Trasformata zeta

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In analisi funzionale la **trasformata zeta** è una trasformata integrale che permette di trasformare una funzione discreta in una funzione più semplice. Viene impiegata in particolare nella teoria dei segnali.

Indice

Storia

Il concetto di trasformata zeta era già noto a Laplace, ma fu reintrodotto nel 1947 da W. Hurewicz come mezzo utile a risolvere equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti.[1] Il termine "trasformata zeta" fu coniato successivamente, nel 1952, da Ragazzini e Zadeh, ricercatori della Columbia University.[2][3] Il nome potrebbe esser derivato dall'idea che la lettera "z" sia somigliante a una lettera "s" campionata/digitalizzata, ove "s" è la lettera spesso usata per indicare la variabile indipendente nella trasformata di Laplace. Un'altra possibile origine è la presenza della lettera "Z" in entrambi i nomi Ragazzini e Zadeh. Questa nomenclatura diverge dall'usanza adottata in ambito scientifico, in cui si associa un metodo o un teorema col nome del principale sviluppatore. La terza probabile origine risiede nel dominio dei segnali discreti, che è solito essere $\mathbb{Z}$ o un suo sottoinsieme.

Definizione

Trasformata unilatera

Sia $x[n]$ una successione di numeri complessi, indicizzata con $n \in \mathbb{N}$. La sua *trasformata unilatera* è definita come la serie formale di potenze complesse

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}, \qquad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

In teoria dei segnali questa definizione è utilizzata per valutare la trasformata della risposta all'impulso unitario di un sistema causale tempo-discreto. Solitamente, in tale ambito la successione $x[n]$ rappresenta il campionamento regolare di un segnale causale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (i.e. f è nulla per tempi negativi), in corrispondenza dei tempi della forma $t = n\,\tau$. Il passo di campionamento $\tau > 0$ è fissato. In altre parole

$$x[n] = f(n\,\tau), \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Regione di convergenza

La regione di convergenza è la parte di piano complesso dove la serie che definisce la trasformata della funzione converge:

$$ROC = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \left| \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \right| < \infty \right\}$$

La serie converge per valori di z in modulo maggiori del raggio di convergenza R, definito tramite il criterio della radice come:

$$R = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x[n]|}$$

Di applicazione meno generale è il criterio del rapporto, poiché esso richiede che i termini siano diversi da zero a partire da un n arbitrario in poi. Nondimeno, spesso è più agevole calcolare il limite tramite tale criterio piuttosto che utilizzando quello della radice. Nel caso entrambi i limiti esistano, essi coincidono. Non bisogna tuttavia prendere il reciproco del limite superiore, in quanto la trasformata zeta unilatera è una serie di potenze con esponente negativo.

Trasformata bilatera

Talvolta, può essere utile definire la trasformata di una successione $x[n]$ indicizzata su $n \in \mathbb{Z}$. In tal caso, la sua *trasformata bilatera* è definita come la serie formale di potenze

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

dove di nuovo z è complesso.

Trasformata inversa

L'espressione della trasformata inversa, che può essere ottenuta utilizzando il teorema integrale di Cauchy, è la seguente:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

dove C è un percorso antiorario chiuso che è situato nella regione di convergenza di $X(z)$ e circonda l'origine del piano. La formula precedente diventa particolarmente utile quando $X(z)$ ammette un'estensione a tutto il piano complesso, tranne al più un numero finito di singolarità isolate $z_1, \dots, z_\ell$. Infatti, in tal caso si può fare appello al Teorema dei Residui ed ottenere

$$x[n] = \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{Res}(X(z)\, z^{n-1}, z_j), \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Inoltre, nel caso in cui le singolarità isolate $z_1, \dots, z_\ell$ siano dei poli, il calcolo dei residui nella formula precedente risulta particolarmente agevole, usando la formula

$$\operatorname{Res}(X(z)\, z^{n-1}, z_j) = \frac{1}{(m_j - 1)!} \lim_{z \to z_j} \frac{d^{m_j - 1}}{dz^{m_j - 1}} \left(X(z)\, z^{n-1} \right)$$

ove m_j è l'ordine del polo z_j.

Un caso di particolare importanza si presenta quando C è la circonferenza unitaria. In tal caso la trasformata zeta inversa assume la forma della trasformata di Fourier discreta inversa:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

Proprietà

	Dominio del tempo	Dominio Z	Dimostrazione	ROC
Notazione	$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$		ROC: $r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
Linearità	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	$X(z) =$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n))z^{-n}$ $= a_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty}(x_1(n))z^{-n} +$ $a_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}(x_2(n))z^{-n}$ $= a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	Almeno la regione di intersezione di ROC_1 e ROC_2
Espansione temporale	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ r intero	$X(z^k)$	$X_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n)z^{-n} =$ $= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)z^{-rk} =$ $= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)(z^k)^{-r} =$ $= X(z^k)$	$r^{1/k}$
Traslazione temporale	$x[n-k]$	$z^{-k}X(z)$	$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n}$ Posto $j = n-k$ si ha: $\sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = \sum_{j=-k}^{\infty} x[j]z^{-(j+k)} = \sum_{j=-k}^{\infty} x[j]z^{-j}z^{-k}$ $= z^{-k}\sum_{j=-k}^{\infty} x[j]z^{-j} = z^{-k}\sum_{j=0}^{\infty} x[j]z^{-j}$ essendo $x[\beta] = 0$ se $\beta < 0$. Da cui: $z^{-k}\sum_{j=0}^{\infty} x[j]z^{-j} = z^{-k}X(z)$	ROC, eccetto $z = 0$ se $k > 0$ e $z = \infty$ se $k < 0$
Scalatura nel dominio z	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$\mathcal{Z}\{a^n x[n]\} =$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n)z^{-n}$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n}$ $= X(a^{-1}z)$	$\lvert a\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert a\rvert r_1$
Inversione temporale	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$\mathcal{Z}\{x(-n)\} =$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n}$ $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{m}$ $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)(z^{-1})^{-m}$ $= X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \lvert z\rvert < \frac{1}{r_2}$
Coniugazione complessa	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$\mathcal{Z}\{x^*(n)\} =$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)z^{-n}$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)(z^*)^{-n}]^*$ $= [\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n}]^*$ $= X^*(z^*)$	ROC
Parte reale	$\mathrm{Re}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$		ROC
Parte immaginaria	$\mathrm{Im}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$		ROC
Differenziazione	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$\mathcal{Z}\{nx(n)\} =$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n}$ $= z\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n-1}$ $= -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-nz^{-n-1})$ $= -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{dz}(z^{-n})$ $= -z\frac{dX(z)}{dz}$	ROC
Convoluzione	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$\mathcal{Z}\{x_1(n) * x_2(n)\} =$ $\mathcal{Z}\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)x_2(n-l)\}$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)x_2(n-l)]z^{-n}$ $= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-l)z^{-n}]$ $= [\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)z^{-l}][\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n}]$ $= X_1(z)X_2(z)$	Almeno la regione di intersezione di ROC_1 e ROC_2
Cross-correlazione	$r_{x_1,x_2} = x_1^*[-n] * x_2[n]$	$R_{x_1,x_2}(z) = X_1^*(1/z^*)X_2(z)$		Almeno la regione di intersezione di ROC of $X_1(1/z^*)$ e $X_2(z)$
Prima differenza	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$		Almeno la regione di intersezione di ROC of $X_1(z)$ e $\lvert z\rvert > 0$
Accumulazione	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$		

			$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \cdot z^{-n}$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] + x[n-1] +$ $x[n-2] \cdots x[-\infty])z^{-n}$ $= X[z](1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \cdots)$ $= X[z] \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j}$ $= X[z] \frac{1}{1-z^{-1}}$	
Moltiplicazione	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{j2\pi} \oint_C X_1(v)X_2(\frac{z}{v})v^{-1}\mathrm{d}v$		-
Teorema di Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n]$	$\frac{1}{j2\pi} \oint_C X_1(v)X_2^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}\mathrm{d}v$		

Teorema del valore iniziale e del valore finale

Analogamente alla trasformata di Laplace, anche per la trasformata zeta si possono enunciare due teoremi che permettono di conoscere il valore iniziale e il valore finale del campionamento partendo dalla sua trasformata.

Il teorema del valore iniziale afferma che:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

se $x[n]$ è causale (ovvero nulla per n negativi).

Se la successione $x[n]$ ammette limite finito, allora $X(z)$ è una funzione analitica all'esterno del disco di raggio 1 centrato nell'origine e il teorema del valore finale afferma che:

$$x[\infty] = \lim_{\mathbb{R} \ni z \to 1^+} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z)$$

Il risultato è falso senza l'ipotesi che $x[n]$ ammetta limite, come si vede facilmente prendendo la successione $x[n] = (-1)^n$, la cui trasformata zeta è data da $X(z) = \frac{z}{z+1}$

Trasformata di alcune funzioni notevoli

Siano:

- $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
- $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

Funzione, $x[n]$	Trasformata Z, $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	ogni z
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$e^{-\alpha n}u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-\alpha}z^{-1}}$	$\|z\| > \|e^{-\alpha}\|$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\| > 1$
$-nu[-n-1]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\| < 1$
$n^2u[n]$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\| > 1$
$-n^2u[-n-1]$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\| < 1$
$n^3u[n]$	$\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$	$\|z\| > 1$
$-n^3u[-n-1]$	$\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$	$\|z\| < 1$
$a^nu[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^nu[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$na^nu[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^nu[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$n^2a^nu[n]$	$\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$\|z\| > \|a\|$
$-n^2a^nu[-n-1]$	$\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Relazione con la trasformata di Laplace

La trasformata zeta unilatera è la trasformata di Laplace di un segnale campionato in modo ideale con la sostituzione:

$$z \overset{\text{def}}{=} e^{sT}$$

dove $T = 1/f_s$ è il periodo di campionamento, con f_s la frequenza di campionamento (misurata in campioni per secondo o in hertz).

Sia:

$$\Delta_T(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$$

un treno di impulsi e sia:

$$\begin{aligned} x_q(t) &\overset{\text{def}}{=} x(t)\Delta_T(t) = x(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\delta(t-nT) \end{aligned}$$

la rappresentazione tempo-continua del segnale $x[n] \overset{\text{def}}{=} x(nT)$ ottenuto campionando $x(t)$. La trasformata di Laplace di $x_q(t)$ è data da:

$$
\begin{aligned}
X_q(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x_q(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)e^{-st}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \int_{0^-}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-st}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-nsT}
\end{aligned}
$$

Si tratta della definizione della trasformata zeta unilatera della funzione tempo-discreta $x[n]$, ovvero:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

con la sostituzione $z \leftarrow e^{sT}$. Confrontando le ultime due relazioni si ottiene quindi la relazione tra la trasformata zeta unilatera e la trasformata di Laplace del segnale campionato:

$$X_q(s) = X(z)\Big|_{z=e^{sT}}$$

Relazione tra il piano s e il piano z

Per quanto detto la variabile s può essere riscritta utilizzando la rappresentazione rettangolare come:

$$z = e^{sT} = e^{T\sigma}e^{jT\omega} = e^{T\sigma}e^{jT(\omega+\frac{2k\pi}{T})} \qquad k \in \mathbb{R}$$

L'ultima identità deriva dal fatto che l'esponenziale complesso è una funzione periodica di periodo i2π.

Da questa relazione si possono fare alcune considerazioni importanti

- ogni punto sul piano s la cui parte immaginaria differisce di un multiplo intero della pulsazione di campionamento viene trasformato nello stesso punto sul piano z
- ogni punto sul piano s appartenente al semipiano negativo viene trasformato in un punto interno alla circonferenza di raggio 1 poiché $|z| = e^{T\sigma}$
- ogni punto sul piano s appartenente al semipiano positivo viene trasformato in un punto esterno alla circonferenza di raggio unitario
- ogni punto appartenente all'asse immaginario viene trasformato in un punto sulla circonferenza di raggio unitario

In virtù di queste considerazioni ha senso definire anche una *striscia primaria* e più *strisce complementari* nel piano s. La striscia primaria comprende tutti i numeri complessi con parte immaginaria compresa tra $\pm j\omega_s/2$, le strisce complementari si ottengono, a partire da quella primaria, per traslazione verticale di un multiplo intero della pulsazione di campionamento. Per quanto detto è possibile far corrispondere ogni punto del piano z con un punto della striscia primaria.

Al pari di quanto avviene nel piano s è possibile, anche nel piano z, tracciare dei luoghi a δ e ω costante.

Campionamento

Si consideri un segnale tempo-continuo $x(t)$, la cui trasformata è:

$$L\{x(t)\} \equiv X(s) \equiv \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Se $x(t)$ è campionato uniformemente con un treno di impulsi in modo da ottenere un segnale discreto $x^*[k] = x(kT)$ (supponendo il processo ideale), allora può essere rappresentato come:

$$x^*[k] = x(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t-kT)$$

dove T è l'intervallo di campionamento. In tale contesto la trasformata di Laplace è data da:

$$
\begin{array}{lcl}
L\{x(kT)\} & = & X^*(s) & = & \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} x(t).\,\delta(t-kT)e^{-st}dt \\
 & = & \sum_{k=0}^{\infty} x^*(k).\,z^{-k}, z = e^{sT} & & \\
L\{x(kT)\}\big|_{s=\frac{\ln(z)}{T}} & = & X^*(s)\big|_{s=\frac{\ln(z)}{T}} & = & Z\{x^*(k)\}
\end{array}
$$

Trasformata di Fourier a tempo discreto

La trasformata di Fourier a tempo discreto è un caso particolare della trasformata zeta:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,z^{-n}$$

che si ottiene ponendo $z = e^{i\omega}$. Dal momento che $|e^{i\omega}| = 1$, la trasformata di Fourier a tempo discreto è la valutazione della trasformata zeta sul cerchio unitario nel piano complesso.

Modello autoregressivo a media mobile

Un sistema basato sul modello autoregressivo a media mobile è rappresentato dall'equazione:

$$\sum_{p=0}^{N} y[n-p]\alpha_p = \sum_{q=0}^{M} x[n-q]\beta_q$$

dove entrambi i membri possono essere divisi per α_0 , se è diversa da zero, normalizzando $\alpha_0 = 1$. In questo modo l'equazione assume la forma:

$$y[n] = \sum_{q=0}^{M} x[n-q]\beta_q - \sum_{p=1}^{N} y[n-p]\alpha_p$$

Tale scrittura consente di visualizzare il fatto che l'uscita al tempo attuale $y[n]$ è funzione del valore dell'uscita $y[n-p]$ a un tempo precedente, dell'ingresso attuale $x[n]$ e dei precedenti valori $x[n-q]$. Considerando la trasformata zeta della precedente equazione, dalle proprietà di linearità e traslazione temporale si ha:

$$Y(z) \sum_{p=0}^{N} z^{-p}\alpha_p = X(z) \sum_{q=0}^{M} z^{-q}\beta_q$$

che può essere scritta in modo da evidenziare la funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{q=0}^{M} z^{-q}\beta_q}{\sum_{p=0}^{N} z^{-p}\alpha_p} = \frac{\beta_0 + z^{-1}\beta_1 + z^{-2}\beta_2 + \cdots + z^{-M}\beta_M}{\alpha_0 + z^{-1}\alpha_1 + z^{-2}\alpha_2 + \cdots + z^{-N}\alpha_N}$$

Dal teorema fondamentale dell'algebra il numeratore ha *M* radici, corrispondenti agli zeri di H, e il denominatore ha *N* radici, corrispondenti ai poli di H. Riscrivendo la funzione di trasferimento in modo da evidenziare questo fatto si ha:

$$H(z) = \frac{(1-q_1 z^{-1})(1-q_2 z^{-1})\cdots(1-q_M z^{-1})}{(1-p_1 z^{-1})(1-p_2 z^{-1})\cdots(1-p_N z^{-1})}$$

dove q_k è il k-esimo zero e p_k il k-esimo polo. Se il sistema descritto da $H(z)$ è pilotato dal segnale $X(z)$ allora l'uscita è data da $Y(z) = H(z)X(z)$.

Note

1. ^ E. R. Kanasewich, *Time sequence analysis in geophysics*, 3rd, University of Alberta, 1981, pp. 185–186, ISBN 978-0-88864-074-1.
2. ^ J. R. Ragazzini and L. A. Zadeh, *The analysis of sampled-data systems*, in *Trans. Am. Inst. Elec. Eng.*, vol. 71, II, 1952, pp. 225–234.
3. ^ Cornelius T. Leondes, *Digital control systems implementation and computational techniques*, Academic Press, 1996, p. 123, ISBN 978-0-12-012779-5.

Bibliografia

- El Jury *Theory and Applications of the z-Transform Method* (John Wiley & Sons, NY, 1964)
- Yutaka Yamamoto *Digital Control* Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, **5**, 445–457 (1999). PDF (http://www-ics.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~yy/Papers/wileyenc.pdf)

Voci correlate

- Analisi di Fourier
- Convoluzione
- Lemma di Riemann-Lebesgue
- Serie di Fourier
- Teorema di convoluzione
- Teorema di inversione di Fourier
- Teorema di Parseval
- Teorema di Plancherel
- Trasformata di Fourier a tempo discreto
- Trasformata di Fourier
- Trasformata discreta di Fourier
- Trasformata inversa di Fourier
- Trasformata di Laplace
- Trasformata di Steinmetz
- Trasformata integrale

Collegamenti esterni

- (EN) Eric W. Weisstein, *Trasformata zeta*, in *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Unilateral Z-Transform*, in *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Bilateral Z-Transform*, in *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) J. H. Matthews e R. W. Howell Introduction to the Z-transform (http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/ZTransformIntroMod.html) (California State University, Fullerton)
- (EN) *Springer Encyclopedia of Mathematics: Z-Transform*, *eom.springer.de*.