
Appunti di

Analisi II

Dalle lezioni del corso di *Francesco Serra Cassano*

Matteo Seclì
A.A. 2012/2013



Figura 1: Logo CC BY-SA

Questo documento è rilasciato in tutte le sue parti sotto licenza Creative Commons [CC BY-SA](#). Per eventuali file non qui specificati che possiedono una licenza differente, fai riferimento agli stessi.

CC BY-SA significa che puoi redistribuire o modificare questo testo, a patto che usi la stessa licenza, che venga riconosciuta la paternità dell'opera e che eventuali modifiche o revisioni non ufficiali siano messe in evidenza in modo chiaro, per preservare l'identità dell'opera originale (per maggiori dettagli, consultare ad esempio [Wikipedia](#)). I metadati sulla licenza sono inoltre incorporati nel documento stesso. È bene sottolineare che l'opera è protetta dai diritti d'autore, sebbene la sua modifica sia libera.

Parte del layout e dell'organizzazione è ispirata a PhdtemplateLaTeX, per cui ringrazio il suo autore.

Proseguendo nella lettura, accetti automaticamente le condizioni di rilascio.

Contatti: secli.matteo@gmail.com

Indice

1	Calcolo in più variabili	1
1.1	Metrica (euclidea) su \mathbb{R}^2 e Topologia	1
1.2	Successioni e topologia di \mathbb{R}^2	3
1.3	Estensione della metrica e topologia a \mathbb{R}^n con $n \geq 2$	11
1.4	Funzioni continue di più variabili (a valori reali)	13
1.5	Differenziale di una funzione	16
1.5.1	Estensione al caso dimensionale $n \geq 3$	20
1.5.2	Condizioni sufficienti per la differenziabilità	22
1.5.3	Derivate (parziali) successive	26
1.6	Regola di derivazione composta (RDC)	28
1.6.1	Regola di composizione di una funzione composta	28
1.6.2	Funzioni continue e differenziabili da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m	32
1.7	Formula di Taylor	38
1.7.1	Applicazione al calcolo dei limiti	43
1.7.2	Caso $m = 2$	44
2	Massimi e minimi per funzioni di più variabili	47
2.1	Il Teorema di Fermat	47
2.2	Il Teorema di Weierstrass	55
2.3	Ricerca di massimi e minimi	59
2.3.1	Ricerca del massimo e minimo (assoluto) di una funzione continua definita su un insieme chiuso e limitato	59

INDICE

2.3.2	Ricerca dei punti di massimo e minimo nella frontiera di un insieme	60
2.3.2.1	I Metodo: parametrizzazione della frontiera	60
2.3.2.2	II Metodo: la frontiera di un insieme come vincolo	62
2.3.3	Interpretazione geometrica della condizione di punto stazionario vincolato	65
3	Teorema delle funzioni implicite ed applicazioni	69
3.1	Caso $n = 2$	69
3.2	Caso $n = 3$	74
3.2.1	Applicazione: equazione del piano tangente ad un vincolo $V \subset \mathbb{R}^3$	76
3.3	Caso generale del Teorema delle funzioni implicite	76
3.3.1	Applicazione: regola dei moltiplicatori di Lagrange nel caso generale	79
4	Introduzione alle ODEs (e sistemi di ODEs) non lineari	81
4.1	Cenni sugli spazi metrici	81
4.2	ODEs	87
4.2.1	Caso $n = 1$	88
4.3	Sistemi di ODEs del primo ordine e ODEs di ordine n	98
4.3.1	Sistemi di ODEs (del primo ordine) autonomi	101
4.3.1.1	Interpretazione cinematica	104
4.3.1.2	Integrali primi di (S)	105
5	Serie di Fourier	115
	Bibliografia	133

Capitolo 1

Calcolo in più variabili

1.1 Metrica (euclidea) su \mathbb{R}^2 e Topologia

Definizione 1.1.1. Si chiama *metrica euclidea* su \mathbb{R}^2 (o anche *distanza euclidea* su \mathbb{R}^2) la funzione

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty)$$

definita da:

$$d(P, Q) \stackrel{def}{=} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

se $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio. Mostrare che la distanza d verifica le seguenti proprietà:

$$(d1) \quad d(P, Q) = 0 \iff P = Q$$

$$(d2) \quad d(P, Q) = d(Q, P) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$$

$$(d3) \quad (\text{Disuguaglianza triangolare}) \quad d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \quad \forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$$

Più in generale, dato un (qualunque) insieme X , diamo la seguente definizione.

Definizione 1.1.2. Si chiama *distanza* (o *metrica*) su X una funzione

$$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$$

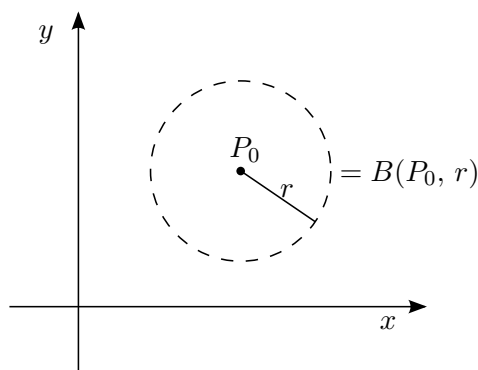
verificante le proprietà (d1), (d2) e (d3).

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

Definizione 1.1.3. Dato $P_0 \in \mathbb{R}^2$, $P_0 = (x_0, y_0)$ fissato, e dato $r > 0$ fissato, si chiama intorno (sferico) di centro P_0 e raggio $r > 0$ (in \mathbb{R}^2) l'insieme:

$$\underbrace{I(P_0, r)}_{\text{(Notazione italiana)}} = \underbrace{B(P_0, r)}_{\text{(Notazione internazionale, "Ball")}} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_0) < r\} = \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

Detto in modo spicciolo, è “il cerchio di centro P_0 e raggio r a cui tagliate la buccia” [cit. prof].



Definizione 1.1.4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

(i) Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di accumulazione di A se:

$$(A \setminus \{P_0\}) \cap B(P_0, r) \neq \emptyset \quad \forall r > 0$$

(ii) Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto isolato di A se:

$$\exists r_0 > 0 : A \cap B(P_0, r_0) = \{P_0\}$$

(iii) Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di frontiera di A se:

$$A \cap B(P_0, r) \neq \emptyset \quad e \quad (\mathbb{R}^2 \setminus A) \cap B(P_0, r) \neq \emptyset, \quad \forall r > 0$$

L'insieme dei punti di frontiera di A si chiama frontiera di A e si denota col simbolo ∂A .

(iv) Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto interno di A se:

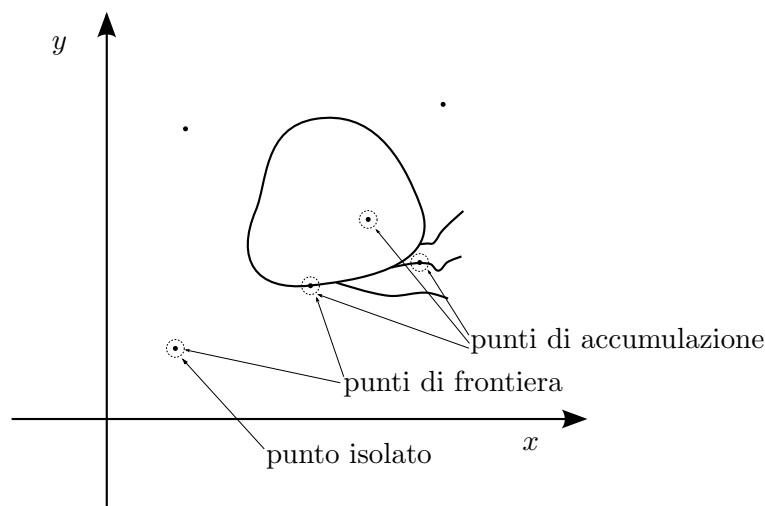
$$\exists r_0 > 0 : B(P_0, r_0) \subseteq A$$

L'insieme di (tutti) i punti interni di A si chiama parte interna di A e si denota con \mathring{A} .

(v) L'insieme A si dice insieme aperto se $A = \mathring{A}$.

(vi) L'insieme A si dice insieme chiuso se $A \supseteq \partial A$.

(vii) Si dice chiusura di A e si denota con $\overline{A} = A \cup \partial A$.



Osservazione 1.1.1. Dato $A \subset \mathbb{R}^2$, vale che:

$$A \text{ è aperto} \iff \overbrace{\mathbb{R}^2 \setminus A}^{\text{Complementare di } A} \text{ è chiuso}$$

Infatti l'uguaglianza segue osservando le seguenti due proprietà:

$$(1) \partial A = \partial(\mathbb{R}^2 \setminus A)$$

$$(2) A \text{ è aperto} \iff A \cap \partial A = \emptyset$$

1.2 Successioni e topologia di \mathbb{R}^2

Definizione 1.2.1. Si chiama successione di \mathbb{R}^2 una funzione:

$$P : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

dove

$$P(h) = P_h \quad (h = 1, 2, \dots)$$

e P_h si chiama termine h -esimo della successione P . Tipicamente una successione di \mathbb{R}^2 si denota con

$$\{P_h\}_{h \in \mathbb{N}} \quad \text{o con} \quad (P_h)_{h \in \mathbb{N}}$$

“ $h \in \mathbb{N}$ ” si omette

Osserviamo che, data $\overbrace{(P_h)_h}^{“h \in \mathbb{N}” \text{ si omette}} \subset \mathbb{R}^2$, allora $P_h = (x_h, y_h)$, con $(x_h)_h, (y_h)_h \subset \mathbb{R}$ successioni di numeri reali.

Definizione 1.2.2 (limite di una successione in \mathbb{R}^2). Siano $(P_h)_h \subset \mathbb{R}^2$ e $P_0 \in \mathbb{R}^2$. Si dice che la successione $(P_h)_h$ ammette limite P_0 (in \mathbb{R}^2), e si scrive che $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0$ (in \mathbb{R}^2) se

$$\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} d(P_h, P_0) = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : d(P_h, P_0) < \varepsilon, \quad \forall h \stackrel{(\geq)}{>} \bar{h}$$

Ma...operativamente? Ricordiamo innanzitutto che, presi $P_h(x_h, y_h)$ e $P_0(x_0, y_0)$, allora $d(P_h, P_0) = \sqrt{(x_h - x_0)^2 + (y_h - y_0)^2}$. Ci avvaliamo quindi del risultato del seguente teorema.

Teorema 1.2.1. Siano $(P_h)_h \subset \mathbb{R}^2$ e $P_0 \in \mathbb{R}^2$.

(i) Se $P_h = (x_h, y_h)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$, allora vale che:

$$\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0 \text{ (in } \mathbb{R}^2) \iff \begin{cases} \exists \lim_{h \rightarrow +\infty} x_h = x_0 \\ \exists \lim_{h \rightarrow +\infty} y_h = y_0 \end{cases} \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

(ii) (Criterio di Cauchy)

$$\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0 \text{ (in } \mathbb{R}^2)$$

\Updownarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad d(P_h, P_k) < \varepsilon \quad \forall h, k > \bar{h}$$

DIMOSTRAZIONE:

(i) Ricordiamo che, dati $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$\frac{|a| + |b|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| \quad (1.1)$$

Scegliendo come $a = x_h - x_0$ e $b = y_h - y_0$ otteniamo che:

$$\frac{|x_h - x_0| + |y_h - y_0|}{\sqrt{2}} \leq d(P_h, P_0) \leq |x_h - x_0| + |y_h - y_0| \quad (1.2)$$

Usando il criterio del confronto per successioni di numeri reali su (1.2), segue la tesi (in tutti e due i versi).

(ii) Il verso (\Rightarrow) è banale, perchè se $d(P_h, P_k) < \varepsilon$, allora anche $|x_h - x_k| < \varepsilon$ e $|y_h - y_k| < \varepsilon$, quindi sono successioni di Cauchy.

(\Leftarrow) Scegliendo $a = x_h - x_k$ e $b = y_h - y_k$, dalla (1.1) segue che:

$$\frac{|x_h - x_k| + |y_h - y_k|}{\sqrt{2}} \leq d(P_h, P_k) \leq |x_h - x_k| + |y_h - y_k| \quad \forall h, k \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

Poichè $(x_h)_h, (y_h)_h \subset \mathbb{R}$, applicando la (1.3) e il Criterio di Cauchy per successioni di numeri reali, segue la tesi.

■

Osservazione 1.2.1. *Dal punto (i) del teorema precedente e dall'unicità del limite per successioni di numeri reali, segue l'unicità del limite per successioni di \mathbb{R}^2 .*

Proposizione 1.2.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$.*

- (i) $P_0 \in \mathbb{R}^2$ è un punto di accumulazione per A se e solo se $\exists (P_h)_h \subset A \setminus \{P_0\}$ tale che $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0$.
- (ii) A è chiuso \iff Per ogni successione $(P_h)_h \subset A$ con $\lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow P_0 \in A$.

DIMOSTRAZIONE: (Vedi Esercizio 4 del Foglio 1).

■

Definizione 1.2.3. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$ fissato, con $P_0 = (x_0, y_0)$ punto di accumulazione di A . Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che*

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

se, per definizione, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(P_0, \varepsilon) > 0$ tale che

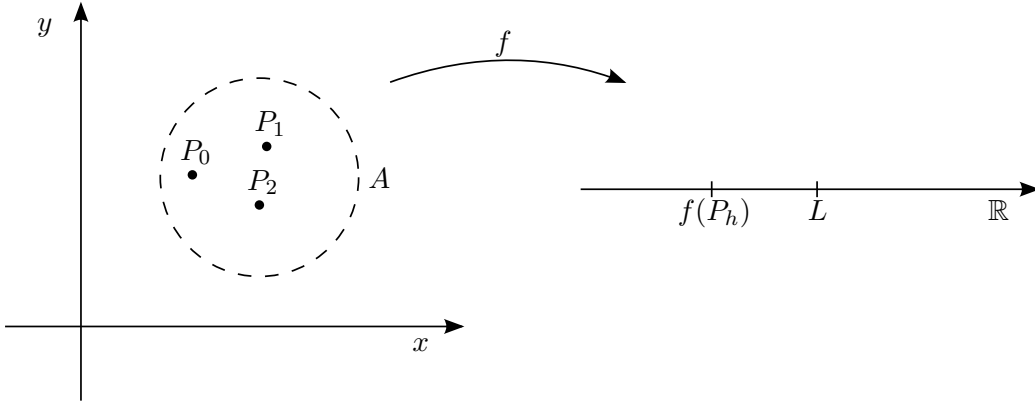
$$|f(P) - L| < \varepsilon \quad \forall P \in (A \setminus \{P_0\}) \cap B(P_0, \delta)$$

Teorema 1.2.2 (Caratterizzazione del limite di una funzione tramite il limite di successioni). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$ fissato, con $P_0 = (x_0, y_0)$ punto di accumulazione di A . Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora*

$$(1) \quad \exists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$(2) \quad \forall (P_h)_h \subset A \setminus \{P_0\} \text{ con } \lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0 \text{ (in } \mathbb{R}^2) \implies \exists \lim_{h \rightarrow +\infty} f(P_h) = L \text{ (in } \mathbb{R})$$



DIMOSTRAZIONE: Il verso (\Rightarrow) è ovvio, per la definizione di limite di una successione reale.

Dimostriamo il verso (\Leftarrow). Procediamo per *assurdo*, ossia supponiamo che

$$\nexists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$$

In altri termini,

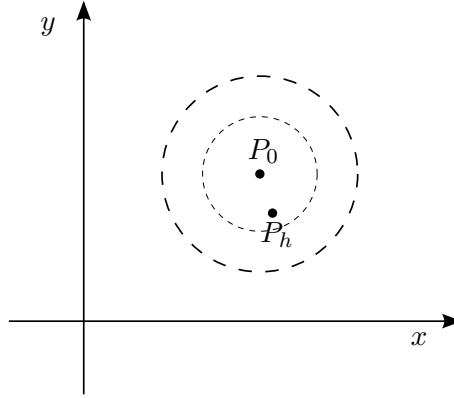
$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists P_\delta \in (A \setminus \{P_0\}) \cap B(P_0, \delta) \quad \text{tale che} \quad |f(P_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$$

Potendo scegliere δ in modo arbitrario, scegliamo $\delta = \frac{1}{h}$, dove $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. In corrispondenza di tale δ , esiste un $P_{\frac{1}{h}} \equiv P_h \in (A \setminus \{P_0\}) \cap B(P_0, \frac{1}{h})$ tale che

$$(3) \quad |f(P_h) - L| \geq \varepsilon_0 > 0$$

Pertanto, abbiamo costruito una successione $(P_h)_h$ tale che $0 \leq d(P_h, P_0) < \frac{1}{h}$ e dunque

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} d(P_h, P_0) = 0 \quad \stackrel{\text{def.}}{\iff} \quad (4) \quad \exists \lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0 \text{ (in } \mathbb{R}^2 \text{)}$$



Per ipotesi, questo significa che

$$\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} f(P_h) = L$$

ossia, utilizzando la definizione,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f(P_h) - L| < \varepsilon, \quad \forall h > \bar{h}$$

In particolare, abbiamo che

$$|f(P_h) - L| < \varepsilon_0$$

in contraddizione con (3).

■

Come corollario di questo teorema, otteniamo il seguente risultato.

Corollario 1.2.1 (Unicità del limite). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$ fissato, con $P_0 = (x_0, y_0)$ punto di accumulazione di A . Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e siano $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\left. \begin{array}{c} \exists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L_1 \\ e \\ \exists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L_2 \end{array} \right\} \implies L_1 = L_2$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

DIMOSTRAZIONE: La dimostrazione segue dal teorema precedente e dall'unicità del limite per successioni di numeri reali.

■

Teorema 1.2.3 (Operazioni per limiti di funzioni di due variabili). *Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione per A . Supponiamo che $\exists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L \in \mathbb{R}$, e che $\exists \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = M \in \mathbb{R}$. Allora:*

$$(i) \quad \exists \lim_{P \rightarrow P_0} (f + g)(P) = L + M$$

$$(ii) \quad \exists \lim_{P \rightarrow P_0} (f \cdot g)(P) = L \cdot M$$

$$(iii) \quad \text{Se } g(P) \neq 0 \quad \forall P \in A, \text{ e } M \neq 0, \quad \text{allora} \quad \exists \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{f}{g} \right)(P) = \frac{L}{M}$$

$$(iv) \quad \text{Supponiamo che } f(P) \leq g(P) \quad \forall P \in A \setminus \{P_0\}. \text{ Allora } L \leq M.$$

$$(v) \quad \text{Sia } F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, allora } \exists \lim_{P \rightarrow P_0} (F \circ f)(P) = F(L)$$

DIMOSTRAZIONE:

- (i) Usando il teorema sulla caratterizzazione del limite tramite successioni, per ipotesi abbiamo che $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} f(P_h) = L$ e $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} g(P_h) = M$. Definendo $(a_h)_h \doteq (f(P_h))_h$ e $(b_h)_h \doteq (g(P_h))_h$, sappiamo che $(a_h)_h$ e $(b_h)_h$ hanno limite finito rispettivamente L e M se e solo se (rispettivamente) $(a_h - L)_h$ e $(b_h - M)_h$ sono infinitesime, che a loro volta sono infinitesime se e solo se $(|a_h - L|)_h$ e $(|b_h - M|)_h$ sono infinitesime. Poiché una somma di successioni infinitesime è ancora infinitesima, abbiamo che $(|a_h - L| + |b_h - M|)_h$ è infinitesima. Aggiungendo a questo fatto la disuguaglianza

$$|a_h + b_h - (L + M)| \leq |a_h - L| + |b_h - M|$$

otteniamo che $(a_h + b_h - (L + M))_h$ è infinitesima, ossia $\lim_{P \rightarrow P_0} (f + g)(P) = L + M$.

- (ii) Si procede come nella dimostrazione (i), utilizzando il fatto che il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è ancora infinitesima e le disuguaglianze

$$|a_h b_h - LM| \leq |a_h b_h - a_h M| + |a_h M - LM| \leq |a_h| \cdot |b_h - M| + |M| \cdot |a_h - L|$$

- (iii) Si procede come nella dimostrazione (i), utilizzando il fatto che il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è ancora infinitesima, l'uguaglianza

$$\left| \frac{1}{b_h} - \frac{1}{M} \right| = \frac{1}{|M b_h|} \cdot |b_h - M|$$

e il fatto che la successione $\left(\frac{1}{|M b_h|} \right)_h$ è limitata.

- (iv) Poiché $f(P) \leq g(P) \quad \forall P \in A \setminus \{P_0\}$, possiamo supporre che $\exists \lambda_{f(P)} = \lambda(f(P)) > 0$ tale che $f(P) + \lambda_{f(P)} = g(P) \quad \forall P \in A \setminus \{P_0\}$.

Passando a limite e utilizzando (i), otteniamo che

$$\lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) + \lambda_{f(P)}) = \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) \iff \lim_{P \rightarrow P_0} (f(P)) + \lim_{P \rightarrow P_0} (\lambda_{f(P)}) = \lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$$

ossia $L \leq M$.

- (v) Proviamo che, per ogni successione $(P_h)_h \subset A \setminus \{P_0\}$ con $\lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0$, vale che

$$\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} F(f(P_h)) = F(L) \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

Sia $(P_h)_h \subset A \setminus \{P_0\}$ tale che $\lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = P_0$. Per ipotesi, se denotiamo con $a_h \doteq f(P_h) \quad (h \in \mathbb{N})$, allora per (1) \implies (2) del teorema sulla caratterizzazione del limite, $\lim_{h \rightarrow +\infty} a_h = L \quad (\text{in } \mathbb{R})$.

Consideriamo la successione $(F(a_h))_h \subset \mathbb{R}$. Poiché F è continua nel punto L , per definizione di funzione continua su \mathbb{R} segue che $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} F(a_h) = F(L)$.

La tesi è dimostrata. ■

Corollario 1.2.2 (Teorema dei due carabinieri). *Siano $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione per A . Supponiamo che*

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

$$(i) \quad g(P) \leq f(P) \leq h(P) \quad \forall P \in A \setminus \{P_0\}$$

$$(ii) \quad \exists \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} h(P) = L \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\exists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$$

Esempio (i). Verificare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$$

DIMOSTRAZIONE: Definiamo $h(x, y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$h(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

Definiamo poi $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$F(t) \doteq \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

È ovvio che $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. D'altra parte, F è continua in \mathbb{R} (per definizione).

Applicando il punto (v) del precedente teorema, otteniamo che

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = F(0) = 1$$

■

Esempio (ii). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che tale limite non esiste.

Il limite, se esiste, deve essere uguale da tutte le direzioni. Non solo dalle “direzioni” formate da rette, ma anche da quelle (ad esempio) formate da parabole. Scegliamo quindi la “direzione” $y = mx$ e restringiamo f a tale retta, cioè consideriamo $f(x, mx) = \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$, $x \neq 0$. Sulla retta $y = x$ ($m = 1$)

1.3 Estensione della metrica e topologia a \mathbb{R}^n con $n \geq 2$

scegliamo la successione $P_h = (\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$, $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, mentre sulla retta $y = 2x$ ($m = 2$) scegliamo la successione $Q_h = (\frac{1}{h}, \frac{2}{h})$, $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. È immediato verificare che

$$\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} P_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} Q_h = (0, 0)$$

D'altra parte, $f(P_h) = \frac{1}{2} \quad \forall h \in \mathbb{N}$, e $f(Q_h) = \frac{2}{5} \quad \forall h \in \mathbb{N}$, da cui

$$\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} f(P_h) = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5} = \lim_{h \rightarrow +\infty} f(Q_h)$$

\Downarrow

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

■

1.3 Estensione della metrica e topologia a \mathbb{R}^n con $n \geq 2$

Definizione 1.3.1. Si definisce distanza (euclidea) su \mathbb{R}^n la funzione

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

definita da:

$$d(P, Q) \stackrel{def}{=} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

se $P = (x_1, x_2, \dots, x_n), Q = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio. Mostrare che la distanza d verifica le seguenti proprietà:

$$(d1) \quad d(P, Q) = 0 \iff P = Q$$

$$(d2) \quad d(P, Q) = d(Q, P) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$$

$$(d3) \quad (\text{Disuguaglianza triangolare}) \quad d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \quad \forall P, Q, R \in \mathbb{R}^n$$

Definizione 1.3.2. Dato $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, si chiama intorno (sferico) di centro P_0 e raggio $r > 0$ l'insieme definito da:

$$B(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, P_0) < r\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

In generale, possiamo dire che le nozioni topologiche introdotte per $n = 2$ e la definizione di limite per funzioni a due variabili si estendono al caso $n \geq 3$.

Riflettiamo ora un momento su un'implicita identificazione che si sta facendo, ossia quella tra punti e vettori. Ad esempio, $P = (x, y)$ è un punto di \mathbb{R}^2 , ma si scrive spesso anche $\underline{P} = \vec{P} = (x, y)$, intendendolo come vettore.

Alle luce di questo, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.3.3 (di norma in \mathbb{R}^n). *Si chiama norma su \mathbb{R}^n una funzione*

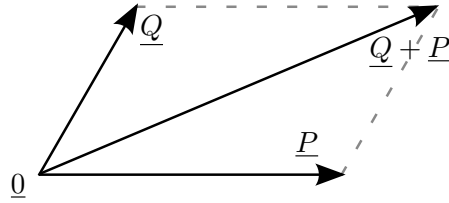
$$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

verificante le seguenti proprietà:

$$(N1) \quad N(P) = 0 \iff P = \underline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

$$(N2) \quad N(\lambda P) = |\lambda|N(P) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathbb{R}^n$$

$$(N3) \quad (\text{Disuguaglianza triangolare}) \quad N(P + Q) \leq N(P) + N(Q) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$$



Definizione 1.3.4 (di norma euclidea). *Si chiama norma (euclidea) in \mathbb{R}^n la funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che*

$$\|P\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{se } P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Osservazione 1.3.1.

$$(i) \quad d(P, Q) = \|P - Q\| \quad \forall P, Q, R \in \mathbb{R}^n.$$

In particolare, da quest'osservazione discende che:

$$d(P + R, Q + R) = d(P, Q)$$

$$(ii) \quad \text{Notiamo che } \|P\| = \sqrt{\underline{P} \bullet \underline{P}} \text{ dove, per definizione, dati due vettori } P, Q \in \mathbb{R}^n,$$

$$P \bullet Q = P^T Q = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

1.4 Funzioni continue di più variabili (a valori reali)

se $P = (x_1, \dots, x_n)$ e $Q = (y_1, \dots, y_n)$. Poiché questa definizione è stata data inizialmente dai fisici, ricordiamo che:

$$P \bullet Q = \|P\| \cdot \|Q\| \cos(\vartheta)$$

dove ϑ è l'angolo compreso fra i due vettori.

(iii) (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$$|P \bullet Q| \leq \|P\| \cdot \|Q\| \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$$

(Ex. 11 Foglio 1). Provare che da (C-S) segue la proprietà (N3), e dunque la (d3).

Il risultato (ottenuto peraltro da Riemann) è notevolissimo, poiché ci consente di affermare che basta un prodotto scalare per indurre una distanza!

1.4 Funzioni continue di più variabili (a valori reali)

Definizione 1.4.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in A$.

(i) Si dice che f è continua nel punto $P_0 \in A$ se

(1) P_0 è un punto isolato di A , cioè, per definizione, $\exists r_0 > 0$ tale che
 $A \cap B(P_0, r_0) = \{P_0\}$

oppure

(2) P_0 è un punto di accumulazione per A e $\exists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$

(ii) f si dice continua su A se f è continua in ogni punto $P_0 \in A$

Dalle proprietà sui limiti di funzioni seguono le seguenti proprietà per funzioni continue.

Proposizione 1.4.1. Siano $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f e g siano continue in un punto assegnato $P_0 \in A$. Allora

(i) La funzione $f + g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto P_0 .

(ii) La funzione $f \cdot g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto P_0 .

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

- (iii) Se $g(P) \neq 0 \quad \forall P \in A$, la funzione $\frac{f}{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto P_0 .
- (iv) Se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (in realtà basterebbe richiedere la continuità nel trasformato secondo f di P_0 , ossia $f(P_0)$), la funzione $\tilde{f} = F \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto P_0 .

Osservazione 1.4.1 (importante). Consideriamo il seguente esempio:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che $\nexists \lim_{P \rightarrow (0,0)} f(P)$, pertanto f non è continua nel punto $P_0 = (0, 0)$.

Ma se noi fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e consideriamo $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x, y)$, tale funzione è continua (come funzione di una variabile reale). Analogamente accade fissando l'altra variabile.

Quindi non possiamo vedere la continuità “congelando” ad una ad una le variabili!

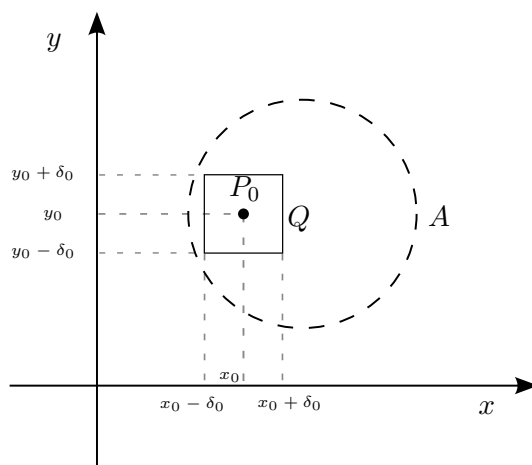
Introdotta la continuità, a questo punto sorge automaticamente una domanda...

Problema: Nozione di “derivata/e” per una funzione di due variabili.

Il problema di trovare una qualche nozione di derivata si traduce in una prima istanza nella definizione delle cosiddette *derivate parziali*.

Definizione 1.4.2 (di derivata parziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto⁽¹⁾, e siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ fissato. Poiché A è aperto, $\exists \delta_0 > 0$ tale che:

$$Q \doteq [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0] \subset A$$



⁽¹⁾Se prendo un punto isolato, non faccio variare un bel niente!

1.4 Funzioni continue di più variabili (a valori reali)

Fissato x_0 , possiamo considerare il rapporto incrementale

$$([-\delta_0, \delta_0] \setminus \{0\}) \ni h \mapsto \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e analogamente, fissato y_0 ,

$$([-\delta_0, \delta_0] \setminus \{0\}) \ni h \mapsto \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Queste due funzioni sono ben definite. Allora

(i) f si dice derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione x nel punto P_0 se

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \in \mathbb{R} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = D_1 f(P_0)$$

(ii) f si dice derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione y nel punto P_0 se

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \in \mathbb{R} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = D_2 f(P_0)$$

(iii) Se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ e $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$, si dice che esiste il vettore gradiente di f nel punto P_0 e si denota questo vettore con

$$\nabla f(P_0) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Osservazione 1.4.2. Se $\exists \nabla f(P)$ in ogni punto di A è definita una funzione vettoriale

$$\nabla f : A \ni P \mapsto \nabla f(P) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right) \in \mathbb{R}^2$$

che descrive un cosiddetto campo vettore.

Ad esempio, $-\nabla f = \vec{G}$, dove \vec{G} in fisica è il campo di gravità, è un campo vettore.

Problema: La definizione di vettore gradiente di una funzione in un punto rappresenta una buona nozione di “derivata”?

Esempio.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si vede (da fare per esercizio) che $\exists \nabla f(0, 0) = (0, 0)$, ma f non è continua in $(0, 0)$! Noi, invece, vorremmo che la funzione fosse continua per poter fare la “derivata”, come nel caso di una variabile.

Prendiamo ora in considerazione la nozione di punto tangente al grafico, e introduciamo la definizione di funzione differenziabile in un punto e di differenziale di una funzione.

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

1.5 Differenziale di una funzione

Ricordiamo cosa accade nel caso $n = 1$.

Esercizio. Siano $A = (a, b)$, $x_0 \in (a, b)$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

f è derivabile nel punto x_0 e $f'(x_0) = m$

\Updownarrow

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

dove (lo ricordiamo), $m(x - x_0) + f(x_0)$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f data da $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $|x - x_0| = d(x, x_0)$.

Se definiamo l'applicazione lineare $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$L(v) = mv, \quad v \in \mathbb{R}$$

otteniamo che

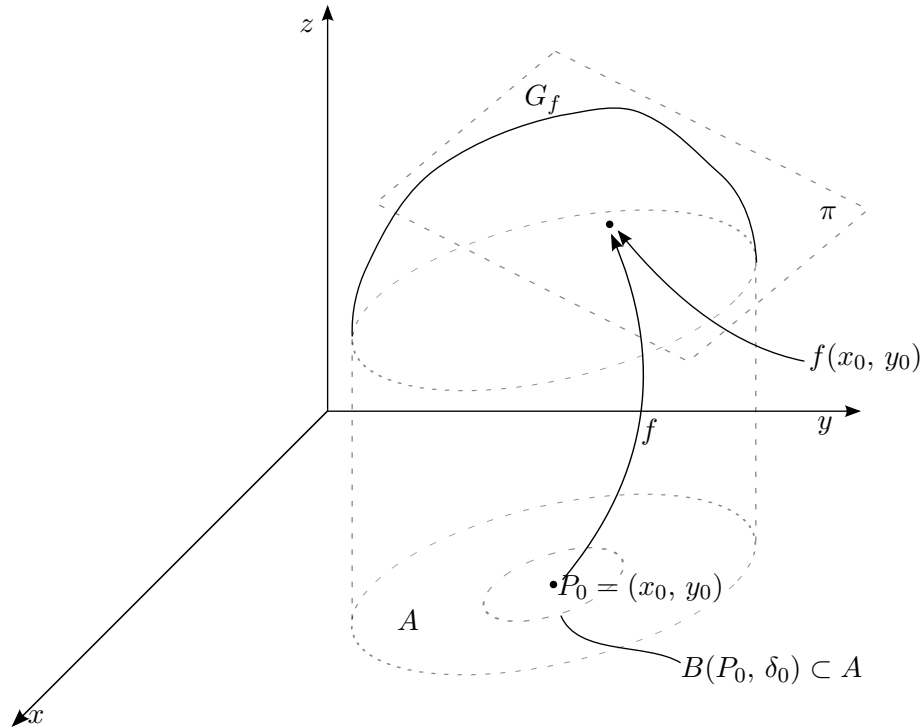
f è derivabile nel punto x_0 e vale che $f'(x_0) = m$

\Updownarrow

$$\exists L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare tale che } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [L(x - x_0) + f(x_0)]}{d(x - x_0)} = 0$$

Vediamo ora cosa succede per $n = 2$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0) \in A$.



Problema: Nozione di piano tangente alla superficie G_f (che è una sorta di “cupola 3D” che rappresenta il grafico di f) nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Supponiamo che π sia un piano di \mathbb{R}^3 non “verticale”, cioè non parallelo ai piani xz e zy (dove $z = f(x, y)$). Scriviamo innanzitutto l’equazione di π . La generica retta passante per (x_0, y_0) nel piano xy è

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

con $m_1 \in \mathbb{R}$. Ci serve ora un’altra equazione per il piano zy , e per la precisione l’equazione della retta passante per $(f(x_0, y_0), y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = m_2(y - y_0)$$

con $m_2 \in \mathbb{R}$. Sommando membro a membro le due equazioni, otteniamo che

$$\pi : z = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Il nostro obiettivo è determinare a_1, a_2 tali che π sia tangente a G_f .

Definiamo l’applicazione $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $L(v) \doteq a_1 v_1 + a_2 v_2$. È immediato osservare che L è un’applicazione lineare, cioè, per definizione

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

$$(\text{Lin1}) \quad L(v + w) = L(v) + L(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2$$

$$(\text{Lin2}) \quad L(\lambda v) = \lambda L(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

Esercizio. *Mostrare che $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare $\iff \exists a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $L(v) = a \bullet v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_i v_i$.*

Quindi, proseguendo nel nostro ragionamento, possiamo scrivere che

$$\pi : z = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + f(x_0, y_0) = L(P - P_0) + f(x_0, y_0)$$

dove L è una (qualunque) applicazione lineare.

Inoltre, A è aperto, quindi $\exists \delta_0 > 0$ tale che $B(P_0, \delta_0) \subseteq A$. Questo ci consente di dire che è ben definito il seguente “rapporto incrementale globale”, definito da

$$B(P_0, \delta_0) \setminus \{P_0\} \ni P \mapsto \frac{f(P) - L(P - P_0) - f(P_0)}{d(P, P_0)}$$

dove il numeratore è del tipo “Funzione” – “Piano Tangente”. A questo punto, è naturale dare la seguente definizione.

Definizione 1.5.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $P_0 \in A$ fissato, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è differenziabile nel punto P_0 se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$\begin{aligned} (\text{D}) \quad & \exists \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - L(P - P_0) - f(P_0)}{d(P, P_0)} = \\ & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - a_1(x - x_0) - a_2(y - y_0) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \end{aligned}$$

L'applicazione lineare L , se esiste, si chiama differenziale di f nel punto P_0 e si denota con

$$df(P_0) \equiv L$$

Teorema 1.5.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in A$. Supponiamo che f sia differenziabile nel punto P_0 . Allora*

$$(i) \quad \exists \nabla f(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Inoltre,

$$(\star) \quad df(P_0)(v) = \nabla f(P_0) \bullet v = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)v_2, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

Da (\star) segue che $df(P_0)$, se esiste, è univocamente determinata.

(ii) f è continua in P_0 .

DIMOSTRAZIONE:

(i) Sia $e_1 = (1, 0)$ il primo vettore della base canonica di \mathbb{R}^2 . Scelgo dunque $P = P_0 + he_1$ con $|h| < \delta_0$, cioè proseguo partendo da P_0 lungo l'asse x beccando P . Dalla (D), segue che

$$\begin{aligned} (1) \quad & \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + he_1) - f(P_0) - L(he_1)}{|h|} = 0 \\ & \iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + he_1) - f(P_0) - hL(e_1)}{h} = 0 \\ & \iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + he_1) - f(P_0)}{h} = L(e_1) \in \mathbb{R} \\ (2) \quad & \stackrel{def}{\iff} \exists \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = L(e_1) \end{aligned}$$

Analogamente, restringendosi ai punti del tipo $P = P_0 + he_2$, con $e_2 = (0, 1)$, si prova che:

$$(3) \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = L(e_2)$$

Da (2) + (3) segue che $\exists \nabla f(P_0)$.

D'altra parte, poiché (e_1, e_2) è una base, quindi possiamo scrivere che $v = e_1v_1 + e_2v_2$ per appropriati $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Usando la linearità di L , otteniamo che $L(v) = L(e_1)v_1 + L(e_2)v_2$, da cui segue (\star) .

(ii) Dobbiamo provare che

$$\begin{aligned} (1) \quad & \exists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \\ & \quad \quad \quad \updownarrow \\ (2) \quad & \exists \lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) - f(P_0)) = 0 \end{aligned}$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

Se $P \neq P_0$, allora

$$f(P) - f(P_0) = \frac{f(P) - f(P_0) - df(P_0)(P - P_0)}{d(P, P_0)} d(P, P_0) + df(P_0)(P - P_0)$$

Per la (D), sappiamo che $\frac{f(P) - f(P_0) - df(P_0)(P - P_0)}{d(P, P_0)} \xrightarrow{P \rightarrow P_0} 0$. D'altra parte, per definizione, $d(P, P_0) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} 0$. Resta da provare che $df(P_0)(P - P_0) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} 0$.

Esercizio (Esercizio 5 del Foglio 2). Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineare, allora L è continua su \mathbb{R}^n .

Quindi, usando l'esercizio, $df(P_0)(P - P_0) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} df(P_0)(0) = 0$.

■

Definizione 1.5.2 (di piano tangente al grafico). Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con A insieme aperto di \mathbb{R}^2 e $P_0 \in A$, supponiamo che f sia differenziabile nel punto P_0 . Si chiama piano tangente a G_f ⁽²⁾ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ il piano π di \mathbb{R}^3 di equazione

$$\pi : df(P_0)(P - P_0) + f(P_0), \quad \forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1.5.1 Estensione al caso dimensionale $n \geq 3$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $P^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$ fissato. Sia (e_1, \dots, e_n) la base canonica di \mathbb{R}^n .

Essendo A aperto, $\exists \delta_0 > 0$ tale che $B(P^0, \delta_0) \subseteq A$. È ben definito il rapporto incrementale rispetto alla direzione i -esima

$$B(P_0, \delta_0) \setminus \{P^0\} \ni h \mapsto \frac{f(P^0 + he_i) - f(P^0)}{h}$$

Definizione 1.5.3. Siano A , f , P^0 e (e_1, \dots, e_n) come sopra.

(i) f si dice derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione x_i nel punto P^0 se

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(P^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P^0 + he_i) - f(P^0)}{h} \in \mathbb{R}$$

⁽²⁾ G_f indica il grafico di f .

- (ii) Se $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(P^0) \forall i = 1, \dots, n$ si dice che esiste il vettore gradiente di f in P^0 e si denota con

$$\nabla f(P^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P^0) \right)$$

- (iii) f si dice differenziabile nel punto P^0 se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ per cui vale (D).

L'applicazione L si chiama differenziale di F in P^0 e si denota con $df(P^0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Si prova ancora che, se f è differenziabile in P^0 , allora:

(i) $\exists \nabla f(P^0)$

(ii) $df(P^0)(v) = \nabla f(P^0) \bullet v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P^0) v_i, \quad v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

Definizione 1.5.4. Si dice direzione o versore di \mathbb{R}^n un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $P^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$, v una direzione di \mathbb{R}^n .

Essendo A aperto, $\exists \delta_0 > 0$ tale che $B(P_0, \delta_0) \subseteq A$. È ben definito il rapporto incrementale rispetto alla direzione v

$$B(P_0, \delta_0) \setminus \{P_0\} \ni h \mapsto \frac{f(P_0 + hv) - f(P_0)}{h}$$

Definizione 1.5.5 (derivata direzionale). Si dice che f è derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione v nel punto P_0 se

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + hv) - f(P_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Proposizione 1.5.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in A$ fissato. Supponiamo che f sia differenziabile in P_0 . Allora, per ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \nabla f(P_0) \bullet v = df(P_0)(v)$$

DIMOSTRAZIONE: Scegliamo $P = P_0 + hv$. Dalla (D) segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + hv) - \overset{hL(v)}{\overset{||}{L(hv)}} - f(P_0)}{|h|} = 0 \iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + hv) - f(P_0)}{h} = L(v) \iff \overset{def}{\iff}$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

$$\stackrel{def}{\iff} df(P_0)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$$

Come nel caso bidimensionale, leggendo v sulla base canonica e usando la linearità di L si verifica che

$$df(P_0)(v) = \nabla f(P_0) \bullet v$$

■

Osservazione 1.5.1 ($n = 1$). Siano $A \subset \mathbb{R}$ aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

f è differenziabile nel punto $x_0 \iff f$ è derivabile nel punto x_0

In altri termini, $df(x_0)(v) = f'(x_0)v$.

1.5.2 Condizioni sufficienti per la differenziabilità

Abbiamo già visto che, dati $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in A$ fissato, se f è differenziabile nel punto P_0 allora f è continua nel punto P_0 .

Ma, viceversa, la continuità da sola non basta per garantire la differenziabilità!

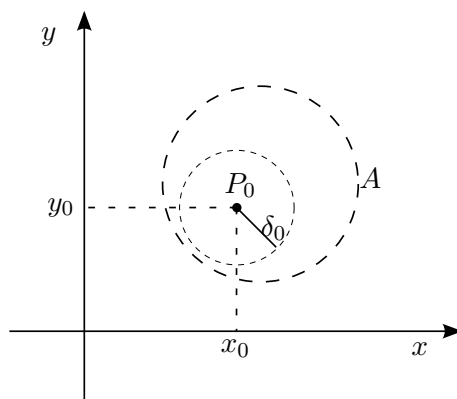
Un caso banale (per $n = 1$ e $A = \mathbb{R}$) è

$$f(x) = |x|$$

f è continua in $x_0 = 0$, ma $\nexists f'(0)$.

Ottenere una caratterizzazione della differenziabilità, in effetti, è difficile... infatti non c'è! Nessuno finora ci è riuscito. Diamo comunque il seguente teorema.

Teorema 1.5.2 (della differenziabilità o del differenziale totale). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $P_0 \in A$ fissato, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists \delta_0 > 0$ tale che



$B(P_0, \delta_0) \subseteq A$ e valgono:

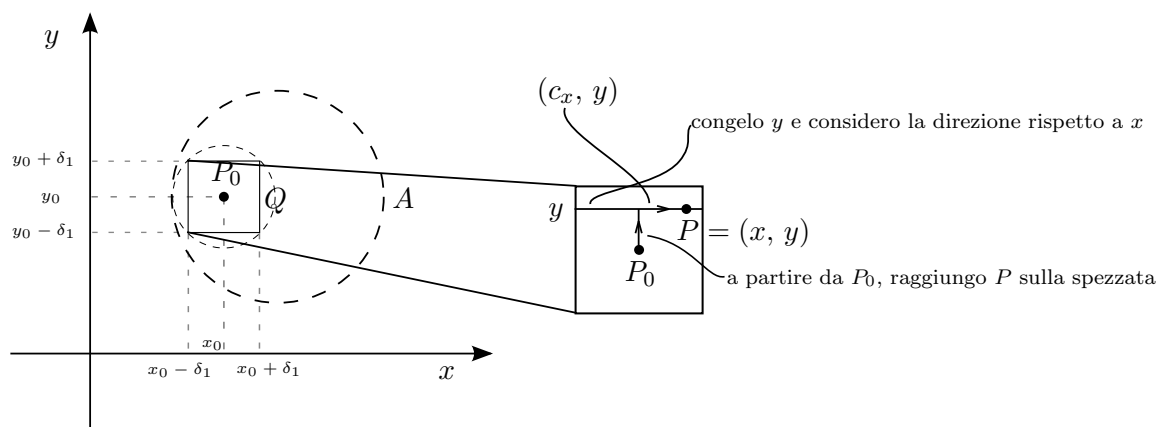
$$(i) \quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_i} : B(P_0, \delta_0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$(ii) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} : B(P_0, \delta_0) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ è continua nel punto } P_0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Allora f è differenziabile nel punto P_0 .

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo il teorema nel caso $n = 2$, tenendo presente che la dimostrazione si può estendere in modo analogo anche per $n \geq 3$.

Prendiamo, invece della pallina, un piccolo quadrato inscritto nella circonferenza di raggio δ_0 .



In altri termini, $\exists \delta_0 > \delta_1 > 0$ tale che il quadrato $Q = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1] \subseteq B(P_0, \delta_0)$.

Sia ora $P = (x, y) \in Q$, con $P \neq P_0$. Fissiamo $y \in [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1]$ e consideriamo la funzione (di una variabile reale)

$$g : [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \overbrace{f(x, y)}^{f \text{ "congelato"}}$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

Da (i) segue che g è derivabile su $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$. Possiamo quindi applicare il Teorema del valor medio di Lagrange⁽³⁾ a g su (x_0, x) , ottenendo che

$$g(x) - g(x_0) = g'(c_x)(x - x_0)$$

per un opportuno c_x compreso tra x_0 e x .

In termini di f , possiamo rileggere l'uguaglianza come

$$(1) \quad f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}((c_x, y))(x - x_0) \quad \forall P \in Q$$

Analogamente, consideriamo la funzione (di una variabile reale):

$$h : [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = f(x_0, y)$$

Di nuovo, otteniamo da (i) che la funzione h è derivabile in $[y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1]$ e possiamo applicare il Teorema del valor medio di Lagrange ottenendo che

$$h(y) - h(y_0) = h'(c_y)(y - y_0)$$

per un opportuno c_y compreso tra y_0 e y .

In termini di f , possiamo rileggere l'uguaglianza come

$$(2) \quad f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}((x_0, c_y))(y - y_0) \quad \forall y \in [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1]$$

Proviamo ora che da (1)+(2) segue che f è differenziabile in P_0 (utilizzando la (ii)), cioè, per definizione, dobbiamo provare che

$$\begin{aligned} (D) \quad & \exists \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - L(P - P_0) - f(P_0)}{d(P, P_0)} = \\ & \exists \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - df(P_0)(P - P_0) - f(P_0)}{d(P, P_0)} = \\ & \exists \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - \nabla f(P_0) \bullet (P - P_0) - f(P_0)}{d(P, P_0)} = \end{aligned}$$

⁽³⁾ [Gre] Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso limitato $[a, b]$ di ampiezza non nulla. Se f ha derivata finita in (a, b) , allora

$$\exists_{\xi \in (a, b)} f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) - f(x_0,y_0) \right|}{d(P, P_0)} = 0$$

Osserviamo che da (1) e (2) segue che

$$\begin{aligned} & \frac{\left| (f(x,y) - f(x_0,y)) + (f(x_0,y) - f(x_0,y_0)) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) \right|}{d(P, P_0)} = \\ & \frac{\left| \overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \right)}^{\div \varphi_1(x,y)} (x-x_0) + \overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, c_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right)}^{\div \varphi_2(x,y)} (y-y_0) \right|}{d(P, P_0)} \stackrel{\forall P \in Q \setminus \{P_0\}}{\leq} \\ & \stackrel{(4)}{=} |\varphi_1(x,y)| \overbrace{\left(\frac{|x-x_0|}{d(P, P_0)} \right)} + |\varphi_2(x,y)| \left(\frac{|y-y_0|}{d(P, P_0)} \right) \leq |\varphi_1(x,y)| + |\varphi_2(x,y)| \end{aligned}$$

Osserviamo poi che φ_1 e φ_2 vanno a 0 usando la (ii).

Siamo quindi arrivati alla conclusione che

$$(3) \quad 0 \leq \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) \right|}{d(P, P_0)} \leq$$

$$|\varphi_1(x,y)| + |\varphi_2(x,y)| \xrightarrow[P \rightarrow 0]{(ii)} 0 \quad \forall P \in Q \setminus \{P_0\}$$

Dalla (3) e dalla (ii), applicando il Teorema dei Carabinieri, segue (D). ■

Osservazione 1.5.2. *Il Teorema del differenziale totale è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la differenziabilità. Per esempio, si provi che, data*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\exists f'(x) \text{ per } x \neq 0, \quad \exists f'(0) = 0, \quad \text{ma } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x).$$

⁽⁴⁾ ≤ 1 per il Teorema di Pitagora (i cateti sono sempre minori dell'ipotenusa!)

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

Definizione 1.5.6. Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

- (i) si denota con $C^0(A)$ l'insieme delle funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue in ogni punto di A ;
- (ii) se A è aperto, si denota con $C^1(A)$ l'insieme delle funzioni $f \in C^0(A)$ e tali che $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(A)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Corollario 1.5.1. Se $f \in C^1(A)$, allora f è differenziabile in ogni punto di A .

Osservazione 1.5.3. Gli spazi $C^m(A)$ ($m = 0, 1$) sono spazi vettoriali su \mathbb{R} . Infatti, la somma di funzioni continue è continua, così come il prodotto di una funzione continua per scalari.

Tuttavia, questi spazi hanno dimensione infinita! Non possiamo più lavorare come sugli spazi a dimensione finita. In particolare, crolla il Teorema di Bolzano-Weierstrass.

1.5.3 Derivate (parziali) successive

($n = 2$)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$. Sia ora $P_0 \in A$ fissato. Se

$$\begin{array}{c} \text{derivate seconde pure} \\ \overbrace{\exists \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (P_0), \quad \exists \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (P_0)} \\ \text{derivate seconde miste} \\ \overbrace{\exists \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (P_0), \quad \exists \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (P_0)} \end{array}$$

Problema: Se $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (P_0)$ e $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (P_0)$, vale che $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (P_0)$?

Osservazione 1.5.4. In generale, può accadere che

$$(\star) \quad \exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (P_0) \neq \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (P_0)$$

Ad esempio (Ex. 11 Foglio 2), si prenda

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si provi che vale (\star) nel punto $P_0 = (0, 0)$

Teorema 1.5.3. Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in A$. Supponiamo che

$$(i) \quad \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ sono continue nel punto } P_0.$$

Allora

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) = \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)$$

DIMOSTRAZIONE: (Si veda [Giu]).

■

Osserviamo che il caso si estende (banalmente) anche al caso $n \geq 3$.

Definizione 1.5.7. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Fissato un intero $m \geq 1$, si denota con $C^m(A)$ l'insieme delle funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tali che f è continua e, comunque fissato $1 \leq k \leq m$,

$$\exists \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua} \quad \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

Osservazione 1.5.5 (importante). Data $f \in C^m(A)$, dato $1 \leq k \leq m$, e data

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) \stackrel{\text{Teorema di Schwarz}}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$$

dove $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (eventualmente non nulli), con $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$.

Definizione 1.5.8. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\mathbb{N} \ni m \geq 0$. Allora, $C^m(A)$ denota l'insieme delle funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ per cui $\exists D^\alpha f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m$, dove

$$D^\alpha f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x), \quad x \in A$$

1.6 Regola di derivazione composta (RDC)

1.6.1 Regola di composizione di una funzione composta

Vediamo un caso particolare.

Siano $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) = (x(t), y(t))$ derivabile $\forall t$, cioè $\exists x'(t), y'(t) \quad \forall t \in [a, b]$, ed $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Consideriamo la funzione $h = f \circ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Problema: $\exists h'(t) \stackrel{???}{=} \nabla f(g(t)) \bullet g'(t)$

Definizione 1.6.1. Sia chiama curva in \mathbb{R}^n una funzione $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$\Gamma = g([a, b])$ si chiama supporto della curva.

Proposizione 1.6.1. Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivabile nel punto $t_0 \in [a, b]$, cioè, se $g(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad \exists g'(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(A)$ (in effetti, basterebbe che f fosse differenziabile nel punto $P_0 = g(t_0)$).

Supponiamo inoltre che $\Gamma = g([a, b]) \subseteq A$.

Allora la funzione composta $h = f \circ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile nel punto t_0 e

$$h'(t) = \nabla f(g(t_0)) \bullet g'(t_0)$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $t_0 \in (a, b)$. Per definizione, $h(t) \doteq f(g(t))$, $t \in [a, b]$. Consideriamo, se $t \in [a, b] \setminus \{t_0\}$, il rapporto:

$$(1) \quad \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0}$$

Per ipotesi, f è differenziabile nel punto $P_0 \doteq g(t_0)$, per cui possiamo scrivere

$$(2) \quad f(P) = f(P_0) + df(P_0)(P - P_0) + \sigma(P), \quad \forall P \in A$$

dove

$$(3) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\sigma(P)}{\|P - P_0\|} = 0$$

Quindi, prendendo $P = g(t)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} (1) \stackrel{(2)}{=} \frac{df(P_0)(g(t) - g(t_0)) + \sigma(g(t))}{t - t_0} &= \frac{\nabla f(P_0) \bullet (g(t) - g(t_0)) + \sigma(g(t))}{t - t_0} = \\ &= \nabla f(P_0) \bullet \frac{(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} + \frac{\sigma(g(t))}{t - t_0} \end{aligned}$$

Se mostriamo che, passando a limite, il secondo addendo di questa somma va a 0, completiamo la dimostrazione. Pertanto, definiamo la funzione

$$\sigma^*(P) = \begin{cases} \frac{\sigma(P)}{\|P - P_0\|} & P \neq P_0 \\ 0 & P = P_0 \end{cases}$$

che è continua per la (3). Ricordando che $P = g(t)$, $P_0 = g(t_0)$ e che poiché g è derivabile è anche continua, consentendoci di passare dal limite per $t \rightarrow t_0$ a quello per $P \rightarrow P_0$, possiamo scrivere che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sigma(g(t))}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \sigma^*(g(t)) \frac{\|P - P_0\|}{t - t_0} = 0$$

A questo punto, otteniamo che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \nabla f(P_0) \bullet \frac{(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} + \frac{\sigma(g(t))}{t - t_0} = \nabla f(g(t_0)) \bullet g'(t_0)$$

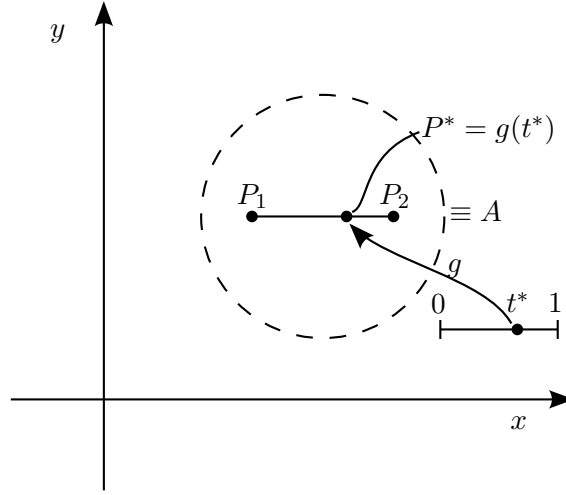
■

Una prima applicazione della regola di derivazione di una funzione composta è il seguente teorema.

Teorema 1.6.1 (del valor medio). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f \in C^1(A)$. Supponiamo che A sia convesso, cioè, per definizione, per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in A$, il segmento*

$$\overline{P_1 P_2} \doteq \{tP_1 + (1 - t)P_2 : 0 \leq t \leq 1\} \subset A$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI



Allora, $\forall P_1, P_2 \in A$, $f(P_2) - f(P_1) = \nabla f(P^*)(P_2 - P_1)$ per un opportuno punto $P^* \in \overline{P_1 P_2}$.

DIMOSTRAZIONE: Definiamo la curva $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$g(t) = tP_2 + (1 - t)P_1 = P_1 + t(P_2 - P_1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Abbiamo che g è derivabile su $[0, 1]$ e

$$g'(t) = P_2 - P_1 \quad \forall t \in [0, 1]$$

Consideriamo la funzione composta

$$h = f \circ g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad h(t) = f(g(t))$$

Per la proposizione precedente, h è derivabile su $[0, 1]$ e

$$h'(t) = \nabla f(g(t)) \bullet g'(t) = \nabla f(g(t)) \bullet (P_2 - P_1) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Applichiamo il Teorema del valor medio di Lagrange in una variabile alla funzione h ottenendo:

$$h(1) - h(0) = h'(t^*)(1 - 0) = h'(t^*)$$

per un opportuno $0 \leq t^* \leq 1$. Rileggendo in termini di f e di g , possiamo scrivere (ricordando che $g(t^*) = P^*$ e che $g(1) = P_2$, $g(0) = P_1 \implies h(1) = f(P_2)$, $h(0) = f(P_1)$):

$$f(P_2) - f(P_1) = \nabla f(P^*) \bullet (P_2 - P_1)$$

■

Corollario 1.6.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e convesso, e sia $f \in C^1(A)$. Supponiamo che $\nabla f(P) = \underline{0} = (0, \dots, 0) \quad \forall P \in A$.*

Allora, fissato un $P_0 \in A$, $f(P) = f(P_0) \quad \forall P \in A$.

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo $P_0 \in A$. Preso $P \in A$, per il teorema del valor medio $\exists P^* \in \overline{P_0 P}$ tale che

$$f(P) - f(P_0) = \nabla f(P^*) \bullet (P - P_0)$$

Ma $\nabla f(P) = 0 \quad \forall P$ per ipotesi, quindi sarà nullo anche in P^* . L'uguaglianza precedente diventa perciò

$$f(P) - f(P_0) = 0 \implies f(P) = f(P_0)$$

■

Definizione 1.6.2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.*

(i) *A si dice sconnesso se esistono due insiemi B, C aperti, disgiunti e non vuoti tali che $A = B \sqcup C$.*

(ii) *A si dice connesso se non è sconnesso.*

Corollario 1.6.2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e connesso, e sia $f \in C^1(A)$. Supponiamo che $\nabla f(P) = \underline{0} = (0, \dots, 0) \quad \forall P \in A$.*

Allora, fissato un $P_0 \in A$, $f(P) = f(P_0) \quad \forall P \in A$.

DIMOSTRAZIONE: (Si veda [Giu]).

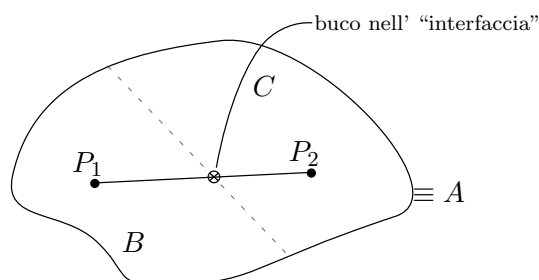
■

Esercizio. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso. Provare che A è anche connesso (utilizzando la definizione di connessione).*

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

DIMOSTRAZIONE: Idea

La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che $A = B \sqcup C$, con B, C aperti, disgiunti e non vuoti. Se A è convesso, c'è l'assurdo che devo “bucare” l'interfaccia che crea l'unione disgiunta per poter unire un punto di B e un punto di C , ossia per unire due particolari punti di A !



Tuttavia, l'idea intuitiva di dover “bucare” l'interfaccia non basta. Chi mi assicura che devo bucarla?

Per rispondere, bisogna far uso dell'Assioma di Completezza. Infatti, in \mathbb{Q} tale interfaccia non si bucherebbe.

■

Problema: Siano $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ di “classe C^1 ”. Definendo $h = f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\exists \nabla h(x_1, \dots, x_n)$?

1.6.2 Funzioni continue e differenziabili da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m

Ricordiamo innanzitutto che $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ e $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_m)$ sono due spazi metrici (e in particolare due spazi topologici). Inoltre, \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m possiedono una struttura di spazio vettoriale lineare su \mathbb{R} .

Definizione 1.6.3. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P_0 \in A$ fissato.

(i) Se P_0 è di accumulazione, allora f si dice continua nel punto P_0 se

$$\exists \lim_{P \rightarrow P_0} \|f(P) - f(P_0)\|_m = 0$$

Una funzione f si dice continua sull'insieme A se f è continua in ogni punto $P_0 \in A$.

(ii) Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice che f è differenziabile nel punto P_0 se esiste un'applicazione lineare $L = df(P_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che valga

$$(D) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|f(P) - f(P_0) - L(P - P_0)\|_m}{\|P - P_0\|_n} = 0$$

Si dice che f è differenziabile sull'insieme A se f è differenziabile in ogni punto $P_0 \in A$.

Supponiamo ora di fissare la base canonica di \mathbb{R}^m (e_1, \dots, e_m). Allora, data $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^m$, quest'ultima si può rappresentare come

$$f(P) = f_1(P)e_1 + f_2(P)e_2 + \dots + f_m(P)e_m \equiv (f_1(P), \dots, f_m(P))$$

dove $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$).

Proposizione 1.6.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Allora f è continua in ogni punto $P_0 \iff f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto P_0 per ogni $i = (1, \dots, m)$.

DIMOSTRAZIONE: Ricordiamo innanzitutto che (Ex. 1, Foglio 3), per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^m$, vale

$$(\star) \quad \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m |v_i| \leq \|v\|_m \leq \sum_{i=1}^m |v_i|$$

Da (\star) segue che, prendendo $v = f(P) - f(P_0)$,

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m |f_i(P) - f_i(P_0)| \leq \|f(P) - f(P_0)\|_m \leq \sum_{i=1}^m |f_i(P) - f_i(P_0)|$$

Ora, se un vettore va a 0, ciascuna componente va a 0, e viceversa. Quindi, usando opportunamente in base al verso da dimostrare la prima o la seconda disuguaglianza, segue banalmente la tesi (applicando la definizione di continuità!).

■

Ricordiamo che, data $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare, possiamo rappresentarla come

$$L(v) = (L_1(v), \dots, L_m(v)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

dove $L_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare $\forall i = 1, \dots, m$.

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

Proposizione 1.6.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Allora f è differenziabile in un punto $P_0 \iff f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile nel punto $P_0 \quad \forall i = 1, \dots, m$.*

Inoltre:

$$(1) \quad df(P_0)(v) = \left(df_1(P_0)(v), df_2(P_0)(v), \dots, df_m(P_0)(v) \right), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

DIMOSTRAZIONE: Dalla (\star) della proposizione precedente segue che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m \frac{|f_i(P) - f_i(P_0) - L_i(P - P_0)|}{\|P - P_0\|_n} &\leq \frac{\|f(P) - f(P_0) - L(P - P_0)\|_m}{\|P - P_0\|_n} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \frac{|f_i(P) - f_i(P_0) - L_i(P - P_0)|}{\|P - P_0\|_n} \end{aligned}$$

(\Leftarrow)

$\forall i = 1, \dots, m$

$$\exists \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{|f_i(P) - f_i(P_0) - L_i(P - P_0)|}{\|P - P_0\|_n} = 0 \implies$$

$\implies f$ è differenziabile nel punto P_0 e $df_i(P_0) = L_i, \quad \forall i = 1, \dots, m$.

(\Rightarrow)

Allo stesso modo, procedendo al contrario.

■

Corollario 1.6.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $P_0 \in A$ fissato, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Supponiamo inoltre che f sia differenziabile nel punto P_0 . Allora*

$$(i) \quad \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0) \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$(ii) \quad df(P_0)(v) = \left(J(f) \right)(P_0) \cdot v, \text{ con } v = (v_1, \dots, v_n)^T \text{ un vettore colonna,}$$

$$J(f)(P_0) = [J_{ij}]_{m \times n} \quad \text{dove} \quad J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0)$$

e $J(f)(P_0)$ si chiama matrice jacobiana di f nel punto P_0 .

DIMOSTRAZIONE: Dalla proposizione precedente, segue che f_i è differenziabile e

1.6 Regola di derivazione composta (RDC)

$$(2) \quad df_i(P_0)(v) = \nabla f_i(P_0) \bullet v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

In particolare, dalla (2) segue la (i): fissato i , esistono le derivate parziali per ogni j .

D'altra parte, da (1) + (2) segue che

$$J(f)(P_0) = \begin{pmatrix} -\nabla f_1(P_0) - \\ -\nabla f_2(P_0) - \\ \vdots \\ -\nabla f_m(P_0) - \end{pmatrix}^{(5)}$$

e

$$df(P_0)(v) = J(f)(P_0) \cdot v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

■

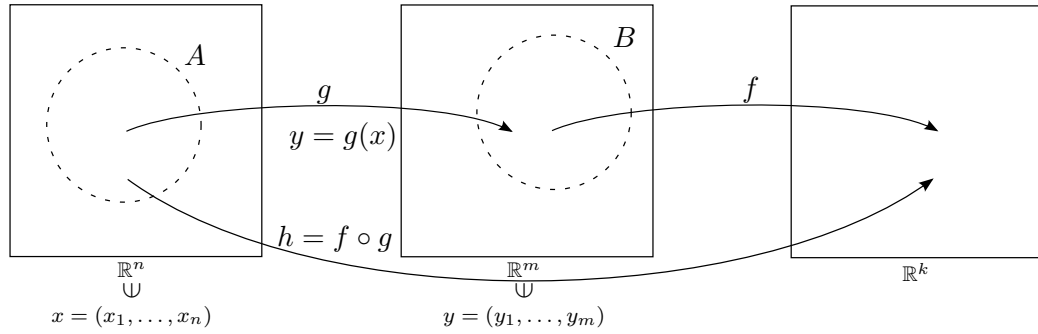
Esempio. $m = 1$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^X$. Supponiamo che f sia differenziabile nel punto P_0 . Allora

$$df(P_0)(v) = J(f)(P_0) \cdot v$$

dove

$$J(f)(P_0) \equiv \nabla f(P_0) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right)_{1 \times n}$$

Poniamoci ora nella seguente situazione:



Teorema 1.6.2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$ fissato, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $y_0 \doteq g(x_0)$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto e sia $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^k$.

Supponiamo che:

⁽⁵⁾Le righe orizzontali indicano informalmente dei vettori riga.

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

(i) $g(A) \subseteq B$

(ii) g sia differenziabile nel punto x_0

(iii) f sia differenziabile nel punto $y_0 = g(x_0)$

Allora l'applicazione composta $h = f \circ g : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile nel punto x_0 e

$$\text{(RDC)} \quad dh(x_0) = df(g(x_0)) \circ dg(x_0)$$

rispetto ai differenziali

Osservazione 1.6.1 (importante). Operativamente, risulterebbe più semplice avere la RDC rispetto alle jacobiane. Tale formula si può in effetti ottenere, e risulta:

$$\text{(RDC)} \quad \underbrace{J(h)(x_0)}_{k \times n} = \underbrace{J(f)(g(x_0))}_{k \times m} \cdot \underbrace{J(g)(x_0)}_{m \times n}$$

rispetto alle jacobiane

se $h = h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x))$, $y = g(x)$, $f = f(y)$. Quindi,

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_h}(g(x_0)) \cdot \frac{\partial g_h}{\partial x_j}(x_0), \quad \begin{matrix} \forall i = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Esempio (Applicazione importante: derivazione in coordinate polari (nel piano)). Sia $g : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

$$g(\rho, \vartheta) = (\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta))$$

Consideriamo l'applicazione composta

$$u(\rho, \vartheta) = (f \circ g)((\rho, \vartheta)) = f(\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta))$$

Problema:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = ?? \quad \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = ??$$

Diamo ora la dimostrazione della RDC.

DIMOSTRAZIONE: (RDC rispetto ai differenziali)

Dobbiamo provare che, definita la funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tale che

$$\begin{aligned} L(v) &= \left(df(g(x_0)) \circ dg(x_0) \right)(v) = \left(df(g(x_0)) \right)(dg(x_0)(v)) = \\ &= df(y_0)(dg(x_0)(v)), \quad v \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

vale:

1.6 Regola di derivazione composta (RDC)

$$(D) \quad \exists \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|h(P) - h(P_0) - L(P - P_0)\|_k}{\|P - P_0\|_n} = 0$$

Osserviamo che, da (ii) e (iii), segue che:

$$(1) \quad g(x) = g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + \sigma(x), \quad \forall x \in A$$

$$(2) \quad f(y) = f(y_0) + df(y_0)(y - y_0) + \rho(y), \quad \forall y \in B$$

con $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ verificanti:

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\sigma(x)\|_m}{\|x - x_0\|_n} = 0$$

$$(4) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\|\rho(y)\|_k}{\|y - y_0\|_m} = 0$$

Volendo riscrivere (D) in termini di f e g , osserviamo che:

$$\begin{aligned} (5) \quad & \underline{\underline{h(x) - h(x_0)}} = \\ & \underline{\underline{f(g(x)) - f(g(x_0))}} \stackrel{(y = g(x), y_0 = g(x_0)) + (2)}{=} \\ & df(y_0)(g(x) - g(x_0)) + \rho(g(x)) \stackrel{(1)}{=} \\ & df(y_0)\left(dg(x_0)(x - x_0) + \sigma(x)\right) + \rho(g(x)) \stackrel{\text{il differenziale è lineare!}}{=} \\ & \underbrace{df(y_0)\left(dg(x_0)(x - x_0)\right)}_{L(x-x_0)} + \underbrace{df(y_0)(\sigma(x)) + \rho(g(x))}_{\tau(x)} = \\ & \underline{\underline{L(x - x_0) + \tau(x)}} \end{aligned}$$

Dalla (5) segue che per provare (D), basta mostrare che:

$$(6) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\tau(x)\|_k}{\|x - x_0\|_n} = 0 \quad (P \equiv x, P_0 \equiv x_0)$$

Osserviamo che:

$$\frac{\|\tau(x)\|_k}{\|x - x_0\|_n} \leq \frac{\|df(y_0)(\sigma(x))\|_k}{\|x - x_0\|_n} + \frac{\|\rho(g(x))\|_k}{\|x - x_0\|_n} \quad \forall x \in A \setminus \{x_0\}$$

e:

$$\frac{\|df(y_0)(\sigma(x))\|_k}{\|x - x_0\|_n} \stackrel{\text{linearità!}}{=} \left\| df(y_0) \left(\frac{\sigma(x)}{\|x - x_0\|_n} \right) \right\|_k$$

Ma il differenziale è un'applicazione lineare! Quindi il suo valore su un vettore è sempre scrivibile come una certa matrice (per la precisione, la jacobiana) per il vettore stesso.

Inoltre (Ex. 2, Foglio 3), se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, vale:

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

$$(\star) \quad \|Av\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|A\| \cdot \|v\|_n$$

dove $\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$. Da (3) + (\star) abbiamo quindi che

$$\left\| df(y_0) \left(\frac{\sigma(x)}{\|x - x_0\|_n} \right) \right\|_k = \left\| J(f)(y_0) \cdot \left(\frac{\sigma(x)}{\|x - x_0\|_n} \right) \right\|_k \leq \|J(f)(y_0)_{k \times m}\| \cdot \frac{\|\sigma(x)\|_m}{\|x - x_0\|_n} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Per concludere e provare la (6), basta ora mostrare che:

$$(7) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\rho(g(x))\|_k}{\|x - x_0\|_n} = 0$$

Definiamo:

$$\rho^* : B \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad \rho^*(y) \doteq \begin{cases} \frac{\rho(y)}{\|y - y_0\|_m} & y \neq y_0 \\ 0_{\mathbb{R}^k} & y = y_0 \end{cases}$$

Da (4), segue che $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \|\rho^*(y)\|_k = 0$. Osserviamo ora che

$$(8) \quad \frac{\|\rho(g(x))\|_k}{\|x - x_0\|_n} = \|\rho^*(g(x))\|_k \cdot \frac{\|g(x) - g(x_0)\|_m}{\|x - x_0\|_n} \quad \forall x \in A \setminus \{x_0\}$$

e

$$\frac{\|g(x) - g(x_0)\|_m}{\|x - x_0\|_n} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Per quanto riguarda il secondo fattore, usando la differenziabilità di g in x_0 è facile osservare che (Ex. 3, Foglio 3) $\exists c > 0, R_0 > 0$ tale che:

$$(8) \quad \frac{\|g(x) - g(x_0)\|_m}{\|x - x_0\|_n} \leq c \quad \forall x \in B_n(x_0, R_0) \setminus \{x_0\}$$

Da (8) + (9), segue la (6). ■

1.7 Formula di Taylor

Problema: Sia $f \in C^m(B(x^0, r_0))$, dove $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$, $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Come si fa ad “approssimare f ” con un polinomio $p = p(x_1, \dots, x_n)$ nel modo “migliore possibile”?

Ricordiamo a tal proposito la formula di Taylor per $n = 1$, prendendo $x^0 \in \mathbb{R}$ e di conseguenza $B(x^0, r_0) = (x^0 - r_0, x^0 + r_0)$.

Teorema 1.7.1 (Formula di Taylor con resto secondo Lagrange ($n = 1$)). Sia $f \in C^{m+1}((x^0 - r_0, x^0 + r_0))$. Definiamo

$$P_m(f, x^0)(x) = \sum_{h=0}^m \frac{f^{(h)}(x^0)}{h!} (x - x^0)^h \quad (x \in \mathbb{R})$$

Tale P_m è detto polinomio m-esimo di Taylor di f . Allora:

$$(FT_m) \quad f(x) = P_m(f, x^0)(x) + R_m(x, x^0)$$

con

$$(RL_m)^{(6)} \quad R_m(x, x^0) = \frac{f^{(m+1)}(\bar{x})}{(m+1)!} (x - x^0)^{m+1}$$

dove \bar{x} è un punto opportuno tra x^0 e x . In particolare, vale che

$$(RP_m)^{(7)} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{R_m(x, x^0)}{|x - x^0|^m} = 0$$

Ritorniamo ora al caso in n variabili, e prendiamo una funzione $f \in C^m(B(x^0, r_0))$ (ossia $f : B(x^0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}$). Ricordiamo che, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, allora $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Nel caso $|\alpha| \leq m$, possiamo definire

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \quad \forall x \in B(x^0, r_0)$$

Definiamo poi

$$\alpha! \stackrel{def}{=} \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

e

$$(x - x^0)^\alpha \stackrel{def}{=} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdot (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Vale allora il seguente teorema.

Teorema 1.7.2 (Formula di Taylor). Sia $f \in C^{m+1}(B(x^0, r_0))$. Definiamo

$$P_m(f, x^0)(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} \frac{D^\alpha f(x^0)}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Tale P_m è detto polinomio m-esimo di Taylor di f . Allora:

⁽⁶⁾Resto secondo Lagrange

⁽⁷⁾Resto secondo Peano

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

$$(FT_m) \quad f(x) = P_m(f, x^0)(x) + R_m(x, x^0) \quad \forall x \in B(x^0, r_0)$$

con

$$(RL_m) \quad R_m(x, x^0) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=m+1}}^m \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha$$

dove \bar{x} è un punto opportuno nel segmento $x^0x \doteq \{tx + (1-t)x^0 : 0 \leq t \leq 1\}$. In particolare, vale che

$$(RP_m) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{R_m(x, x^0)}{\|x - x^0\|_n^m} = 0$$

Osservazione 1.7.1. Supponiamo che valga (RL_m) per f e proviamo che vale (RP_m) .

$$\begin{aligned} |R_m(x, x^0)| &\leq \\ &\leq \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(\bar{x})|}{\alpha!} |(x - x^0)^\alpha| = \\ &= \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(\bar{x})|}{\alpha!} |x_1 - x_1^0|^{\alpha_1} \dots |x_n - x_n^0|^{\alpha_n} \leq \\ &\stackrel{(8)}{\leq} \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(\bar{x})|}{\alpha!} \|x - x^0\|_n^{\alpha_1} \dots \|x - x^0\|_n^{\alpha_n} = \\ &\stackrel{(9)}{=} \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(\bar{x})|}{\alpha!} \|x - x^0\|_n^{|\alpha|} = \\ &= \|x - x^0\|_n^{m+1} F(x) \end{aligned}$$

dove $F(x) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(\bar{x})|}{\alpha!}, \quad x \in B(x^0, r_0)$

\Updownarrow

$$\frac{|R_m(x, x^0)|}{\|x - x^0\|_n^m} \leq \|x - x^0\|_n F(x)$$

⁽⁸⁾In un triangolo rettangolo ogni cateto è sempre minore dell'ipotenusa!

⁽⁹⁾ $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Ora, passando a limite, $\|x - x^0\|_n$ va a 0, ma cosa accade a $F(x)$? Poiché le derivate di f sono continue fino a $m+1$, la funzione F è continua, ed è quindi facile provare che è limitata. In particolare, vale che

$$\lim_{x \rightarrow x^0} F(x) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(x^0)|}{\alpha!}$$

Infatti, prendendo $\bar{x} = \bar{t}x + (1 - \bar{t})x^0$ per un certo $0 \leq \bar{t} \leq 1$, vale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x^0} F(x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x^0} \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(\bar{x})|}{\alpha!} = \lim_{x \rightarrow x^0} \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(\bar{t}x + (1 - \bar{t})x^0)|}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{|D^\alpha f(x^0)|}{\alpha!} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la continuità delle derivate successive, portando il limite dentro l'argomento della funzione.

DIMOSTRAZIONE: (Formula di Taylor, $n = 2$)

Fissiamo $x = (x_1, x_2) \in B(x^0, r_0)$ e $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$. Sia $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) \doteq f(x^0 + t(x - x^0))$. In particolare, dalla regola di derivazione di una funzione composta, $F \in C^{m+1}([-1, 1])$.

(Idea della dimostrazione: $F(1) = f(x)$)

Applichiamo a F la formula di Taylor (per una variabile) con punto iniziale $t^0 = 0$:

$$(1) \quad F(t) = \sum_{k=0}^m \frac{F^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_m(t, 0) \quad \forall t \in [-1, 1]$$

dove

$$R_m(t, 0) = \frac{F^{(m+1)}(\bar{t})}{(m+1)!} t^{m+1}$$

Calcoliamo le derivate $F^{(k)}(t)$ in termini di $D^\alpha f$, tenendo conto che $F = f \circ g$ dove $g(t) = x^0 + t(x - x^0)$, e quindi $F'(t) = \nabla f(g(t)) \bullet g'(t)$.

$$\underline{k=0}: F^{(0)}(t) = f(x^0 + t(x - x^0))$$

$$\underline{k=1}: F'(t) = \nabla f(x^0 + t(x - x^0)) \bullet (x - x^0) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0 + t(x - x^0))(x_j - x_j^0)$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

$\underline{k} = 2$: Come prima, consideriamo ogni addendo F'_j di F' una funzione $F'_j = (x_j - x_j^0) \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ g$. Di conseguenza:

$$\begin{aligned} F''(t) &= \sum_{j=1}^2 \left((x_j - x_j^0) \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0 + t(x - x^0)) \right) \right) \bullet (x - x^0) = \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0 + t(x - x^0)) (x_j - x_j^0) \right) (x_i - x_i^0) = \\ &= \sum_{i=1, j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0 + t(x - x^0)) (x_j - x_j^0) (x_i - x_i^0) \end{aligned}$$

\underline{k} : (2)

$$\begin{aligned} F^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1, \dots, i_k=1}^2 \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x^0 + t(x - x^0)) (x_{i_1} - x_{i_1}^0) \dots (x_{i_k} - x_{i_k}^0) \\ \forall t \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Fissiamo un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ tale che $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = k$ con $0 \leq k \leq m+1$, e determiniamo il numero di volte che

$$(3) \quad D^\alpha f(x^0 + t(x - x^0)) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x^0 + t(x - x^0))$$

per una opportuna funzione $i : \{1, k\} \longrightarrow \{1, 2\}$ quando $i_j \stackrel{def}{=} i(j)$.

Tenendo presente il teorema di inversione dell'ordine delle derivate parziali, vale (3) se e solo se:

$$(4) \quad \begin{cases} i_j = 1 & \text{per un numero di volte } \alpha_1 \\ i_j = 2 & \text{per un numero di volte } \alpha_2 \end{cases}$$

(dove ricordiamo che $j \in \{1, k\}$).

Andando a contare il numero di volte che si verifica (3), si prova per induzione (esercizio) che tale numero è pari a $\frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!}$. Utilizzando questo risultato insieme a (2) + (3) + (4), segue che

$$\begin{aligned} F^{(k)}(t) &= \\ &= \sum_{i_1=1, \dots, i_k=1}^2 \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x^0 + t(x - x^0)) \underbrace{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2}}_{\equiv (x - x^0)^\alpha} = \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} D^\alpha f(x^0 + t(x - x^0)) (x - x^0)^\alpha \end{aligned}$$

Applichiamo ora la (1) con $t = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= F(1) = \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x^0)}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(x^0 + \bar{t}(x - x^0))}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha \doteq \\ &\doteq P_m(f, x^0)(x) + R_m(x, x^0) \end{aligned}$$

■

Osservazione 1.7.2. Si può provare che, se $f \in C^m(B(x^0, r_0))$, vale ancora (FT_m) per una opportuna funzione resto $R_m(x, x^0) : B(x^0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$(RP_m) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{R_m(x, x^0)}{\|x - x^0\|_n^m} = 0$$

Osservazione 1.7.3.

$$\begin{aligned} f(x) &= o(g(x)) \quad (x \rightarrow x^0) \\ &\Updownarrow \end{aligned}$$

$$(1) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x^0} g(x) = 0$$

$$(2) \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x^0 - r_0, x^0 + r_0) \setminus \{x^0\}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

1.7.1 Applicazione al calcolo dei limiti

Esempio (i).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

DIMOSTRAZIONE: La formula di Taylor al II ordine per la funzione $\sin(x)$ è:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x, 0) \quad \text{dove} \quad R_3(x, 0) = \frac{f^{(h)}(\bar{x})}{h!} x^h = o(x^3)$$

per un opportuno \bar{x} tra 0 e x . Quindi:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

A questo punto, il limite diventa banale.

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

■

Esempio (ii).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

DIMOSTRAZIONE: Se avessi sviluppato all'ordine I:

$$\sin(x) = x + o(x)$$

$$\frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} \xrightarrow{??}$$

A questo punto, mi devo fermare! Avrei quindi dovuto sviluppare di più. Uno dei vantaggi della notazione “ o ”, a differenza di quella delle equivalenze asintotiche, è proprio il fatto che rende chiaro l'ordine fino al quale sviluppare.

■

1.7.2 Caso $m = 2$

Definizione 1.7.1. Sia $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Si chiama matrice hessiana in un punto $x^0 \in A$ fissato la matrice quadrata e simmetrica (per Schwarz) di ordine n :

$$H(f)(x^0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Ad esempio, nel caso $n = 2$,

$$H(f)(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^0) \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Osservazione 1.7.4 (importante). Supponiamo che $m = 2$. Se $f \in C^2(B(x^0, r_0))$, allora vale che:

$$f(x) = P_2(f, x^0)(x) + R_2(x, 0)$$

con

$$\begin{aligned}
 P_2(f, x^0) &= \sum_{|\alpha| < 2} \frac{D^\alpha(f(x^0))}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha = \\
 &= \sum_{|\alpha|=0} \frac{D^\alpha(f(x^0))}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha(f(x^0))}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha(f(x^0))}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha = \\
 &= f(x^0) + df(x^0)(x - x^0) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha(f(x^0))}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha
 \end{aligned}$$

Si può facilmente verificare (basta fare i conti!) che:

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha(f(x^0))}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha = \frac{1}{2} (H(f)(x^0)(x - x^0)^T \bullet (x - x^0))$$

Concludendo, se $f \in C^2(B(x^0, r_0))$, vale che:

$$(\text{FT}_2) \quad f(x) = f(x^0) + df(x^0)(x - x^0) + \frac{1}{2} (H(f)(x^0)(x - x^0)^T \bullet (x - x^0)) + R_2(x, x^0)$$

con

$$\exists \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{R_2(x, x^0)}{\|x - x^0\|_2^2}$$

1. CALCOLO IN PIÙ VARIABILI

Capitolo 2

Massimi e minimi per funzioni di più variabili

2.1 Il Teorema di Fermat

Definizione 2.1.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Un punto $P_0 \in A$ si dice punto di minimo relativo (o locale) [rispettivamente punto di massimo relativo (o locale)] se $\exists r_0 > 0$ tale che

$$f(P_0) \underset{[\geq]}{\leq} f(P) \quad \forall P \in A \cap B(P_0, r_0)$$

- (ii) Un punto $P_0 \in A$ si dice punto di minimo (assoluto o globale) [rispettivamente punto di massimo relativo (assoluto o globale)] se

$$f(P_0) \underset{[\geq]}{\leq} f(P) \quad \forall P \in A$$

Si definiscono, se esistono,

$$\max_A f \stackrel{def}{=} \max\{f(P) : P \in A\}$$

$$\min_A f \stackrel{def}{=} \min\{f(P) : P \in A\}$$

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Se esistono, $\max_A f$ e $\min_A f$ sono unici. Si definiscono inoltre

$$\sup_A f \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{f(P) : P \in A\}$$

$$\inf_A f \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{f(P) : P \in A\}$$

$\sup_A f$ e $\inf_A f$ esistono sempre per l'Assioma di Completezza dei reali.

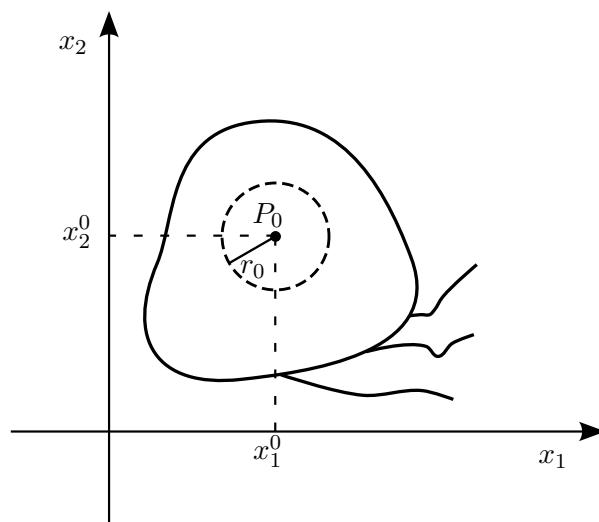
Teorema 2.1.1 (di Fermat). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che, dato $P_0 \in A$,

- (i) P_0 sia un punto di massimo o minimo relativo di f su A .
- (ii) $\exists \nabla f(P_0)$.
- (iii) P_0 sia un punto interno di A , cioè $\exists r_0 > 0$ tale che $B(P_0, r_0) \subseteq A$ ⁽¹⁾.

Allora

$$\nabla f(P_0) = \underline{0} = (0, \dots, 0)$$

DIMOSTRAZIONE:



⁽¹⁾Se P_0 non fosse interno, si avrebbero dei problemi. Ad esempio ($n = 1$), se $A = [0, 1]$ e $f(x) = x$, allora $x_0 = 0$ è un punto di minimo relativo, ma $f'(x_0) = 1 \neq 0$.

Fissato $i = 1, \dots, n$, poiché P^0 è interno, $P^0 + he_i \in B(P^0, r_0)$ se $|h| \leq r_0$. Definiamo

$$F : (-r_0, r_0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(h) = f(P^0 + he_i)$$

(Per $h = 0$, $F(h)$ è interno!)

Applicando il teorema di Fermat in una variabile⁽²⁾, otteniamo che:

$$\begin{aligned} \exists F'(0) &= 0 \\ \cdot \parallel & \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(P^0) &= 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

■

Definizione 2.1.2. Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, si chiamano punti stazionari (o critici) liberi di f su A i punti $P^0 \in A$ tali che:

$$(S1) \quad \exists \nabla f(P)$$

$$(S2) \quad \nabla f(P) = \underline{0}$$

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Poniamo il gradiente di f uguale a 0 per trovare i punti stazionari:

$$\nabla f(x, y) = 2(x, -y) = (0, 0) \iff x = y = 0$$

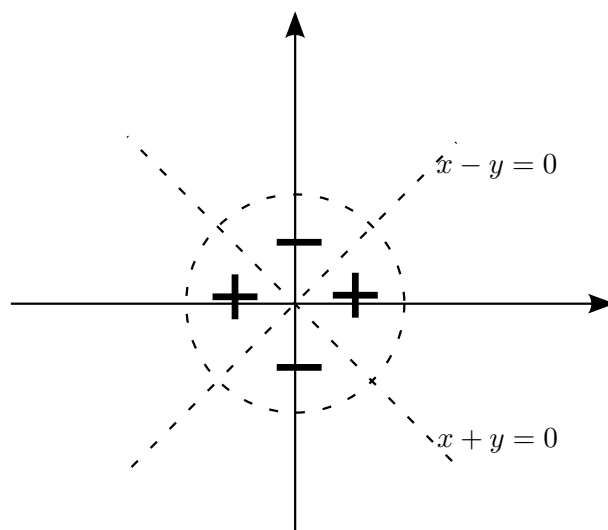
$P_0 = (0, 0)$ è quindi un punto di minimo o massimo relativo di f ? NO!

Basta studiare il segno di $f(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ in un intorno di $(0, 0)$ per accorgersi che non è così:

⁽²⁾ [Gre] Sia f una funzione numerica, e \bar{x} un punto di massimo locale (o minimo locale) di f . Se \bar{x} è interno al dominio di f ed f è derivabile in \bar{x} , allora

$$f'(\bar{x}) = 0$$

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI



La funzione non è definitivamente positiva o negativa, come dovrebbe essere nel caso di un punto di massimo o di minimo! In particolare, in questo caso si dice che il punto è di sella.

Definizione 2.1.3. Sia $H = (h_{ij})_{n \times n}$ a coefficienti reali (cioè $h_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$).

- (i) H si dice definita positiva se $(Hv \bullet v) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- (ii) H si dice definita negativa se $(Hv \bullet v) < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- (iii) H si dice semidefinita positiva se $(Hv \bullet v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- (iv) H si dice semidefinita negativa se $(Hv \bullet v) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Lemma 2.1.1 (Criterio per i segni di una matrice quadrata simmetrica). Sia $H = (h_{ij})_{n \times n}$ simmetrica (cioè, per definizione, $h_{ij} = h_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$). Allora definiamo come:

$m \stackrel{\text{def}}{=} \text{“il più piccolo autovalore di } H\text{”}$

$M \stackrel{\text{def}}{=} \text{“il più grande autovalore di } H\text{”}$

Allora

$$(\star) \quad m||v||_n^2 \leq Hv \bullet v \leq M||v||_n^2$$

Da (\star) e dalla definizione, segue che:

- (i) H è definita positiva $\iff m > 0$

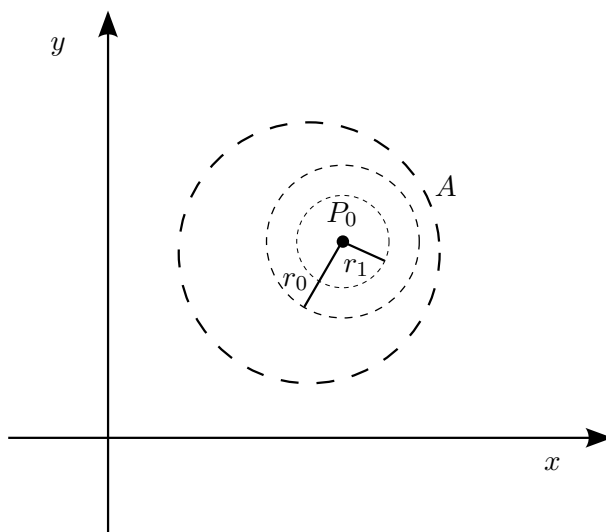
- (ii) H è definita negativa $\iff M < 0$
- (iii) H è semidefinita positiva $\iff m \geq 0$
- (iv) H è semidefinita negativa $\iff M \leq 0$

Teorema 2.1.2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e supponiamo che $f \in C^2(A)$. Sia ora $x^0 \in A$ un punto stazionario (libero) di f su A , cioè, per definizione, $\nabla f(x^0) = \underline{0}$. Prendiamo inoltre la matrice $H(f)(x^0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right)_{n \times n}$, detta matrice hessiana di f nel punto x^0 . Allora

- (i) Se $H(f)(x^0)$ è definita positiva $\implies x^0$ è un punto di minimo relativo di f su A
- (ii) Se $H(f)(x^0)$ è definita negativa $\implies x^0$ è un punto di massimo relativo di f su A
- (iii) Se x^0 è un punto di minimo relativo di f su $A \implies H(f)(x^0)$ è semidefinita positiva
- (iv) Se x^0 è un punto di massimo relativo di f su $A \implies H(f)(x^0)$ è semidefinita negativa

DIMOSTRAZIONE:

- (i) ($n = 2$)



2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Essendo A aperto, $\exists r_0 > 0$ tale che $B(x^0, r_0) \subset A$, e quindi $f \in C^2(B(x^0, r_0))$.

Applicando la formula di Taylor al II ordine, cioè (FT₂), otteniamo che:

$$(1) \quad f(x) = f(x^0) + df(x^0)(x - x^0) + \frac{1}{2} (H(f)(x - x^0) \bullet (x - x^0)) + R_2(x, x^0)$$

tale che

$$(2) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{R_2(x, x^0)}{\|x - x^0\|_n^2} = 0$$

Essendo x^0 un punto stazionario di f , vale:

$$df(x^0)(x - x^0) = \nabla f(x^0) \bullet (x - x^0) = 0$$

Dunque possiamo riscrivere la (1) nel modo seguente:

$$(3) \quad f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2} (H(f)(x - x^0) \bullet (x - x^0)) + R_2(x, x^0)$$

Sia m il più piccolo degli autovalori di $H(f)(x^0)$. Da (\star) , prendendo $H = H(f)(x^0)$, ottengo che:

$$(4) \quad f(x) - f(x^0) \geq \frac{m}{2} \|x - x^0\|_n^2 + R_2(x, x^0)$$

ed $m > 0$, essendo $H(f)(x^0)$ definita positiva.

Dalla (2), usando la definizione e scegliendo $\varepsilon = \frac{m}{2} > 0$, $\exists 0 < r_1 < r_0$ tale che:

$$(5) \quad -\frac{m}{2} < \frac{R_2(x, x^0)}{\|x - x^0\|_n^2} < \frac{m}{2} \quad \forall x \in B(x^0, r_1) \setminus \{x^0\}$$

Da (4) + (5) (moltiplicando (5) per $\|x - x^0\|_n^2$), segue che

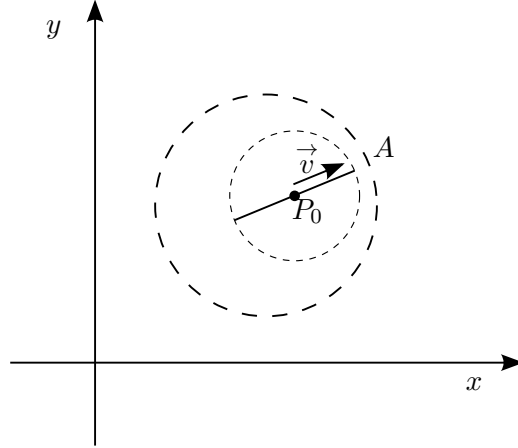
$$(6) \quad \begin{array}{lcl} f(x) - f(x^0) & \geq & \frac{m}{2} \|x - x^0\|_n^2 - \frac{m}{2} \|x - x^0\|_n^2 \quad \forall x \in B(x^0, r_1) \\ & | & \\ & \geq & 0 \end{array}$$



x^0 è un punto stazionario di minimo relativo di f su A

- (ii) Si dimostra similmente al punto precedente, definendo M il più grande degli autovalori di $H(f)(x^0)$ e applicando poi la (\star) .

- (iii) Prendiamo la direzione $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (ricordiamo che, poiché v è una direzione, $\|v\|_n = 1$).



Definiamo

$$F(t) = f(x^0 + tv) \quad \text{se} \quad |t| \leq \delta$$

(ossia f ristretta ad una direzione).

Osserviamo che, essendo A aperto, F è ben definita se δ è abbastanza piccolo.

Per ipotesi, $t = 0$ è un punto di minimo relativo di $F : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$F = f \circ g$$

dove $g : [-\delta, \delta] \rightarrow A$ tale che $g(t) = x^0 + tv$, quindi:

$$F''(0) \geq 0$$

Nella dimostrazione del Teorema di Taylor, avevamo già calcolato che:

$$F^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1, \dots, i_k=1}^2 \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x^0 + t(x - x^0))(x_{i_1} - x_{i_1}^0) \dots (x_{i_k} - x_{i_k}^0)$$

Nel nostro caso, la formula diventa:

$$F^{(2)}(0) = \sum_{i_1=1, i_2=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(x^0)(x_{i_1} - x_{i_1}^0)(x_{i_2} - x_{i_2}^0) = H(f)(x^0)v \bullet v$$

con $v = (x - x^0)$. Dunque, $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$H(f)(x^0)v \bullet v \geq 0$$

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

■

Esercizio (Ex. 5, Foglio 5). *Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione*

$$f(x, y) \doteq x^2 + 2kxy + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (in effetti, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$). I punti stazionari liberi di f sono dati dall'equazione:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0)$$

ossia, sviluppando,

$$(2x + 2ky, 2kx + 2y) = 2(x + ky, kx + y) = (0, 0)$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} x + ky = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice associata al sistema e risolviamo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \end{array} \right) \Longleftrightarrow II - kI \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 - k^2 & 0 \end{array} \right)$$

Discutiamo i casi che ci si presentano:

- $k \neq 1$: Il sistema ammette soluzione unica $(0, 0)$.
- $k = \pm 1$: Il sistema ammette infinite soluzioni, generate dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Andiamo ora a calcolare $H = H(f)(x, y) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi, calcoliamo gli autovalori di H secondo la definizione:

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2k \\ 2k & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (2 - \lambda)^2 - 4k^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\iff (2 - \lambda - 2k)(2 - \lambda + 2k) = 0$$

e in definitiva:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 - 2k \\ \lambda_2 = 2 + 2k \end{cases}$$

Ne deduciamo che:

- Se $|k| > 1$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ e quindi
 - H non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa
 - x^0 è un punto di *sella*
- Se $|k| < 1$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e quindi
 - H è definita positiva e $(0, 0)$ è punto di minimo relativo di f su \mathbb{R}^2
- Se $|k| = 1$, è necessaria un'analisi diretta.
 - Per $\underline{k = 1}$,

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
 I punti tali che $(x + y) = 0$ sono punti di minimo relativo (e assoluto) su \mathbb{R}^2 .
 - Per $\underline{k = -1}$,

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$
 I punti tali che $(x - y) = 0$ sono punti di minimo relativo (e assoluto) su \mathbb{R}^2 .

■

2.2 Il Teorema di Weierstrass

Problema: Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\exists \min_A f$ e/o $\max_A f$, cioè $\exists P_1, P_2 \in A$ tale che

$$f(P_2) \leq f(P) \quad \forall P \in A$$

$$f(P) \leq f(P_1) \quad \forall P \in A$$

dove P_1 è punto di massimo assoluto di f su A e P_2 punto di minimo relativo di f su A ?

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

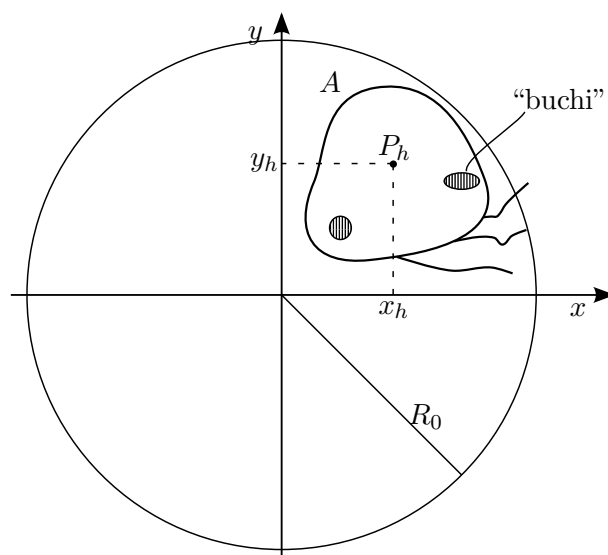
Definizione 2.2.1. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists R_0 > 0$ tale che

$$A \subset B(0, R_0) \iff \|P\|_n \leq R_0 \quad \forall P \in A$$

Lemma 2.2.1 (di Bolzano - Weierstrass). Sia A chiuso e limitato e sia $(P_h)_h \subset A$. Allora esiste una sottosuccessione $(P_{\sigma_h})_h$ ($\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente) convergente ad un opportuno punto $P^* \in A$, cioè

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \|P_{\sigma_h} - P^*\|_n = 0$$

DIMOSTRAZIONE: (Solo nel caso $n = 2$)



Sia $P_h = (x_h, y_h)$. Dalla limitatezza di A segue che $\exists R_0 > 0$ tale che $A \subset B(0, R_0)$. In particolare,

$$(1) \quad \|P_h\|_2 = \sqrt{x_h^2 + y_h^2} \leq R_0 \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

Da (1) segue che

$$(2) \quad |x_h| \leq R_0 \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad |y_h| \leq R_0 \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

Da (2) segue che

$$(x_h)_h \subset [-R_0, R_0]$$

e quindi, per il lemma di Bolzano - Weierstrass in \mathbb{R} , esiste una successione $(x_{\sigma_1(h)})_h$ (con $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente) tale che:

$$(4) \quad \exists \lim_{h \rightarrow \infty} x_{\sigma_1(h)} = x^* \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

per un opportuno $x^* \in [-R_0, R_0]$. Sia

$$t_h \doteq y_{\sigma_1(h)} \quad (h \in \mathbb{N})$$

(cioè $(y_h)_h$ ristretta agli insiemi di indici dati da σ_1). Dalla (3) segue che $(t_h)_h \subset [-R_0, R_0]$, e quindi applicando il lemma di Bolzano - Weierstrass in \mathbb{R} otteniamo che esiste una sottosuccessione

$$(t_{\sigma_2(h)})_h \quad (\text{con } \sigma_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strettamente crescente})$$

tale che

$$(5) \quad \exists \lim_{h \rightarrow \infty} t_{\sigma_2(h)} = y^* \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

per un opportuno $y^* \in [-R_0, R_0]$. Definiamo

$$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

strettamente crescente. Consideriamo la successione

$$P_{\sigma(h)} = (x_{\sigma(h)}, y_{\sigma(h)})$$

estratta dalla successione $(P_h)_h$. Per costruzione, da (4) e (5) segue che

$$(6) \quad \exists \lim_{h \rightarrow \infty} P_{\sigma(h)} = P^* \quad (\text{in } \mathbb{R}^2)$$

dove $P^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ ⁽³⁾.

In tutto quello che abbiamo ottenuto finora, abbiamo utilizzato solo la limitatezza di A . Poiché A è chiuso, $P^* \in A$.

⁽³⁾ $x_{\sigma(h)}$ è una successione estratta da $x_{\sigma_1(h)}$. Poiché

- ogni successione estratta da una successione convergente è anch'essa convergente ed ha per limite lo stesso limite della successione di partenza
- $x_{\sigma_1(h)}$ converge a x^*

allora anche $x_{\sigma(h)}$ converge a x^* .

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

■

Teorema 2.2.1 (di Weierstrass). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che:*

- (i) *A sia chiuso e limitato*
- (ii) *$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua*

Allora

$$\exists \max_A f \quad \text{e} \quad \exists \min_A f$$

DIMOSTRAZIONE: Dall'Assioma di Completezza dei numeri reali, segue che

$$(1) \quad \exists \inf_A f \doteq \inf\{f(P) : P \in A\} \in [-\infty, +\infty)$$

$$(2) \quad \exists \sup_A f \doteq \sup\{f(P) : P \in A\} \in (-\infty, +\infty]$$

Definiamo ora

$$m \doteq \inf_A f \quad \text{e} \quad M \doteq \sup_A f$$

Per definizione di estremo superiore, vale che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Q_\varepsilon = Q(\varepsilon) \in A$ tale che

$$M - \varepsilon \leq f(Q_\varepsilon) \leq M$$

Data l'arbitrarietà di ε , prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{h}$, $h \in \mathbb{N}_{>0}$. Dunque, $\forall h > 0$, $\exists Q_h = Q(h) \in A : M - \frac{1}{h} \leq f(Q_h) \leq M$. Chiaramente,

$$(3) \quad M = \lim_{h \rightarrow \infty} f(Q_h) \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

e la successione $(Q_h)_h \subseteq A$ si dice *successione massimizzante*. Allo stesso modo, esiste una *successione minimizzante* $(P_h)_h \subseteq A$ tale che

$$(4) \quad m = \lim_{h \rightarrow \infty} f(P_h) \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

Proviamo che $\exists P_1 \in A$ tale che

$$(5) \quad f(P_1) = m$$

da cui seguirà che

$$\exists \min_A f = f(P_1)$$

o, in altre parole, proviamo che m oltre che estremo inferiore dell'insieme $\{f(P) : P \in A\}$ è anche minimo di tale insieme. Analogamente, si potrà ottenere che

$$\exists P_2 \in A \quad \text{tale che} \quad f(P_2) = M$$

Applichiamo il lemma di Bolzano - Weierstrass alla successione (P_h) : otteniamo che esiste una sottosuccessione $(P_{\sigma(h)})_h$ ed un punto $P_1 \in A$ tale che:

$$(6) \quad \exists \lim_{h \rightarrow \infty} P_{\sigma(h)} = P_1 \quad (\text{in } \mathbb{R}^n)$$

Osserviamo che da (4) e (6) segue che

$$(7) \quad \exists \lim_{h \rightarrow \infty} f(P_{\sigma(h)}) = m$$

Per la (ii), segue che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f(P_{\sigma(h)}) = f(P_1)$$

■

2.3 Ricerca di massimi e minimi

2.3.1 Ricerca del massimo e minimo (assoluto) di una funzione continua definita su un insieme chiuso e limitato

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Applicando il Teorema di Weierstrass, sappiamo che

$$\exists \min_A f = f(P_1) \quad \text{con } P_1 \in A$$

$$\exists \max_A f = f(P_2) \quad \text{con } P_2 \in A$$

Problema: Come determinare P_i ($i = 1, 2$)?

Vi sono tre possibilità:

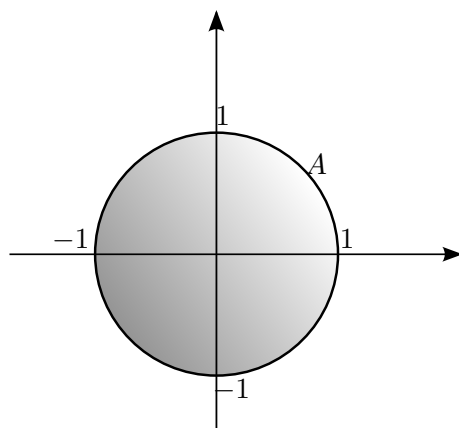
- (1) $P_i \in \mathring{A}$, $\exists \nabla f(P_i) = 0$ (punto stazionario libero)

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

(2) $\nabla f(P_i)$ (punto singolare di f)

(3) $P_i \in \partial A$ (punto stazionario vincolato)

Esempio. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Osserviamo che A è chiuso e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua. Quindi,

$$\exists \min_A f = f(P_1) \quad \text{con } P_1 \in A$$

$$\exists \max_A f = f(P_2) \quad \text{con } P_2 \in A$$

Inoltre, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi $f \in C^\infty(A)$. I punti in cui si annulla il gradiente sono dati da

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \iff x = y = 0$$

È chiaro che $P_1 = (0, 0)$ ed è un punto stazionario libero di f su A . Osserviamo inoltre che

$$\nabla f(x, y) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in \partial A$$

Su questi punti non possiamo applicare il Teorema di Fermat!

2.3.2 Ricerca dei punti di massimo e minimo nella frontiera di un insieme

2.3.2.1 I Metodo: parametrizzazione della frontiera

($n = 2$)

Supponiamo che esista una curva $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

con $\varphi_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 ($i = 1, 2$), tale che

$$\varphi([a, b]) = \partial A$$

Allora φ si chiama *parametrizzazione di ∂A* . Nell'esempio precedente avremmo avuto $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, basta quindi considerare la funzione

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad F(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in [a, b]$$

A questo punto,

$$\max_{\partial A} f = \max_{[a, b]} F \quad \text{e} \quad \min_{\partial A} f = \min_{[a, b]} F$$

Esempio. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Una parametrizzazione di ∂A è

$$F(t) = \cos^2(t) + 2\sin^2(t) = 1 + \sin^2(t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

La ricerca di massimi e minimi di f sulla frontiera di A si riduce alla ricerca di massimi e minimi di F sull'intervallo $[0, 2\pi]$. Abbiamo:

$$F'(t) = 2\sin(t)\cos(t) = 2\sin(2t)$$

I punti di massimo di F su $[0, 2\pi]$ sono quindi $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

Di conseguenza, abbiamo che:

$$P_2 = \begin{cases} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) \\ \varphi\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, -1) \end{cases}$$

($n = 3$)

Supponiamo che esista una curva $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, definita

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

con $\varphi_i : B \longrightarrow \mathbb{R} \in C^0(B) \cap C^1(B)$ ($i = 1, 2, 3$), tale che

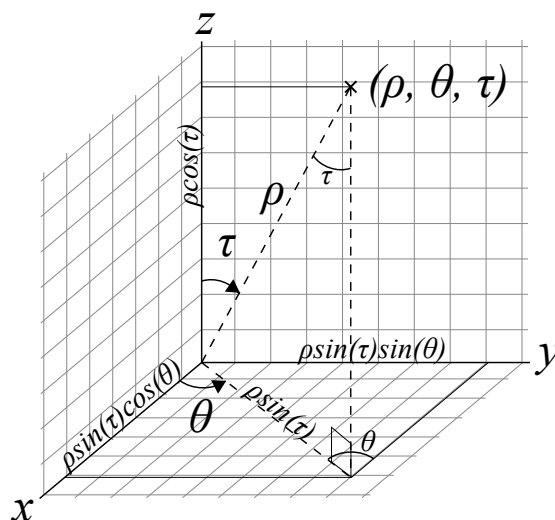
$$\varphi(B) = \partial A$$

Allora φ si chiama *parametrizzazione di ∂A* e vale $F = f \circ \varphi$.

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Esempio. Sia $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, e supponiamo di voler trovare massimo e minimo di f su A .

Osserviamo innanzitutto che ∂A è la superficie sferica di raggio unitario, quindi basta usare la parametrizzazione data dalle coordinate sferiche, come avevamo fatto per le due dimensioni usando le coordinate polari.



Come mostrato nella figura, la parametrizzazione sferica di un punto in \mathbb{R}^3 è

$$\varphi(\vartheta, \tau) = (\cos(\vartheta) \sin(\tau), \sin(\vartheta) \sin(\tau), \cos(\tau)) \quad (\vartheta, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

A questo punto, basta procedere come nell'esempio precedente.

2.3.2.2 II Metodo: la frontiera di un insieme come vincolo

Definizione 2.3.1. Un insieme del piano $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ si chiama vincolo.

Per trattare i vincoli come funzioni, servirà il Teorema delle Funzioni Implicite di Dini. Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e limitato e che ∂A sia un vincolo, ossia $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ dove $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Allora, si può usare il seguente teorema.

Teorema 2.3.1 (dei moltiplicatori di Lagrange). Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (in realtà non c'è bisogno su tutto \mathbb{R}^2 !) e sia $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ e sia $P_0 = (x_0, y_0) \in V$. Se

$$(i) \quad \exists \max_V f = f(P_0) \quad \text{oppure} \quad \exists \min_V f = f(P_0)$$

$$(ii) \quad \nabla g(P_0) \neq (0, 0)$$

allora esiste un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (detto moltiplicatore di Lagrange) per cui il punto $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$ è un punto stazionario libero della funzione $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (detta funzione lagrangiana) definita

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad \text{dove} \quad (x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$$

cioè vale che

$$\nabla L(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(P_0), g(P_0) \right) = (0, 0, 0)$$

o, equivalentemente,

$$(\star) \quad g(P_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla f(P_0) + \lambda_0 \nabla g(P_0) = (0, 0)$$

Definizione 2.3.2. Si chiama punto stazionario vincolato della funzione f sul vincolo V un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ che verifica (\star) .

Premettiamo, prima della dimostrazione del Teorema di moltiplicatori di Lagrange, il seguente (fondamentale) teorema.

Teorema 2.3.2 (delle funzioni implicite, U. DINI). Siano $g \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e supponiamo che

$$(i) \quad g(P_0) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \neq 0$$

Allora

(D1) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ è localmente il grafico in un intorno di P_0 di una funzione $y = h(x)$, cioè esistono $\delta > 0$, $r_0 > 0$ ed esiste un'unica funzione $h : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$h(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad V \cap B(P_0, r_0) = \{(x, h(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$$

(D2) h è di classe C^1 su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e

$$h'(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

DIMOSTRAZIONE: (del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)

Per il Teorema delle funzioni implicite, esistono $\delta > 0$, $r_0 > 0$ ed una (unica) funzione $h : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ per cui valgono le proprietà (D1) e (D2) se supponiamo, per esempio, $\frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \neq 0$.

Consideriamo la funzione $F : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) \doteq f(x, h(x)) \quad \text{con} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Valendo (i), x_0 è un punto di massimo o minimo relativo di F su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Per la (RDC), F è di classe C^1 su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) \cdot h'(x) \quad (4)$$

Per il Teorema di Fermat (in una variabile),

$$0 = F'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot h'(x_0) \stackrel{(D2)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)} \right)$$

moltiplicando tutto per $\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)$, otteniamo

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \frac{\partial g}{\partial y}(P_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \frac{\partial g}{\partial x}(P_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \end{pmatrix}$$

ossia

$$\det \begin{pmatrix} -\nabla f(P_0) & - \\ -\nabla g(P_0) & - \end{pmatrix} = 0$$

In altre parole, $\nabla f(P_0)$ e $\nabla g(P_0)$ sono linearmente dipendenti! Quindi, $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che valga (\star) .

■

⁽⁴⁾ $F = f \circ \gamma$, dove $\gamma(x) = (x, h(x))$. Per la (RDC), vale che

$$F'(x) = \nabla f(\gamma(x)) \bullet \gamma'(x) = \nabla f(x, h(x)) \bullet \gamma'(x)$$

dove $\gamma'(x) = (1, h'(x))$

2.3.3 Interpretazione geometrica della condizione di punto stazionario vincolato

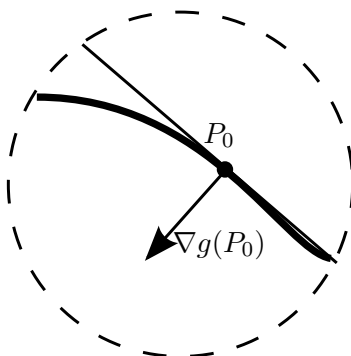
Dal Teorema di Dini, sappiamo che localmente V è il grafico di una funzione regolare. Per esempio, nel caso in cui $\frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \neq 0$, conosciamo anche l'equazione della retta tangente a V nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Più precisamente, è la retta di equazione $y = h'(x_0)(x - x_0) + y_0$ dove, da (D2),

$$h'(x_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)}$$

La retta tangente è generata (a meno di traslazione) dal vettore $(1, h'(x_0))$. Inoltre, vale che

$$\nabla g(P_0) \bullet (1, h'(x_0)) = 0$$

Dunque $\nabla g(P_0)$ è ortogonale alla retta tangente a V nel punto P_0 .



Pertanto i punti $P_0 \in V$ per cui vale (\star) sono i punti $P_0 \in V$ dove $\nabla f(P_0)$ (e anche $\nabla g(P_0)$, poiché sono linearmente dipendenti) è ortogonale al vincolo V in P_0 .

Esempio. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Determinare $\max_V f$ e $\min_V f$.

DIMOSTRAZIONE: Appliciamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definendo

$$g(x, y) \doteq x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

osserviamo che $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, e

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) = 2(x, y) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in V$$

2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Per giungere alla soluzione basta quindi studiare i punti stazionari liberi della funzione lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

cioè i punti $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 4y + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari vincolati di f su V sono $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

■

È facile generalizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange ad una funzione di 3 variabili.

Teorema 2.3.3 (dei moltiplicatori di Lagrange). *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e sia $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Supponiamo che $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$. Se*

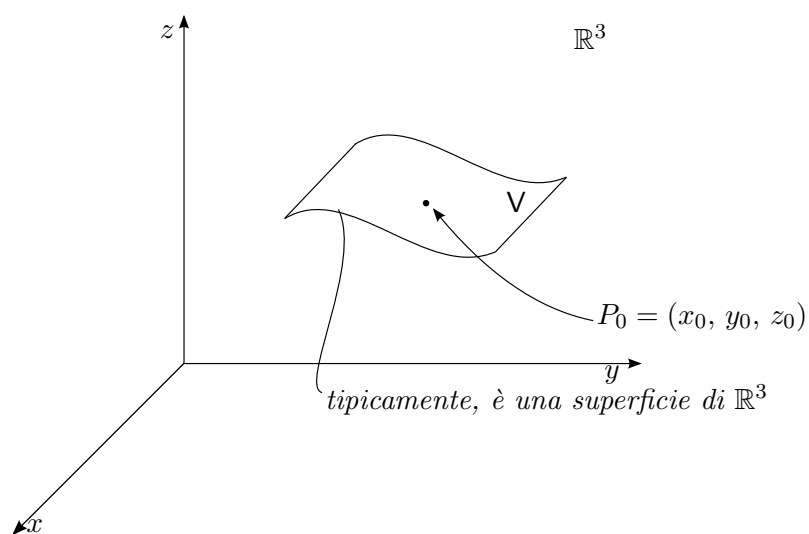
$$(i) \quad \exists \max_V f = f(P_0) \quad \text{oppure} \quad \exists \min_V f = f(P_0)$$

$$(ii) \quad \nabla g(P_0) \neq (0, 0, 0)$$

allora esiste un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (detto moltiplicatore di Lagrange) per cui il punto $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^4$ è un punto stazionario libero della funzione $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ (detta funzione lagrangiana) definita

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \quad \text{dove} \quad (x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$$

cioè vale (\star) .



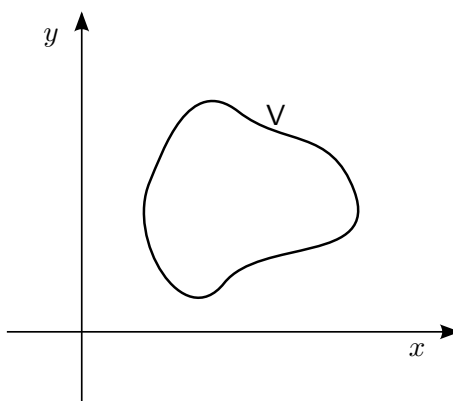
2. MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Capitolo 3

Teorema delle funzioni implicite ed applicazioni

3.1 Caso $n = 2$

Consideriamo $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, dove $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Osserviamo che, cercando il luogo di zeri di una funzione di 2 variabili (due gradi di libertà), abbiamo un vincolo che abbassa gradi di libertà, e quindi ci aspettiamo una *curva*, che ha solo 1 grado di libertà.



Problema: Localmente, V è un grafico del piano cartesiano? In generale, non vi è una risposta positiva. Per esempio, $g \equiv 0$ su \mathbb{R}^2 rappresenta tutto il piano $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE ED APPLICAZIONI

È quindi fondamentale il seguente risultato da parte di Dini, già accennato in precedenza, che enunciamo nuovamente.

Teorema 3.1.1 (delle funzioni implicite, U. DINI). *Siano $g \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e supponiamo che*

$$(i) \quad g(P_0) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \neq 0$$

Allora

(D1) *esistono $\delta > 0$, $\sigma > 0$ tali che il rettangolo $R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \subseteq A$ e $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ fissato, $\exists! y \doteq h(x) \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ tale che $g(x, y) = 0$.*

In altre parole, $\exists!$ una funzione $h : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ tale che $g(x, h(x)) = 0$.

(D2) *h è di classe C^1 su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e*

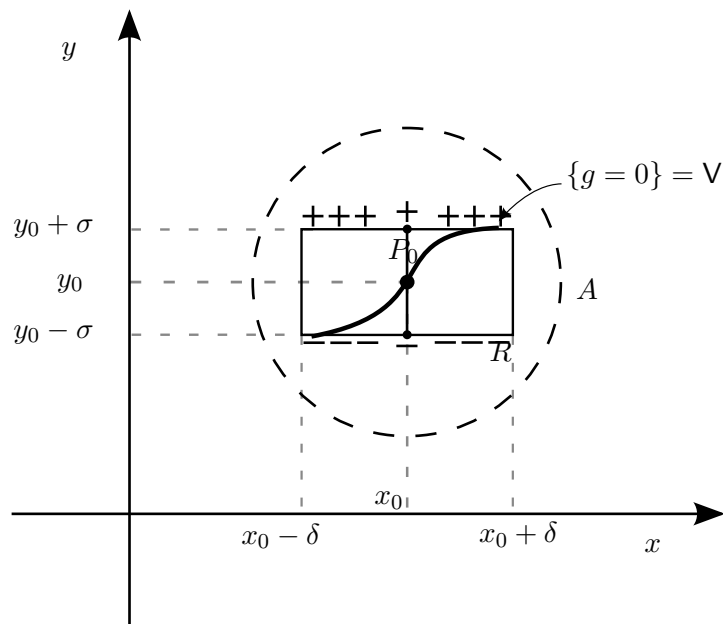
$$(\star) \quad h'(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

DIMOSTRAZIONE:⁽¹⁾ Supponiamo, per esempio, che $\frac{\partial g}{\partial y}(P_0) > 0$. Dal fatto che $g \in C^1(A)$, le derivate prime sono continue, quindi vale la permanenza del segno ⁽²⁾.

⁽¹⁾Si veda anche [Con]

⁽²⁾ **Teorema** (della permanenza del segno). *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua in un punto $P_0 \in A$ con $f(P_0) = 0$. Allora $\exists r_0 > 0$ tale che*

$$f(P) > 0 \quad \forall P \in B(P_0, r_0) \cap A$$



In altre parole, esistono $\delta, \sigma > 0$ tali che

$$(1) \quad R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \subset A$$

(l'inclusione non vale perché A è aperto!) e

$$(2) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in R$$

Consideriamo ora la funzione (di una variabile reale) ottenuta “congelando” x_0 e muovendoci rispetto a y , ossia la funzione

$$[y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \ni y \mapsto g(x_0, y) \in \mathbb{R}$$

Per la (2), tale funzione è strettamente crescente. D'altra parte, per la (i), deve accadere che

$$g(x_0, y_0 - \sigma) < 0 \quad \text{e} \quad g(x_0, y_0 + \sigma) > 0$$

Applicando ancora il teorema della permanenza del segno otteniamo che, pur di diminuire δ , non è restrittivo supporre che

$$(3) \quad g(x, y_0 - \sigma) < 0 \quad \text{e} \quad g(x, y_0 + \sigma) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

3. TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE ED APPLICAZIONI

Da (2) + (3) segue che, essendo

$$[y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \ni y \longmapsto g(x_0, y) \in \mathbb{R}$$

strettamente crescente $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ fissato, possiamo concludere che, per il teorema dei valori intermedi, vale (D1).

Proviamo (D2).

Consideriamo due punti $P' = (x', h(x'))$ e $P = (x, h(x))$ con $x, x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. In particolare, $P, P' \in \mathring{\mathbb{R}}$. Poiché $\mathring{\mathbb{R}}$ è un aperto convesso, possiamo scrivere (per definizione di h)

$$(4) \quad 0 = g(P') - g(P) = \nabla g(\bar{P}) \bullet (P' - P)$$

per un opportuno $\bar{P} \in \overline{P'P}$, la cui esistenza è assicurata dal teorema del valor medio di Lagrange. Dalla (4) segue che

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{P})(x - x') + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{P})(h(x) - h(x')) \quad \forall x, x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

ossia

$$(5) \quad \frac{h(x) - h(x')}{x - x'} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{P})}{\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{P})}$$

Da (2) + (5), segue che

$$\left| \frac{h(x) - h(x')}{x - x'} \right| \leq \left| \frac{\max_R \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} \right\}}{\min_R \left\{ \frac{\partial g}{\partial y} \right\}} \right| = L \in (0, +\infty)$$

In altre parole, abbiamo provato che h è lipschitziana su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, e poiché una funzione lipschitziana è sempre continua, siamo autorizzati a far tendere $x' \rightarrow x$ nella (5) per ottenere (\star) .

■

Osservazione 3.1.1 (i). *Nel caso in cui $\frac{\partial g}{\partial x}(P_0) \neq 0$, con $P_0 = (x_0, y_0)$, $g(P_0) = 0$, allora esistono $\delta, \sigma > 0$ tali che*

$$R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \subset A \quad \forall y \in (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$$

e quindi $\exists! x \doteq h(y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che $g(h(y), y) = 0$. Inoltre $h : (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 e

$$(\star) \quad h'(y) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial g}{\partial x}(h(y), y)} \quad \forall y \in (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$$

Quindi, se $\nabla g(P_0) \neq (0, 0)$ possiamo affermare che il vincolo $V = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$ è localmente il grafico di una funzione $y = h(x)$ oppure $x = h(y)$.

Esercizio. *Provare che l'equazione della retta tangente a V nel punto P_0 è data da*

$$(RT) \quad \nabla g(P_0) \bullet (P - P_0) = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo, ad esempio, che $\frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \neq 0$. Grazie al teorema di Dini, sappiamo che, localmente, V è il grafico di una certa funzione $y = h(x)$. Quindi, la retta tangente a V altro non è che la retta tangente al grafico di h . L'equazione della retta tangente in P_0 è

$$y = h'(x_0)(x - x_0) + y_0 \iff -h'(x_0)(x - x_0) + (y - y_0) = 0$$

che si può riscrivere in forma vettoriale come

$$(-h'(x_0), 1) \bullet (P - P_0) = 0$$

Usando (\star) , l'equazione diventa

$$\left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)}, 1 \right) \bullet (P - P_0) = 0 \iff \left(\frac{\partial g}{\partial x}(P_0), \frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \right) \bullet (P - P_0) = 0$$

ossia

$$\nabla g(P_0) \bullet (P - P_0) = 0$$

Notiamo che, se avessimo supposto $\frac{\partial g}{\partial x}(P_0) \neq 0$, l'equazione sarebbe diventata

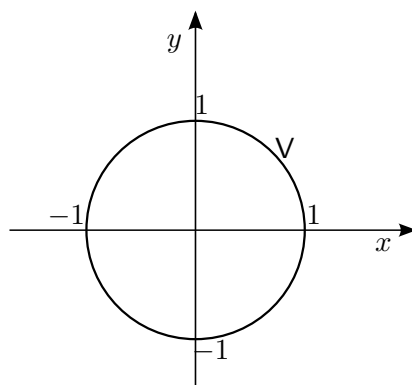
$$(1, h'(y_0)) \bullet (P - P_0) = 0$$

ma avremmo ottenuto lo stesso risultato.

3. TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE ED APPLICAZIONI

■

Esempio. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$



Prendendo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $P_0 = (x_0, y_0)$, abbiamo che $\nabla g(P_0) = 2(x_0, y_0) \neq (0, 0) \forall P_0 \in V$. Quindi, l'equazione della retta tangente è data da

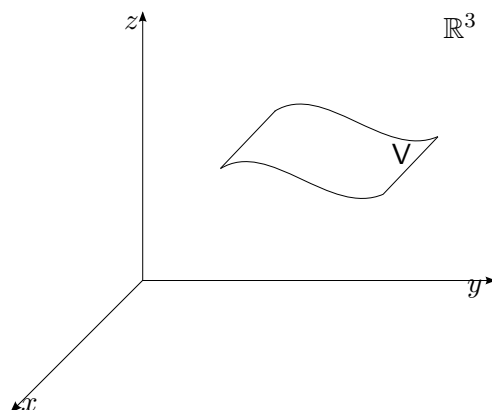
$$\nabla g(P_0) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0 \iff x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

Osservazione 3.1.2 (ii). Se $g(P_0) = 0$ e $\nabla g(P_0) = (0, 0)$ allora non si può concludere nulla.

Esempio. $g(x, y) = x^2 + y^2 \implies V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g = 0\} = \{(0, 0)\}$, che ovviamente non è il grafico di una funzione in un intorno.

3.2 Caso $n = 3$

Consideriamo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$, dove $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Localmente, V è tipicamente una “superficie” di \mathbb{R}^3 .



Si può provare il seguente teorema delle funzioni implicite.

Teorema 3.2.1. *Siano $g \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ e supponiamo che*

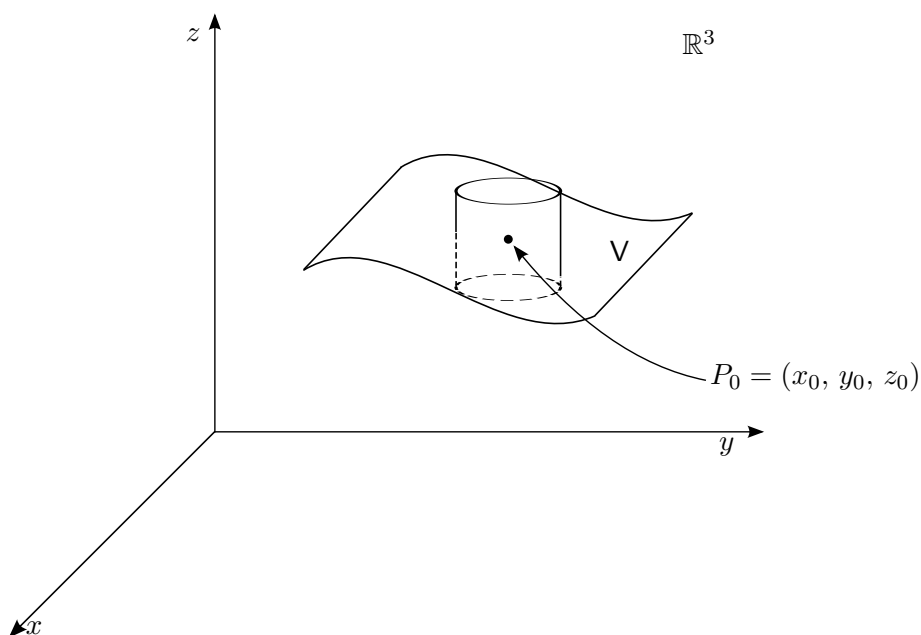
- (i) $g(P_0) = 0$
- (ii) $\frac{\partial g}{\partial z}(P_0) \neq 0$

Allora

(D1) *esistono $\delta > 0$, $\sigma > 0$ tali che il “rettangolo” (o meglio, il cilindro) $B_2((x_0, y_0), \delta) \times [z_0 - \sigma, z_0 + \sigma] \subseteq A$ e $\forall (x, y) \in B_2((x_0, y_0), \delta)$ fissata, $\exists! z \doteq h(x, y) \in (z_0 - \sigma, z_0 + \sigma)$ tale che $g(x, y, h(x, y)) = 0$.*

(D2) *h è di classe C^1 su $B_2((x_0, y_0), \delta)$ e*

$$\begin{aligned}
 (\star) \quad \nabla h(x, y) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \right) = \\
 &= - \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, h(x, y)), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, h(x, y)) \right)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, h(x, y))}
 \end{aligned}$$



3. TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE ED APPLICAZIONI

3.2.1 Applicazione: equazione del piano tangente ad un vincolo $V \subset \mathbb{R}^3$

Supponiamo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ e, preso $P_0 \in V$, supponiamo che $\nabla g(P_0) \neq (0, 0, 0)$. Come nel caso della retta tangente per $n = 2$, si può provare che l'equazione del piano tangente a V nel punto P_0 è data da

$$(RT) \quad \nabla g(P_0) \bullet (P - P_0) = 0$$

dove $P \in V \subset \mathbb{R}^3$.

Esempio (retta tangente ad una sfera unitaria). $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Prendendo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, abbiamo che $\nabla g(P_0) = 2(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0) \forall P_0 \in V$. Quindi, l'equazione della retta tangente è data da

$$\nabla g(P_0) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \iff x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$$

3.3 Caso generale del Teorema delle funzioni implicite

Prima di enunciare il caso generale, vediamo alcune motivazioni che hanno condotto a tale teorema.

Supponiamo di considerare $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k$ numeri reali legati tra loro da k condizioni:

$$(1) \quad \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} x_1, \dots, x_m & = \text{parametri reali} \\ y_1, \dots, y_k & = \text{incognite del sistema (1)} \end{array}$$

Problema: fissati $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, esistono e sono unici $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ verificanti (1)?

Prima di rispondere, facciamo la seguente osservazione.

Osservazione 3.3.1. Supponiamo che il sistema (1) sia lineare, cioè

$$g_j(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = \sum_{h=1}^k a_{jh}(x_1, \dots, x_m) \cdot y_h - b_j(x_1, \dots, x_m)$$

dove

$$\begin{aligned} a_{jh} &: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, & h &= 1, \dots, k \\ b_j &: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, & j &= 1, \dots, k \end{aligned}$$

3.3 Caso generale del Teorema delle funzioni implicite

sono funzioni assegnate. Equivalentemente, utilizzando l'algebra lineare, definiamo

$$a(x) \doteq \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1k}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}(x) & \cdots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}_{k \times k} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_k(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Il sistema (1) si trasforma nel seguente sistema (lineare):

$$(1\text{bis}) \quad a(x) \cdot y = b(x)$$

Se $\det(a(x)) \neq 0$, $\exists! y \in \mathbb{R}^k$ soluzione del sistema (1bis) e vale

$$y = a^{-1}(x) \cdot b(x)$$

Torniamo ora al nostro sistema originario. Denotiamo

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Possiamo vedere

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \equiv \mathbb{R}^n, \quad \text{dove } n = m + k$$

Definiamo

$$g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{tale che} \quad g(x, y) = (g_1(x, y), \dots, g_k(x, y))$$

Quindi, il sistema (1) è equivalente alla condizione

$$(2) \quad g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^k} = \overbrace{(0, \dots, 0)}^{k \text{ volte}}$$

Se denotiamo con

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_k} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

3. TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE ED APPLICAZIONI

osserviamo che la matrice jacobiana di g sarà

$$J(g)(x, y) = \left(\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}_{k \times m}, \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}_{k \times k} \right)_{k \times (k+m) = k \times n}$$

Osservazione 3.3.2. *Come osservato prima, nel caso lineare avremmo avuto*

$$g(x, y) = a(x) \cdot y - b(x)$$

Notiamo che, in particolare, $a(x) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.

Nel tentativo di trovare una soluzione y del sistema, si giunge all'enunciato generale del Teorema di Dini.

Teorema 3.3.1. *Siano $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 , $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Denotiamo con*

$$B_m(x_0, r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^m} < r\}$$

e con

$$B_k(y_0, r) \doteq \{y \in \mathbb{R}^k : \|y - y_0\|_{\mathbb{R}^k} < r\}$$

Supponiamo inoltre che

$$(i) \quad g(P_0) = 0$$

$$(ii) \quad \det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \right) \neq 0$$

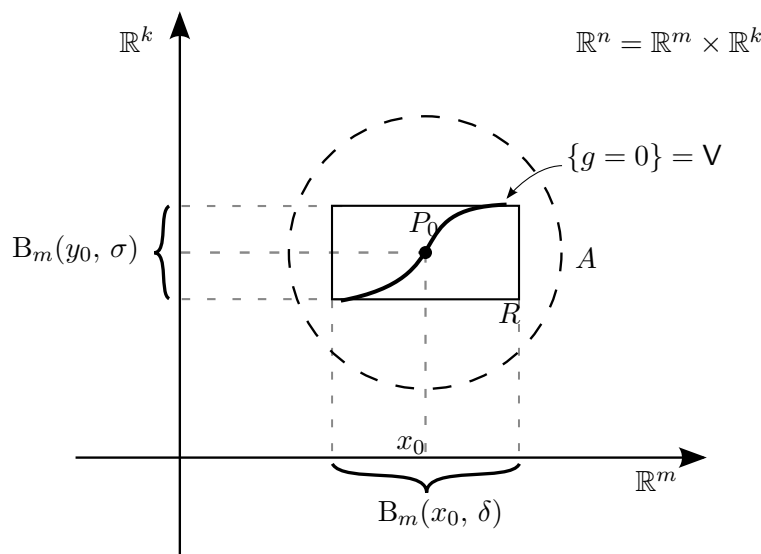
Allora

(D1) *esistono $\delta > 0$, $\sigma > 0$ tali che $B_m(x_0, \delta) \times B_k(y_0, \sigma) \subseteq A$ e $\forall x \in B_m(x_0, \delta)$ fissato, $\exists! y \doteq h(x) \in B_k(y_0, \sigma)$ tale che $g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^k}$.*

(D2) *$h : B_m(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow B_k(y_0, \sigma)$ è di classe C^1 e*

$$(\star) \quad J(h)(x) = - \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x)) \right)^{-1} \bullet \frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))$$

3.3 Caso generale del Teorema delle funzioni implicite



3.3.1 Applicazione: regola dei moltiplicatori di Lagrange nel caso generale

Sia f una funzione da massimizzare/minimizzare su un vincolo $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+k} : g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^k}\} \subset \mathbb{R}^n$ (detto anche *sottovarietà di \mathbb{R}^n*), dove $g : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Vale allora il seguente teorema.

Teorema 3.3.2 (dei moltiplicatori di Lagrange). *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e sia $g : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 . Supponiamo che $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : g(x, y) = 0\}$ e sia $P^0 = (x^0, y^0) \in V$. Se*

$$(i) \quad \exists \max_V f = f(P^0) \quad \text{oppure} \quad \exists \min_V f = f(P^0)$$

$$(ii) \quad \det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(P^0) \right) \neq 0$$

allora esiste un $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0) \in \mathbb{R}^k$ (detto moltiplicatore di Lagrange) per cui il punto $(P^0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^{n+k}$ è un punto stazionario libero della funzione $L : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}$ (detta funzione lagrangiana) definita

$$L(x, y, \lambda) \doteq f(x, y) + \lambda_1 g_1(x, y) + \lambda_2 g_2(x, y) + \dots + \lambda_k g_k(x, y)$$

dove $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+k}$.

3. TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE ED APPLICAZIONI

Capitolo 4

Introduzione alle ODEs (e sistemi di ODEs) non lineari

4.1 Cenni sugli spazi metrici

Definizione 4.1.1.

- (i) Dato un insieme X , si chiama *metrica* su X una funzione $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ verificante

$$(d1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(d2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$(d3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

- (ii) Una successione $(x_n)_n \subset X$ si dice *convergente* in (X, d) se $\exists x \in X$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} d(x_h, x) = 0$$

- (iii) Una successione $(x_n)_n \subset X$ si dice una *successione di Cauchy* se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_h, x_k) < \varepsilon \quad \forall h, k > \bar{h}$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

(iv) Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy $(x_n)_n \subset X$ è convergente, cioè $\exists x \in X$ tale che

$$\exists \lim_{h \rightarrow \infty} d(x_h, x) = 0$$

(v) Siano (X, d) e (Y, p) spazi metrici e sia $T : X \rightarrow Y$. T si dice continua (su X) se, data $(x_n)_n \subset X$ con $\lim_{h \rightarrow \infty} x_h = x$ (in X) $\implies \lim_{h \rightarrow \infty} T(x_h) = T(x)$ (in Y).

Teorema 4.1.1 (delle contrazioni o del punto fisso, di BANACH - CACCIOPOLI). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \rightarrow X$. Supponiamo che T sia una contrazione, cioè $\exists \alpha \in (0, 1)$ tale che

$$(C) \quad d(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Allora esiste un unico punto fisso $\bar{x} \in X$ tale che $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo prima l'unicità e poi l'esistenza.

Unicità

Supponiamo per assurdo che esistano due punti fissi $\bar{x}, x^* \in X$ tali che $\bar{x} \neq x^*$ e

$$(1) \quad T(\bar{x}) = \bar{x}$$

$$(2) \quad T(x^*) = x^*$$

Dalla (C), abbiamo che

$$\underline{d(x^*, \bar{x})} \stackrel{(1)+(2)}{=} d(T(x^*), T(\bar{x})) \leq \underline{\alpha \cdot d(x^*, \bar{x})}$$

da cui segue che

$$(1 - \alpha) \cdot d(x^*, \bar{x}) \leq 0$$

Poiché $\alpha \neq 1$ e, in particolare, $\alpha < 1$, possiamo dividere ambo i membri della disuguaglianza per $(1 - \alpha) > 0$, ottenendo

$$d(x^*, \bar{x}) \leq 0$$

Ma $d \geq 0$ per definizione, quindi in definitiva

$$d(x^*, \bar{x}) = 0$$

Utilizzando la proprietà (d1), ne segue che $x^* = \bar{x}$, assurdo per le ipotesi fatte. Questo prova la tesi.

Esistenza

Fissiamo $x_0 \in X$ e definiamo una successione $(x_h)_h \in X$ per ricorrenza nel modo seguente:

$$\begin{aligned} x_0 &\doteq x_0 && \text{per } h = 0 \\ x_1 &\doteq T(x_0) && \text{per } h = 1 \\ x_2 &\doteq T(x_1) && \text{per } h = 2 \\ &\vdots && \\ x_{h+1} &\doteq T(x_h) && (\star) \end{aligned}$$

Proviamo che $(x_h)_h$ è convergente, cioè $\exists \bar{x} \in X$ tale che

$$(1) \quad \exists \lim_{h \rightarrow \infty} x_h = \bar{x} \quad (\text{in } X)$$

Per provare la (1), basta provare che $(x_h)_h$ è una successione di Cauchy⁽¹⁾ in (X, d) , cioè $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h}$ tale che

$$d(x_h, x_k) < \varepsilon \quad \forall h, k > \bar{h}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \underline{d(x_{h+1}, x_h)} &\stackrel{(\star)}{=} d(T(x_h), T(x_{h-1})) \stackrel{(C)}{\leq} \alpha \cdot d(x_h, x_{h-1}) = \\ &= \alpha \cdot d(T(x_{h-1}), T(x_{h-2})) \leq \alpha^2 \cdot d(x_{h-1}, x_{h-2}) = \\ &= \dots // \dots \leq \underline{\alpha^h \cdot d(x_1, x_0)} \end{aligned}$$

ossia

$$(2) \quad d(x_{h+1}, x_h) \leq \alpha^h \cdot d(x_1, x_0) \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

Siano $k, h \in \mathbb{N}$, $k < h$. Vale

$$\begin{aligned} d(x_k, x_h) &\stackrel{(d3)}{\leq} \sum_{i=k}^{h-1} d(x_{i+1}, x_i) \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{i=k}^{h-1} \alpha^i \cdot d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0) \sum_{i=k}^{h-1} \alpha^i \stackrel{(2)}{=} \\ &= d(x_1, x_0) \frac{\alpha^k - \alpha^h}{1 - \alpha} \leq d(x_1, x_0) \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Dunque abbiamo provato che

⁽¹⁾Infatti, in uno spazio metrico *completo*, una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.

⁽²⁾È una serie geometrica.

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

$$(3) \quad d(x_k, x_h) \leq \frac{d(x_1, x_0)}{1-\alpha} \alpha^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall h > k$$

Quindi, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon)$ tale che

$$(4) \quad d(x_k, x_h) < \varepsilon \quad \forall h > k > \bar{h}$$

o, in altre parole, $\forall \varepsilon > 0$ riusciamo sempre a trovare il più piccolo \bar{h} (perché $\frac{d(x_1, x_0)}{1-\alpha} \alpha^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$) per cui

$$d(x_{\bar{h}}, x_h) \leq \frac{d(x_1, x_0)}{1-\alpha} \alpha^{\bar{h}} < \varepsilon$$

e di conseguenza prendendo qualsiasi $h > k > \bar{h}$, si verifica la (4).

Avendo provato la (1), proviamo che \bar{x} è un punto fisso di T per completare la dimostrazione. Da (1) segue che anche la successione $(x_{h+1})_h$ è convergente a $\bar{x} \in X$, poiché è una successione estratta da $(x_h)_h$. Inoltre, poiché T è lipschitziana con costante di Lipschitz $\alpha < 1$ e ogni funzione lipschitziana è continua, T è continua. D'altra parte, dalla (\star) segue che (utilizzando la continuità di T):

$$\begin{array}{ccc} x_{h+1} & = & T(x_h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{x} & = & T(\bar{x}) \end{array}$$

■

Con l'idea di applicare il Teorema del punto fisso allo spazio di funzioni $C^0([a, b])$, consideriamo il seguente lemma.

Lemma 4.1.1.

(i) Sia $f \in C^0([a, b])$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e definiamo

$$\|f\|_\infty \doteq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \in [0, +\infty)$$

(esiste per il teorema di Weierstrass). Allora $\|\cdot\|_\infty$ è una norma in $C^0([a, b])$.

(ii) Siano $f, g \in C^0([a, b])$. Definiamo

$$d(f, g) \doteq \|f - g\|_\infty$$

Allora $(C^0([a, b]), d)$ è uno spazio metrico completo.

DIMOSTRAZIONE:

(i) Le proprietà

$$(N1) \quad \|f\|_\infty = 0 \iff f \equiv 0 \text{ su } [a, b]$$

$$(N2) \quad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty \quad \forall f, g \in C^0([a, b])$$

sono banali. La proprietà

$$(N3) \quad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad f, g \in C^0([a, b])$$

discende dalla disuguaglianza triangolare per la norma $|\cdot|$ in \mathbb{R} .

(ii) Dobbiamo provare che, data $(f_h)_h \subset (C^0([a, b]), d_\infty)$ successione di Cauchy, esiste $f \in C^0([a, b])$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} d_\infty(f_h, f) \doteq \lim_{h \rightarrow \infty} \|f_h - f\|_\infty = 0$$

Per ipotesi $(f_h)_h$ è di Cauchy, cioè $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1) \quad \|f_h - f_k\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k > h > \bar{h}$$

Dalla (1) e dalla definizione di norma a ∞ , segue che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$(2) \quad |f_h(t) - f_k(t)| < \varepsilon \quad \forall k > h > \bar{h}, \quad \forall t \in [a, b]^{(3)}$$

Fissiamo $t \in [a, b]$ e consideriamo la successione $(f_h(t))_h \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Dalla (2) discende che $(f_h(t))_h$ è una successione di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, che sappiamo essere uno spazio metrico completo. Dunque (poiché ogni successione di Cauchy è convergente in uno spazio metrico completo),

$$\exists \lim_{h \rightarrow \infty} f_h(t) \doteq f(t) \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

Abbiamo quindi costruito una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(t) \doteq \lim_{h \rightarrow \infty} f_h(t) \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

Per concludere, basta provare che

⁽³⁾ Dalla definizione otteniamo in realtà che $\max_{t \in [a, b]} |f_h(t) - f_k(t)| < \varepsilon$. Ma se tale proprietà vale per il massimo, allora vale anche per ogni t .

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

$$(3) \quad f \in C^0([a, b])$$

$$(4) \quad \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$$

Fissiamo h nella (2) e facciamo tendere $k \rightarrow \infty$, ottenendo che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$(5) \quad |f_h(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \forall h > \bar{h}, \quad \forall t \in [a, b]$$

In altre parole, f è uniformemente⁽⁴⁾ vicina ad una funzione f_h continua per ipotesi. Proviamo ora che, fissato $t_0 \in [a, b]$, f è continua in t_0 , cioè

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$$

Fissati $t, t_0 \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{N}$ vale che

$$(6) \quad |f(t) - f(t_0)| = |(f(t) - f_h(t)) + (f_h(t) - f_h(t_0)) + (f_h(t_0) - f(t_0))| \leq |f(t) - f_h(t)| + |f_h(t) - f_h(t_0)| + |f_h(t_0) - f(t_0)|$$

Dalla (5) e dalla (6) segue che, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \bar{h} = \bar{h}(\varepsilon)$ tale che

$$(7) \quad |f(t) - f(t_0)| \leq 2\varepsilon + |f_h(t) - f_h(t_0)| \quad \forall h > \bar{h}, \quad \forall t, t_0 \in [a, b]$$

Scegliendo $h^* = \bar{h} + 1$, dalla continuità di f_{h^*} in t_0 segue che, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_0 > 0$ tale che

$$(8) \quad |f_{h^*}(t) - f_{h^*}(t_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0) \cap [a, b]$$

Da (7) + (8), concludiamo che $\forall t_0 \in [a, b]$, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$ tale che

$$|f(t) - f(t_0)| \leq 3\varepsilon \quad \forall t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0) \cap [a, b]$$

\Updownarrow_{def}

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$$

⁽⁴⁾Nel senso che h non dipende da t .

La proprietà (4) segue banalmente dalla (5).

■

Osservazione 4.1.1. In $(C^0([a, b]), d)$ fallisce la proprietà che, data $(f_h)_h$ una successione limitata, esiste una sua sottosuccessione convergente (teorema di Bolzano-Weierstrass).

4.2 ODEs

Esempio (II Legge della Dinamica di Newton). La II Legge della Dinamica è spesso espressa nella forma

$$(IILN) \quad \underline{F} = m\underline{a}$$

Tuttavia, è possibile anche una sua formalizzazione tramite le ODEs⁽⁵⁾:

$$x = x(t) \quad \implies \quad \ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad \implies \quad F(t, x, \dot{x}) = m\ddot{x}$$

In \mathbb{R}^3 , $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ descrive il vettore posizione di un punto materiale di massa m , mentre $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la forza applicata al punto stesso. Se ad un certo istante t_0 $x(t_0) = P_0$, qual'è l'espressione di $x(t)$ ($t > t_0$)?

In tal caso, (IILN) è equivalente al sistema di 3 ODEs in 3 incognite

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_1(t, x, \dot{x}) \\ m\ddot{x}_2 = F_2(t, x, \dot{x}) \\ m\ddot{x}_3 = F_3(t, x, \dot{x}) \end{cases}$$

Restringiamoci, per il momento, allo studio di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma *normale*, cioè

$$(E) \quad x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{n-1})$$

dove $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, A aperto, $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo di \mathbb{R} .

⁽⁵⁾ “ODE(s)” = “Ordinary Differential Equation(s)”, abbreviate anche “EDO” in italiano (“Equazioni Differenziali Ordinarie”)

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

Esempio (Equazione del pendolo). *L'equazione del pendolo semplice è un'equazione del secondo ordine non lineare, nella forma*

$$\ddot{\vartheta} = -\omega^2 \sin(\vartheta)$$

La sua soluzione - ovviamente - non è banale a causa della non linearità.

Definizione 4.2.1 (di soluzione di (E)). *Si chiama soluzione di (E) una funzione $x = x(t) \in C^n(I)$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo tale che*

$$(S_1) \quad (t, x(t), x'(t), \dots, x^{n-1}(t)) \in A \quad \forall t \in I$$

$$(S_2) \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{n-1}(t)) \quad \forall t \in I$$

Una soluzione di (E) si dice anche curva integrale di (E).

Problema: determinare l'integrale generale di (E), cioè l'insieme delle soluzioni di (E).

4.2.1 Caso $n = 1$

Restringiamoci per il momento alle ODEs del I ordine, ossia consideriamo il caso $n = 1$.
L'equazione (E) si riduce a

$$(E) \quad x' = f(t, x)$$

Definizione 4.2.2 (di soluzione di (E) per $n = 1$). *Si chiama soluzione di (E) una funzione $x = x(t) \in C^1(I)$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo tale che*

$$(S_1) \quad (t, x(t)) \in A \quad \forall t \in I$$

$$(S_2) \quad x'(t) = f(t, x(t)) \in A \quad \forall t \in I$$

Una soluzione di (E) si dice anche curva integrale di (E).

Abbiamo già considerato il caso in cui l'equazione (E) è *lineare*, cioè

$$f(t, x) = a(t) \cdot x + b(t)$$

dove $a, b \in C^0(I)$ assegnati, $I \subseteq \mathbb{R}$ fissato. a, b sono anche detti *coefficienti dell'equazione*. In tal caso, vale il seguente teorema.

Teorema 4.2.1. Siano $a, b \in C^0(I)$ assegnati su un fissato intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, e siano $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che $(t_0, x_0) \in A$. Il Problema di Cauchy (o problema ai valori iniziali) è della forma

$$(PC) \begin{cases} x' = f(t, x) & (\text{equazione differenziale}) \\ x(t_0) = x_0 & (\text{condizione iniziale}) \end{cases}$$

dove $f(t, x) = a(t) \cdot x + b(t)$. Allora $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione di (PC) se e solo se

$$x(t) = \varphi(t) \cdot (x_0 + \rho(t)), \quad t \in I$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\doteq e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \\ \rho(t) &\doteq \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} ds \end{aligned}$$

Osservazione 4.2.1 (importante). Le soluzioni di (PC) soddisfano le seguenti proprietà:

- (i) assegnati i coefficienti a, b ed i dati iniziali, vi è un'unica soluzione globale di (PC), cioè la soluzione $x : A \rightarrow \mathbb{R}$ è definita dove sono definiti i coefficienti a, b ;
- (ii) la soluzione di (PC) può essere rappresentata in modo esplicito rispetto ai coefficienti e ai dati iniziali.

Consideriamo ora il caso più generale

$$(PC) \begin{cases} x' = f(t, x) & (\text{equazione (E)}) \\ x(t_0) = x_0 & (\text{condizione iniziale (CI)}) \end{cases}$$

dove f è una funzione C^1 generica. La soluzione di (PC) esiste? E se esiste, è unica come nel caso lineare?

Per rispondere, enunciamo il seguente (fondamentale) teorema.

Teorema 4.2.2 (di esistenza ed unicità locale di (PC), CAUCHY - LIPSCHITZ). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^1(A)$ e $(t_0, x_0) \in A$ assegnato. Allora esiste un'unica soluzione di (PC) definita su un intervallo $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$

$$x : (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\delta_0 \in \mathbb{R})$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

DIMOSTRAZIONE: Dividiamo la dimostrazione del teorema in tre passi.

Passo 1. Sia $\delta > 0$ (arbitrario). Allora

$$\begin{array}{c}
 x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ è soluzione di (PC)} \\
 \Updownarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 x \in C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \\
 G_x \subseteq A^{(6)} \\
 \text{(EqInt)} \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE:

(\Downarrow) Sia $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ soluzione di (PC). Per definizione,

$$x \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \subset C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$$

$$G_x \subset A$$

Inoltre, sempre per definizione,

$$(E) \quad x'(s) = f(s, x(s)) \quad \forall s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Integrando l'equazione (E) su $[t_0, t]$, $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, otteniamo che:

$$\begin{array}{c}
 \int_{t_0}^t x'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \\
 \parallel \\
 x(t) - x(t_0) \\
 \parallel^{(CI)} \\
 x(t) - x_0
 \end{array}$$

cioè

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$$

(\Uparrow) Sia $x \in C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ e supponiamo che

$$G_x \subseteq A$$

⁽⁶⁾Ricordiamo che con la notazione G_x indichiamo il grafico di x .

e

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

La proprietà $G_x \subseteq A$, dunque, è gratis. Anche la (CI) è banale, poiché sostituendo t_0 a t , otteniamo

$$\underline{x(t_0)} = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds = \underline{x_0}$$

Osserviamo che la funzione

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \ni s \mapsto f(s, x(s))$$

è continua (perché composizione di funzioni continue). Per il teorema fondamentale del calcolo, quindi,

$$x \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \quad \text{e vale (E)}$$

■

Passo 2. Esistono $\delta_1, \sigma_1 > 0$ tali che

$$(\star) \quad R = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \times [x_0 - \sigma_1, x_0 + \sigma_1] \subset A$$

e $\exists L > 0$ costante di Lipschitz tale che

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v| \quad \forall \begin{cases} t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \\ u, v \in [x_0 - \sigma_1, x_0 + \sigma_1] \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE: Essendo A aperto e $(t_0, x_0) \in A$, esistono $\delta_1, \sigma_1 > 0$ tali che valga (\star) . Fissando (o “congelando”) $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$, la f diventa funzione di una sola variabile. Quindi, se $u, v \in [x_0 - \sigma_1, x_0 + \sigma_1]$, vale il teorema del valor medio di Lagrange (in una variabile), cioè

$$|f(t, u) - f(t, v)| = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, z) \right) \cdot (u - v)$$

per un opportuno z compreso tra u e v . Inoltre, possiamo scrivere che

$$|f(t, u) - f(t, v)| = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, z) \right) \cdot (u - v) \leq \max_R \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |u - v|$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

$\forall t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1], \quad \forall u, v \in [x_0 - \sigma_1, x_0 + \sigma_1]$. Definendo

$$L \doteq \max_R \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$$

segue la tesi. ■

Passo 3. Proviamo che, se $0 < \delta_0 < \min \left\{ \delta_1, \frac{\sigma_1}{M}, \frac{1}{L} \right\}$ con $M \equiv \max_R |f|$, allora esiste un'unica soluzione $x : (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di (PC).

DIMOSTRAZIONE: Definiamo

$$I_0 \doteq [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \quad \text{e} \quad X \doteq \{x \in C^0(I_0) : \|x - x_0\|_\infty \leq \sigma_1\}$$

Ricordiamo che, per definizione, se $x \in C^0(I_0)$,

$$\|x - x_0\|_\infty \doteq \max_{t \in I_0} |x(t) - x_0|$$

Osserviamo inoltre che

$$x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad G_x \subseteq R$$

Notando che

$$X \subset (C^0(I_0), d_\infty)$$

è un insieme chiuso (per costruzione), proviamo che (X, d_∞) è uno spazio metrico completo. Infatti, sia $(x_h)_h \subset (X, d_\infty)$ una successione di Cauchy. In particolare, $(x_h)_h$ è una successione di Cauchy in $(C^0(I_0), d_\infty)$. Dal lemma 4.1.1, segue che $\exists x \in C^0(I_0)$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} d_\infty(x_h, x) = 0$$

Essendo X chiuso in $(C^0(I_0), d_\infty)$, $x \in X$. Definiamo l'applicazione

$$X \ni y \mapsto T(y)(t) \doteq x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in I_0$$

Proviamo che:

(1) $T : X \longrightarrow X$

(2) T è una contrazione, cioè $\exists \alpha \in (0, 1)$ tale che

$$d_{\infty}(T(y), T(z)) \leq \alpha \cdot d_{\infty}(y, z) \quad \forall y, z \in X$$

Proviamo (1). Sia $y \in X$; vale

$$|T(y)(t) - x_0| = \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - x_0 \right| \stackrel{(7)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t |f(s, y(s))| ds \right|$$

Come osservato prima, poiché $y \in X \subset C^0(I_0)$, vale che

$$y \in X \iff G_y \subseteq R$$

Quindi, possiamo scrivere

$$\left| \int_{t_0}^t |f(s, y(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta_0 \leq \sigma_1$$

Dunque, vale che

$$\|T(y) - x_0\|_{\infty} \leq \sigma_1$$

ossia, per definizione di X , $T(y) \in X$. Da ciò segue la tesi.

Proviamo (2), cioè che $\exists \alpha \in (0, 1)$ tale che

$$d_{\infty}(T(y), T(z)) \leq \alpha \cdot d_{\infty}(y, z) \quad \forall y, z \in X$$

Fissiamo $y, z \in X$. Allora

$$\begin{aligned} |T(y)(t) - T(z)(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds \right| = \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \right| \stackrel{\text{Passo 2}}{\leq} \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \cdot (y(s) - z(s)) ds \right| \stackrel{(8)}{\leq} \\ &\leq L \cdot |t - t_0| \cdot d_{\infty}(y, z) \leq L \cdot \delta_0 \cdot d_{\infty}(y, z) \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ Sia f una funzione di x . Definendo $f^+ = \max\{f, 0\} \geq 0$ e $f^- = -\min\{f, 0\} \geq 0$, abbiamo che $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Se f è integrabile, allora (applicando la disuguaglianza triangolare):

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) dx \right| &= \left| \int f^+(x) dx - \int f^-(x) dx \right| \leq \left| \int f^+(x) dx \right| + \left| \int f^-(x) dx \right| = \\ &= \int f^+(x) dx + \int f^-(x) dx = \int (f^+(x) + f^-(x)) dx = \int |f(x)| dx \end{aligned}$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

Per ipotesi, abbiamo che $0 < L \cdot \delta_0 < 1$, quindi definiamo

$$\alpha \doteq L \cdot \delta_0$$

da cui segue la tesi. Da (1) + (2), applicando il teorema del punto fisso, $\exists! \bar{x} \in X$ tale che

$$T(\bar{x}) = \bar{x} \quad \stackrel{def}{\iff} \quad \exists \bar{x} \in C^0(I_0) \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} G_{\bar{x}} \subseteq R \\ x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds = \bar{x}(t) \end{cases}$$

$\forall t \in I_0$. Dal Passo 1 segue la tesi.

■

■

Osservazione 4.2.2 (importante). *Abbiamo provato l'esistenza e l'unicità (locale) di (PC) nell'ipotesi che $f \in C^1(A)$! Se f fosse soltanto C^0 , troveremmo invece un'infinità di soluzioni!*

Dalla dimostrazione, però, si evince che vi è ancora l'esistenza ed unicità locale di (PC) sotto le seguenti ipotesi:

(i) $\exists R = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \times [x_0 - \sigma_1, x_0 + \sigma_1] \subset A$ e $\exists L > 0$ tale che

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L \cdot |u - v| \quad \forall \begin{cases} t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \\ u, v \in [x_0 - \sigma_1, x_0 + \sigma_1] \end{cases}$$

(ii) $f \in C^0(R)$

ossia f è lipschitziana.

Esempio.

$$(PC) \begin{cases} x' = |x| \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

L'equazione non è lineare e $|x| \notin C^1$. Ma $|x|$ è lipschitziana, quindi vale ancora il teorema di esistenza ed unicità locale di (PC).

⁽⁸⁾ $|y(s) - z(s)| \leq d_\infty(y, z) \doteq \max_X |y(s) - z(s)|$

Osservazione 4.2.3.

- (i) Il teorema afferma l'esistenza e l'unicità di (PC) in un intervallo centrato in t_0 senza precisare l'ampiezza di δ_0 . In questo senso parliamo di soluzione locale di (PC).
- (ii) Si può provare che, anche se

$$A \equiv \mathbb{R}^2, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

può accadere che la soluzione x non sia definita su tutto \mathbb{R} (Ex. 6, Foglio 7).

Inoltre, i dati iniziali influenzano il “tempo di vita” di x .

Esempio.

$$(PC) \begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

$$\underline{x_0 = 0}$$

La soluzione è banalmente $x(t) = 0$.

$$\underline{x_0 \neq 0}$$

Il problema - in questo caso - si può risolvere col metodo delle variabili separate. Possiamo infatti vederlo nella forma

$$(PC) \begin{cases} x' = g(t) f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dove $g(t) = 1$ e $f(x) = x^2$. Separiamo le variabili e integriamo membro a membro, osservando che, poiché $x = x(t) \Rightarrow dx = x' dt$:

$$\frac{x'}{f(x)} = g(t) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{x'}{f(x)} dt = \int_0^t g(t) dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^t g(t) dt$$

da cui otteniamo

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} = t$$

Risolvendo per x , abbiamo infine

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

Esempio (Equazione di Riccati).

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = x^2 + t^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

In questo caso, siamo solo in grado di dire (grazie al Teorema di esistenza ed unicità locale) che esiste localmente un'unica soluzione di (PC).

Osservazione 4.2.4 (Esercizio 3, Foglio 7). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^4$, $f \in C^1(A)$, $x_i : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, k$) soluzioni di (E). Allora vale che

$$G_{x_1} \cap G_{x_2} \quad \text{oppure} \quad G_{x_1} = G_{x_2}$$

Teorema 4.2.3 (di esistenza ed unicità della soluzione massimale di (PC)). Nelle stesse ipotesi del Teorema di esistenza ed unicità locale di (PC), esiste un'unica soluzione massimale di (PC), ossia esiste un'unica x_{\max} tale che:

(M₁) I_{\max} è un intervallo aperto e $x_{\max} : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione di (PC).

(M₂) Se $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo di \mathbb{R} è una qualunque soluzione di (PC), allora $I \subseteq I_{\max}$ e $v(t) = x_{\max}(t) \quad \forall t \in I$.

DIMOSTRAZIONE: Denoteremo con \mathcal{M} l'insieme di tutte le soluzioni di (PC) definite su intervalli aperti. Più precisamente,

$$v \in \mathcal{M} \xLeftrightarrow{\text{def}} v : I_v = (a_v, b_v) \rightarrow \mathbb{R} \text{ è soluzione di (PC)}$$

dove $-\infty < a_v < b_v < +\infty$. Grazie al Teorema di esistenza ed unicità locale di (PC), sappiamo che $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Dall'osservazione precedente segue che, se $v, w \in \mathcal{M}$,

$$(1) \quad \text{se } I_v \cap I_w \neq \emptyset \quad \implies \quad v(t) = w(t) \quad \forall t \in I_v \cap I_w$$

Definiamo

$$a \doteq \inf\{a_v : v \in \mathcal{M}\} \in [-\infty, +\infty)$$

$$b \doteq \sup\{b_v : v \in \mathcal{M}\} \in (-\infty, +\infty]$$

Definiamo $I_{\max} \doteq (a, b)$. $\forall t \in I_{\max}$ fissato, esiste per costruzione $v \in \mathcal{M}$ tale che $t \in I_v = (a_v, b_v)$. Definiamo quindi

$$x_{\max}(t) \doteq v(t) \quad \forall t \in I_{\max}$$

notando che, per la (1), $x_{\max} : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita⁽⁹⁾.

Proviamo che vale (M₁). Per costruzione, I_{\max} è aperto e $(t, v(t)) = (t, x_{\max}(t)) \in A \quad \forall t \in I_{\max}$. Inoltre, se $t \in I_v$, $\underline{x'_{\max}}(t) = v'(t) = f(t, v(t)) = \underline{f(t, x_{\max}(t))}$. Quindi, x_{\max} è banalmente soluzione di (PC).

Proviamo che vale (M₂). Sia $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ una soluzione di (PC) con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo di estremi α, β . Per costruzione, $I = (\alpha, \beta) \subset (a, b) = I_{\max}$. Per concludere, basta provare che

$$(2) \quad \{\alpha, \beta\} \cap \{a, b\} = \emptyset$$

Supponiamo per assurdo che $b = \beta$. Allora, per definizione, $(\beta, v(\beta)) \in A$. Consideriamo il problema di Cauchy

$$(PC^*) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\beta) = x_\beta \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza e unicità locale di (PC), esiste un $\delta_0 > 0$ e un'unica soluzione $v^* : (\beta - \delta_0, \beta + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ di (PC*). Definiamo $v^{**} : (\alpha, \beta + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$v^{**} = \begin{cases} v(t) & \alpha < t \leq \beta \\ v^*(t) & \beta < t < \beta + \delta_0 \end{cases}$$

Allora v^{**} è una soluzione di (PC) definita su un intervallo aperto, ma $v^{**} \notin \mathcal{M}$. Poiché per costruzione \mathcal{M} è l'insieme di tutte le soluzioni di (PC) definite su intervalli aperti, siamo giunti ad un assurdo. Quindi vale (M₂).

■

Esempio. Riprendiamo l'esempio precedente

$$(PC) \quad \begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

⁽⁹⁾ Se t appartiene anche a I_w , dove $w \in \mathcal{M}$ qualunque, per la (1) $v(t) = w(t)$, e quindi il valore di $x_{\max}(t)$ non dipende dalla funzione v scelta.

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

Avevamo già calcolato la soluzione al variare della condizione iniziale. Vediamo ora come varia l'intervallo aperto I sul quale è definita la soluzione al variare di x_0 ⁽¹⁰⁾:

$$I = \begin{cases} \mathbb{R} & x_0 = 0, \quad x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \left(-\infty, \frac{1}{x_0}\right) & x_0 > 0, \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \\ \left(\frac{1}{x_0}, +\infty\right) & x_0 < 0, \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \end{cases}$$

Chiaramente, in questo caso, $I_{\max} = \mathbb{R}$ e di conseguenza $x_{\max} = 0$.

4.3 Sistemi di ODEs del primo ordine e ODEs di ordine

n

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, e consideriamo $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua ($i = 1, \dots, n$):

$$(SE) \begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

dove (x_1, x_2, \dots, x_n) sono le (funzioni) incognite del sistema.

Definizione 4.3.1. Si chiama soluzione di (SE) una famiglia di n funzioni

$$x_i : I \rightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n)$$

con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale che

- (i) x_i è derivabile $\forall i = 1, \dots, n$
- (ii) $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in A \quad \forall t \in I$
- (iii) $\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad \forall t \in I$

⁽¹⁰⁾ Se definissimo $I = \left(-\infty, \frac{1}{x_0}\right)$ per $x_0 < 0$ e $\left(\frac{1}{x_0}, +\infty\right)$ per $x_0 > 0$, escluderemmo dal dominio il valore $t = 0$, ossia la nostra condizione iniziale.

Se prendiamo $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, allora

$$(SE) \quad F(t, X) = (f_1(t, X), \dots, f_n(t, X))$$

$$\Updownarrow$$

$$X' = F(t, X)$$

Dunque $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e il sistema (SE) di n ODEs di trasforma nell'“equazione”

$$(SE^*) \quad X' = F(t, X)$$

Fissato $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ e preso $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $(t_0, X^0) \in A$, possiamo considerare il problema di Cauchy per un sistema di ODEs del primo ordine:

$$(PCS) \quad \begin{cases} X' = F(t, X) & (SE) \\ X(t_0) = X^0 & (CI) \end{cases}$$

Vale allora il seguente teorema.

Teorema 4.3.1 (di esistenza ed unicità locale per sistemi di ODEs del primo ordine).
Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, $(t_0, X^0) \in A$ fissato, e $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$. Allora esiste un intervallo $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$ in cui è definita un'unica soluzione (o curva integrale di F) di (PCS).

DIMOSTRAZIONE: (Si veda [Giu]).

■

Ritorniamo ad una ODE di ordine n , in forma normale:

$$(E) \quad x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{n-1})$$

dove $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Consideriamo il problema di Cauchy per (E):

$$(PCE) \quad \begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{n-1}) & (E) \\ x(t_0) = x_1^0, x'(t_0) = x_2^0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0 & (CI) \end{cases}$$

dove $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$ fissato. Vale il seguente corollario.

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

Corollario 4.3.1 (del teorema di esistenza e unicità locale per una ODE di ordine n in forma normale). *Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, $(t_0, X^0) \in A$ fissato, e $f \in C^1(A)$. Allora esiste un intervallo $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$ sul quale è definita un'unica soluzione di (PCE).*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definita nel modo seguente:

$$X = (x_1, \dots, x_n)$$

$$(\star) \quad F(t, X) = (x_2, x_3, \dots, x_n, f(t, X))$$

Osserviamo che:

- (i) se $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione di (PCE) allora, per la (E) e le (CI) di (PCE), la curva integrale

$$X(t) = (x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad t \in I$$

è una soluzione di (PCS) con F definita da (\star) ;

- (ii) se $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una soluzione di (PCS) con F data da (\star) , e $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ è una soluzione di (PCS), allora

$$x \doteq x_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una soluzione di (PCE).

Dalle osservazioni e dal teorema di esistenza ed unicità locale per sistemi di ODEs del primo ordine, segue la tesi. ■

Osservazione 4.3.1. *Ragionando come nel caso di una ODE del primo ordine, si può provare un teorema di esistenza ed unicità della soluzione massimale di (PCS). In particolare, si ottiene un teorema di esistenza ed unicità della soluzione massimale di (PCE).*

4.3.1 Sistemi di ODEs (del primo ordine) autonomi

Lo spunto fisico e il filo conduttore del nostro discorso sarà da qui in poi l'equazione del pendolo semplice

$$(EP) \quad x'' + \omega^2 \sin(x) = 0 \quad \left(\omega^2 = \frac{g}{l} \right)$$

di cui vogliamo studiare il problema di Cauchy associato:

$$(PCEP) \quad \begin{cases} x'' + \omega^2 \sin(x) = 0 \\ x(t_0) = x_1 \\ x'(t_0) = x_2 \end{cases} \quad (EP)$$

Osserviamo subito che non esiste un integrale “esplicito” di (PCEP). Pertanto, siamo interessati ad uno studio *qualitativo* globale della soluzione di (PCEP). In base alla teoria introdotta sulle ODEs possiamo affermare che, comunque dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\exists x_{\max} : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di (PCEP).

Problema: tracciare un grafico qualitativo di x_{\max} .

Abbiamo già visto che (PCEP) può essere trasformato in un sistema di ODEs del primo ordine denotando con $y \doteq x'$, e ottenendo di conseguenza

$$(SP) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 \sin(x) \end{cases}$$

Con la stessa notazione usata finora, possiamo definire

$$F(x, y) \doteq (y, -\omega^2 \sin(x))$$

per scrivere (SP) come

$$(SP) \quad (x, y)' = F(x, y)$$

Notiamo che (SP) non dipende dalla variabile t , come era accaduto finora con gli altri sistemi. In tale senso, si dice *autonomo*. Più precisamente, diamo la seguente definizione.

Definizione 4.3.2.

- (i) Una ODE di ordine n in forma normale si dice autonoma se è della forma

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

$$(E) \quad x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

dove $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- (ii) *Un sistema di ODEs (in forma normale) del primo ordine si dice autonomo se è della forma*

$$(S) \quad X' = F(X)$$

dove $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, cioè F non dipende da t .

Ci limiteremo a trattare nel seguito sistemi di ODEs con $n = 1, 2$, cioè

$(n = 1)$

$$(E) \quad x' = f(x)$$

$(n = 2)$

$$(S) \quad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{dove } f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ assegnate}$$

Osserviamo che, nel caso $n = 2$, una soluzione di (S) è una curva $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

Nel caso del pendolo, abbiamo

$$(S) = (SP) \quad \begin{cases} x' = y = f(x, y) \\ y' = -\omega^2 \sin(x) = g(x, y) \end{cases}$$

Osservazione 4.3.2 (Proprietà di un sistema autonomo - Esercizio 9, Foglio 7).

- (1) *Se $X = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una soluzione di (S), allora anche la curva $X_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (con c costante fissata) definita*

$$X_c(t) = (x(t+c), y(t+c))$$

è ancora una soluzione di (S) (grazie all'indipendenza da t !).

- (2) *Se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è una soluzione de sistema algebrico*

$$(\star) \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

allora la curva $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita

$$X(t) \doteq (x_0, y_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

è una soluzione di (S). Infatti, poiché x_0 e y_0 sono costanti, si ha banalmente $X'(t) = (x'(t), y'(t)) = (0, 0)$, e grazie a (\star) anche $F(X) = \underline{0}$.

Definizione 4.3.3.

(i) Si chiama *orbita* o *traiettoria* del sistema (S) il sottoinsieme Γ di \mathbb{R}^2 tale che

$$\Gamma = X(I)$$

dove $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una soluzione di (S).

(ii) Le soluzioni del sistema algebrico (\star) si chiamano *punti critici* o *di equilibrio* del sistema (S). Le orbite del sistema (S) possono essere orientate pensando di percorrerle nel verso crescente del tempo t .

Osservazione 4.3.3. Un'orbita $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ di una curva potrebbe essere rappresentata (o indotta) da più di una curva.

Esempio.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

L'orbita $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è rappresentata (o indotta) da tutte le curve $X_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ del tipo

$$X_c(t) = (x = \sin(t + c), y = \cos(t + c)), \quad t \in \mathbb{R}$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante fissata.

Corollario 4.3.2 (del teorema di esistenza e unicità locale di (PC)). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f, g \in C^1(A)$. Allora per ogni punto $(x_0, y_0) \in A$ esiste (localmente, in un intorno) un'unica orbita $\Gamma \subset A$ passante per il punto (x_0, y_0) .

DIMOSTRAZIONE: È una immediata conseguenza del teorema di esistenza e unicità locale di (PC) per sistemi di ODEs del primo ordine.

■

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

4.3.1.1 Interpretazione cinematica

Il sistema (S) si può anche interpretare da un punto di vista cinematico.

Nel piano xy , consideriamo il campo di vettori di componenti $f(x, y)$ e $g(x, y)$. Il sistema (S) descrive il moto di una particella di posizione (x, y) e velocità (x', y') , data in ogni punto da $(f(x, y), g(x, y))$. Le orbite di (S) sono le traiettorie descritte dalla particella, e i punti critici sono i punti di equilibrio (in cui il campo è nullo!).

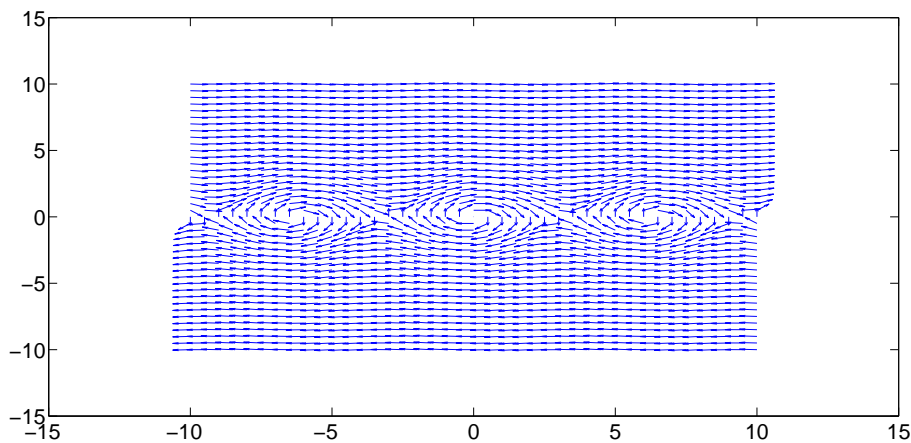


Figura 4.1: Campo di direzioni dato da (SP) con $\omega^2 = 1$.

Il piano xy è detto anche *piano delle fasi*. Nel caso (SP), è facile vedere che i punti di equilibrio (o punti critici) sono dati da

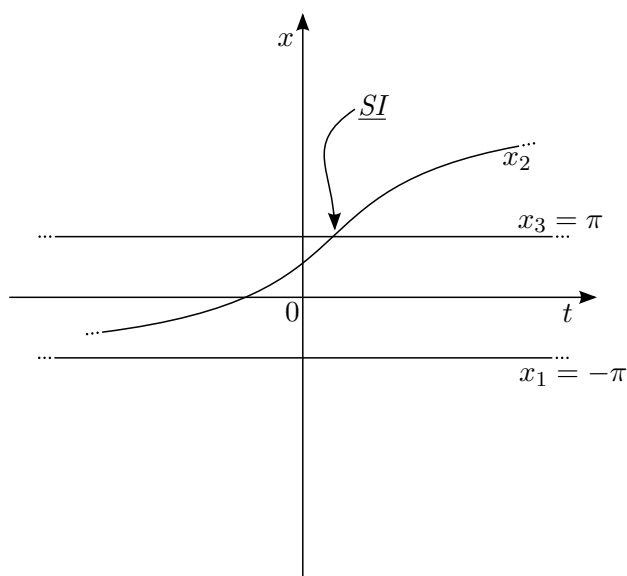
$$(k\pi, 0), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pertanto la funzione $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

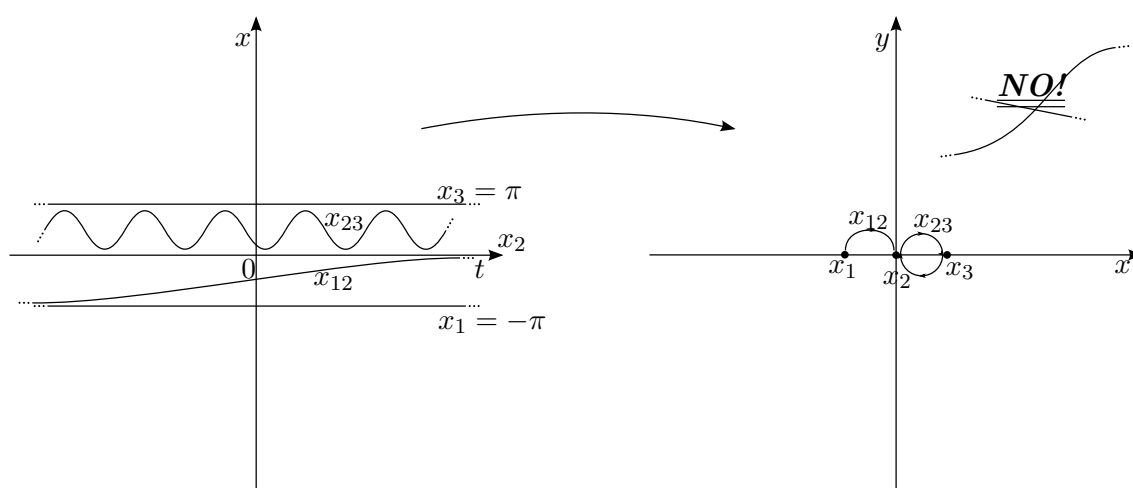
$$x(t) \doteq k\pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \text{ fissato in } \mathbb{Z}$$

è una soluzione di (EP).

Osservazione 4.3.4. *Può accadere che due soluzioni si incrocino nel piano xt , perché non è detto che abbiano la stessa velocità (hanno derivata prima di x differente).*



Non può invece accadere (per il teorema di esistenza e unicità) che due soluzioni si incontrino in un t finito nel piano delle fasi! A parità di soluzioni, avremmo la stessa velocità! Possono invece toccarsi in un tempo t infinito.



4.3.1.2 Integrali primi di (S)

Definizione 4.3.4. Dati $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f, g \in C^1(A)$, una funzione $U \in C^1(A)$ si dice integrale primo di (S) nella regione A se

$$(i) \quad \nabla U(x, y) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in A \setminus \{(x, y) \in A : f(x, y) = g(x, y) = 0\}$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

(ii) Per ogni curva integrale $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ di (S), con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, vale

$$U(X(t)) = U(x(t), y(t)) = \text{costante}$$

Se in un sistema fisico l'energia si conserva, allora U ha proprio il significato di *energia*. Le curve di livello $\Gamma_c = \{(x, y) \in A : U(x, y) = c\}$ dove $c \in \mathbb{R}$ costante fissata, si chiamano anche *curve integrali* di (S).

Osservazione 4.3.5 (Esercizio 9e, Foglio 7). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f, g \in C^1(A)$, e $U \in C^1(A)$ tale che $\nabla U \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in A \setminus \{(x, y) \in A : f(x, y) = g(x, y) = 0\}$. Allora

U è un integrale primo di (S)

$$\Updownarrow$$

$$f(P_0) \frac{\partial U}{\partial x}(P_0) + g(P_0) \frac{\partial U}{\partial y}(P_0) = 0 \quad P_0 \in A$$

Tale relazione è facilmente ricavabile osservando che, se $\nabla U \neq (0, 0)$, la condizione che definisce un integrale primo è

$$(IP) \quad U(x(t), y(t)) = \text{costante}$$

Differenziando (IP) abbiamo

$$x'(t_0) \frac{\partial U}{\partial x}(P_0) + y'(t_0) \frac{\partial U}{\partial y}(P_0) = 0$$

e, usando (S),

$$f(P_0) \frac{\partial U}{\partial x}(P_0) + g(P_0) \frac{\partial U}{\partial y}(P_0) = 0$$

Questa relazione può anche essere vista nella forma

$$F(P_0) \bullet \nabla U(P_0) = 0$$

che appare più intuitiva utilizzando l'interpretazione cinematica. L'orbita della particella è un vincolo dato da U , e quindi dal teorema delle funzioni implicite di Dini sappiamo che ∇U è perpendicolare all'orbita. Poiché F , d'altro canto, è tangente all'orbita (rappresenta la velocità!), ∇U e F sono perpendicolari, ossia il loro prodotto scalare è nullo.

Teorema 4.3.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $U \in C^1(A)$ un integrale primo di (S). Allora

- (i) un'orbita $\Gamma \subset A$ di (S) è contenuta in Γ_c per un'opportuna costante $c \in \mathbb{R}$;
- (ii) l'insieme delle curve di livello di U (cioè la famiglia $\Gamma_c = \{(x, y) \in A : U(x, y) = c\}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$) è costituito da un'unione (disgiunta) di orbite di (S).

DIMOSTRAZIONE:

- (i) Sia $\Gamma \subseteq A$ un'orbita di (S) passante per il punto (x_0, y_0) , cioè $\Gamma = X(I)$ dove $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una soluzione di (S) e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Fissando U integrale primo di (S), per definizione vale che

$$U(X(t)) = U(X(t_0)) = U(x_0, y_0) \doteq c, \quad \forall t \in I$$

Quindi $\Gamma \subseteq \Gamma_c$.

- (ii) Sia $c \in \mathbb{R}$ e $\Gamma_c \neq \emptyset$ una curva di livello di U . Definiamo

$$\vartheta_c = \{\Gamma \subseteq \Gamma_c : \Gamma \text{ è un'orbita di (S)}\}$$

Dobbiamo provare che

$$\Gamma_c = \bigcup_{\Gamma \in \vartheta_c} \Gamma$$

È banale provare che $\bigcup_{\Gamma \in \vartheta_c} \Gamma \subseteq \Gamma_c$ (già provato al punto (i)). Proviamo quindi che $\Gamma_c \subseteq \bigcup_{\Gamma \in \vartheta_c} \Gamma$. Per il teorema di esistenza e unicità locale di (PC), otteniamo che $\forall (x_0, y_0) \in \Gamma_c$, esiste ed è unica un'orbita $\Gamma \in \vartheta_c$ tale che $(x_0, y_0) \in \Gamma$. L'unicità ci assicura che l'unione sia disgiunta. ■

Ritorniamo al problema di Cauchy da cui siamo partiti

$$\text{(PCEP)} \quad \begin{cases} x'' + \omega^2 \sin(x) = 0 & \text{(EP)} \\ x(t_0) = x_1^0 & \text{(CI)} \\ x'(t_0) = x_2^0 \end{cases}$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI

e al suo sistema associato

$$(\text{SP}) \begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 \sin(x) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} x(t_0) = x_1^0 \\ y(t_0) = x_2^0 \end{array} \right)$$

Con l'intento di calcolare l'integrale primo di (SP) o, equivalentemente, di (EP), moltiplichiamo ambo i membri di (EP) per la quantità ml^2x' ottenendo:⁽¹¹⁾

$$\begin{aligned} ml^2x'x'' + ml^2x' \frac{g}{l} \sin(x) &= \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ml^2 (x')^2 \right) - mlg \frac{d}{dt} (\cos(x)) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (lx')^2 - mgl \cos(x) \right) = 0 \end{aligned}$$

Definendo le quantità *energia potenziale* ed *energia cinetica* rispettivamente con

$$E_p \doteq mgl(1 - \cos(x)), \quad E_c \doteq \frac{1}{2} m (lx')^2$$

e ponendo

$$E \doteq E_p + E_c$$

la nostra equazione si riduce a

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \implies \quad E = \text{costante}$$

Abbiamo appena ottenuto la ben nota *legge di conservazione dell'energia*. Utilizzando le (CI), troviamo

$$(\star) \quad \frac{1}{2} m (lx')^2 - mgl \cos(x) = c_1 = \frac{1}{2} m (lx_2^0)^2 - mgl \cos(x_1^0)$$

Dividendo (\star) per ml^2 :

$$\frac{1}{2} (x')^2 - \omega^2 \cos(x) = c = \frac{1}{2} (x_2^0)^2 - \omega^2 \cos(x_1^0)$$

Possiamo quindi definire (ricordando che $y = x'$)

$$U(x, y) = \frac{y^2}{2} - \omega^2 \cos(x)$$

U è un integrale primo di (SP). Studiamo ora le sue curve di livello nel piano delle fasi.

⁽¹¹⁾ Ricordiamo che $\omega^2 = \frac{g}{l}$

4.3 Sistemi di ODEs del primo ordine e ODEs di ordine n

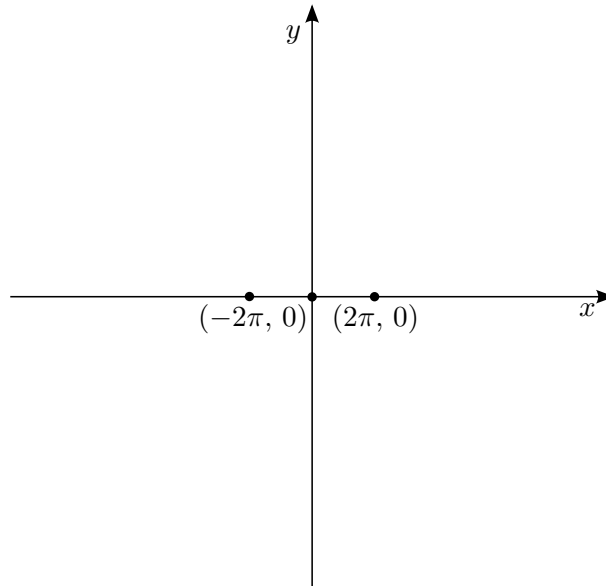
Siano $A = \mathbb{R}^2$, $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{2} - \omega^2 \cos(x) = c\}$. Dalla condizione che descrive Γ_c , abbiamo $c \geq -\omega^2$. Distinguiamo 4 casi.

Caso 1: $c = -\omega^2$

Da U , otteniamo

$$y^2 = 2\omega^2(-1 + \cos(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = (2n\pi, 0) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dunque $\Gamma_c = \{(2n\pi, 0) : n \in \mathbb{Z}\}$. Nel piano delle fasi:



Caso 2: $-\omega^2 < c < \omega^2$

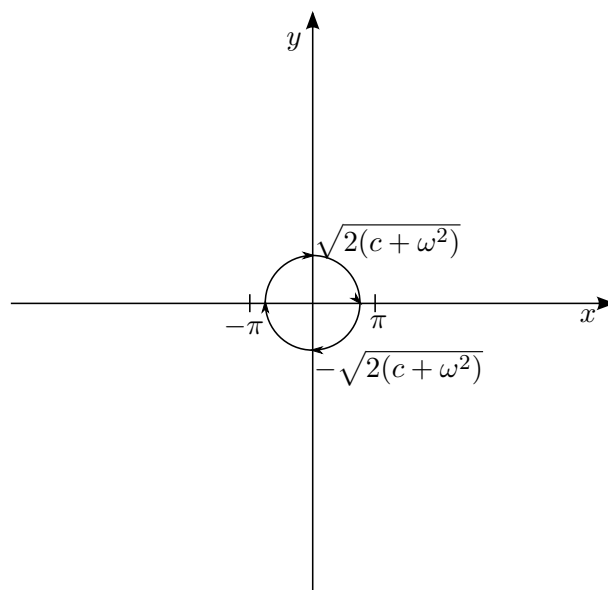
Da U , otteniamo

$$y^2 = 2(c + \omega^2 \cos(x)) \quad \Longrightarrow \quad c + \omega^2 \cos(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(x) \geq -\frac{c}{\omega^2}$$

Ora, esistono $x_1, x_2 \in (-\pi, \pi)$ con $-\pi < x_1 < 0 < x_2 < \pi$ tali che

$$\cos(x) \geq -\frac{c}{\omega^2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI



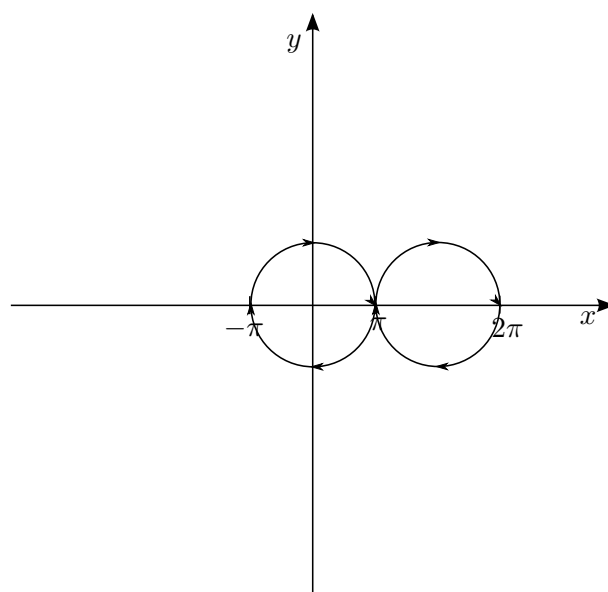
Caso 3: $c = \omega^2$

Da U , otteniamo

$$y^2 = 2\omega^2(1 + \cos(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_c = \{(x, \pm\sqrt{2}\omega\sqrt{1 + \cos(x)}) : x \in \mathbb{R}\}$$

Osserviamo che

$$((2n + 1)\pi, 0) \in \Gamma_c \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

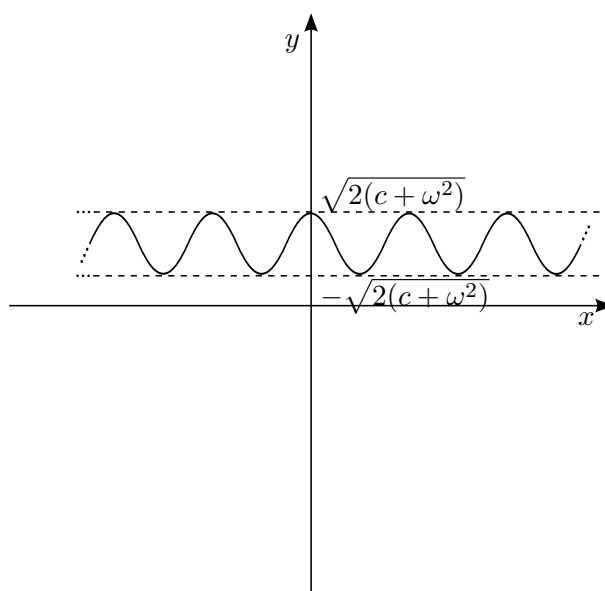


Caso 4: $c > \omega^2$

Da U , otteniamo

$$y^2 = 2\omega^2(c + \cos(x)) \quad \implies \quad c + \omega^2 \cos(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma_c = \{(x, \pm\sqrt{2}\sqrt{c + \omega^2 \cos(x)}) : x \in \mathbb{R}\}$$



Vediamo ora i possibili grafici delle soluzioni nel piano tx per ogni caso.

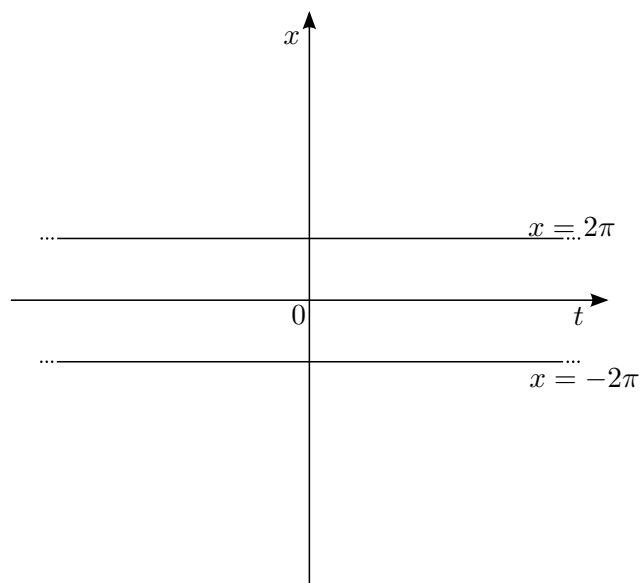
Caso 1: $c = -\omega^2$

Le soluzioni sono della forma

$$x(t) = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

In questo caso, abbiamo le cosiddette *soluzioni di equilibrio*:

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI



Caso 2: $-\omega^2 < c < \omega^2$

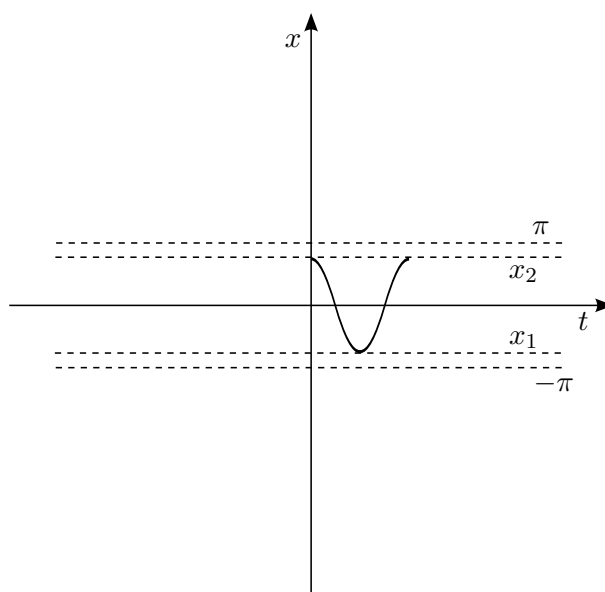
La forma della soluzione è nella figura sottostante. Ma, a questo punto, sorge spontanea la domanda: la soluzione è *periodica*? Cioè, $\exists \mathcal{T} \in \mathbb{R}$ ed esiste $x_{\max} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di (EP) tale che

$$x(t + \mathcal{T}) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}?$$

Si può provare che, fissate le condizioni iniziali per cui

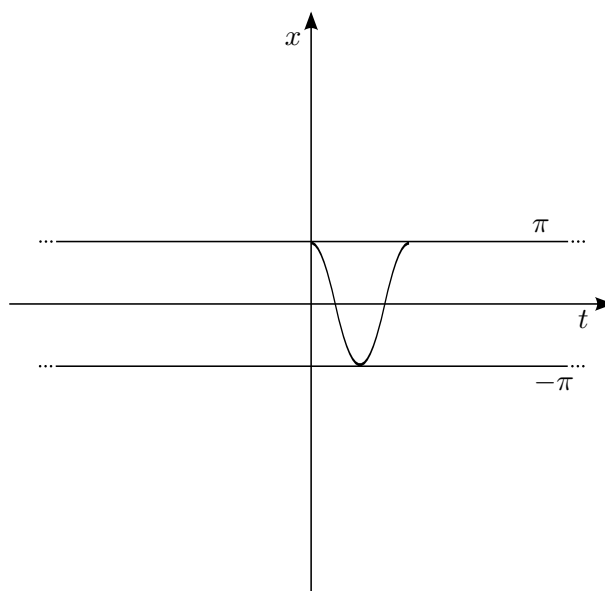
$$\begin{cases} x'' + \omega^2 \sin(x) = 0 \\ x(t_0) = x_1^0, \quad x'(t_0) = x_2^0 \end{cases}$$

allora $I_{\max} \equiv \mathbb{R}$ e x_{\max} è periodica.



Caso 3: $c = \omega^2$

In questo caso, abbiamo soluzioni di *equilibrio* più soluzioni che *connettono* stati di equilibrio.

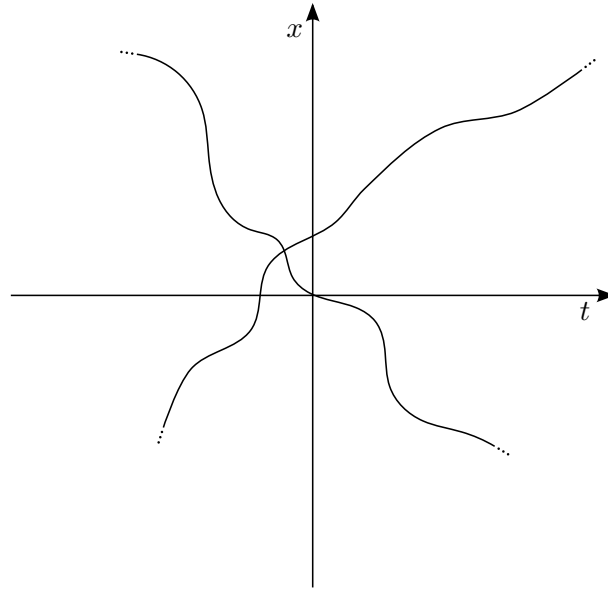


Caso 4: $c > \omega^2$

Questo è il caso delle cosiddette *soluzioni vorticosi*, che hanno un andamento strettamente crescente o decrescente, in quanto

$$x' = \sqrt{2(c + \omega^2 \cos(x))} > 0$$

4. INTRODUZIONE ALLE ODES (E SISTEMI DI ODES) NON LINEARI



Riprendiamo ora il caso 2, in cui ci eravamo chiesti se la soluzione trovata si potesse “estendere” ad una soluzione periodica. Ricordiamo innanzitutto la definizione.

Definizione 4.3.5. Una soluzione $X = (x, y) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ di (S) si dice periodica se $\exists \mathcal{T} \in \mathbb{R}$ tale che

$$X(t + \mathcal{T}) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La periodicità della soluzione del caso 2 ci è garantita dal seguente teorema.

Teorema 4.3.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $U \in C^1(A)$ un integrale primo di (S). Definiamo, per un dato $c > 0$,

$$\Gamma_c \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U(x, y) = c\}$$

e supponiamo che

- (i) Γ_c è una curva chiusa, regolare e semplice, cioè, per definizione,
 - $\exists \varphi : [a, b] \longrightarrow A$ di classe $C^1(A)$ e $\varphi'(s) \neq (0, 0) \quad \forall s \in [a, b]$ (regolare)
 - $\varphi(a) = \varphi(b)$ (chiusa)
 - $\varphi : [a, b] \longrightarrow A$ è iniettiva (semplice)
- (ii) Γ_c non contiene punti di equilibrio di (S)

Allora Γ_c è un'orbita periodica, cioè, per definizione, esiste $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ soluzione di (S) periodica e $\Gamma_c = X(\mathbb{R})$.

Capitolo 5

Serie di Fourier

Le pagine successive sono direttamente a cura del professore. Mi sono solo limitato ad includerle in questo documento.

BREVE INTRODUZIONE SULLE SERIE DI FOURIER (O SERIE TRIGONOMETRICHE)

1. SERIE DI FOURIER

Si chiama serie di Fourier una serie formale del tipo

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad x \in \mathbb{R} .$$

I numeri $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ si chiamano i coefficienti della serie.

Si chiama polinomio trigonometrico (di ordine n) una funzione $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

dove $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ ($a_n \cdot b_n \neq 0$).

Problema 1. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza di (1).

1.1. Periodicità. Se (1) converge per $x = x_0$, allora converge in tutti i punti $x_k = x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alla stessa somma; dunque, se definiamo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (1) \text{ converge}\}$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad x \in \mathbb{R} ,$$

ne segue che f è una funzione periodica di periodo 2π , cioè

$$f(x) = f(x + 2\pi) \quad \forall x \in A .$$

1.2. Una semplice condizione sufficiente per la convergenza. Una semplice condizione sufficiente di convergenza per la (1) è la seguente.

Proposizione 1.1. Sia data una serie di Fourier di tipo (1) e supponiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty \quad (\text{come serie di numeri reali}) .$$

Allora la (1) è (assolutamente) convergente.

Dimostrazione. Dobbiamo studiare la convergenza della serie a termini non negativi

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| .$$

Osserviamo che

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n \cos(nx)| + |b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Dall'ipotesi segue che la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi converge. \square

1.3. Relazione tra la somma della serie e i coefficienti della serie. Vogliamo ora determinare una semplice relazione tra i coefficienti della serie di Fourier e la sua somma.

Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e supponiamo che

$$(2) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \forall x \in [-\pi, \pi] .$$

Moltiplichiamo i membri della (2) per $\cos(mx)$ e integriamo sull'intervallo $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) \cos(mx) + b_n \sin(nx) \cos(mx)) \right] dx .$$

Supponiamo ora che

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) \cos(mx) + b_n \sin(nx) \cos(mx)) \right] dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx \right] .$$

Poichè per ogni $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \text{ e } n \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } m = n = 0 \end{cases} ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \text{ oppure } m = n = 0 \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases} ,$$

(come **esercizio** si dimostrino le precedenti affermazioni), ne segue che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \pi a_m \iff$$

$$(4) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\} ,$$

N.B.: La formula vale anche per $m = 0$.

Analogamente si può provare che, moltiplicando per $\sin(mx)$ la (2) e integrando sul periodo $[-\pi, \pi]$, se vale la (3), si ottiene che

$$(5) \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \quad m \in \mathbb{N} .$$

Definizione 1.1. Data $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann), le successioni di numeri reali definite da (4) e (5) si chiamano i coefficienti di Fourier di f e la serie (1) così definita si chiama serie di Fourier associata a f . Scriveremo che

$$(6) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Fissato $x \in \mathbb{R}$, denotiamo con $S_n(f)(x) \equiv S_n(x)$ la somma parziale n -esima della serie di Fourier associata a f (valutata) nel punto x , cioè

$$(7) \quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)].$$

Osservazione 1. Con la scrittura (6) non intendiamo la (2)! Intendiamo solo che ad una funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann) associamo la sua serie di Fourier formale (1), senza assumere nessun tipo di convergenza.

1.4. Convergenza puntuale di una serie di Fourier.

Problema 2. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann), se

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

allora è vero che

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad \forall x \in [-\pi, \pi] ?$$

Cioè, per definizione, esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$?

Definizione 1.2.

- (i) Una funzione $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) si dice C^0 a tratti se f è continua in ogni punto $x \in [a, b)$ eccetto al più un numero finito di punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

ed esistono finiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) := f(x_0+0), \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) := f(x_i-0), \quad \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) := f(x_i+0), \quad \lim_{x \rightarrow x_m^-} f(x) := f(x_m-0),$$

per ogni $i = 1, \dots, m-1$.

- (ii) Una funzione $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) si dice C^1 a tratti se f è derivabile in ogni punto $x \in [a, b)$ eccetto al più un numero finito di punti

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{k-1} < y_k = b$$

ed $f' : [a, b] \setminus \{y_0, y_1, \dots, y_k\} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e limitata.

- (iii) Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice C^0 (C^1) a tratti se per ogni $-\infty < a < b < +\infty$, $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è C^0 (C^1) a tratti.

Osservazione 2. Ricordiamo che una funzione $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua in eccetto al più un numero finito di punti è integrabile secondo Riemann (si lascia la dimostrazione per **esercizio**). In particolare una funzione $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 a tratti è integrabile (secondo Riemann).

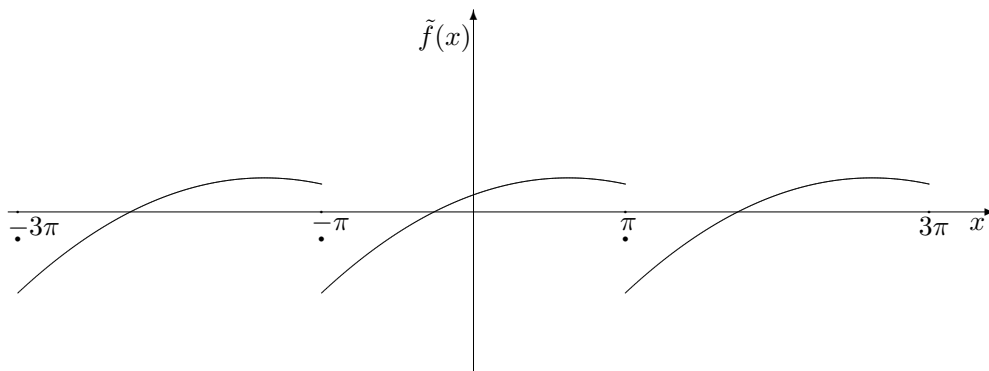
Osservazione 3. Una funzione $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 a tratti è C^0 a tratti (si lascia la dimostrazione per **esercizio**).

Teorema 1.2 (Convergenza puntuale). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e C^1 a tratti. Definiamo la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \right] .$$

Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier associata ad f converge e

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad x \in \mathbb{R} .$$

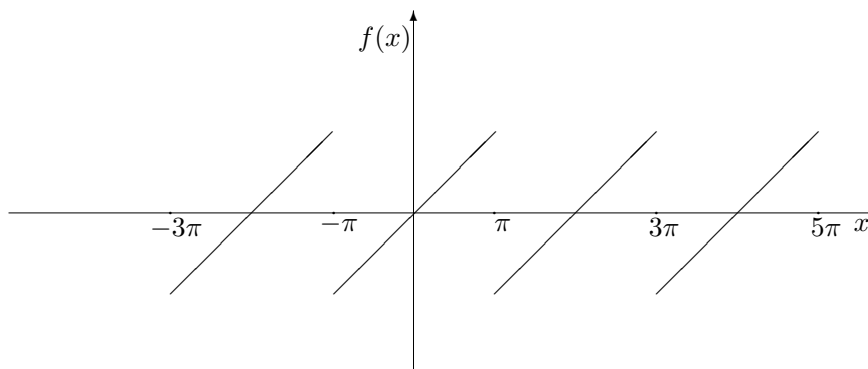


Osservazione 4. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se f è continua in x allora

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \right] = \frac{1}{2} [f(x) + f(x)] = f(x) .$$

Osservazione 5. La sola continuità di f (anche su tutto \mathbb{R}) non basta ad assicurare la convergenza della serie di Fourier.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$ se $x \in [-\pi, \pi)$ e poi estesa con periodicità 2π a tutto \mathbb{R} . La funzione f è C^1 a tratti (la dimostrazione è lasciata per **esercizio**).



Allora

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(la dimostrazione è lasciata per **esercizio**). Quindi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx).$$

Osserviamo che f verifica le ipotesi del Teorema 1.2; infatti $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ed esistono $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = -\pi$, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \pi$, esiste $f'(x) = 1 \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$ ed esistono $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = 1$.

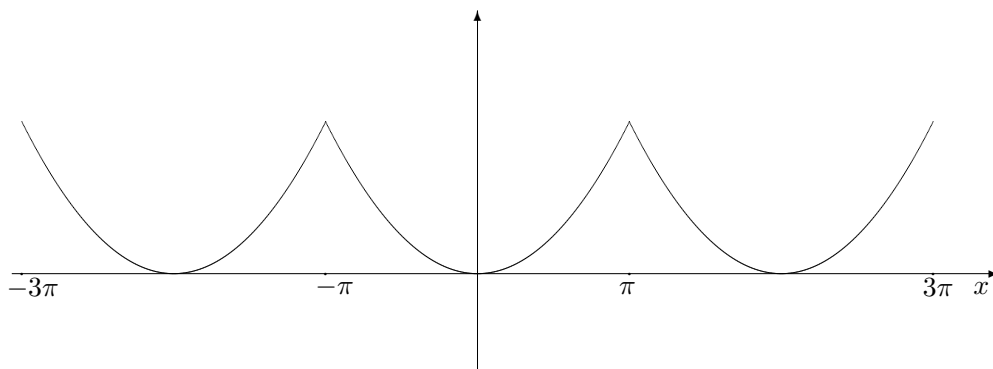
Per il Teorema 1.2 possiamo concludere che

$$\tilde{f}(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

e

$$\tilde{f}(k\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$ se $x \in [-\pi, \pi)$ e poi estesa con periodicità π a tutto \mathbb{R} .



Allora

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2, \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

(la dimostrazione è lasciata per **esercizio**). Quindi

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Osserviamo che f verifica le ipotesi del Teorema 1.2; infatti $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e quindi esistono $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \pi^2$; inoltre esiste $f'(x) = 2x \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$ ed esistono $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x) = -2\pi$, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = 2\pi$.

Per il Teorema 1.2 possiamo concludere che

$$\tilde{f}(x) = f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Osserviamo inoltre che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

e quindi la serie converge assolutamente.

Alcune conseguenze dell'esempio precedente:

(1) Se $x = 0$ allora $0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ e quindi

$$\frac{\pi^2}{12} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

(2) Se $x = \pi$, $\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ e quindi

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(3)

$$\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^2} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

da cui

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(4)

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

Una nota storica relativa all'uguaglianza $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Questa uguaglianza

è stata ottenuta, per la prima volta, nel 1735 dal grande matematico svizzero Leonhard Euler (noto in Italia come Eulero), nato a Basilea nel 1707 e morto a S. Pietroburgo nel 1783. Eulero è stato, probabilmente, il più grande virtuoso della manipolazione di serie e il suo primo argomento per la prova dell'uguaglianza precedente è stato uno dei suoi argomenti più audaci, anche se poco rigoroso. In seguito, Eulero seppe produrre anche un argomento rigoroso per la prova dell'uguaglianza. Vogliamo qui riproporre il primo argomento di Eulero per la prova dell'uguaglianza poichè, anche se non rigoroso, conserva ancora una grande efficacia intuitiva ed una intatta bellezza matematica.

Sappiamo che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e consideriamo l'equazione

$$(8) \quad \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \dots = 0 \quad \text{se } x > 0.$$

L'equazione (8) ha (infinite) radici date da

$$(9) \quad x_1 = \pi^2, x_2 = (2\pi)^2, x_3 = (3\pi)^2, \dots, x_n = (n\pi)^2, \dots$$

ma non $x = 0$, poichè $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1!$

E' ben noto che se un'equazione algebrica

$$1 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$$

ha radici x_1, x_2, \dots, x_n , allora, per il teorema di Ruffini,

$$1 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

(provarlo per **esercizio**). Inoltre è facile verificare che

$$(10) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Assumendo che (10) continui a valere anche per il polinomio "infinito" dell'equazione (8), segue che

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \cdots = -\left(-\frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{6}.$$

Sostituendo, nell'uguaglianza precedente, ad x_1, x_2, \dots i valori in (9), si ottiene che

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} \cdots + \frac{1}{(n\pi)^2} + \cdots = \frac{1}{6}.$$

Dunque abbiamo provato che

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ritorniamo alla dimostrazione del Teorema 1.2. Premettiamo, prima della sua dimostrazione, alcuni importanti risultati preliminari.

Lemma 1.1 (Nucleo di Dirichlet). *Vale la seguente formula*

$$(11) \quad \frac{1}{2} + \cos y + \cos(2y) + \cdots + \cos(ny) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})y\right)}{2 \sin(\frac{y}{2})} := D_n(y)$$

per ogni $y \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Per induzione su n . Se $n = 0$ la (11) si riduce all'identità $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Supponiamo (11), allora, utilizzano la formula di addizione del seno,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos y + \cos(2y) + \cdots + \cos((n-1)y) + \cos(ny) &= \frac{\sin\left((n - \frac{1}{2})y\right)}{2 \sin(\frac{y}{2})} + \cos(ny) = \\ &= \frac{\sin\left((n - \frac{1}{2})y\right) + 2 \sin(\frac{y}{2}) \cos(ny)}{2 \sin(\frac{y}{2})} = \frac{\sin(ny) \cos(\frac{y}{2}) + \sin(\frac{y}{2}) \cos(ny)}{2 \sin(\frac{y}{2})} = \\ &= \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})y\right)}{2 \sin(\frac{y}{2})}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 6. Dalla (11) segue che

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_n(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})y\right)}{2 \sin(\frac{y}{2})} = n + \frac{1}{2}.$$

Pertanto possiamo supporre che, fissato $n \in \mathbb{N}$, $D_n \in C^0([-\pi, \pi])$ definendo $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$. In particolare $D_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata.

Lemma 1.2 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia $F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann). Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ i coefficienti di Fourier associati ad F , cioè vale (6) con $f \equiv F$. Allora*

$$(12) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx < \infty.$$

Dimostrazione. Denotiamo con $S_n(x)$ la successione in (7). Si ha, ovviamente, (13)

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (F(x) - S_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} F(x) S_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dalla definizione dei coefficienti di Fourier di f otteniamo che

$$\begin{aligned} (14) \quad \int_{-\pi}^{\pi} F(x) S_n(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \right\} dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx + \sum_{k=1}^n \left[a_k \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(kx) dx \right] = \\ &= \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right). \end{aligned}$$

Analogamente si prova

$$(15) \quad \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

(la dimostrazione è lasciata per **esercizio**).

Da (13), (14) e (15) segue che

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passano al limite per $n \rightarrow \infty$ nella disuguaglianza precedente otteniamo la (12) (perché?). \square

Osservazione 7. La disuguaglianza (12) non assicura che $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$: perchè?

Dal lemma 1.2 segue subito il seguente

Corollario 1.3 (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Nelle stesse ipotesi del Lemma 1.2 segue che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Esercizio: Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (s.R.). Allora

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} g(u) du \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione Teorema 1.2. Fissato $x \in \mathbb{R}$, denotiamo con $S_n(f)(x) \equiv S_n(x)$ la somma parziale n -esima della serie di Fourier associata a f , cioè la successione definita in (7).

Osserviamo che, dalla definizione di coefficiente di Fourier e dalla periodicità di f , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n [\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)] \right\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) \right\} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) \right\} du. \end{aligned}$$

Dal Lemma 1.1 e dall'Osservazione 6 segue allora la seguente rappresentazione integrale per S_n

$$(16) \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tramite, ancora, il Lemma 1.1 segue che

$$(17) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da (16) e (17), fissato $x \in \mathbb{R}$ segue che

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-0) D_n(t) dt - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+0) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x-0)) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x+0)) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x-0)}{2 \sin(t/2)} \sin((n+1/2)t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin(t/2)} \sin((n+1/2)t) dt. \end{aligned}$$

Da questa catena di uguglianze segue allora che

$$(18) \quad S_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 G(t) \sin((n+1/2)t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G(t) \sin((n+1/2)t) dt,$$

dove la funzione $G : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$G(t) := \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{2 \sin(t/2)} & \text{se } -\pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin(t/2)} & \text{se } 0 \leq t < \pi \end{cases}.$$

Supponiamo, per il momento, che

$$(19) \quad G \text{ è integrabile (secondo Riemann)}$$

e proviamo la tesi. Da (18) e (19) segue che

$$(20) \quad S_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \sin((n+1/2)t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \cos(t/2) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \sin(t/2) \cos(nt) dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(t) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_2(t) \cos(nt) dt
\end{aligned}$$

dove $F_1(t) := G(t) \cos(t/2)$, $F_2(t) := G(t) \sin(t/2)$. Applicando (19), dalle proprietà delle funzioni integrabili, segue che F_i ($i = 1, 2$) sono ancora integrabili su $[-\pi, \pi]$; dal Corollario 1.3 segue allora la tesi se $n \rightarrow \infty$ nella (20).

Per concludere la dimostrazione dobbiamo provare la (19). Per l' Osservazione 2, basta mostrare che $G : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e continua, eccetto al più un numero finito di punti.

Consideriamo $f : [x - \pi, x + \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ per $x \in \mathbb{R}$ fissato. Essendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 a tratti, esistono

$$x - \pi = y_0 < y_1 < \dots < y_k = x + \pi$$

tale che esiste

$$(21) \quad f' : [x - \pi, x + \pi) \setminus \{y_0, y_1, \dots, y_k\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua e limitata.}$$

Denotiamo con $F : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(t) := \begin{cases} f(x+t) - f(x-0) & \text{se } -\pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ f(x+t) - f(x+0) & \text{se } 0 \leq t < \pi \end{cases}.$$

Per definizione di F e da (21) segue che

$$(22) \quad F \text{ è continua in } t = 0, \quad \exists F' : [-\pi, \pi) \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_k\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua e limitata,}$$

dove $t_i := y_i - x$ per $i = 1, \dots, k$.

Da (22) segue F è continua eccetto al più nei punti $t = t_0, \dots, t_k$ ed esistono finiti

$$(23) \quad \lim_{t \rightarrow t_i^-} F(t) = F(t_i - 0), \quad \lim_{t \rightarrow t_i^+} F(t) = F(t_i + 0).$$

Poichè

$$G(t) = \frac{F(t)}{2 \sin(t/2)} \quad t \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\},$$

da (22) segue anche che

$$(24) \quad G \text{ è continua in ogni punto } t \in [-\pi, \pi) \setminus \{0, t_0, t_1, \dots, t_k\},$$

e da (23), se $t_i \neq 0$ per qualche $i = 0, \dots, k$, allora esistono finiti

$$(25) \quad \lim_{t \rightarrow t_i^-} G(t) = \frac{F(t_i - 0)}{2 \sin(t_i/2)}, \quad \lim_{t \rightarrow t_i^+} G(t) = \frac{F(t_i + 0)}{2 \sin(t_i/2)}.$$

Proviamo ora che G è limitata (sull'intervallo $[-\pi, \pi)$). Da (24) e (25), basta provare che G è limitata in un intorno di 0.

Da (22) segue che non è restrittivo supporre che esistono $0 < \delta < \pi$ e $M > 0$ tale che

$$F \in C^0(-\delta, \delta)$$

e

$$\exists F' : (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } |F'(t)| \leq M \quad \forall t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

Per il teorema di Cauchy, per ogni $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ esiste ξ compreso tra 0 e t tale che

$$G(t) = \frac{F(t)}{2 \sin(t/2)} = \frac{F(t) - F(0)}{2 \sin(t/2) - 2 \sin(0/2)} = \frac{F'(\xi)}{\cos(\xi/2)},$$

da cui segue

$$|G(t)| = \left| \frac{F'(\xi)}{\cos(\xi/2)} \right| \leq \frac{M}{\cos(\delta/2)} \quad \forall t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

e dunque la tesi. \square

1.5. Serie di Fourier di funzioni pari e dispari. Ricordiamo che data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

- f si dice pari se $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
- f si dice dispari se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Vale allora la seguente

Proposizione 1.4. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e supponiamo che $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sia integrabile (secondo Riemann). Sia*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] .$$

Allora

- (1) se f è pari allora $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- (2) se f è dispari allora $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.

(1)

$$(26) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right]$$

e

$$(27) \quad \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} f(-y) \sin(-ny) dy = - \int_0^{\pi} f(y) \sin(ny) dy .$$

Dunque, da (26) e (27) segue che $b_n = 0$. Si ragiona nello stesso modo per provare che $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$.

(2) È lasciata per **esercizio**. \square

1.6. Convergenza uniforme di una serie di Fourier. Abbiamo studiato la convergenza puntuale della serie di Fourier associata ad una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann), cioè

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] .$$

In altre parole, definita la successione di funzioni

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad n \in \mathbb{N} ,$$

$S_n(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomio trigonometrico di grado n , abbiamo studiato il problema:

•

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = \tilde{f}(x) \in \mathbb{R} \text{ per qualche } x \in \mathbb{R} ?$$

• $\tilde{f}(x) = f(x) ?$

Nelle applicazioni delle serie di Fourier è molto utile, alcune volte, considerare al posto della convergenza puntuale della successione di funzioni $S_n(f)$, una nozione di convergenza "globale" sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, già incontrata nel teorema di esistenza ed unicità del problema di Cauchy di una EDO del I ordine, detta convergenza *uniforme*.

Definizione 1.3.

(i) Siano $-\infty < a < b < +\infty$. Una successione di funzioni continue $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) si dice che converge uniformemente ad una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (su $[a, b]$) se esiste

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

dove ricordiamo $\|g\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$.

(ii) Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica con $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann), si dice che la serie di Fourier indotta da f converge uniformemente ad f su $[a, b]$ se la successione di funzioni delle somme parziali definita in (7) $S_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente a f (su $[a, b]$).

Osservazione 8. Dalla definizione segue subito che, se una successione di funzioni continue $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) converge uniformemente ad una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, allora converge anche puntualmente ad f , cioè esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Il viceversa è falso. Per esempio, si consideri l'esempio 1 sull'intervallo $[0, 2\pi]$ ed il seguente Teorema 1.5: perchè la successione delle somme parziali della serie di Fourier, associata ad f , non può convergere a f uniformemente su $[0, 2\pi]$?

Teorema 1.5. Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) una successione di funzioni continue convergente uniformemente ad una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora

(i) f è continua;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Dimostrazione. Proviamo il punto (i). Per definizione, la successione $(f_n)_n \subset C^0([a, b])$. Proviamo che la successione $(f_n)_n$ è di Cauchy in $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$(29) \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}.$$

Comunque scelti $m > n > \bar{n}$, dalla (29), segue che

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \|f_m - f\|_\infty + \|f - f_n\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

e dunque, per definizione, $(f_n)_n$ è di Cauchy in $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Essendo $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ uno spazio metrico completo, esiste una funzione continua $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Per concludere la dimostrazione basta provare che

$$(30) \quad f(x) = f^*(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

La (30) segue subito dall'Osservazione 8 e dall'unicità del limite puntuale. Proviamo il punto (ii). Dalle proprietà dell'integrale segue che

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ nella disuguaglianza precedente otteniamo la tesi. \square

Osservazione 9. La convergenza (solo) puntuale di una successione $(f_n)_n \subset C^0([a, b])$ verso una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ non assicura sia la continuità di f che la convergenza degli integrali. Infatti si consideri l'esempio dell'Osservazione 8: la successione delle somme parziali è una successione di funzioni continue su $[0, 2\pi]$, ma il limite puntuale non è continuo.

Per quanto riguarda la convergenza degli integrali si consideri la successione $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx \exp(-nx^2)$. Provare che $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione identicamente nulla $f \equiv 0$ su $[0, 1]$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$.

Vale il seguente criterio di convergenza uniforme di una serie di Fourier, che enunceremo senza dimostrazione.

Teorema 1.6 (Convergenza uniforme). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, C^1 a tratti. Allora la serie di Fourier associata ad f converge uniformemente ad f su ogni intervallo $[a, b]$ in cui la funzione $f(x)$ è continua.*

Una immediata conseguenza del Teorema 1.5 (ii) è il seguente criterio di integrazione, termine a termine, per serie di Fourier.

Corollario 1.7. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica con $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann) e $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Supponiamo che la serie di Fourier associata ad f converge uniformemente ad f su un fissato intervallo $[a, b]$. Allora, per ogni coppia $x_0, x \in [a, b]$,*

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \int_{x_0}^x \cos(nt) dt + b_n \int_{x_0}^x \sin(nt) dt \right]$$

Dimostrazione. Sia $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$ $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi la successione $(S_n)_n$ converge uniformemente ad f su $[a, b]$. Applicando allora il Teorema 1.5 (ii) otteniamo che

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x S_n(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Per la linearità dell'integrale

$$\int_{x_0}^x S_n(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^n \left[a_k \int_{x_0}^x \cos(kt) dt + b_k \int_{x_0}^x \sin(kt) dt \right]$$

e dalla (31) segue subito la tesi. \square

1.7. Rappresentazione complessa delle serie di Fourier. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, continua e supponiamo che sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] .$$

Supponiamo che

$$(32) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad \forall x \in [-\pi, \pi] .$$

Ricordando l'esponenziale complesso

$$e^{\pm i\vartheta} = \cos \vartheta \pm i \sin \vartheta ,$$

otteniamo che

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} , \quad \sin \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} .$$

D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right] . \end{aligned}$$

Allora possiamo scrivere

$$S_n(f)(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}] = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} ,$$

avendo posto $c_0 = \frac{a_0}{2}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$.

D'altra parte la (32) è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x) - S_n(f)(x)| = 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi] ,$$

che a sua volta è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right| = 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi] ,$$

cioè, per definizione, a

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad \forall x \in [-\pi, \pi] .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo esprimere i coefficienti c_n e c_{-n} tramite integrali, ottenendo che

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i0x} dx , \\ c_n &= \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} dx - \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} dx \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx .$$

Analogamente si ritrova che

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx$$

e dunque che

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

1.8. Cenno alle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodica, si possono estendere tutti i concetti introdotti per funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ottenendo un analogo risultato di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier, tenendo presente che il modulo di un numero complesso $z = x + iy$ è dato da $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, dove $\bar{z} = x - iy$ è il complesso coniugato di z e la radice quadrata è intesa come radice quadrata reale.

Bibliografia

- [Con] Franco Conti. *Calcolo. Teoria e applicazioni*. McGraw-Hill, 1993.
- [Giu] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2 - Terza edizione interamente riveduta e ampliata*. Programma di Matematica, Fisica, Elettronica. Bollati Boringhieri, 2003.
- [Gre] Gabriele H. Greco. *Analisi Matematica Uno*. UniversityInTn, 2012.