



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI BRESCIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

*Corso di Laurea in Ingegneria Informatica*

Tesi di Laurea

TOUR SCHEDULING E SHIFT ASSIGNMENT: IL  
CASO DI UN SUPERMERCATO

Relatrice:

Laureando:  
Lublanis Matteo  
Matricola n.  
**736418**

*Anno Accademico 2024/2025*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
0.1 Obiettivo . . . . .	2
0.2 Struttura tesi . . . . .	2
<b>1 Stato dell'arte</b>	<b>4</b>
1.1 Problemi di schedulazione . . . . .	4
1.2 Schedulazione del personale . . . . .	5
<b>2 Descrizione del problema</b>	<b>7</b>
2.1 Descrizione generale . . . . .	7
2.2 Tipologie di contratto . . . . .	7
2.3 Struttura dei turni . . . . .	7
2.4 Vincoli settimanali . . . . .	7
2.5 Preferenze del personale . . . . .	8
2.6 Fabbisogno di personale . . . . .	8
2.7 Obiettivi del modello . . . . .	8
2.8 Sintesi . . . . .	8
<b>3 Modello matematico</b>	<b>9</b>
3.1 Orario e copertura . . . . .	9
3.2 Straordinari . . . . .	11
3.3 Equità . . . . .	12
3.4 Stacco turni . . . . .	14
3.5 Giorni di riposo . . . . .	14
3.6 Funzione obiettivo . . . . .	15
3.7 Formulazione . . . . .	15
<b>A Appendice</b>	<b>19</b>
A.1 Sottosezione dell'appendice . . . . .	19

# Introduzione

Negli ultimi decenni, i problemi di schedulazione del personale sono stati studiati ampiamente. Una delle cause principali dietro questo interesse sta il lato economico: il costo del lavoro rappresenta ad oggi, per molte realtà aziendali, uno degli elementi principali della spesa aziendale e riuscire a minimizzarlo può portare grossi benefici all'azienda.

La prima formulazione di questo problema venne proposta negli anni '50 da George Dantzig e William Edie, ma ad oggi risulta parecchio antiquata, in quanto:

- Non esistevano diverse tipologie di contratto, ma solo full-time.
- Ogni dipendente è interscambiabile, non vengono quindi tenute in considerazione le skill del singolo individuo.
- L'obiettivo consisteva soltanto nel minimizzare il costo del personale, non considerando altri fattori come preferenze o indisposizioni.

Ad oggi, i modelli sono diventati molto più complessi e prevedono obiettivi che possono andare in conflitto tra loro, ad esempio la minimizzazione del costo del personale e le preferenze del personale. Inoltre, sono aumentati gli strumenti risolutivi a disposizione, variando dai metodi esatti fino ad arrivare alle matheuristics: un problema che veniva risolto a mano può venire ora risolto con risultati migliori in maniera automatica, riuscendo a trovare soluzioni non ottime ma comunque buone in tempi polinomiali.

## 0.1 Obiettivo

Questa tesi si pone come obiettivo quello di risolvere il problema di personnel scheduling per il reparto di cassa di un supermercato, il quale (rimarrà anonimo per privacy) ci ha gentilmente fornito una parte dei dati necessari per descrivere l'istanza del problema. Il fine ultimo è quello di trovare la miglior pianificazione settimanale possibile per suddetto supermercato e poi assegnare i turni ai singoli dipendenti.

## 0.2 Struttura tesi

Nel Capitolo 1 METTERE STATO DELL'ARTE. Nel Capitolo 2 viene presentato informalmente il problema reale considerato, descrivendone i soggetti coinvolti, le preferenze espresse, ciò che si vuole ottenere, i vincoli giuridici e contrattuali. Nel Capitolo 3 si fornisce la descrizione formale del problema, che verrà tradotta in un vero e proprio modello matematico, specificandone variabili, vincoli e funzioni obiettivo. Nel Capitolo 4 illustra lo strumento utilizzato per l'implementazione del modello matematico (Gurobi), le principali fasi del processo di realizzazione e i risultati dei test sperimentali volti a valutarne l'efficienza e la validità.

## RIVEDERE ULTIMA PARTE

Viene infine mostrato il procedimento di assegnamento VEDERE SE CAPITOLO 5.  
Negli appendici infine vengono riportati, per ordine:

- Una guida sintetica per l'utilizzo del programma finale, accompagnata da alcuni frammenti di codice commentati.
- Valori dei coefficienti di penalità assegnati ai termini della funzione obiettivo.

# 1 Stato dell'arte

## 1.1 Problemi di schedulazione

I problemi di scheduling riguardano l'allocazione di risorse limitate ad attività nel tempo. Essi richiedono di determinare: l'ordine in cui l'insieme di attività (task) viene eseguito, il tempo in cui ogni attività viene eseguita perseguiendo un certo obiettivo e come allocare le risorse che si hanno. Si differenzia lo scheduling dal sequenziamento, il quale si limita al trovare l'ordine migliore con il quale eseguire le attività, senza tenere in conto le tempistiche e l'allocazione delle risorse.

I campi di applicazione sono variegati e molteplici:

- Shop scheduling: per la schedulazione del lavoro di produzione.
- Schedulazione del personale: quello specifico del nostro caso, può riguardare il personale di un qualsiasi ambito; in letteratura è importante il *Nurse Scheduling Problem* (NSP), ovvero il problema di trovare il miglior modo per assegnare le infermiere ai loro turni.
- Scheduling di facility: sale operatorie, aule didattiche,...
- Scheduling di veicoli: spedizioni postali e schedulazione di mezzi pubblici.
- Project scheduling.
- ...

In generale, i problemi di schedulazione possono essere classificati in base a diversi criteri, tra cui la natura delle risorse, la tipologia delle attività, la presenza di vincoli e l'obiettivo da ottimizzare. Le risorse possono essere di tipo rinnovabile (ad esempio personale o macchinari disponibili periodicamente) o non rinnovabile (come materiali o budget limitati). Le attività, invece, possono presentare vincoli di precedenza, tempi di esecuzione differenti e requisiti specifici di risorse.

Un altro aspetto fondamentale riguarda la distinzione tra schedulazione statica e schedulazione dinamica:

- Statica: tutte le informazioni necessarie sono note in anticipo, e il piano di schedulazione viene elaborato una volta sola.
- Dinamica: il piano di schedulazione si può aggiornare in tempo reale, così da adattarsi a eventi imprevisti, come ritardi, guasti o assenze di personale.

Gli obiettivi perseguiti possono variare a seconda del contesto applicativo, i più comuni:

- minimizzazione del makespan (tempo totale di completamento del lavoro);
- minimizzazione dei ritardi o delle penalità associate al mancato rispetto delle scadenze;
- massimizzazione dell'utilizzo delle risorse o del throughput produttivo;
- equità nella distribuzione del carico di lavoro tra il personale;
- rispetto di vincoli normativi o contrattuali (turnazioni, pause, limiti di orario).

Dal punto di vista teorico, la maggior parte dei problemi di schedulazione appartiene alla classe dei problemi NP-hard, il che implica che non esistono algoritmi polinomiali noti in grado di risolverli esattamente per istanze di grandi dimensioni. Di conseguenza, nella pratica si ricorre spesso a metodi approssimati, come:

- Euristiche costruttive e local search, che generano soluzioni buone in tempi brevi;
- Metaeuristiche (ad esempio genetic algorithms, simulated annealing, tabu search, ant colony optimization), capaci di esplorare lo spazio delle soluzioni in modo più efficace;
- Metodi di ottimizzazione esatta, come la programmazione lineare intera o la programmazione a vincoli, utilizzati soprattutto per istanze di piccola o media dimensione.

Infine, con l'avvento delle moderne tecnologie informatiche, la schedulazione trova applicazione anche in ambiti emergenti come la smart manufacturing, la sanità digitale, i servizi on-demand e il cloud computing, dove l'automazione e l'uso di algoritmi intelligenti (machine learning, sistemi multi-agente, ottimizzazione predittiva) permettono di migliorare l'efficienza e la flessibilità delle decisioni di pianificazione.

## 1.2 Schedulazione del personale

La prima classificazione dei metodi per la schedulazione del personale fu proposta da Baker, il quale divise il personnel scheduling in tre grandi tipologie:

- Shift scheduling: anche chiamato time-of-day scheduling, ha come problema principale quello di pianificare i turni giornalieri.
- Days off scheduling: la lunghezza della settimana lavorativa non si limita ad andare dal lunedì al venerdì, ma comprende anche sabato e domenica, rendendo così necessario pianificare i giorni di riposo dei lavoratori.

- Tour scheduling: combinazione dei due casi precedenti; la complessità è principalmente influenzata dalla durata minima dell'intervallo di planning (da 15 minuti fino a 8 ore).

Un'altra classificazione è quella in base alla soluzione adottata per risolvere il problema. Alfares individuò dieci categorie: soluzione manuale, programmazione intera, modellazione implicita, decomposizione, goal programming, generazione di set di lavoro, soluzioni basate su LP, costruzione/miglioramento, metaeuristiche e altri metodi.

INSERIRE QUALCOSA SU PROBLEMI DI PERSONNEL SCHEDULING, LISTA MAGARI DI PAPERS

## **2 Descrizione del problema**

### **2.1 Descrizione generale**

Una delle attività più laboriose per il reparto risorse umane di un supermercato di dimensioni medio-grandi, appartenente ad una catena della GDO, è la pianificazione dei turni: sfruttando i fogli di calcolo, la turnazione di una singola settimana può richiedere fino ad addirittura due giorni interi di lavoro. Si richiede inizialmente di trovare la pianificazione oraria migliore e poi di automatizzare il processo di assegnamento dei dipendenti, andando incontro ad eventuali esigenze aziendali e preferenze del personale.

### **2.2 Tipologie di contratto**

Il personale è suddiviso in tre categorie contrattuali:

- Full time: 40 ore settimanali;
- Part time: 24 ore settimanali;
- Part time weekend: 20 ore settimanali, con disponibilità limitata ai giorni di venerdì, sabato e domenica.

### **2.3 Struttura dei turni**

Il supermercato opera sette giorni su sette, dalle 08:00 alle 20:00, per tutto l'anno.

La giornata lavorativa è suddivisa in slot di 30 minuti. Ogni turno può avere una durata compresa tra 3 e 6 ore.

I lavoratori full time possono coprire uno o due turni giornalieri, mentre i part time possono svolgerne solo uno.

Il tempo massimo di lavoro giornaliero per un singolo dipendente è di 12 ore, anche se nella pratica si tende a non superare le 8 ore.

È inoltre previsto che alcuni cassieri rimangano 30 minuti oltre l'orario di chiusura (20:00) per le attività di pulizia e sistemazione finale.

### **2.4 Vincoli settimanali**

Ogni lavoratore deve rispettare il proprio monte ore contrattuale, evitando di superare il limite massimo settimanale di 48 ore (inclusi eventuali straordinari). Tra due turni consecutivi deve essere garantito un riposo minimo di 11 ore, in conformità con le normative sul lavoro, anche se si preferisce prevedere pause più lunghe per motivi di sicurezza e benessere del personale.

## **2.5 Preferenze del personale**

Oltre ai vincoli contrattuali, il modello tiene conto di alcune preferenze espresse dai dipendenti, che contribuiscono a migliorare la soddisfazione e l'equità complessiva della pianificazione.

In particolare, vengono considerate le seguenti preferenze:

- avere giorni di riposo consecutivi;
- ridurre al minimo gli stacchi tra due turni nello stesso giorno (favorendo turni continuativi);
- disporre del riposo domenicale, ove possibile.

## **2.6 Fabbisogno di personale**

Il numero minimo di cassieri necessari in ciascuno slot orario viene definito dal capoparto, in base ai flussi di clientela e alle esigenze operative del punto vendita.

Il piano orario deve quindi garantire una copertura completa della domanda di personale, evitando contemporaneamente situazioni di sotto- o sovraccopertura.

## **2.7 Obiettivi del modello**

La formulazione del piano dei turni mira al raggiungimento di più obiettivi:

- Minimizzare i costi del personale;
- Massimizzare la soddisfazione del personale;
- Garantire equità nella distribuzione dei turni, dei riposi e delle ore lavorate;
- Mantenere flessibilità operativa, in modo da poter gestire eventuali imprevisti (assenze, malattie, permessi, variazioni della domanda).

## **2.8 Sintesi**

In sintesi, il problema affrontato è un problema di ottimizzazione combinatoria tipico del rostering/staff scheduling.

Richiede di assegnare, per un periodo prefissato (una o due settimane, o un mese), un insieme di turni ai lavoratori disponibili, in modo da soddisfare i vincoli di copertura, orario e riposo, cercando contemporaneamente di ottimizzare più criteri di tipo economico e organizzativo.

### 3 Modello matematico

#### 3.1 Orario e copertura

Introduciamo gli insiemi:

$$\begin{aligned} W &= FT \cup PT \cup PTW \\ FT &= \{w_1, \dots, w_n\} \\ PT &= \{w_1, \dots, w_p\} \\ PTW &= \{w_1, \dots, w_k\} \\ FT \cap PT \cap PTW &= \emptyset \end{aligned}$$

ove  $FT$ ,  $PT$  e  $PTW$  rappresentano rispettivamente gli insiemi dei lavoratori full-time, part-time e part-time fine settimana. Un lavoratore può appartenere ad una sola categoria, quindi un lavoratore non può essere sia full-time che part-time per esempio. L'insieme  $W$  rappresenta l'unione dei tre insiemi. Appartenere ad un insieme, equivale a condividere lo stesso monte orario e paga oraria con gli altri elementi dell'insieme, quindi di nessun lavoratore possiede un costo aggiuntivo rispetto ad altri. Inoltre, per questo problema considereremo il caso per cui tutti i lavoratori abbiano lo stesso tipo e livello contrattuale (rivedere con prof).

Il fabbisogno settimanale è quasi costante nel corso dell'anno, le variazioni principali si notano in prossimità delle festività come Natale o Pasqua, periodi nei quali si nota un incremento del fabbisogno in risposta all'aumento della clientela. In situazioni di festività, si possono tollerare di più situazioni di eccesso di personale. Il supermercato ci ha fornito il fabbisogno standard non relativo a periodi festivi.

Si specificano:

$$\begin{aligned} D &= \{lun, \dots, dom\} = \{1, \dots, 7\} \text{ l'insieme dei giorni.} \\ f_{d,k} &\text{ il fabbisogno per lo slot } k \text{ del giorno } d. \\ K_d &\text{ l'insieme degli slot del giorno } d. \end{aligned}$$

La giornata di lavoro inizia alle 08:00 e finisce alle 20:30, è quindi suddivisa in 25 slot temporali da 30 minuti ciascuno. L'orario è continuato ed è identico per tutti e sette i giorni della settimana, dunque vi sarà da definire un totale di 175 fabbisogni, ognuno per il singolo slot  $k$  della giornata  $d$ .

Definiamo ora:

$$S = \{s_1, \dots, s_l\} \text{ l'insieme dei turni } s$$

I turni  $s$  sono caratterizzati da:

- $day(s)$ : il giorno  $d$  del turno  $s$ .
- $start(s)$ : lo slot di inizio del turno  $s$ .

- $L_s$ : durata ( $\in [6, 7, \dots, 12]$ ) del turno  $s$ .
- $A_{s,k}$ : copertura dello slot  $k$  dal turno  $s$  (1 se coperto, 0 altrimenti).

Il problema così individuato rimanda al problema del *Set Covering*, ove bisogna trovare la più piccola sotto-collezione di set tale per cui l'unione dei suoi elementi sia equivalente all'insieme universo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{s \in S} x_s \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{s: e \in s} x_s \geq 1, \forall e \in U \\ & x_s \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con la differenza che in questo caso la somma di set (turni) deve essere maggiore o uguale al fabbisogno specificato per lo slot considerato.

Per definire se un lavoratore lavora o meno un certo turno, usiamo una variabile decisionale  $x_{w,s}$ , la quale varrà 1 nel caso in cui al lavoratore  $w$  sia assegnato il turno  $s$ , 0 altrimenti. Unendola alla matrice di copertura  $A_{s,k}$  possiamo così dire se un lavoratore  $w$ , prendendosi in carico il turno  $s$ , copre o meno lo slot  $k$ .

I lavoratori si differenziano per il monte orario minimo in base alla tipologia di contratto:

$$C_w \in \{20, 24, 48\}$$

Una volta introdotto il necessario per l'orario e la copertura, possiamo iniziare a definire i vincoli:

$$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} \geq f_{d,k} \quad \forall d, k \quad (1)$$

$$C_w \leq \sum_{w \in W, s} 0.5 * L_s x_{w,s} \leq 48 \quad \text{monte ore} \quad (2)$$

Come già accennato prima parlando del *SetCovering*, la copertura del fabbisogno si specifica mediante il primo vincolo. Questo vincolo ci assicura che almeno  $f_{d,k}$  lavoratori siano presenti nello slot temporale  $k$  del giorno  $d$ . Con questo vincolo non è ammissibile una situazione di difetto di personale, ma è ammissibile un eccesso di personale, seppure più avanti verrà penalizzata. Si potrebbe introdurre una situazione di difetto modificando il valore di  $f_{d,k}$  o cambiando il peso del vincolo.

Ogni lavoratore deve lavorare almeno il monte orario minimo definito da contratto, ma può raggiungere le 48 ore facendo straordinari. Anche questa situazione verrà in seguito penalizzata.

Gli ultimi vincoli riguardano il numero di turni giornalieri, che ricordiamo sono:

*Part time weekend: 20 ore settimanali, con disponibilità limitata ai giorni di venerdì, sabato e domenica.*

...

*I lavoratori full time possono coprire uno o due turni giornalieri, mentre i part time possono svolgerne solo uno.*

*Il tempo massimo di lavoro giornaliero per un singolo dipendente è di 12 ore, anche se nella pratica si tende a non superare le 8 ore.*

Si descrivono quindi:

$$\sum_{w \in FT, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 2, \quad \forall d \quad (3)$$

$$\sum_{w \in PT, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 1, \quad \forall d \quad (4)$$

$$x_{w \in PTW, s} = 1, \quad day(s) = 5 \wedge start(s) = 16:30 \quad (5)$$

$$x_{w \in PTW, s} = 0, \quad day(s) < 5 \quad (6)$$

$$\sum_{w \in PTW, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 2, \quad d > 5 \quad (7)$$

I primi due rappresentano i vincoli per i lavoratori full-time e part-time, mentre gli ultimi tre sono i vincoli per i part-time fine settimana. Per richiesta del datore, i lavoratori part-time fine settimana lavorano il turno della chiusura del venerdì, mentre il sabato e la domenica vengono trattati come i lavoratori full-time.

Si può infine introdurre la funzione obiettivo per questa parte:

$$f_1 = \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} L_s x_{w,s} \quad (8)$$

ovvero la somma totale delle ore lavorate dall'intero roster dei cassieri, che andrà minimizzata come da richiesta.

### 3.2 Straordinari

Gli straordinari vengono di molto penalizzati in quanto prevedono una retribuzione aggiuntiva, aumentando notevolmente il costo finale per il supermercato. Introduciamo quindi:

$$O_w \in \mathbb{N}$$

che rappresenta le ore straordinarie assegnate al lavoratore  $w$ . Questo valore è maggiore o uguale a 0 e si preferirebbe che valesse 0 per tutti i lavoratori del roster. Non vale 0 nel caso in cui:

$$O_w \geq \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} - C_w \quad \forall w \in W \quad (9)$$

ovvero al lavoratore  $w$  vengono assegnate più ore di quelle previste dal contratto. La somma di questi valori va minimizzata:

$$f_2 = \sum_{w \in W} O_w \quad (10)$$

Si potrebbe cambiare il peso di questo obiettivo nella funzione finale per così riadattarsi. Risulta particolarmente nei periodi festivi, quando la situazione diventa imprevedibile per malattie impreviste e flusso della clientela.

### 3.3 Equità

I problemi riguardanti l'equità sono:

- Carico orario settimanale uguale per tutti i lavoratori dello stesso tipo.
- Carico orario giornaliero uguale per tutti i lavoratori dello stesso tipo, ad esempio scatta una situazione di inequità nel momento in cui un lavoratore part-time lavori 6 ore un giorno mentre un altro ne lavora part-time solo 3.
- Nel caso dei lavoratori full-time e dei part-time, la gestione delle domeniche libere rientra nel principio di equità.

Per il primo punto, introduciamo la variabile:

$$H_w = \sum_{w \in T, s} 0.5 * L_s x_{w,s} \quad (11)$$

che rappresenta le ore totali assegnate al lavoratore  $w$ .

Introduciamo altre due variabili:

$$d_w^+ \geq 0, \quad d_w^- \leq 0 \quad \forall w \in W \quad (12)$$

$$d_w^+, d_w^- \in \mathbb{R} \quad (13)$$

che rappresentano rispettivamente le ore straordinarie oppure quelle mancanti per raggiungere il monte orario previsto da contratto. Vale quindi:

$$d_w^+ \geq H_w - C_w \quad (14)$$

$$d_w^- \leq H_w - C_w \quad (15)$$

ove, se le ore assegnate sono di più rispetto a quelle previste, il valore di  $d_w^+$  sarà uguale al surplus orario, mentre varrà il contrario per  $d_w^-$  nel caso in cui venissero assegnate meno ore al dipendente. L'obiettivo è quello di avere uno stesso quantitativo orario per tutti i lavoratori dello stesso tipo, quindi si minimizza:

$$f_3 = \sum_{T \in W} \sum_{w \in T} \alpha_1 d_w^+ + \beta_1 d_w^- \quad (16)$$

cioè la somma delle deviazioni dal valore previsto da contratto per ogni tipo. Vale  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \leq 0$  e in base a quale situazione sia preferibile (di eccesso o di difetto) posso decidere tra  $\alpha \geq |\beta|$  oppure  $\alpha < |\beta|$ . Nel nostro caso consideriamo  $\alpha > |\beta|$ , in quanto una situazione di surplus è sfavorita per scelta del supermercato.

Altro problema è la durata dei turni. Sono permessi turni da 3 fino a 6 ore, ma una durata eccessiva dei turni non è ben vista dal personale e potrebbe portare a situazioni di squilibrio in cui alcuni dipendenti lavorano un solo turno da 6 ore al giorno mentre altri ne lavorano due da 3/4 ore ciascuno. Per questione di praticità, possiamo imporre un'unica preferenza per l'intero personale verso il turno da 4 ore. Introduciamo quindi:

$$dur_s^+ \geq 0, \quad dur_s^- \leq 0 \quad \forall s \in S \quad (17)$$

$$dur_s^+, dur_s^- \in \mathbb{R} \quad (18)$$

che indicano la durata di tutti i turni  $s$  attivi, aggiungiamo anche:

$$dur_s^+ \geq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \quad (19)$$

$$dur_s^- \leq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \quad (20)$$

e, infine, da minimizzare:

$$f_4 = \sum_{s \in S} \alpha_2 dur_s^+ + \beta_2 dur_s^- \quad (21)$$

Ogni dipendente potrebbe esprimere la propria preferenza e si potrebbe risolvere il problema andando a cambiare i parametri appena visti. Come prima,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \leq 0$  e  $\alpha > |\beta|$ , in quanto un turno che superi le 4 ore risulta molto più pesante rispetto ad un turno di 3 ore.

### 3.4 Stacco turni

I dipendenti hanno richiesto uno stacco tra due turni giornalieri il più breve possibile. Questo permetterebbe di ridurre al minimo il tempo trascorso sul luogo di lavoro e aumentare la soddisfazione del personale. Il problema si pone solo nel caso in cui il lavoratore faccia due turni in un giorno:

$$split_{w,d} \geq \sum_{s:day(s)=d} x_{w,s} - 1 \quad (22)$$

$$split_{w,d} \in \{0, 1\} \quad (23)$$

è una variabile decisionale, che ci dice se il lavoratore  $w$  è assegnato a due turni  $s_1$  e  $s_2$  nello stesso giorno  $d$ .

I turni  $s$ , per come sono descritti [3.1], permettono il calcolo dello slot di fine turno:

$$end(s) = start(s) + L(s) \quad (24)$$

e da questo posso trovare il valore dello stacco:

$$stacco_{w,d} \geq split_{w,d} \cdot (start(s_2) - end(s_1)), \quad \forall w \in W \quad (25)$$

che viene considerato solo nel caso in cui effettivamente il lavoratore abbia due turni lo stesso giorno. Devono valere di conseguenza anche:

$$\begin{aligned} x_{w,s_1} &= x_{w,s_2} = 1, \\ day(s_1) &= day(s_2), \\ start(s_2) &> end(s_1). \end{aligned}$$

Bisogna infine minimizzare:

$$f_5 = \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} stacco_{w,d} \quad (26)$$

ovvero gli stacchi di tutti i lavoratori.

### 3.5 Giorni di riposo

Si considera giorno di riposo un qualsiasi giorno della settimana nel quale il lavoratore non è stato assegnato a nessun turno:

$$r_{w,d} \geq 1 - \sum_{s \in S_d} x_{w,s}, \quad \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \quad (27)$$

Durante la settimana, il lavoratore deve avere almeno un giorno di riposo e per evitare un sovraccarico di ore giornaliere può arrivare ad un massimo di due giorni di riposo settimanali:

$$1 \leq \sum_{d \in D} r_{w,d} \leq 2 \quad (28)$$

Solo i full-time e i part-time possono avere fino a due giorni di riposo a settimana. Per i part-time fine settimana il problema non si pone, in quanto durante la settimana non gli si può assegnare turni.

Si introduce una nuova variabile binaria per indicare il riposo continuato per i lavoratori full-time:

$$c_{w,d} \leq r_{w,d} \quad (29)$$

$$c_{w,d} \leq r_{w,d+1} \quad (30)$$

$$c_{w,d} \leq r_{w,d} + r_{w,d+1} - 1 \quad (31)$$

$$c_{w,d} \in \{0, 1\}, \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \quad (32)$$

che vale 1 solo nel caso in cui il lavoratore  $w$  ha due giorni di riposo consecutivi  $d$  e  $d + 1$  durante la settimana. Si vuole massimizzare questa quantità per preferenza del personale:

$$f_6 = \sum_{w \in FT} \sum_{d \in D} c_{w,d} \quad (33)$$

### 3.6 Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (34)$$

I  $\lambda_i$  rappresentano i pesi che noi diamo ai vari obiettivi: più  $\lambda_i$  è elevato, più l'obiettivo relativo incide nella funzione obiettivo generale, ottenendo di fatto più importanza nella ricerca dell'ottimo.

### 3.7 Formulazione

#### Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

## Vincoli, variabili orario e copertura

$f_1 = \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} L_s x_{w,s}$	
$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} \geq f_{d,k}$	$\forall d, k$
$C_w \leq \sum_{w \in W, s} 0.5 * L_s x_{w,s} \leq 48$	monte ore
$\sum_{w \in FT, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 2,$	$\forall d$
$\sum_{w \in PT, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 1,$	$\forall d$
$x_{w \in PTW, s} = 1,$	$day(s) = 5 \wedge start(s) = 16:30$
$x_{w \in PTW, s} = 0,$	$day(s) < 5$
$\sum_{w \in PTW, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 2,$	$d > 5$
$x_{w,s} \in \{0, 1\},$	$\forall w \in T, s \in S$
$W = FT \cup PT \cup PTW$	insieme dei lavoratori
$FT \cap PT \cap PTW = \emptyset$	
$D = \{1, \dots, 7\}$	insieme dei giorni
$K_d$	insieme slot temporali del giorno d
$S = \{s_1, \dots, s_l\}$	insieme dei turni ammissibili s
$d_{d,k} \in \mathbb{N}$	fabbisogno slot k giorno d
$A_{s,k} \in \{0, 1\}$	copertura turno s per slot k
$L_s \in [6, 7, \dots, 12]$	durata turno s
$C_w \in \{20, 24, 48\}$	ore contrattuali lavoratore w

## Vincoli, variabili straordinari

$f_2 = \sum_{w \in W} O_w$	
$O_w \geq \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} - C_w$	$\forall w \in W$
$O_w \in \mathbb{N}$	ore di straordinari lavoratore w

### Vincoli, variabili equità

$$\begin{aligned}
f_3 &= \sum_{T \in W} \sum_{w \in T} \alpha_1 d_w^+ + \beta_1 d_w^- \\
f_4 &= \sum_{s \in S} \alpha_2 dur_s^+ + \beta_2 dur_s^- \\
d_w^+ &\geq 0, d_w^- \leq 0 & \forall w \in W \\
d_w^+ &\geq H_w - C_w \\
d_w^- &\leq H_w - C_w \\
dur_s^+ &\geq 0, dur_s^- \leq 0 & \forall s \in S \\
dur_s^+ &\geq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \\
dur_s^- &\leq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \\
H_w &= \sum_{w \in T, s} 0.5 * L_s x_{w,s} & \text{ore assegnate a lavoratore w} \\
d_w^+, d_w^-, dur_s^+, dur_s^- &\in \mathbb{R} \\
\alpha_1, \alpha_2 &\in \mathbb{R}^+ \\
\beta_1, \beta_2 &\in \mathbb{R}^-
\end{aligned}$$

### Vincoli, variabili stacco turni

$$\begin{aligned}
f_5 &= \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} stacco_{w,d} \\
split_{w,d} &\geq \sum_{s: day(s)=d} x_{w,s} - 1 \\
end(s) &= start(s) + L(s) \\
stacco_{w,d} &\geq split_{w,d} \cdot (start(s_2) - end(s_1)), \quad \forall w \in W \\
x_{w,s_1} = x_{w,s_2} &= 1 \\
day(s_1) &= day(s_2) \\
start(s_2) &> end(s_1) \\
split_{w,d} &\in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

## Vincoli, variabili riposo

$$\begin{aligned}f_6 &= \sum_{w \in FT} \sum_{d \in D} c_{w,d} \\r_{w,d} &\geq 1 - \sum_{s \in S_d} x_{w,s}, \quad \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \\1 &\leq \sum_{d \in D} r_{w,d} \leq 2 \\c_{w,d} &\leq r_{w,d} \\c_{w,d} &\leq r_{w,d+1} \\c_{w,d} &\leq r_{w,d} + r_{w,d+1} - 1 \\c_{w,d} &\in \{0, 1\}, \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \\r_{w,d} &\in \mathbb{N}\end{aligned}$$

# **A Appendice**

## **A.1 Sottosezione dell'appendice**

Inserisci il contenuto dell'appendice

## Riferimenti bibliografici

- [1] George B Dantzig. «A comment on Edie's "Traffic delays at toll booths"». In: *Journal of the Operations Research Society of America* 2.3 (1954), pp. 339–341.
- [2] Leslie C Edie. «Traffic delays at toll booths». In: *Journal of the operations research society of America* 2.2 (1954), pp. 107–138.
- [3] Michael J. Brusco e Larry W. Jacobs. «Cost analysis of alternative formulations for personnel scheduling in continuously operating organizations». In: *European Journal of Operational Research* 86.2 (1995), pp. 249–261. ISSN: 0377-2217. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)00063-I](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)00063-I). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037722179400063I>.
- [4] Hesham K Alfares. «Survey, categorization, and comparison of recent tour scheduling literature». In: *Annals of Operations Research* 127.1 (2004), pp. 145–175.
- [5] Andreas T Ernst et al. «An annotated bibliography of personnel scheduling and rostering». In: *Annals of Operations Research* 127.1 (2004), pp. 21–144.
- [6] Jorne Van den Bergh et al. «Personnel scheduling: A literature review». In: *European Journal of Operational Research* 226.3 (2013), pp. 367–385. ISSN: 0377-2217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.11.029>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221712008776>.
- [7] Serena Cortopassi. *Modello di Ottimizzazione per la Schedulazione del Personale Infermieristico di una Residenza Assistita*. Tesi di laurea triennale in Matematica. 2014. URL: <https://etd.adm.unipi.it/t/etd-04172014-181428/>.

## **Ringraziamenti**

Grazie.