# BREVE INTRODUZIONE SULLE SERIE DI FOURIER (O SERIE TRIGONOMETRICHE)

## 1. Serie di Fourier

Si chiama serie di Fourier una serie formale del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{1}$$

I numeri $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , $n \in \mathbb{N}$ si chiamano i coefficienti della serie.

Si chiama polinomio trigonometrico (di ordine $n$) una funzione $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

dove $a_0$, $a_k$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ $(a_n \cdot b_n \neq 0)$.

**Problema 1.** Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza di (1).

1.1. **Periodicità.** Se (1) converge per $x = x_0$ , allora converge in tutti i punti $x_k = x_0 + 2k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ , alla stessa somma; dunque, se definiamo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (1) \text{ converge}\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

ne segue che $f$ è una funzione periodica di periodo $2\pi$ , cioè

$$f(x) = f(x + 2\pi) \quad \forall x \in A \ .$$

1.2. **Una semplice condizione sufficiente per la convergenza.** Una semplice condizione sufficiente di convergenza per la (1) è la seguente.

**Proposizione 1.1.** *Sia data una serie di Fourier di tipo (1) e supponiamo che*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty \quad \textit{(come serie di numeri reali)} \ .$$

*Allora la (1) è (assolutamente) convergente.*

**Dimostrazione.** Dobbiamo studiare la convergenza della serie a termini non negativi

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \ .$$

Osserviamo che

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n \cos(nx)| + |b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Dall'ipotesi segue che la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi converge. □

1.3. **Relazione tra la somma della serie e i coefficienti della serie.** Vogliamo ora determinare una semplice relazione tra i coefficienti della serie di Fourier e la sua somma.

Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua e supponiamo che

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \forall x \in [-\pi, \pi) \ . \tag{2}$$

Moltiplichiamo i membri della (2) per $\cos(mx)$ e integriamo sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) \mathrm{d}x =$$

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \Big[ \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) \cos(mx) + b_n \sin(nx) \cos(mx)) \Big] \mathrm{d}x \ .$$

Supponiamo ora che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[ \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) \cos(mx) + b_n \sin(nx) \cos(mx)) \Big] \mathrm{d}x =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi} \sin(nx) \cos(mx) \mathrm{d}x \Big] \ . \tag{3}$$

Poichè per ogni $m, n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \text{ e } n \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } m = n = 0 \end{cases} ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) \mathrm{d}x = 0 \ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \text{ oppure } m = n = 0 \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases} ,$$

(come **esercizio** si dimostrino le precedenti affermazioni), ne segue che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) \mathrm{d}x = \pi a_m \quad \Longleftrightarrow$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) \mathrm{d}x \quad m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} \ , \tag{4}$$

N.B.: La formula vale anche per $m = 0$ .

Analogamente si può provare che, moltiplicando per $\sin(mx)$ la (2) e integrando sul periodo $[-\pi, \pi]$ , se vale la (3), si ottiene che

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) \mathrm{d}x \quad m \in \mathbb{N} \ . \tag{5}$$

**Definizione 1.1.** *Data* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *integrabile (secondo Riemann), le successioni di numeri reali definite da (4) e (5) si chiamano i coefficienti di Fourier di* $f$ *e la serie (1) così definita si chiama serie di Fourier associata a* $f$ *. Scriveremo che*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \ . \tag{6}$$

*Fissato* $x \in \mathbb{R}$*, denotiamo con* $S_n(f)(x) \equiv S_n(x)$ *la somma parziale n-esima della serie di Fourier associata a* $f$ *(valutata) nel punto* $x$*, cioè*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \,. \tag{7}$$

**Osservazione 1.** Con la scrittura (6) non intendiamo la (2)! Intendiamo solo che ad una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ <u>integrabile</u> (secondo Riemann) associamo la sua serie di Fourier formale (1), <u>senza assumere nessun tipo di convergenza</u>.

1.4. **Convergenza puntuale di una serie di Fourier.**

**Problema 2.** Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periodica, $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann), se

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

allora è vero che

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \ ?$$

Cioè , per definizione, esiste $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$?

**Definizione 1.2.**

(i) *Una funzione* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ *si dice* $C^0$ *a tratti se* $f$ *è continua in ogni punto* $x \in [a, b)$ *eccetto al più un numero finito di punti*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

*ed esistono finiti*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) := f(x_0+0),\ \lim_{x\to x_i^-} f(x) := f(x_i-0),\ \lim_{x\to x_i^+} f(x) := f(x_i+0),\ \lim_{x\to x_m^-} f(x) := f(x_m-0),$$

*per ogni* $i = 1, \ldots, m-1$.

(ii) *Una funzione* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ *si dice* $C^1$ *a tratti se* $f$ *è derivabile in ogni punto* $x \in [a, b)$ *eccetto al più un numero finito di punti*

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{k-1} < y_k = b$$

*ed* $f' : [a, b] \setminus \{y_0, y_1, \ldots, y_k\} \to \mathbb{R}$ *è continua e limitata.*

(iii) *Una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* $C^0$ $(C^1)$ *a tratti se per ogni* $-\infty < a < b < +\infty$, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *è* $C^0$ $(C^1)$ *a tratti.*

**Osservazione 2.** Ricordiamo che una funzione $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ limitata e continua in eccetto al più un numero finito di punti è integrabile secondo Riemann (si lascia la dimostrazione per **esercizio**). In particolare una funzione $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ $C^0$ a tratti è integrabile (secondo Riemann).

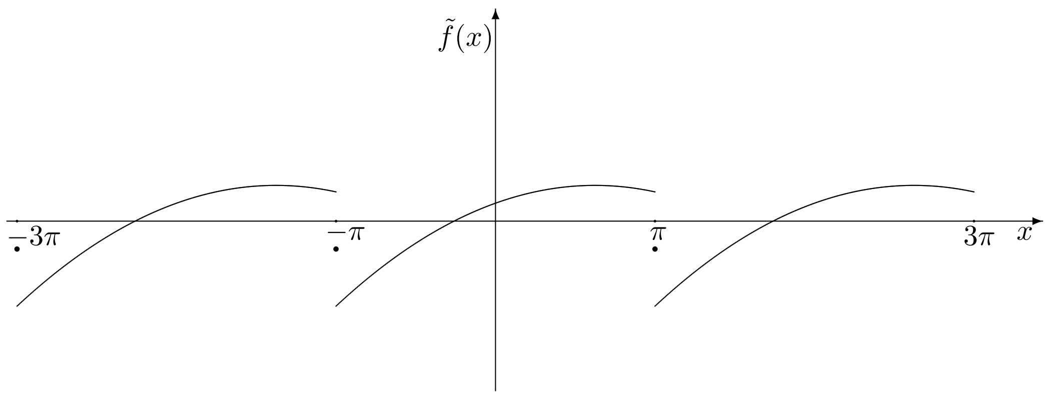
**Osservazione 3.** Una funzione $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ $C^1$ a tratti è $C^0$ a tratti (si lascia la dimostrazione per **esercizio**).

**Teorema 1.2** (Convergenza puntuale)**.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$*-periodica e* $C^1$ *a tratti. Definiamo la funzione* $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\Big[\lim_{y \to x^+} f(y) + \lim_{y \to x^-} f(y)\Big] \ .$$

*Allora per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *la serie di Fourier associata ad* $f$ *converge e*

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

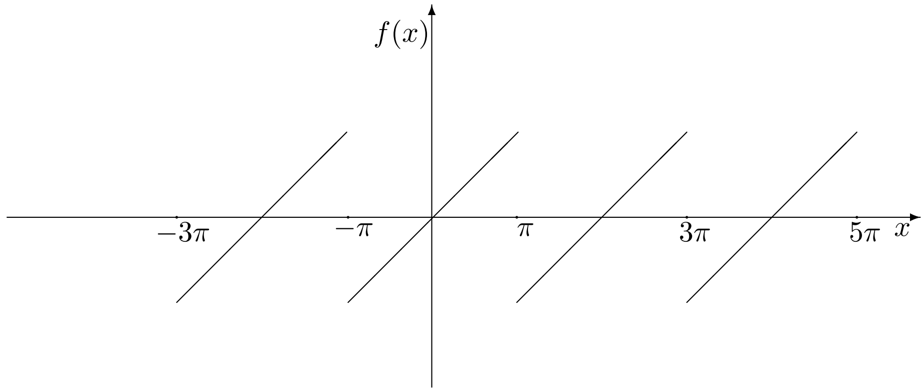



**Osservazione 4.** Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $f$ è continua in $x$ allora

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\big[\lim_{y \to x^+} f(y) + \lim_{y \to x^-} f(y)\big] = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] = f(x) \ .$$

**Osservazione 5.** La sola continuità di $f$ (anche su tutto $\mathbb{R}$ ) non basta ad assicurare la convergenza della serie di Fourier.

**Esempio 1.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$ se $x \in [-\pi, \pi)$ e poi estesa con periodicità $2\pi$ a tutto $\mathbb{R}$. La funzione $f$ è $C^1$ a tratti (la dimostrazione è lasciata per **esercizio**).




Allora

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\mathrm{d}x = 0\ ,\ n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

(la dimostrazione è lasciata per **esercizio**). Quindi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)\ .$$

Osserviamo che $f$ verifica le ipotesi del Teorema 1.2; infatti $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ è continua ed esistono $\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = -\pi$ , $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \pi$ , esiste $f'(x) = 1$ $\forall x \in (-\pi,\pi)$ ed esistono $\lim_{x\to-\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to\pi^-} f'(x) = 1$ .

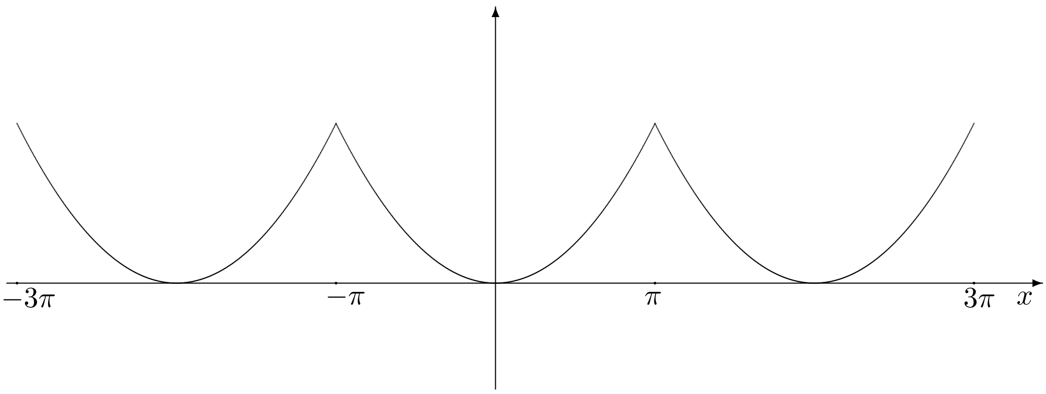
Per il Teorema 1.2 possiamo concludere che

$$\tilde{f}(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)\ \ \forall x \in (-\pi,\pi)$$

e

$$\tilde{f}(k\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = 0\ \ \forall k \in \mathbb{Z}\ .$$

**Esempio 2.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$ se $x \in [-\pi,\pi)$ e poi estesa con periodicità $\pi$ a tutto $\mathbb{R}$ .




Allora

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\mathrm{d}x = 4\frac{(-1)^n}{n^2}\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,$$

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2\ ,\ b_n = 0\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

(la dimostrazione è lasciata per **esercizio**). Quindi

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\ .$$

Osserviamo che $f$ verifica le ipotesi del Teorema 1.2; infatti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e quindi esistono $\lim_{x\to -\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \pi^2$ ; inoltre esiste $f'(x) = 2x\ \ \forall x \in (-\pi,\pi)$ ed esistono $\lim_{x\to-\pi^+} f'(x) = -2\pi$ , $\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = 2\pi$ .

Per il Teorema 1.2 possiamo concludere che

$$\tilde{f}(x) = f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\ \ \forall x \in [-\pi,\pi]\ .$$

Osserviamo inoltre che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$$

e quindi la serie converge assolutamente.

**Alcune conseguenze dell'esempio precedente:**

(1) Se $x = 0$ allora $0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ e quindi

$$\frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots\ .$$

(2) Se $x = \pi$ , $\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ e quindi

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\ .$$

(3)

$$\frac{\pi^2}{12}+\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ ,$$

da cui

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ .$$

(4)

$$\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\ .$$

**Una nota storica relativa all'uguaglianza $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.** Questa uguaglianza è stata ottenuta, per la prima volta, nel 1735 dal grande matematico svizzero Leonhard Euler (noto in Italia come Eulero), nato a Basilea nel 1707 e morto a S. Pietroburgo nel 1783. Eulero è stato, probabilmente, il più grande virtuoso della manipolazione di serie e il suo primo argomento per la prova dell'uguaglianza precedente è stato uno dei suoi argomenti più audaci, anche se poco rigoroso. In seguito, Eulero seppe produrre anche un argomento rigoroso per la prova dell'uguaglianza. Vogliamo qui riproporre il primo argomento di Eulero per la prova dell'uguaglianza poichè, anche se non rigoroso, conserva ancora una grande efficacia intuitiva ed una intatta bellezza matematica.

Sappiamo che

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

e consideriamo l'equazione

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\cdots=0\quad \text{se } x>0\,. \tag{8}$$

L'equazione (8) ha (infinite) radici date da

$$x_1=\pi^2,\ x_2=(2\,\pi)^2,\ x_3=(3\,\pi)^2,\dots,x_n=(n\,\pi)^2,\dots \tag{9}$$

ma non $x=0$, poichè $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$!

E' ben noto che se un'equazione algebrica

$$1+\,a_1\,x+\cdots+\,a_n x^n\,=\,0$$

ha radici $x_1, x_2,\dots,x_n$, allora, per il teorema di Ruffini,

$$1+\,a_1\,x+\cdots+\,a_n x^n=\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\dots\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$$

(provarlo per **esercizio**). Inoltre è facile verificare che

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\,=\,-a_1\,. \tag{10}$$

Assumendo che (10) continui a valere anche per il polinomio "infinito" dell'equazione (8), segue che

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \cdots = -\left(-\frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{6}\,.$$

Sostituendo, nell'uguaglianza precedente, ad $x_1$, $x_2, \ldots$. i valori in (9), si ottiene che

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\,\pi)^2} + \frac{1}{(3\,\pi)^2} \cdots + \frac{1}{(n\,\pi)^2} + \cdots = \frac{1}{6}\,.$$

Dunque abbiamo provato che

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Ritorniamo alla dimostrazione del Teorema 1.2. Premettiamo, prima della sua dimostrazione , alcuni importanti risultati preliminari.

**Lemma 1.1** (Nucleo di Dirichlet)**.** *Vale la seguente formula*

$$\frac{1}{2} + \cos y + \cos(2y) + \cdots + \cos(ny) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\,y\right)}{2\,\sin(\frac{y}{2})} := \mathrm{D}_n(y) \tag{11}$$

*per ogni* $y \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$*, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*.*

**Dimostrazione.** Per induzione su $n$. Se $n = 0$ la (11) si riduce all'identità $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Supponiamo (11), allora, utilizzano la formula di addizione del seno,

$$\frac{1}{2} + \cos y + \cos(2y) + \ldots \cos((n-1)y) + \cos(ny) = \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})\,y\right)}{2\,\sin(\frac{y}{2})} + \cos(ny) =$$

$$= \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})\,y\right) + 2\,\sin(\frac{y}{2})\,\cos(ny)}{2\,\sin(\frac{y}{2})} = \frac{\sin(n\,y)\,\cos(\frac{y}{2}) + \sin(\frac{y}{2})\,\cos(ny)}{2\,\sin(\frac{y}{2})} =$$

$$= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\,y\right)}{2\,\sin(\frac{y}{2})}\,.$$

□

**Osservazione 6.** Dalla (11) segue che

$$\lim_{y\to 0} \mathrm{D}_n(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\,y\right)}{2\,\sin(\frac{y}{2})} = n + \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto possiamo supporre che, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{D}_n \in C^0([-\pi, \pi])$ definendo $\mathrm{D}_n(0) = n + \frac{1}{2}$. In particolare $\mathrm{D}_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ è limitata.

**Lemma 1.2** (Disuguaglianza di Bessel)**.** *Sia* $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *integrabile (secondo Riemann). Siano* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *i coefficienti di Fourier associati ad* $F$*, cioè vale* (6) *con* $f \equiv F$*. Allora*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2\,dx < \infty\,. \tag{12}$$

**Dimostrazione.** Denotiamo con $S_n(x)$ la successione in (7). Si ha, ovviamanente,

(13)
$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} (F(x) - S_n(x))^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \, S_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dalla definizione dei coefficienti di Fourier di $f$ otteniamo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \, S_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \right\} dx = \tag{14}$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx + \sum_{k=1}^{n} \left[ a_k \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(kx) dx \right] =$$

$$= \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) .$$

Analogamente si prova

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) . \tag{15}$$

(la dimostrazione è lasciata per **esercizio**).

Da (13), (14) e(15) segue che

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Passano al limite per $n \to \infty$ nella disuguaglianza precedente otteniamo la (12) (perché?). $\square$

**Osservazione 7.** La disuguaglianza (12) non assicura che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$: perchè ?

Dal lemma 1.2 segue subito il seguente

**Corollario 1.3** (Lemma di Riemann-Lebesgue)**.** *Nelle stesse ipotesi del Lemma 1.2 segue che*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0 .$$

**Esercizio:** Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periodica, $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ integrabile (s.R.). Allora

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(u) \, du = \int_{-\pi}^{\pi} g(u) \, du \quad \forall a \in \mathbb{R} .$$

**Dimostrazione Teorema 1.2.** Fissato $x \in \mathbb{R}$, denotiamo con $S_n(f)(x) \equiv S_n(x)$ la somma parziale $n$-esima della serie di Fourier associata a $f$, cioè la successione definita in (7).

Osserviamo che, dalla definizione di coefficiente di Fourier e dalla periodicità di $f$, possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}[\cos(kt)\cos(kx)+\sin(kt)\sin(kx)]\right\}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right\}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)\right\}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)\right\}du\,.
\end{aligned}
$$

Dal Lemma 1.1 e dall' Osservazione 6 segue allora la seguente rappresentazione integrale per $S_n$

$$
S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\mathrm{D}_n(t)\,dt \quad \forall x\in\mathbb{R}\,. \tag{16}
$$

Tramite, ancora, il Lemma 1.1 segue che

$$
\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{D}_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{D}_n(t)\,dt = \frac{1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}\,. \tag{17}
$$

Da (16) e (17), fissato $x\in\mathbb{R}$ segue che

$$
\begin{aligned}
S_n(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\mathrm{D}_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\,\mathrm{D}_n(t)\,dt - \\
&- \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)\,\mathrm{D}_n(t)\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(x+t)-f(x-0))\,\mathrm{D}_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+t)-f(x+0))\,\mathrm{D}_n(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{2\,\sin(t/2)}\sin((n+1/2)t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\,\sin(t/2)}\sin((n+1/2)t)\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Da questa catena di uguglianze segue allora che

$$
S_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} G(t)\,\sin((n+1/2)t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} G(t)\,\sin((n+1/2)t)\,dt\,, \tag{18}
$$

dove la funzione $G : [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ è definita da

$$
G(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{2\,\sin(t/2)} & \text{se } -\pi \le t < 0 \\ 0 & \text{se } t=0 \\ \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{2\,\sin(t/2)} & \text{se } 0 \le t < \pi \end{cases}.
$$

Supponiamo, per il momemto, che

(19) $G$ è integrabile (secondo Riemann)

e proviamo la tesi. Da (18) e (19) segue che

$$
S_n(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,\sin((n+1/2)t)\,dt = \tag{20}
$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,\cos(t/2)\,\sin(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,\sin(t/2)\,\cos(nt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_1(t)\,\sin(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_2(t)\,\cos(nt)\,dt$$

dove $F_1(t) := G(t)\,\cos(t/2)$, $F_2(t) := G(t)\,\sin(t/2)$. Applicando (19), dalle proprietà delle funzioni integrabili, segue che $F_i$ $(i = 1, 2)$ sono ancora integrabili su $[-\pi, \pi]$; dal Corollario 1.3 segue allora la tesi se $n \to \infty$ nella (20).

Per concludere la dimostrazione dobbiamo provare la (19). Per l' Osservazione 2, basta mostrare che $G : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ è limitata e continua, eccetto al più un numero finito di punti.

Consideriamo $f : [x - \pi, x + \pi) \to \mathbb{R}$ per $x \in \mathbb{R}$ fissato. Essendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $C^1$ a tratti, esistono

$$x - \pi = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = x + \pi$$

tale che esiste

$$f' : [x - \pi, x + \pi) \setminus \{y_0, y_1, \ldots, y_k\} \to \mathbb{R} \text{ continua e limitata.} \tag{21}$$

Denotiamo con $F : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(t) := \begin{cases} f(x+t) - f(x-0) & \text{se } -\pi \le t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ f(x+t) - f(x+0) & \text{se } 0 \le t < \pi \end{cases} .$$

Per definizione di $F$ e da (21) segue che

$$F \text{ è continua in } t = 0, \quad \exists F' : [-\pi, \pi) \setminus \{t_0, t_1, \ldots, t_k\} \to \mathbb{R} \text{ continua e limitata,} \tag{22}$$

dove $t_i := y_i - x$ per $i = 1, \ldots, k$.

Da (22) segue $F$ è continua eccetto al più nei punti $t = t_0, \ldots, t_k$ ed esistono finiti

$$\lim_{t \to t_i^-} F(t) = F(t_i - 0), \quad \lim_{t \to t_i^+} F(t) = F(t_i + 0)\,. \tag{23}$$

Poichè

$$G(t) = \frac{F(t)}{2\,\sin(t/2)} \quad t \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\}\,,$$

da (22) segue anche che

$$G \text{ è continua in ogni punto } t \in [-\pi, \pi) \setminus \{0, t_0, t_1, \ldots, t_k\}, \tag{24}$$

e da (23), se $t_i \neq 0$ per qualche $i = 0, \ldots, k$, allora esistono finiti

$$\lim_{t \to t_i^-} G(t) = \frac{F(t_i - 0)}{2\,\sin(t_i/2)}, \quad \lim_{t \to t_i^+} G(t) = \frac{F(t_i + 0)}{2\,\sin(t_i/2)}\,. \tag{25}$$

Proviamo ora che $G$ è limitata (sull'intervallo $[-\pi, \pi)$). Da (24) e (25), basta provare che $G$ è limitata in un intorno di 0.

Da (22) segue che non è restrittivo supporre che esistono $0 < \delta < \pi$ e $M > 0$ tale che

$$F \in C^0(-\delta, \delta)$$

e
$$\exists F' : (-\delta,\delta)\setminus\{0\}\to\mathbb{R} \text{ e } |F'(t)|\leq M \quad \forall t\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$$
Per il teorema di Cauchy, per ogni $t\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$ esiste $\xi$ compreso tra 0 e $t$ tale che
$$G(t)=\frac{F(t)}{2\,\sin(t/2)}=\frac{F(t)-F(0)}{2\,\sin(t/2)-2\,\sin(0/2)}=\frac{F'(\xi)}{\cos(\xi/2)}\,,$$
da cui segue
$$|G(t)|=|\frac{F'(\xi)}{\cos(\xi/2)}|\leq\frac{M}{\cos(\delta/2)}\quad\forall t\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$$
e dunque la tesi. □

1.5. **Serie di Fourier di funzioni pari e dispari.** Ricordiamo che data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ,

- $f$ si dice pari se $f(x)=f(-x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ ,
- $f$ si dice dispari se $f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ .

Vale allora la seguente

**Proposizione 1.4.** *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2\pi$-periodica e supponiamo che $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ sia integrabie (secondo Riemann). Sia*
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]\ .$$
*Allora*

(1) *se $f$ è pari allora $b_n=0$ , $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$ , $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x\ \forall n\in\mathbb{N}$ ,*

(2) *se $f$ è dispari allora $a_0=0$ , $a_n=0$ , $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\ \ \forall n\in\mathbb{N}$ .*

**Dimostrazione.**

(1)
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x+\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right]\tag{26}$$
e
$$\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(-y)\sin(-ny)\mathrm{d}y=-\int_0^\pi f(y)\sin(ny)\mathrm{d}y\ .\tag{27}$$
Dunque, da (26) e (27) segue che $b_n=0$ . Si ragiona nello stesso modo per provare che $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$ .

(2) È lasciata per **esercizio.** □

1.6. **Convergenza uniforme di una serie di Fourier.** Abbiamo studiato la convergenza puntuale della serie di Fourier associata ad una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2\,\pi$-periodica, $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann), cioè
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]\ .$$
In altre parole, definita la successione di funzioni
$$S_n(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)]\quad n\in\mathbb{N}\ ,$$

$S_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomio trigonometrico di grado $n$ , abbiamo studiato il problema:

- $$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \tilde{f}(x) \in \mathbb{R} \text{ per qualche } x \in \mathbb{R} \text{ ?}$$
- $\tilde{f}(x) = f(x)$ ?

Nelle applicazioni delle serie di Fourier è molto utile, alcune volte, considerare al posto della convergenza puntuale della successione di funzioni $S_n(f)$ , una nozione di convergenza "globale" sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, già incontrata nel teorema di esistenza ed unicità del problema di Cauchy di una EDO del I ordine, detta convergenza *uniforme*.

**Definizione 1.3.**
*(i) Siano $-\infty < a < b < +\infty$. Una successione di funzioni continue $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) si dice che converge uniformemente ad una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (su $[a, b]$) se esiste*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \tag{28}$$

*dove ricordiamo $\|g\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$.*
*(ii) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periodica con $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann), si dice che la serie di Fourier indotta da $f$ converge uniformemente ad $f$ su $[a, b]$ se la successione di funzioni delle somme parziali definita in* (7) *$S_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f$ (su $[a, b]$).*

**Osservazione 8.** Dalla definizione segue subito che, se una successione di funzioni continue $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) converge uniformemente ad un funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, allora converge anche puntualmente ad $f$, cioè esiste $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Il viceversa è falso. Per esempio, si consideri l'esempio 1 sull'intervallo $[0, 2\pi]$ ed il seguente Teorema 1.5: perchè la successione delle somme parziali della serie di Fourier, associata ad $f$, non può convergere a $f$ uniformemente su $[0, 2\pi]$ ?

**Teorema 1.5.** *Sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) una successione di funzioni continue convergente uniformemente ad una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora*
*(i) $f$ è continua;*
*(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.*

**Dimostrazione.** Proviamo il punto (i). Per definizione, la successione $(f_n)_n \subset C^0([a, b])$. Proviamo che la successione $(f_n)_n$ è di Cauchy in $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n > \bar{n} \,. \tag{29}$$

Comunque scelti $m > n > \bar{n}$, dalla (29), segue che

$$\|f_m - f_n\|_\infty \le \|f_m - f\|_\infty + \|f - f_n\|_\infty \le 2\,\varepsilon$$

e dunque, per definizione, $(f_n)_n$ è di Cauchy in $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Essendo $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ uno spazio metrico completo, esiste una funzione continua $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$. Per concludere la dimostrazione basta provare che

$$f(x) = f^*(x) \quad \forall x \in [a, b] \,. \tag{30}$$

La (30) segue subito dall'Osservazione 8 e dall'unicità del limite puntuale. Proviamo il punto (ii). Dalle proprietà dell'integrale segue che

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \to \infty$ nella disuguaglianza precedente otteniamo la tesi. □

**Osservazione 9.** La convergenza (solo) puntuale di una successione $(f_n)_n \subset C^0([a,b])$ verso una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non assicura sia la continuità di $f$ che la convergenza degli integrali. Infatti si consideri l'esempio dell'Osservazione 8: la successione delle somme parziali è una sucessione di funzioni continue su $[0, 2\pi]$, ma il limite puntuale non è continuo.

Per quanto riguarda la convergenza degli integrali si consideri la successione $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n\,x\,\exp(-n\,x^2)$. Provare che $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione identicamente nulla $f \equiv 0$ su $[0,1]$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$.

Vale il seguente criterio di convergenza uniforme di una serie di Fuorier, che enunceremo senza dimostrazione.

**Teorema 1.6** (Convergenza uniforme)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periodica, $C^1$ a tratti. Allora la serie di Fourier associata ad $f$ converge uniformemente ad $f$ su ogni intervallo $[a,b]$ in cui la funzione $f(x)$ è continua.*

Una immediata conseguenza del Teorema 1.5 (ii) è il seguente criterio di integrazione, termine a termine, per serie di Fourier.

**Corollario 1.7.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periodica con $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann) e $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$. Supponiamo che la serie di Fourier associata ad $f$ converge uniformemente ad $f$ su un fissato intervallo $[a,b]$. Allora, per ogni coppia $x_0$, $x \in [a,b]$,*

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \int_{x_0}^x \cos(nt)dt + b_n \int_{x_0}^x \sin(nt)dt\right]$$

**Dimostrazione.** Sia $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$ $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi la successione $(S_n)_n$ converge uniformemente ad $f$ su $[a,b]$. Applicando allora il Teorema 1.5 (ii) otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^x S_n(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt\,. \tag{31}$$

Per la linearità dell'integrale

$$\int_{x_0}^x S_n(t)\,dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \int_{x_0}^x \cos(kt)dt + b_k \int_{x_0}^x \sin(kt)dt\right]$$

e dalla (31) segue subito la tesi. □

**1.7. Rappresentazione complessa delle serie di Fourier.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-periodica, continua e supponiamo che sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \ .$$

Supponiamo che

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \ . \tag{32}$$

Ricordando l'esponenziale complesso

$$e^{\pm i\vartheta} = \cos\vartheta \pm i \sin\vartheta \ ,$$

otteniamo che

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \ , \ \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \ .$$

D'altra parte, si ha

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[ a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right] .$$

Allora possiamo scrivere

$$S_n(f)(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} [c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}] = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \ ,$$

avendo posto $c_0 = \frac{a_0}{2}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ , $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ , $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ .

D'altra parte la (32) è equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} |f(x) - S_n(f)(x)| = 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \ ,$$

che a sua volta è equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right| = 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \ ,$$

cioè, per definizione, a

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \ .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo esprimere i coefficienti $c_n$ e $c_{-n}$ tramite integrali, ottenendo che

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i0x} \mathrm{d}x \ ,$$

$$c_n = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \mathrm{d}x - \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \mathrm{d}x \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \ .$$

Analogamente si ritrova che

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x$$

e dunque che

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ .$$

1.8. **Cenno alle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ .** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-periodica, si possono estendere tutti i concetti introdotti per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , ottenendo un analogo risultato di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier, tenendo presente che il modulo di un numero complesso $z = x + iy$ è dato da $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , dove $\overline{z} = x - iy$ è il complesso coniugato di $z$ e la radice quadrata è intesa come radice quadrata reale.