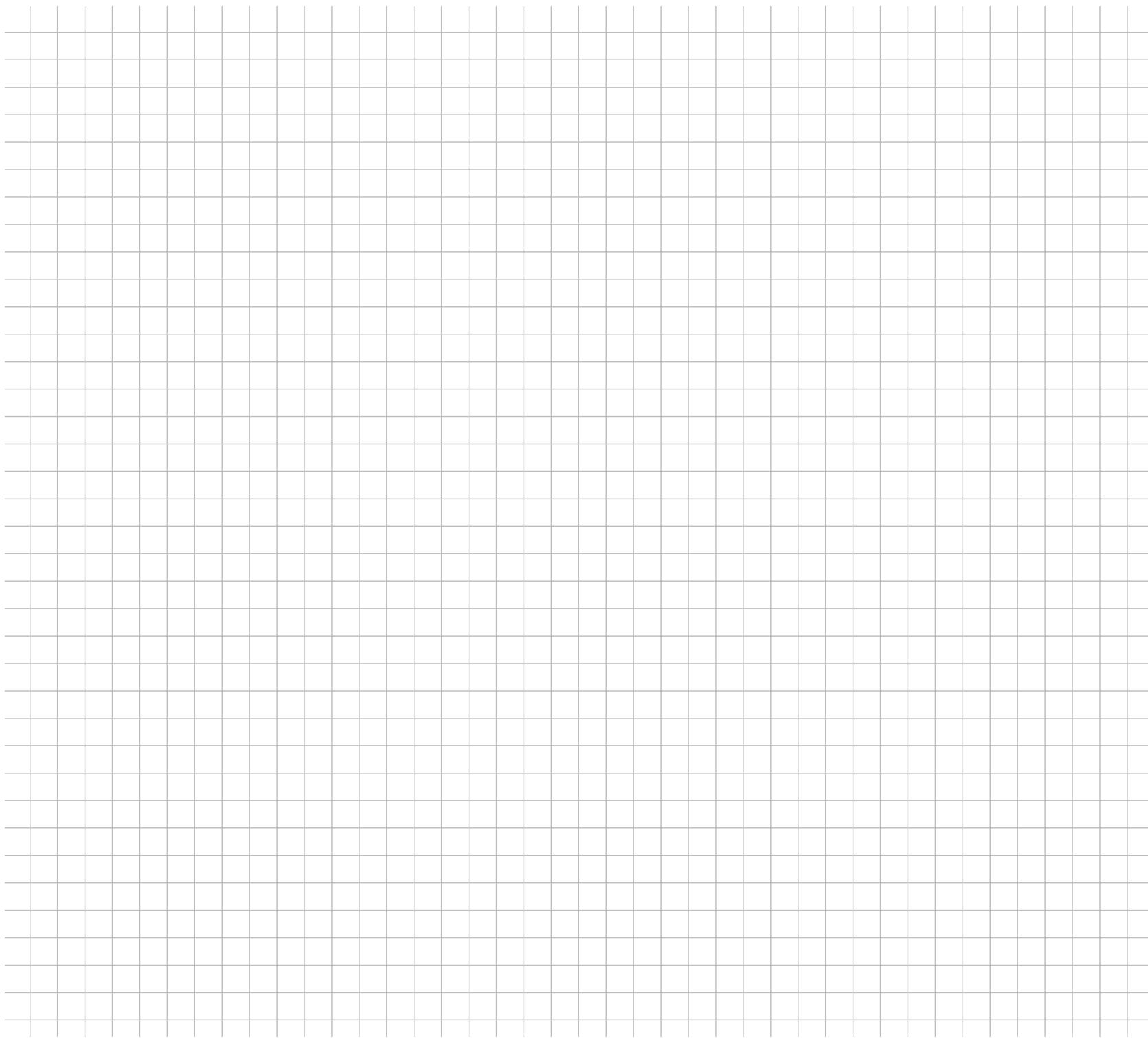


Esercizio



Un corpo rigido è costituito da 2 sfere di massa M e raggio R collegate da un'asta lunga L e di massa m disposta lungo la retta che congiunge i centri delle 2 sfere. Asta e sfere sono omogenee.

- Calcolare il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa dell'asta e ortogonale a questa (asse z).



Momento angolare per pura rotazione

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno all'asse z con velocità angolare:

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$$

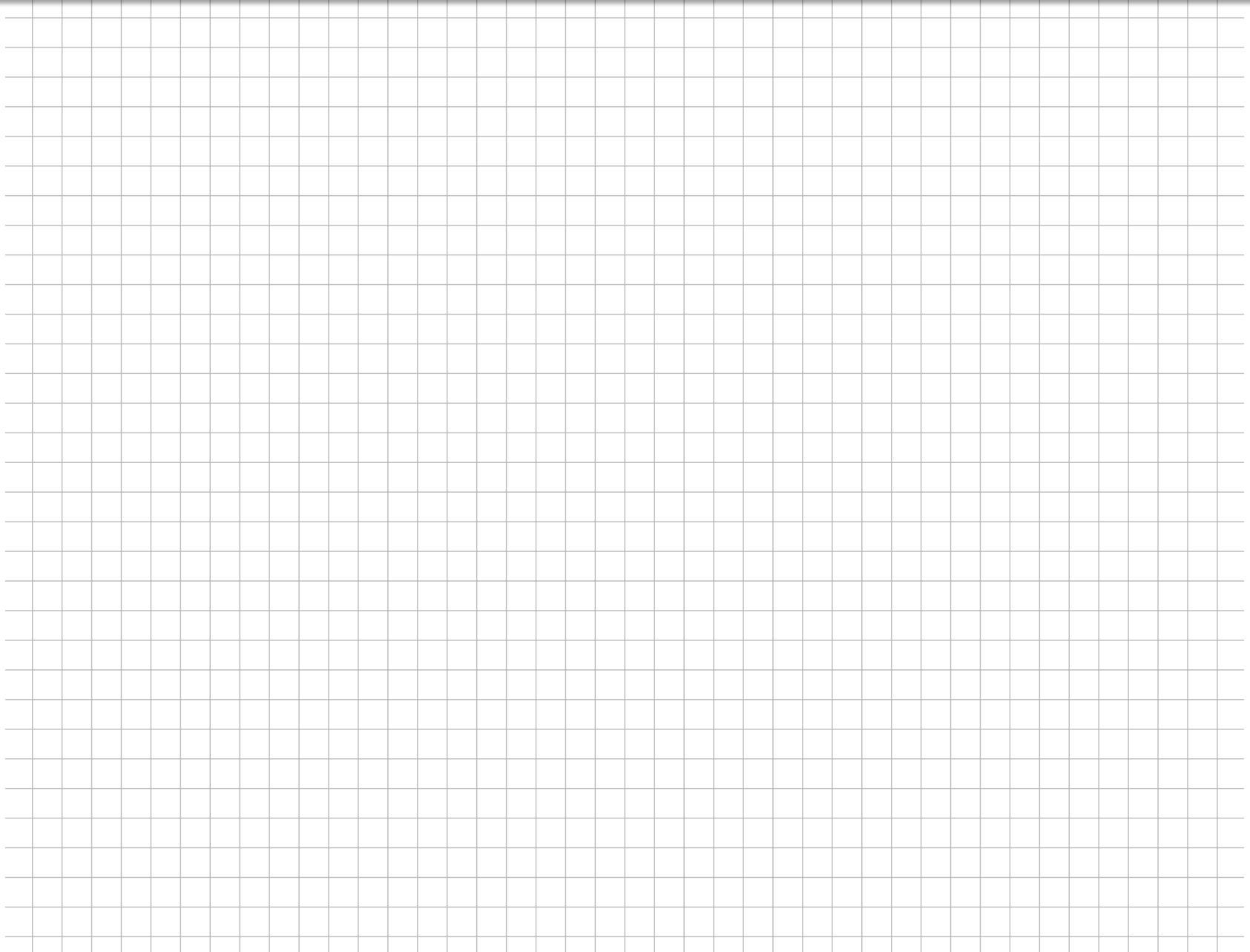
Per la componente assiale, rispetto all'asse di rotazione, del momento angolare del corpo si ha:

$$L_z = \omega_z I_z$$

Dove I_z è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z. Nel caso che il corpo sia simmetrico rispetto all'asse di rotazione, abbiamo:

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} = I_z \omega_z \hat{k}$$

Dimostrazione



Equazione del moto di rotazione

Supponiamo che (corpo simmetrico rispetto all'asse di rotazione z):

$$\vec{L} = L_z \hat{z} = I_z \vec{\omega}$$

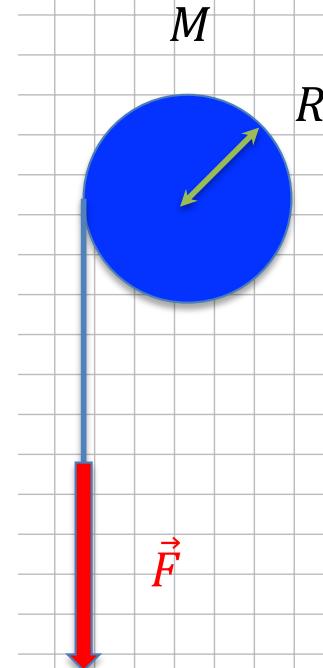
Abbiamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = I_z \vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

Quindi se conosciamo il momento delle forze (esterne) agenti rispetto all'asse fisso di rotazione e il momento di inerzia rispetto a quell'asse, possiamo calcolare l'accelerazione angolare e da questa possiamo ricavare le relazioni cinematiche tra θ , ω e α .

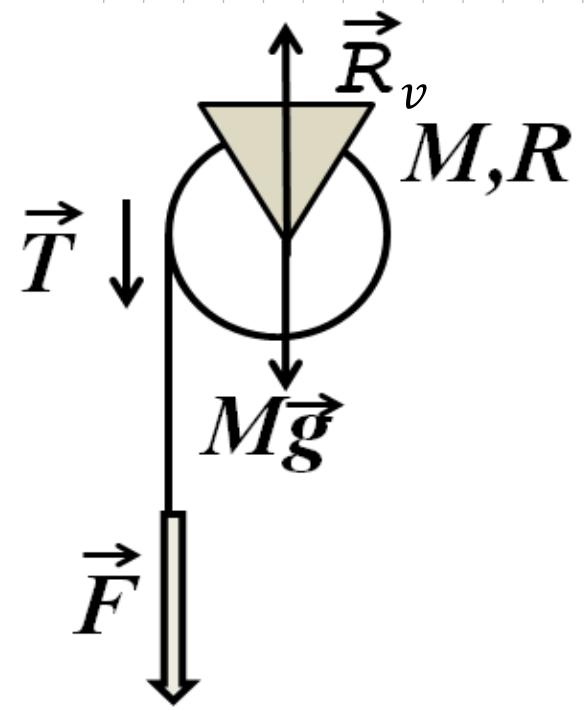
Considereremo sempre rotazioni attorno ad assi principali (assi rispetto ai quali la distribuzione di massa di un corpo rigido è simmetrica) o ad essi paralleli.

Esercizio

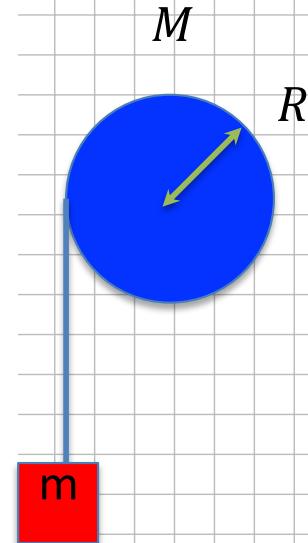


Su una carrucola assimilabile a un disco omogeneo, di massa M e raggio R , vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale, scorre una fune di massa trascurabile. La fune è tirata da una forza \vec{F} verticale e rimane aderente alla carrucola.

- Calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ della carrucola.

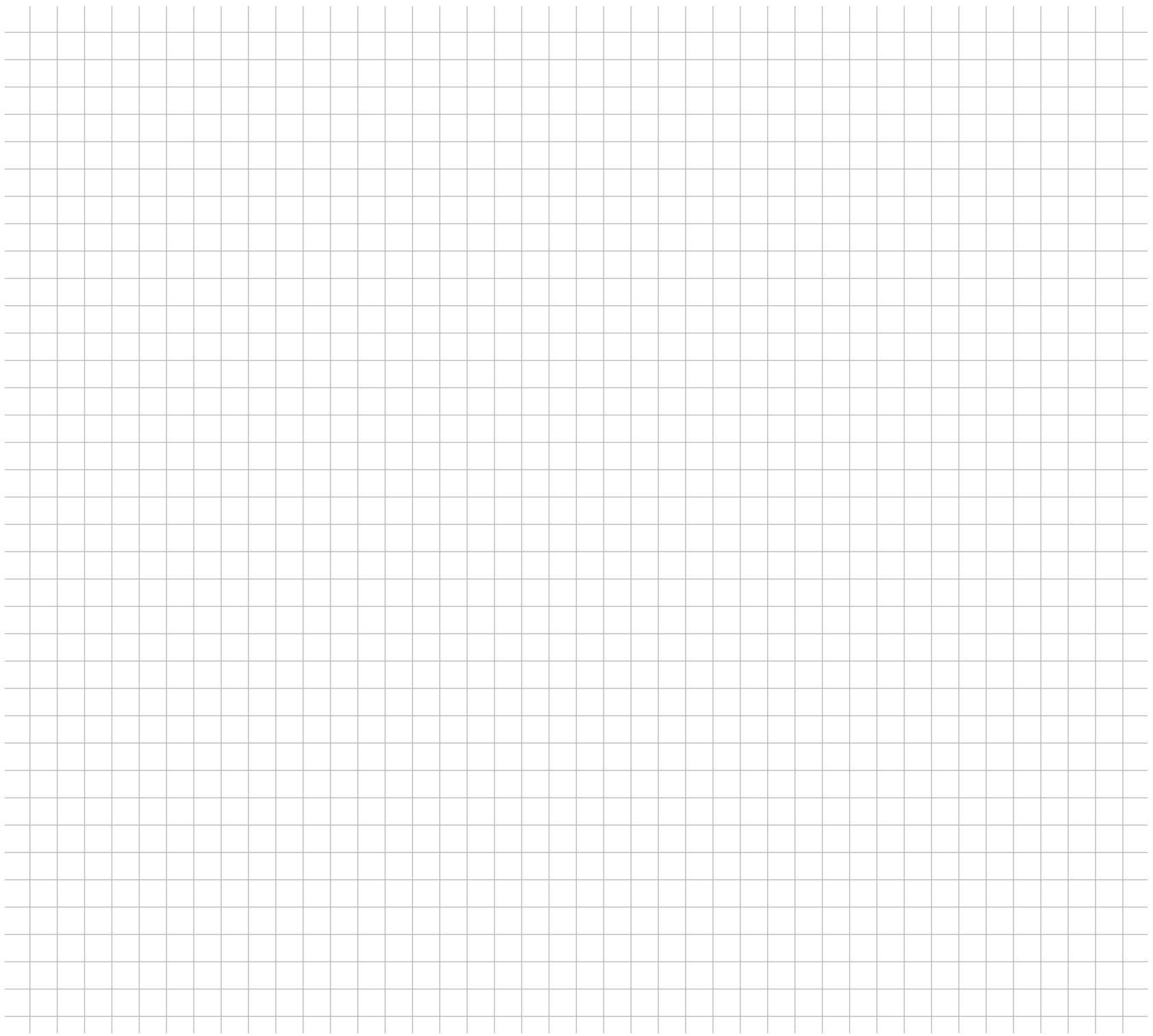


Esercizio

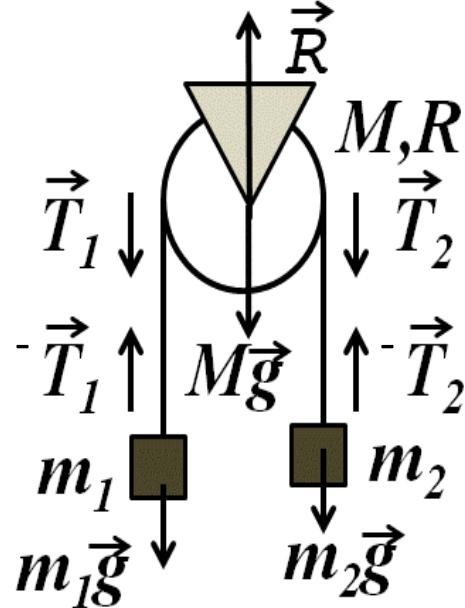


Su una carrucola di massa M e raggio R , assimilabile a un disco omogeneo, vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale, scorre una fune di massa trascurabile. Alla fune è sospeso un corpo di massa m soggetto all'azione della gravità e la fune rimane aderente alla carrucola.

- Calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ della carrucola.



Esercizio



Sia dato un sistema formato da una carrucola di massa M e raggio R , vincolata a ruotare intorno ad un asse orizzontale senza attrito, su cui scorre senza slittare una corda di massa trascurabile.

Alle estremità della corda sono appese due masse, di valori m_1 e m_2 . Calcolare:

- l'accelerazione delle due masse;
- l'accelerazione angolare della carrucola;
- le tensioni dei fili.

