



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI BRESCIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

*Corso di Laurea in Ingegneria Informatica*

Tesi di Laurea

MILP: MODELLI DI PROGRAMMAZIONE  
LINEARE MISTA INTERA PER LA  
SCHEDULAZIONE DEL PERSONALE

**Relatrice:**  
**Prof. Renata Mansini**

**Laureando:**  
**Lublanis Matteo**  
**Matricola n.**  
**736418**

*Anno Accademico 2024/2025*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
0.1 Personnel Scheduling: definizione e caratteristiche . . . . .	2
0.2 Obiettivo e struttura della tesi . . . . .	3
<b>1 Descrizione del problema</b>	<b>4</b>
1.1 Introduzione . . . . .	4
1.2 Settimana lavorativa . . . . .	4
1.3 Tipologia personale, caratteristiche turnazione . . . . .	4
1.4 Richieste del caporeparto . . . . .	5
1.5 Skill del personale . . . . .	6
1.6 Preferenze del personale . . . . .	6
1.7 Obiettivi finali . . . . .	6
<b>2 Stato dell'arte</b>	<b>7</b>
2.1 . . . . .	7
<b>3 Definizione formale</b>	<b>8</b>
3.1 Problema base . . . . .	8
3.2 Problema esteso: prima parte . . . . .	11
3.3 Funzione obiettivo . . . . .	14
<b>4 Modello matematico</b>	<b>15</b>
4.1 Formulazione . . . . .	15
<b>A Appendice</b>	<b>18</b>
A.1 Sottosezione dell'appendice . . . . .	18

# Introduzione

## 0.1 Personnel Scheduling: definizione e caratteristiche

Un problema di Personnel Scheduling consiste nel trovare il modo migliore per attribuire i turni ai lavoratori, in modo tale sia da rispettare una serie di vincoli di servizio e contrattuali e sia da massimizzare le preferenze del personale riducendo comunque al minimo i costi previsti.

Negli ultimi decenni, i problemi di schedulazione del personale sono stati studiati ampiamente. Una delle cause principali dietro questo interesse sta il lato economico: il costo del lavoro rappresenta ad oggi, per molte realtà aziendali, uno degli elementi principali della spesa aziendale e riuscire a minimizzarlo può portare grossi benefici all'azienda. La prima formulazione di questo problema venne proposta negli anni '50 da George Dantzig e William Edie, ma ad oggi risulta antiquata in quanto:

- Non esistevano diverse tipologie di contratto, solo contratti full-time.
- Ogni dipendente è interscambiabile, non vengono tenute in considerazione le skill del singolo individuo.
- Come obiettivo vi era solo quello di minimizzare il costo del personale, non considerando altri fattori come preferenze o indisposizioni.

Baker fornì una classificazione dei problemi di Personnel Scheduling in tre gruppi:

- Shift Scheduling: si pianifica su un orizzonte di pianificazione giornaliero, implicando che il fabbisogno di personale per ciascun turno può essere gestito in modo indipendente per determinare le allocazioni appropriate; rappresenta il problema più facile da risolvere delle tre categorie, ma non risponde a situazioni più complesse (esempio, la necessità dei turni che si sovrappongono, tipico problema per i call center).
- Days off Scheduling: al posto di pianificare i turni di lavoro, si pianificano i giorni di riposo per i dipendenti; problema tipico per aziende che lavorano sette giorni su sette, mentre il lavoratore ne lavora solo cinque/sei (una variante del problema potrebbe richiedere che i giorni di riposo siano consecutivi).
- Tour scheduling: una combinazione delle due categorie viste precedentemente, bisogna assegnare un tour (giorni della settimana e ore del giorno) da lavorare ad un particolare dipendente. Questa categoria risulta molto più complicata rispetto alle due precedenti e la complessità del problema, seppur dipenda da più fattori, è fortemente influenzata dalla durata minima dell'intervallo di pianificazione (solitamente, dai 15 minuti alle 8 ore).

In Ricerca Operativa, il Personnel Scheduling è un problema di tipo NP-hard, o peggio NP-complete: la complessità deriva principalmente da tutte le possibili combinazioni dei turni che si possono ottenere, rendendo la ricerca di un ottimo molto più complessa e lunga.

Il problema è in continua evoluzione e necessita quindi modelli complessi e flessibili a eventuali cambiamenti. Gli strumenti risolutivi oggi disponibili (Gurobi, CPLEX, FICO Xpress, Google OR-Tools) integrano algoritmi sempre più raffinati: un problema che decenni fa veniva approcciato manualmente ottenendo risultati approssimativi, può ora essere risolto con precisione, garantendo soluzioni di alta qualità o, in alcuni casi, ottime a livello globale.

## 0.2 Obiettivo e struttura della tesi

Questa tesi si pone come obiettivo quello di risolvere il problema di personnel scheduling (tour scheduling) per il reparto di cassa di un supermercato. Il fine ultimo è quello di trovare la miglior pianificazione settimanale possibile per suddetto supermercato e sviluppare uno strumento applicativo software per permettere un'assegnazione dei turni semplificata ai dipendenti.

Nel Capitolo 1 viene presentato informalmente il problema reale considerato, descrivendone i soggetti coinvolti, le preferenze espresse, ciò che si vuole ottenere e i vincoli di varia natura.

Nel Capitolo 2 viene delineato lo stato dell'arte nel settore, andando a individuare una definizione tecnica precisa per il tipo di problema individuato e andando a descrivere altre eventuali applicazioni degli stessi concetti che andremo a trattare nel corso della tesi.

Nel Capitolo 3 si fornisce la descrizione formale del problema, che verrà tradotta in un vero e proprio modello matematico, riportato all'interno del Capitolo 4.

Nel Capitolo 5 illustra lo strumento utilizzato per l'implementazione del modello matematico (Gurobi), le principali fasi del processo di realizzazione e i risultati dei test sperimentali volti a valutarne l'efficienza e la validità.

Nel Capitolo 6, una volta terminata la formulazione del piano orario, si definisce il meccanismo di assegnamento dei turni.

Negli appendici infine vengono riportati, per ordine:

- Una guida sintetica per l'utilizzo del programma finale, accompagnata da alcuni frammenti di codice commentati.
- Valori dei coefficienti di penalità assegnati ai termini della funzione obiettivo.

# 1 Descrizione del problema

## 1.1 Introduzione

La formulazione di un piano orario per i propri dipendenti risulta fattibile fin quando la dimensione del personale da gestire rimane contenuta e fin quando non si tengono in considerazione variabili secondarie come preferenze del personale e limiti giuridici.

Consideriamo il problema di turnazione per un roster di cassieri di un ipermercato, appartenente alla grande distribuzione organizzata, affermatosi nella realtà bresciana. Il piano di turnazione viene stilato settimanalmente dal caporeparto delle casse e può richiedere fino a due/tre giorni di lavoro intenso, spesso non riuscendo a trovare una soluzione adeguata al flusso della clientela e alle esigenze del punto vendita, creando inoltre disagio all'interno del personale.

Si richiede, quindi, di formulare un piano di turnazione standard e poi di risolvere il problema di assegnamento dei dipendenti ai corrispettivi turni, sia rispettando i vincoli contrattuali e sia andando incontro a esigenze di varia natura (aziendali e dei singoli dipendenti), in modo tale da non solo ottimizzare i tempi lavorativi necessari alla pianificazione settimanale ma anche riuscire a ridurre i costi e a massimizzare la soddisfazione del personale.

## 1.2 Settimana lavorativa

L'ipermercato opera 7 giorni su 7, con un orario continuato per la clientela dalle 08:00 fino alle 20:00. Tralasciando le festività nazionali (Natale, Ferragosto, Festa dei lavoratori, ...), è aperto tutto l'anno.

L'orario per un cassiere normale va dalle 08:00 fino alle 20:30, mezz'ora dopo la chiusura dell'ipermercato, in modo tale da poter eseguire le attività finali necessarie, come conteggio dei contanti e pulizie. Alle 07:00 è richiesta invece l'utilizzo della spazzatrice per poter pulire le corsie: solo alcuni dipendenti possiedono la formazione necessaria per poter adoperare la spazzatrice, dipendenti ai quali sarà richiesto di iniziare il turno prima rispetto agli altri.

## 1.3 Tipologia personale, caratteristiche turnazione

Il personale è suddiviso in tre categorie contrattuali:

- Full time: 40 ore settimanali;
- Part time: 24 settimanali;
- Part time weekend: 20 ore settimanali, con disponibilità limitata ai giorni di venerdì, sabato e domenica.

Ogni singolo turno può durare dalle 3 alle 6 ore. Non sono previste pause in un turno, ma sono previsti due turni giornalieri per i lavoratori full-time e part-time fine settimana (solo il sabato e la domenica per loro); quindi, ci sarà uno stacco tra due turni giornalieri, che può variare da una mezz'ora fino a quattro ore e mezza. Un dipendente può lavorare fino a 12 ore al giorno, ma è una situazione indesiderata: si tende ad assegnare fino ad un massimo di 8 ore al giorno ad ogni singolo dipendente, con piccole variazioni di mezz'ora in positivo o in negativo in base alle esigenze. Ad un dipendente si possono assegnare fino ad un massimo di 48 ore settimanali (ore previste da contratto più straordinari), ma si vuole rimanere il più possibile vicini ai monte ore previsti da contratto: questo vale anche per i part-time, i quali prima delle 40 ore lavorerebbero ore supplementari e non straordinarie.

Tra l'ultimo turno del giorno precedente e il primo turno del giorno preso in considerazione, vi deve essere un riposo di almeno 11 ore previsto per legge. Considerando la struttura degli orari (senza considerare chi deve passare la spazzatrice), si rispetta tranquillamente il vincolo, però risulta comunque preferibile una pausa tra due turni in giorni consecutivi la più lunga possibile, così da permettere un riposo maggiore al dipendente.

## 1.4 Richieste del caporeparto

Il caporeparto è il soggetto che predispone il fabbisogno per ogni singolo slot temporale, in modo tale da poter pianificare il personale rispondendo in maniera adeguata al flusso della clientela e alle esigenze del punto vendita. Il caporeparto fornisce una tabella settimanale, di cui ogni singola cella rappresentano il numero di dipendenti richiesto per un certo slot orario: ad esempio, il sabato, essendo il giorno più intenso per l'ipermercato, avrà un fabbisogno molto più elevato rispetto ad un giorno infrasettimanale come il martedì.

Il fabbisogno è un numero indicativo di quante persone siano necessarie in quel momento; non è un limite obbligatorio, quindi possono esserci situazioni di sotto o sovra copertura. La situazione di sovracopertura è preferibile rispetto a quella di sottocopertura solo nel caso in cui vi siano dipendenti che possano andare in scatolame durante situazioni di basso flusso della clientela: una situazione di eccesso di personale in cassa non solo risulterebbe inutile, ma verrebbe anche malvisto dai clienti, che vedrebbero dei dipendenti fermi.

Il caporeparto vuole riuscire a coprire il fabbisogno richiesto, limitando il più possibile il monte ore lavorato totale, così da limitare le spese del personale.

Infine, il caporeparto vuole assicurarsi di riuscire a rispondere a situazioni critiche, in quanto il disagio arrecato da imprevisti potrebbe danneggiare l'immagine dell'ipermercato.

## 1.5 Skill del personale

Skill particolari individuate durante la descrizione del problema sono:

- Cassa-Reperto: alcuni cassieri possono essere assegnati sia nel reparto scatolame che alle casse, differenziandoli così dai puri cassieri, che una volta assegnati allo slot temporale dovranno per forza stare in cassa.
- Formazione spazzatrice: alcuni dipendenti possiedono la formazione necessaria per adoperare la spazzatrice; tali dipendenti possono iniziare a lavorare prima delle 08:00 per poter così pulire l'ipermercato entro l'apertura.

## 1.6 Preferenze del personale

Oltre ai vincoli contrattuali, si vuole tenere conto di alcune preferenze espresse dai dipendenti, che contribuiscono a migliorare la soddisfazione e l'equità complessiva della pianificazione.

In particolare, vengono considerate le seguenti preferenze:

- che vi sia equità nella distribuzione del carico lavorativo;
- avere giorni di riposo consecutivi;
- ridurre al minimo gli stacchi tra due turni nello stesso giorno (favorendo turni continuativi);
- disporre del riposo domenicale, ove possibile.

## 1.7 Obiettivi finali

La formulazione del piano dei turni mira al raggiungimento di più obiettivi:

- Minimizzare i costi del personale;
- Massimizzare la soddisfazione del personale;
- Mantenere flessibilità operativa, in modo da poter gestire eventuali imprevisti (assenze, malattie, permessi, variazioni della domanda).

In sintesi, il problema affrontato è un problema di ottimizzazione combinatoria tipico del rostering/staff scheduling.

Richiede di assegnare, per un periodo prefissato (una o due settimane, un mese o addirittura un anno), un insieme di turni ai lavoratori disponibili, in modo da soddisfare i vincoli di copertura, orario e riposo, cercando contemporaneamente di ottimizzare più criteri di tipo economico e organizzativo.

## **2 Stato dell'arte**

Struttura: definizione problema, diversi tipi di personnel scheduling, altri tipi di scheduling, utilità pratica etc

### **2.1**



## 3 Definizione formale

### 3.1 Problema base

**Insieme dei lavoratori** Indichiamo con  $w$  un dipendente generico appartenente al roster. I dipendenti si differenziano tra loro principalmente per gli orari contrattuali assegnati, introduciamo quindi gli insiemi:

$$\begin{aligned} W &= FT \cup PT \cup PTW \\ FT &= \{w_1, \dots, w_n\}, \text{ full-time} \\ PT &= \{w_1, \dots, w_p\}, \text{ part-time} \\ PTW &= \{w_1, \dots, w_k\}, \text{ part-time weekend} \\ FT \cap PT &= \emptyset \\ FT \cap PTW &= \emptyset \\ PT \cap PTW &= \emptyset \end{aligned}$$

ove  $W$  rappresenta l'insieme di tutti i dipendenti. Per adesso, le uniche differenze che vi sono tra i diversi  $w$  sostano solo nel monte orario: appartenere ad un insieme, equivale a condividere la stessa paga oraria (stesso inquadramento lavorativo e stessa tipologia di contratto, nessuna anzianità) e lo stesso minimo di ore da lavorare con tutti gli altri dipendenti appartenenti allo stesso insieme.

**Copertura oraria e turni** Durante una giornata, l'obiettivo del responsabile di reparto è quello di coprire sempre o quasi il flusso della clientela in maniera adeguata. Rifacendoci al problema del *Set Covering*, è possibile modellare la giornata lavorativa in diversi slot, i quali dovranno essere coperti da  $f$  dipendenti, con  $f$  o specificato dal caporeparto o individuato in seguito ad un'analisi delle vendite durante il corso dell'anno del supermercato. Definiamo quindi:

$$\begin{aligned} f_{d,k} &\text{ il fabbisogno per lo slot } k \text{ del giorno } d. \\ K_d &\text{ l'insieme degli slot del giorno } d. \end{aligned}$$

La finestra temporale che andiamo a modellizzare è di una settimana. Definiamo quindi:

$$D = \{lun, \dots, dom\} = \{1, \dots, 7\} \text{ l'insieme dei giorni.}$$

Gli slot temporali possono avere durata variabile, dall'intera giornata lavorativa fino a soli 15 minuti: abbiamo deciso di utilizzare uno slot temporale da mezz'ora. La giornata di lavoro inizia alle 08:00 e finisce alle 20:30, è quindi suddivisa in 25 slot temporali. L'orario è continuato ed è identico per tutti e sette i giorni della settimana, dunque vi sarà da definire un totale di 175 fabbisogni, ognuno per il singolo slot  $k$  della giornata  $d$ . I turni assegnati ai dipendenti saranno gli insiemi del *Set Covering*. Specifichiamo:

$$S = \{s_1, \dots, s_l\} \text{ l'insieme dei turni } s$$

I turni  $s$  sono caratterizzati da:

- $day(s)$ : il giorno  $d$  del turno  $s$ .
- $start(s)$ : lo slot di inizio del turno  $s$ .
- $L_s$ : durata ( $\in \{6, 7, \dots, 12\}$ ) del turno  $s$ .
- $A_{s,k}$ : copertura dello slot  $k$  dal turno  $s$  (1 se coperto, 0 altrimenti).

Gli slot temporali dovranno essere coperti da almeno  $f_{d,k}$  turni. Per definire se un lavoratore lavora o meno un certo turno, usiamo una variabile decisionale:

$$x_{w,s} \in \{0, 1\}$$

la quale varrà 1 nel caso in cui al lavoratore  $w$  sia assegnato il turno  $s$ , 0 altrimenti. Unendo alla matrice di copertura  $A_{s,k}$  possiamo così dire se un lavoratore  $w$ , prendendosi in carico il turno  $s$ , copra o meno lo slot  $k$ .

I lavoratori si differenziano per il monte orario minimo in base alla tipologia di contratto:

$$C_w \in \{20, 24, 48\}$$

Una volta introdotto il necessario per l'orario e la copertura, possiamo iniziare a definire i vincoli relativi:

$$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} \geq f_{d,k} \quad \forall d, k \quad (1)$$

$$C_w \leq \sum_{s \in S} 0.5 * L_s x_{w,s} \leq 48 \quad \text{monte ore} \quad (2)$$

La copertura del fabbisogno si specifica mediante il primo vincolo. Questo vincolo ci assicura che almeno  $f_{d,k}$  lavoratori siano presenti nello slot temporale  $k$  del giorno  $d$ . Con questo vincolo non è ammissibile una situazione di difetto di personale, ma è ammissibile un eccesso di personale. Si potrebbe ammettere una situazione di difetto modificando il valore di  $f_{d,k}$  o cambiando il peso del vincolo (introducendo ad esempio una nuova variabile  $p_f$ , il cui valore può ridurre o aumentare  $f_{d,k}$ ).

Ogni lavoratore deve lavorare almeno il monte orario minimo definito da contratto, ma può raggiungere le 48 ore facendo straordinari.

Gli ultimi vincoli riguardano il numero di turni giornalieri, che ricordiamo sono:

*Part time weekend: 20 ore settimanali, con disponibilità limitata ai giorni di venerdì, sabato e domenica.*  
...

*I lavoratori full time possono coprire uno o due turni giornalieri, mentre i part time possono svolgerne solo uno.*

*Il tempo massimo di lavoro giornaliero per un singolo dipendente è di 12 ore, anche se nella pratica si tende a non superare le 8 ore.*

Si definiscono i seguenti vincoli:

$$\sum_{w \in FT, s: \text{day}(s)=d} x_{w,s} \leq 2, \quad \forall d \quad (3)$$

$$\sum_{w \in PT, s: \text{day}(s)=d} x_{w,s} \leq 1, \quad \forall d \quad (4)$$

$$x_{w \in PTW, s} = 1, \quad \text{day}(s) = 5 \wedge \text{start}(s) = 16:30 \quad (5)$$

$$x_{w \in PTW, s} = 0, \quad \text{day}(s) < 5 \quad (6)$$

$$\sum_{w \in PTW, s: \text{day}(s)=d} x_{w,s} \leq 2, \quad d > 5 \quad (7)$$

I primi due rappresentano i vincoli per i lavoratori full-time e part-time, mentre gli ultimi tre sono i vincoli per i part-time fine settimana. Per richiesta del datore, i lavoratori part-time fine settimana lavorano il turno della chiusura del venerdì, mentre il sabato e la domenica vengono trattati come i lavoratori full-time.

Si può infine introdurre la funzione obiettivo per questa parte:

$$f_1 = \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} L_s x_{w,s} \quad (8)$$

ovvero la somma totale delle ore lavorate dall'intero roster dei cassieri, che andrà minimizzata come da richiesta.

**Stacco turni** I dipendenti hanno richiesto uno stacco tra due turni giornalieri il più breve possibile. Questo permetterebbe di ridurre al minimo il tempo trascorso sul luogo di lavoro e aumentare la soddisfazione del personale. Il problema si pone solo nel caso in cui il lavoratore faccia due turni in un giorno:

$$\text{split}_{w,d} \geq \sum_{s: \text{day}(s)=d} x_{w,s} - 1 \quad (9)$$

$$\text{split}_{w,d} \in \{0, 1\} \quad (10)$$

è una variabile decisionale, che ci dice se il lavoratore  $w$  è assegnato a due turni  $s_1$  e  $s_2$  nello stesso giorno  $d$ .

I turni  $s$ , per come sono definiti, permettono il calcolo dello slot di fine turno:

$$\text{end}(s) = \text{start}(s) + L(s) \quad (11)$$

e da questo posso trovare il valore dello stacco:

$$stacco_{w,d} \geq split_{w,d} \cdot (start(s_2) - end(s_1)), \quad \forall w \in W \quad (12)$$

che viene considerato solo nel caso in cui effettivamente il lavoratore abbia due turni lo stesso giorno. Devono valere di conseguenza anche:

$$\begin{aligned} x_{w,s_1} &= x_{w,s_2} = 1, \\ day(s_1) &= day(s_2), \\ start(s_2) &> end(s_1). \end{aligned}$$

Bisogna infine minimizzare:

$$f_2 = \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} stacco_{w,d} \quad (13)$$

ovvero gli stacchi di tutti i lavoratori.

**Giorni di riposo** Si considera giorno di riposo un qualsiasi giorno della settimana nel quale il lavoratore non è stato assegnato a nessun turno:

$$r_{w,d} \geq 1 - \sum_{s \in S_d} x_{w,s}, \quad \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \quad (14)$$

Durante la settimana, il lavoratore deve avere almeno un giorno di riposo e per evitare un sovraccarico di ore giornaliere può arrivare ad un massimo di due giorni di riposo settimanali:

$$1 \leq \sum_{d \in D} r_{w,d} \leq 2 \quad (15)$$

Per i part-time fine settimana il problema non si pone, in quanto durante la settimana non gli si può assegnare turni.

### 3.2 Problema esteso: prima parte

**Straordinari** Gli straordinari vengono di molto penalizzati in quanto prevedono una retribuzione aggiuntiva, aumentando notevolmente il costo finale per il supermercato. Introduciamo quindi:

$$O_w \in \mathbb{N}$$

che rappresenta le ore straordinarie assegnate al lavoratore  $w$ . Questo valore è maggiore o uguale a 0 e si preferirebbe che valesse 0 per tutti i lavoratori del roster. Non vale 0 nel caso in cui:

$$O_w \geq \sum_{s \in S: day(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} - C_w \quad \forall w \in W \quad (16)$$

ovvero al lavoratore  $w$  vengono assegnate più ore di quelle previste dal contratto. La somma di questi valori va minimizzata:

$$f_3 = \sum_{w \in W} O_w \quad (17)$$

Si potrebbe cambiare il peso di questo obiettivo nella funzione finale per così riadattarsi. Risulta particolarmente nei periodi festivi, quando la situazione diventa imprevedibile per malattie impreviste e flusso della clientela.

**Equità** I problemi riguardanti l'equità sono:

- Carico orario settimanale uguale per tutti i lavoratori dello stesso tipo.
- Carico orario giornaliero uguale per tutti i lavoratori dello stesso tipo, ad esempio scatta una situazione di inequità nel momento in cui un lavoratore part-time lavora 6 ore un giorno mentre un altro ne lavora part-time solo 3.
- Nel caso dei lavoratori full-time e dei part-time, la gestione delle domeniche libere rientra nel principio di equità.

Per il primo punto, introduciamo la variabile:

$$H_w = \sum_{w \in T, s} 0.5 * L_s x_{w,s} \quad (18)$$

che rappresenta le ore totali assegnate al lavoratore  $w$ .

Introduciamo altre due variabili:

$$d_w^+ \geq 0, \quad d_w^- \leq 0 \quad \forall w \in W \quad (19)$$

$$d_w^+, d_w^- \in \mathbb{R} \quad (20)$$

che rappresentano rispettivamente le ore straordinarie oppure quelle mancanti per raggiungere il monte orario previsto da contratto. Vale quindi:

$$d_w^+ \geq H_w - C_w \quad (21)$$

$$d_w^- \leq H_w - C_w \quad (22)$$

ove, se le ore assegnate sono di più rispetto a quelle previste, il valore di  $d_w^+$  sarà uguale al surplus orario, mentre varrà il contrario per  $d_w^-$  nel caso in cui venissero assegnate meno ore al dipendente. L'obiettivo è quello di avere uno stesso quantitativo orario per tutti i lavoratori dello stesso tipo, quindi si minimizza:

$$f_4 = \sum_{T \in W} \sum_{w \in T} \alpha_1 d_w^+ + \beta_1 d_w^- \quad (23)$$

cioè la somma delle deviazioni dal valore previsto da contratto per ogni tipo. Vale  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \leq 0$  e in base a quale situazione sia preferibile (di eccesso o di difetto) posso decidere tra  $\alpha \geq |\beta|$  oppure  $\alpha < |\beta|$ . Nel nostro caso consideriamo  $\alpha > |\beta|$ , in quanto una situazione di surplus è sfavorita per scelta del supermercato.

Altro problema è la durata dei turni. Sono permessi turni da 3 fino a 6 ore, ma una durata eccessiva dei turni non è ben vista dal personale e potrebbe portare a situazioni di squilibrio in cui alcuni dipendenti lavorano un solo turno da 6 ore al giorno mentre altri ne lavorano due da 3/4 ore ciascuno. Per questione di praticità, possiamo imporre un'unica preferenza per l'intero personale verso il turno da 4 ore. Introduciamo quindi:

$$dur_s^+ \geq 0, \quad dur_s^- \leq 0 \quad \forall s \in S \quad (24)$$

$$dur_s^+, dur_s^- \in \mathbb{R} \quad (25)$$

che indicano la durata di tutti i turni  $s$  attivi, aggiungiamo anche:

$$dur_s^+ \geq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \quad (26)$$

$$dur_s^- \leq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0 \quad (27)$$

e, infine, da minimizzare:

$$f_5 = \sum_{s \in S} \alpha_2 dur_s^+ + \beta_2 dur_s^- \quad (28)$$

Ogni dipendente potrebbe esprimere la propria preferenza e si potrebbe risolvere il problema andando a cambiare i parametri appena visti. Come prima,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \leq 0$  e  $\alpha > |\beta|$ , in quanto un turno che superi le 4 ore risulta molto più pesante rispetto ad un turno di 3 ore.

**Riposo continuato** Si introduce una nuova variabile binaria per indicare il riposo continuato per i lavoratori full-time:

$$c_{w,d} \leq r_{w,d} \quad (29)$$

$$c_{w,d} \leq r_{w,d+1} \quad (30)$$

$$c_{w,d} \leq r_{w,d} + r_{w,d+1} - 1 \quad (31)$$

$$c_{w,d} \in \{0, 1\}, \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \quad (32)$$

che vale 1 solo nel caso in cui il lavoratore  $w$  ha due giorni di riposo consecutivi  $d$  e  $d + 1$  durante la settimana. Si vuole massimizzare questa quantità per preferenza del personale:

$$f_6 = \sum_{w \in FT} \sum_{d \in D} c_{w,d} \quad (33)$$

### 3.3 Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (34)$$

I  $\lambda_i$  rappresentano i pesi che noi diamo ai vari obiettivi: più  $\lambda_i$  è elevato, più l'obiettivo relativo incide nella funzione obiettivo generale, ottenendo di fatto più importanza nella ricerca dell'ottimo.

## 4 Modello matematico

### 4.1 Formulazione

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Vincoli, variabili orario e copertura

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} L_s x_{w,s} \\
 \sum_{w \in W} \sum_{s \in S: \text{day}(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} &\geq f_{d,k} & \forall d, k \\
 C_w \leq \sum_{w \in W, s} 0.5 * L_s x_{w,s} &\leq 48 & \text{monte ore} \\
 \sum_{w \in FT, s: \text{day}(s)=d} x_{w,s} &\leq 2, & \forall d \\
 \sum_{w \in PT, s: \text{day}(s)=d} x_{w,s} &\leq 1, & \forall d \\
 x_{w \in PTW, s} &= 1, & \text{day}(s) = 5 \wedge \text{start}(s) = 16:30 \\
 x_{w \in PTW, s} &= 0, & \text{day}(s) < 5 \\
 \sum_{w \in PTW, s: \text{day}(s)=d} x_{w,s} &\leq 2, & d > 5 \\
 x_{w,s} &\in \{0, 1\}, & \forall w \in T, s \in S \\
 W &= FT \cup PT \cup PTW & \text{insieme dei lavoratori} \\
 FT \cap PT \cap PTW &= \emptyset \\
 D &= \{1, \dots, 7\} & \text{insieme dei giorni} \\
 K_d & & \text{insieme slot temporali del giorno d} \\
 S &= \{s_1, \dots, s_l\} & \text{insieme dei turni ammissibili s} \\
 d_{d,k} &\in \mathbb{N} & \text{fabbisogno slot k giorno d} \\
 A_{s,k} &\in \{0, 1\} & \text{copertura turno s per slot k} \\
 L_s &\in [6, 7, \dots, 12] & \text{durata turno s} \\
 C_w &\in \{20, 24, 48\} & \text{ore contrattuali lavoratore w}
 \end{aligned}$$



### Vincoli, variabili straordinari

$$f_2 = \sum_{w \in W} O_w$$

$$O_w \geq \sum_{s \in S: \text{day}(s)=d} A_{s,k} x_{w,s} - C_w$$

$$O_w \in \mathbb{N}$$

$$\forall w \in W$$

ore di straordinari lavoratore w

### Vincoli, variabili equità

$$f_3 = \sum_{T \in W} \sum_{w \in T} \alpha_1 d_w^+ + \beta_1 d_w^-$$

$$f_4 = \sum_{s \in S} \alpha_2 dur_s^+ + \beta_2 dur_s^-$$

$$d_w^+ \geq 0, d_w^- \leq 0$$

$$d_w^+ \geq H_w - C_w$$

$$d_w^- \leq H_w - C_w$$

$$dur_s^+ \geq 0, dur_s^- \leq 0$$

$$dur_s^+ \geq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0$$

$$dur_s^- \leq 0.5 * L_s x_{w,s} - 4.0$$

$$H_w = \sum_{w \in T, s} 0.5 * L_s x_{w,s}$$

$$d_w^+, d_w^-, dur_s^+, dur_s^- \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^-$$

$$\forall w \in W$$

$$\forall s \in S$$

ore assegnate a lavoratore w

### Vincoli, variabili stacco turni

$$\begin{aligned}
f_5 &= \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} stacco_{w,d} \\
split_{w,d} &\geq \sum_{s: day(s)=d} x_{w,s} - 1 \\
end(s) &= start(s) + L(s) \\
stacco_{w,d} &\geq split_{w,d} \cdot (start(s_2) - end(s_1)), \quad \forall w \in W \\
x_{w,s_1} &= x_{w,s_2} = 1 \\
day(s_1) &= day(s_2) \\
start(s_2) &> end(s_1) \\
split_{w,d} &\in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

### Vincoli, variabili riposo

$$\begin{aligned}
f_6 &= \sum_{w \in FT} \sum_{d \in D} c_{w,d} \\
r_{w,d} &\geq 1 - \sum_{s \in S_d} x_{w,s}, \quad \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \\
1 &\leq \sum_{d \in D} r_{w,d} \leq 2 \\
c_{w,d} &\leq r_{w,d} \\
c_{w,d} &\leq r_{w,d+1} \\
c_{w,d} &\leq r_{w,d} + r_{w,d+1} - 1 \\
c_{w,d} &\in \{0, 1\}, \forall w \in W \setminus PTW, \forall d \in D \\
r_{w,d} &\in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

# **A   Appendice**

## **A.1   Sottosezione dell'appendice**

Inserisci il contenuto dell'appendice

## Riferimenti bibliografici

- [1] Emanuel Melachrinoudis e Michael Olafsson. «A scheduling system for supermarket cashiers». In: *Computers and Industrial Engineering* 23.1 (1992), pp. 121–124. DOI: [https://doi.org/10.1016/0360-8352\(92\)90078-X](https://doi.org/10.1016/0360-8352(92)90078-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/036083529290078X>.
- [2] Michael J. Brusco e Larry W. Jacobs. «Cost analysis of alternative formulations for personnel scheduling in continuously operating organizations». In: *European Journal of Operational Research* 86.2 (1995), pp. 249–261. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)00063-I](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)00063-I). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037722179400063I>.
- [3] Constantine D. Spyropoulos. «AI planning and scheduling in the medical hospital environment». In: *Artificial Intelligence in Medicine* 20 (2000). DOI: [https://doi.org/10.1016/S0933-3657\(00\)00059-2](https://doi.org/10.1016/S0933-3657(00)00059-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0933365700000592>.
- [4] Hesham K. Alfares. «Survey, categorization, and comparison of recent tour scheduling literature». In: *Annals of Operations Research* 127.1 (2004), pp. 145–175.
- [5] Andreas T. Ernst et al. «An annotated bibliography of personnel scheduling and rostering». In: *Annals of Operations Research* 127.1 (2004), pp. 21–144.
- [6] Andreas Beer et al. «An AI-Based Break-Scheduling System for Supervisory Personnel». In: *IEEE Intelligent Systems* 25.2 (2010).
- [7] Peter Brucker, Rong Qu e Edmund Burke. «Personnel scheduling: Models and complexity». In: *European Journal of Operational Research* 210.3 (2011), pp. 467–473. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.11.017>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710007897>.
- [8] Mehran Hojati e Ashok S. Patil. «An integer linear programming-based heuristic for scheduling heterogeneous, part-time service employees». In: *European Journal of Operational Research* 209.1 (2011), pp. 37–50. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.09.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710006004>.
- [9] Jorne Van den Bergh et al. «Personnel scheduling: A literature review». In: *European Journal of Operational Research* 226.3 (2013), pp. 367–385. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.11.029>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221712008776>.
- [10] Serena Cortopassi. «Modello di Ottimizzazione per la Schedulazione del Personale Infermieristico di una Residenza Assistita». Tesi di laurea triennale in Matematica. Università di Pisa, 2014. URL: <https://etd.adm.unipi.it/t/etd-04172014-181428/>.

- [11] Dingding Lin et al. «Scheduling workforce for retail stores with employee preferences». In: *2015 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics (SOLI)*. 2015, pp. 37–42. DOI: [10.1109/SOLI.2015.7367407](https://doi.org/10.1109/SOLI.2015.7367407).
- [12] Michael Mac-Vicar et al. «Real-time recovering strategies on personnel scheduling in the retail industry». In: *Computers and Industrial Engineering* 113 (2017), pp. 589–601. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.09.045>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835217304618>.
- [13] Melanie Erhard et al. «State of the art in physician scheduling». In: *European Journal of Operational Research* 265 (2018). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221717305787>.
- [14] Shandong Mou, David J. Robb e Nicole DeHoratius. «Retail store operations: Literature review and research directions». In: *European Journal of Operational Research* 265 (2018). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.07.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221717306306>.
- [15] Julia Heil, Kirsten Hoffmann e Udo Buscher. «Railway crew scheduling: Models, methods and applications». In: *European Journal of Operational Research* 283 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.06.016>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221719304916>.
- [16] Shuling Xu e Nicholas G. Hall. «Fatigue, personnel scheduling and operations: Review and research opportunities». In: *European Journal of Operational Research* 295 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.03.036>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221721002629>.
- [17] Renato Bruni. *Problemi di Personnel Scheduling*. Materiale didattico, Corso di Ottimizzazione Combinatoria. 2023. URL: [https://www.diag.uniroma1.it/~bruni/files/OC11\\_Scheduling.pdf](https://www.diag.uniroma1.it/~bruni/files/OC11_Scheduling.pdf).
- [18] Jeroen Beliën et al. «Fifty years of operational research applied to healthcare». In: *European Journal of Operational Research* 326.2 (2025). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.12.040>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221724009822>.
- [19] Tin-Chih Toly Chen. «Artificial Intelligence (AI) Applications in Job Sequencing and Scheduling». In: *Explainable and Customizable Job Sequencing and Scheduling*. Springer Nature Switzerland, 2025. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-85374-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-031-85374-6_2).
- [20] Müfide Narlı e Onur Derse. «Optimal Crew Scheduling in an Intensive Care Unit: A Case Study in a University Hospital». In: *Applied Sciences* 15.7 (2025). URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/15/7/3610>.

- [21] Zilu Wang, Zhixing Luo e Huaxiao Shen. «Data-driven robust flexible personnel scheduling». In: *Computers & Operations Research* 176 (2025). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2024.106935>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054824004076>.
- [22] Alexey Bochkarev et al. «Quantum computing for discrete optimization: A highlight of three technologies». In: *European Journal of Operational Research* 329.3 (2026), pp. 747–766. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2025.07.063>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221725005880>.

# Ringraziamenti

Grazie.