Mattéo Paternotte

TP 1

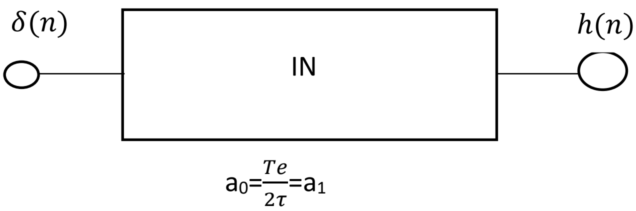
Transformé en Z : Application à l'étude de Systèmes Numériques

Intégrateurs et dérivateur numérique

2. Intégrateur Numérique (IN) et analogique (IA)

21. Etude théorique

211.



$$h(n) = a_0 \times \delta(n) + a_1 \times \delta(n-1) + h(n-1)$$

$$h(n) = \frac{Te}{2\tau} \times \delta(n) + \frac{Te}{2\tau} \times \delta(n-1) + h(n-1)$$

On a alors :

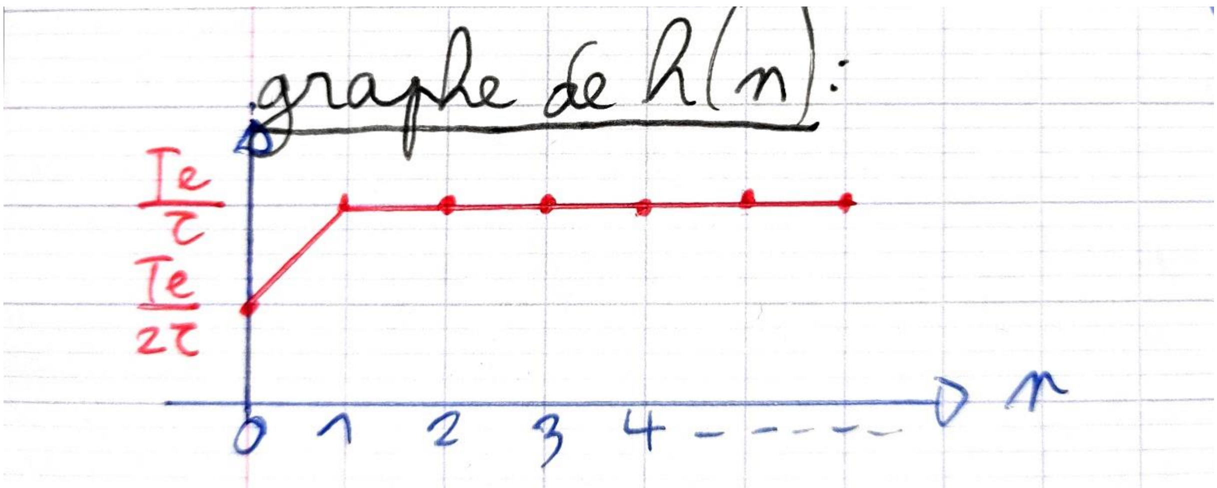
$$h(0) = \frac{Te}{2\tau} \times \delta(0) + \frac{Te}{2\tau} \times \delta(0-1) + h(0-1) = \frac{Te}{2\tau}$$

$$h(1) = \frac{Te}{2\tau} \times \delta(1) + \frac{Te}{2\tau} \times \delta(1-1) + h(1-1) = \frac{Te}{2\tau} + \frac{Te}{2\tau} = \frac{Te}{\tau}$$

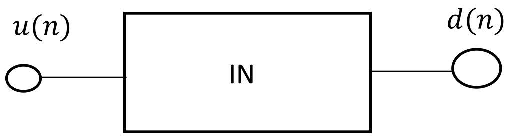
$$h(2) = \frac{Te}{2\tau} \times \delta(2) + \frac{Te}{2\tau} \times \delta(2-1) + h(2-1) = \frac{Te}{\tau}$$

$$h(3) = \frac{Te}{2\tau} \times \delta(3) + \frac{Te}{2\tau} \times \delta(3-1) + h(3-1) = \frac{Te}{\tau}$$

Le système est stable car il se stabilise vers $\frac{Te}{\tau}$.



212.



$$H(z) = \frac{Te}{2\tau} \times \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$u(n) \rightarrow U(z)$$

$$d(n) \rightarrow D(z)$$

$$u(n) \rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$D(z) = H(z) \times U(z) = \frac{Te}{2\tau} \times \frac{z+1}{z-1} \times \frac{z}{z-1}$$

$$D(z) = \frac{Te}{2\tau} \times \frac{z+1}{z-1}$$

$$\frac{d(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-1)^2} * \frac{Te}{2\tau}$$

$$\frac{d(z)}{z} = \frac{Te}{2\tau} \left[\frac{a}{(z-1)^2} + \frac{b}{z-1}\right]$$ a =2 et b=1

$$\frac{d(z)}{z} = \frac{Te}{2\tau} \left[\frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}\right]$$

On en déduit

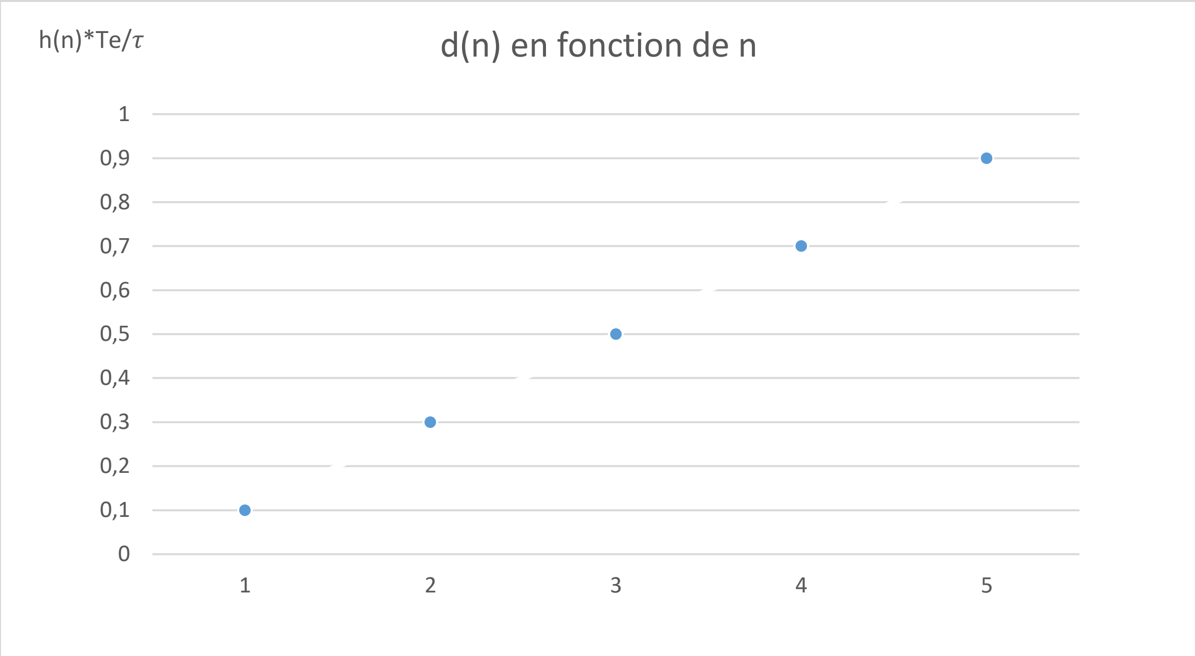
$$d(z) = \frac{Te}{2\tau} * \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{Te}{2\tau} * \frac{z}{z-1}$$

$$d(z) = \frac{Te}{\tau} * \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{Te}{2\tau} * \frac{z}{z-1}$$

Après transformé inverse de z on obtient

$$d(n) = \frac{Te}{2} n\, u(n) + \frac{Te}{2\tau}\, u(n)$$

On trace graphiquement pour τ = 0.2



213.

a) $h(z) = \frac{T}{2\tau} \times \frac{z+1}{z-1}$

b) $h(j\omega) = \frac{Te}{2\tau} \times \frac{e^{j\omega Te}+1}{e^{j\omega Te}-1}$

$$h(j\omega) = \frac{Te}{2\tau} \times \frac{e^{\frac{j\omega Te}{2}} \times e^{\frac{j\omega Te}{2}} + e^{\frac{j\omega Te}{2}} \times e^{-\frac{j\omega Te}{2}}}{e^{\frac{j\omega Te}{2}} \times e^{\frac{j\omega Te}{2}} - e^{\frac{j\omega Te}{2}} \times e^{-\frac{j\omega Te}{2}}}$$

$$h(j\omega) = \frac{Te}{2\tau} \times \frac{e^{\frac{j\omega Te}{2}} + e^{-\frac{j\omega Te}{2}}}{e^{-\frac{j\omega Te}{2}} - e^{-\frac{j\omega Te}{2}}}$$

$$h(j\omega) = \frac{Te}{2\tau} \times \frac{2\cos\left(\frac{\omega Te}{2}\right)}{2\,\mathrm{jsin}\left(\frac{\omega Te}{2}\right)}$$

$$h(j\omega) = \frac{Te}{\tau} \times \frac{1}{2\,\mathrm{jtan}\left(\frac{\omega Te}{2}\right)}$$

c)module

$$|h(j\omega)| = h(\omega) = \frac{Te}{2\tau} \times \left|\frac{1}{2\,\mathrm{jtan}\left(\frac{\omega Te}{2}\right)}\right|$$

d) l'argument

$$f(\omega) = \operatorname{atan}\left[\frac{\frac{-1}{\tan\left(\frac{\omega Te}{2}\right)}}{0}\right] = -\frac{\pi}{2}$$

214.

Intégration analogique : $H(p) = \frac{1}{\tau p}$

$$Ha(j\omega) = \frac{1}{j\tau\omega}$$

a)module

$$\mathrm{Ha}(\omega) = \frac{1}{\tau\omega}$$

b) l'argument

$$f(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Conclusion :

On a le même dépannage. On a par contre des expressions modules différentes.

c)Pour $\omega \ll \omega e$ l'erreur relative sur le module est donné par :

$\omega \rightarrow 2\pi f$

$\omega e \rightarrow 2\pi Fe$

$$z = \frac{|\mathrm{Ha}(\omega)| - |\mathrm{H}(\omega)|}{|\mathrm{Ha}(\omega)|}$$

$$H(\omega) = \frac{Te}{2\tau} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega Te}{2}\right)}$$

$$z = \frac{\mathrm{Ha}(\omega) - \mathrm{H}(\omega)}{\mathrm{Ha}(\omega)}$$

$$= 1 - \frac{\mathrm{H}(\omega)}{\mathrm{Ha}(\omega)}$$

$$= 1 - \frac{Te}{2\tau} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega Te}{2}\right) \times \frac{1}{\tau\omega}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{Te}{2\tau} \times \tau\omega}{\tan\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)}$$

$$= 1 - \frac{2\pi}{2\tau\omega e} \times \tau\omega \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)}$$

$$= 1 - \frac{\pi\omega}{\omega e} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)}$$

Remarque :

$\tan(x) \cong x + \frac{x^3}{3}$ pour $x \ll 1$

$$x = \frac{\pi\omega}{\omega e} \ll 1$$

$$\tan\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right) = \frac{\pi\omega}{\omega e} + \left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)^3 + \frac{1}{3}$$

On alors

$$\varepsilon \cong 1 - \frac{\frac{\pi\omega}{\omega e}}{\frac{\pi\omega}{\omega e} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)^3}$$

On a également $\left(\frac{1}{1+x}\right) \cong 1 - x$

$$x \times x \ll 1$$

$$\varepsilon \cong 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)^2} = 1 - \left[1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)^2\right] = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)^2$$

$$\varepsilon \cong \frac{\pi^2}{3} \times \left(\frac{f}{Fe}\right)^2$$

Pour $\varepsilon = 10\% = 0.1$

$$\varepsilon \cong \frac{\pi^2}{3} \times \left(\frac{f}{Fe}\right)^2$$

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \times \frac{f}{Fe} \rightarrow f \cong \frac{\sqrt{3 \times \varepsilon}}{\pi} \times Fe$$

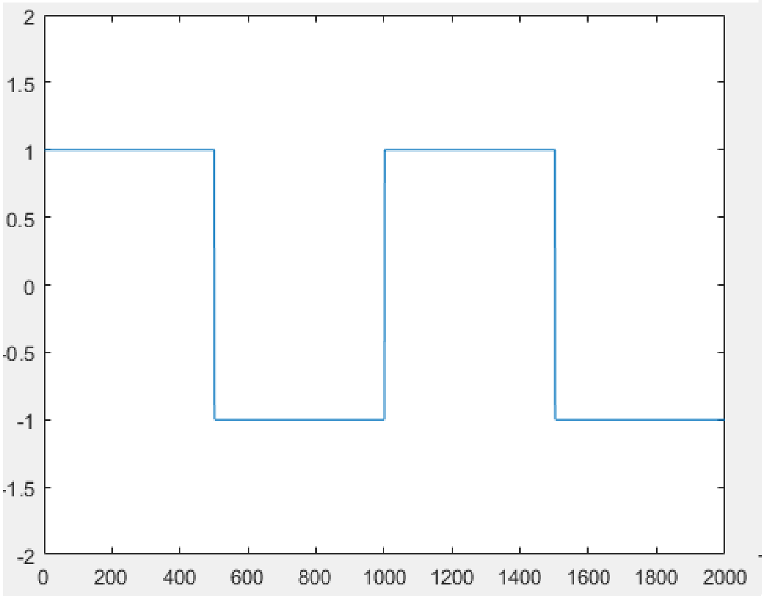
Pour $\varepsilon = 0.1$

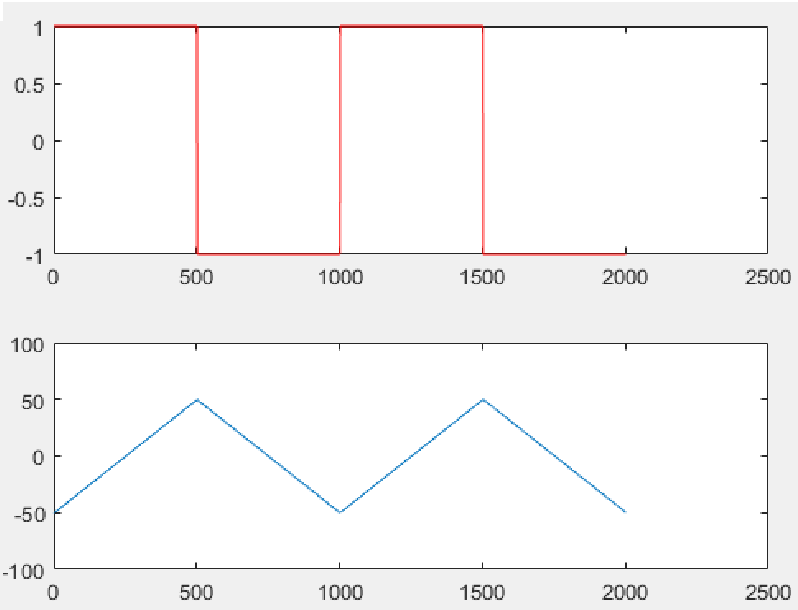
22. Programmation

Programme 1 :

```
clc
close (figure(1))
close (figure(2))

%Simulation du sugnal créneau de période T
T= 1% période du signal créneau
Te= 1e-3 %période d'échantillonage
a=0%pente nulle
%simulation alternance positive, amplitude=1
t1=0:Te:T/2%tableau des temps
x1=a*t1+1
%simulation alternance négative, amplitude=1
t2=(T/2+Te):Te:T
x2=a*t2-1
x=[x1 x2 x1 x2]%simulation de 2 périodes du signal
t=[t1 t2 t1 t2]
figure (1);
plot(x) ;axis([0 length(x) -2 2])
%intégrateur numérique
taille=length (x); %dimension du tableau
a0=0.;%a0=a1=Te/2taux
a1=0.0
y(1)=0;%initialisation des valeurs
for n = 2: taille
   y(n) = a0*x(n)+a1*x(n-1)+y(n-1);%intégrateur numérique
end
figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(x,'r');
subplot(2,1,2)
plot(y-mean(y));%graphe du signal d sortie de l'intégrateur
```

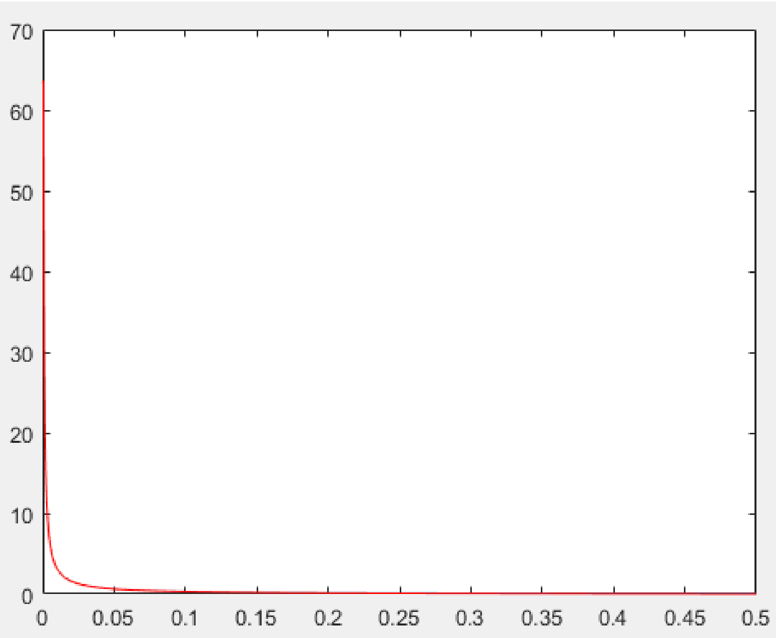


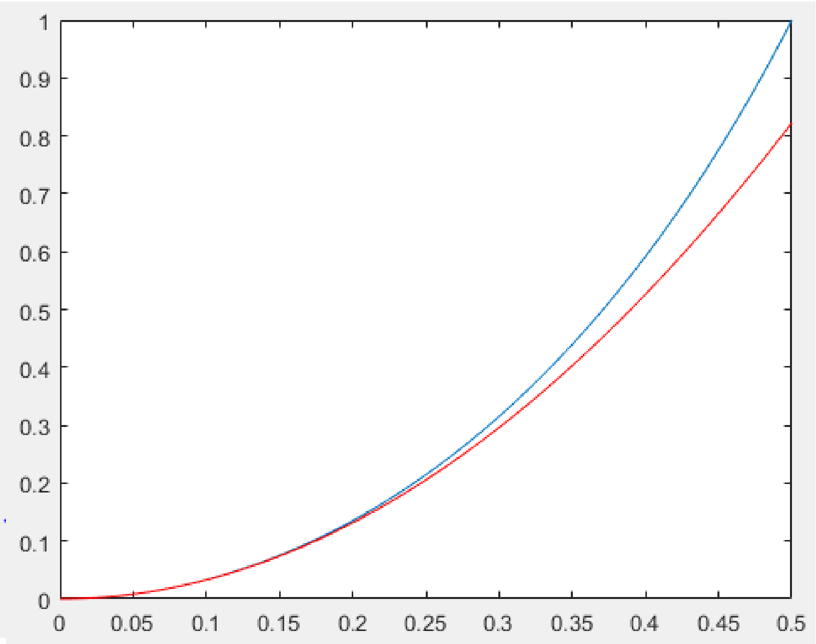


La réponse de l’intégrateur numérique est correcte.

Programmation 2 :

```
clc
close (figure(1))
close (figure(2))
pas=0.0005
%étude de la fonction de tranfert
a=0:pas:0.5;%tableau des fréquences normalisées
%calcul du module de la fonction de transfert de l'intégrateur numérique
Hn= (0.1)./((tan(pi*a)));
%calcul du module de la fonction de tranxfert de l'intégrateur analogique
Ha= 0.1./(pi*a)
figure(1)
plot(a,Ha); hold on
plot(a, Hn, 'r')
%courbe erreur en fonction de la fréquence normalisé
erreur= ((pi*pi)/3)*a.*a
erreur1= abs(((Ha-Hn)./Ha))
figure(2)
plot(a,erreur1);hold on
plot(a, erreur1,'r');
```



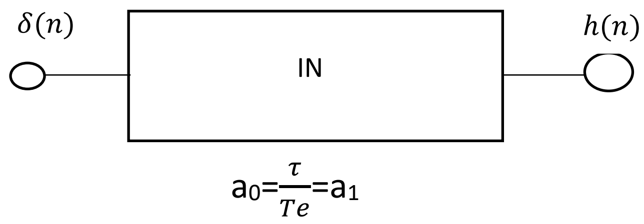


On peut remarquer que la réponse correspond à notre théoris.

3. Dérivateur Numérique (DN)

31. Etude théorique

311.



$$h(n) = a_0 \times \delta(n) - a_1 \times \delta(n-1)$$

$$h(n) = \frac{\tau}{Te} \times \delta(n) - \frac{\tau}{Te} \times \delta(n-1)$$

On a alors :

$$h(0) = \frac{\tau}{Te} \times \delta(0) - \frac{\tau}{Te} \times \delta(0-1) = \frac{\tau}{Te}$$

$$h(1) = \frac{\tau}{Te} \times \delta(1) - \frac{\tau}{Te} \times \delta(1-1) = -\frac{\tau}{Te}$$

$$h(2) = \frac{\tau}{Te} \times \delta(2) - \frac{\tau}{Te} \times \delta(2-1) = 0$$

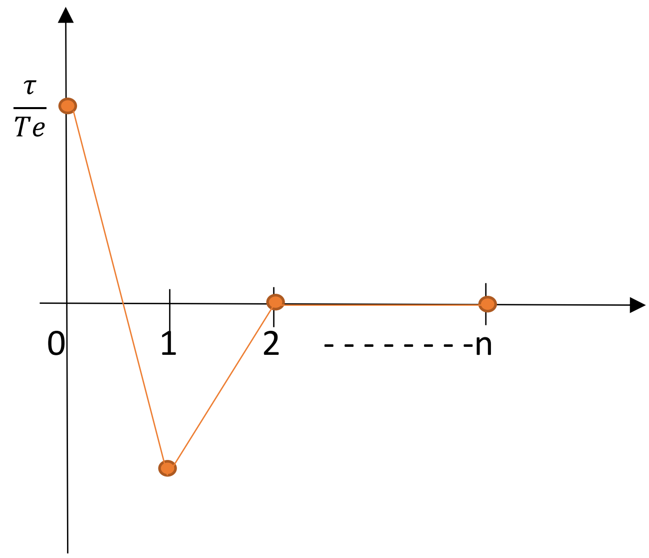
$$h(3) = \frac{\tau}{Te} \times \delta(3) - \frac{\tau}{Te} \times \delta(3-1) = 0$$

On en déduit la forme générale :

$h(0) = \frac{\tau}{Te}$

$h(1) = -\frac{\tau}{Te}$

Pour n>1 $h(n) = 0$



Le système est stable.

312.

$d(n) = a_0 \times u(n) - a_1 \times u(n-1)$

$d(0) = a_0 \times u(0) - a_1 \times u(0-1) = a_0$

$d(1) = a_0 \times u(1) - a_1 \times u(1-1) = a_0 - a_1$

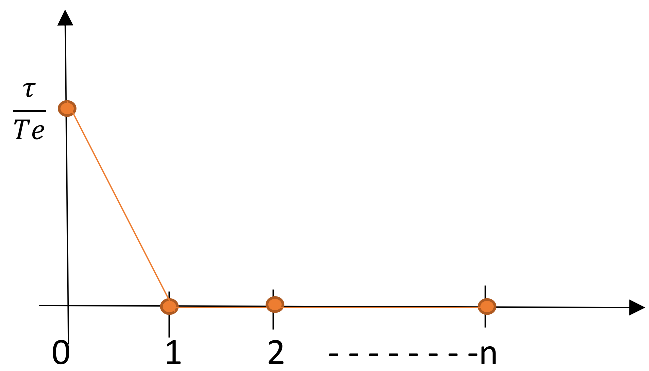
$d(2) = a_0 \times u(2) - a_1 \times u(2-1) = a_0 - a_1$

$d(3) = a_0 \times u(3) - a_1 \times u(3-1) = a_0 - a_1$

On en déduit la forme générale :

$d(0) = a_0 = \frac{\tau}{Te}$

Pour n≥1 $d(n) = 0$



Le système est stable.

313.

a) Transfert H

$Y(z) = a_0 \times X(z) - a_1 \times z^{-1} \times X(z)$

$Y(z) = (a_0 - a_1 \times z^{-1}) \times X(z)$

$H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = a_0 - a_1 \times z^{-1} = a_0 \times (z - 1)$

b) L'expression de la réponse harmonique :

$H(j\omega) = a_0 \times \left(e^{j\omega Te} - 1\right) = a_0 \times \left(e^{j\omega Te} - e^{-j\omega Te} \times e^{j\omega Te}\right)$

$H(j\omega) = a_0 \times \left(e^{j\omega Te} \times (e^{j\omega Te} - e^{-j\omega Te})\right) = a_0 \times 2jsin(j\omega Te) \times e^{-j\omega Te}$

$H(j\omega) = \dfrac{\tau}{Te} \times 2jsin(j\omega Te) \times e^{-j\omega Te}$

$H(j\omega) = \dfrac{2\tau}{Te} \times je^{\frac{-j\omega Te}{2}} \times sin\left(\dfrac{j\omega Te}{2}\right)$

c)Module :

$|H(\omega)| = |\dfrac{2\tau}{Te} \times sin\left(\dfrac{\omega Te}{2}\right)|$

d) Arguments

$H(\omega) = \tau \times \omega$

314.

$Ha(j\omega) = -j\tau\omega = \tau\omega \times e^{-j\frac{\pi}{2}}$

a)Module de $Ha(\omega)$

$|Ha(\omega)| = |\tau\omega|$

b) Argument de $Ha(\omega)$

arg(Ha)=$-\frac{\pi}{2}$

c) L'erreur relative sur le module pour ω<<ωe

$$\varepsilon = \frac{Ha(j\omega) - H(j\omega)}{Ha(j\omega)} = 1 - \frac{H(j\omega)}{Ha(j\omega)}$$

$$\frac{2\tau}{Te} = \frac{2\tau}{\frac{2\pi}{\omega e}} = \frac{\omega e\tau}{\pi}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega e\tau}{\pi} \times sin\left(\frac{2\pi\omega}{2\omega e}\right) = \frac{2\omega e}{\pi} \times sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\tau\omega e}{\pi} \times \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right) \times \frac{1}{\tau\omega}$$

$$= 1 - \frac{\omega e}{\omega\pi} \times \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)$$

$$\omega \ll \omega e \rightarrow \frac{\omega}{\omega e} \ll 1$$

$$\sin(x) \cong x - \frac{x^3}{6}$$

$$\varepsilon \cong 1 - \frac{\omega e}{\omega\pi}\left[\frac{\pi\omega}{\omega e} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)^3\right]$$

$$\cong 1 - 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)^2$$

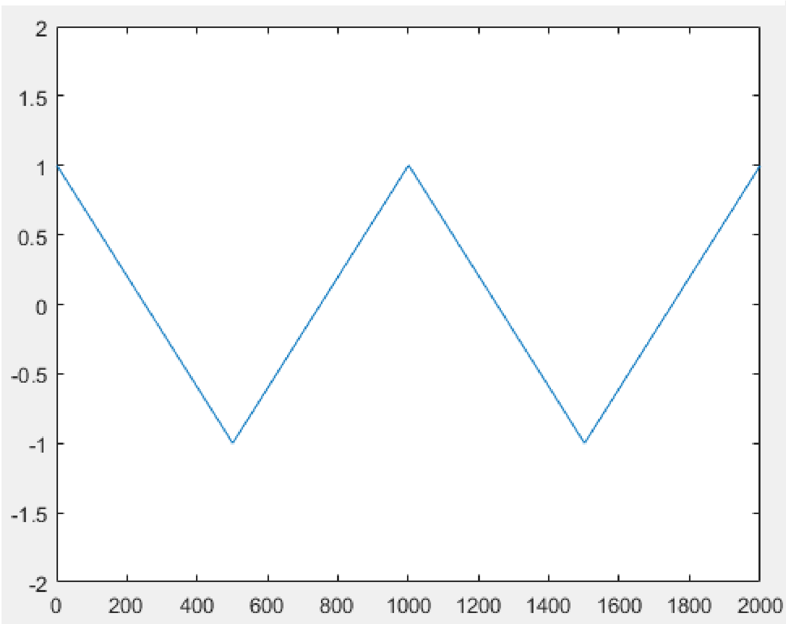
$$\varepsilon \cong \frac{1}{6}\left(\frac{\pi\omega}{\omega e}\right)^2$$

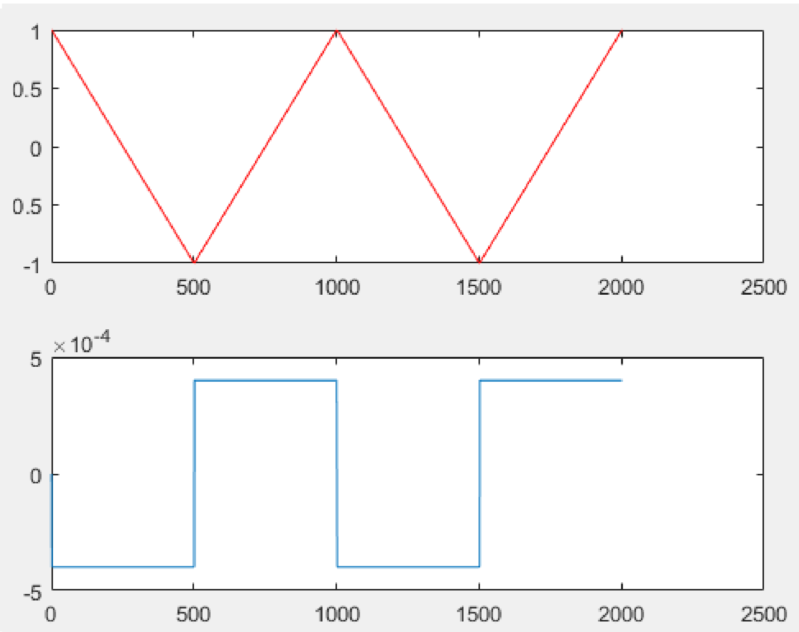
32.

321.

```
%derivation numerique
clc
close (figure(1))
close (figure(2))

%simulation du signal créneau de période T
T=1 %période du signal créneau
Te=1e-3 %période d'échantillonage
a= 4/T %pente nulle
% simulation alternance négative , amplitude =1
t1= 0:Te:T/2 %tableau des temps
x1=-a*t1 + 1
%simulation alternance négative, amplitude =-1
t2= (T/2+Te):Te:T
x2= a*t2 -3
x= [x1 x2 x1 x2]
t= [t1 t2 t1 t2]
figure(1);
plot(x);axis ([0 length(t) -2 2])
%intégrateur ,umérique
taille= length(x); % dimension du tableau
a0 = 0.1; %a0=a1=Te/2*?
a1= 0.1
```





322.

```
clc
close(figure(1))
close (figure(2))

pas = 0.0005
%étude de la fonction de transfert
a=0:pas:0.5;%tableau des fréquences normalisées
%calcul du module de la fonction de transfert de l'intégrateur numérique
Hn= (10)*((sin(pi*a)));
%calcul du module de la fonction de transfert de l'intégrateur analogique
Ha= 10*(pi*a)
figure(1)
plot(a, Ha); hold on
plot(a, Hn, 'r')
%courbe erreur ebn fonction de la fréquence normalisée
erreur = ((pi*pi)/6)*a.*a
erreur1= abs(((Ha-Hn)./Ha))
figure (2)
plot (a,erreur1);hold on
plot(a, erreur,'r');
```