



**CONCORSO PER L'ASSUNZIONE DI 5 ESPERTI LAUREATI  
CON ORIENTAMENTO NELLE DISCIPLINE STATISTICHE  
(Bando 15/09/2020 – Lett. B)**

**Testo n. 2**

**STATISTICA E PROBABILITÀ**

*Due quesiti a scelta tra tre proposti dalla Commissione*

**QUESITO N. 1**

Si considerino le due variabili aleatorie (v.a.) discrete e indipendenti  $X$  e  $Y$  le cui distribuzioni di probabilità sono definite rispettivamente da

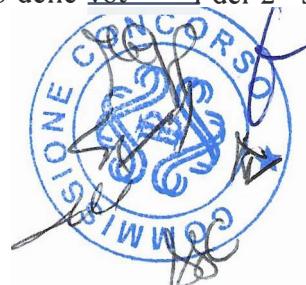
$$P(X = r) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}, r \in \{0, 1, \dots\}, \lambda > 0$$

$$P(Y = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, k \in \{0, 1, \dots\}, \theta > 0$$

1. Si determini la distribuzione di probabilità della v.a.  $Z = X + Y$ . Si discuta, fornendo alcuni esempi, quali tipi di fenomeni aleatori possano essere rappresentati in modo appropriato da tale distribuzione di probabilità.
2. Si calcolino la media e la varianza della v.a.  $Z$ . Si derivi, inoltre, lo stimatore di massima verosimiglianza per la media della v.a.  $Z$  e se ne analizzino le proprietà di correttezza ed efficienza. Si illustri un caso in cui la stima campionaria di massima verosimiglianza della media sia “inammissibile”.
3. Si supponga di aver stimato, tramite osservazioni campionarie, una probabilità  $\hat{p}$  che un successo si verifichi in un numero  $n$  di prove ripetute indipendenti e di voler effettuare dei test di ipotesi sulla stima  $\hat{p}$ . Si indichino sotto quali condizioni, per la verifica delle ipotesi, si potrebbe far riferimento ad una distribuzione del tipo  $X$  sopra riportata con parametro stimato tramite  $\hat{\lambda} = n\hat{p}$ .

**QUESITO N. 2**

In un’indagine condotta in due università, A e B, su un campione di 50 studenti sono state rilevate le votazioni riportate dagli studenti nell’esame di algebra. I 25 studenti dell’università A hanno riportato un voto medio di 25/30, con uno scarto quadratico medio pari a 4, mentre nell’università B la media e lo scarto quadratico medio delle votazioni dei 25 studenti



del campione sono stati rispettivamente pari a 26,5/30 e 3. Si considerino le osservazioni come due campioni casuali provenienti da due distribuzioni normali.

La candidata/il candidato:

1. verifichi, con un livello di significatività del 5%, l'ipotesi che gli studenti dell'università B abbiano valutazioni più alte nell'esame di algebra rispetto agli studenti dell'università A;
2. descriva sinteticamente le statistiche test utilizzate per sottoporre a verifica le ipotesi sulla media di una popolazione, distinguendo tra le possibili casistiche relative alla varianza della popolazione e alla numerosità del campione;
3. illustri come può essere applicata la procedura di Neyman-Pearson per identificare un test uniformemente più potente nel caso in cui sia l'ipotesi di base sia quella alternativa sono composte.

### QUESITO N. 3

La tabella riporta, per il periodo 2011-2020, le serie degli stipendi medi annui nei Paesi A e B espressi nelle due valute fittizie rispettivamente  $a$  e  $b$  e l'indice dei prezzi al consumo con base 2016 nel Paese A.

2006  
f.f.

| Anno | Paese A: Stipendio medio annuo in $a$ | Paese A: Indice dei prezzi al consumo | Paese B: Stipendio medio annuo in $b$ |
|------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 2011 | 29.000                                | 95,74                                 | 1.128.600                             |
| 2012 | 29.960                                | 96,99                                 | 1.132.555                             |
| 2013 | 31.000                                | 97,48                                 | 1.136.000                             |
| 2014 | 32.080                                | 100,41                                | 1.134.985                             |
| 2015 | 33.871                                | 105,85                                | 1.136.845                             |
| 2016 | 33.985                                | 106,00                                | 1.135.989                             |
| 2017 | 34.458                                | 110,20                                | 1.136.541                             |
| 2018 | 35.981                                | 113,25                                | 1.138.412                             |
| 2019 | 36.410                                | 113,89                                | 1.138.859                             |
| 2020 | 37.000                                | 114,95                                | 1.139.120                             |



La candidata/il candidato:

1. determini in quale misura lo stipendio medio annuo nel Paese A è cresciuto in termini reali nell'arco del decennio. Inoltre, utilizzi l'indice dei prezzi al consumo per determinare l'evoluzione del potere d'acquisto della valuta  $\alpha$  nel decennio;
2. indichi a quale indicatore si può ricorrere nel caso si voglia individuare in quale dei due paesi lo stipendio medio annuo è risultato più variabile nell'arco del decennio;
3. illustri le proprietà che possono essere soddisfatte dai numeri indice, specificando se sono o meno soddisfatte dagli indici di Laspeyres, Paasche e Fisher.

### **ECONOMETRIA E STATISTICAL LEARNING**

*Un quesito a scelta tra due proposti dalla Commissione*

#### **QUESITO N. 4**

1. Si consideri il seguente modello di regressione lineare multipla:  $Y = X'\beta + \epsilon$ , dove  $Y$  è il vettore della variabile risposta osservata su un campione di  $n$  individui,  $X$  una matrice di  $K$  predittori di qualsiasi natura ed  $\epsilon$  il termine di errore.

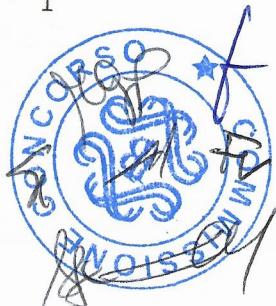
La candidata/il candidato:

- 1.a dimostri le principali proprietà dello stimatore OLS di  $\beta$ ;  
1.b illustri come valuterebbe la relazione tra la variabile risposta e i predittori e come l'importanza relativa dei predittori nel modello.
2. Si supponga di aver stimato un modello di regressione lineare dei salari in funzione del genere del rispondente, del suo livello di istruzione, degli anni di esperienza lavorativa e del numero di anni di lavoro con contratto a tempo indeterminato:

Coefficients:

|             | Estimate   | Std. Error | t value | Pr(> t ) |     |
|-------------|------------|------------|---------|----------|-----|
| (Intercept) | 0.4166910  | 0.0989279  | 4.212   | 2.98e-05 | *** |
| female      | -0.2965110 | 0.0358054  | -8.281  | 1.04e-15 | *** |
| educ        | 0.0801966  | 0.0067573  | 11.868  | < 2e-16  | *** |
| exper       | 0.0294324  | 0.0049752  | 5.916   | 6.00e-09 | *** |
| expersq     | -0.0005827 | 0.0001073  | -5.431  | 8.65e-08 | *** |
| tenure      | 0.0317139  | 0.0068452  | 4.633   | 4.56e-06 | *** |
| tenuresq    | -0.0005852 | 0.0002347  | -2.493  | 0.013    | *   |
| ---         |            |            |         |          |     |

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ',' 1



dove:

- la variabile risposta rappresenta il salario medio orario espresso in logaritmo;
- "female" è una variabile binaria che assume valore 1 se l'individuo intervistato è donna e 0 se è uomo;
- "educ" rappresenta il numero di anni di istruzione dell'intervistato;
- "exper" rappresenta il numero di anni di esperienza lavorativa dell'intervistato e "expersq" il suo quadrato;
- "tenure" rappresenta il numero di anni di lavoro con contratto a tempo indeterminato e "tenuresq" il suo quadrato.

La candidata/il candidato:

- 2.a fornisca la migliore interpretazione del coefficiente  $\hat{\beta} = -0.296$  del genere dell'intervistato e del coefficiente  $\hat{\beta} = 0.080$  del numero di anni di istruzione;
- 2.b spieghi la relazione tra salari orari e anni di esperienza del lavoratore.
3. La candidata/il candidato discuta brevemente del problema delle variabili di *confounding* (o variabili omesse) in presenza di dati osservazionali.

## QUESITO N. 5

1. Si supponga di voler individuare un insieme finito di  $g$  sottogruppi omogenei di una popolazione. A tal fine si potrebbe stimare un modello di mistura univariata finita di distribuzioni:

$$f(x_i, \psi) = \sum_{j=1}^g \pi_j f_j(x_i, \theta_j)$$

La candidata/il candidato:

- 1.a descriva il modello di mistura di cui sopra e illustri le procedure di stima dei parametri. Per semplicità si consideri una mistura di distribuzioni Normali  $N(\mu, \sigma)$ ;
- 1.b proponga una possibile metodologia di analisi alternativa utilizzabile per individuare gruppi omogenei di sotto-popolazioni nel caso multivariato e ne discuta le principali caratteristiche.
2. Si supponga di aver stimato un modello di mistura di distribuzioni Normali per lo studio della convergenza tra regioni europee. Considerando il logaritmo del PIL pro capite in parità di potere d'acquisto ( $\log(PIL_{pps})$ ), il modello stimato è il seguente:

$$\log(PIL_{pps}) = 0.14 N(9.10, 0.12) + 0.80 N(9.72, 0.34) + 0.06 N(10.13, 0.20)$$



La candidata/il candidato:

- 2.a interpreti i parametri del modello di mistura stimati;
- 2.b discuta delle possibili implicazioni che si avrebbero con una stima di  $\pi_3$  pari a 0.01 invece che pari a 0.06.
3. Relativamente alle metodologie discusse ai punti 1a e 1b, si illustri come stimare l'appartenenza di ciascuna unità ai gruppi individuati.

### **METODI DI CAMPIONAMENTO**

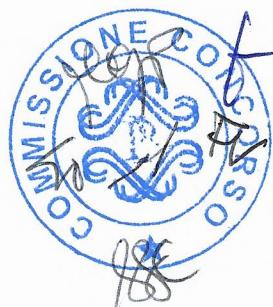
*Un quesito a scelta tra due proposti dalla Commissione*

#### **QUESITO N. 6**

Si vuole stimare il valore medio del fatturato  $y$  di una popolazione di 10.000 aziende. A tale scopo si effettua un campionamento casuale semplice senza reintroduzione di numerosità pari a 100. Da fonti amministrative si è a conoscenza che, nella popolazione data, il numero medio di addetti per azienda è  $\bar{x} = 15$ . Nella tavola che segue sono riassunti i risultati dell'indagine:

| Media<br>campionaria del<br>fatturato | Media<br>campionaria del<br>numero di addetti | Varianza<br>campionaria del<br>fatturato | Varianza<br>campionaria del<br>numero di addetti | Covarianza tra<br>fatturato e<br>numero di<br>addetti |
|---------------------------------------|---|--|--|---|
| $\bar{y}$                             | $\bar{x}$                                     | $s_y^2$                                  | $s_x^2$  | $s_{xy}$  |
| 10                                    | 14  | 20                                       | 25   | 15  |

1. Si stimino la media del fatturato, utilizzando lo stimatore di Horvitz-Thompson, e la sua varianza. Si stimi, inoltre, il valore medio del fatturato attraverso lo stimatore per quoziente e lo stimatore per regressione.
2. Si valutino correttezza ed efficienza dei tre stimatori proposti. Sulla base dei risultati ottenuti si indichi quale dei tre stimatori è preferibile.
3. Si ipotizzi di sapere che la popolazione è suddivisa in  $H$  strati e di poter applicare un campionamento casuale semplice senza reintroduzione in ciascuno strato. In che modo è possibile impiegare gli stimatori per quoziente e per regressione in questo caso?



### QUESITO N. 7

Si supponga di condurre un'indagine per rilevare il voto medio conseguito in matematica dagli studenti della scuola secondaria di secondo grado. Si ipotizzi che la popolazione di riferimento sia formata da 1000 studenti raggruppati in 10 scuole di pari numerosità. Tramite campionamento causale semplice si seleziona un campione di 3 scuole e, da ciascuna scuola, un campione di 10 studenti. La seguente tabella mostra il totale campionario e la varianza campionaria dei voti conseguiti in matematica per ogni scuola selezionata.

| Scuola | Voto in matematica |                      |
|--------|--------------------|----------------------|
|        | Totale campionario | Varianza campionaria |
| 1      | 60                 | 30                   |
| 2      | 48                 | 90                   |
| 3      | 70                 | 40                   |

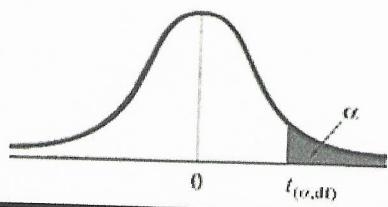
1. Si stimi il punteggio medio conseguito in matematica. Si discuta l'efficienza del disegno di campionamento adottato rispetto a un campionamento in cui tutti gli studenti delle scuole selezionate sono inclusi nel campione.
2. Si supponga ora che nella lista di campionamento delle scuole sia disponibile l'informazione sulla tipologia di scuola (liceo, istituto tecnico, professionale, ecc.). Quale disegno di campionamento sarebbe preferibile e perché?
3. Si descrivano i principali metodi di ricampionamento per la stima della varianza in caso di disegni di campionamento complessi.

### PROVA IN LINGUA INGLESE

What do you think the short- and long-term effects of the lockdown due to the Corona virus pandemic will be?



Tavola della distribuzione T di Student



| Gradi di libertà | Area nella coda di destra |       |        |        |        |        |         |         |         |
|------------------|---------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
|                  | 0.1                       | 0.05  | 0.025  | 0.02   | 0.01   | 0.005  | 0.0025  | 0.001   | 0.0005  |
| 1                | 3.078                     | 6.314 | 12.706 | 15.894 | 31.821 | 63.656 | 127.321 | 318.289 | 636.578 |
| 2                | 1.886                     | 2.920 | 4.303  | 4.849  | 6.965  | 9.925  | 14.089  | 22.328  | 31.600  |
| 3                | 1.638                     | 2.353 | 3.182  | 3.482  | 4.541  | 5.841  | 7.453   | 10.214  | 12.924  |
| 4                | 1.533                     | 2.132 | 2.776  | 2.999  | 3.747  | 4.604  | 5.598   | 7.173   | 8.610   |
| 5                | 1.476                     | 2.015 | 2.571  | 2.757  | 3.365  | 4.032  | 4.773   | 5.894   | 6.869   |
| 6                | 1.440                     | 1.943 | 2.447  | 2.612  | 3.143  | 3.707  | 4.317   | 5.208   | 5.959   |
| 7                | 1.415                     | 1.895 | 2.365  | 2.517  | 2.998  | 3.499  | 4.029   | 4.785   | 5.408   |
| 8                | 1.397                     | 1.860 | 2.306  | 2.449  | 2.896  | 3.355  | 3.833   | 4.501   | 5.041   |
| 9                | 1.383                     | 1.833 | 2.262  | 2.398  | 2.821  | 3.250  | 3.690   | 4.297   | 4.781   |
| 10               | 1.372                     | 1.812 | 2.228  | 2.359  | 2.764  | 3.169  | 3.581   | 4.144   | 4.587   |
| 11               | 1.363                     | 1.796 | 2.201  | 2.328  | 2.718  | 3.106  | 3.497   | 4.025   | 4.437   |
| 12               | 1.356                     | 1.782 | 2.179  | 2.303  | 2.681  | 3.055  | 3.428   | 3.930   | 4.318   |
| 13               | 1.350                     | 1.771 | 2.160  | 2.282  | 2.650  | 3.012  | 3.372   | 3.852   | 4.221   |
| 14               | 1.345                     | 1.761 | 2.145  | 2.264  | 2.624  | 2.977  | 3.326   | 3.787   | 4.140   |
| 15               | 1.341                     | 1.753 | 2.131  | 2.249  | 2.602  | 2.947  | 3.286   | 3.733   | 4.073   |
| 16               | 1.337                     | 1.746 | 2.120  | 2.235  | 2.583  | 2.921  | 3.252   | 3.686   | 4.015   |
| 17               | 1.333                     | 1.740 | 2.110  | 2.224  | 2.567  | 2.898  | 3.222   | 3.646   | 3.965   |
| 18               | 1.330                     | 1.734 | 2.101  | 2.214  | 2.552  | 2.878  | 3.197   | 3.610   | 3.922   |
| 19               | 1.328                     | 1.729 | 2.093  | 2.205  | 2.539  | 2.861  | 3.174   | 3.579   | 3.883   |
| 20               | 1.325                     | 1.725 | 2.086  | 2.197  | 2.528  | 2.845  | 3.153   | 3.552   | 3.850   |
| 21               | 1.323                     | 1.721 | 2.080  | 2.189  | 2.518  | 2.831  | 3.135   | 3.527   | 3.819   |
| 22               | 1.321                     | 1.717 | 2.074  | 2.183  | 2.508  | 2.819  | 3.119   | 3.505   | 3.792   |
| 23               | 1.319                     | 1.714 | 2.069  | 2.177  | 2.500  | 2.807  | 3.104   | 3.485   | 3.768   |
| 24               | 1.318                     | 1.711 | 2.064  | 2.172  | 2.492  | 2.797  | 3.091   | 3.467   | 3.745   |
| 25               | 1.316                     | 1.708 | 2.060  | 2.167  | 2.485  | 2.787  | 3.078   | 3.450   | 3.725   |
| 26               | 1.315                     | 1.706 | 2.056  | 2.162  | 2.479  | 2.779  | 3.067   | 3.435   | 3.707   |
| 27               | 1.314                     | 1.703 | 2.052  | 2.158  | 2.473  | 2.771  | 3.057   | 3.421   | 3.689   |
| 28               | 1.313                     | 1.701 | 2.048  | 2.154  | 2.467  | 2.763  | 3.047   | 3.408   | 3.674   |
| 29               | 1.311                     | 1.699 | 2.045  | 2.150  | 2.462  | 2.756  | 3.038   | 3.396   | 3.660   |
| 30               | 1.310                     | 1.697 | 2.042  | 2.147  | 2.457  | 2.750  | 3.030   | 3.385   | 3.646   |
| 31               | 1.309                     | 1.696 | 2.040  | 2.144  | 2.453  | 2.744  | 3.022   | 3.375   | 3.633   |
| 32               | 1.309                     | 1.694 | 2.037  | 2.141  | 2.449  | 2.738  | 3.015   | 3.365   | 3.622   |
| 33               | 1.308                     | 1.692 | 2.035  | 2.138  | 2.445  | 2.733  | 3.008   | 3.356   | 3.611   |
| 34               | 1.307                     | 1.691 | 2.032  | 2.136  | 2.441  | 2.728  | 3.002   | 3.348   | 3.601   |
| 35               | 1.306                     | 1.690 | 2.030  | 2.133  | 2.438  | 2.724  | 2.996   | 3.340   | 3.591   |
| 36               | 1.306                     | 1.688 | 2.028  | 2.131  | 2.434  | 2.719  | 2.990   | 3.333   | 3.582   |
| 37               | 1.305                     | 1.687 | 2.026  | 2.129  | 2.431  | 2.715  | 2.985   | 3.326   | 3.574   |
| 38               | 1.304                     | 1.686 | 2.024  | 2.127  | 2.429  | 2.712  | 2.980   | 3.319   | 3.566   |
| 39               | 1.304                     | 1.685 | 2.023  | 2.125  | 2.426  | 2.708  | 2.976   | 3.313   | 3.558   |
| 40               | 1.303                     | 1.684 | 2.021  | 2.123  | 2.423  | 2.704  | 2.971   | 3.307   | 3.551   |
| 41               | 1.303                     | 1.683 | 2.020  | 2.121  | 2.421  | 2.701  | 2.967   | 3.301   | 3.544   |
| 42               | 1.302                     | 1.682 | 2.018  | 2.120  | 2.418  | 2.698  | 2.963   | 3.296   | 3.538   |
| 43               | 1.302                     | 1.681 | 2.017  | 2.118  | 2.416  | 2.695  | 2.959   | 3.291   | 3.532   |
| 44               | 1.301                     | 1.680 | 2.015  | 2.116  | 2.414  | 2.692  | 2.956   | 3.286   | 3.526   |
| 45               | 1.301                     | 1.679 | 2.014  | 2.115  | 2.412  | 2.690  | 2.952   | 3.281   | 3.520   |
| 46               | 1.300                     | 1.679 | 2.013  | 2.114  | 2.410  | 2.687  | 2.949   | 3.277   | 3.515   |
| 47               | 1.300                     | 1.678 | 2.012  | 2.112  | 2.408  | 2.685  | 2.946   | 3.273   | 3.510   |
| 48               | 1.299                     | 1.677 | 2.011  | 2.111  | 2.407  | 2.682  | 2.943   | 3.269   | 3.505   |
| 49               | 1.299                     | 1.677 | 2.010  | 2.110  | 2.405  | 2.680  | 2.940   | 3.265   | 3.500   |
| 50               | 1.299                     | 1.676 | 2.009  | 2.109  | 2.403  | 2.678  | 2.937   | 3.261   | 3.496   |



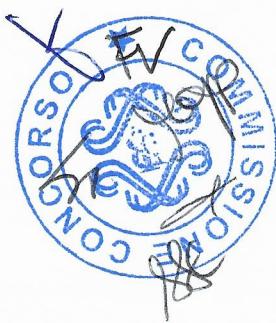


Table entry for  $p$  is the critical value  $(\chi^2)^*$  with probability  $p$  lying to its right.

TABLE F  $\chi^2$  distribution critical values

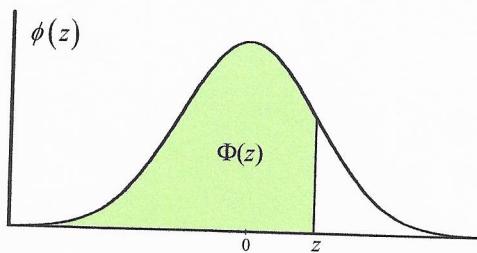
| df | Tail probability $p$ |       |       |       |       |       |       |
|----|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | .9995                | .999  | .9975 | .995  | .99   | .98   | .975  |
| 1  | 0.00                 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 2  | 0.00                 | 0.00  | 0.01  | 0.02  | 0.04  | 0.06  | 0.10  |
| 3  | 0.02                 | 0.02  | 0.04  | 0.07  | 0.11  | 0.18  | 0.33  |
| 4  | 0.06                 | 0.09  | 0.14  | 0.21  | 0.30  | 0.43  | 0.68  |
| 5  | 0.16                 | 0.21  | 0.31  | 0.41  | 0.55  | 0.75  | 1.05  |
| 6  | 0.30                 | 0.38  | 0.53  | 0.68  | 0.87  | 1.13  | 1.43  |
| 7  | 0.48                 | 0.60  | 0.79  | 0.99  | 1.24  | 1.64  | 2.20  |
| 8  | 0.71                 | 0.86  | 1.10  | 1.34  | 1.65  | 2.18  | 2.83  |
| 9  | 0.97                 | 1.15  | 1.45  | 1.73  | 2.09  | 2.53  | 3.49  |
| 10 | 1.26                 | 1.48  | 1.83  | 2.16  | 2.56  | 3.06  | 4.17  |
| 11 | 1.59                 | 1.83  | 2.23  | 2.60  | 3.05  | 3.61  | 4.87  |
| 12 | 1.93                 | 2.21  | 2.66  | 3.07  | 3.57  | 4.18  | 5.40  |
| 13 | 2.31                 | 2.62  | 3.11  | 3.57  | 4.11  | 4.77  | 5.89  |
| 14 | 2.70                 | 3.04  | 3.58  | 4.07  | 4.66  | 5.37  | 6.53  |
| 15 | 3.11                 | 3.48  | 4.07  | 4.60  | 5.23  | 5.98  | 7.04  |
| 16 | 3.54                 | 3.94  | 4.57  | 5.14  | 5.81  | 6.61  | 7.66  |
| 17 | 3.98                 | 4.42  | 5.09  | 5.70  | 6.41  | 7.26  | 8.23  |
| 18 | 4.44                 | 4.90  | 5.62  | 6.26  | 7.01  | 7.91  | 8.91  |
| 19 | 4.91                 | 5.41  | 6.17  | 6.84  | 7.63  | 8.57  | 9.59  |
| 20 | 5.40                 | 5.92  | 6.72  | 7.43  | 8.26  | 9.24  | 10.28 |
| 21 | 5.90                 | 6.45  | 7.29  | 8.03  | 8.90  | 9.91  | 10.91 |
| 22 | 6.40                 | 6.98  | 7.86  | 8.64  | 9.54  | 10.60 | 11.64 |
| 23 | 6.92                 | 7.53  | 8.45  | 9.26  | 10.20 | 11.29 | 12.39 |
| 24 | 7.45                 | 8.08  | 9.04  | 9.89  | 10.86 | 11.99 | 13.12 |
| 25 | 7.99                 | 8.65  | 9.65  | 10.52 | 11.52 | 12.70 | 13.12 |
| 26 | 8.54                 | 9.22  | 10.26 | 11.16 | 12.20 | 13.41 | 13.84 |
| 27 | 9.09                 | 9.80  | 10.87 | 11.81 | 12.88 | 14.13 | 14.57 |
| 28 | 9.66                 | 10.39 | 11.50 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.15 |
| 29 | 10.23                | 10.99 | 12.13 | 13.12 | 14.26 | 15.57 | 16.05 |
| 30 | 10.80                | 11.59 | 12.76 | 13.79 | 14.95 | 16.31 | 17.71 |
| 31 | 16.91                | 17.92 | 19.42 | 20.71 | 22.16 | 23.84 | 24.43 |
| 32 | 23.46                | 24.67 | 26.46 | 27.99 | 29.71 | 31.66 | 32.36 |
| 33 | 30.34                | 31.74 | 33.79 | 35.53 | 37.48 | 39.70 | 40.48 |
| 34 | 44.79                | 46.52 | 49.04 | 51.17 | 53.54 | 56.21 | 57.15 |
| 35 | 59.90                | 61.92 | 64.86 | 67.33 | 70.06 | 73.14 | 74.22 |

Table entry for  $p$  is the critical value  $(\chi^2)^*$  with probability  $p$  lying to its right.

TABLE F  $\chi^2$  distribution critical values

| df | Tail probability $p$ |       |       |        |        |        |        |
|----|----------------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
|    | .25                  | .20   | .15   | .10    | .05    | .025   | .01    |
| 1  | 1.32                 | 1.64  | 2.07  | 2.71   | 3.84   | 5.02   | 5.41   |
| 2  | 2.77                 | 3.22  | 3.79  | 4.61   | 5.99   | 7.38   | 9.21   |
| 3  | 4.11                 | 4.64  | 5.32  | 6.25   | 7.81   | 9.35   | 11.34  |
| 4  | 5.39                 | 5.99  | 6.74  | 7.78   | 9.49   | 11.14  | 13.22  |
| 5  | 6.63                 | 7.29  | 8.12  | 9.24   | 11.07  | 12.83  | 14.32  |
| 6  | 7.84                 | 8.56  | 9.45  | 10.64  | 12.59  | 14.45  | 16.75  |
| 7  | 9.04                 | 9.80  | 10.75 | 12.02  | 14.07  | 16.01  | 18.62  |
| 8  | 10.22                | 11.03 | 12.03 | 13.36  | 15.51  | 17.53  | 20.09  |
| 9  | 11.39                | 12.24 | 13.29 | 14.68  | 16.92  | 19.02  | 21.67  |
| 10 | 12.55                | 13.44 | 14.53 | 15.99  | 18.31  | 20.48  | 23.59  |
| 11 | 13.70                | 14.63 | 15.77 | 17.28  | 19.68  | 21.92  | 22.62  |
| 12 | 14.85                | 15.81 | 16.99 | 18.20  | 19.81  | 21.36  | 23.34  |
| 13 | 15.98                | 16.98 | 18.20 | 19.12  | 20.60  | 22.31  | 24.57  |
| 14 | 17.12                | 18.12 | 19.41 | 20.60  | 22.31  | 24.12  | 26.87  |
| 15 | 18.25                | 19.31 | 20.60 | 22.31  | 25.00  | 27.49  | 29.14  |
| 16 | 19.37                | 20.47 | 21.79 | 23.54  | 26.30  | 28.85  | 30.58  |
| 17 | 20.49                | 21.61 | 22.98 | 24.77  | 27.59  | 30.19  | 32.00  |
| 18 | 21.60                | 22.76 | 25.99 | 27.20  | 30.33  | 32.85  | 34.81  |
| 19 | 22.72                | 23.90 | 25.33 | 27.20  | 30.14  | 32.85  | 34.81  |
| 20 | 23.83                | 25.04 | 26.50 | 28.41  | 31.41  | 34.17  | 37.57  |
| 21 | 24.93                | 26.17 | 27.66 | 29.62  | 32.67  | 36.34  | 39.72  |
| 22 | 26.04                | 27.30 | 28.82 | 30.81  | 33.78  | 37.66  | 40.46  |
| 23 | 27.14                | 28.43 | 29.98 | 32.01  | 35.17  | 38.08  | 41.31  |
| 24 | 28.24                | 29.59 | 31.13 | 33.20  | 36.42  | 39.36  | 42.88  |
| 25 | 29.34                | 30.68 | 32.28 | 34.38  | 37.65  | 40.65  | 43.21  |
| 26 | 30.43                | 31.79 | 33.43 | 35.56  | 38.89  | 41.92  | 44.31  |
| 27 | 31.53                | 32.91 | 34.57 | 36.74  | 40.11  | 43.19  | 46.54  |
| 28 | 32.62                | 34.03 | 35.71 | 37.92  | 41.34  | 44.46  | 48.28  |
| 29 | 33.71                | 35.14 | 36.85 | 39.09  | 42.56  | 45.72  | 50.51  |
| 30 | 34.80                | 36.25 | 38.00 | 39.99  | 43.77  | 46.98  | 52.34  |
| 31 | 35.88                | 37.38 | 39.36 | 40.27  | 42.98  | 45.56  | 51.18  |
| 32 | 36.96                | 38.56 | 40.65 | 41.57  | 44.31  | 46.93  | 53.48  |
| 33 | 37.94                | 39.61 | 41.64 | 42.86  | 45.64  | 48.29  | 54.95  |
| 34 | 38.93                | 40.93 | 43.00 | 44.24  | 47.00  | 49.88  | 56.41  |
| 35 | 39.92                | 41.94 | 44.14 | 46.96  | 49.64  | 52.22  | 57.86  |
| 36 | 40.91                | 42.94 | 45.42 | 48.28  | 51.00  | 53.59  | 59.30  |
| 37 | 41.90                | 43.94 | 46.69 | 49.59  | 52.34  | 54.97  | 60.73  |
| 38 | 42.89                | 44.93 | 47.76 | 50.59  | 53.67  | 56.33  | 62.16  |
| 39 | 43.88                | 45.92 | 48.79 | 51.60  | 54.69  | 57.67  | 63.48  |
| 40 | 44.87                | 46.96 | 49.86 | 52.76  | 55.76  | 58.76  | 65.70  |
| 41 | 45.86                | 47.95 | 50.85 | 53.75  | 56.75  | 59.74  | 67.09  |
| 42 | 46.85                | 48.94 | 51.84 | 54.74  | 57.74  | 60.73  | 68.09  |
| 43 | 47.84                | 49.93 | 52.83 | 55.73  | 58.73  | 61.72  | 69.09  |
| 44 | 48.83                | 50.92 | 53.82 | 56.72  | 59.72  | 62.71  | 70.79  |
| 45 | 49.82                | 51.91 | 54.81 | 57.71  | 60.71  | 63.70  | 71.70  |
| 46 | 50.81                | 52.90 | 55.80 | 58.70  | 61.70  | 64.69  | 72.69  |
| 47 | 51.80                | 53.89 | 56.79 | 59.69  | 62.69  | 65.68  | 73.68  |
| 48 | 52.79                | 54.88 | 57.78 | 60.68  | 63.68  | 66.67  | 74.67  |
| 49 | 53.78                | 55.87 | 58.77 | 61.67  | 64.67  | 67.66  | 75.66  |
| 50 | 54.77                | 56.86 | 59.76 | 62.66  | 65.66  | 68.65  | 76.65  |
| 51 | 55.76                | 57.85 | 60.75 | 63.65  | 66.65  | 69.64  | 77.64  |
| 52 | 56.75                | 58.84 | 61.74 | 64.64  | 67.64  | 70.63  | 78.63  |
| 53 | 57.74                | 59.83 | 62.73 | 65.63  | 68.63  | 71.62  | 79.62  |
| 54 | 58.73                | 60.82 | 63.72 | 66.62  | 69.62  | 72.61  | 80.61  |
| 55 | 59.72                | 61.81 | 64.71 | 67.61  | 70.61  | 73.60  | 81.60  |
| 56 | 60.71                | 62.80 | 65.70 | 68.60  | 71.60  | 74.59  | 82.59  |
| 57 | 61.70                | 63.79 | 66.69 | 69.59  | 72.59  | 75.58  | 83.58  |
| 58 | 62.69                | 64.78 | 67.68 | 70.58  | 73.58  | 76.57  | 84.58  |
| 59 | 63.68                | 65.77 | 68.67 | 71.57  | 74.57  | 77.56  | 85.54  |
| 60 | 64.67                | 66.76 | 69.66 | 72.56  | 75.56  | 78.55  | 86.54  |
| 61 | 65.66                | 67.75 | 70.65 | 73.55  | 76.55  | 79.54  | 87.53  |
| 62 | 66.65                | 68.74 | 71.64 | 74.54  | 77.54  | 80.53  | 88.52  |
| 63 | 67.64                | 69.73 | 72.63 | 75.53  | 78.53  | 81.52  | 89.51  |
| 64 | 68.63                | 70.72 | 73.62 | 76.52  | 79.52  | 82.51  | 90.50  |
| 65 | 69.62                | 71.71 | 74.61 | 77.51  | 80.51  | 83.50  | 91.49  |
| 66 | 70.61                | 72.70 | 75.59 | 78.49  | 81.49  | 84.48  | 92.47  |
| 67 | 71.60                | 73.69 | 76.58 | 79.48  | 82.48  | 85.47  | 93.46  |
| 68 | 72.59                | 74.68 | 77.57 | 80.47  | 83.47  | 86.46  | 94.45  |
| 69 | 73.58                | 75.67 | 78.56 | 81.46  | 84.46  | 87.45  | 95.44  |
| 70 | 74.57                | 76.66 | 79.55 | 82.45  | 85.45  | 88.44  | 96.43  |
| 71 | 75.56                | 77.65 | 80.54 | 83.44  | 86.44  | 89.43  | 97.42  |
| 72 | 76.55                | 78.64 | 81.53 | 84.43  | 87.43  | 90.42  | 98.41  |
| 73 | 77.54                | 79.63 | 82.52 | 85.42  | 88.42  | 91.41  | 99.40  |
| 74 | 78.53                | 80.62 | 83.51 | 86.41  | 89.41  | 92.40  | 100.39 |
| 75 | 79.52                | 81.61 | 84.50 | 87.40  | 90.40  | 93.39  | 104.38 |
| 76 | 80.51                | 82.60 | 85.49 | 88.39  | 91.38  | 94.37  | 107.37 |
| 77 | 81.50                | 83.59 | 86.48 | 89.38  | 92.37  | 95.36  | 110.36 |
| 78 | 82.49                | 84.58 | 87.47 | 90.36  | 93.35  | 96.34  | 113.35 |
| 79 | 83.48                | 85.57 | 88.46 | 91.35  | 94.34  | 97.33  | 116.34 |
| 80 | 84.47                | 86.56 | 89.45 | 92.34  | 95.33  | 98.32  | 119.33 |
| 81 | 85.46                | 87.55 | 90.44 | 93.33  | 96.32  | 99.31  | 122.32 |
| 82 | 86.45                | 88.54 | 91.43 | 94.32  | 97.31  | 100.30 | 125.31 |
| 83 | 87.44                | 89.53 | 92.42 | 95.31  | 98.30  | 101.29 | 128.30 |
| 84 | 88.43                | 90.52 | 93.41 | 96.30  | 99.29  | 102.28 | 131.29 |
| 85 | 89.42                | 91.51 | 94.40 | 97.29  | 100.28 | 103.27 | 134.28 |
| 86 | 90.41                | 92.50 | 95.39 | 98.28  | 101.27 | 104.26 | 137.27 |
| 87 | 91.40                | 93.49 | 96.38 | 99.27  | 102.26 | 105.25 | 140.26 |
| 88 | 92.39                | 94.48 | 97.37 | 100.26 | 103.25 | 106.24 | 143.25 |
| 89 | 93.38                | 95.47 | 98.36 | 101.25 | 104.24 | 107.23 | 146.24 |
| 90 |                      |       |       |        |        |        |        |

Tavola 1 – Funzione di ripartizione della variabile casuale normale standardizzata



| $z$ | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |



FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DELLA BINOMIALE  $F(x) = \sum_{i=0}^x {}^n p^i (1-p)^{n-i}$

| <i>n</i> | <i>x</i> | 0.05   | 0.10   | 0.15   | 0.20   | 0.25   | 0.30   | 0.35   | 0.40   | 0.45   | 0.50   | 0.55   | 0.60   | 0.65   | 0.70   | 0.75   | 0.80   | 0.85   | 0.90   | 0.95   |        |
|----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 12       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9817 | 0.9519 | 0.8923 | 0.7912 | 0.6450 | 0.4656 | 0.2225 | 0.1329 | 0.0419 | 0.0064 | 0.0002 |        |
| 13       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9951 | 0.9846 | 0.9058 | 0.8114 | 0.6673 | 0.4813 | 0.2836 | 0.1206 | 0.0282 | 0.0015 | 0.0002 |        |        |
| 14       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9998 | 0.9980 | 0.9982 | 0.9980 | 0.9975 | 0.9918 | 0.9217 | 0.6543 | 0.4890 | 0.2798 | 0.109  | 0.0282 | 0.0015 |        |
| 15       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9975 | 0.9975 | 0.9974 | 0.9847 | 0.7287 | 0.5203 | 0.2662 | 0.0581 |
| 16       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9809 | 0.7759 | 0.5497 | 0.2265 | 0.0581 |
| 17       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9994 | 0.9820 | 0.7957 | 0.5628 | 0.2265 | 0.0581 |
| 18       | 0        | 0.3774 | 0.1361 | 0.0456 | 0.0144 | 0.0042 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 19       | 1        | 0.7547 | 0.4203 | 0.1985 | 0.0829 | 0.0310 | 0.0164 | 0.0042 | 0.0017 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 2        | 0.9335   | 0.7054 | 0.4413 | 0.2369 | 0.1113 | 0.0462 | 0.0170 | 0.0055 | 0.0015 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 3        | 0.9868   | 0.8850 | 0.6841 | 0.4551 | 0.2631 | 0.1332 | 0.0591 | 0.0230 | 0.0077 | 0.0022 | 0.0022 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 4        | 0.9980   | 0.9648 | 0.8556 | 0.6733 | 0.4654 | 0.2822 | 0.1500 | 0.0695 | 0.0280 | 0.0096 | 0.0028 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 5        | 0.9998   | 0.9914 | 0.9463 | 0.8369 | 0.6678 | 0.4739 | 0.2968 | 0.1629 | 0.0777 | 0.0318 | 0.0109 | 0.0031 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 6        | 1.0000   | 0.9983 | 0.9837 | 0.9324 | 0.8251 | 0.6655 | 0.4812 | 0.3081 | 0.1727 | 0.0835 | 0.0342 | 0.0116 | 0.0031 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 7        | 1.0000   | 0.9997 | 0.9959 | 0.9767 | 0.8767 | 0.7180 | 0.6656 | 0.4878 | 0.3169 | 0.1796 | 0.0871 | 0.0352 | 0.0114 | 0.0028 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 8        | 1.0000   | 1.0000 | 0.9992 | 0.9933 | 0.9713 | 0.9161 | 0.8145 | 0.6490 | 0.4840 | 0.3238 | 0.1841 | 0.0885 | 0.0347 | 0.0105 | 0.0023 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 9        | 1.0000   | 1.0000 | 0.9999 | 0.9984 | 0.9971 | 0.9874 | 0.9125 | 0.8139 | 0.6710 | 0.5000 | 0.3290 | 0.1881 | 0.0755 | 0.0236 | 0.0089 | 0.0116 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 10       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9895 | 0.9653 | 0.9115 | 0.8159 | 0.6762 | 0.5080 | 0.3225 | 0.1855 | 0.0839 | 0.0287 | 0.0098 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 11       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |        |
| 12       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |        |
| 13       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 14       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 15       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 16       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 17       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 18       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 19       | 0        | 0.3585 | 0.1216 | 0.0388 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 20       | 1        | 0.7358 | 0.3917 | 0.1756 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0021 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 2        | 0.9245   | 0.6769 | 0.4049 | 0.2051 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0121 | 0.0036 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 3        | 0.9841   | 0.8670 | 0.6477 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0444 | 0.0160 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 4        | 0.9974   | 0.9568 | 0.8288 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.1182 | 0.0510 | 0.0189 | 0.0059 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 5        | 0.9997   | 0.9887 | 0.9327 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.2454 | 0.1256 | 0.0553 | 0.0207 | 0.0064 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 6        | 1.0000   | 1.0000 | 0.9996 | 0.9781 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.4166 | 0.2500 | 0.1299 | 0.0577 | 0.0214 | 0.0065 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 7        | 1.0000   | 1.0000 | 0.9995 | 0.9941 | 0.9679 | 0.7723 | 0.6010 | 0.4159 | 0.2520 | 0.1316 | 0.0580 | 0.0210 | 0.0060 | 0.0013 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 8        | 1.0000   | 1.0000 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.7624 | 0.5956 | 0.4143 | 0.2517 | 0.1308 | 0.0565 | 0.0196 | 0.0051 | 0.0009 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 9        | 1.0000   | 1.0000 | 0.9998 | 0.9974 | 0.9867 | 0.9820 | 0.8782 | 0.7553 | 0.5914 | 0.4119 | 0.2493 | 0.1275 | 0.0532 | 0.0171 | 0.0039 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 10       | 1.0000   | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9981 | 0.9829 | 0.9468 | 0.8725 | 0.7507 | 0.5581 | 0.4086 | 0.2447 | 0.1218 | 0.0610 | 0.0139 | 0.0026 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 11       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9849 | 0.9804 | 0.9435 | 0.8692 | 0.7483 | 0.5857 | 0.4044 | 0.2376 | 0.1133 | 0.0409 | 0.0100 | 0.0013 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |        |
| 12       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 13       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 14       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 15       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 16       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 17       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 18       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 19       | 1.0000   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 20       | 0        | 0.3585 | 0.1216 | 0.0388 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |

Table A10 Table of the *F* Distribution  
 $F_{.95}$

| $df_{\text{num}}$ | $df_{\text{den}}$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 12    | 15    | 20    | 24    | 30    | 40    | 60    | 120   | $\infty$ |
|-------------------|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 1                 | 161.4             | 198.5 | 245.7 | 224.0 | 230.2 | 236.8 | 238.9 | 240.5 | 241.9 | 243.9 | 245.9 | 248.0 | 249.1 | 249.9 | 250.1 | 251.1 | 252.3 | 253.3 | 254.3 |          |
| 2                 | 18.51             | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.33 | 19.41 | 19.49 | 19.56 | 19.63 | 19.70 | 19.77 | 19.84 | 19.91 | 19.97 | 20.04 | 20.11 | 20.18 | 20.24 | 20.30 |          |
| 3                 | 10.13             | 9.55  | 9.28  | 9.02  | 8.84  | 8.68  | 8.55  | 8.41  | 8.29  | 8.14  | 8.01  | 7.87  | 7.74  | 7.60  | 8.06  | 8.64  | 8.92  | 9.47  | 10.49 |          |
| 4                 | 7.71              | 6.94  | 6.59  | 6.26  | 6.16  | 6.09  | 6.04  | 6.00  | 5.96  | 5.91  | 5.86  | 5.80  | 5.77  | 5.75  | 5.72  | 5.69  | 5.66  | 5.63  | 5.63  |          |
| 5                 | 6.61              | 5.79  | 5.41  | 5.19  | 5.05  | 4.95  | 4.88  | 4.82  | 4.77  | 4.74  | 4.68  | 4.62  | 4.56  | 4.53  | 4.50  | 4.46  | 4.43  | 4.40  | 4.36  |          |
| 6                 | 5.59              | 5.14  | 4.76  | 4.36  | 4.22  | 4.07  | 3.97  | 3.87  | 3.73  | 3.68  | 3.63  | 3.57  | 3.51  | 3.44  | 3.38  | 3.34  | 3.30  | 3.27  | 3.23  |          |
| 7                 | 5.59              | 4.74  | 4.32  | 4.06  | 3.84  | 3.60  | 3.53  | 3.45  | 3.37  | 3.29  | 3.23  | 3.18  | 3.14  | 3.07  | 3.01  | 2.94  | 2.88  | 2.85  | 2.82  |          |
| 8                 | 5.32              | 4.46  | 4.07  | 3.84  | 3.63  | 3.48  | 3.40  | 3.32  | 3.23  | 3.18  | 3.12  | 3.06  | 3.01  | 2.94  | 2.89  | 2.83  | 2.79  | 2.75  | 2.71  |          |
| 9                 | 6.12              | 4.26  | 3.86  | 3.63  | 3.48  | 3.37  | 3.29  | 3.20  | 3.12  | 3.04  | 2.96  | 2.88  | 2.80  | 2.72  | 2.64  | 2.58  | 2.52  | 2.48  | 2.44  |          |
| 10                | 4.96              | 4.10  | 3.71  | 3.48  | 3.33  | 3.22  | 3.14  | 3.07  | 3.02  | 2.95  | 2.88  | 2.81  | 2.74  | 2.67  | 2.60  | 2.53  | 2.47  | 2.41  | 2.36  |          |
| 11                | 4.84              | 3.98  | 3.59  | 3.35  | 3.20  | 3.11  | 3.00  | 2.91  | 2.85  | 2.80  | 2.75  | 2.69  | 2.62  | 2.55  | 2.48  | 2.42  | 2.35  | 2.29  | 2.23  |          |
| 12                | 4.75              | 3.89  | 3.50  | 3.40  | 3.25  | 3.16  | 3.08  | 3.03  | 2.92  | 2.83  | 2.77  | 2.71  | 2.67  | 2.60  | 2.53  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.26  |          |
| 13                | 4.67              | 3.81  | 3.44  | 3.31  | 3.21  | 3.11  | 3.01  | 2.96  | 2.95  | 2.85  | 2.76  | 2.70  | 2.65  | 2.58  | 2.51  | 2.44  | 2.37  | 2.30  | 2.23  |          |
| 14                | 4.60              | 3.74  | 3.34  | 3.21  | 3.11  | 3.01  | 2.96  | 2.91  | 2.85  | 2.76  | 2.70  | 2.65  | 2.58  | 2.51  | 2.44  | 2.37  | 2.30  | 2.23  | 2.16  |          |
| 15                | 4.54              | 3.68  | 3.30  | 3.16  | 3.04  | 2.95  | 2.89  | 2.80  | 2.71  | 2.64  | 2.59  | 2.54  | 2.48  | 2.42  | 2.35  | 2.28  | 2.21  | 2.14  | 2.07  |          |
| 16                | 4.49              | 3.83  | 3.53  | 3.29  | 3.16  | 3.04  | 2.95  | 2.86  | 2.77  | 2.68  | 2.61  | 2.55  | 2.49  | 2.43  | 2.36  | 2.29  | 2.22  | 2.15  | 2.07  |          |
| 17                | 4.41              | 3.59  | 3.25  | 3.16  | 3.05  | 2.96  | 2.87  | 2.77  | 2.68  | 2.61  | 2.55  | 2.49  | 2.43  | 2.36  | 2.29  | 2.22  | 2.15  | 2.08  | 2.01  |          |
| 18                | 4.46              | 3.55  | 3.24  | 3.16  | 3.05  | 2.96  | 2.87  | 2.77  | 2.68  | 2.61  | 2.55  | 2.49  | 2.43  | 2.36  | 2.29  | 2.22  | 2.15  | 2.08  | 2.01  |          |
| 19                | 4.36              | 3.52  | 3.13  | 3.04  | 2.95  | 2.86  | 2.77  | 2.68  | 2.61  | 2.55  | 2.49  | 2.43  | 2.36  | 2.29  | 2.22  | 2.15  | 2.08  | 2.01  | 1.96  |          |
| 20                | 4.35              | 3.49  | 3.19  | 3.07  | 2.97  | 2.88  | 2.79  | 2.71  | 2.64  | 2.57  | 2.50  | 2.44  | 2.38  | 2.31  | 2.24  | 2.17  | 2.10  | 2.03  | 1.97  |          |
| 21                | 4.32              | 3.47  | 3.07  | 2.95  | 2.86  | 2.76  | 2.67  | 2.59  | 2.51  | 2.45  | 2.39  | 2.33  | 2.27  | 2.21  | 2.15  | 2.08  | 2.01  | 1.93  | 1.88  |          |
| 22                | 4.30              | 3.44  | 3.05  | 2.93  | 2.84  | 2.75  | 2.66  | 2.57  | 2.49  | 2.42  | 2.36  | 2.30  | 2.24  | 2.18  | 2.12  | 2.06  | 2.00  | 1.93  | 1.87  |          |
| 23                | 4.28              | 3.42  | 3.03  | 2.90  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.19  | 2.13  | 2.07  | 2.01  | 1.94  | 1.87  | 1.81  |          |
| 24                | 4.26              | 3.40  | 3.01  | 2.90  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.19  | 2.13  | 2.07  | 2.01  | 1.94  | 1.87  | 1.81  |          |
| 25                | 4.24              | 3.39  | 2.99  | 2.90  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.19  | 2.13  | 2.07  | 2.01  | 1.94  | 1.87  | 1.81  |          |
| 26                | 4.23              | 3.37  | 2.98  | 2.90  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.19  | 2.13  | 2.07  | 2.01  | 1.94  | 1.87  | 1.81  |          |
| 27                | 4.21              | 3.36  | 2.96  | 2.90  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.19  | 2.13  | 2.07  | 2.01  | 1.94  | 1.87  | 1.81  |          |
| 28                | 4.20              | 3.34  | 2.95  | 2.90  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.19  | 2.13  | 2.07  | 2.01  | 1.94  | 1.87  | 1.81  |          |
| 29                | 4.18              | 3.33  | 2.93  | 2.90  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.19  | 2.13  | 2.07  | 2.01  | 1.94  | 1.87  | 1.81  |          |
| 30                | 4.17              | 3.32  | 2.92  | 2.90  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.19  | 2.13  | 2.07  | 2.01  | 1.94  | 1.87  | 1.81  |          |
| 40                | 4.08              | 3.23  | 2.84  | 2.81  | 2.72  | 2.63  | 2.54  | 2.46  | 2.39  | 2.32  | 2.25  | 2.18  | 2.12  | 2.06  | 2.00  | 1.94  | 1.87  | 1.81  | 1.75  |          |
| 60                | 4.00              | 3.15  | 2.76  | 2.63  | 2.53  | 2.43  | 2.34  | 2.25  | 2.17  | 2.10  | 2.04  | 1.90  | 1.82  | 1.75  | 1.69  | 1.63  | 1.59  | 1.55  | 1.51  |          |
| 120               | 3.92              | 3.07  | 2.68  | 2.45  | 2.29  | 2.17  | 2.06  | 1.95  | 1.83  | 1.71  | 1.60  | 1.49  | 1.38  | 1.27  | 1.16  | 1.05  | 0.93  | 0.82  | 0.71  |          |
| $\infty$          | 3.84              | 3.00  | 2.60  | 2.37  | 2.15  | 2.03  | 1.91  | 1.79  | 1.67  | 1.55  | 1.43  | 1.31  | 1.19  | 1.07  | 0.94  | 0.81  | 0.68  | 0.55  | 0.42  |          |

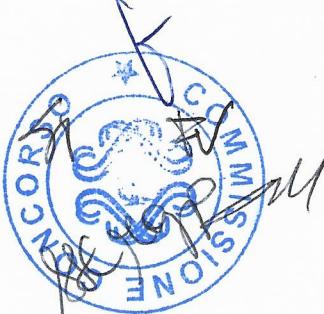


Table A10 Table of the F Distribution (continued)

 $F_{.975}$ 

| $\frac{df_{num}}{df_{den}}$ | 1      | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    | 15    | 20    | 24    | 30    | 40    | 60    | 120   | $\infty$ |
|-----------------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 1                           | 0.47   | 7.65  | 9.51  | 11.39 | 13.17 | 15.00 | 16.44 | 17.44 | 18.45 | 19.45 | 20.45 | 21.45 | 22.45 | 23.45 | 25.45 | 28.45 | 30.45 | 32.45 | 35.45 | 39.45 | 43.45 |          |
| 2                           | 3.55   | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 | 39.00 |          |
| 3                           | 4.34   | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 | 16.04 |          |
| 4                           | 5.22   | 10.65 | 9.95  | 9.36  | 8.88  | 8.42  | 8.07  | 7.73  | 7.45  | 7.20  | 6.97  | 6.75  | 6.54  | 6.34  | 6.14  | 5.95  | 5.76  | 5.57  | 5.37  | 5.17  | 4.97  | 4.77     |
| 5                           | 6.11   | 8.43  | 7.76  | 7.16  | 6.60  | 6.23  | 5.92  | 5.62  | 5.32  | 5.02  | 4.72  | 4.42  | 4.12  | 3.82  | 3.52  | 3.22  | 2.92  | 2.62  | 2.32  | 2.02  | 1.72  | 1.42     |
| 6                           | 6.97   | 7.26  | 6.60  | 6.00  | 5.44  | 4.93  | 4.42  | 3.92  | 3.42  | 3.02  | 2.72  | 2.42  | 2.12  | 1.82  | 1.52  | 1.22  | 0.92  | 0.62  | 0.32  | 0.02  | 0.00  | 0.00     |
| 7                           | 7.87   | 6.54  | 5.89  | 5.32  | 4.82  | 4.32  | 3.82  | 3.32  | 2.82  | 2.32  | 1.82  | 1.32  | 0.82  | 0.32  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 8                           | 8.76   | 5.96  | 5.42  | 4.92  | 4.42  | 3.92  | 3.42  | 2.92  | 2.42  | 1.92  | 1.42  | 0.92  | 0.42  | 0.32  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 9                           | 9.65   | 5.41  | 4.92  | 4.42  | 3.92  | 3.42  | 2.92  | 2.42  | 1.92  | 1.42  | 0.92  | 0.42  | 0.32  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 10                          | 10.54  | 4.92  | 4.33  | 3.82  | 3.32  | 2.82  | 2.32  | 1.82  | 1.32  | 0.82  | 0.32  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 11                          | 11.43  | 4.47  | 3.92  | 3.42  | 2.92  | 2.42  | 1.92  | 1.42  | 0.92  | 0.42  | 0.32  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 12                          | 12.32  | 4.02  | 3.52  | 3.02  | 2.52  | 2.02  | 1.52  | 1.02  | 0.52  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 13                          | 13.21  | 3.61  | 3.12  | 2.62  | 2.12  | 1.62  | 1.12  | 0.62  | 0.12  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 14                          | 14.10  | 3.20  | 2.72  | 2.22  | 1.72  | 1.22  | 0.72  | 0.22  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 15                          | 14.99  | 2.81  | 2.32  | 1.82  | 1.32  | 0.82  | 0.32  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 16                          | 15.88  | 2.42  | 1.92  | 1.42  | 0.92  | 0.42  | 0.32  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 17                          | 16.77  | 2.03  | 1.52  | 1.02  | 0.52  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 18                          | 17.66  | 1.64  | 1.12  | 0.62  | 0.12  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 19                          | 18.55  | 1.25  | 0.72  | 0.22  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 20                          | 19.44  | 0.86  | 0.32  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 21                          | 20.33  | 0.47  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 22                          | 21.22  | 0.12  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 23                          | 22.11  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 24                          | 23.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 25                          | 23.89  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 26                          | 24.78  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 27                          | 25.67  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 28                          | 26.56  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 29                          | 27.45  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 30                          | 28.34  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 40                          | 39.51  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 60                          | 59.50  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |
| 120                         | 119.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00     |

