



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI BRESCIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

*Corso di Laurea in Ingegneria Informatica*

Tesi di Laurea

MILP: MODELLI DI PROGRAMMAZIONE  
LINEARE MISTA INTERA PER LA  
SCHEDULAZIONE DEL PERSONALE

Relatrice:  
**Prof. Renata Mansini**

Laureando:  
**Lublanis Matteo**  
Matricola n.  
**736418**

*Anno Accademico 2024/2025*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
0.1 Personnel Scheduling: definizione e caratteristiche . . . . .	2
0.2 Obiettivo e struttura della tesi . . . . .	3
<b>1 Descrizione del problema</b>	<b>4</b>
1.1 Introduzione . . . . .	4
1.2 Settimana lavorativa . . . . .	4
1.3 Tipologia personale, caratteristiche turnazione . . . . .	4
1.4 Richieste del caporeparto . . . . .	5
1.5 Skill del personale . . . . .	6
1.6 Preferenze del personale . . . . .	6
1.7 Obiettivi finali . . . . .	6
<b>2 Stato dell'arte</b>	<b>7</b>
2.1 Caratteristiche del personale . . . . .	7
2.2 Vincoli e Obiettivi . . . . .	8
2.3 Metodi Risolutivi e Incertezza . . . . .	10
2.4 Aree di Applicazione . . . . .	12
2.5 Rassegna bibliografica aggiuntiva . . . . .	12
<b>3 Definizione formale</b>	<b>16</b>
3.1 Problema base . . . . .	16
3.2 Problema esteso: prima parte . . . . .	19
3.3 Funzione obiettivo . . . . .	22
<b>4 Modello matematico</b>	<b>23</b>
4.1 Formulazione . . . . .	23
<b>A Appendice</b>	<b>26</b>
A.1 Sottosezione dell'appendice . . . . .	26

# Introduzione

## 0.1 Personnel Scheduling: definizione e caratteristiche

Un problema di Personnel Scheduling consiste nel trovare il modo migliore per attribuire i turni ai lavoratori, in modo tale sia da rispettare una serie di vincoli di servizio e contrattuali e sia da massimizzare le preferenze del personale riducendo comunque al minimo i costi previsti.

Negli ultimi decenni, i problemi di schedulazione del personale sono stati studiati ampiamente. Una delle cause principali dietro questo interesse sta il lato economico: il costo del lavoro rappresenta ad oggi, per molte realtà aziendali, uno degli elementi principali della spesa aziendale e riuscire a minimizzarlo può portare grossi benefici all'azienda. La prima formulazione di questo problema venne proposta negli anni '50 da George Dantzig e William Edie, ma ad oggi risulta antiquata in quanto:

- Non esistevano diverse tipologie di contratto, solo contratti full-time.
- Ogni dipendente è interscambiabile, non vengono tenute in considerazione le skill del singolo individuo.
- Come obiettivo vi era solo quello di minimizzare il costo del personale, non considerando altri fattori come preferenze o indisposizioni.

Baker fornì una classificazione dei problemi di Personnel Scheduling in tre gruppi:

- Shift Scheduling: si pianifica su un orizzonte di pianificazione giornaliero, implicando che il fabbisogno di personale per ciascun turno può essere gestito in modo indipendente per determinare le allocazioni appropriate; rappresenta il problema più facile da risolvere delle tre categorie, ma non risponde a situazioni più complesse (esempio, la necessità dei turni che si sovrappongono, tipico problema per i call center).
- Days off Scheduling: al posto di pianificare i turni di lavoro, si pianificano i giorni di riposo per i dipendenti; problema tipico per aziende che lavorano sette giorni su sette, mentre il lavoratore ne lavora solo cinque/sei (una variante del problema potrebbe richiedere che i giorni di riposo siano consecutivi).
- Tour scheduling: una combinazione delle due categorie viste precedentemente, bisogna assegnare un tour (giorni della settimana e ore del giorno) da lavorare ad un particolare dipendente. Questa categoria risulta molto più complicata rispetto alle due precedenti e la complessità del problema, seppur dipenda da più fattori, è fortemente influenzata dalla durata minima dell'intervallo di pianificazione (solitamente, dai 15 minuti alle 8 ore).

In Ricerca Operativa, il Personnel Scheduling è un problema di tipo NP-hard, o peggio NP-complete: la complessità deriva principalmente da tutte le possibili combinazioni dei turni che si possono ottenere, rendendo la ricerca di un ottimo molto più complessa e lunga.

Il problema è in continua evoluzione e necessita quindi modelli complessi e flessibili a eventuali cambiamenti. Gli strumenti risolutivi oggi disponibili (Gurobi, CPLEX, FICO Xpress, Google OR-Tools) integrano algoritmi sempre più raffinati: un problema che decenni fa veniva approcciato manualmente ottenendo risultati approssimativi, può ora essere risolto con precisione, garantendo soluzioni di alta qualità o, in alcuni casi, ottime a livello globale.

## 0.2 Obiettivo e struttura della tesi

Questa tesi si pone come obiettivo quello di risolvere il problema di personnel scheduling (tour scheduling) per il reparto di cassa di un supermercato. Il fine ultimo è quello di trovare la miglior pianificazione settimanale possibile per suddetto supermercato e sviluppare uno strumento applicativo software per permettere un’assegnazione dei turni semplificata ai dipendenti.

Nel Capitolo 1 viene presentato informalmente il problema reale considerato, descrivendone i soggetti coinvolti, le preferenze espresse, ciò che si vuole ottenere e i vincoli di varia natura.

Nel Capitolo 2 viene delineato lo stato dell’arte nel settore, andando anche a descrivere altre eventuali applicazioni degli stessi concetti che andremo a trattare nel corso della tesi.

Nel Capitolo 3 si fornisce la descrizione formale del problema, che verrà tradotta in un vero e proprio modello matematico, riportato all’interno del Capitolo 4.

Nel Capitolo 5 si illustra lo strumento utilizzato per l’implementazione del modello matematico (Gurobi), le principali fasi del processo di realizzazione e i risultati dei test sperimentali volti a valutarne l’efficienza e la validità.

Nel Capitolo 6, una volta terminata la formulazione del piano orario, si definisce il meccanismo di assegnamento dei turni.

Negli appendici infine vengono riportati, per ordine:

- Una guida sintetica per l’utilizzo del programma finale, accompagnata da alcuni frammenti di codice commentati.
- Valori dei coefficienti di penalità assegnati ai termini della funzione obiettivo.

# 1 Descrizione del problema

## 1.1 Introduzione

La formulazione di un piano orario per i propri dipendenti risulta fattibile fin quando la dimensione del personale da gestire rimane contenuta e fin quando non si tengono in considerazione variabili secondarie come preferenze del personale e limiti giuridici.

Si considera il problema di turnazione per un roster di cassieri di un ipermercato, appartenente alla grande distribuzione organizzata, affermatosi nella realtà bresciana. Il piano di turnazione viene stilato settimanalmente dal caporeparto delle casse e può richiedere fino a due/tre giorni di lavoro intenso, spesso non riuscendo a trovare una soluzione adeguata al flusso della clientela e alle esigenze del punto vendita, creando inoltre disagio all'interno del personale.

Si richiede, quindi, di formulare una piano di turnazione standard e poi di risolvere il problema di assegnamento dei dipendenti ai corrispettivi turni, sia rispettando i vincoli contrattuali e sia andando incontro a esigenze di varia natura (aziendali e dei singoli dipendenti), in modo tale da non solo ottimizzare i tempi lavorativi necessari alla pianificazione settimanale ma anche riuscire a ridurre i costi e a massimizzare la soddisfazione del personale.

## 1.2 Settimana lavorativa

L'ipermercato opera 7 giorni su 7, con un orario continuato per la clientela dalle 08:00 fino alle 20:00. Tralasciando le festività nazionali (Natale, Ferragosto, Festa dei lavoratori, ...), è aperto tutto l'anno.

L'orario per un cassiere normale va dalle 08:00 fino alle 20:30, mezz'ora dopo la chiusura dell'ipermercato, in modo tale da poter eseguire le attività finali necessarie, come conteggio dei contanti e pulizie. Alle 07:00 è richiesta invece l'utilizzo della spazzatrice per poter pulire le corsie: solo alcuni dipendenti possiedono la formazione necessaria per poter adoperare la spazzatrice, dipendenti ai quali sarà richiesto di iniziare il turno prima rispetto agli altri.

## 1.3 Tipologia personale, caratteristiche turnazione

Il personale è suddiviso in tre categorie contrattuali:

- Full time: 40 ore settimanali;
- Part time: 24 settimanali;
- Part time weekend: 20 ore settimanali, con disponibilità limitata ai giorni di venerdì, sabato e domenica.

Ogni singolo turno può durare dalle 3 alle 6 ore. Non sono previste pause in un turno, ma sono previsti due turni giornalieri per i lavoratori full-time e part-time fine settimana (solo il sabato e la domenica per loro); quindi, ci sarà uno stacco tra due turni giornalieri, che può variare da una mezz'ora fino a quattro ore e mezza. Un dipendente può lavorare fino a 12 ore al giorno, ma è una situazione indesiderata: si tende ad assegnare fino ad un massimo di 8 ore al giorno ad ogni singolo dipendente, con piccole variazioni di mezz'ora in positivo o in negativo in base alle esigenze. Ad un dipendente si possono assegnare fino ad un massimo di 48 ore settimanali (ore previste da contratto più straordinari), ma si vuole rimanere il più possibile vicini ai monte ore previsti da contratto: questo vale anche per i part-time, i quali prima delle 40 ore lavorerebbero ore supplementari e non straordinarie.

Tra l'ultimo turno del giorno precedente e il primo turno del giorno preso in considerazione, vi deve essere un riposo di almeno 11 ore previsto per legge. Considerando la struttura degli orari (senza considerare chi deve passare la spazzatrice), si rispetta tranquillamente il vincolo, però risulta comunque preferibile una pausa tra due turni in giorni consecutivi la più lunga possibile, così da permettere un riposo maggiore al dipendente.

## 1.4 Richieste del caporeparto

Il caporeparto è il soggetto che predispone il fabbisogno per ogni singolo slot temporale, in modo tale da poter pianificare il personale rispondendo in maniera adeguata al flusso della clientela e alle esigenze del punto vendita. Il caporeparto fornisce una tabella settimanale, di cui ogni singola cella rappresentano il numero di dipendenti richiesto per un certo slot orario: ad esempio, il sabato, essendo il giorno più intenso per l'ipermercato, avrà un fabbisogno molto più elevato rispetto ad un giorno infrasettimanale come il martedì.

Il fabbisogno è un numero indicativo di quante persone siano necessarie in quel momento; non è un limite obbligatorio, quindi possono esserci situazioni di sotto o sovraccopertura. La situazione di sovraccopertura è preferibile rispetto a quella di sottocopertura solo nel caso in cui vi siano dipendenti che possano andare in scatolame durante situazioni di basso flusso della clientela: una situazione di eccesso di personale in cassa non solo risulterebbe inutile, ma verrebbe anche malvisto dai clienti, che vedrebbero dei dipendenti fermi.

Il caporeparto vuole riuscire a coprire il fabbisogno richiesto, limitando il più possibile il monte ore lavorato totale, così da limitare le spese del personale.

Infine, il caporeparto vuole assicurarsi di riuscire a rispondere a situazioni critiche, in quanto il disagio arrecato da imprevisti potrebbe danneggiare l'immagine dell'ipermercato.

## 1.5 Skill del personale

Skill particolari individuate durante la descrizione del problema sono:

- Cassa-Reparto: alcuni cassieri possono essere assegnati sia nel reparto scatolame che alle casse, differenziandoli così dai puri cassieri, che una volta assegnati allo slot temporale dovranno per forza stare in cassa.
- Formazione spazzatrice: alcuni dipendenti possiedono la formazione necessaria per adoperare la spazzatrice; tali dipendenti possono iniziare a lavorare prima delle 08:00 per poter così pulire l'ipermercato entro l'apertura.

## 1.6 Preferenze del personale

Oltre ai vincoli contrattuali, si vuole tenere conto di alcune preferenze espresse dai dipendenti, che contribuiscono a migliorare la soddisfazione e l'equità complessiva della pianificazione.

In particolare, vengono considerate le seguenti preferenze:

- che vi sia equità nella distribuzione del carico lavorativo;
- avere giorni di riposo consecutivi;
- ridurre al minimo gli stacchi tra due turni nello stesso giorno (favorendo turni continuativi);
- disporre del riposo domenicale, ove possibile.

## 1.7 Obiettivi finali

La formulazione del piano dei turni mira al raggiungimento di più obiettivi:

- Minimizzare i costi del personale;
- Massimizzare la soddisfazione del personale;
- Mantenere flessibilità operativa, in modo da poter gestire eventuali imprevisti (assenze, malattie, permessi, variazioni della domanda).

Il problema affrontato è un problema di ottimizzazione combinatoria tipico del rostering/staff scheduling, il quale richiede di assegnare, per un periodo prefissato (una/due settimane, un mese o addirittura un anno), un insieme di turni ai lavoratori disponibili, in modo da soddisfare i vincoli di copertura, orario e riposo, cercando contemporaneamente di ottimizzare più criteri di tipo economico e organizzativo.

## 2 Stato dell'arte

Nel 2012, l'European Journal of Operational Research pubblicò un articolo chiamato *Personnel scheduling: A literature review*[16], nel quale un team di sei ricercatori ha raccolto 291 articoli per dare un quadro generale sullo stato dell'arte per il problema di Personnel Scheduling dal 2004 fino ad allora, definendone inoltre una tassonomia. La tassonomia per i problemi di Personnel Scheduling si basa su quattro campi: caratteristiche del personale, vincoli assieme a misure di performance e flessibilità, metodi risolutivi e incorporazione dell'incertezza, area applicativa e applicabilità della ricerca.

### 2.1 Caratteristiche del personale

La prima caratteristica del personale che si definisce è la tipologia di contratto: la maggior parte delle pubblicazioni scientifiche riguardante questo problema trattano problemi in cui il personale è per intero di tipo full-time. L'articolo di Hojati e Patil [15] è uno dei pochi che va a trattare la categoria dei contratti part-time per intero. Nel caso dei contratti part-time, la gestione dei turni diventa molto più articolata, in quanto bisogna tenere in considerazione nuovi problemi, come la disponibilità dei dipendenti rispetti a giorni specifici o anche la richiesta necessaria per l'azienda.

In alcuni problemi, le attività possono richiedere alcune skill specifiche, rendendo così il personale considerato ancora più eterogeneo rispetto alla suddivisione "full-time/part-time"; si considerano anche i casi in cui tali attività possono essere svolte da persone che non possiedono le skill necessarie, comportando però un aumento del costo, in quanto saranno ovviamente meno efficienti rispetto al personale qualificato. Le skill specifiche sono in stretto legame con i livelli di produttività e anzianità: allo stesso modo della classificazione in base alle skill, un lavoratore meno produttivo equivarrà ad un costo aumentato. Sia la produttività che l'anzianità possono essere combinate assieme, anche con altre skill. In particolare, per l'anzianità possono essere previsti dei privilegi, come giorni di riposo consecutivi o un peso maggiore che viene dato alle loro preferenze per gli orari.

Un'altra classificazione si basa sul raggruppamento degli impiegati: questo è molto utile in problemi dove si considera lo scheduling di un team di persone e non ogni dipendente individualmente, come ad esempio problemi legati all'area dei trasporti, dove si lega il problema di Personnel Scheduling con quello del routing di veicoli. Esempi per questo tipo di problemi sono l'articolo di Sydney C.K. Chu[6] o anche l'articolo di Heil, Hoffmann e Buscher[23], che si preoccupa di inquadrare nel dettaglio i problemi di crew scheduling per il trasporto ferroviario. Nell'articolo viene anche definita una tassonomia sulla base del tipo di decisioni che devono essere prese (assegnamento delle attività, sequenza dei turni, tempo, altro) e vengono separati in base a se vengono prese per interi team o per singoli membri del personale. Un esempio che evidenzia la tassonomia basata sulle decisioni si ritrova nell'articolo di Horn et al.[7], che si occupa di trovare il modo

più efficiente per la Forza di pattugliamento della Royal Australian Navy di utilizzare una nuova generazione di barche militari. Osservando la letteratura, si può notare che la maggior parte degli articoli si occupa solamente di creare una turnazione accettabile o una schedulazione dei lavori per i dipendenti, dato un carico di lavoro deterministico. Quasi mai, questo problema viene integrato con altri problemi di pianificazione, come la pianificazione del personale, previsione e adeguamento della distribuzione del carico di lavoro, distribuzione delle pause, assunzione e licenziamento, formazione,.... Diventa importante questo per la ricerca futura: cercare di unire tutte le decisioni in un unico problema di scheduling.

Anche la flessibilità con il tempo ha assunto un ruolo fondamentale, rendendo ancora di più complicata la formulazione dei modelli per i problemi considerati. La flessibilità può riguardare: sovrappponibilità dei turni, diversi orari di inizio, diverse lunghezze dei turni, diverse durate delle pause, ....

Le scelte decisionali prese per lo scheduling diventano fondamentali non solo per questioni economiche, ma anche per la questione psicologica e fisica dei lavoratori. Xu e Hall[24] pubblicarono un articolo riguardante la fatica lavorativa, introducendola come variabile all'interno dei problemi di scheduling: un lavoratore stanco rende di meno, aumentando di conseguenza il costo complessivo. L'articolo va ad analizzare quanto in letteratura venga misurata e analizzata la fatica e quale sia il suo impatto sulla performance, andando ad analizzare l'impatto che scelte di scheduling possono avere su di essa. Questo tema si lega strettamente al concetto di flessibilità, in quanto uno schema rigido non può rispondere ad una situazione variabile come la fatica di un lavoratore e bisognerà introdurre nuovi concetti, come quello delle rate-modifying activity (RMA, azioni che cambiano la velocità di produzione di una macchina) o delle micro-pause.

## 2.2 Vincoli e Obiettivi

Si differenziano i vincoli in hard e soft, ove con hard si indicano vincoli che non possono essere violati, mentre soft sono vincoli più flessibili. Nell'articolo vengono definite le seguenti categorie per i vincoli: copertura, temporali, equità e di equilibrio.

I vincoli di copertura rappresentano un aspetto chiave per i problemi di personnel scheduling: sia i vincoli hard che i vincoli soft di copertura stanno alla base dell'intero problema di scheduling, ovvero la scelta del numero di dipendenti necessari per coprire un carico di lavoro. I vincoli di copertura vanno contro solitamente la funzione obiettivo, che cerca di minimizzare la forza lavoro totale, in quanto direttamente legata al costo. La differenza tra capacità del personale minima e ottima è di fondamentale interesse per chi si occupa di questi problemi, in quanto rende necessario affrontare problemi come l'eccesso o il difetto di personale. All'interno dell'articolo, vengono riportati alcuni documenti che vanno anche a trattare problemi che vanno al di là della semplice gestione dei turni del personale, come la carenza di personale a livello internazionale per problemi di scheduling di infermieri: una possibile soluzione è quella di definire i vincoli di copertura

come soft, prevedendo l'introduzione di personale esterno per coprire buchi all'interno della pianificazione e tenendo come obiettivo quello di generare un insieme di roster che minimizzino il numero di turni scoperti durante il lasso temporale considerato. L'utilizzo di vincoli hard implica quasi sempre, all'interno della letteratura trovata, un divieto per l'understaffing: nell'articolo, viene citato un singolo caso in cui la situazione è invertita ed è dovuto a motivi finanziari (sempre legati alla mancanza di personale). Altra cosa che si potrebbe implementare nella copertura riguarda le pause, però essendo un problema di tipo principalmente real-time non vengono trattate all'interno delle pubblicazioni sui problemi di personnel scheduling (Thompson e Pullman han dedicato un intero articolo soltanto alla gestione delle pause[9], andando ad analizzarne i pro e i contro di una organizzazione delle pause anticipata).

Se il personale può essere caratterizzato da delle skill, si introducono solitamente vincoli hard per assicurarsi la presenza di dipendenti qualificati per lo svolgimento di un particolare lavoro. I vincoli soft in questo caso possono venire utilizzati per indicare una possibile introduzione di personale non adatto all'attività considerata, implicando però un aumento del costo, o anche possono rappresentare il concetto di skill alternative, ovvero dipendenti che possiedono diverse skill ma che preferiscono evitare di coprire certi tipi di lavoro. Si distinguono tre diversi gruppi in base al grado di flessibilità delle competenze:

- Le skill sono definibili a livello di dipendente, ovvero chi pianifica ha piena libertà di scegliere le skill per ogni membro del personale.
- L'insieme dei dipendenti viene gerarchizzato: dipendenti a livelli superiori possono eseguire attività dei dipendenti a livelli inferiori, mentre non vale il contrario; fattori su cui si può basare la gerarchia sono esperienza, dipendenti junior/senior, background formativo, ...
- Le skill non possono essere sostituite, alcune attività richiedono skill specifiche e possono essere svolte solo da lavoratori con quelle particolari skill.

Altro problema importante è quello degli straordinari, il cui utilizzo può influenzare molto sulla flessibilità della copertura. Gli straordinari possono essere limitati settimanalmente, oppure possono essere studiati su orizzonti temporali più ampli, lasciando più libertà di gestione degli orari settimanali: un esempio nel quale lo studio delle ore complessive viene fatto mensilmente è il caso studiato nella tesi di Serena Cortopassi[17], dove viene studiato un problema di personnel scheduling per il personale de Il Gignoro, una residenza assistenziale per anziani.

Le misure finanziarie prevedono costi differenti, come costo del personale, possibile costo relativo ad un particolare giorno della settimana, diversi costi per diverse skill, costo degli straordinari, costo legato allo svolgimento di particolari attività, ...: minimizzare il costo è strettamente legato al minimizzare il numero di dipendenti usati, ma questo

non significa che è solo questo ma è anzi un problema molto più complesso che va analizzato. Già modellare il costo del problema attorno al costo del personale invece che il numero dei dipendenti, si riesce ad ottenere un compromesso tra assunzione di dipendenti, straordinari, lavoratori occasionali e altro. Altri possibili costi possono essere costi di produzione, costi per chiamate perse o mancata produzione, costi differenti tra lavoratori full-time e part-time, costi di rifiuto, costi differenti per sede, ....

Spesso gli operatori vogliono anche garantire equità nella gestione degli orari per i dipendenti, che si può tradurre in più punti: distribuzione equa di weekend di riposo, un numero di turni sfavorevole bilanciato tra i vari dipendenti, gestione bilanciata per tipo di turno, quantità bilanciata di giorni di lavoro e di riposo (viene citato il lavoro di Lezaun et al.[8]), gestione delle preferenze dei dipendenti (ad esempio, preferenze per certi tipi di turni o anche volere lavorare con specifici collaboratori), numero di giorni di riposo consecutivi), ....

### 2.3 Metodi Risolutivi e Incertezza

In letteratura, si trova un insieme veramente ampio e diversificato di tecniche risolutive adottate. Si dividono le tecniche usate in tre gruppi:

- Programmazione matematica: programmazione intera, programmazione dinamica, goal programming, euristiche costruttive o migliorative.
- Simulazione, programmazione a vincoli, queuing.
- Altro: soluzioni meno frequenti come approssimazione lineare a tratti di una curva, analytic hierarchy process (AHP), modelli di fogli di calcolo e data envelopment analysis (DEA).

Il primo gruppo rappresenta il gruppo più ampio: il problema del personnel scheduling viene modellato come un programma lineare, intero o misto intero e la formulazione più usata è quella del Set Covering, introdotta da Dantzig. Il problema del *Set Covering* consiste nel trovare la più piccola sotto-collezione di insiemi (sottoinsiemi dell'insieme universo) tale per cui l'unione dei suoi elementi sia equivalente all'insieme universo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{s \in S} x_s \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{s: e \in s} x_s \geq 1, \forall e \in U \\ & x_s \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

In particolare, nel caso del personnel scheduling, al posto dell'1 nel secondo vincolo si avrà il fabbisogno necessario per lo slot temporale considerato. Questa formulazione è

molto comoda, perché permette di aggiungere a proprio piacemento vincoli aggiuntivi in base alle proprie necessità.

Una tecnica che aiuta molto, in particolare per problemi di larga scala, è quella della decomposizione del problema: viene separato il problema in due parti, una più facile e una più complessa e per ognuna posso scegliere il metodo risolutivo da utilizzare. Diversi modi di applicare la decomposizione furono proposti da: Detienne et al.[12] sfruttarono la decomposizione di Bender (problema principale rilassato è un problema di zaino multidimensionale a multiscelta, mentre ogni sotto problema è un problema di b-matching<sup>1</sup>, Bard e Wan[10] [5]. Assieme alla decomposizione, un'altra tecnica buona per problemi di grandi dimensioni è quella della generazione di colonne: quando le variabili in gioco sono troppe, si rischia di eccedere il limite di memoria assegnato per il problema, quindi vengono generate dinamicamente quando necessario[31] (vengono citati per questo approccio Beliën e Demeulemeester[11]). Tramite la decomposizione, si riesce ad utilizzare a rappresentare il problema con altri modelli oltre a quello del set covering, come ad esempio problemi di maximum flow.

Ultimo approccio molto utilizzato all'interno della programmazione matematica è quello delle metaeuristiche, che sono progettate in modo tale da trovare soluzioni ammissibili buone in tempi relativamente brevi o accettabili dai limiti imposti. Gli svantaggi delle metaeuristiche sosta nel fatto che non possono in modo dimostrabile né produrre soluzioni ottime né ridurre lo spazio di ricerca delle soluzioni. Gli algoritmi preferiti sono la tabu search e gli algoritmi genetici all'uso di algoritmi di ricottura simulata. Altre alternative sono: scatter search, ricerca locale iterata, variable neighborhood search, particle swarm optimization, algoritmi memetici, reti neurali, . . . .

Trattando invece l'incertezza, si differenziano tre tipi di incertezze che si possono ritrovare all'interno di questi problemi:

- Incertezza della richiesta: carico del lavoro imprevedibile.
- Incertezza dell'arrivo: pattern imprevedibile dell'arrivo carico di lavoro (fallimenti della macchina, arrivo di chiamate per i call center).
- Incertezza della capacità: deviazione tra forza lavoro pianificata e effettiva.

Si dividono inoltre gli approcci in due tipi:

- Deterministico: viene ignorata ogni forma di incertezza.
- Stocastico: viene considerata l'incertezza (non per forza tutti i tipi visti prima).

---

<sup>1</sup>Generalizzazione del problema base di matching per un grafo. Sia dato un grafo  $G = (V, E)$ , ad ogni vertice  $v \in V$  viene assegnato una capacità  $b(v) \in \mathbb{N}^+$ : un b-matching è un sottoinsieme di archi tale che, per ogni  $v$ , il numero di archi incidenti a  $v$  non superi la sua capacità  $b(v)$ .

L'approccio deterministico è quello dominante. Non incorporare l'incertezza all'interno del modello non equivale però a considerare il carico di lavoro costante in ogni momento: vengono fatte analisi del carico di lavoro osservando i dati storici e facendone una stima. Per andare contro la variabilità del carico di lavoro, negli approcci deterministici può risultare d'aiuto l'utilizzo di buffer di capacità in modo tale da rendere il roster del personale molto più robusto.

Cause di incertezza relative ai dipendenti possono essere: malattie dei dipendenti, ritardi negli arrivi, perdita di capacità per via di risorse fuori servizio. L'incertezza di arrivo è di principale interesse per i sistemi di call center, i quali spesso devono aggiungere anche l'incertezza di richiesta.

## 2.4 Aree di Applicazione

Si distinguono sei aree di applicazione: servizi, trasporti, generale, manifattura, vendita al dettaglio (retail) e problemi di scheduling per il personale militare. Il problema più trattato riguarda quello della gestione dei turni degli infermieri e rappresenta una delle fondamenta in tutta la letteratura riguardante i problemi di scheduling.

## 2.5 Rassegna bibliografica aggiuntiva

Un articolo di Brucker et al.[14], pubblicato nel 2011, sempre dall'European Journal of Operational Research, va a studiare più dettagliatamente i modelli proposti e la complessità relativa per i problemi di Personnel Scheduling. Nell'articolo si rifanno alla classificazione delle aziende, proposta da De Causmaecker, in quattro categorie in base al tipo di problema riscontrato: pianificazione centrata sulla permanenza, pianificazione centrata sulla fluttuazione, pianificazione centrata sulla mobilità e pianificazione centrata sul progetto. Un problema di scheduling per il personale di un ospedale si differenzia molto rispetto a problemi di scheduling per il settore dei trasporti. Il problema che viene affrontato all'interno dell'articolo è quello di cercare di trovare un modello matematico generale che possa portare con sé caratteristiche comuni nei diversi problemi di scheduling del personale. Viene fornito un modello matematico generale per il problema studiato, che viene riportato, tralasciando l'ultima parte sui vincoli per la richiesta flessibile e il limite superiore per il numero di dipendenti assegnati:

”Vi è un orizzonte di pianificazione  $[0, T]$  diviso in periodi  $[t, t+1[$  con  $t = 0, 1, \dots, T-1$ . Durante l'orizzonte di pianificazione vi sono  $m$  compiti da eseguire ( $j = 1, \dots, m$ ).  $D_j(t)$  è il numero di dipendenti necessari per eseguire il compito  $j$  nel periodo  $[t, t+1[$ . Viene chiamato il profilo di domanda (fabbisogno).

Si ha un insieme  $E$  di  $n$  dipendenti. Ad ogni  $e \in E$  si ha un sottoinsieme  $Q_e$  di compiti per cui  $e$  è qualificato e può quindi essere assegnato;  $e$  non può essere assegnato a compiti al di fuori di  $Q_e$ . Un pattern di lavoro per un dipendente  $e$  si definisce con:

- un vettore zero-uno  $(w_e(t))_{t=0}^{T-1}$  dove  $w_e(t)$  vale 1 se e solo se  $e$  è disponibile nel periodo  $[t, t+1[$  e
- l'assegnazione di compiti appartenenti a  $Q_e$  per ogni periodo di tempo  $[t, t+1[$  con  $w_e(t) = 1$ .

I pattern di lavoro sono rappresentati da vettori binari  $\pi = (\pi(j, t))$  ove  $\pi(j, t) = 1$  se e solo se  $[t, t+1[$  è un periodo di lavoro nel quale il compito  $j$  deve essere svolto.

Si definisce  $P_e$  l'insieme di tutti i pattern lavorativi ammissibili per il dipendente  $e$ . Bisogna assegnare ai dipendenti  $e \in E$  dei pattern lavorativi ammissibili tali per cui venga coperta la richiesta  $D_j(t)$  per ogni task  $e$  tali per cui i costi relativi alle assegnazioni ai dipendenti sia minimizzato.

Si possono imporre anche "vincoli soft" nei pattern lavorativi e aggiungere una penalità  $u(\pi_e)$  che va a definire di quanto un pattern  $\pi_e$  vada a violare il vincolo soft. Possibili costi di assegnazione possono essere: la somma delle penalità di tutti i dipendenti assegnati, il numero di dipendenti richiesti, i costi per i dipendenti assegnati. Il modello può essere più o meno restrittivo in base al problema considerato: si può introdurre il concetto di richiesta flessibile, ove ogni compito  $j$  ha una durata  $p_j$  e deve essere eseguito entro una finestra temporale  $[L_j, R_j] \supset [0, T]$  con  $R_j - L_j \geq p_j$ , ovvero  $D_j \in [0, 1]$  per  $t = L_j, L_j + 1, \dots, R_j - 1$  tale che  $\sum_{t=L_j}^{R_j-1} D_j(t) = p_j$ .

Il problema può essere modellato come un problema lineare binario. Sia  $x_{e\pi}$  una variabile binaria che vale 1 solo e soltanto se il pattern lavorativo  $\pi$  viene assegnato al dipendente  $e$ . In aggiunta, sia  $c_{e\pi}$  i costi dovuti all'assegnamento del pattern  $\pi$  al lavoratore  $e$ . La formulazione sarà:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{e \in E} \sum_{\pi \in P_e} c_{e\pi} x_{e\pi} \\ & \text{subject to} \\ & \sum_{\pi \in P_e} x_{e\pi} \leq 1, e \in E \\ & \sum_{e \in E} \sum_{\pi \in P_e} \pi(j, t) x_{e\pi} \geq D_j(t), \text{ for all } (j, t) \\ & x_{e\pi} \in \{0, 1\} \text{ for all } e \in E \text{ and } \pi \in P_e \end{aligned}$$

Viene assegnato al più un pattern  $\pi$  al dipendente  $e$ . In alcuni casi, bisogna assegnare ad ogni dipendente un pattern lavorativo, cambiando il primo vincolo da diseguaglianza a uguaglianza pari ad uno."

Nel caso speciale per cui la richiesta per ogni compito  $j$  è costante e ogni dipendente è disponibile in tutti i periodi, questo modello può essere formulato come un problema

del flusso di costo minimo<sup>2</sup> e può essere quindi risolto in tempi polinomiali. Tuttavia, nella realtà queste condizioni non vi sono quasi mai, quindi di norma un problema di scheduling appartiene alla classe dei problemi di tipo NP-Complete. Si è trovato anche che l'utilizzo di algoritmi di flusso di rete può essere utile per risolvere problemi di assegnamento dei turni ai dipendenti e dei dipendenti ai diversi compiti: questo può essere sfruttato all'interno delle euristiche utilizzate per lo scheduling del personale.

Un altro articolo, "*Polynomially solvable personnel rostering problems*" [19], va a studiare i sottoproblemi che stanno alla base dei problemi di personnel scheduling, andando a separarli in problemi facili e difficili (in base al tempo risolutivo richiesto). Mediante l'utilizzo di trasformazioni di problemi differenti in problemi di flusso di costo minimo, è stato possibile identificare nuovi casi, rispetto ai quattro citati nell'introduzione, che possono essere risolti in tempi polinomiali. Per i vincoli di successione e di counter (numero di giorni lavorati e numero di turni lavorati per tipo), si è trovato che la differenza tra problemi semplici e difficili sta nella definizione dei vincoli a livello di giorno o a livello di turno. Conoscendo questo, è possibile non solo riformulare il problema (riportandolo a problemi già conosciuti, come i problemi di flusso), in quanto potrebbe rendere il problema trattabile computazionalmente, ma si può anche offrire approcci efficienti verso la risoluzione dei sottoproblemi che nascono dalla decomposizione del problema.

In letteratura, sono riuscito a trovare una sola pubblicazione che parla direttamente del problema affrontato in questa tesi ed è un articolo di Melachrinoudis e Olafsson [1] del 1994. In questo articolo, viene fornito un modello di programmazione lineare intera per lo scheduling dei cassieri. Il modello viene eseguito in un ambiente basato su fogli di calcolo, rendendolo agevole per i dirigenti. Vengono usati tre pacchetti software: fogli di calcolo Lotus 1-2-3 in combinazione con "What's Best", un pacchetto di ottimizzazione sviluppato da LINDO.

- Un pacchetto di previsione del lavoro POS (collezionatore di dati che veniva eseguito sul computer mainframe del supermercato). Vengono solitamente salvati i dati relativi alle ultime quattro settimane e possono essere alterati tenendo in considerazione fattori secondari, come periodi festivi. Vengono definiti, sulla base di questi dati, un valore di massimo per i clienti in attesa alla cassa e un valore su come il carico di lavoro influenzi la produttività dei cassieri.
- Per rappresentare i dati, vengono usati i fogli di calcolo Lotus 1-2-3, in quanto agevoli all'utilizzo per i direttori dei negozi. Questo pacchetto fa da collegamento tra le altre due parti del sistema ed è strutturato in quattro sezioni: sezione dei cassieri schedulati (si usano variabili decisionali per rappresentare il numero di cassieri schedulati nel turno di lunghezza  $j$  che inizia al tempo  $k$ ), sezione dei

---

<sup>2</sup>Il problema del flusso di costo minimo (minimum-cost flow problem, abbreviato MCFP) è un problema di decisione e ottimizzazione che consiste nel trovare il modo meno costoso possibile di far passare un certo ammontare di flusso tramite una rete di flusso.

vincoli orari dei cassieri (viene usata dal dirigente, cambia le condizioni per cui un cassiere viene assegnato ad un turno), sezione del personale di cassa ( contenente il fabbisogno per slot temporale) e sezione del totale (rappresenta la somma degli elementi delle tre colonne nella sezione del personale di cassa).

- ”What’s Best”, un pacchetto di ottimizzazione sviluppato da LINDO.

Il modello fornito a What’s Best si può trovare nell’articolo citato, si tiene precisare che la formulazione si basa sul problema di Set Covering.

Infine, si riporta l’articolo di Agnetis et al.[26], ove viene descritto lo stato dell’arte per i problemi di scheduling per macchinari. I concetti riportati, per quanto distanti dal problema analizzato in questa tesi, possono essere comunque d’aiuto per affrontare il problema di personnel scheduling.

## 3 Definizione formale

### 3.1 Problema base

**Insieme dei lavoratori** Si indica con  $w$  un dipendente generico appartenente al roster. I dipendenti si differenziano tra loro principalmente per gli orari contrattuali assegnati, introduciamo quindi gli insiemi:

$$\begin{aligned} W &= FT \cup PT \cup PTW \\ FT &= \{w_1, \dots, w_n\}, \text{ full-time} \\ PT &= \{w_1, \dots, w_p\}, \text{ part-time} \\ PTW &= \{w_1, \dots, w_k\}, \text{ part-time weekend} \\ FT \cap PT &= \emptyset \\ FT \cap PTW &= \emptyset \\ PT \cap PTW &= \emptyset \end{aligned}$$

ove  $W$  rappresenta l'insieme di tutti i dipendenti. Per adesso, le uniche differenze che vi sono tra i diversi  $w$  sostano solo nel monte orario: appartenere ad un insieme, equivale a condividere la stessa paga oraria (stesso inquadramento lavorativo e stessa tipologia di contratto, nessuna anzianità) e lo stesso minimo di ore da lavorare con tutti gli altri dipendenti appartenenti allo stesso insieme.

**Copertura oraria e turni** Durante una giornata, l'obiettivo del responsabile di reparto è quello di coprire sempre o quasi il flusso della clientela in maniera adeguata. Rifacendoci al problema del *Set Covering*, è possibile modellare la giornata lavorativa in diversi slot, i quali dovranno essere coperti da  $f$  dipendenti, con  $f$  o specificato dal caporeparto o individuato in seguito ad un'analisi delle vendite durante il corso dell'anno del supermercato. Definiamo quindi:

$$\begin{aligned} f_{d,k} &\text{ il fabbisogno per lo slot } k \text{ del giorno } d. \\ K_d &\text{ l'insieme degli slot del giorno } d. \end{aligned}$$

La finestra temporale che andiamo a modellizzare è di una settimana. Definiamo quindi:

$$D = \{lun, \dots, dom\} = \{1, \dots, 7\} \text{ l'insieme dei giorni.}$$

Gli slot temporali possono avere durata variabile, dall'intera giornata lavorativa fino a soli 15 minuti: abbiamo deciso di utilizzare uno slot temporale da mezz'ora. La giornata di lavoro inizia alle 08:00 e finisce alle 20:30, è quindi suddivisa in 25 slot temporali. L'orario è continuato ed è identico per tutti e sette i giorni della settimana, dunque vi sarà da definire un totale di 175 fabbisogni, ognuno per il singolo slot  $k$  della giornata  $d$ . I turni assegnati ai dipendenti saranno gli insiemi del *Set Covering*. Specifichiamo:

$$S = \{s_1, \dots, s_l\} \text{ l'insieme dei turni } s$$

I turni  $s$  sono caratterizzati da:

- $day(s)$ : il giorno  $d$  del turno  $s$ .
- $start(s)$ : lo slot di inizio del turno  $s$ .
- $L_s$ : durata ( $\in \{6, 7, \dots, 12\}$ ) del turno  $s$ .
- $A_{s,k}$ : copertura dello slot  $k$  dal turno  $s$  (1 se coperto, 0 altrimenti).

Gli slot temporali dovranno essere coperti da almeno  $f_{d,k}$  turni. Per definire se un lavoratore lavora o meno un certo turno, usiamo una variabile decisionale:

$$x_{w,s} \in \{0, 1\}$$

la quale varrà 1 nel caso in cui al lavoratore  $w$  sia assegnato il turno  $s$ , 0 altrimenti. Unendola alla matrice di copertura  $A_{s,k}$  possiamo così dire se un lavoratore  $w$ , prendendosi in carico il turno  $s$ , copre o meno lo slot  $k$ .

I lavoratori si differenziano per il monte orario minimo in base alla tipologia di contratto:

$$C_w \in \{20, 24, 48\}$$

Una volta introdotto il necessario per l'orario e la copertura, si può iniziare a definire i vincoli relativi:

$$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} \geq f_{d,k} \quad \forall d, k \quad (1)$$

$$C_w \leq \sum_{w \in W, s} 0.5 * L_s x_{w,s} \leq 48 \quad \text{monte ore} \quad (2)$$

La copertura del fabbisogno si specifica mediante il primo vincolo. Questo vincolo assicura che almeno  $f_{d,k}$  lavoratori siano presenti nello slot temporale  $k$  del giorno  $d$ . Con questo vincolo non è ammissibile una situazione di difetto di personale, ma è ammissibile un eccesso di personale. Si potrebbe ammettere una situazione di difetto modificando il valore di  $f_{d,k}$  o cambiando il peso del vincolo (introducendo ad esempio una nuova variabile  $p_f$ , il cui valore può ridurre o aumentare  $f_{d,k}$ ).

Ogni lavoratore deve lavorare almeno il monte orario minimo definito da contratto, ma può raggiungere le 48 ore facendo straordinari.

Gli ultimi vincoli riguardano il numero di turni giornalieri, che si ricorda sono:

*Part time weekend: 20 ore settimanali, con disponibilità limitata ai giorni di venerdì, sabato e domenica.*

...

*I lavoratori full time possono coprire uno o due turni giornalieri, mentre i part time possono svolgerne solo uno.*

*Il tempo massimo di lavoro giornaliero per un singolo dipendente è di 12 ore, anche se nella pratica si tende a non superare le 8 ore.*

Si definiscono i seguenti vincoli:

$$\sum_{w \in FT, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 2, \quad \forall d \quad (3)$$

$$\sum_{w \in PT, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 1, \quad \forall d \quad (4)$$

$$x_{w \in PTW, s} = 1, \quad day(s) = 5 \wedge start(s) = 16:30 \quad (5)$$

$$x_{w \in PTW, s} = 0, \quad day(s) < 5 \quad (6)$$

$$\sum_{w \in PTW, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 2, \quad d > 5 \quad (7)$$

I primi due rappresentano i vincoli per i lavoratori full-time e part-time, mentre gli ultimi tre sono i vincoli per i part-time fine settimana. Per richiesta del datore, i lavoratori part-time fine settimana lavorano il turno della chiusura del venerdì, mentre il sabato e la domenica vengono trattati come i lavoratori full-time.

Si può infine introdurre la funzione obiettivo per questa parte:

$$f_1 = \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} L_s x_{w,s} \quad (8)$$

ovvero la somma totale delle ore lavorate dall'intero roster dei cassieri, che andrà minimizzata come da richiesta.

**Stacco turni** I dipendenti hanno richiesto uno stacco tra due turni giornalieri il più breve possibile. Questo permetterebbe di ridurre al minimo il tempo trascorso sul luogo di lavoro e aumentare la soddisfazione del personale. Il problema si pone solo nel caso in cui il lavoratore faccia due turni in un giorno:

$$split_{w,d} \geq \sum_{s: day(s)=d} x_{w,s} - 1 \quad (9)$$

$$split_{w,d} \in \{0, 1\} \quad (10)$$

è una variabile decisionale, che ci dice se il lavoratore  $w$  è assegnato a due turni  $s_1$  e  $s_2$  nello stesso giorno  $d$ .

I turni  $s$ , per come sono definiti, permettono il calcolo dello slot di fine turno:

$$end(s) = start(s) + L(s) \quad (11)$$

e da questo posso trovare il valore dello stacco:

$$stacco_{w,d} \geq split_{w,d} \cdot (start(s_2) - end(s_1)), \quad \forall w \in W \quad (12)$$

che viene considerato solo nel caso in cui effettivamente il lavoratore abbia due turni lo stesso giorno. Devono valere di conseguenza anche:

$$\begin{aligned} x_{w,s_1} &= x_{w,s_2} = 1, \\ day(s_1) &= day(s_2), \\ start(s_2) &> end(s_1). \end{aligned}$$

Bisogna infine minimizzare:

$$f_2 = \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} stacco_{w,d} \quad (13)$$

ovvero gli stacchi di tutti i lavoratori.

**Giorni di riposo** Si considera giorno di riposo un qualsiasi giorno della settimana nel quale il lavoratore non è stato assegnato a nessun turno:

$$r_{w,d} \geq 1 - \sum_{s \in S_d} x_{w,s}, \quad \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \quad (14)$$

Durante la settimana, il lavoratore deve avere almeno un giorno di riposo e per evitare un sovraccarico di ore giornaliere può arrivare ad un massimo di due giorni di riposo settimanali:

$$1 \leq \sum_{d \in D} r_{w,d} \leq 2 \quad (15)$$

Per i part-time fine settimana il problema non si pone, in quanto durante la settimana non gli si può assegnare turni.

### 3.2 Problema esteso: prima parte

**Straordinari** Gli straordinari vengono di molto penalizzati in quanto prevedono una retribuzione aggiuntiva, aumentando notevolmente il costo finale per il supermercato. Introduciamo quindi:

$$O_w \in \mathbb{N}$$

che rappresenta le ore straordinarie assegnate al lavoratore  $w$ . Questo valore è maggiore o uguale a 0 e si preferirebbe che valesse 0 per tutti i lavoratori del roster. Non vale 0 nel caso in cui:

$$O_w \geq \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} - C_w \quad \forall w \in W \quad (16)$$

ovvero al lavoratore  $w$  vengono assegnate più ore di quelle previste dal contratto. La somma di questi valori va minimizzata:

$$f_3 = \sum_{w \in W} O_w \quad (17)$$

Si potrebbe cambiare il peso di questo obiettivo nella funzione finale per così riadattarsi. Risulta particolarmente nei periodi festivi, quando la situazione diventa imprevedibile per malattie impreviste e flusso della clientela.

**Equità** I problemi riguardanti l'equità sono:

- Carico orario settimanale uguale per tutti i lavoratori dello stesso tipo.
- Carico orario giornaliero uguale per tutti i lavoratori dello stesso tipo, ad esempio scatta una situazione di inequità nel momento in cui un lavoratore part-time lavori 6 ore un giorno mentre un altro ne lavora part-time solo 3.
- Nel caso dei lavoratori full-time e dei part-time, la gestione delle domeniche libere rientra nel principio di equità.

Per il primo punto, introduciamo la variabile:

$$H_w = \sum_{w \in T, s} 0.5 * L_s x_{w,s} \quad (18)$$

che rappresenta le ore totali assegnate al lavoratore  $w$ .

Introduciamo altre due variabili:

$$d_w^+ \geq 0, \quad d_w^- \leq 0 \quad \forall w \in W \quad (19)$$

$$d_w^+, d_w^- \in \mathbb{R} \quad (20)$$

che rappresentano rispettivamente le ore straordinarie oppure quelle mancanti per raggiungere il monte orario previsto da contratto. Vale quindi:

$$d_w^+ \geq H_w - C_w \quad (21)$$

$$d_w^- \leq C_w - H_w \quad (22)$$

ove, se le ore assegnate sono di più rispetto a quelle previste, il valore di  $d_w^+$  sarà uguale al surplus orario, mentre varrà il contrario per  $d_w^-$  nel caso in cui venissero assegnate meno ore al dipendente. L'obiettivo è quello di avere uno stesso quantitativo orario per tutti i lavoratori dello stesso tipo, quindi si minimizza:

$$f_4 = \sum_{T \in W} \sum_{w \in T} \alpha_1 d_w^+ + \beta_1 d_w^- \quad (23)$$

cioè la somma delle deviazioni dal valore previsto da contratto per ogni tipo. Vale  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \leq 0$  e in base a quale situazione sia preferibile (di eccesso o di difetto) posso decidere tra  $\alpha \geq |\beta|$  oppure  $\alpha < |\beta|$ . Nel nostro caso consideriamo  $\alpha > |\beta|$ , in quanto una situazione di surplus è sfavorita per scelta del supermercato.

Altro problema è la durata dei turni. Sono permessi turni da 3 fino a 6 ore, ma una durata eccessiva dei turni non è ben vista dal personale e potrebbe portare a situazioni di squilibrio in cui alcuni dipendenti lavorano un solo turno da 6 ore al giorno mentre altri ne lavorano due da 3/4 ore ciascuno. Per questione di praticità, possiamo imporre un'unica preferenza per l'intero personale verso il turno da 4 ore. Introduciamo quindi:

$$dur_s^+ \geq 0, \quad dur_s^- \leq 0 \quad \forall s \in S \quad (24)$$

$$dur_s^+, dur_s^- \in \mathbb{R} \quad (25)$$

che indicano la durata di tutti i turni  $s$  attivi, aggiungiamo anche:

$$dur_s^+ \geq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \quad (26)$$

$$dur_s^- \leq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \quad (27)$$

e, infine, da minimizzare:

$$f_5 = \sum_{s \in S} \alpha_2 dur_s^+ + \beta_2 dur_s^- \quad (28)$$

Ogni dipendente potrebbe esprimere la propria preferenza e si potrebbe risolvere il problema andando a cambiare i parametri appena visti. Come prima,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \leq 0$  e  $\alpha > |\beta|$ , in quanto un turno che superi le 4 ore risulta molto più pesante rispetto ad un turno di 3 ore.

**Riposo continuato** Si introduce una nuova variabile binaria per indicare il riposo continuato per i lavoratori full-time:

$$c_{w,d} \leq r_{w,d} \quad (29)$$

$$c_{w,d} \leq r_{w,d+1} \quad (30)$$

$$c_{w,d} \leq r_{w,d} + r_{w,d+1} - 1 \quad (31)$$

$$c_{w,d} \in \{0, 1\}, \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \quad (32)$$

che vale 1 solo nel caso in cui il lavoratore  $w$  ha due giorni di riposo consecutivi  $d$  e  $d + 1$  durante la settimana. Si vuole massimizzare questa quantità per preferenza del personale:

$$f_6 = \sum_{w \in FT} \sum_{d \in D} c_{w,d} \quad (33)$$

### 3.3 Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (34)$$

I  $\lambda_i$  rappresentano i pesi che noi diamo ai vari obiettivi: più  $\lambda_i$  è elevato, più l'obiettivo relativo incide nella funzione obiettivo generale, ottenendo di fatto più importanza nella ricerca dell'ottimo.

## 4 Modello matematico

### 4.1 Formulazione

#### Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

#### Vincoli, variabili orario e copertura

$f_1 = \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} L_s x_{w,s}$	
$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} \geq f_{d,k}$	$\forall d, k$
$C_w \leq \sum_{w \in W, s} 0.5 * L_s x_{w,s} \leq 48$	monte ore
$\sum_{w \in FT, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 2,$	$\forall d$
$\sum_{w \in PT, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 1,$	$\forall d$
$x_{w \in PTW, s} = 1,$	$day(s) = 5 \wedge start(s) = 16:30$
$x_{w \in PTW, s} = 0,$	$day(s) < 5$
$\sum_{w \in PTW, s: day(s)=d} x_{w,s} \leq 2,$	$d > 5$
$x_{w,s} \in \{0, 1\},$	$\forall w \in T, s \in S$
$W = FT \cup PT \cup PTW$	insieme dei lavoratori
$FT \cap PT \cap PTW = \emptyset$	
$D = \{1, \dots, 7\}$	insieme dei giorni
$K_d$	insieme slot temporali del giorno d
$S = \{s_1, \dots, s_l\}$	insieme dei turni ammissibili s
$d_{d,k} \in \mathbb{N}$	fabbisogno slot k giorno d
$A_{s,k} \in \{0, 1\}$	copertura turno s per slot k
$L_s \in [6, 7, \dots, 12]$	durata turno s
$C_w \in \{20, 24, 48\}$	ore contrattuali lavoratore w

## Vincoli, variabili straordinari

$$\begin{aligned}
 f_2 &= \sum_{w \in W} O_w \\
 O_w &\geq \sum_{s \in S : day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} - C_w & \forall w \in W \\
 O_w &\in \mathbb{N} & \text{ore di straordinari lavoratore w}
 \end{aligned}$$

## Vincoli, variabili equità

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \sum_{T \in W} \sum_{w \in T} \alpha_1 d_w^+ + \beta_1 d_w^- \\
 f_4 &= \sum_{s \in S} \alpha_2 dur_s^+ + \beta_2 dur_s^- \\
 d_w^+ &\geq 0, d_w^- \leq 0 & \forall w \in W \\
 d_w^+ &\geq H_w - C_w \\
 d_w^- &\leq H_w - C_w \\
 dur_s^+ &\geq 0, dur_s^- \leq 0 & \forall s \in S \\
 dur_s^+ &\geq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \\
 dur_s^- &\leq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \\
 H_w &= \sum_{w \in T, s} 0.5 * L_s x_{w,s} & \text{ore assegnate a lavoratore w} \\
 d_w^+, d_w^-, dur_s^+, dur_s^- &\in \mathbb{R} \\
 \alpha_1, \alpha_2 &\in \mathbb{R}^+ \\
 \beta_1, \beta_2 &\in \mathbb{R}^-
 \end{aligned}$$

### Vincoli, variabili stacco turni

$$\begin{aligned}
f_5 &= \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} stacco_{w,d} \\
split_{w,d} &\geq \sum_{s:day(s)=d} x_{w,s} - 1 \\
end(s) &= start(s) + L(s) \\
stacco_{w,d} &\geq split_{w,d} \cdot (start(s_2) - end(s_1)), \quad \forall w \in W \\
x_{w,s_1} &= x_{w,s_2} = 1 \\
day(s_1) &= day(s_2) \\
start(s_2) &> end(s_1) \\
split_{w,d} &\in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

### Vincoli, variabili riposo

$$\begin{aligned}
f_6 &= \sum_{w \in FT} \sum_{d \in D} c_{w,d} \\
r_{w,d} &\geq 1 - \sum_{s \in S_d} x_{w,s}, \quad \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \\
1 \leq \sum_{d \in D} r_{w,d} &\leq 2 \\
c_{w,d} &\leq r_{w,d} \\
c_{w,d} &\leq r_{w,d+1} \\
c_{w,d} &\leq r_{w,d} + r_{w,d+1} - 1 \\
c_{w,d} &\in \{0, 1\}, \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \\
r_{w,d} &\in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

# **A Appendice**

## **A.1 Sottosezione dell'appendice**

Inserisci il contenuto dell'appendice

## Riferimenti bibliografici

- [1] Emanuel Melachrinoudis e Michael Olafsson. «A scheduling system for supermarket cashiers». In: *Computers and Industrial Engineering* 23.1 (1992), pp. 121–124. DOI: [https://doi.org/10.1016/0360-8352\(92\)90078-X](https://doi.org/10.1016/0360-8352(92)90078-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/036083529290078X>.
- [2] Michael J. Brusco e Larry W. Jacobs. «Cost analysis of alternative formulations for personnel scheduling in continuously operating organizations». In: *European Journal of Operational Research* 86.2 (1995), pp. 249–261. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)00063-I](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)00063-I). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037722179400063I>.
- [3] Hesham K. Alfares. «Survey, categorization, and comparison of recent tour scheduling literature». In: *Annals of Operations Research* 127.1 (2004), pp. 145–175.
- [4] Andreas T. Ernst et al. «An annotated bibliography of personnel scheduling and rostering». In: *Annals of Operations Research* 127.1 (2004), pp. 21–144.
- [5] Jonathan F Bard e Lin Wan. «The task assignment problem for unrestricted movement between workstation groups». In: *Journal of Scheduling* 9.4 (2006), pp. 315–341.
- [6] Sydney C.K. Chu. «Generating, scheduling and rostering of shift crew-duties: Applications at the Hong Kong International Airport». In: *European Journal of Operational Research* 177.3 (2007), pp. 1764–1778. ISSN: 0377-2217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.008>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221705006430>.
- [7] M E T Horn, H Jiang e P Kilby. «Scheduling patrol boats and crews for the Royal Australian Navy». In: *Journal of the Operational Research Society* 58.10 (2007), pp. 1284–1293. DOI: [10.1057/palgrave.jors.2602300](https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2602300). URL: <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2602300>.
- [8] Mikel Lezaun, Gloria Pérez e Eduardo Sáinz De La Maza. «Rostering in a rail passenger carrier». In: *Journal of Scheduling* 10.4 (2007), pp. 245–254.
- [9] Gary M. Thompson e Madeleine E. Pullman. «Scheduling workforce relief breaks in advance versus in real-time». In: *European Journal of Operational Research* 181.1 (2007), pp. 139–155. ISSN: 0377-2217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.05.018>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037722170600381X>.
- [10] Jonathan F Bard e Lin Wan. «Workforce design with movement restrictions between workstation groups». In: *Manufacturing & Service Operations Management* 10.1 (2008), pp. 24–42.

- [11] Jeroen Beliën e Erik Demeulemeester. «A branch-and-price approach for integrating nurse and surgery scheduling». In: *European journal of operational research* 189.3 (2008), pp. 652–668.
- [12] Boris Detienne et al. «Cut generation for an employee timetabling problem». In: *European Journal of Operational Research* 197.3 (2009), pp. 1178–1184.
- [13] Andreas Beer et al. «An AI-Based Break-Scheduling System for Supervisory Personnel». In: *IEEE Intelligent Systems* 25.2 (2010).
- [14] Peter Brucker, Rong Qu e Edmund Burke. «Personnel scheduling: Models and complexity». In: *European Journal of Operational Research* 210.3 (2011), pp. 467–473. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.11.017>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710007897>.
- [15] Mehran Hojati e Ashok S. Patil. «An integer linear programming-based heuristic for scheduling heterogeneous, part-time service employees». In: *European Journal of Operational Research* 209.1 (2011), pp. 37–50. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.09.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710006004>.
- [16] Jorne Van den Bergh et al. «Personnel scheduling: A literature review». In: *European Journal of Operational Research* 226.3 (2013), pp. 367–385. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.11.029>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221712008776>.
- [17] Serena Cortopassi. «Modello di Ottimizzazione per la Schedulazione del Personale Infermieristico di una Residenza Assistita». Tesi di laurea triennale in Matematica. Università di Pisa, 2014. URL: <https://etd.adm.unipi.it/t/etd-04172014-181428/>.
- [18] Dingding Lin et al. «Scheduling workforce for retail stores with employee preferences». In: *2015 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics (SOLI)*. 2015, pp. 37–42. DOI: [10.1109/SOLI.2015.7367407](https://doi.org/10.1109/SOLI.2015.7367407).
- [19] Pieter Smet et al. «Polynomially solvable personnel rostering problems». In: *European Journal of Operational Research* 249.1 (2016), pp. 67–75. ISSN: 0377-2217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.08.025>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221715007626>.
- [20] Michael Mac-Vicar et al. «Real-time recovering strategies on personnel scheduling in the retail industry». In: *Computers and Industrial Engineering* 113 (2017), pp. 589–601. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.09.045>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835217304618>.
- [21] Melanie Erhard et al. «State of the art in physician scheduling». In: *European Journal of Operational Research* 265 (2018). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221717305787>.

- [22] Shandong Mou, David J. Robb e Nicole DeHoratius. «Retail store operations: Literature review and research directions». In: *European Journal of Operational Research* 265 (2018). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.07.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221717306306>.
- [23] Julia Heil, Kirsten Hoffmann e Udo Buscher. «Railway crew scheduling: Models, methods and applications». In: *European Journal of Operational Research* 283 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.06.016>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221719304916>.
- [24] Shuling Xu e Nicholas G. Hall. «Fatigue, personnel scheduling and operations: Review and research opportunities». In: *European Journal of Operational Research* 295 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.03.036>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221721002629>.
- [25] Renato Bruni. *Problemi di Personnel Scheduling*. Materiale didattico, Corso di Ottimizzazione Combinatoria. 2023. URL: [https://www.diag.uniroma1.it/~bruni/files/0C11\\_Scheduling.pdf](https://www.diag.uniroma1.it/~bruni/files/0C11_Scheduling.pdf).
- [26] Jeroen Beliën et al. «Fifty years of operational research applied to healthcare». In: *European Journal of Operational Research* 326.2 (2025). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.12.040>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221724009822>.
- [27] Tin-Chih Toly Chen. «Artificial Intelligence (AI) Applications in Job Sequencing and Scheduling». In: *Explainable and Customizable Job Sequencing and Scheduling*. Springer Nature Switzerland, 2025. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-85374-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-031-85374-6_2).
- [28] Müfide Narlı e Onur Derse. «Optimal Crew Scheduling in an Intensive Care Unit: A Case Study in a University Hospital». In: *Applied Sciences* 15.7 (2025). URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/15/7/3610>.
- [29] Zili Wang, Zhixing Luo e Huaxiao Shen. «Data-driven robust flexible personnel scheduling». In: *Computers & Operations Research* 176 (2025). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2024.106935>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054824004076>.
- [30] Alexey Bochkarev et al. «Quantum computing for discrete optimization: A highlight of three technologies». In: *European Journal of Operational Research* 329.3 (2026), pp. 747–766. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2025.07.063>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221725005880>.
- [31] *Che cos'è la generazione di colonne?* URL: <https://www.ibm.com/docs/it/icos/22.1.2?topic=example-what-is-column-generation>.

## **Ringraziamenti**