

Matematica - Esame orale

Passerella 2023-24

Matteo Frongillo, Paolo Bettelini

14 giugno 2024

Indice

I	Analisi	4
1	Limiti	4
1.1	Concetto di limite di una funzione reale (interpretazione geometrica)	4
1.1.1	Determinare la definizione formale di limite	4
1.1.2	Disegnare geometricamente il limite:	4
1.2	Asintoti	5
1.2.1	Definizione generale	5
1.2.2	Come trovare gli asintoti orizzontali	5
1.2.3	Come trovare gli asintoti obliqui	5
1.2.4	Come trovare gli asintoti verticali	5
1.3	La continuità di una funzione reale (esempi di discontinuità)	7
1.3.1	Definizione di funzione continua	7
1.3.2	Esempi di funzione continua	7
1.3.3	Esempi di funzione discontinua	7
1.4	Calcolo di limiti (somma, prodotto, ...)	8
1.4.1	Lista delle proprietà dei limiti	8
2	Derivate	9
2.1	Definizione di derivata e applicazione in casi concreti	9
2.1.1	Definizione	9
2.2	Significato geometrico della derivata	9
2.2.1	Esempio applicazione	10
2.2.2	Procedimento per calcolare la tangente	10
2.3	Regole di derivazione	11
2.3.1	Lista delle proprietà delle derivate	11
2.4	Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital	13
2.4.1	Le 7 forme indeterminate	13
2.4.2	Enunciato del teorema	13
2.4.3	Esempio	13
2.5	Studio della monotonia e ricerca degli estremi di una funzione	14
2.5.1	Definizione monotonia	14
2.5.2	Ricerca degli estremi	14
2.6	Studio della concavità e ricerca dei punti di flesso	15
2.6.1	Definizione di concavità	15
2.6.2	Definizione di punto di flesso	15
3	Integrali	16
3.1	Integrale definito e sue applicazioni	16
3.1.1	Definizione	16
3.1.2	Segno dell'integrale	16
3.1.3	Le sue applicazioni	16
3.2	Calcolo di aree di superfici racchiuse tra i grafici di due funzioni	17
3.2.1	Come calcolare l'area	17

3.2.2	Esempio	17
3.3	Integrale indefinito, primitive di una funzione	18
3.3.1	Definizione di integrale indefinito	18
3.3.2	Definizione di primitiva (o antiderivata)	18
3.3.3	Esempio concreto	18

II Geometria 19

4 Geometria analitica nel piano 19

4.1	Equazione della retta, rette parallele e rette perpendicolari	19
4.1.1	Equazione della retta	19
4.1.2	Rette parallele	20
4.1.3	Rette perpendicolari	21
4.2	Definizione e equazione della parabola	22
4.2.1	Definizione di parabola	22
4.2.2	Equazione della parabola	22
4.3	Definizione e equazione della circonferenza, rette tangenti	23
4.3.1	Definizione di circonferenza	23
4.3.2	Equazione della circonferenza	23
4.3.3	Rette tangenti	23
4.4	Problemi di intersezione	24
4.4.1	Intersezione tra rette	24
4.4.2	Intersezione tra retta e circonferenza	24
4.5	Problemi di distanza	25
4.5.1	Distanza tra due punti	25
4.5.2	Distanza punto-retta	25

5 Geometria vettoriale 26

5.1	Vettori linearmente indipendenti (collinearità e complanarità)	26
5.1.1	Vettori linearmente indipendenti	26
5.1.2	Collinearità	26
5.1.3	Complanarità	26
5.2	Il prodotto scalare, definizione, calcolo e applicazioni	27
5.2.1	Definizione di prodotto scalare	27
5.2.2	Calcolo del prodotto scalare	27
5.2.3	Applicazioni del prodotto scalare	27
5.3	Il prodotto vettoriale, definizione, calcolo e applicazioni	28
5.3.1	Definizione di prodotto vettoriale	28
5.3.2	Calcolo del prodotto vettoriale	28
5.3.3	Applicazioni del prodotto vettoriale	28
5.4	Equazione parametrica della retta nello spazio, posizione reciproca tra rette	29
5.4.1	Equazione parametrica della retta	29
5.4.2	Esempio di equazione parametrica	29
5.4.3	Posizione reciproca tra rette	29
5.4.4	Esempi di posizione reciproca tra rette	30
5.5	Equazione cartesiana del piano nello spazio	31
5.5.1	Definizione dell'equazione cartesiana	31
5.5.2	Determinazione dell'equazione di un piano	31
5.5.3	Esempio di determinazione dell'equazione di un piano	31
5.6	Semplici problemi di intersezione, di distanza e di angoli tra punti, rette o piani	32
5.6.1	Problemi di intersezione	32
5.6.2	Esempio di intersezione tra una retta e un piano	32
5.6.3	Problemi di distanza	32
5.6.4	Esempio di distanza tra un punto e un piano	32
5.6.5	Problemi di angoli	32
5.6.6	Esempio di angolo tra due rette	33

III Trigonometria 34

6	Funzioni trigonometriche	34
6.1	Definizione delle funzioni trigonometriche	34
6.1.1	Funzioni seno e coseno	34
6.1.2	Funzione tangente	34
6.1.3	Funzioni trigonometriche nel cerchio unitario	34
6.2	Grafici e proprietà, funzioni trigonometriche inverse	35
6.2.1	Grafico della funzione seno	35
6.2.2	Grafico della funzione coseno	35
6.2.3	Funzioni trigonometriche inverse	35
6.3	Applicazione al triangolo rettangolo	36
6.3.1	Teorema di Pitagora	36
6.3.2	Rapporti trigonometrici nel triangolo rettangolo	36
6.3.3	Esempi di applicazione	36
6.4	Risoluzione di equazioni del tipo $f(x) = k$	37
6.4.1	Equazioni con la funzione seno	37
6.4.2	Equazioni con la funzione coseno	37
6.4.3	Equazioni con la funzione tangente	37
6.4.4	Esempi di risoluzione	37

IV Stocastica 38

7	Probabilità	38
7.1	Spazio di probabilità e assiomi di Kolmogorov	38
7.1.1	Esempio di spazio di probabilità	38
7.2	Probabilità dell'evento complementare	39
7.2.1	Definizione	39
7.2.2	Teorema	39
7.2.3	Dimostrazione	39
7.2.4	Esempio	39
7.3	Probabilità di $A \cap B$ e indipendenza	40
7.3.1	Definizione	40
7.3.2	Teorema	40
7.3.3	Dimostrazione	40
7.3.4	Esempio	40
7.4	Probabilità condizionata	41
7.4.1	Definizione	41
7.4.2	Teorema	41
7.4.3	Dimostrazione	41
7.4.4	Esempio	41
7.5	Probabilità di $A \cup B$ e incompatibilità	42
7.5.1	Definizione	42
7.5.2	Teorema	42
7.5.3	Dimostrazione	42
7.5.4	Esempio di probabilità di $A \cup B$	43
7.5.5	Esempio di eventi incompatibili	43

Parte I

Analisi

1 Limiti

1.1 Concetto di limite di una funzione reale (interpretazione geometrica)

1.1.1 Determinare la definizione formale di limite

Definizione Limite di una funzione reale

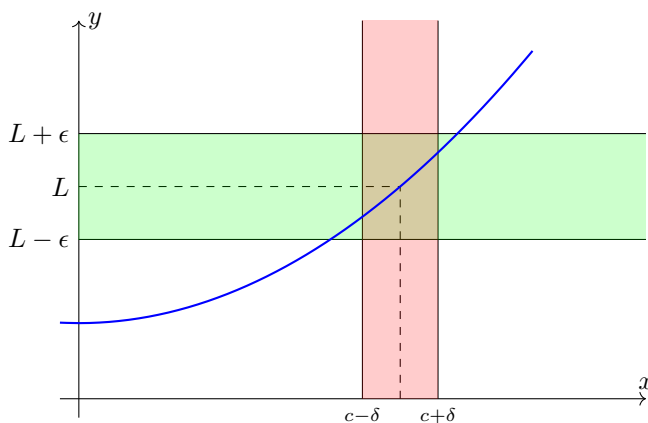
Data una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto un punto c , il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

con x tendente a c esiste se dato un $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, esiste un altro valore $\delta > 0$ tale che

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

1.1.2 Disegnare geometricamente il limite:



A parole possiamo dire che il limite esiste (ed è pari ad un valore che chiamiamo L) se la seguente condizione è soddisfatta:

1. Scegliamo un ϵ arbitrariamente piccolo e costruiamo l'intervallo $]L - \epsilon; L + \epsilon[$. Questo intervallo è un range attorno al valore effettivo del limite, ossia un intervallo nell'immagini della nostra funzione, come da disegno (striscia verde).
2. Se il limite esiste effettivamente, allora possiamo trovare un'altro intervallo (questa volta nel dominio, ossia sull'asse x al posto che sull'asse y) tale che le *immagini* della funzione date dalle x in questo intervallo, siano un sottoinsieme dell'intervallo $]L - \epsilon; L + \epsilon[$. Questo intervallo è rappresentato dalla striscia rossa nel disegno, e possiamo definirne la grandezza scegliendo un $\delta > 0$.

In maniera informale, possiamo dire che il limite esiste se per ogni striscia verde (arbitrariamente piccola), esiste una striscia rossa tale che le immagini della striscia rossa facciano interamente parte della striscia verde. Ciò viene precisamente espresso dall'espressione

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Che significa: Quando ci troviamo nella striscia rossa ($|x - c| < \delta$), ossia quando la distanza assoluta dal punto del limite c è minore di δ , allora avremo necessariamente la condizione che le immagini si trovino nella striscia verde ($|f(x) - L| < \epsilon$), ossia che la differenza fra i valori della funzione nei nostri punti e il valore del limite effettivo sia minore di ϵ .

Importante: non è strettamente necessaria che la funzione $f(x)$ sia definita al punto (c) , ma solo attorno.

1.2 Asintoti

1.2.1 Definizione generale

Definizione Asintoto

Un *asintoto* di una curva è una retta tale che quando la funzione tende a un certo valore, finito o infinito, la distanza tra la retta e la funzione tende a 0 sia nelle coordinate x e y .

Importante: una funzione potrebbe presentare un asintoto orizzontale o obliquo solo nella direzione positiva o negativa, o due asintoti diversi nelle direzioni positive e negative. Gli asintoti obliqui e orizzontali non sono quindi necessariamente simmetrici.

1.2.2 Come trovare gli asintoti orizzontali

Bisogna verificare che il limite della funzione all'infinito o meno infinito sia finito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \neq \pm\infty$$

In questo caso avremo quindi un asintoto orizzontale $y = a$ verso destra, sinistra o ambo le direzioni.

1.2.3 Come trovare gli asintoti obliqui

Per studiare gli asintoti obliqui dobbiamo studiare più in generale il concetto di equivalenza asintotica.

Definizione Equivalenza asintotica

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di x_0 e $g(x) \neq 0$ se $x \neq x_0$. Diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ sono asintoticamente equivalenti per $x \rightarrow x_0$ se il loro rapporto tende ad 1:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Per gli asintoti obliqui dobbiamo considerare l'equivalenza asintotica per $x \rightarrow \pm\infty$. Senza perdita di generalità, abbiamo un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ se la funzione è asintotica ad una retta $y = mx + q$ per $x \rightarrow +\infty$. L'asintoto è quindi presente se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{mx} = 1$$

Dal momento che non conosciamo la pendenza m possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

e controllare che m sia un numero finito. È da notare come abbiamo tralasciato il termine q in quanto l'equivalenza asintotica ne è indipendente.

Una volta stabilito che $f(x)$ è asintoticamente equivalente ad una retta con pendenza m , possiamo trovare l'ordinata all'origine q calcolando la differenza fra $f(x)$ e $mx + q$ con $x \rightarrow \infty$.

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

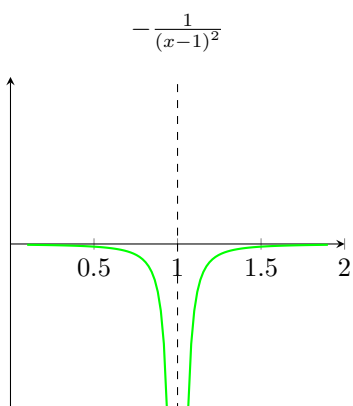
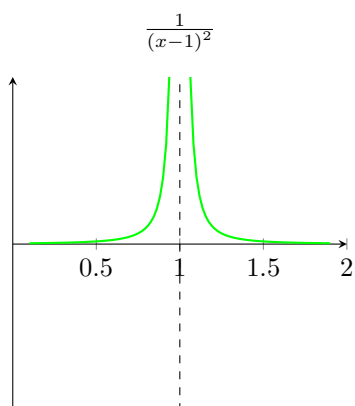
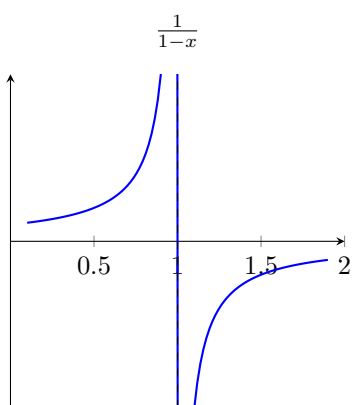
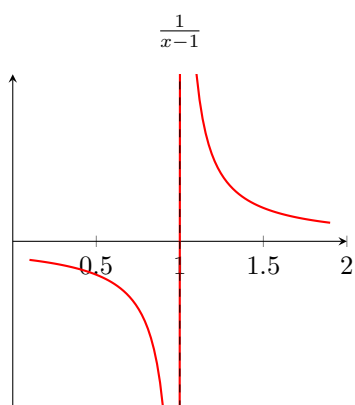
E per cui abbiamo stabilito la presenza di un asintoto obliquo verso destra con funzione $y = mx + q$.

1.2.4 Come trovare gli asintoti verticali

Per trovare gli asintoti verticali bisogna guardare il limite tendente da destra e da sinistra al punto di interesse, e verificare che i due limiti siano $+\infty$ o $-\infty$ (non necessariamente simmetrici).

In tal caso abbiamo un asintoto verticale con funzione $x = a$ dove a è il punto di interesse.

Ci sono quindi quattro tipi di geometria attorno all'asintoto a seconda del valore dei limiti.



Oltre a questi tipi di geometria, è possibile che la funzione tenda a $\pm\infty$ solo da una parte, come per esempio la funzione $y = \ln(x)$. Oppure, la funzione potrebbe anche tendere a qualsiasi altro numero finito come 10 o e^π .

1.3 La continuità di una funzione reale (esempi di discontinuità)

1.3.1 Definizione di funzione continua

Definizione Continuità di una funzione reale

Data una funzione reale $f: D \rightarrow C$, la funzione è continua nel punto $x = c$ dove $c \in D$ se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

e quindi se il limite esiste ed è uguale al valore della funzione in quel punto.

In altre parole la funzione è continua nel punto se il limite esiste (sia da destra che da sinistra, coincidendo) e la funzione in quel punto è equivalente al valore del limite.

- Si dice che una funzione è continua in un punto se il limite in quel punto esiste ed è uguale al valore della funzione nel punto;
- si dice che una funzione è continua in un sottointervallo del dominio se è continua in tutti i punti di suddetto intervallo;
- si dice che una funzione è continua se è continua in tutti i punti nel suo intervallo.

1.3.2 Esempi di funzione continua

1. La funzione $f(x) = x^4$ ha come $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ e $f(0) = 0$:
→ La funzione è continua nel punto 0.
2. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua nonostante $f(0) = \text{indeterminato}$.
Ciò è dato dal fatto che la funzione è continua su tutto il piano sinistro, ed è anche continua su tutto il piano destro. Nonostante ci sia un distacco fra i valori negativi e positivi, il punto $x = 0$ non è compreso nel dominio. Di conseguenza, anche se la funzione è costituita da due parti staccate, è comunque continua in quanto è continua su tutti i punti del dominio.

1.3.3 Esempi di funzione discontinua

1. Generalmente, se si moltiplica una funzione $f(x) \cdot \frac{x}{x}$, la funzione rimane la stessa ma si introduce un punto di discontinuità in 0, poiché il limite a 0 potrebbe esistere ma la funzione è indeterminata in quel punto indeterminato.

1.4 Calcolo di limiti (somma, prodotto, ...)

1.4.1 Lista delle proprietà dei limiti

Assumiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano due funzioni reali, che $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ esistano dove $c \in \mathbb{R}$ e $a \in \text{Dom}_f, a \in \text{Dom}_g$:

1. Linearità:

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

In altre parole, possiamo “estrarre” una costante moltiplicativa da un limite.

2. Somma e sottrazione:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Quindi, per calcolare il limite di una somma o differenza, basta prendere il limite delle singole parti e poi sommarle o sottrarle con il segno appropriato. Questo fatto vale per qualsiasi numero di funzioni separate da “+” o “-”.

3. Moltiplicazione:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Calcoliamo i limiti dei prodotti allo stesso modo in cui calcoliamo i limiti delle somme o differenze. Prendiamo semplicemente il limite delle singole parti e poi le moltiplichiamo. Anche in questo caso, questo fatto non è limitato a solo due funzioni.

4. Divisione:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{purché } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Come indicato nella frase, dobbiamo preoccuparci solo del limite nel denominatore che tende a zero quando calcoliamo il limite di un quoziente. Se fosse zero, avremmo un errore di divisione per zero che dobbiamo evitare.

5. Potenza:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n, \quad \text{dove } n \text{ è un numero reale}$$

In questa proprietà, n può essere qualsiasi numero reale (positivo, negativo, intero, frazione, irrazionale, zero, ...). Nel caso in cui n sia un numero intero, questa regola può essere vista come un'estensione del caso 3.

6. Radice:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\sqrt[n]{f(x)} \right] = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

Questo è solo un caso speciale dell'esempio precedente.

7. Costante:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c, \quad c \text{ è un numero reale qualsiasi}$$

Il limite di una costante è semplicemente la costante stessa.

8. Identità:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Questa proprietà afferma che il limite dell'identità $f(x) = x$ quando x tende ad a è semplicemente a . Questo è intuitivo, poiché man mano che x si avvicina ad a , la funzione $f(x) = x$ si avvicina direttamente al valore a .

9. Potenza della variabile:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

Questo è un caso speciale della proprietà 5 usando l'identità $f(x) = x$.

2 Derivate

2.1 Definizione di derivata e applicazione in casi concreti

2.1.1 Definizione

Definizione Derivata

La *derivata* di una funzione reale $f(x)$ è definita come

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se il limite esiste.

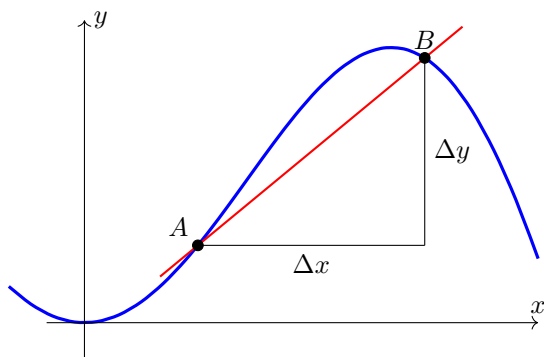
La derivata può essere scritta in diversi modi.

Descrizione	Prima derivata	Seconda derivata	n-esima derivata
Notazione di Lagrange	$f'(x)$	$f''(x)$	$f^{(n)}(x)$
Notazione di Leibniz	$\frac{d}{dx}f(x)$	$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$	$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$
Notazione di Newton	\dot{f}	\ddot{f}	$f^{(n)}$

Tabella 1: Notazioni comuni per le derivate

Nota che la notazione di Newton non specifica quale variabile stiamo derivando. Solitamente viene utilizzata in fisica per derivare rispettivamente alla variabile temporale t . Se abbiamo una funzione $x^3 + a$, potremmo direttamente scrivere $(x^3 + a)'$ per rappresentarne la prima derivata.

2.2 Significato geometrico della derivata



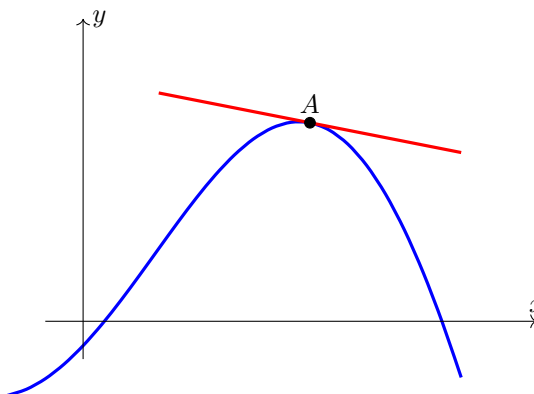
La secante di una funzione $f(x)$ fra un punto A e B è data da

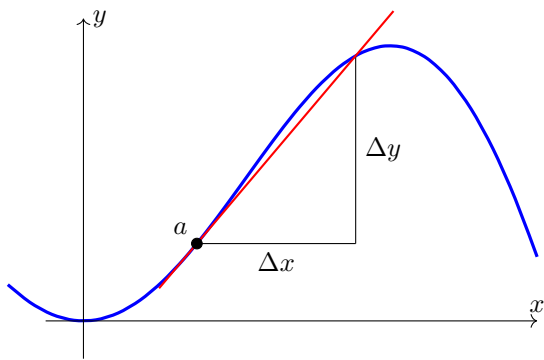
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

Più rendiamo A e B vicini fra loro, più Δx diminuisce. più il Δx diminuisce, la pendenza della secante è sempre più rappresentativa del tasso di cambiamento di f nell'intervallo $[A; B]$.

Quando il Δx della pendenza è infinitesimamente piccolo, abbiamo la pendenza precisa in un punto (istantanea). Questa pendenza è rappresentata dalla retta tangente.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$





La derivata di una funzione $f(x)$ è quindi un'altra funzione, $f'(x)$, che rappresenta il cambiamento di $f(x)$ in ogni punto. In altre parole, $f'(x)$ rappresenta la pendenza della tangente in ogni x di $f(x)$. Questo è precisamente rappresentato dalla definizione di derivata, ossia la pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ calcolata con il limite di $\Delta x \rightarrow 0$.

2.2.1 Esempio applicazione

In fisica, la funzione della velocità $v(t)$ rappresenta in ogni punto il cambiamento istantaneo della posizione $x(t)$, e l'accelerazione $a(t)$ rappresenta in ogni punto il cambiamento istantaneo della velocità $v(t)$. Di conseguenza abbiamo quindi che $x'(t) = v(t)$ e $v'(t) = a(t)$. Nota che quando facciamo la derivata della posizione o della velocità, l'informazione della posizione iniziale e velocità iniziale vengono persi, in quanto le pendenze sono indipendenti da quanto la funzione è spostata in alto o in basso.

2.2.2 Procedimento per calcolare la tangente

Data una funzione $f(x)$, vogliamo trovare l'equazione della retta tangente al punto a . Assumiamo quindi che $f'(a)$ esista e non sia $\pm\infty$:

1. Calcolare $f'(a)$ e trovare la pendenza (m) della tangente in quel punto;
2. Usare la pendenza per (m) per scrivere l'equazione della tangente $y = mx + q$ con la pendenza uguale a quella della tangente;
3. Spostare la funzione della tangente in orizzontale verso il punto (a) moltiplicando la pendenza (m) = $f'(a)$ al punto (a) = $x - a$:

$$y = f'(a) \cdot (x - a)$$

4. Spostare la funzione della tangente in verticale verso il punto (a) aggiungendo la funzione originale (q) = $f(a)$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Importante: La tangente potrebbe essere verticale, in tal caso ha una funzione del tipo $x = a$.

2.3 Regole di derivazione

2.3.1 Lista delle proprietà delle derivate

Assumiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano due funzioni derivabili e $c \in \mathbb{R}$

1. Derivata di una costante:

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

La derivata di una costante è sempre zero, in quanto la pendenza di $y = c$ è sempre zero.

2. Linearità:

$$\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivata di una funzione moltiplicata per una costante è uguale alla costante moltiplicata per la derivata della funzione.

3. Somma e sottrazione:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

La derivata di una somma o sottrazione di funzioni è uguale alla somma o sottrazione delle derivate delle singole funzioni.

4. Moltiplicazione:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla derivata del primo termine per il secondo termine più la derivata del secondo termine per il primo termine.

5. Divisione:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

La derivata del quoziente di due funzioni è data dalla formula del quoziente, che coinvolge le derivate del numeratore e del denominatore.

6. Potenza:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

La derivata di una funzione nella forma data ha l'esponente ridotto di un fattore 1, e guadagna un coefficiente pari all'esponente iniziale.

7. Radice:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \frac{1}{n}[f(x)]^{\frac{1}{n}-1}\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivata di una radice ennesima di una funzione è data dalla formula che coinvolge la derivata della funzione stessa.

8. Funzione composta (Regola della catena):

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La derivata di una funzione composta è il prodotto della derivata della funzione esterna valutata nella funzione interna, per la derivata della funzione interna.

9. Derivata della funzione esponenziale:

$$\frac{d}{dx}[e^{f(x)}] = e^{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivata della funzione esponenziale è la funzione esponenziale stessa moltiplicata per la derivata dell'esponente.

10. Derivata del logaritmo:

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

La derivata del logaritmo naturale di una funzione è uguale alla derivata della funzione divisa per la funzione stessa.

2.4 Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital

2.4.1 Le 7 forme indeterminate

Le sette forme indeterminate sono

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

2.4.2 Enunciato del teorema

Teorema Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital

Consideriamo due funzioni reali $f(x)$ e $g(x)$ che sono differenziabili in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ (non necessariamente in x_0). Senza perdita di generalità, se abbiamo un limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

dove $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ risulta in una forma indeterminata, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se il limite esiste.

2.4.3 Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{BH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2} = 2$$

2.5 Studio della monotonia e ricerca degli estremi di una funzione

2.5.1 Definizione monotonia

La monotonia della funzione centra con il suo comportamento di crescita o di decrescita. Una funzione può essere:

- **monotona crescente** Se per ogni coppia x_1, x_2 dove $x_1 < x_2$ abbiamo che $f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monotona decrescente** Se per ogni coppia x_1, x_2 dove $x_1 < x_2$ abbiamo che $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **strettamente crescente** Se per ogni coppia x_1, x_2 dove $x_1 < x_2$ abbiamo che $f(x_1) < f(x_2)$
- **strettamente decrescente** Se per ogni coppia x_1, x_2 dove $x_1 < x_2$ abbiamo che $f(x_1) > f(x_2)$

Queste proprietà possono valere sia per tutto il dominio della funzione che solo su un sottointervallo.

2.5.2 Ricerca degli estremi

Poiché la derivata $f'(x)$ rappresenta il tasso di variazione di $f(x)$, assumendo che $f(a)$ sia definita.

- Se $f'(a) > 0$, allora $f(x)$ è crescente in $x = a$
- Se $f'(a) < 0$, allora $f(x)$ è decrescente in $x = a$
- Se $f'(a) = 0$, allora $f(x)$ è un punto critico in $x = a$. Questo è un punto in cui la funzione va in stallo, e quindi potrebbe trattarsi di un punto di massimo, di minimo, di flesso, o semplicemente un punto dove la funzione è piana.
- Se $f'(a)$ non è definita, allora $f(x)$ è un punto critico in $x = a$. Questo punto potrebbe presentare varie geometrie, come punti angolosi, punti cuspidali, o altre geometrie. In generale, dovete immaginarvi che la derivata non esista (il limite geometrico non esiste), e quindi esistono infinite casistiche. Magari, dalla parte sinistra la funzione è totalmente normale e tende a un valore finito, mentre dall'alto la funzione tende a $-\infty$ (TODO: mettere alcune illustrazioni della spettacolare varietà di questi tipi di punti).

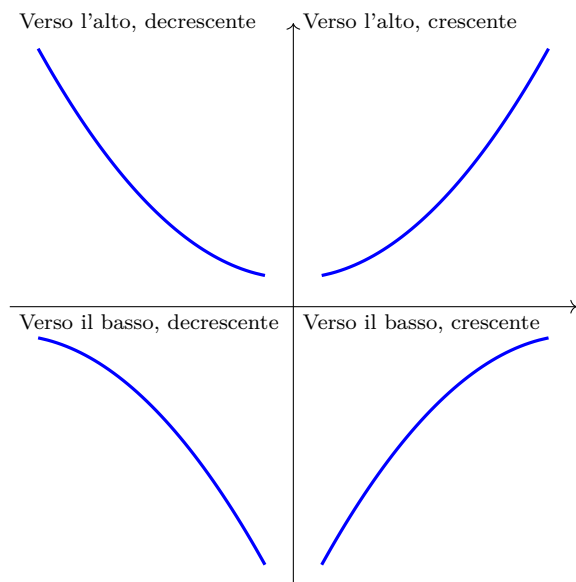
È importante notare che se una funzione è continua, la derivata non è necessariamente continua. Esistono anche funzioni (molto strane) che sono continue ovunque ma la derivata non è definita da nessuna parte (funzioni di Weierstrass).

2.6 Studio della concavità e ricerca dei punti di flesso

2.6.1 Definizione di concavità

La concavità di una funzione $f(x)$ descrive la direzione della sua curvatura, che può essere verso l'alto quando $f''(x) > 0$ o verso il basso quando $f''(x) < 0$.

Inoltre la concavità può essere crescente quando nel pressi della concavità $f'(x) > 0$ e decrescente quando $f'(x) < 0$.



- $f(x)$ è **concava verso l'alto** in un intervallo I se tutte le tangenti in I sono sotto il grafico.
- $f(x)$ è **concava verso il basso** in un intervallo I se tutte le tangenti in I sono sopra il grafico.

- Se $f''(x) > 0$ per tutte le x in un intervallo I , allora $f(x)$ è concava verso l'alto in I
- Se $f''(x) < 0$ per tutte le x in un intervallo I , allora $f(x)$ è concava verso il basso in I

Questo funzione perché quando la funzione è concava in sù, cresce o decresce sempre di più. Per cui $f'(x)$ ci dice che $f(x)$ sta crescendo o decrescendo, e $f''(x)$ ci dice l'incremento con il quale la funzione sta crescendo o il decremento con la quale la funzione sta decrescendo. Lo stesso vale per quando la funzione è concava verso il basso.

2.6.2 Definizione di punto di flesso

Definizione Punto di flesso

Un punto di flesso è un punto in cui la funzione è continua e la concavità della funzione cambia, ossia dove la funzione passa da concava verso l'alto a concava verso il basso o viceversa. Inoltre, la funzione deve essere derivabile in quel punto.

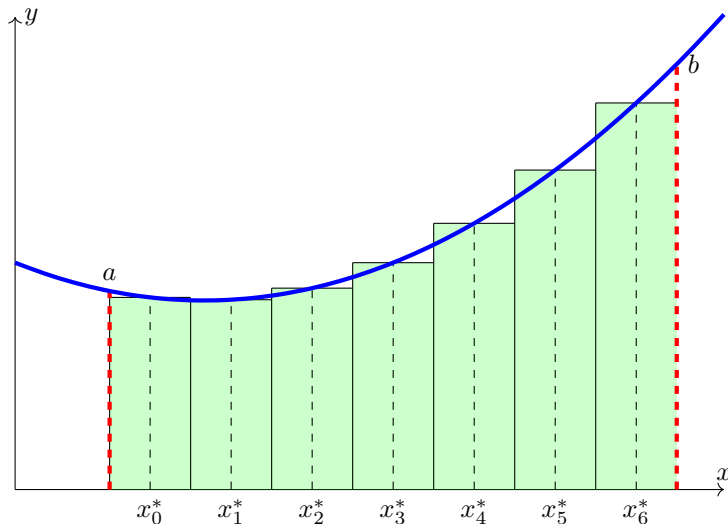
I punti di flesso di una funzione $f(x)$ sono presenti dove la seconda derivata della funzione cambia segno. Di conseguenza, i punti di flesso sono sempre presenti quando la seconda derivata è zero $f''(x) = 0$ oppure $f''(x)$ è indefinita. Tuttavia, non tutti i punti dove la funzione è zero o è indefinita sono dei punti di flesso. Una volta trovati questi due tipi di punti critici è importante controllare che la funzione cambi quindi segno prima e dopo suddetto punto.

3 Integrali

3.1 Integrale definito e sue applicazioni

3.1.1 Definizione

Con integrale definito si può considerare quello di Riemann, il quale può essere definito con la somma infinitesimale di rettangoli con base tendente a 0 e l'altezza pari a un punto all'interno della base:



Importante: esistono funzioni che non sono integrabili nel senso di Riemann, ad esempio una funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Questa funzione ha un integrale, ma non si può calcolare con la somma di Riemann.

3.1.2 Segno dell'integrale

L'integrale di una funzione non strettamente positiva può essere negativo, infatti i pezzi sotto l'asse delle x rappresentano aree con valori negativi, quindi l'integrale rappresenta l'area segnata sotto la curva. parti di area con segno opposto si annullano. Per esempio, l'integrale da 0 a 2π della funzione $\sin(x)$ è 0.

3.1.3 Le sue applicazioni

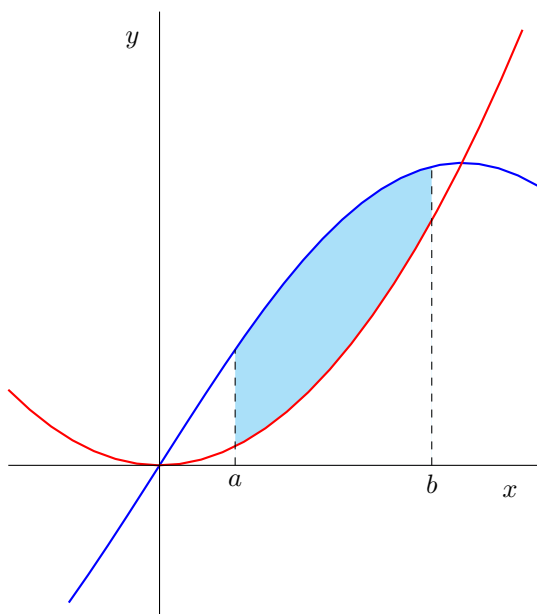
(Avanzato) L'integrale di un intervallo di una funzione probabilistica rappresenta la probabilità di ritrovarsi in suddetto intervallo.

3.2 Calcolo di aree di superfici racchiuse tra i grafici di due funzioni

Creare una funzione che rappresenti la distanza tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e integrarla.

3.2.1 Come calcolare l'area

1. Calcolare i limiti di integrazione, come ad esempio i punti di intersezione tra le due funzioni;
2. Integrare la differenza delle due funzioni (la più piccola sottratta alla più grande) per avere una superficie positiva (Occhio al segno!)



Data una funzione $y = f(x)$ e $y = g(x)$, l'area racchiusa dalle due funzioni nell'intervallo $I = [a; b]$ è data da

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

assumendo che $f(x) \geq g(x)$ quando $x \in I$.

Nota che $A \geq 0$.

Se $f(x) < g(x)$ per qualche $x \in I$, questa formula non funzionerà. Tuttavia, è comunque possibile dividere l'integrale in più integrali in ogni punto in cui $f(x) - g(x)$ cambia segno. Per rimuovere il vincolo del segno potremmo dire

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

3.2.2 Esempio

Calcolo dell'area tra le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$

1. Trovare i punti di intersezione:

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \longrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = 1$$

2. Integrare la differenza delle due funzioni (la più grande - la più piccola):

$$A = \int_0^1 x - x^2 dx$$

$$A = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$A = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

3.3 Integrale indefinito, primitive di una funzione

3.3.1 Definizione di integrale indefinito

L'operatore per trovare una funzione primitiva è chiamato **integrale indefinito**

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

La funzione da integrare (integranda) è delimitata dal simbolo dell'integrale \int e un differenziale della variabile di integrazione dx .

Una funzione ha infiniti primitivi, quindi il termine $+C$. Questo significa essenzialmente che la derivata di una funzione è la stessa quando la funzione è traslata verso l'alto o verso il basso, il tasso di cambiamento è lo stesso. Invertendo il processo non conosciamo la traslazione verso l'alto o verso il basso della funzione originale.

$$f(x) = \int \frac{df}{dx} dx + C$$

per qualche specifico C .

3.3.2 Definizione di primitiva (o antiderivata)

La primitiva di una funzione è una funzione tale che la sua derivata è uguale alla funzione originale, ossia:

$$F'(x) = f(x)$$

Trovando una qualsiasi primitiva $F(x)$, si può trovare una classe di infinite primitive aggiungendo una qualsiasi costante:

$$F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

3.3.3 Esempio concreto

In fisica, quando abbiamo la funzione dell'accelerazione $a(t)$, possiamo trovare la funzione della velocità $v(t)$ facendo l'integrale, e quella della posizione $x(t)$ facendo l'integrale di $v(t)$. È importante notare che, quando facciamo la derivata della posizione o della velocità in funzione del tempo, la posizione iniziale o velocità iniziale viene persa. Infatti, la costante $+C$ dell'integrale definitivo rappresenta proprio questa informazione perduta

$$\int a(t) dt = v(t) + v_0$$

e

$$\int v(t) dt = x(t) + x_0$$

Parte II

Geometria

4 Geometria analitica nel piano

4.1 Equazione della retta, rette parallele e rette perpendicolari

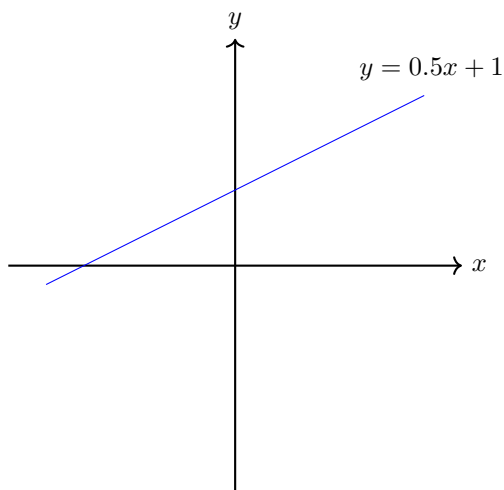
4.1.1 Equazione della retta

L'equazione di una retta nel piano cartesiano è generalmente espressa nella forma:

$$y = mx + q$$

dove m è il coefficiente angolare che determina la pendenza della retta, e q è l'intercetta con l'asse y , che indica dove la retta attraversa l'asse y . Il coefficiente angolare m è calcolato come il rapporto tra la variazione verticale (Δy) e la variazione orizzontale (Δx) tra due punti qualsiasi sulla retta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



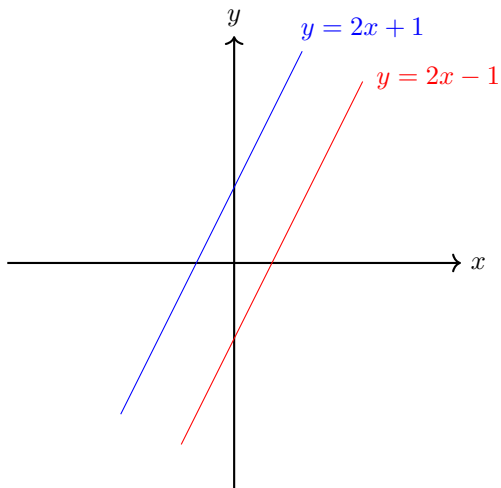
4.1.2 Rette parallele

Due rette sono parallele se e solo se i loro coefficienti angolari sono uguali:

$$m_1 = m_2$$

Questo implica che le rette hanno la stessa pendenza e quindi non si intersecano mai.

Ad esempio, le rette di equazioni $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 1$ sono parallele perché entrambe hanno un coefficiente angolare di 2.

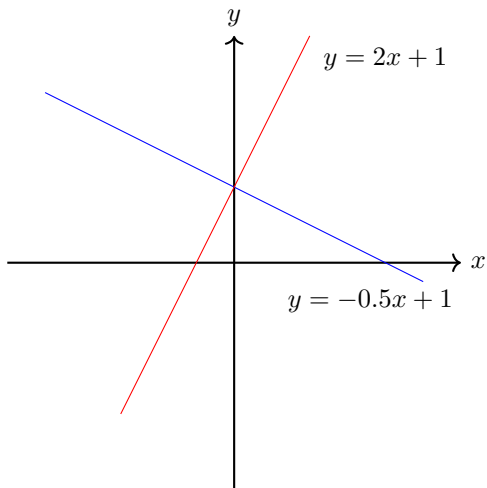


4.1.3 Rette perpendicolari

Due rette sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1 :

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Questo significa che le rette formano un angolo retto (90 gradi) l'una con l'altra. Ad esempio, le rette di equazioni $y = -\frac{1}{2}x + 1$ e $y = 2x + 1$ sono perpendicolari perché il prodotto dei loro coefficienti angolari $-\frac{1}{2}$ e 2 è -1 .



4.2 Definizione e equazione della parabola

4.2.1 Definizione di parabola

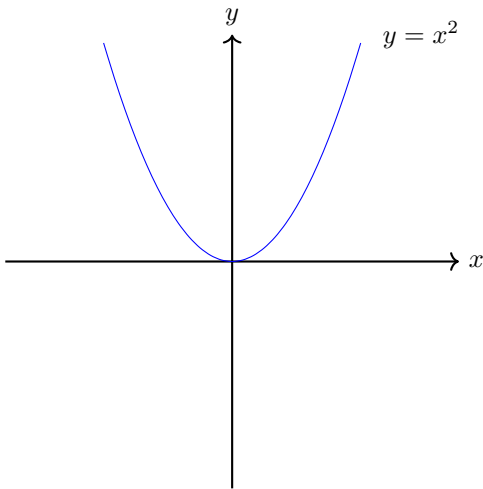
Una parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e una retta fissa, detta direttrice. Il fuoco e la direttrice determinano l'orientamento e l'apertura della parabola. La parabola ha un asse di simmetria che passa per il fuoco e perpendicolare alla direttrice.

4.2.2 Equazione della parabola

L'equazione di una parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria parallelo all'asse y è:

$$y = ax^2$$

dove a è un parametro che determina l'apertura della parabola. Se $a > 0$, la parabola è aperta verso l'alto; se $a < 0$, la parabola è aperta verso il basso.



4.3 Definizione e equazione della circonferenza, rette tangenti

4.3.1 Definizione di circonferenza

La circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro. La distanza costante è il raggio della circonferenza. Il centro e il raggio determinano la posizione e la dimensione della circonferenza.

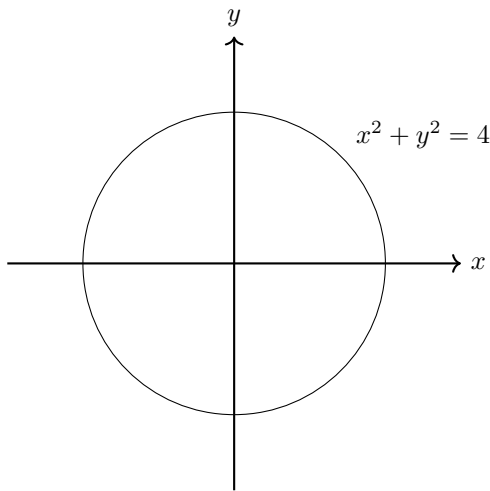
4.3.2 Equazione della circonferenza

L'equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio r è:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

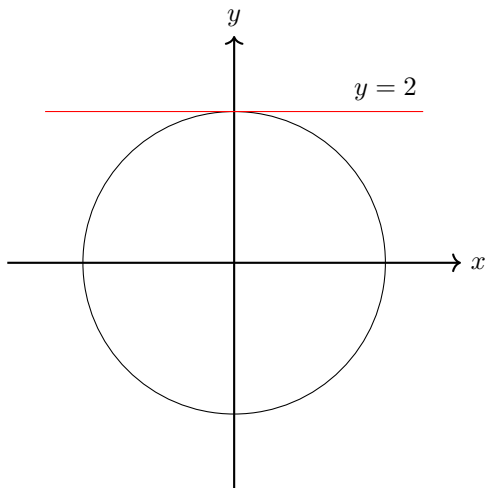
Se il centro della circonferenza è il punto (h, k) , l'equazione generale della circonferenza diventa:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



4.3.3 Rette tangenti

Una retta è tangente a una circonferenza se e solo se la distanza dal centro della circonferenza alla retta è uguale al raggio della circonferenza. La tangente tocca la circonferenza in un solo punto.



4.4 Problemi di intersezione

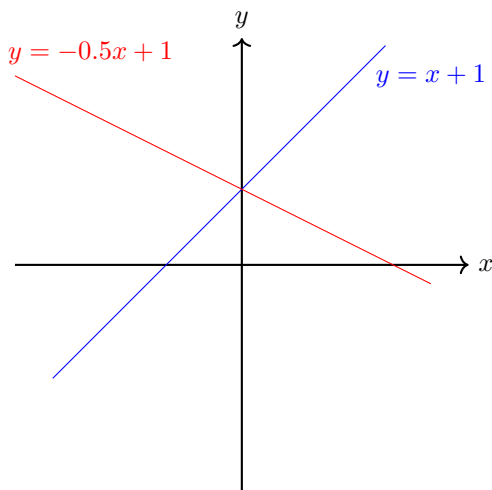
4.4.1 Intersezione tra rette

Per trovare i punti di intersezione tra due rette, si risolvono le loro equazioni simultaneamente. Ad esempio, per trovare i punti di intersezione tra due rette di equazioni $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$, si risolve il sistema:

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene il punto di intersezione (x_0, y_0) , dove:

$$x_0 = \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2}, \quad y_0 = m_1x_0 + q_1$$



4.4.2 Intersezione tra retta e circonferenza

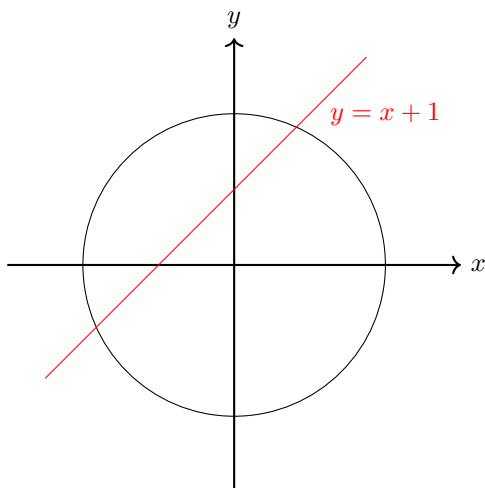
Per trovare i punti di intersezione tra una retta e una circonferenza, si risolvono simultaneamente le loro equazioni. Ad esempio, per una retta $y = mx + q$ e una circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$, si risolve il sistema:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Sostituendo l'equazione della retta nell'equazione della circonferenza, si ottiene un'equazione quadratica in x :

$$x^2 + (mx + q)^2 = r^2$$

Risolvendo questa equazione, si trovano le coordinate dei punti di intersezione.



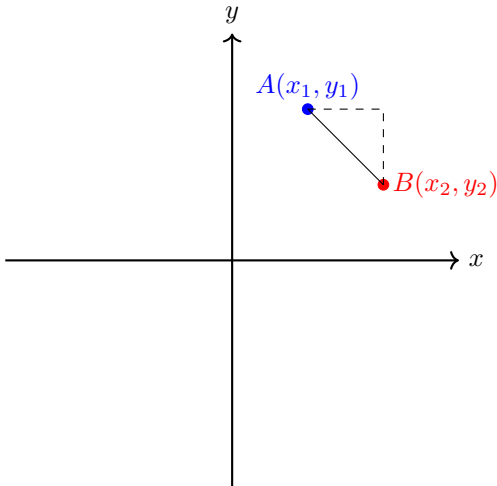
4.5 Problemi di distanza

4.5.1 Distanza tra due punti

La distanza tra due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ nel piano cartesiano è data dalla formula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Questa formula deriva dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo formato dai punti A e B e le loro proiezioni sugli assi.

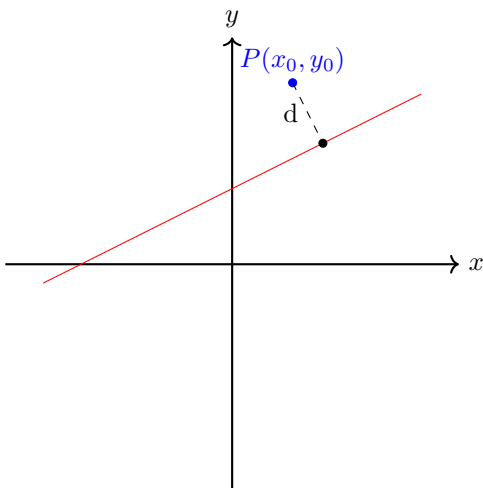


4.5.2 Distanza punto-retta

La distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta di equazione $Ax + By + C = 0$ è data da:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Questa formula può essere derivata considerando la perpendicolare dalla retta al punto P e utilizzando le proprietà geometriche dei triangoli.



5 Geometria vettoriale

5.1 Vettori linearmente indipendenti (collinearità e complanarità)

5.1.1 Vettori linearmente indipendenti

Due o più vettori sono linearmente indipendenti se nessuno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri. In termini matematici, i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ sono linearmente indipendenti se l'equazione:

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

implica che $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

5.1.2 Collinearità

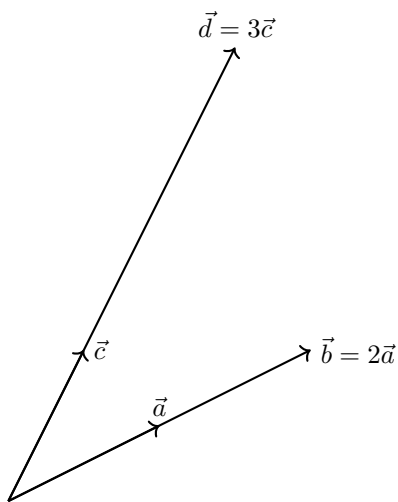
Due vettori \vec{a} e \vec{b} sono collineari se esiste un numero reale λ tale che:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

5.1.3 Complanarità

Tre vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono complanari se esistono due numeri reali λ e μ tali che:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$



5.2 Il prodotto scalare, definizione, calcolo e applicazioni

5.2.1 Definizione di prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ è definito come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

A parole, il prodotto scalare è una misura di quanto due vettori puntano nella stessa direzione. È calcolato moltiplicando le componenti corrispondenti dei vettori e sommando i risultati.

5.2.2 Calcolo del prodotto scalare

Per i vettori $\vec{a} = (1, 2, 3)$ e $\vec{b} = (4, -5, 6)$, il prodotto scalare è:

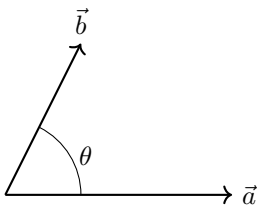
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 = 4 - 10 + 18 = 12$$

5.2.3 Applicazioni del prodotto scalare

Il prodotto scalare è utile per determinare l'angolo θ tra due vettori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, i vettori sono ortogonali.



5.3 Il prodotto vettoriale, definizione, calcolo e applicazioni

5.3.1 Definizione di prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori \vec{a} e \vec{b} è un vettore \vec{c} tale che:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

e ha una direzione perpendicolare sia a \vec{a} che a \vec{b} secondo la regola della mano destra.

A parole, il prodotto vettoriale è un vettore che è perpendicolare a entrambi i vettori originali e il cui modulo rappresenta l'area del parallelogramma formato dai due vettori.

5.3.2 Calcolo del prodotto vettoriale

Per i vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, il prodotto vettoriale è dato da:

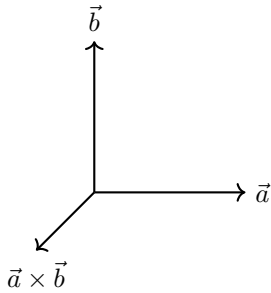
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Ad esempio, per $\vec{a} = (1, 2, 3)$ e $\vec{b} = (4, 5, 6)$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (12 - 15, 12 - 6, 5 - 8) = (-3, 6, -3)$$

5.3.3 Applicazioni del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è utile per determinare il vettore normale a un piano definito da due vettori.



5.4 Equazione parametrica della retta nello spazio, posizione reciproca tra rette

5.4.1 Equazione parametrica della retta

L'equazione parametrica di una retta nello spazio è espressa in funzione di un parametro t . Se un punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartiene alla retta e $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$ è il vettore direzionale della retta, l'equazione parametrica è data da:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{d}$$

In forma coordinata, le equazioni parametriche si scrivono come:

$$\begin{cases} x = x_0 + td_x \\ y = y_0 + td_y \\ z = z_0 + td_z \end{cases}$$

dove t è un parametro reale.

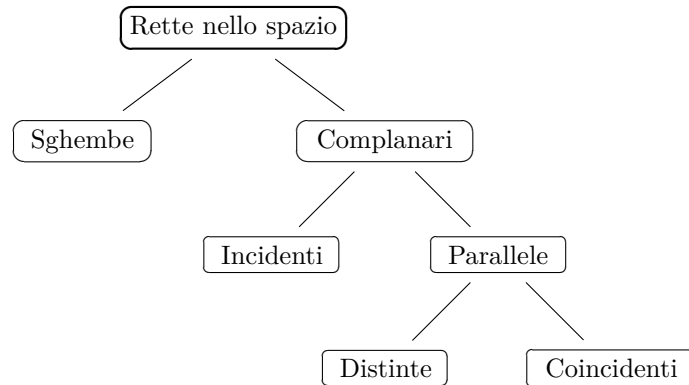
5.4.2 Esempio di equazione parametrica

Supponiamo che la retta passi per il punto $(1, 2, 3)$ e abbia un vettore direzionale $(4, -2, 1)$. L'equazione parametrica della retta è:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

5.4.3 Posizione reciproca tra rette

La posizione reciproca tra due rette nello spazio può essere classificata come segue:



Rette incidenti

Due rette sono incidenti se hanno un punto in comune. Per verificare se due rette sono incidenti, si risolvono i loro sistemi di equazioni parametriche per trovare un punto di intersezione comune.

Rette parallele

Due rette sono parallele se i loro vettori direzionali sono proporzionali. Se \vec{d}_1 e \vec{d}_2 sono i vettori direzionali delle due rette, allora le rette sono parallele se esiste un numero reale λ tale che:

$$\vec{d}_1 = \lambda \vec{d}_2$$

Rette sghembe

Due rette sono sghembe se non sono né incidenti né parallele. Questo significa che non hanno punti in comune e non giacciono sullo stesso piano.

5.4.4 Esempi di posizione reciproca tra rette

Consideriamo le seguenti rette:

$$r \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 4 + 2s \\ y = -1 - s \\ z = 2 + s \end{cases}$$

Verifica di parallelismo

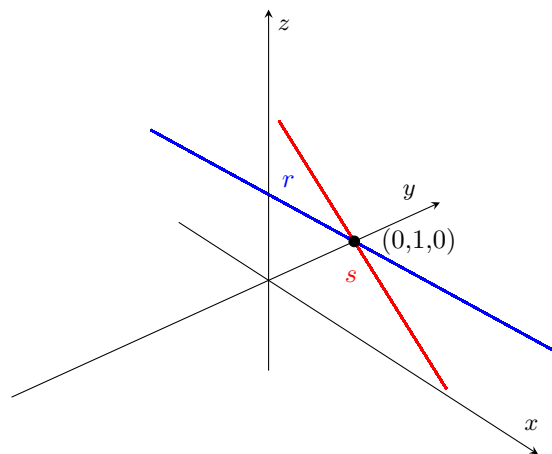
I vettori direzionali sono $\vec{d}_1 = (1, -1, 1)$ e $\vec{d}_2 = (2, -1, 1)$. Poiché $\vec{d}_1 \neq \lambda \vec{d}_2$, le rette non sono parallele.

Verifica di intersezione

Per verificare se le rette sono incidenti, eguagliamo le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} t = 4 + 2s \\ 1 - t = -1 - s \\ t = 2 + s \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $t = 0$ e $s = 1$. Usando la seconda equazione per verificare che le due rette siano incidenti, risulta che $1 = 1$, dunque le due rette sono incidenti.



5.5 Equazione cartesiana del piano nello spazio

5.5.1 Definizione dell'equazione cartesiana

L'equazione cartesiana di un piano nello spazio è un'equazione lineare nelle variabili x , y e z . È data da:

$$ax + by + cz + d = 0$$

dove a , b , c e d sono costanti. I coefficienti a , b e c rappresentano le componenti del vettore normale al piano, $\vec{n} = (a, b, c)$.

A parole, l'equazione cartesiana di un piano nello spazio descrive tutti i punti (x, y, z) che giacciono su un piano specificato da un punto noto e un vettore normale. Il vettore normale è perpendicolare alla superficie del piano e definisce l'orientamento del piano stesso.

5.5.2 Determinazione dell'equazione di un piano

Per determinare l'equazione cartesiana di un piano, è necessario conoscere un punto (x_0, y_0, z_0) sul piano e il vettore normale $\vec{n} = (a, b, c)$. L'equazione del piano può essere trovata sostituendo le coordinate del punto e del vettore normale nell'equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Espandendo e semplificando si ottiene:

$$ax + by + cz + d = 0$$

dove $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

5.5.3 Esempio di determinazione dell'equazione di un piano

Supponiamo di avere un punto $(2, -1, 3)$ e un vettore normale $\vec{n} = (1, 2, -1)$. L'equazione del piano è:

$$1(x - 2) + 2(y + 1) - 1(z - 3) = 0$$

Espandendo e semplificando:

$$x + 2y - z + 3 = 0$$

5.6 Semplici problemi di intersezione, di distanza e di angoli tra punti, rette o piani

5.6.1 Problemi di intersezione

Per trovare il punto di intersezione tra una retta e un piano, si sostituisce l'equazione parametrica della retta nell'equazione cartesiana del piano e si risolve per il parametro.

A parole, l'intersezione tra due entità geometriche nello spazio (come rette o piani) è il punto o la linea comune a entrambe. Determinare l'intersezione significa trovare questi punti o linee comuni.

5.6.2 Esempio di intersezione tra una retta e un piano

Supponiamo di avere una retta data da:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e un piano dato da:

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

Per trovare il punto di intersezione, sostituiamo le coordinate parametriche della retta nell'equazione del piano:

$$(1+t) + 2(2-t) - (3+2t) - 1 = 0$$

Risolviamo per t :

$$1+t+4-2t-3-2t-1=0 \implies -2t+1=0 \implies t=\frac{1}{2}$$

Il punto di intersezione è:

$$\vec{r}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.6.3 Problemi di distanza

La distanza tra un punto e un piano può essere trovata usando la formula:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

A parole, la distanza tra un punto e un'entità geometrica (come una retta o un piano) è la lunghezza del segmento di linea perpendicolare che li unisce. È la misura più breve tra il punto e l'entità.

5.6.4 Esempio di distanza tra un punto e un piano

Supponiamo di avere un punto $P(1, 2, 3)$ e un piano dato da $x + 2y - z - 1 = 0$. La distanza è:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 + 4 - 3 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

5.6.5 Problemi di angoli

L'angolo tra due rette può essere trovato usando il prodotto scalare dei loro vettori direzionali, mentre l'angolo tra due piani può essere trovato usando il prodotto scalare dei loro vettori normali.

A parole, l'angolo tra due entità geometriche (come rette o piani) è la misura dell'inclinazione tra di esse. Per le rette, è l'angolo tra i loro vettori direzionali. Per i piani, è l'angolo tra i loro vettori normali.

5.6.6 Esempio di angolo tra due rette

Supponiamo di avere due rette con vettori direzionali $\vec{d}_1 = (1, 2, 3)$ e $\vec{d}_2 = (4, -5, 6)$. L'angolo θ tra le rette è dato da:

$$\cos \theta = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2}} = \frac{12}{\sqrt{1078}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{12}{\sqrt{1078}} \right)$$

Parte III

Trigonometria

6 Funzioni trigonometriche

6.1 Definizione delle funzioni trigonometriche

6.1.1 Funzioni seno e coseno

Le funzioni seno e coseno sono definite come rapporti di lunghezze in un triangolo rettangolo. Per un angolo θ , il seno è il rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa, mentre il coseno è il rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa:

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

6.1.2 Funzione tangente

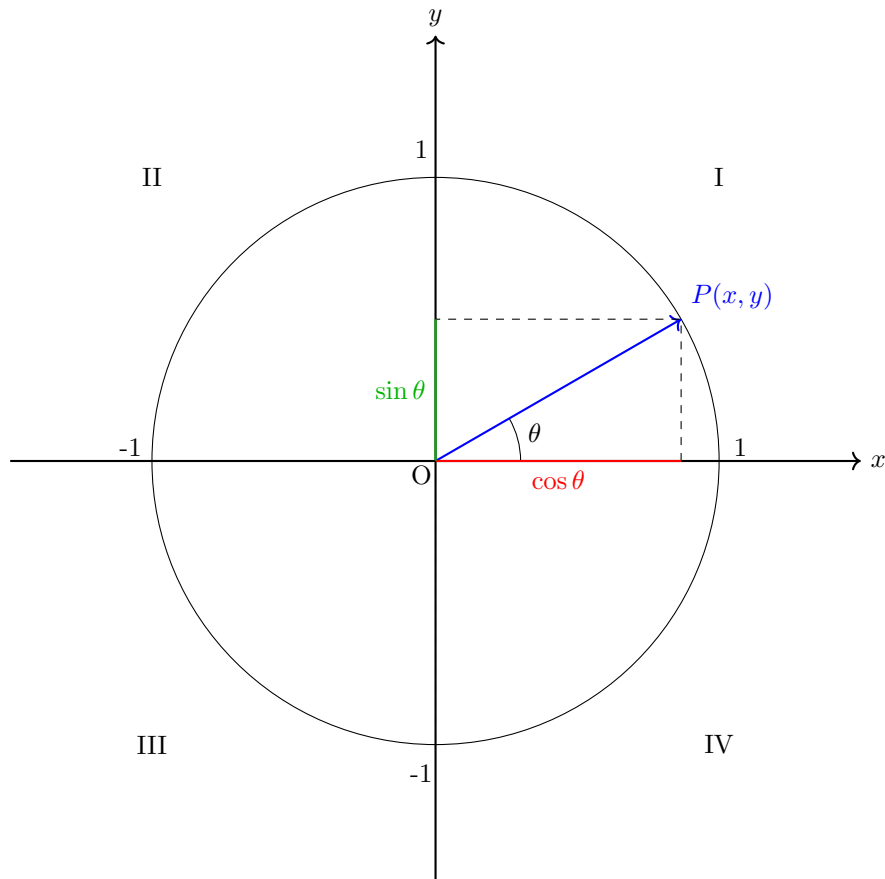
La funzione tangente è definita come il rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

6.1.3 Funzioni trigonometriche nel cerchio unitario

Le funzioni trigonometriche possono essere estese agli angoli oltre 0 e 90° utilizzando il cerchio unitario. Per un angolo θ nel cerchio unitario:

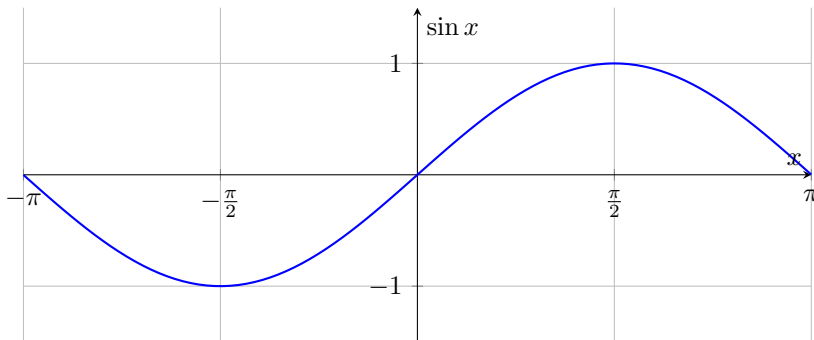
$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



6.2 Grafici e proprietà, funzioni trigonometriche inverse

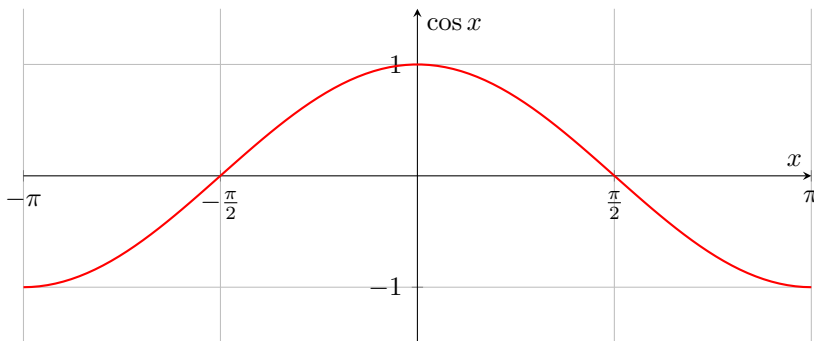
6.2.1 Grafico della funzione seno

Il grafico della funzione seno è una curva periodica che oscilla tra -1 e 1, con un periodo di 2π . Il seno di 0 è 0, e il seno di $\pi/2$ è 1.



6.2.2 Grafico della funzione coseno

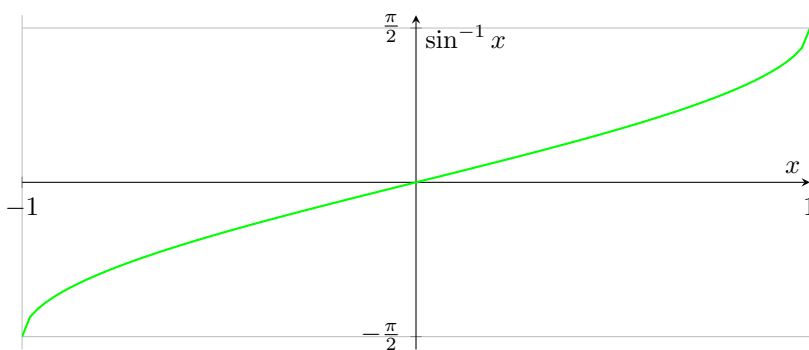
Il grafico della funzione coseno è simile a quello del seno, ma è traslato di $\pi/2$ a sinistra. Oscilla tra -1 e 1, con un periodo di 2π .



6.2.3 Funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche inverse sono utilizzate per trovare l'angolo dato il valore di una funzione trigonometrica. Le funzioni inverse principali sono l'arcseno, l'arcocoseno e l'arcotangente:

$$y = \sin^{-1} x, \quad y = \cos^{-1} x, \quad y = \tan^{-1} x$$

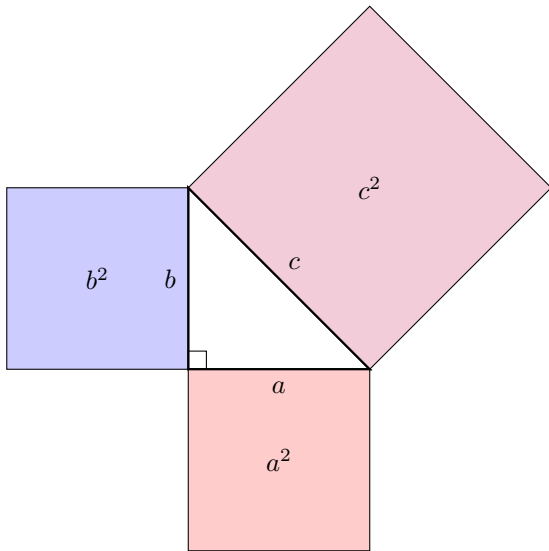


6.3 Applicazione al triangolo rettangolo

6.3.1 Teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora stabilisce che in un triangolo rettangolo, il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



6.3.2 Rapporti trigonometrici nel triangolo rettangolo

In un triangolo rettangolo, i rapporti trigonometrici delle funzioni seno, coseno e tangente si applicano come segue:

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

6.3.3 Esempi di applicazione

Calcolare i lati di un triangolo rettangolo dati uno degli angoli acuti e un lato. Ad esempio, se $\theta = 30^\circ$ e l'ipotenusa è 10, allora:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\text{cateto opposto}}{10} \implies \text{cateto opposto} = 5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{cateto adiacente}}{10} \implies \text{cateto adiacente} = 5\sqrt{3}$$

6.4 Risoluzione di equazioni del tipo $f(x) = k$

(dove f è una funzione trigonometrica e $k \in \mathbb{R}$)

6.4.1 Equazioni con la funzione seno

Per risolvere equazioni del tipo $\sin x = k$, si considerano i valori di k che sono compresi tra -1 e 1. L'equazione ha soluzioni se $-1 \leq k \leq 1$:

$$x = \sin^{-1} k + 2n\pi, \quad x = \pi - \sin^{-1} k + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

6.4.2 Equazioni con la funzione coseno

Per risolvere equazioni del tipo $\cos x = k$, si considerano i valori di k compresi tra -1 e 1. L'equazione ha soluzioni se $-1 \leq k \leq 1$:

$$x = \cos^{-1} k + 2n\pi, \quad x = -\cos^{-1} k + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

6.4.3 Equazioni con la funzione tangente

Per risolvere equazioni del tipo $\tan x = k$, si considerano tutti i valori reali di k . L'equazione ha soluzioni per tutti i valori di k :

$$x = \tan^{-1} k + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

6.4.4 Esempi di risoluzione

Risolviamo l'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$:

$$x = \sin^{-1} \frac{1}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad x = \pi - \sin^{-1} \frac{1}{2} + 2n\pi = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Parte IV

Stocastica

7 Probabilità

7.1 Spazio di probabilità e assiomi di Kolmogorov

Uno spazio di probabilità è una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove:

- Ω è lo **spazio campionario**, l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento. Un particolare esito, ossia un elemento di Ω , è detto **punto campionario** o **campione**.
- \mathcal{F} è un insieme di sottoinsiemi di Ω , contenente tutti i possibili eventi.
- \mathbb{P} è una funzione di probabilità, una funzione che assegna a ciascun evento $a \in \mathcal{F}$ un numero reale chiamato probabilità di a . Per cui la funzione ha la forma $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0; 1]$.

L'insieme \mathcal{F} deve soddisfare i seguenti assiomi:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Se un evento A è in \mathcal{F} , allora anche il suo complemento \bar{A} è in \mathcal{F}
3. Se due eventi A e B sono in \mathcal{F} , allora $A \cup B \in \mathcal{F}$

La funzione \mathbb{P} deve soddisfare i seguenti assiomi:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Se A e B sono eventi incompatibili (cioè $A \cap B = \emptyset$), allora $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

7.1.1 Esempio di spazio di probabilità

Consideriamo il lancio di un dado. Lo spazio campionario è $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ogni faccia ha la stessa probabilità di uscire, quindi $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ per ogni $i \in \Omega$.

7.2 Probabilità dell'evento complementare

7.2.1 Definizione

L'evento complementare, denotato come \bar{A} , è l'insieme di tutti gli esiti che non appartengono all'evento A . In altre parole, se A rappresenta un insieme di esiti in cui si verifica un determinato evento, \bar{A} rappresenta tutti gli altri esiti in cui tale evento non si verifica.

Dato un evento A in uno spazio campionario Ω , l'evento complementare \bar{A} è definito come:

$$\bar{A} = \Omega \setminus A$$

dove \setminus indica la differenza tra insiemi. Graficamente, se consideriamo Ω come l'intero spazio campionario e A come una regione all'interno di Ω , \bar{A} sarà la regione rimanente.

7.2.2 Teorema

Per ogni evento A , si ha:

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

dove \bar{A} rappresenta l'insieme degli esiti che non appartengono ad A .

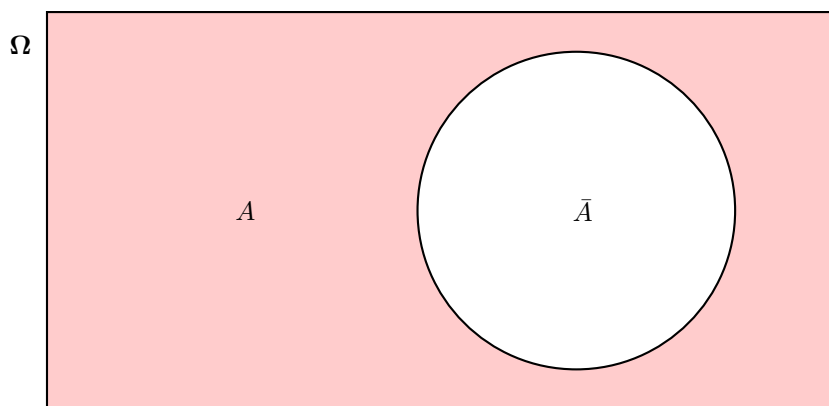
7.2.3 Dimostrazione

Sia A un evento, allora $A \cup \bar{A} = \Omega$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Dunque, secondo il terzo assioma di Kolmogorov:

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$$

da cui segue che:

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$



7.2.4 Esempio

Se la probabilità di estrarre una carta cuori da un mazzo di 52 carte è $\mathbb{P}(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, allora la probabilità di non estrarre una carta cuori è:

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

7.3 Probabilità di $A \cap B$ e indipendenza

7.3.1 Definizione

La probabilità dell'intersezione di due eventi A e B , denotata come $A \cap B$, rappresenta la probabilità che entrambi gli eventi si verifichino simultaneamente.

Due eventi A e B sono detti indipendenti se il verificarsi di uno non influenza la probabilità del verificarsi dell'altro.

7.3.2 Teorema

Due eventi A e B sono indipendenti se e solo se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

7.3.3 Dimostrazione

Per dimostrare che due eventi A e B sono indipendenti, consideriamo la definizione di probabilità condizionata:

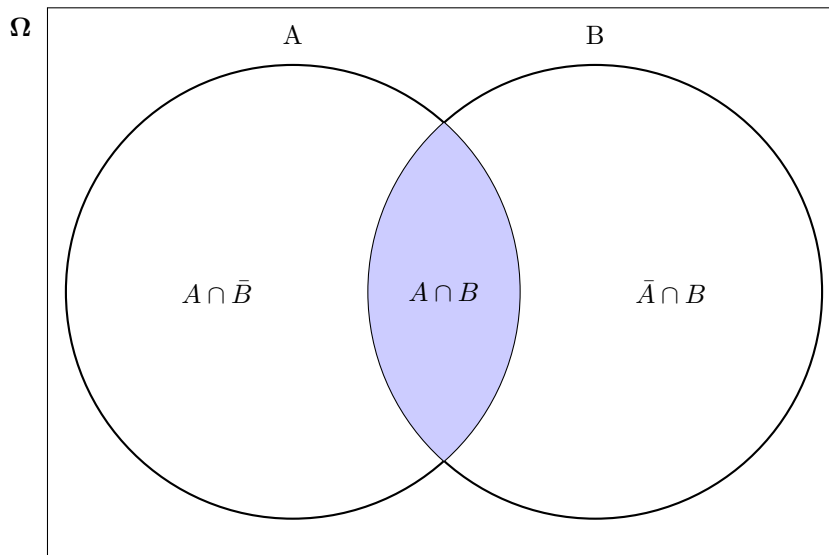
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Se A e B sono indipendenti, allora $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$. Sostituendo nella formula della probabilità condizionata otteniamo:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

da cui segue che:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$



7.3.4 Esempio

Consideriamo il lancio di due monete. Sia A l'evento che la prima moneta è testa ($\{T, C\}$) e B l'evento che la seconda moneta è testa ($\{C, T\}$). Poiché il lancio delle due monete è un evento indipendente, abbiamo:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

7.4 Probabilità condizionata

7.4.1 Definizione

La probabilità condizionata descrive la probabilità di un evento A sapendo che un altro evento B è già avvenuto.

7.4.2 Teorema

Se $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilità condizionata di A dato B è:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

7.4.3 Dimostrazione

Supponiamo di avere due eventi A e B . La probabilità dell'intersezione $\mathbb{P}(A \cap B)$ rappresenta la probabilità che entrambi gli eventi si verifichino. Dividendo questa probabilità per $\mathbb{P}(B)$, che è la probabilità che B si verifichi, otteniamo la probabilità di A all'interno del contesto in cui B è già avvenuto:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

7.4.4 Esempio

Consideriamo un mazzo di 52 carte. Sia A l'evento “estrarre un re” e B l'evento “estrarre una carta nera”. La probabilità di estrarre una carta nera è:

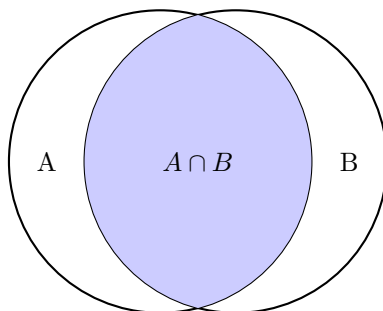
$$\mathbb{P}(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

La probabilità di estrarre un re nero (uno dei due re neri nel mazzo) è:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

Quindi, la probabilità condizionata di estrarre un re dato che sappiamo che la carta è nera è:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{26}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$



7.5 Probabilità di $A \cup B$ e incompatibilità

7.5.1 Definizione

La probabilità dell'unione di due eventi A e B , denotata come $A \cup B$, rappresenta la probabilità che almeno uno dei due eventi si verifichi.

Due eventi A e B sono detti incompatibili se non possono verificarsi contemporaneamente, ovvero se la loro intersezione è vuota:

$$A \cap B = \emptyset$$

In questo caso, la probabilità dell'unione di due eventi incompatibili è semplicemente la somma delle probabilità dei singoli eventi:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

7.5.2 Teorema

Per ogni coppia di eventi A e B , la probabilità dell'unione è data da:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Questo teorema tiene conto del fatto che la probabilità dell'intersezione $A \cap B$ viene sommata due volte quando sommiamo $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$, quindi dobbiamo sottrarla una volta per ottenere la probabilità corretta.

7.5.3 Dimostrazione

Per dimostrare questa formula, consideriamo che l'unione di A e B può essere suddivisa in tre parti: la parte di A che non è in B ($A \setminus B$), la parte di B che non è in A ($B \setminus A$), e l'intersezione $A \cap B$. Matematicamente, possiamo scrivere:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Poiché le tre parti sono incompatibili, possiamo usare gli assiomi di Kolmogorov per sommare le loro probabilità:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Notiamo ora che:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

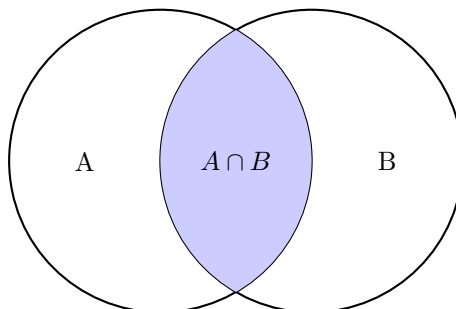
Sommando queste due equazioni, otteniamo:

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

da cui segue che:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



7.5.4 Esempio di probabilità di $A \cup B$

Consideriamo il lancio di un dado. Sia A l'evento che esce un numero pari ($\{2, 4, 6\}$), e B l'evento che esce un numero maggiore di 4 ($\{5, 6\}$). Allora:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Utilizzando la formula per l'unione di due eventi, otteniamo:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

7.5.5 Esempio di eventi incompatibili

Sia A l'evento che esce un numero pari ($\{2, 4, 6\}$) e B l'evento che esce un numero dispari ($\{1, 3, 5\}$) nel lancio di un dado. Questi due eventi sono incompatibili perché non possono verificarsi contemporaneamente. In questo caso, l'intersezione $A \cap B$ è vuota, e la probabilità dell'unione è:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Poiché:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Allora:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

