# Matematica - Esame orale
# Passerella 2023-24

Matteo Frongillo, Paolo Bettelini

19 maggio 2024

## Indice

# Parte I

# Analisi

## 1 Limiti

### 1.1 Concetto di limite di una funzione reale (interpretazione geometrica)

#### 1.1.1 Determinare la definizione formale di limite

**Definizione** Limite di una funzione reale

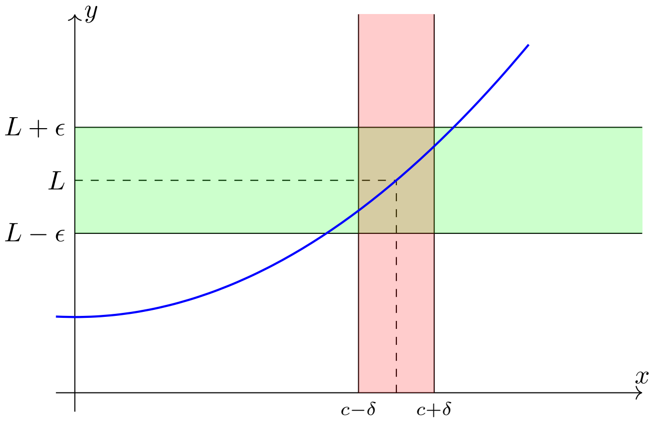
Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, il limte

$$L = \lim_{x \to c} f(x)$$

esiste se dato un $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, esiste un altro valore $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

#### 1.1.2 Disegnare geometricamente il limite:




A parole possiamo dire che il limite esiste (ed è pari ad un valore che chiamiamo $L$) se la seguente condizione è soddisfatta:

1. Scegliamo un $\epsilon$ arbitrariamente piccolo e costruiamo l'intervallo $[L - \epsilon; L + \epsilon]$. Questo intervallo è un range attorno al valore effettivo del limite, ossia un intervallo nell'immagini della nostra funzione, come da disegno (striscia verde).
2. Se il limite esiste effettivamente, allora possiamo trovare un'altro intervallo (questa volta nel dominio, ossia sull'asse x al posto che sull'asse y) tale che le *immagini* della funzione date dalle x in questo intervallo, siano un sottoinsieme dell'intervallo $[L - \epsilon; L + \epsilon]$. Questo intervallo è rappresentato dalla striscia rossa nel disegno, e possiamo definirne la grandezza scegliendo un $\delta > 0$.

In maniera informale, possiamo dire che il limite esiste se per ogni striscia verde (arbitrariamente piccola), esiste una striscia rossa tale che le immagini della striscia rossa facciano interamente parte della striscia verde. Ciò viene precisamente espresso dall'espressione

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Che significa: Quando ci troviamo nella striscia rossa ($0 < |x - c| < \delta$), ossia quando la distanza assoluta dal punto del limite $c$ è minore di $\delta$, allora avremo necessariamente la condizione che le immagini si trovino nella striscia verde ($|f(x) - L| < \epsilon$), ossia che la differenza fra i valori della funzione nei nostri punti e il valore del limite effettivo sia minore di $\epsilon$.

**Importante:** non è strettamente necessaria che la funzione $f(x)$ sia definita al punto (c), ma solo attorno.

## 1.2 Asintoti

### 1.2.1 Definizione generale

**Definizione** Asintoto

Un *asintoto* di una curva è una retta tale che quando la funzione tende a un certo valore, finito o infinito, la distanza tra la retta e la funzione tende a 0 sia nelle coordinate x e y.

**Importante:** una funziona potrebbe presentare un asintoto orizzontale o obliquo solo nella direzione positiva o negativa, o due asintoti diversi nelle direzioni positive e negative. Gli asintoti obliqui e orizzontali non sono quindi necessariamente simmetrici.

### 1.2.2 Come trovare gli asintoti orizzontali

Bisogna verificare che il limite della funzione all'infinito o meno infinito sia finito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a \neq \pm\infty$$

In questo caso avremo quindi un asintoto orizzontale $y = a$ verso destra, sinistra o ambo le direzioni.

### 1.2.3 Come trovare gli asintoti obliqui

Per studiare gli asintoti obliqui dobbiamo studiare più in generale il concetto di equivalenza asintotica.

**Definizione** Equivalenza sintotica

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di $x_0$ e $g(x) \neq 0$ se $x \neq x_0$. Diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ sono asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$ se il loro rapporto tende ad 1:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Per gli asintoti obliqui dobbiamo considerare l'equivalenza asintotica per $x \to \pm\infty$. Senza perdita di generalità, abbiamo un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se la funzione è asintotica ad una retta $y = mx + q$ per $x \to +\infty$. L'asintoto è quindi presente se

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{mx} = 1$$

Dal momento che non conosciamo la pendenza $m$ possiamo scrivere

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

e controllare che $m$ sia un numero finito. È da notare come abbiamo tralasciato il termine $q$ in quanto l'equivalenza asintotica ne è indipendente.

Una volta stabilistico che $f(x)$ è asintoticamente equivalente ad una retta con pendenza $m$, possiamo trovare l'ordinata all'origine $q$ calcolando la differenza fra $f(x)$ e $mx + q$ con $x \to \infty$.

$$q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

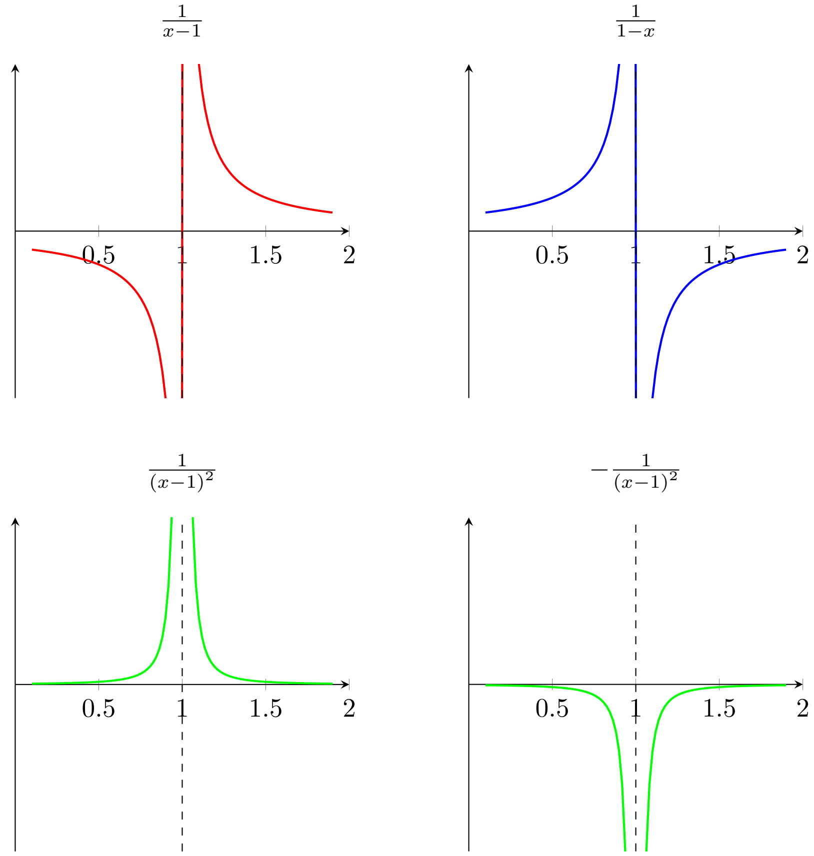
E per cui abbiamo stabilito la presenza di un asintoto obliquo verso destra con funzione $y = mx$.

### 1.2.4 Come trovare gli asintoti verticali

Per trovare gli asintoti verticali bisogna guardare il limite tendente da destra e da sinistra al punto di interesse, e verificare che i due limiti siano $+\infty$ o $-\infty$ (non necessariamente simmetrici).

In tal caso abbiamo un asintoto verticale con funzione $x = a$ dove $a$ è il punto di interesse.

Ci sono quindi quattro tipi di geometria attorno all'asintoto a seconda del valore dei limiti.




Oltre a questi tipi di geometria, è possibile che la funzione tenda a $\pm\infty$ solo da una parte, come per esempio la funzione $y = \ln(x)$.

## 1.3 La continuità di una funzione reale (esempi di discontinuità)

### 1.3.1 Definizione di funzione continua

**Definizione** Continuità di una funzione reale

Data una funzione reale $f(x)$, la funzione è continua nel punto $x = c$ se

$$\lim_{x \to c} = f(c)$$

In altre parole la funzione è continua nel punto se il limite esiste (sia da destra che da sinistra, coincidendo) e la funzione è in qul punto è equivalente al valore del limite. Una funzione è continua in un intervallo se è continua in tutti i punti dell'intervallo.

### 1.3.2 Esempi di funzione continua

1. La funzione $f(x) = x^4$ ha come $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$ e $f(0) = 0$:
   $\rightarrow$La funzione è continua nel punto 0.

### 1.3.3 Esempi di funzione discontinua

1. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è continua poiche $f(0) =$ indeterminato.
   Essa è però continua localmente in tutti gli intervalli che non comprendono il suo asintoto verticale, come ad esempio l'intervallo $x \in [1, +\infty[$.
2. Generalmente, se si moltiplica una funzione $f(x) \cdot \frac{x}{x}$, la funzione rimane la stessa ma si introduce un punto di discontinuità in 0, poiché il limite a 0 potrebbe esistere ma la funzione è indeterminata in quel punto indeterminato.

## 1.4 Calcolo di limiti (somma, prodotto, ...)

### 1.4.1 Lista delle proprietà dei limiti

Assumiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano due funzioni reali, che $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ esistano dove $c \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathrm{Dom}_f, a \in \mathrm{Dom}_g$:

1. **Linearità:**

   $$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$$

   In altre parole, possiamo "estrarre" una costante moltiplicativa da un limite.

2. **Somma e sottrazione:**

   $$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

   Quindi, per calcolare il limite di una somma o differenza, basta prendere il limite delle singole parti e poi sommarle o sottrarle con il segno appropriato. Questo fatto vale per qualsiasi numero di funzioni separate da "+" o "-".

3. **Moltiplicazione:**

   $$\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

   Calcoliamo i limiti dei prodotti allo stesso modo in cui calcoliamo i limiti delle somme o differenze. Prendiamo semplicemente il limite delle singole parti e poi le moltiplichiamo. Anche in questo caso, questo fatto non è limitato a solo due funzioni.

4. **Divisione:**

   $$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad \text{purché } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

   Come indicato nella frase, dobbiamo preoccuparci solo del limite nel denominatore che tende a zero quando calcoliamo il limite di un quoziente. Se fosse zero, avremmo un errore di divisione per zero che dobbiamo evitare.

5. **Potenza:**

   $$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n, \quad \text{dove } n \text{ è un numero reale}$$

   In questa proprietà, $n$ può essere qualsiasi numero reale (positivo, negativo, intero, frazione, irrazionale, zero, ...). Nel caso in cui $n$ sia un numero intero, questa regola può essere vista come un'estensione del caso 3.

6. **Radice:**

   $$\lim_{x\to a} \left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

   Questo è solo un caso speciale dell'esempio precedente.

7. **Costante:**

   $$\lim_{x\to a} c = c, \quad \text{c è un numero reale qualsiasi}$$

   Il limite di una costante è semplicemente la costante stessa.

8. **Identità:**

   $$\lim_{x\to a} x = a$$

   Questa proprietà afferma che il limite dell'identità $f(x) = x$ quando $x$ tende ad $a$ è semplicemente $a$. Questo è intuitivo, poiché man mano che $x$ si avvicina ad $a$, la funzione $f(x) = x$ si avvicina direttamente al valore $a$.

9. **Potenza della variabile:**

   $$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

   Questo è un caso speciale della proprietà 5 usando l'identità $f(x) = x$.

# 2 Derivate

## 2.1 Definizione di derivata e applicazione in casi concreti

### 2.1.1 Definzione

**Definizione** Derivata

La *derivata* di una funzione reale $f(x)$ è definita come

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

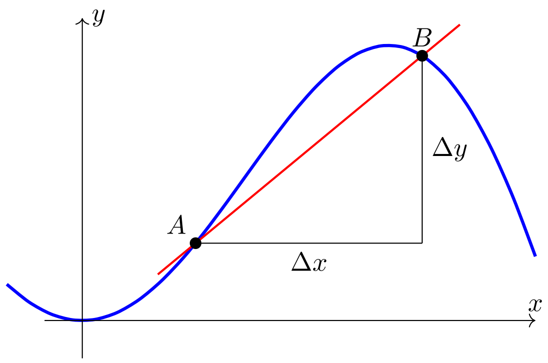
La derivata può essere scritta in diversi modi.

| Descrizione | Prima derivata | Seconda derivata | n-esima derivata |
|---|---|---|---|
| Notazione di Lagrange | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f^{(n)}(x)$ |
| Notazione di Leibniz | $\frac{d}{dx}f(x)$ | $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ | $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ |
| Notazione di Newton | $\dot{f}$ | $\ddot{f}$ | $f^{(n)}$ |

Tabella 1: Notazioni comuni per le derivate

Nota che la notazione di Newton non specifica quale variabile stiamo derivando. Solitamente viene utilizzata in fisica per derivare rispettivamente alla variabile temporale $t$. Se abbiamo una funzione $x^3 + a$, potremmo direttamente scrivere $(x^3 + a)'$ per rappresentarne la prima derivata.

## 2.2 Significato geometrico della derivata



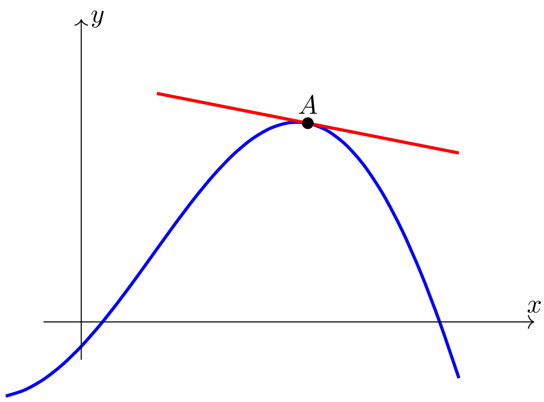

La secante di una funzione $f(x)$ fra un punto $A$ e $B$ è data da

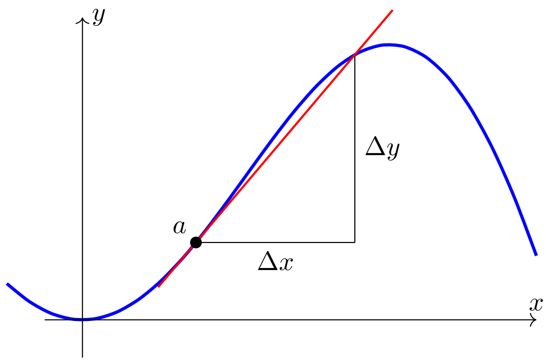
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

Più rendiamo $A$ e $B$ vicini fra loro, più $\Delta x$ diminuisce. più il $\Delta x$diminuisce, la pendenza della secante è sempre più rappresentativa del tasso di cambiamento di $f$ nell'intervallo $[A; B]$.

Quando il $\Delta x$ della pendenza è infinitesimamente piccolo, abbiamo la pendenza precisa in un punto (istantanea). Questa pendenza è rappresentata dalla retta tangente, che è parallela al punto sulla funzione.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$






La derivata di una funzione $f(x)$ è quindi un'altra funzione, $f'(x)$, che rappresenta il cambiamento di $f(x)$ in ogni punto. In altre parole, $f'(x)$ rappresenta la pendenza della tangente in ogni $x$ di $f(x)$. Questo è precisamente rappresentato dalla definizione di derivata, ossia la pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ calcolata con il limite di $\Delta x \to 0$.

### 2.2.1 Esempio applicazione

In fisica, la funzione della velocità $v(t)$ rappresenta in ogni punto il cambiamento istantaneo della posizione $x(t)$, e l'accellerazione $a(t)$ rappresenta in ogni punto il cambiamento istantanea della velocità $v(t)$. Di conseguenza abbiamo quindi che $x'(t) = v(t)$ e $v'(t) = a(t)$. Nota che quando facciamo la derivata della posizione o della velocità, l'informazione della posizione iniziale e velocità iniziale vengono persi, in quanto le pendenze sono indipendenti da quanto la funzione è spostata in alto o in basso.

### 2.2.2 Procedimento per calcolare la tangente

Data una funzione $f(x)$, vogliamo trovare l'equazione della retta tangente al punto $a$. Assumiamo quindi che $f'(a)$ non sia indeterminato:

1. Calcolare $f'(a)$ e trovare la pendenza (m) della tangente in quel punto;
2. Usare la pendenza per (m) per scrivere l'equazione della tangente $y = mx + q$ con la pendenza uguale a quella della tangente;
3. Spostare la funzione della tangente in orizzontale verso il punto (a) moltiplicando la pendenza (m) $= f'(a)$ al punto (a) $= x - a$:

   $$y = f'(a) \cdot (x - a)$$

4. Spostare la funzione della tangente in verticale verso il punto (a) aggiungendo la funzione originale (q) $= f(a)$:

   $$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

## 2.3 Regole di derivazione

### 2.3.1 Lista delle proprietà delle derivate

Assumiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano due funzioni derivabili e $c \in \mathbb{R}$

1. **Derivata di una costante:**

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

La derivata di una costante è sempre zero, in quanto la pendenza di $y = c$ è sempre zero.

2. **Linearità:**

$$\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivata di una funzione moltiplicata per una costante è uguale alla costante moltiplicata per la derivata della funzione.

3. **Somma e sottrazione:**

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

La derivata di una somma o sottrazione di funzioni è uguale alla somma o sottrazione delle derivate delle singole funzioni.

4. **Moltiplicazione:**

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla derivata del primo termine per il secondo termine più la derivata del secondo termine per il primo termine.

5. **Divisione:**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

La derivata del quoziente di due funzioni è data dalla formula del quoziente, che coinvolge le derivate del numeratore e del denominatore.

6. **Potenza:**

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

La derivata di una funzione nella forma data ha l'esponente ridotto di un fattore 1, e guadagna un coefficiente pari all'esponente iniziale.

7. **Radice:**

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \frac{1}{n}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{n}-1}\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivata di una radice ennesima di una funzione è data dalla formula che coinvolge la derivata della funzione stessa.

8. **Funzione composta (Regola della catena):**

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La derivata di una funzione composta è il prodotto della derivata della funzione esterna valutata nella funzione interna, per la derivata della funzione interna.

9. **Derivata della funzione esponenziale:**

$$\frac{d}{dx}[e^{f(x)}] = e^{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivata della funzione esponenziale è la funzione esponenziale stessa moltiplicata per la derivata dell'esponente.

10. **Derivata del logaritmo:**

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

La derivata del logaritmo naturale di una funzione è uguale alla derivata della funzione divisa per la funzione stessa.

## 2.4 Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital

### 2.4.1 Le 7 forme indeterminate

Le sette forme indeterminate sono

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

### 2.4.2 Definizione del teorema

**Teorema** Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital

Consideriamo due funzioni reali $f(x)$ e $g(x)$ che sono differenziabili in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ (non necessariamente in $c$). Senza perdita di generalità, se abbiamo un limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

dove $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ risulta in una forma indeterminata, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### 2.4.3 Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{BH}} \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2} = 2$$

## 2.5 Studio della monotonia e ricerca degli estremi di una funzione

### 2.5.1 Definizione monotonia

PAOLO PORCODIO SCRIVI TU PF NN SO COSA sia

### 2.5.2 CACCA CULO?? NON SO CHE TITOLO METTERe

Poiché la derivata $f'(x)$ rappresenta il tasso di variazione di $f(x)$, assumendo che $f(a)$ sia definita.

- Se $f'(a) >; 0$, allora $f(x)$ è crescente in $x = a$
- Se $f'(a) <; 0$, allora $f(x)$ è decrescente in $x = a$
- Se $f'(a) = 0$, allora $f(x)$ è stazionaria in $x = a$
- Se $f'(a)$ non è definita, allora $f(x)$ è stazionaria in $x = a$ (punto angoloso)

Un punto critico è quando la funzione è stazionaria.

## 2.6 Studio della concavità e ricerca dei punti di flesso

### 2.6.1 Definizione di concavità

La concavità di una funzione $f(x)$ descrive la direzione della sua curvatura, che può essere verso l'alto quando $f''(x) > 0$ o verso il basso quando $f''(x) < 0$.
Inoltre la concavità può essere crescente quando nel pressi della concavità $f'(x) > 0$ e decrescente quando $f'(x) < 0$.

### 2.6.2 Definizione di punto di flesso

Il punto di flesso è il punto in cui la concavità della funzione cambia, ossia dove la funzione passa da concava verso l'alto a concava verso il basso o viceversa:

$f''(c) = 0$ e $f''(x)$ cambia segno in $x = c$

### 2.6.3 In più

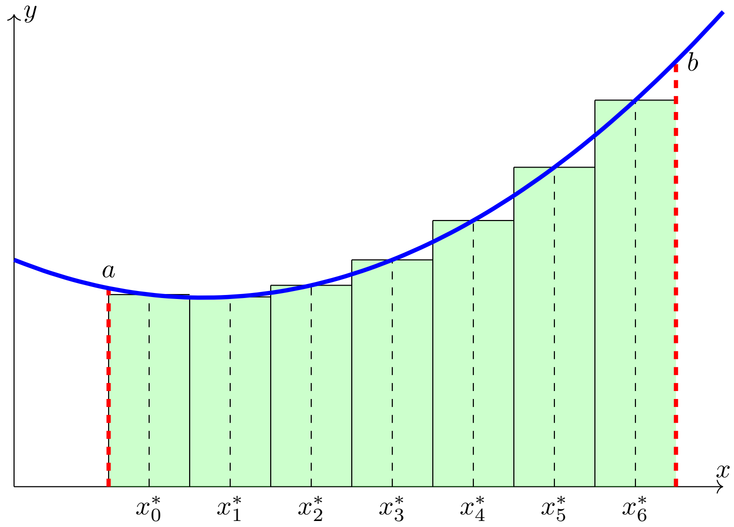
Tutti i punti di flesso di una funzione $f(x)$ sono determinati dove la seconda derivata della funzione si annulla $f''(x) = 0$, ma non tutte le seconde derivate che hanno valore 0 $f''(x) = 0$ sono dei punti di flesso.

# 3 Integrali

## 3.1 Integrale definito e sue applicazioni

### 3.1.1 Definizione

Con integrale definito si può considerare quello di Riemann, il quale può essere definito con la somma infinitesimale di rettangoli con base tendente a 0 e l'altezza pari a un punto all'interno della base:




**Importante:** esistono funzioni che non sono integrabili nel senso di Riemann, ad esempio una funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Questa funzione ha un integrale, ma non si può calcolare con la somma di Riemann.

### 3.1.2 Keep yapping

L'integrale di una funzione non strettamente positiva può essere negativo, infatti i pezzi sotto l'asse delle x rappresentano aree con valori negativi, quindi l'integrale rappresenta l'area segnata sotto la curva.

### 3.1.3 Le sue applicazioni

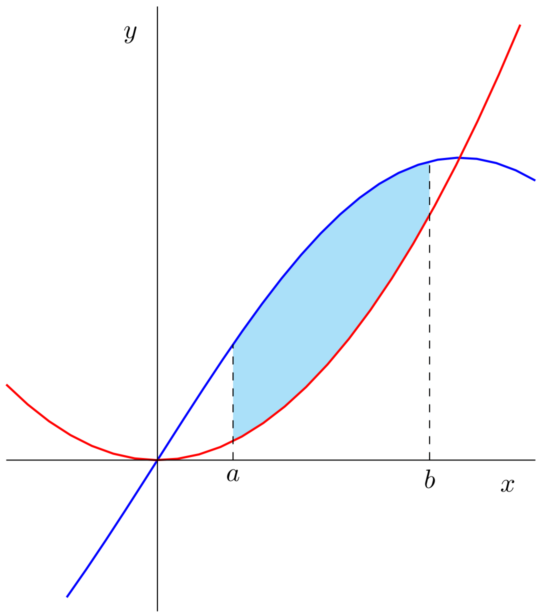
L'integrale di un intervallo di una funzione probabilistica rappresenta la probabilità di ritrovarsi in suddetto intervallo.

## 3.2 Calcolo di aree di superfici racchiuse tra i grafici di due funzioni

Creare una funzione che rappresenti la distanza tra due funzioni $f(x) e g(x)$ e integrarla.

### 3.2.1 Come calcolare l'area

1. Calcolare i limiti di integrazione, come ad esempio i punti di intersezioni tra le due funzioni;
2. Integrare la differenza delle due funzioni (la più piccola sottratta alla più grande) per avere una superficie positiva (Occhio al segno!)




Data una funzione $y = f(x)$ e $y = g(x)$, l'area racchiusa dalle due funzioni nell'intervallo $I = [a; b]$ è data da

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

assumendo che $f(x) \geq g(x)$ quando $x \in I$.
Nota che $A \geq 0$.
Se $f(x) < g(x)$ per qualche $x \in I$, questa formula non funzionerà. Tuttavia, è comunque possibile dividere l'integrale in più integrali in ogni punto in cui $f(x) - g(x)$ cambia segno.
Per rimuovere il vincolo del segno potremmo dire

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

### 3.2.2 Esempio

Calcolo dell'area tra le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$

1. Trovare i punti di intersezione:

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \longrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = 1$$

2. Integrare la differenza delle due funzioni (la più grande – la più piccola):

$$A = \int_0^1 x - x^2\, dx$$
$$A = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^2\, dx$$
$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$A = (\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}) - (\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3})$$
$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

## 3.3 Integrale indefinito, primitve di una funzione

### 3.3.1 Definizione di integrale indefinito

L'operatore per trovare una funzione primitiva è chiamato **integrale indefinito**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

La funzione da integrare (integranda) è delimitata dal simbolo dell'integrale $\int$ e un differenziale della variabile di integrazione $dx$.

Una funzione ha infiniti primitivi, quindi il termine $+C$. Questo significa essenzialmente che la derivata di una funzione è la stessa quando la funzione è traslata verso l'alto o verso il basso, il tasso di cambiamento è lo stesso. Invertendo il processo non conosciamo la traslazione verso l'alto o verso il basso della funzione originale.

$$f(x) = \int \frac{df}{dx}\,dx + C$$

per qualche specifico $C$.

### 3.3.2 Definizione di primitiva (o antiderivata)

La primitiva di una funzione è una funzione tale che la sua derivata è uguale alla funzione originale, ossia:

$$F'(x) = f(x)$$

Trovando una qualsiasi primitiva $F(x)$, si può trovare una classe di infinite primitive aggiungendo una qualsiasi costante:

$$F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

### 3.3.3 Esempio concreto

La derivata della posizione è la velocità, ma l'informazione della posizione iniziale $x_0$ viene persa. Facendo l'integrale della velocità per ritrovare $x(t)$, la costante $C$ rappresenta la posizione iniziale $x_0$