

Esercizi svolti di Fisica Generale II

Dalle lezioni di Giuseppe Dalba

A.V.

21 dicembre 2013

Problema 1. Preso un filo sottile carico, di lunghezza $2a$ e distribuzione lineare di carica $\lambda =$ costante, determinare:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse del filo.
2. Sempre in un generico punto sull'asse, trovare \mathbf{E} nel limite in cui $a \rightarrow \infty$.

SOLUZIONE:

1. Da considerazioni di simmetria (vedi Figura 1), vale che $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_x$, dove \mathbf{E}_x indica la componente del campo \mathbf{E} nella direzione x . Ora,

$$E_x = k_e \int_l \frac{\lambda dl (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Poiché $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$, $\mathbf{r}' = (0, y', 0)$ e $dl \equiv dy'$, si ottiene che

$$E_x = k_e \int_{-a}^a \frac{\lambda dy' x}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} = k_e \lambda x \int_{-a}^a \frac{dy'}{[x^2 + y'^2]^{3/2}}$$

Usando la semplificazione $y' = x \tan \vartheta$, $dy' = \frac{x}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$, abbiamo:

$$\begin{aligned} E_x &= k_e \lambda x \int_{\arctan(-a/x)}^{\arctan(a/x)} \frac{\cancel{x} d\vartheta}{\cancel{\cos^2 \vartheta}} \frac{\cos^{\cancel{1}} \vartheta}{x^{\cancel{1}}} \\ &= \frac{k_e \lambda}{x} \int_{\arctan(-a/x)}^{\arctan(a/x)} \cos \vartheta d\vartheta \\ &= \boxed{\frac{2k_e \lambda}{x} \sin(\arctan(a/x))} \end{aligned}$$

2. Per $a \rightarrow \infty$, $\arctan(a/x) \rightarrow \pi/2$. Quindi,

$$E \rightarrow \frac{2k_e \lambda}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2k_e \lambda}{x} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}}$$

Notiamo che il campo ha lo stesso andamento riscontrato nel caso di cariche puntiformi! Inoltre, per ragioni di natura pratica, conviene equivalentemente studiare $x \ll a$ invece che $a \rightarrow \infty$.



Figura 1: Filo sottile carico

■

Problema 2. Presa una spira sottile carica, di raggio R e distribuzione lineare di carica $\lambda =$ costante, determinare:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse della spira.
2. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ come nel caso precedente, ma considerando i limiti $x \ll R$ e $x \gg R$.
3. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ in un qualsiasi punto che si trovi sull'asse di un disco avente lo stesso raggio e densità di carica superficiale $\sigma =$ costante.
4. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ come nel caso precedente, ma considerando il limite $R \rightarrow \infty$ (piano infinito).

SOLUZIONE:

1. La soluzione è identica al problema del filo sottile carico: chiamando x l'asse della spira, $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_x$. Considerando che $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ e $\mathbf{r}' = (0, y', z')$, il calcolo diventa:

$$\begin{aligned}
 E_x &= k_e \lambda \int_l \frac{dl(x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \frac{k_e \lambda x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \int_l dl \\
 &= \frac{k_e \lambda x l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \boxed{\frac{k_e \lambda x 2\pi R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}}
 \end{aligned}$$

2. Se $x \ll 1$, $E \rightarrow 0$. Se $x \gg R$, abbiamo invece

$$E \sim \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{k_e \lambda 2\pi R}{x^2} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 x^2}$$

Se Q è la carica del filo, $Q = \lambda 2\pi R$, quindi

$$E \sim \boxed{\frac{k_e Q}{x^2}}$$

Il risultato ci dice che, da lontano, la spira è assimilabile ad una carica puntiforme!

3. Per calcolare il campo generato da un disco, conviene prima calcolare il campo dE_x generato da un anello sottile, di spessore infinitesimo dr' . La superficie infinitesima dell'anello sarà dunque $dS = dr' dl$ ¹. Abbiamo:

$$\begin{aligned} dE_x &= k_e \int_S \frac{\sigma dS (x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_e \int_l \frac{\sigma dr' dl x}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_e \sigma dr' x}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \int_l dl = \frac{k_e \sigma dr' x l}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_e \sigma dr' x 2\pi r'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x r' dr'}{2\epsilon_0 (x^2 + r'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ora, basta integrare su tutta la lunghezza del raggio:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^R dE_x = \int_0^R \frac{\sigma x r' dr'}{2\epsilon_0 (x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^R \frac{2r' dr'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{-2}{\sqrt{x^2 + r'^2}} \right) \Big|_0^R \\ &= \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)} \end{aligned}$$

4. Per $x \ll R$, dal caso precedente segue immediatamente che:

$$\boxed{E \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

A distanza ravvicinata dal disco, \mathbf{E} si comporta come un campo costante!

■

Problema 3. Calcolare \mathbf{E} in un generico punto del piano in Figura 2, dove le distribuzioni superficiali di carica schematizzate sono da considerare di lunghezza e larghezza infinite.

SOLUZIONE: Da considerazioni di natura geometrica, si vede chiaramente che il campo assume i valori riportati in Figura 3.

¹ Equivalentemente, è possibile definire $dS = 2\pi r' dr'$, cioè prendere una corona circolare infinitesima, e integrare direttamente.



Figura 2: Distribuzioni di carica parallele



Figura 3: Distribuzioni di carica parallele

■

Problema 4. Calcolare il campo \mathbf{E} generato da un piano infinito carico elettricamente, considerandolo come successione infinita di fili di lunghezza a loro volta infinita. Il piano ha una densità superficiale di carica $\sigma = \text{costante}$.

SOLUZIONE: Iniziamo con delle considerazioni di natura geometrica. Prendiamo il piano di cariche in modo tale che sia coincidente col piano xz e dividiamolo in tanti fili paralleli all'asse z , ognuno di spessore infinitesimo dx . Dalla condizione $\sigma = \text{costante}$, otteniamo subito che la densità lineare di carica dei fili $\lambda = \sigma dx = \text{costante}$.

Siano ora x' la distanza di un filo generico dall'asse z e y la distanza di un punto generico P dal piano di cariche. Per semplicità, possiamo prendere $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$ e $\mathbf{r} = (0, y, 0)$, in modo tale che P abbia coordinate $(0, y, 0)$ e $dx = dx'$. Il campo nel punto P generato dal filo in posizione \mathbf{r}' non sarà, in generale, parallelo all'asse y . Avrà una componente E_x diretta lungo l'asse x e una componente E_y diretta lungo l'asse y . Ma se prendiamo il filo in posizione $-\mathbf{r}'$, quest'ultimo indurrà in P un campo che avrà componenti $-E_x$ e E_y ! Quindi il campo totale generato dai due fili sarà diretto lungo l'asse y e avrà modulo²

$$E_{2 \text{ fili}} = 2E_y = \frac{\lambda y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)}$$

Ora, per avere il campo generato da tutti i fili, basta usare il principio di sovrapposizione e integrare $E_{2 \text{ fili}}$ da 0 a $+\infty$:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{+\infty} E_{2 \text{ fili}} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sigma dx' y}{\pi \varepsilon_0 (x'^2 + y^2)} = \frac{\sigma y}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)} \\ &= \frac{\sigma y}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dx'}{y^2 \left(\left(\frac{x'}{y} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dx'}{y}}{\left(\left(\frac{x'}{y} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \arctan \left(\frac{x'}{y} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}} \end{aligned}$$

coerentemente con quanto trovato nel caso del disco a raggio infinito.

■

Problema 5. Calcolare il campo \mathbf{E} generato da una lamina di spessore $2a$, che abbia le restanti due dimensioni infinite. La lamina ha una densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$.

SOLUZIONE: Per risolvere il problema, basta dividere la lamina metallica in tante “sfoglie” sottili, di spessore infinitesimo ds e di superficie infinita. La densità di carica superficiale delle “sfoglie”

² Per il campo generato da un filo infinitamente lungo, riguardare il relativo esercizio.

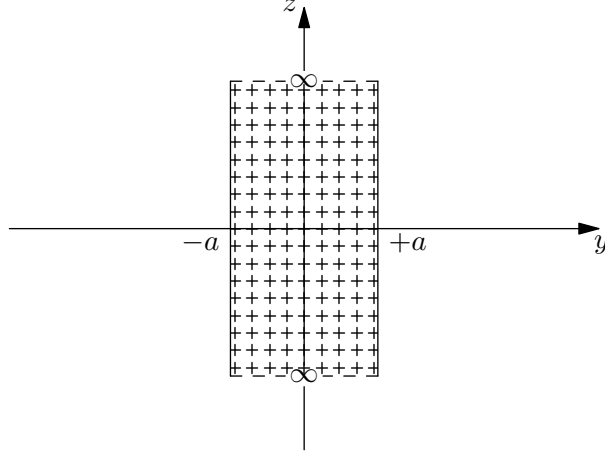


Figura 4: Lamina di spessore $2a$

sarà dunque $\sigma = \rho ds = \text{costante}$, e il campo generato dalla singola sfoglia in un punto generico sarà semplicemente:

$$E_{\text{sfoglia}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho ds}{2\varepsilon_0}$$

Per comodità, possiamo posizionare il sistema di riferimento in modo tale che lo spessore della lamina sia parallelo al piano yz e il piano xz divida la lamina esattamente a metà (vedi Figura 4). Con questa configurazione $ds = dy$, e utilizzando il principio di sovrapposizione è possibile calcolare il campo totale all'esterno della lamina integrando il campo della singola sfoglia da $-a$ ad a :

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}} &= \int_{-a}^a E_{\text{sfoglia}} = \int_{-a}^a \frac{\rho ds}{2\varepsilon_0} \\ &= \int_{-a}^a \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_{-a}^a dy \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} 2a = \boxed{\frac{\rho a}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

Il campo avrà segno positivo nel verso positivo dell'asse y , negativo nel verso negativo dell'asse y .

Per calcolare il campo all'interno della lamina si segue la stessa procedura, cambiando però gli estremi di integrazione. In un punto generico in posizione y rispetto al piano xz , si ottiene:

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= - \int_y^a E_{\text{sfoglia}} + \int_{-a}^y E_{\text{sfoglia}} \\ &= - \int_y^a \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} + \int_{-a}^y \frac{\rho dy}{2\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(- \int_y^a dy + \int_{-a}^y dy \right) \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (-a + y + y + a) = \boxed{\frac{\rho y}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

■

Problema 6. Sia data una sfera cava di raggio R , carica elettricamente con densità superficiale di carica $\sigma = \text{costante}$. Determinare \mathbf{E} in un punto generico dello spazio.

SOLUZIONE: Sfruttando la simmetria del problema, possiamo ridurre le dimensioni da 3 a 1 per semplificare i calcoli. Distinguiamo due casi.

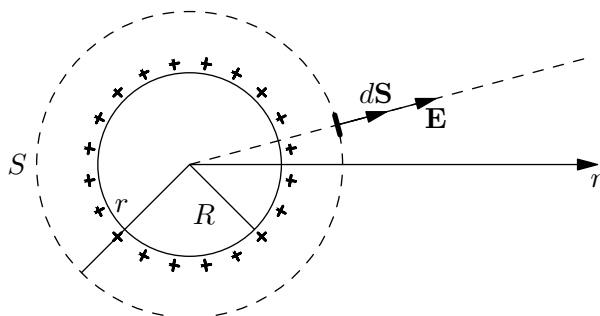


Figura 5: Sfera cava

- $r \geq R$

Vogliamo sfruttare il Teorema di Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

A tale scopo, consideriamo una superficie sferica S di raggio $r \geq R$: per la natura del campo, \mathbf{E} sarà sempre perpendicolare a tale superficie. Inoltre, poiché \mathbf{E} dipende solo dalla distanza dal centro (una volta fissata la carica generatrice), il modulo di \mathbf{E} sarà costante in ogni punto della superficie che stiamo considerando (vedi Figura 5).

Possiamo quindi scrivere:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 4\pi r^2$$

Indicando poi con S_f la superficie della sfera, dalla definizione si ottiene immediatamente che:

$$Q = \int \sigma dS_f = \sigma \int dS_f = \sigma 4\pi R^2$$

Applicando il Teorema di Gauss, segue che:

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \implies \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

ossia

$$\boxed{E = k_e \frac{Q}{r^2}}$$

come nel caso di una carica puntiforme! In particolare per $r = R$, sfruttando il fatto che $Q = \sigma 4\pi R^2$,

$$E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- $r < R$

Dal Teorema di Gauss segue banalmente che

$$E = 0$$

■

Problema 7. Sia data una sfera di raggio R , carica elettricamente con densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$. Determinare \mathbf{E} in un punto generico dello spazio.

SOLUZIONE: Distinguiamo due casi.

- $r \geq R$

È come nel caso della sfera cava, basta sfruttare il principio di sovrapposizione! Quindi, se $Q = \int_V \rho(\tau) d\tau$ è la carica contenuta nella sfera, si ha semplicemente che

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

- $r < R$

Sfruttiamo il Teorema di Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Valgono:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2$$

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Eguagliando le due relazioni sopra, troviamo che

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

■

Problema 8. Considerare di nuovo il problema della lamina infinita di spessore $2a$, carica elettricamente con densità volumetrica di carica $\rho = \text{costante}$. Trovare \mathbf{E} usando il Teorema di Gauss.

SOLUZIONE: Distinguiamo due casi.

- All'esterno della lamina

Consideriamo un cilindro di altezza $h \geq 2a$ e raggio di base r , posizionato in modo che abbia le due basi parallele alle facce della lamina. Calcoliamo il flusso:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{sup. later.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo, perché $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$. D'altra parte, attraverso le due basi, $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$ e quindi $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$. Il calcolo si semplifica notevolmente:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{\text{base}} E dS = 2E\pi r^2$$

D'altra parte, la carica contenuta all'interno del cilindro è $Q = \rho\pi r^2 2a$, quindi applicando il Teorema di Gauss si ottiene:

$$E = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}$$

- All'interno della lamina

Il calcolo è del tutto analogo a quello del caso precedente. Il cilindro, questa volta, avrà un'altezza $h = 2y < 2a$, e la carica contenuta all'interno sarà $Q = \rho\pi r^2 2y$. Applicando il Teorema di Gauss,

$$E = \frac{\rho y}{\varepsilon_0}$$

■

Problema 9. Due cariche q puntiformi e della stessa grandezza sono disposte a distanza a lungo l'asse in posizione simmetrica rispetto al piano $y = 0$ (Figura 6). Si calcoli il campo elettrico in ciascun punto del piano nei seguenti casi:

1. Le cariche siano dello stesso segno.
2. Le cariche abbiano polarità opposta.

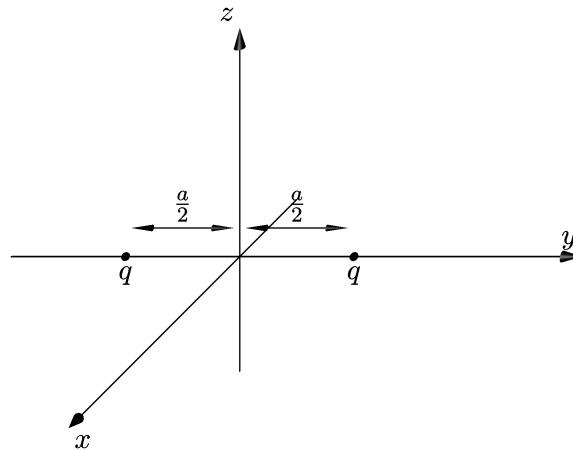


Figura 6: Cariche puntiformi in tre dimensioni

SOLUZIONE: Iniziamo col notare che il piano $y = 0$ corrisponde all'“asse” (bidimensionale) del segmento che congiunge le due cariche; inoltre, la forza elettrica è una forza centrale, quindi possiamo ridurre il problema da 3 a 2 dimensioni. Detto in altro modo, si tratta di studiare l'andamento del campo sull'asse del segmento che congiunge due cariche puntiformi.

Per comodità, scegliamo come asse proprio l'asse x ; il generico punto $(x, 0, 0)$ avrà dunque distanza $\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ da ognuna delle due cariche. Il modulo del campo \mathbf{E} nel punto preso in considerazione sarà chiaramente

$$E = k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

e la direzione di \mathbf{E} formerà con l'asse x un angolo ϑ tale che:

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}; \quad \sin \vartheta = \frac{a/2}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Fatte queste premesse, possiamo ora distinguere i due casi.

1. Cariche dello stesso segno

Supponiamo, per semplicità, che le due cariche siano positive (se fossero entrambe negative il campo elettrico differirebbe solo per il verso). La situazione è schematizzata in Figura 7.



Figura 7: Due cariche positive

Facendo il calcolo,

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= 2E \cos \vartheta = 2k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{2k_e q x}{\left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \boxed{\frac{q x}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}} \end{aligned}$$

2. Cariche di segno opposto

Supponiamo, per semplicità, che la carica di sinistra in Figura 8 sia positiva e quella a destra negativa (se fosse al contrario il campo elettrico differirebbe solo per il verso).

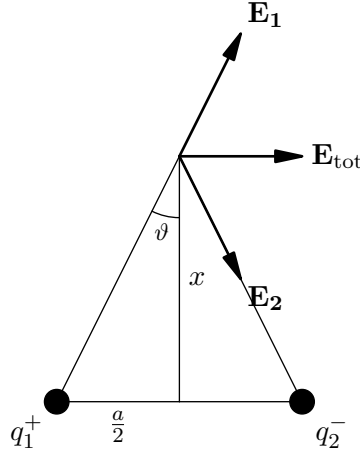


Figura 8: Due cariche di segno opposto

Facendo il calcolo,

$$\begin{aligned}
 E_{\text{tot}} &= 2E \sin \vartheta = 2k_e \frac{q}{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \frac{a/2}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \\
 &= \frac{k_e qa}{\left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \boxed{\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}}
 \end{aligned}$$

■

Problema 10. *Un cilindro di raggio R e lunghezza $2L$ è disposto verticalmente con il proprio asse coincidente con l'asse z ed è centrato rispetto al piano $z = 0$. Sulla parete sottile del cilindro è distribuita uniformemente una carica di densità superficiale σ .*

1. *Si calcoli il campo elettrostatico lungo l'asse del cilindro.*
2. *Si valuti il campo per $L \rightarrow 0$ e per $L \rightarrow \infty$.*

SOLUZIONE: Considerando h come la distanza fra il piano identificato da $z = 0$ e il punto generico $(0, 0, z)$ sulla quale calcoliamo il campo elettrico, ho che ogni superficie dS dà un contributo pari a:

$$|d\mathbf{E}| = k_e \frac{\sigma(z-h)dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

dove $dS = 2\pi R dh$ e $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + (z-h)^2}$.

Integrando fra $-L$ e L ottengo:

$$|\mathbf{E}| = \int_{-L}^L k_e \frac{\sigma(z-h)dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_e \int_{-L}^L \frac{\sigma(z-h)2\pi R}{\left(\sqrt{R^2 + (z-h)^2}\right)^3} dh$$

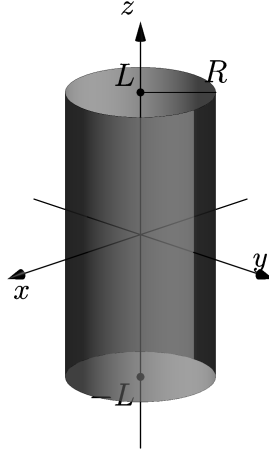


Figura 9: Cilindro cavo verticale

Posso risolvere l'integrale effettuando la sostituzione $s = z - h$ ($ds = -dh$); l'integrale si riduce a:

$$|\mathbf{E}| = -2k_e\sigma\pi R \int \frac{s}{(\sqrt{R^2 + s^2})^3} ds = 2k_e\sigma\pi R \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-h)^2}} \right]_{-L}^L$$

da cui il risultato:

$$|\mathbf{E}| = 2k_e\sigma\pi R \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z+L)^2}} \right]$$

Per $L \rightarrow 0$, il campo elettrico è 0, così come per $L \rightarrow \infty$.

■

Problema 11. Una carica di densità volumetrica è distribuita uniformemente in un volume cilindrico di raggio R e lunghezza infinita. Si calcoli il campo elettrostatico ovunque nello spazio.

SOLUZIONE: Per comodità pongo il generico punto in cui voglio calcolare il campo elettrico sull'asse y . Per simmetria (dato che ogni elemento infinitesimo di volume ha un corrispettivo simmetricamente opposto sul cilindro) le componenti diverse da quelle sull'asse delle y si annullano: il campo va dunque calcolato sull'asse y .

Il contributo infinitesimo di ogni coppia di volumi infinitesimi è dato da:

$$|d\mathbf{E}| = 2k_e \frac{\rho dV y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Con considerazioni geometriche sul disegno (pongo y la distanza fra il volume infinitesimo e il punto su cui voglio calcolare il campo, ed h la distanza fra il piano $z = 0$ e il volume infinitesimo) ottengo le seguenti relazioni: $h = y \tan \vartheta$ e $\cos \vartheta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = y$, da cui ricavo $dh = y \frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$. Sostituendo:

$$|d\mathbf{E}| = k_e \frac{2\rho\pi R^2 y^2 \frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta}{\frac{y^3}{\cos^3 \vartheta}} = k_e \frac{2\rho R^2 \cos \vartheta}{y} d\vartheta$$

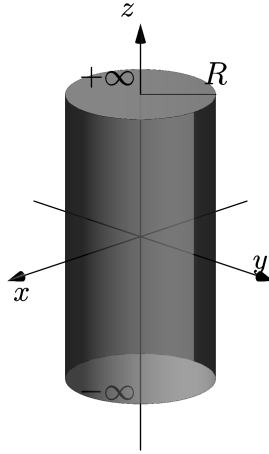


Figura 10: Volume cilindrico di lunghezza infinita

Integrando fra 0 e $\pi/2$ ottengo il risultato:

$$E_y = k_e \frac{2\rho\pi R^2}{y} = \boxed{\frac{\rho R^2}{2y\epsilon_0}} \quad (1)$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto sfruttando il teorema di Gauss e considerando come superficie un cilindro di raggio y con l'asse coincidente a quella del nostro cilindro. Dato che il campo elettrico è diretto verso l'asse y per le considerazioni di cui sopra, si può considerare solo la superficie esterna del cilindro. Vale dunque (se consideriamo i cilindri della stessa lunghezza L):

$$E2\pi yL = \frac{\pi R^2 L \rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Il campo elettrico non dipende dunque da L ed ottengo lo stesso risultato (1).

Con il teorema di Gauss è possibile calcolare facilmente anche il campo elettrico nel caso in cui $y < R$, sostituendo y a R (per il teorema di Gauss consideriamo solo le cariche interne), ottenendo:

$$\boxed{E_y = \frac{\rho y}{2\epsilon_0}}$$

■

Problema 12. Una linea di trasmissione è costituita da un cavo sottile rettilineo ed infinitamente lungo su cui è distribuita uniformemente una carica di densità $\lambda = 10^{-7}$ C/m. La linea è disposta parallelamente al suolo ad una distanza $D = 10$ m. Trascurando l'influenza del terreno si calcoli:

1. Il campo elettrico ovunque nello spazio.
2. La grandezza del campo elettrico sul terreno giusto al disotto della linea.

Sotto la prima linea ne viene aggiunta, parallelamente ad essa, una seconda a distanza $d = 2$ m su cui è distribuita uniformemente una carica di densità lineare uguale ed opposta, pari cioè a -10^{-7} C/m. Si calcoli:

3. Il campo elettrico in un generico punto dello spazio.

4. Il campo elettrico al livello del suolo immediatamente al disotto delle linee.

SOLUZIONE:

1. Avevamo già calcolato il campo generato da un filo infinito. Ricordiamo che, a distanza x dall'asse del filo, il campo è perpendicolare al filo stesso e in vale:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \hat{\mathbf{x}}$$

2. Basta porre $x = D$ nella formula precedente per ottenere:

$$\mathbf{E}_D = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D} \hat{\mathbf{x}} \simeq \boxed{179.95 \text{ N/C}}$$

3. Preso un generico punto P, indichiamo con x^+ la sua distanza dall'asse del filo con densità di carica λ^+ positiva, e con x^- la sua distanza dall'asse del filo con densità di carica λ^- negativa. Poniamo inoltre $\lambda = |\lambda^+| = |\lambda^-|$.

Dal principio di sovrapposizione e utilizzando la formula al primo punto, otteniamo:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x^+} \hat{\mathbf{x}}^+ - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x^-} \hat{\mathbf{x}}^- = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^+}{x^+} - \frac{\hat{\mathbf{x}}^-}{x^-} \right)}$$

Il segno del campo può essere (arbitrariamente) riferito al filo positivo, per cui un segno “+” nel risultato indicherà un campo *uscende* dal filo positivo, mentre un “-” un campo *entrante*.

4. Basta sostituire $x^+ = D$, $x^- = D - d$ e $\hat{\mathbf{x}}^+ = \hat{\mathbf{x}}^-$ nella formula precedente per ottenere:

$$\mathbf{E}_D = -\frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0 D(D-d)} \hat{\mathbf{x}}^+ \simeq \boxed{-44.94 \text{ N/C}}$$

dove il segno “-” indica che il campo è diretto verso il filo di densità di carica positiva.

■

Problema 13. Una carica è distribuita su un filo sottile infinitamente lungo ripiegato su se stesso come in Figura 11. I tratti rettilinei sono paralleli tra loro. La densità di carica lineare è uguale a λ ; il raggio di curvatura del filo è R .

Calcolare il campo elettrico lungo l'asse z passante per il centro della circonferenza di raggio R .

SOLUZIONE: ³ Per il principio di sovrapposizione posso considerare il campo elettrico come la somma di tre contributi: due dati dai fili infiniti paralleli e uno dato dalla semicirconferenza.

Calcoliamo il contributo al campo elettrico dato dalla semicirconferenza. Si nota che la componente sull'asse x del campo è nulla per simmetria. Calcoliamo dunque il campo sugli assi y e z . Vale:

$$d\mathbf{E} = k_e \frac{\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

³ La soluzione qui proposta non calcola il campo lungo l'asse z , ma in ogni punto dell'asse z , ed è quindi più generale rispetto a quanto richiesto dal problema.

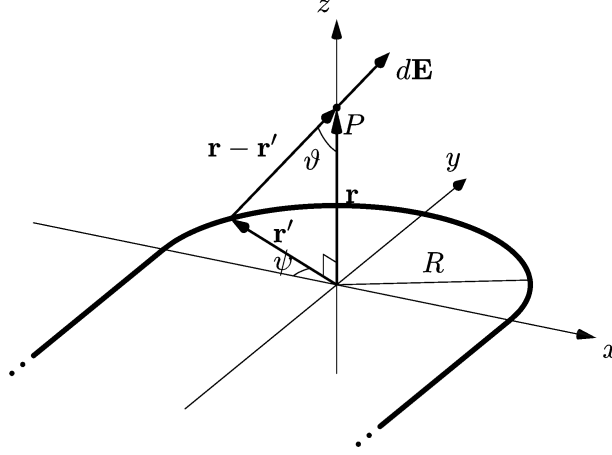


Figura 11: Filo carico ricurvo

Consideriamo i vettori posizione $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ (vettore che identifica il generico punto dell'asse z nel quale sto calcolando il campo) e $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$, R il raggio della semicirconferenza e $\psi \in [0, \pi]$ l'angolo sul piano $z = 0$ compreso fra il vettore \mathbf{r}' e l'asse x . Il contributo infinitesimo al campo elettrico sull'asse y è dato da:

$$d\mathbf{E}_y = k_e \frac{\lambda(-R \sin \psi) dl}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} = k_e \frac{\lambda(-R \sin \psi) R d\psi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}},$$

da cui ho:

$$\mathbf{E}_y = k_e \int_0^\pi \frac{\lambda(-R \sin \psi) R d\psi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} = -2k_e \frac{\lambda R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}}.$$

Il contributo al campo elettrico sull'asse z è invece dato da (considerando ϑ l'angolo costante fra l'asse z e il vettore $d\mathbf{E}$):

$$d\mathbf{E}_z = k_e \frac{\lambda R d\psi \cos \vartheta}{(R^2 + z^2)} \hat{\mathbf{z}} = k_e \frac{\lambda R \psi \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}}{(R^2 + z^2)} \hat{\mathbf{z}} = k_e \frac{\lambda R z d\psi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

e integrando lungo tutta la semicirconferenza:

$$\mathbf{E}_z = k_e \int_0^\pi \frac{\lambda R z d\psi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = k_e \frac{\lambda R z \pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Il filo di lunghezza infinitesima contribuisce al campo, per le stesse considerazioni di simmetria di cui sopra, sull'asse y e z . Per semplificare possiamo trattare il problema come se si svolgesse su un unico piano senza mancare di generalità: infatti, il campo elettrico generato da un filo disposto su una semiretta di lunghezza infinita, sui punti disposti lungo la retta perpendicolare al filo passante per la sua estremità, dipende solo dalla distanza. Consideriamo tale distanza $\sqrt{R^2 + z^2}$, abbiamo che (si veda esercizio I.22 [Mencuccini], pag. 72: le formule utilizzate in seguito sono state ricavate facendo tendere ad infinito la lunghezza del filo) la componente z (componente y sull'esercizio del [Mencuccini] moltiplicata per $\cos \vartheta$) è:

$$\mathbf{E}_z = 2k_e \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}} \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}} = 2k_e \frac{\lambda z}{R^2 + z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

La componente y è invece:

$$\mathbf{E}_y = 2k_e \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{\mathbf{y}}$$

La soluzione è dunque:

$$\mathbf{E} = \left(2k_e \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2k_e \frac{\lambda R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(k_e \frac{\lambda R z \pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + 2k_e \frac{\lambda z}{R^2 + z^2} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Per completezza, riportiamo come ottenere il campo generato dai due fili per integrazione diretta. Usando la simmetria del sistema, il campo totale generato dai due fili sarà il doppio di quello generato da un filo. Detta $l \in [0, +\infty]$ la distanza lungo il filo a partire dall'asse x , la componente lungo z del campo è

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}_z &= 2k_e \frac{\lambda dl}{l^2 + R^2 + z^2} \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}} \\ &= 2k_e \frac{\lambda dl}{l^2 + R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{l^2 + R^2 + z^2}} \hat{\mathbf{z}} = 2k_e \frac{\lambda z dl}{(l^2 + R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Integrando su tutta la lunghezza,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= \int_0^{+\infty} d\mathbf{E}_z \\ &= \int_0^{+\infty} 2k_e \frac{\lambda z dl}{(l^2 + R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \\ &= 2k_e \lambda z \int_0^{+\infty} \frac{dl}{(l^2 + R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

L'integrale può essere risolto con la sostituzione $l = \sqrt{z^2 + R^2} \tan u$, $dl = \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{\cos^2 u} du$, $\frac{1}{1 + \tan^2 u} = \cos^2 u$, con la quale il calcolo si semplifica in:

$$\mathbf{E}_z = 2k_e \frac{\lambda z}{(R^2 + z^2)} \int_0^{\pi/2} \cos u du \hat{\mathbf{z}} = \boxed{2k_e \frac{\lambda z}{(R^2 + z^2)} \hat{\mathbf{z}}}.$$

Similmente per l'altra componente. ■

Problema 14. Una carica è distribuita uniformemente lungo un filo sottile di lunghezza L con densità uniforme λ . Inizialmente il filo è disposto a distanza d da una superficie piana infinitamente grande, carica uniformemente con densità di carica σ . Calcolare il lavoro richiesto per ruotare il filo di 90° come in Figura 12.

SOLUZIONE: Iniziamo col dire che il lavoro *richiesto* è pari al lavoro delle forze del campo cambiato di segno. Nel nostro caso,

$$W_R = -W_E$$

dove W_R indica il lavoro richiesto e W_E il lavoro fatto dalla forza elettrica.

Consideriamo ora un pezzettino di lunghezza infinitesima dl sul filo, a distanza l dall'estremo di rotazione, e indichiamo con dh lo spostamento infinitesimo lungo la direzione di \mathbf{E} . Poiché \mathbf{E} è

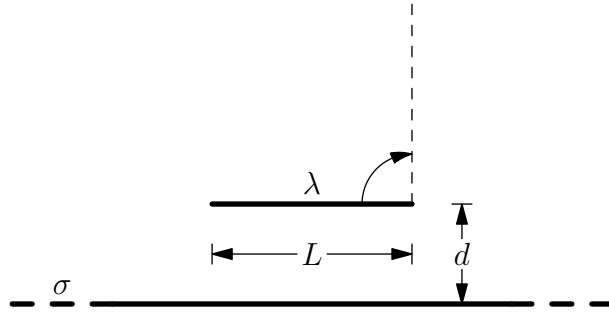


Figura 12: Spostamento di un filo carico

conservativo, possiamo pensare di sostituire l'arco di circonferenza compiuto dal pezzettino con una spezzata che procede in direzione di \mathbf{E} per il primo tratto, e poi continua orizzontalmente fino al punto di arrivo. Il lavoro compiuto nel tratto orizzontale è nullo, perché $\mathbf{E} \perp d\mathbf{s}$; quindi il lavoro richiesto per ruotare il suddetto pezzettino di un angolo pari a $\pi/2$ sarà:

$$dW_R = - \int (\lambda dl) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^l (\lambda dl) E dh = -\lambda dl E \int_0^l dh = -\lambda dl El$$

dove nel calcolo abbiamo usato il fatto che, per un piano infinito, E è costante e non dipende dalla distanza.

Per trovare il lavoro totale, basta ora integrare su tutta la lunghezza L del filo:

$$W_R = \int dW_R = \int_0^L -\lambda E l dl = -\lambda E \int_0^L l dl = -\lambda E \left. \frac{l^2}{2} \right|_0^L = -\lambda E \frac{L^2}{2}$$

Dal Teorema di Gauss, sappiamo che per una piastra infinita carica uniformemente vale:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Sostituendo l'espressione di E in quella di W_R , otteniamo infine:

$$W_R = -\frac{\lambda\sigma L^2}{4\varepsilon_0}$$

Il segno “−” nel risultato è indicativo del fatto che il sistema non ha bisogno di un lavoro esterno per posizionare il filo in quella posizione; essendo infatti le due distribuzioni con lo stesso segno, la piastra e il filo tendono a respingersi, e il filo si posiziona spontaneamente in verticale.

Soluzione alternativa. Il lavoro richiesto può essere anche pensato come il lavoro necessario a spostare il “centro di carica” nella posizione desiderata. La carica del centro di carica è, per definizione, $Q = \lambda L$, mentre la sua posizione è pari a

$$\frac{1}{\lambda L} \int_0^L \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dl = \frac{L}{2}.$$

Per quanto detto prima, il lavoro necessario a spostare il centro di carica è pari al lavoro necessario per spostarlo di un tratto verticale di lunghezza $L/2$, cioè:

$$W_R = -QE \frac{L}{2} = -\lambda L E \frac{L}{2} = -\lambda E \frac{L^2}{2} = \boxed{W_R = -\frac{\lambda\sigma L^2}{4\varepsilon_0}}.$$

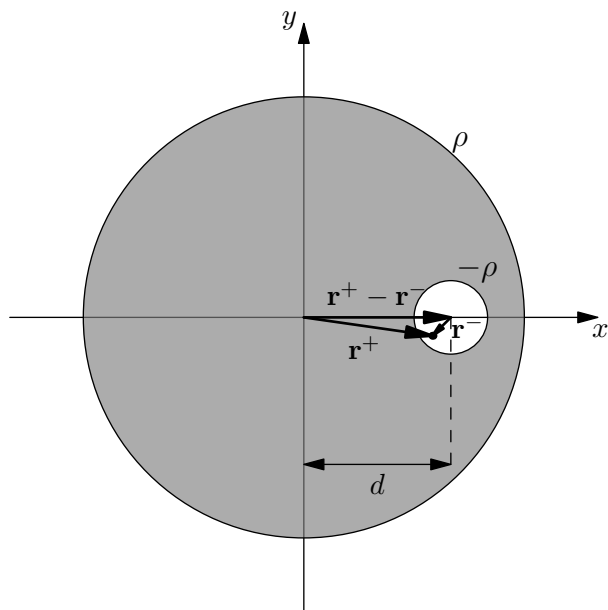


Figura 13: Cilindro forato

■

Problema 15. In un cilindro infinitamente lungo di raggio R , uniformemente carico con densità di carica ρ , è praticato, fuori asse, un foro di raggio a il cui centro è distante d dal centro del cilindro.

Calcolare il campo elettrico all'interno del foro.

SOLUZIONE: Considerata la geometria del sistema, possiamo:

1. ridurre il problema a due dimensioni, e rappresentare il cilindro – visto dall'alto – come un cerchio al cui interno è presente un altro cerchio più piccolo, fuori asse;
2. supporre che $\rho > 0$;
3. supporre che i centri dei due cerchi siano entrambi sull'asse x ,

senza perdere di generalità. La situazione è schematizzata in Figura 13. Il nostro sistema può essere ora immaginato come la sovrapposizione di due cilindri: uno di raggio R e densità di carica ρ , e uno di raggio a e densità di carica $-\rho$. Sappiamo che il campo all'interno di un cilindro carico uniformemente è

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \mathbf{r}, \quad (3)$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione di un generico punto all'interno del cilindro rispetto all'asse, ed è perpendicolare a quest'ultimo. Indichiamo poi con

$$\mathbf{E}^+ = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \mathbf{r}^+$$

il campo generato dal cilindro grande, e con

$$\mathbf{E}^- = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \mathbf{r}^-$$

il campo generato da quello piccolo; dal principio di sovrapposizione il campo totale sarà quindi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-) = \boxed{\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d\hat{\mathbf{x}}}$$

■

Problema 16. Date tre cariche q_1, q_2, q_3 disposte casualmente nello spazio, trovare in un dato punto P i potenziali V_1, V_2, V_3 che generano.

Si sostituiscano ora q_1, q_2, q_3 con altre tre cariche q'_1, q'_2, q'_3 e si ricalcolino i nuovi potenziali V'_1, V'_2, V'_3 .

1. Si dimostri che

$$q_1 V'_1 + q_2 V'_2 + q_3 V'_3 = q'_1 V_1 + q'_2 V_2 + q'_3 V_3.$$

In generale, per N cariche, vale che

$$\sum_{i=1}^N (q_i V'_i - q'_i V_i) = 0$$

(Teorema della reciprocità di Green).

2. Estendere il teorema al caso di un conduttore perfetto su cui è depositata una carica Q e al potenziale del conduttore.

SOLUZIONE:

1. Fissiamo un sistema di riferimento e indichiamo con $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ i vettori posizione – rispettivamente – di q_1, q_2, q_3 (che coincidono anche con quelli di q'_1, q'_2, q'_3). Detto \mathbf{r}_P il vettore posizione del generico punto P , valgono:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_1\|}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_2\|}, \quad V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_3}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_3\|}, \quad (4)$$

$$V'_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_1}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_1\|}, \quad V'_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_2}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_2\|}, \quad V'_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_3}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_3\|}, \quad (5)$$

Dalle equazioni scritte sopra, notiamo

$$q_i V'_i = q'_i V_i \quad (6)$$

$\forall i = 1, 2, 3$, ossia

$$\sum_{i=1}^3 (q_i V'_i - q'_i V_i) = 0 \quad (7)$$

che prova la tesi. L'estensione al caso di N cariche è immediata.

2. Basta generalizzare l'equazione (7) (per N cariche puntiformi) a due configurazioni con distribuzione superficiale di carica,⁴ chiamiamole σ_1 e σ_2 , sostituendo \sum con \int e q_i con dq .

⁴In questo caso, si tratta dello stesso conduttore caricato in due modi diversi. Per la generalizzazione a due corpi diversi con distribuzioni di carica generiche, si veda più avanti.

Abbiamo dunque:

$$\int_{S_1} \sigma_1 V_2 dS_1 = \int_{S_2} \sigma_2 V_1 dS_2$$

che, poiché i potenziali sono costanti e $\int_S \sigma dS = Q$, si riduce a:

$$Q_1 V_2 = Q_2 V_1.$$

Definendo

$$C \doteq \frac{Q}{V},$$

possiamo riscrivere il risultato come:

$$\boxed{C_1 = C_2.}$$

Il risultato ci dice che la quantità C non dipende da *come* carichiamo un dato conduttore, ma è una *proprietà specifica* del conduttore stesso che rimane costante. Tale proprietà si chiama *capacità elettrica*.

■

Problema 17. Generalizzare l'equazione (7) a due distribuzioni di carica qualsiasi⁵ (si veda anche Problema 3.50 [Griffiths]).

SOLUZIONE: Dobbiamo provare che, data una distribuzione di carica $\rho_1(\mathbf{r})$ che genera un potenziale V_1 , e una distribuzione di carica $\rho_2(\mathbf{r})$ che genera un potenziale V_2 , vale la relazione:⁶

$$\int_{\text{spazio}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau \quad (8)$$

Partiamo dall'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (9)$$

e applichamola con $f \mathbf{A} = V_1(\nabla V_2)$, ottenendo:

$$\nabla \cdot (V_1 \nabla V_2) = V_1 \nabla \cdot \nabla V_2 + \nabla V_1 \cdot \nabla V_2$$

Ora, usando il fatto che $\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1$, $\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2$ e $\nabla \cdot \mathbf{E}_2 = \rho_2/\varepsilon_0$, otteniamo:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \nabla \cdot (V_1 \nabla V_2) + V_1 \frac{\rho_2}{\varepsilon_0} \quad (10)$$

⁵ Il problema proposto in precedenza fa riferimento a due distribuzioni di carica con la *stessa* geometria, ed in particolare due distribuzioni superficiali. Qui si stanno invece considerando due distribuzioni volumetriche di forma qualsiasi, anche molto diversa fra loro. Lo scopo è di dimostrare l'uguaglianza nel caso più generale di due corpi generici, non necessariamente per uno stesso conduttore caricato in due modi differenti.

⁶ \int_{spazio} indica l'integrale su tutto lo spazio.

Integrando su tutto lo spazio e usando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \int_{\text{spazio}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau &= \int_{\text{spazio}} \nabla \cdot (V_1 \nabla V_2) d\tau + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau \\ &= \int_{\text{spazio}} V_1 \nabla V_2 \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau \end{aligned}$$

0

dove il primo integrale è nullo perché è un integrale di superficie su tutto lo spazio. Rimane quindi:

$$\int_{\text{spazio}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau \quad (11)$$

Analogamente, applicando (9) con $f\mathbf{A} = V_2(\nabla V_1)$, otteniamo:

$$\int_{\text{spazio}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{spazio}} \rho_1 V_2 d\tau \quad (12)$$

Confrontando (11) e (12), otteniamo infine

$$\int_{\text{spazio}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_{\text{spazio}} \rho_2 V_1 d\tau,$$

che prova la tesi. ■

Problema 18. Una carica $q > 0$ è posta in un punto P di fronte ad un conduttore collegato a terra.

1. Calcolare la carica q_{in} indotta sul conduttore dalla carica q applicando il Teorema di reciprocità, e supponendo che lo stesso conduttore, carico ad un potenziale V_C , generi nel punto P il potenziale V_P in assenza di carica.
2. Se il generico conduttore è sostituito da una sfera conduttrice di raggio R il cui centro è distante D dal punto P , si determini q_{in} in funzione di q , R e D alle stesse condizioni del punto precedente.

SOLUZIONE:

1. Applicando il Teorema di reciprocità, abbiamo:

$$|V_C q_{\text{in}}| = |V_P q|$$

da cui:

$$q_{\text{in}} = - \left| \frac{V_P}{V_C} \right| q.$$

2. La sfera conduttrice è carica ad un potenziale

$$V_C = k_e \frac{q_{\text{in}}}{R},$$

mentre il potenziale nel punto P è pari a

$$V_C = k_e \frac{q_{\text{in}}}{D}$$

(immaginando q_{in} come puntiforme, al centro della sfera). Applicando la relazione trovata al punto precedente, abbiamo:

$$q_{\text{in}} = - \left| \frac{V_P}{V_C} \right| q = \boxed{-\frac{R}{D} q}.$$

■

Problema 19. Sia

$$\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$$

un campo vettoriale.

1. Calcolare l'equazione delle linee di campo di \mathbf{A} sul piano xy .
2. Calcolare il rotore di \mathbf{A} .
3. Calcolare la circuitazione di \mathbf{A} lungo la linea chiusa di equazione $x^2 + y^2 = 1$.
4. Dimostrare la validità del Teorema di Stokes applicata alla superficie piana delimitata dalla curva $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUZIONE:

1. Partiamo dalla relazione

$$\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}.$$

Vale che:

$$\|\mathbf{A}\|^2 = (-y)^2 + (x)^2 = x^2 + y^2.$$

Definendo $\|\mathbf{A}\|^2 \doteq R$, l'equazione delle linee di campo è chiaramente l'equazione di una circonferenza di raggio R :

$$\boxed{x^2 + y^2 = R},$$

con $R \in [0, +\infty)$.

2. Dalla definizione,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = -\overset{0}{\cancel{\frac{\partial}{\partial z}}}\hat{\mathbf{i}} - \overset{0}{\cancel{\frac{\partial}{\partial z}}}\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} = \boxed{2\hat{\mathbf{k}}}.$$

3. Notiamo che \mathbf{A} è tangente in ogni punto alla linea lungo la quale stiamo calcolando la circuitazione. Inoltre, possiamo pensare di percorrere la curva $x^2 + y^2 = 1$ in senso antiorario (come da convenzione), mentre \mathbf{A} percorre la stessa curva ma in senso orario. Quindi:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_l (-ydx + xdy) \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin\vartheta(-\sin\vartheta d\vartheta) + \cos\vartheta(\cos\vartheta d\vartheta)] \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta = \boxed{2\pi}.\end{aligned}$$

4. Vogliamo verificare la validità del Teorema di Stokes, ossia:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

Calcoliamo quindi il primo termine dell'uguaglianza:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \int_S d\mathbf{S} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S} = \boxed{2\pi}.$$

Il Teorema di Stokes è dunque verificato in questo caso.

■

Problema 20. *Dati i campi:*

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (x+y)\hat{\mathbf{i}} + (-x+y)\hat{\mathbf{j}} - 2z\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{B} &= 2y\hat{\mathbf{i}} + (2x+3z)\hat{\mathbf{j}} + 3y\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{C} &= (x^2 - z^2)\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2xz\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

calcolare per ciascuno di essi

1. *la divergenza;*
2. *il rotore.*

Uno solo di questi campi è un campo elettrostatico. Si determini la sua funzione potenziale $V = V(x, y, z)$ e si verifichi che il suo gradiente cambiato di segno coincide con il suddetto campo.

SOLUZIONE:

- 1.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(-x+y)}{\partial y} + \frac{\partial(-2z)}{\partial z} \\ &= 1 + 1 - 2 = \boxed{0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\partial 2y}{\partial x} + \frac{\partial(2x+3z)}{\partial y} + \frac{\partial 3y}{\partial z} \\ &= 0 + 0 + 0 = \boxed{0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{C} &= \frac{\partial(x^2 - z^2)}{\partial x} + \frac{\partial 2}{\partial y} + \frac{\partial 2xz}{\partial z} \\ &= 2x + 0 + 2x = \boxed{4x}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+y) & (-x+y) & -2z \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}}(0-0) - \hat{\mathbf{j}}(0-0) + \hat{\mathbf{k}}(-1-1) = \boxed{-2\hat{\mathbf{k}}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & (2x+3z) & 3y \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}}(3-3) - \hat{\mathbf{j}}(0-0) + \hat{\mathbf{k}}(2-2) = \boxed{\mathbf{0}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{C} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2 - z^2) & 2 & 2xz \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}}(0-0) - \hat{\mathbf{j}}(2z+2z) + \hat{\mathbf{k}}(0-0) = \boxed{-4z\hat{\mathbf{j}}}.\end{aligned}$$

Il campo elettrostatico è chiaramente \mathbf{B} , perché è l'unico ad avere rotore nullo. La relazione che intercorre fra il campo elettrico \mathbf{B} e il suo potenziale V è

$$\mathbf{B} = -\nabla V,$$

quindi per ottenere V bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -2y \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -2x - 3z \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -3y \end{cases}$$

Integrando,

$$\begin{cases} V = -2xy + c_1(y, z) \\ V = -2xy - 3yz + c_2(x, z) \\ V = -3yz + c_3(x, y) \end{cases}$$

Usando – ad esempio – le prime due equazioni, otteniamo la condizione

$$c_1(y, z) = -3yz + c_2(x, z).$$

Ora, poiché c_1 è funzione di y e z e c_2 è funzione di x e z , l'unico modo di soddisfare la condizione è richiedere che c_2 sia nulla rispetto a x , o in altri termini che c_2 sia funzione solo di z e non di x . Usando questo fatto e la terza equazione del sistema, otteniamo poi

$$c_3(x, y) = -2xy + c_2(z).$$

Di nuovo, per soddisfare la condizione, bisogna richiedere che c_2 sia nulla rispetto a z , ossia $c_2 = 0$. Riassumendo,

$$\begin{cases} c_1(y, z) = -3yz \\ c_2(x, z) = 0 \\ c_3(x, y) = -2xy \end{cases} \implies \boxed{V = -2xy - 3yz}.$$

La relazione $\mathbf{B} = -\nabla V$ è facile da verificare. Vale:

$$-\nabla V = \nabla(-V) = \nabla(2xy + 3yz) = (2y, 2x + 3z, 3y) \equiv \mathbf{B}.$$

Soluzione alternativa. È possibile ottenere V usando la relazione

$$V(P) = \int_{l, V=0}^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l},$$

dove l è un cammino arbitrario dal punto in cui poniamo $V = 0$ fino al punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ in cui vogliamo calcolare il potenziale. Esprimendo $d\mathbf{l}$ come (dx, dy, dz) e scegliendo come punto iniziale $(0, 0, 0)$ abbiamo:

$$V(P) = \int_{l, O}^P [2ydx + (2x + 3z)dy + 3ydz].$$

Scegliamo – ad esempio – il cammino riportato in Figura 14.

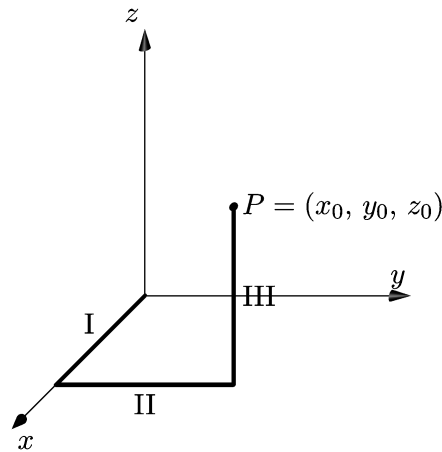


Figura 14: Cammino arbitrario tra 0 e P

Mettendo un segno “−” davanti al dy nel tratto II, e davanti al dz nel tratto III, perché gli spostamenti sono in verso opposto agli assi, si ha:

$$\begin{aligned}
 V(P) &= \int_{\substack{l \\ V=0}}^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_I \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{II} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{III} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \int_{(0,0,0)}^{(x_0,0,0)} [2 \cdot 0 \cdot dx + (2x + 3 \cdot 0) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0] + \\
 &\quad + \int_{(x_0,0,0)}^{(x_0,y_0,0)} [2y \cdot 0 - (2x + 3 \cdot 0) \cdot dy + 3y \cdot 0] + \\
 &\quad + \int_{(x_0,y_0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} [2y \cdot 0 + (2x + 3y) \cdot 0 - 3y dz] \\
 &= -2xy \Big|_{(x_0,0,0)}^{(x_0,y_0,0)} - 3yz \Big|_{(x_0,y_0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} = -2x_0y_0 - 3y_0z_0,
 \end{aligned}$$

ossia

$$V(x, y, z) = -2xy - 3yz.$$

■

Problema 21. Si calcolino:

1. il campo elettrico fra due cilindri coassiali infinitamente lunghi aventi raggi a e b (Figura 15), sapendo che la carica per unità di lunghezza sul cilindro interno è $+\lambda$ mentre quella sul cilindro esterno è $-\lambda$;
2. la differenza di potenziale $V_A - V_B$ fra i due cilindri.

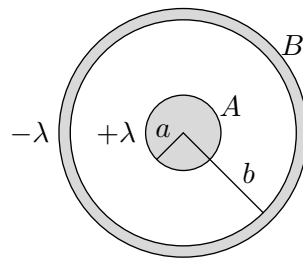


Figura 15: Cilindri coassiali infiniti

SOLUZIONE:

1. Per ragioni di simmetria, sappiamo che fra i due cilindri il campo elettrico \mathbf{E} è radiale, ed è diretto dal cilindro interno verso quello esterno. Possiamo quindi calcolarne facilmente il modulo usando il Teorema di Gauss. A tale scopo, consideriamo una superficie gaussiana

di forma cilindrica, con raggio $a < r < b$ e altezza h , da cui:

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{S} = E(r)S = E(r)2\pi rh \\ \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \end{cases} \implies \boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}}$$

2. La relazione generale che lega \mathbf{E} e V è $\mathbf{E} = -\nabla V$. In questo caso, però, \mathbf{E} è solo funzione della distanza dall'asse, quindi possiamo scrivere che

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

Integrando,

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r)|_a^b = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Quindi

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

■

Problema 22. Tre lastre conduttrici piane sono disposte parallelamente tra loro come in Figura 16. Le piastre hanno area A e le distanze x_1 e x_2 sono infinitesime rispetto a \sqrt{A} . La piastra superiore è connessa a quella inferiore tramite un filo conduttore. Sulla piastra centrale è depositata uniformemente una carica Q .

Determinare le cariche indotte Q_1 e Q_2 rispettivamente sulla piastra superiore e su quella inferiore, note le distanze x_1 e x_2 e trascurando gli effetti del campo ai bordi delle piastre.

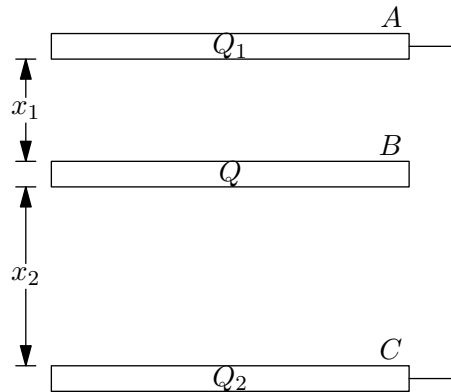


Figura 16: Tre lastre conduttrici parallele

SOLUZIONE: Il calcolo delle cariche indotte Q_1 e Q_2 equivale al calcolo delle distribuzioni superficiali di carica σ_1 e σ_2 , che d'ora in poi saranno le nostre incognite.

Usando il Principio di sovrapposizione, il Teorema degli elementi corrispondenti e il fatto che il potenziale su A e C deve essere lo stesso perché sono collegate da un filo (il potenziale sulla superficie di un conduttore è costante), possiamo impostare il sistema

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \\ E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \\ E_1 x_1 = E_2 x_2 \\ Q_1 + Q_2 = -Q \end{cases}$$

È un sistema di 4 equazioni in 4 incognite ($E_1, E_2, \sigma_1, \sigma_2$), perché le σ_i sono legate alle Q_i dalla relazione

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{A}.$$

Risolvendo, abbiamo:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x_2}{x_1 + x_2} \\ E_2 = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ \sigma_1 = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2} \sigma \\ \sigma_2 = \frac{x_2 - 2x_1}{x_1 + x_2} \sigma \end{cases}$$

■

Problema 23. *Lo strato sottile semisferico illustrato in Figura 17 ha raggio R ed è uniformemente carico. Nota la carica Q distribuita su di esso, si calcolino:*

1. *il potenziale lungo tutto l'asse z ($z > R$ e $z < R$);*
2. *il campo elettrico lungo tutto l'asse z .*

SOLUZIONE:

1. Utilizzando gli angoli illustrati in Figura 17, abbiamo:

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta}; \quad dS = [(R \sin \vartheta) d\psi] (R d\vartheta) = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\psi.$$

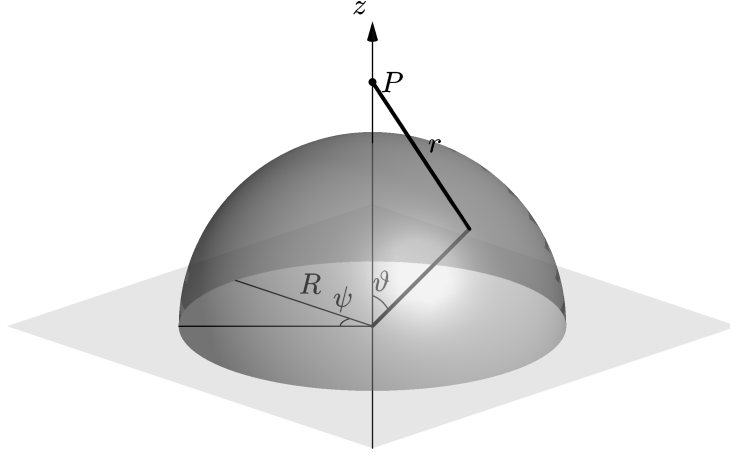


Figura 17: Emisfero carico

Definita $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi R^2}$, possiamo quindi calcolare il potenziale V direttamente dalla definizione:

$$\begin{aligned}
 V &= k_e \int_S \frac{1}{r} \sigma dS \\
 &= k_e \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{\sigma R^2 \sin \vartheta}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta}} d\vartheta d\psi \\
 &= k_e \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{\sigma R^2}{2zR} \frac{2zR \sin \vartheta}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta}} d\vartheta \\
 &= k_e \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \left[\frac{\sigma R^2}{2zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= k_e \frac{\sigma R^2}{zR} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z - R| \right) \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \\
 &= -k_e \frac{Q}{2\pi R^2} \frac{R^2}{zR} \left(|z - R| - \sqrt{z^2 + R^2} \right) 2\pi \\
 &= \boxed{-k_e \frac{Q}{zR} \left(|z - R| - \sqrt{z^2 + R^2} \right)}.
 \end{aligned}$$

Notiamo che

$$V \sim_{\pm\infty} \pm k_e \frac{Q}{z},$$

cioè, a grandi distanze dalla distribuzione, il potenziale va come quello di una carica puntiforme Q .

2.

$$\begin{aligned}
 E &= -|\nabla V| = -\frac{\partial V}{\partial z} \\
 &= \left[k_e \frac{Q}{zR} \left(|z - R| - \sqrt{z^2 + R^2} \right) \right]' \\
 &= k_e Q \left[\frac{|z - R|}{zR} - \frac{1}{R} \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} \right]' \\
 &= k_e Q \left[\frac{z \cdot \text{sgn}(z - R) - R \cdot \text{sgn}(z - R)}{zR} - \frac{1}{R} \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} \right]' \\
 &= k_e Q \left[\frac{\text{sgn}(z - R)}{R} - \frac{\text{sgn}(z - R)}{z} - \frac{1}{R} \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} \right]' \\
 &= k_e Q \left(0 + \frac{\text{sgn}(z - R)}{z^2} - \frac{1}{R} \frac{\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \cdot z - \sqrt{z^2 + R^2} \cdot 1}{z^2} \right) \\
 &= k_e Q \left(\text{sgn}(z - R) - \frac{1}{R} \frac{z^2 - z^2 - R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \\
 &= \boxed{k_e \frac{Q}{z^2} \left(\text{sgn}(z - R) + \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)}.
 \end{aligned}$$

Notiamo che, come nel caso del potenziale,

$$E \sim_{\pm\infty} \pm k_e \frac{Q}{z^2},$$

cioè, a grandi distanze dalla distribuzione, il campo elettrico va come quello di una carica puntiforme Q . ■

Problema 24. Un campo elettrico \mathbf{E} è descritto – in coordinate cilindriche – dal potenziale

$$V(r, \varphi, z) = 80\varphi \text{ [V]}.$$

Calcolare:

1. l'energia immagazzinata nella regione

$$r \in [2, 4] \text{ cm}; \quad \varphi \in [0, 0.2\pi]; \quad z \in [0, 1] \text{ m};$$

2. il valore massimo della densità di energia u nella regione specificata;

3. la differenza di potenziale V_{AB} tra i punti $A = (r = 3 \text{ cm}, \varphi = 0, z = 0)$ e $B = (3 \text{ cm}, 0.2\pi, 1 \text{ m})$.

SOLUZIONE:

1. $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{80}{r} \hat{\varphi} \frac{C}{m}.$
 $u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(-\frac{80}{r}\right)^2 = \frac{320}{r^2} \varepsilon_0 \frac{J}{m^3}.$
 $W = \int_{\tau} u d\tau = 320 \varepsilon_0 \int_{\tau} \frac{1}{r^2} r dr d\varphi dz = 320 \varepsilon_0 \cdot (2 \times 10^{-1} \pi) \cdot 1 \cdot \ln(r) \Big|_{2 \times 10^{-2}}^{4 \times 10^{-2}} J =$
 $= 64 \pi \ln(2) \varepsilon_0 J = \boxed{\frac{16 \ln(2)}{k_e} J}.$
2. $\max u \iff \min r^2 \iff \min |r| \iff \min r = 2 \times 10^{-2} \text{ m},$ da cui
 $\max u = \frac{320}{(2 \times 10^{-2})^2} \varepsilon_0 \frac{J}{m^3} = \boxed{125 \varepsilon_0 \frac{J}{m^3}}$
3. $V_B - V_A = 80(0.2\pi - 0) V = \boxed{16\pi V}.$

■

Problema 25. Una carica di densità σ è distribuita uniformemente sul triangolo in Figura 18; il lato BC ha lunghezza b pari al doppio dell'altezza relativa AH , di lunghezza a . Si calcoli il potenziale sul vertice A .

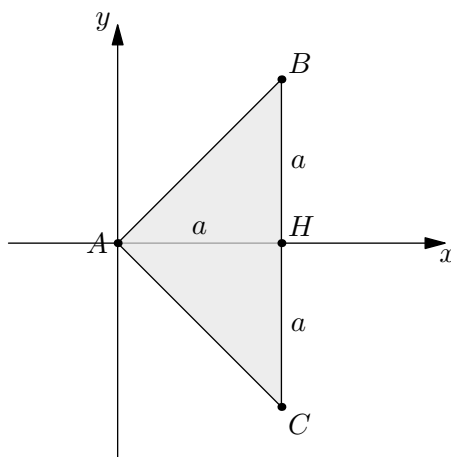


Figura 18: Distribuzione di carica uniforme su un triangolo

SOLUZIONE: Per calcolare il potenziale in A utilizziamo l'equazione:

$$V = \int k_e \frac{\sigma}{r} dS, \quad (13)$$

dove r è la distanza del vertice A da un fazzoletto infinitesimo di superficie del triangolo considerato. Osserviamo che $dS = dx dy$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Inoltre $b = 2a$. Facendo riferimento alla

Figura 18 e sostituendo nell'equazione (13) otteniamo:

$$\begin{aligned} V(A) &= k_e \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \\ &= k_e \sigma \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{1/x}{\sqrt{1 + (y/x)^2}} dy \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{1/x}{\sqrt{1 + (y/x)^2}} dy &= \operatorname{arsinh} \left(\frac{y}{x} \right) \Big|_{y=-x}^x \\ &= 2 \operatorname{arsinh}(1) \\ &= 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Sostituendo ancora:

$$\begin{aligned} V(A) &= 2k_e \sigma \int_0^a \ln(1 + \sqrt{2}) dx \\ &= 2k_e \sigma \ln(1 + \sqrt{2}) \int_0^a dx \\ &= \boxed{2k_e \sigma \ln(1 + \sqrt{2}) a} \end{aligned}$$

Soluzione alternativa. Il triangolo può essere visto come una successione di fili verticali, ognuno di densità lineare di carica $\lambda = \sigma dx$ e lunghezza $2x$, dove x è la posizione del filo che andiamo a considerare. La posizione di un elemento infinitesimo dl del filo è $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e $dl \equiv dy$. Ogni filo dà quindi un contributo al potenziale

$$dV = \int_l \frac{1}{r} \lambda dl = \int_{y=-x}^x \frac{1}{r} (\sigma dx) dy.$$

Sommando tutti i contributi al potenziale otteniamo:

$$V(A) = \int dV = \int_{x=0}^a \int_{y=-x}^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sigma dx dy,$$

come già ottenuto in precedenza. ■

Problema 26. Si calcoli il momento di dipolo delle seguenti distribuzioni di carica. Sia $\lambda =$ costante la densità di carica lineare.

1.

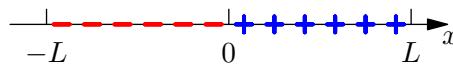


Figura 19: Distribuzione lineare

2.

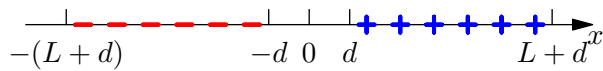


Figura 20: Distribuzione lineare

3.

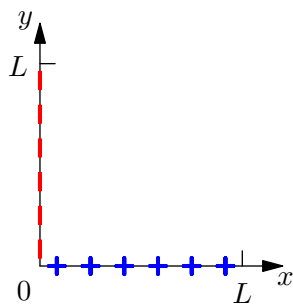


Figura 21: Distribuzione lineare

4.

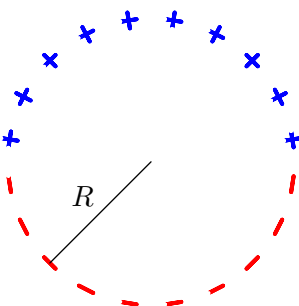


Figura 22: Distribuzione lineare

SOLUZIONE: Il problema può essere risolto in due modi.

1. Si calcolano il centro di carica C^+ della distribuzione positiva e il centro di carica C^- di quella negativa. La carica totale su ognuna delle due distribuzioni è $q > 0$ o $-q$ a seconda della distribuzione, quindi il momento di dipolo sarà semplicemente

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a},$$

dove \mathbf{a} è il vettore che va da C^- a C^+ .

2. Si applica la definizione

$$\mathbf{p} = \int_l \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dl,$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione di un elemento infinitesimo di carica, λ la densità lineare di carica in quel punto e dl l'elemento infinitesimo di lunghezza della distribuzione.

Il primo metodo è in questo caso il più veloce, ma se si può applicare è grazie alla particolare simmetria delle distribuzioni considerate. Il secondo metodo è più laborioso, ma ha una valenza generale. In questa soluzione si è scelto di applicare la definizione.

Passiamo ora ai vari casi. Per comodità in tutta la soluzione, si è posto $\lambda > 0$.

1.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \int_l \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dl = \int_{x=-L}^L \mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) dx \\
 &= \int_{-L}^0 (x \hat{\mathbf{x}})(-\lambda) dx + \int_0^L (x \hat{\mathbf{x}}) \lambda dx \\
 &= \lambda \hat{\mathbf{x}} \left(-\frac{x^2}{2} \Big|_{-L}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^L \right) \\
 &= \boxed{\lambda L^2 \hat{\mathbf{x}}}.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \int_l \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dl = \int_{x=-(L+d)}^{L+d} \mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) dx \\
 &= \int_{-(L+d)}^0 (x \hat{\mathbf{x}})(-\lambda) dx + \int_0^{L+d} (x \hat{\mathbf{x}}) \lambda dx \\
 &= \lambda \hat{\mathbf{x}} \left(-\frac{x^2}{2} \Big|_{-(L+d)}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^{L+d} \right) \\
 &= \lambda [(L+d)^2 - d^2] \hat{\mathbf{x}} = \boxed{\lambda L(L+2d) \hat{\mathbf{x}}}.
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \int_l \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dl \\
 &= \int_{y=0}^L (y \hat{\mathbf{y}}) \lambda dy + \int_{x=L}^0 (x \hat{\mathbf{x}})(-\lambda)(-dx) \\
 &= \int_{y=0}^L y \hat{\mathbf{y}} \lambda dy - \int_{x=0}^L x \hat{\mathbf{x}} \lambda dx \\
 &= \lambda \left[\frac{L^2}{2} \hat{\mathbf{y}} - \frac{L^2}{2} \hat{\mathbf{x}} \right] = \boxed{\lambda \frac{L^2}{2} (\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})}.
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \int_l \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dl \\
 &= \int_{\vartheta=0}^{\pi} (R \cos \vartheta \hat{\mathbf{x}}) \lambda(R d\vartheta) + \int_{\vartheta=0}^{\pi} (R \sin \vartheta \hat{\mathbf{y}}) \lambda(R d\vartheta) + \\
 &\quad + \int_{\vartheta=\pi}^{2\pi} (R \cos \vartheta \hat{\mathbf{x}})(-\lambda)(R d\vartheta) + \int_{\vartheta=\pi}^{2\pi} (R \sin \vartheta \hat{\mathbf{y}})(-\lambda)(R d\vartheta) \\
 &= [\lambda R^2 \sin \vartheta \hat{\mathbf{x}} - \lambda R^2 \cos \vartheta \hat{\mathbf{y}}]_{\vartheta=0}^{\pi} - [\lambda R^2 \sin \vartheta \hat{\mathbf{x}} - \lambda R^2 \cos \vartheta \hat{\mathbf{y}}]_{\vartheta=\pi}^{2\pi} \\
 &= \boxed{4\lambda R^2 \hat{\mathbf{y}}}.
 \end{aligned}$$

■

Problema 27. Una linea di trasmissione è costituita da due cavi cilindrici di raggio R paralleli e infinitamente lunghi i cui centri distano D . Su un cavo è distribuita uniformemente una densità superficiale di carica $\sigma > 0$, sull'altro una densità superficiale di carica $-\sigma$ (sempre in maniera uniforme). Si calcoli la differenza di potenziale tra i due conduttori.

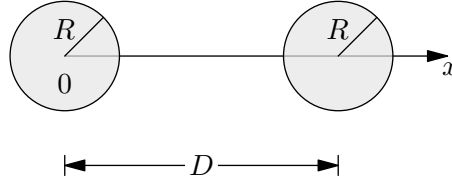


Figura 23: Cavi coassiali in sezione

SOLUZIONE: Siano \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 i versori radiali, uscenti dalle due sezioni; r_1 e r_2 le distanze di un qualsiasi punto dello spazio dai rispettivi centri. Utilizzando il teorema di Gauss si verifica che il campo generato dai due cavi (consideriamo 1 il cilindro di sinistra) è:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r_1} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{E}_2 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r_2} \mathbf{r}_2.$$

Ora, il campo elettrico è conservativo; quindi possiamo calcolare la differenza di potenziale fra le due superfici sul percorso privilegiato che è la congiungente degli assi dei cilindri. Orientando tale congiungente con un asse cartesiano x che ha origine nel centro del cilindro 1, possiamo scrivere il campo *limitatamente* alla congiungente come somma dei campi \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{E}_{\text{tot},x}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) \hat{\mathbf{x}}.$$

Il vantaggio di limitarci alla congiungente è che qui il campo complessivo è parallelo al versore $\hat{\mathbf{x}}$, e quindi la relazione generale $V(\mathbf{a}) - V(\mathbf{b}) = -\int_b^a \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$ si semplifica notevolmente. Otteniamo infatti:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= - \int_{x=D-R}^{x=R} E_{\text{tot},x}(\mathbf{x}) dx \\ &= - \int_{x=D-R}^{x=R} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) dx \\ &= - \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} [\ln(x) - \ln(D-x)]_{D-R}^R \\ &= 2 \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} [\ln(D-R) - \ln(R)] = \boxed{2 \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \left(\frac{D}{R} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

■

Problema 28. Una carica puntiforme q è disposta di fronte ad un conduttore costituito da due pareti piane infinitamente grandi ortogonali tra loro. Note le distanze a e b dalle pareti (vedi Figura ??) calcolare:

1. il potenziale $V(x, y)$ nel quadrante libero;
2. il campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)$;
3. i valori che \mathbf{E} assume sulle due superfici, cioè $\mathbf{E}(x, 0)$ e $\mathbf{E}(0, y)$.

SOLUZIONE: Risolviamo il problema utilizzando il metodo delle cariche immagine e considerando un sistema equivalente consistente in un rettangolo di lati $2a$ e $2b$ con ai vertici quattro cariche puntiformi come in Figura ??.

1. Per calcolare il potenziale sfruttiamo il principio di sovrapposizione e l'espressione del potenziale per una carica puntiforme $V = k_e \frac{q}{r}$, dove r è la distanza tra la carica e il punto. Sia $P = (x, y)$ un punto generico del piano; allora

$$V(x, y) = k_e q \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + (y+b)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + (y-b)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-a)^2 + (y+b)^2]^{1/2}} \right\}$$

Osserviamo che se calcoliamo il potenziale sulle due superfici $V = 0$. Ciò conferma che nell'utilizzare il sistema equivalente stiamo rispettando le condizioni al contorno riguardanti la funzione potenziale, rendendo lecita la risoluzione dell'esercizio.

2. Per calcolare il campo sfruttiamo la relazione $E = -\nabla V$:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ &= k_e q \left\{ \frac{x-a}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2 + (y+b)^2]^{3/2}} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + (y-b)^2]^{3/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2 + (y+b)^2]^{3/2}} \right\}; \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ &= k_e q \left\{ \frac{y-b}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{3/2}} + \frac{y+b}{[(x+a)^2 + (y+b)^2]^{3/2}} - \frac{y-b}{[(x+a)^2 + (y-b)^2]^{3/2}} - \frac{y+b}{[(x-a)^2 + (y+b)^2]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

In conclusione,

$$\boxed{\mathbf{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y))}.$$

3. Sostituiamo i punti desiderati nell'espressione del campo trovata nel punto precedente:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, 0) &= (E_x(x, 0), E_y(x, 0)) \\ &= \left(0, -\frac{2qb}{[(x-a)^2+b^2]^{3/2}} + \frac{2qb}{[(x+a)^2+b^2]^{3/2}} \right); \\ \mathbf{E}(0, y) &= (E_x(0, y), E_y(0, y)) \\ &= \left(0, -\frac{2qa}{[a^2+(y-b)^2]^{3/2}} + \frac{2qa}{[(a)^2+(y+b)^2]^{3/2}} \right);\end{aligned}$$

■

Problema 29. Due cariche puntiformi $+q$ e $-q$ occupano rispettivamente le posizioni $(a, 0, a)$ e $(-a, 0, a)$ al di sopra di un conduttore piano, a potenziale zero, di equazione $z = 0$. Calcolare:

1. La forza totale sulla carica $+q$.
2. Il lavoro fatto per assemblare le due cariche in fronte al piano conduttore.
3. La densità di carica nel punto $P = (a, 0, 0)$.

SOLUZIONE: Utilizzando il metodo delle cariche immagini possiamo sostituire il conduttore piano con due cariche di segno opposto, in modo da ottenere una configurazione come in figura.

1. Per calcolare la forza risultante sulla carica $+q_1$ sfruttiamo la legge di Coulomb. Specificando a pedice la carica a cui è dovuta la forza e decomponendo sui versori $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{-q_1} &= -\frac{k_e q^2}{4a^2} \hat{\mathbf{x}}; \\ \mathbf{F}_{-q_2} &= -\frac{k_e q^2}{4a^2} \hat{\mathbf{z}}; \\ \mathbf{F}_{q_2} &= \frac{k_e q^2}{(2a\sqrt{a})^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{k_e q^2}{(2a\sqrt{a})^2} \hat{\mathbf{r}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{k_e q^2}{(2a\sqrt{a})^2} \hat{\mathbf{r}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2k_e q^2}{(2a\sqrt{a})^2} \left[\frac{1}{(2a\sqrt{a})^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{(2a\sqrt{a})^2} \hat{\mathbf{z}} \right]\end{aligned}$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore radiale ed uscente rispetto alla carica $+q_2$. Sfruttando il principio di sovrapposizione:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{tot}} &= \mathbf{F}_{-q_1} + \mathbf{F}_{-q_2} + \mathbf{F}_{q_2} \\ &= \boxed{k_e q^2 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{(2a\sqrt{a})^2} - \frac{1}{4a^2} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{(2a\sqrt{a})^2} - \frac{1}{4a^2} \right) \hat{\mathbf{y}} \right]}\end{aligned}$$

2. Supponiamo di porre in posizione prima la carica $+q_1$. Poiché il campo elettrostatico è conservativo il lavoro fatto non dipende dal percorso. Inoltre quando cerchiamo di avvicinare al piano conduttore la carica $+q_1$ l'unica forza agente su di essa è quella dovuta alla sola carica immagine $-q_2$. Osserviamo anche che le cariche immagini si muovono sempre a potenziale nullo, in quanto si trovano all'interno del conduttore; quindi possiamo trascurare il lavoro fatto per muoverle. Possiamo dunque calcolare il lavoro fatto per portare la carica $+q_1$ da ∞ a distanza $2a$ dalla carica immagine:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\infty}^{2a} \mathbf{F}_{-q_2} d\mathbf{l} \\ &= \int_{\infty}^{2a} \frac{k_e q^2}{z^2} dz \\ &= -\frac{k_e q^2}{2a} \end{aligned}$$

Il secondo passo consiste nel posizionare la seconda carica $-q_1$ nella posizione desiderata. Conoscendo l'espressione per il potenziale generato nello spazio da una carica puntiforme e sfruttando sempre il principio di sovrapposizione, possiamo calcolare il lavoro nel modo seguente:

$$W_2 = -q \sum_{i=1}^3 V_i$$

dove V_i è la differenza di potenziale che le tre cariche $+q_1$, $+q_2$, $-q_2$ esercitano sulla carica $-q_1$ nel suo percorso che va da ∞ fin al punto $P = (-a, 0, a)$; in altre parole:

$$\begin{aligned} W_2 &= -k_e q \left(\frac{q}{2a} + \frac{q}{2a} - \frac{q}{2a\sqrt{2}} \right) \\ &= -\frac{k_e q^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

L'ultimo passo consiste nel calcolare il lavoro totale:

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= W_1 + W_2 \\ &= -\frac{k_e q^2}{2a} - \frac{k_e q^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \\ &= \boxed{-\frac{k_e q^2}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)} \end{aligned}$$

3. Calcoliamo la densità di carica $\sigma(a, 0, 0)$. L'idea è quella di sfruttare il Teorema di Coulomb in prossimità della superficie del piano conduttore, in modo da ottenere:

$$\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E}(a, 0, 0)$$

Dove $\mathbf{E}(x, y, z)$ è il campo generato nello spazio dalla distribuzione di carica che comprende le due cariche puntiformi più la carica indotta da esse sul conduttore. Abbiamo osservato in precedenza che tale distribuzione è equivalente al sistema composto dalle quattro cariche

disposte come in figura. Per ricavare il campo possiamo sfruttare il fatto che $E = -\nabla V$. Passiamo ora a calcolare il potenziale:

$$V(x, y, z) = k_e q \left[\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + (z+a)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + (z+a)^2]^{1/2}} \right] \quad (14)$$

Una nota da fare riguarda il calcolo del potenziale sulla superficie del conduttore: sostituendo $y, z = 0$ si ottiene $V = 0$. Ciò conferma che nell'utilizzare il sistema equivalente stiamo rispettando le condizioni al contorno riguardanti la funzione potenziale, rendendo lecita la risoluzione dell'esercizio. A questo punto calcoliamo il campo. Per semplicità di scrittura calcoleremo le singole componenti del campo $E = (E_x, E_y, E_z)$:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ &= k_e q \left\{ \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2 + (z+a)^2]^{3/2}} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2 + (z+a)^2]^{3/2}} \right\}; \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ &= k_e q y \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + (z+a)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + (z+a)^2]^{3/2}} \right\}; \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= k_e q \left\{ \frac{z-a}{[(x-a)^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} + \frac{z+a}{[(x+a)^2 + y^2 + (z+a)^2]^{3/2}} - \frac{z+a}{[(x+a)^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} - \frac{z-a}{[(x-a)^2 + y^2 + (z+a)^2]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

Notare che le componenti del campo sono a loro volta funzioni di x, y, z e che il campo calcolato sulla superficie è ortogonale ad essa, come deve essere per un conduttore. Calcolando, infatti il campo nel punto desiderato:

$$\begin{aligned} E(a, 0, 0) &= (0, 0, E_z(a, 0, 0)) \\ &= k_e q a \left\{ -\frac{1}{(a^2)^{3/2}} + \frac{1}{(5a^2)^{3/2}} + \frac{1}{(5a^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2)^{3/2}} \right\} \\ &= k_e \frac{q}{a^2} \frac{2 - 2 \times 5^{3/2}}{5^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Concludendo:

$$\sigma = \varepsilon_0 k_e \frac{q}{a^2} \frac{2 - 2 \times 5^{3/2}}{5^{3/2}}$$

■

Problema 30. Calcolare il momento di dipolo di

1. Un guscio semisferico uniformemente carico nella metà superiore dalla carica Q e nella metà inferiore dalla carica $-Q$. Sia R il raggio del guscio.
2. Una sfera uniformemente carica in tutto il suo volume dalla carica Q nella metà superiore e dalla carica $-Q$ nella semisfera inferiore. Sia R il raggio della sfera.

SOLUZIONE:

1. Poiché la distribuzione di carica è uniforme, possiamo sfruttare la distanza tra i due centri di carica delle superfici semisferiche. Calcoliamo innanzitutto il centro di carica di una superficie semisferica. Scegliendo un sistema di riferimento come in figura possiamo osservare come il centro di carica avrà coordinate $C = (x_C, y_C, z_C)$, dove $\mathbf{r}_C = \frac{1}{Q} \int r \sigma dS$. Utilizziamo le coordinate polari:

$$x = R \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad y = R \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad z = R \cos(\vartheta)$$

Osservando inoltre che $dS = (R d\vartheta)(R \sin(\vartheta) d\varphi)$. Calcoliamo le coordinate del centro di carica.

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{Q} \int x \sigma dS \\ &= \frac{R^3 \sigma}{Q} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)^2 d\vartheta \\ &= 0; \\ y_C &= \frac{1}{Q} \int y \sigma dS \\ &= \frac{R^3 \sigma}{Q} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)^2 d\vartheta \\ &= 0 \end{aligned}$$

osservando che $\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = 0$ e $\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi = 0$. Si poteva giungere direttamente a tale risultato da semplici considerazioni di simmetria. Infine ci rimane da calcolare:

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{Q} \int z \sigma dS \\ &= \frac{R^3 \sigma}{Q} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

Calcolando separatamente gli integrali:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta \\ &= -\frac{1}{2} \cos(\vartheta)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

Sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{R^3 \sigma}{Q} 2\pi \frac{1}{2} \\ &= \frac{R^3 \sigma \pi}{R^2 \sigma 2\pi} \\ &= \frac{R}{2} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che per una distribuzione di carica uniforme $Q = \sigma S = \sigma 2\pi R^2$. Il risultato finale è dunque:

$$C = \left(0, 0, \frac{R}{2}\right)$$

Utilizziamo ora il calcolo effettuato per trovare il momento di dipolo. Fissando un sistema di riferimento solidale alla sfera, indicando con $C_1 = (0, 0, \frac{R}{2})$ il centro di carica della parte positiva, $C_2 = (0, 0, -\frac{R}{2})$ il centro di carica della parte negativa e con \mathbf{a} il vettore che li collega:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= Q\mathbf{a} \\ &= Q(C_1 - C_2)\hat{\mathbf{a}} \\ &= Q(z_{C_1} - z_{C_2})\hat{\mathbf{z}} \\ &= Q\left(\frac{R}{2} - \left(-\frac{R}{2}\right)\right)\hat{\mathbf{z}} \\ &= QR\hat{\mathbf{z}} \\ &= \boxed{2\pi R^3 \rho \hat{\mathbf{z}}} \end{aligned}$$

2. Sulla scia del primo punto, calcoliamo il centro di carica di una semisfera con densità di carica volumetrica $\rho = \text{cost.}$ Fissiamo un sistema di riferimento solidale con essa ed utilizziamo le coordinate polari. Indicando il centro di carica con $C = (x_C, y_C, z_C)$, per ragioni di simmetria otteniamo $x_C, y_C = 0$. Osservando che $d\tau = (dr)(rd\vartheta)(r\sin(\vartheta)d\varphi)$, calcoliamo:

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{Q} \int z \rho d\tau \\ &= \frac{\rho}{Q} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta \int_0^R r^3 dr \end{aligned}$$

Utilizzando i risultati precedenti e osservando che $\int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4}$:

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{\rho}{Q} 2\pi \frac{1}{2} \frac{R^4}{4} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \rho}{\frac{2}{3}\pi R^3 \rho} \frac{R^4}{4} \\ &= \frac{3}{8}R \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che $Q = \rho \tau = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho$. In definitiva:

$$C = \left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$$

Concludendo come in precedenza, fissiamo un sistema di riferimento solidale alla sfera, indichiamo con $C_1 = (0, 0, \frac{3}{8}R)$ il centro di carica della parte positiva, $C_2 = (0, 0, -\frac{3}{8}R)$ il centro di carica della parte negativa e con \mathbf{a} il vettore che li collega:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= Q\mathbf{a} \\ &= Q(C_1 - C_2)\hat{\mathbf{a}} \\ &= Q(z_{C_1} - z_{C_2})\hat{\mathbf{z}} \\ &= Q\left(\frac{3}{8}R - \left(-\frac{3}{8}R\right)\right)\hat{\mathbf{z}} \\ &= Q\frac{R}{4}\hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{6}\pi R^4 \rho \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

■

Problema 31. Il dielettrico del condensatore in figura (FIGURA) non è perfetto: esso presenta una conducibilità non nulla. Detta ε la permeabilità dielettrica e ρ_e la resistività del dielettrico, si dimostri la seguente relazione:

$$\rho_e \varepsilon = C R_p, \quad (17)$$

quale che sia la forma del condensatore. C rappresenta la capacità del condensatore ed R_p la sua resistenza di perdita.

SOLUZIONE: Chiamando con σ_e la conducibilità elettrica e con \mathbf{j} la densità di corrente, il problema è risolvibile impostando il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \sigma_e \mathbf{E} & (\text{Legge di Ohm puntuale}) \\ \sigma_e = \rho_e^{-1} \\ \Delta V = R_p I & (\text{Legge di Ohm}) \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione otteniamo:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho_e} \mathbf{E};$$

integrando scalarmente in $d\mathbf{S}$ ed applicando il Teorema di Gauss al secondo membro, otteniamo:

$$I \doteq \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\rho_e} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\rho_e} \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Applicando infine la terza equazione e ricordando la definizione di capacità,

$$\frac{\Delta V}{R_p} = \frac{Q}{\rho_e \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \rho_e \varepsilon = \frac{Q}{\Delta V} R_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_e \varepsilon = C R_p}.$$

■

Problema 32. *Un magnetron è equivalente, in linea di principio, ad un condensatore a grandi facce piane e parallele, sottoposto ad una ddp V_0 in cui gli elettroni sono emessi in posizione $(x, y) = (0, 0)$ con velocità iniziale nulla (FIGURA DA FARE). Tra le due piastre è presente un campo magnetico $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$. Trascurando i campi elettrici e magnetici dovuti agli elettroni sulle piastre rispetto a quelli applicati, e nota la distanza d tra le piastre, determinare:*

- *Velocità e spostamento di un elettrone iniettato a velocità iniziale nulla all'istante $t = 0$.*
- *Il campo magnetico di cut-off, cioè il campo che non consente agli elettroni di raggiungere l'altro elettrodo.*

(Il campo elettrico fra le due piastre può essere ritenuto costante.)

SOLUZIONE:

1. Indichiamo con \mathbf{E} il campo elettrico, con \mathbf{v} la velocità dell'elettrone, con $e = -1.602 \times 10^{-19} < 0$ la sua carica (negativa) e con m_e la sua massa. Definendo

$$\mathbf{F}_m = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}; \quad \mathbf{F}_e = e\mathbf{E};$$

possiamo scomporre le forze agenti sull'elettrone nelle direzioni degli assi:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{m,y} = -e\dot{x}B_0\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{F}_{m,x} = e\dot{y}B_0\hat{\mathbf{i}} \\ \mathbf{F}_{e,x} \equiv \mathbf{F}_e = -eE\hat{\mathbf{i}} \end{cases}$$

Il sistema risolutivo del problema è dunque:

$$\begin{cases} m_e \ddot{y} = -e\dot{x}B_0 \\ m_e \ddot{x} = e\dot{y}B_0 - eE \\ x(0) = 0; \quad y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Integrando in dt la prima equazione e ricordando le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, otteniamo:

$$m_e \dot{y} = -exB_0. \quad (18)$$

Sostituendo nella seconda e raccogliendo adeguatamente, possiamo scrivere:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + A,$$

con

$$\omega^2 \doteq \left(\frac{eB_0}{m_e} \right)^2; \quad A \doteq -\frac{eE}{m_e}.$$

La soluzione generale di tale equazione differenziale è

$$x(t) = \frac{A}{\omega^2} + A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t).$$

Dalle condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, otteniamo in particolare che

$$A_1 = \frac{Em_e}{eB_0^2}; \quad A_2 = 0,$$

quindi in definitiva

$$\boxed{x(t) = -\frac{Em_e}{eB_0^2}(1 - \cos(\omega t))}; \quad \boxed{\dot{x}(t) = -\frac{Em_e}{eB_0^2}\omega \sin(\omega t)}.$$

Andando a riguardare (18), ora possiamo determinare anche $y(t)$, sostituendo l'espressione appena trovata per $x(t)$ ed integrando successivamente in dt con la condizione iniziale $y(0) = 0$. Quello che otteniamo è

$$\boxed{y(t) = \frac{E}{B_0} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right)}; \quad \boxed{\dot{y}(t) = \frac{E}{B_0}(1 - \cos(\omega t))}.$$

2. Osservando che la funzione $x(t)$ è limitata (spazialmente), possiamo trovare il campo magnetico di cut-off imponendo:

$$\max_{t \in \mathbb{R}} x(t) < d.$$

Risolvendo per B_0 , otteniamo:

$$\boxed{B_0 = \sqrt{-\frac{2Em_e}{ed}}}.$$

■

Problema 33. *Sul rocchetto cilindrico mostrato in figura (FIGURA DA FARE) è avvolta una bobina di spire in cui circola una corrente stazionaria. Il rocchetto posto su un piano inclinato di un angolo ϑ . Assumendo che il piano dell'avvolgimento si parallelo al piano inclinato, si determini il valore minimo di corrente, I_m , necessaria affinché il rocchetto non rotoli giù dal piano in presenza del campo magnetico \mathbf{B} . Sia N il numero di spire ed m la massa del rocchetto.*

SOLUZIONE: Indichiamo con R il raggio del cilindro, con \mathbf{m}_m il momento magnetico della spira e con \mathbf{F}_a la forza di attrito. Il momento magnetico della spira ha modulo

$$|\mathbf{m}_m| = N \text{Area}(\text{spira}) I_m = N 2LR I_m,$$

mentre la forza di attrito deve bilanciare la componente della forza peso parallela al piano, ed ha quindi modulo

$$|\mathbf{F}_a| = mg \sin \vartheta.$$

Definendo

$$\tau_{\mathbf{m}} \doteq \mathbf{m}_{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{B} = 2LR I_m \sin \vartheta \hat{\mathbf{k}}; \quad \tau_{\mathbf{a}} \doteq \mathbf{r}_{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{F}_{\mathbf{a}} = -Rmg \sin \vartheta \hat{\mathbf{k}};$$

la relazione che risolve il problema è

$$\tau_{\mathbf{m}} + \tau_{\mathbf{a}} = 0,$$

ossia

$$2LR I_m B \sin \vartheta = Rmg \sin \vartheta \implies \boxed{I_m = \frac{mg}{2LB}}.$$

■

Problema 34. Una bobina costituita da un nucleo cilindrico di ferro su cui sono avvolte N spire, è immersa nel campo magnetico \mathbf{B} generato da un magnete permanente. Questo presenta espansioni polari concave per far sì che il campo sia ortogonale alle spire indipendentemente dall'orientazione della bobina. Per ruotare la bobina di un angolo φ occorre vincere un momento meccanico torcente $\tau = C\varphi$ esercitato da una molla di costante elastica C . La bobina è attraversata dalla corrente stazionaria I . Determinare l'angolo di rotazione φ della bobina in funzione di I . Sia R il raggio della bobina ed L la sua altezza. (Questo dispositivo è un amperometro a indice).

SOLUZIONE: Il momento torcente dovuto al campo magnetico ed alla corrente che scorre nella bobina ha modulo

$$\tau_m = |\mathbf{m} \wedge \mathbf{B}| = 2LRBI.$$

Uguagliando τ e τ_m per avere la condizione di equilibrio, otteniamo

$$\boxed{\varphi = \frac{2LRB}{C}I}.$$

■

Problema 35. Nel circuito in figura (FIGURA DA FARE) i due condensatori C_1 e C_2 sono inizialmente carichi e le ddp ai loro capi sono rispettivamente $V_{0,1} = 2V_0$ $V_{0,2} = V_0$. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. A partire da questo istante, nota la resistenza R , calcolare:

- La corrente $I = I(t)$ nel circuito.
- Le cariche $q_1(t)$ e $q_2(t)$ nei condensatori.
- Le ddp $V_1(t)$ e $V_2(t)$ ai loro capi.
- Il lavoro dissipato nella resistenza.
- La potenza dissipata.

SOLUZIONE:

1. Scriviamo innanzitutto l'equazione del circuito:

$$RI + V_{0,2} - V_{0,1} = 0$$

Possiamo ora schematizzare il circuito come una resistenza R e un condensatore equivalente di capacità

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

La ddp iniziale ai capi della resistenza è pari a:

$$V_{0,R} = RI = V_{0,1} - V_{0,2} = V_0.$$

La corrente avrà quindi la forma:

$$I(t) = \frac{V_{0,R}}{R} e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} = \boxed{\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t(C_1+C_2)}{RC_1C_2}}}.$$

2. Le cariche sui due condensatori sono legate alla corrente dalla relazione

$$q(t) = \int_0^t I(t)dt + q_0$$

In particolare, nel nostro caso,

$$q_1(t) = - \int_0^t I(t)dt + q_{0,1}; \quad q_2(t) = \int_0^t I(t)dt + q_{0,2}$$

Ora,

$$\int_0^t I(t)dt = \int_0^t -C_{eq}V_0 \left(-\frac{1}{RC_{eq}} \right) e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} = -C_{eq}V_0 e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} + C_{eq}V_0,$$

quindi

$$q_1(t) = C_{eq}V_0 e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} + (2C_1 - C_{eq})V_0 = \boxed{\frac{C_1}{C_1 + C_2} V_0 \left[2C_1 + C_2 \left(1 + e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} \right) \right]}$$

e

$$q_2(t) = -C_{eq}V_0 e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} + (C_2 + C_{eq})V_0 = \boxed{\frac{C_2}{C_1 + C_2} V_0 \left[C_2 + C_1 \left(2 - e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} \right) \right]}.$$

3. Dalle espressioni per $q(t)$ si possono ricavare le espressioni delle ddp.

$$V_1(t) = \frac{q_1(t)}{C_1} = \boxed{\frac{V_0}{C_1 + C_2} \left[2C_1 + C_2 \left(1 + e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} \right) \right]}.$$

$$V_2(t) = \frac{q_2(t)}{C_2} = \boxed{\frac{V_0}{C_1 + C_2} \left[C_2 + C_1 \left(2 - e^{-\frac{t}{RC_{eq}}} \right) \right]}.$$

Come prima, la tensione ai capi della resistenza è la differenza di quelle ai capi dei due condensatori, quindi:

$$V_R(t) = V_1(t) - V_2(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC_{eq}}}.$$

4. Il lavoro dissipato, per la conservazione dell'energia, è pari alla somma delle energie iniziali nei due condensatori. Quindi:

$$L = \frac{1}{2}C_1V_{0,1}^2 + \frac{1}{2}C_2V_{0,2}^2 = \boxed{\frac{1}{2}V_0^2(4C_1^2 + C_2)}.$$

5. La potenza dissipata istantaneamente dalla resistenza è pari a

$$P(t) = \frac{V_R^2(t)}{R} = \boxed{\frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC_{eq}}}}.$$

■

Problema 36. Una carica Q è distribuita uniformemente nel volume di una sfera di raggio R . La sfera ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω costante. Si determini il momento di dipolo magnetico della sfera.

SOLUZIONE: Possiamo trovare il momento magnetico di dipolo in due modi:

1. Suddividendo la sfera in tanti anelli infinitesimi nei quali scorre una corrente infinitesima

$$di = \frac{q\omega}{2\pi},$$

ed integrare successivamente tutti i contributi infinitesimi;

2. Per integrazione diretta dalla definizione:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{r} \wedge \mathbf{J} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{v} d\tau,$$

dove \mathbf{J} è la densità di corrente, ρ la densità di carica e \mathbf{v} la velocità di un elemento infinitesimo di volume.

Scegliamo, ad esempio, la seconda strada ed usiamo le classiche coordinate sferiche. Notiamo che, per un dato elemento infinitesimo di volume, il prodotto vettore tra \mathbf{r} e \mathbf{v} non è diretto lungo l'asse di rotazione; tuttavia, per ragioni di simmetria, ci aspettiamo che integrando l'elemento diametralmente opposto le componenti di $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ che non sono lungo l'asse di rotazione di annullino. Ci basta quindi considerare, nell'integrale, la proiezione di $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ lungo l'asse di rotazione, ossia $(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) \sin \vartheta$. Infine, bisogna osservare che v ha modulo $\omega r \sin \vartheta$, che \mathbf{r} e \mathbf{v} sono perpendicolari fra loro e che \mathbf{m} ha la stessa direzione di ω , permettendoci di limitarci al modulo di \mathbf{m} . Possiamo

quindi eseguire il calcolo:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{m}| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\tau} \mathbf{r} \wedge \rho \mathbf{v} d\tau \right| \\
 &= \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} r(\omega r \sin \vartheta) \sin \vartheta (r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi) \\
 &= \frac{1}{2} \omega \rho 2\pi \int r^4 \sin^3 \vartheta d\vartheta dr \\
 &= \frac{1}{5} \omega \rho R^5 \pi \left(2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta d\vartheta \right) \\
 &= \frac{1}{5} \omega \rho R^5 \pi 2 \left[-\frac{3}{4} \cos \vartheta + \frac{1}{12} \cos(3\vartheta) \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{5} \omega \rho R^5 \pi \frac{4}{3} \\
 &= \frac{1}{5} \omega \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} R^5 \pi \frac{4}{3} \\
 &= \boxed{\frac{1}{5} \omega Q R^2}.
 \end{aligned}$$

■

Problema 37. Un filo sottile infinitamente lungo corre lungo gli assi x ed y di un sistema di riferimento rettangolare. Il filo è percorso dalla corrente I nel verso indicato in figura (FIGURA DA FARE). Determinare il campo magnetico \mathbf{B} nel punto P . Porre $I = 8A$, $P = (4\text{ m}, 3\text{ m}, 0)$.

SOLUZIONE: Sappiamo che

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

dove al solito \mathbf{r} è il vettore posizione del punto P (rispetto all'origine del sistema di riferimento) e \mathbf{r}' è il vettore posizione dell'elemento infinitesimo di filo. Prendiamo un capo del filo, ad esempio quello lungo x , e calcoliamo il campo $B_x(P)$ generato dal quel pezzo di filo in P . Chiamando ϑ l'angolo fra l'ortogonale al filo passante per P e il vettore \mathbf{r}' , abbiamo che

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{y}{\cos \vartheta}; \quad d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = dl |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \vartheta;$$

$$l = y \tan \vartheta \quad \Rightarrow \quad dl = \frac{y}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta;$$

e dunque

$$d\mathbf{B}_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\frac{y}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta \frac{y}{\cos \vartheta} \cos \vartheta}{\frac{y^2}{\cos^3 \vartheta}} \hat{\mathbf{k}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \vartheta}{y} d\vartheta \hat{\mathbf{k}}.$$

Integrando su tutta la lunghezza del pezzo di filo lungo x,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_x &= \int_l d\mathbf{B}_x = \int_{-\pi/2}^{\arctan(x/y)} -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \vartheta}{y} d\vartheta \hat{\mathbf{k}} \\ &= -\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{k}}}{4\pi y} \int_{-\pi/2}^{\arctan(x/y)} \cos \vartheta d\vartheta \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi y} \left[\sin \left(\arctan \left(\frac{x}{y} \right) \right) + 1 \right] \hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Analogamente, si ottiene anche:

$$\mathbf{B}_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left[\sin \left(\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) + 1 \right] \hat{\mathbf{k}}.$$

Dunque, ricordando che

$$\sin(\arctan(\varphi)) = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$$

e sostituendo i valori numerici, si ottiene che:

$$B(P) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\mathbf{B}_x(P) + \mathbf{B}_y(P)) \hat{\mathbf{k}} = \boxed{-\frac{2\mu_0}{\pi} \hat{\mathbf{k}}}.$$

■

Problema 38. Una carica q di massa m si muove nel campo magnetico uniforme $B_0 \hat{\mathbf{k}}$. All'istante $t = 0$ velocità e posizione iniziale sono rispettivamente

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t=0) &= v_{0,x} \hat{\mathbf{i}} + v_{0,y} \hat{\mathbf{j}} + v_{0,z} \hat{\mathbf{k}}; \\ \mathbf{r}(t=0) &= x_0 \hat{\mathbf{i}} + y_0 \hat{\mathbf{j}} + z_0 \hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Determinare

1. Le componenti della velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$.
2. Le componenti del vettore posizione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.
3. L'equazione della proiezione del moto sul piano (x, y) .
4. L'energia cinetica della carica.

SOLUZIONE:

1. Ricordando che

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B},$$

le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B_0 \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B_0 \\ \dot{z} = v_{0,z} \end{cases} \quad (19)$$

Notiamo che il moto lungo l'asse z è un moto rettilineo uniforme, perché non ci sono forze agenti in quella direzione. Da una prima integrazione in dt , considerato che $\ddot{x}dt = d\dot{x}$ e $\dot{x}dt = dx$ (e similmente per la y) e imposte le condizioni iniziali, risultano:

$$\dot{x} = \boxed{v_x(t) = \frac{qB_0}{m}(y(t) - y_0) + v_{0,x}};$$

$$\dot{y} = \boxed{v_y(t) = -\frac{qB_0}{m}(x(t) - x_0) + v_{0,y}}.$$

Notiamo che le velocità non sono funzioni del tempo esplicite, ma implicite; per avere delle espressioni esplicite delle velocità bisogna risolvere completamente le equazioni del moto.

2. Troviamo, ad esempio, $y(t)$. Sostituendo l'espressione appena trovata per \dot{x} in (19), si ottiene:

$$\ddot{y} = -\omega^2(y - y_0) - \omega v_{0,x} \quad \text{con} \quad \omega = \frac{qB}{m}.$$

L'equazione si può riscrivere in maniera più maneggevole nel modo seguente:

$$\ddot{u} = -\omega^2 u - \omega v_{0,x} \quad \text{con} \quad u = y - y_0.$$

In tale forma, la soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(t) - y_0 = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) - \frac{v_{0,x}}{\omega}.$$

Le costanti sono determinate attraverso le condizioni iniziali. Si ha immediatamente:

$$\boxed{y(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{v_{0,y}}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{v_{0,x}}{\omega} + y_0}.$$

Similmente per $x(t)$, bisogna risolvere l'equazione differenziale

$$\ddot{u} = -\omega^2 u + \omega v_{0,y} \quad \text{con} \quad u = x - x_0.$$

Analogamente a prima, la soluzione è

$$\boxed{x(t) = -\frac{v_{0,y}}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{v_{0,x}}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{v_{0,y}}{\omega} + x_0}.$$

Per l'asse z si ha semplicemente

$$\boxed{z(t) = v_{0,z}t + z_0}.$$

3. Prendiamo le espressioni precedenti per x e y , portiamo al primo membro i termini non dipendenti dal tempo, eleviamo al quadrato e sommiamo. Otteniamo:

$$\boxed{\left[x - \left(x_0 + \frac{v_{0,y}}{\omega}\right)\right]^2 + \left[y - \left(y_0 - \frac{v_{0,x}}{\omega}\right)\right]^2 = \frac{v_{0,xy}^2}{\omega^2}}.$$

dove $v_{0,xy} = \sqrt{v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2}$, cioè $v_{0,xy}$ è la proiezione di \mathbf{v}_0 sul piano xy . La proiezione del moto sul piano xy è dunque una circonferenza di origine $\left(x_0 + \frac{v_{0,y}}{\omega}, y_0 - \frac{v_{0,x}}{\omega}\right)$ e raggio $\frac{v_{0,xy}}{\omega}$.

4. L'energia cinetica della carica è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Ora,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_{0,y} \sin(\omega t) + v_{0,x} \cos(\omega t), \\ \dot{y} &= -v_{0,x} \sin(\omega t) + v_{0,y} \cos(\omega t), \\ \dot{z} &= v_{0,z},\end{aligned}$$

quindi

$$T = \frac{1}{2}m(v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2 + v_{0,z}^2) = \boxed{\frac{1}{2}mv^2}.$$

Si poteva giungere allo stesso risultato attraverso il principio di conservazione dell'energia. ■

Problema 39. Determinare il campo magnetico nel centro O delle seguenti spire di filo sottile percorse dalla corrente I :

1. Un rettangolo di lato a e b .
2. Un cerchio di raggio a .
3. Di un poligono regolare con n lati, $n \geq 4$, dove a è la distanza dal centro ad uno dei vertici. Verificare che per $n = 4$ si ritrova il risultato ottenuto per un quadrato e per $n \rightarrow \infty$ si ritrova il risultato della spira circolare.

SOLUZIONE: Calcoliamo dapprima il campo generato da un filo di lunghezza L in un punto sull'asse a distanza d dal filo. L'integrazione è identica a quella nel caso del filo piegato nell'origine, cambiano solo gli estremi di integrazione. Dunque:

$$B = B(L, d) = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \sin \vartheta \bigg|_{\arctan(-L/(2d))}^{\arctan(L/(2d))} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4d^2}}$$

e il verso di \mathbf{B} dipenderà dal verso della corrente secondo la regola della mano destra. Passiamo ora a calcolare i vari campi.

1.

$$B(O) = 2B\left(a, \frac{b}{2}\right) + 2B\left(b, \frac{a}{2}\right) = \dots = \boxed{\frac{2\mu_0 I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi ab}}$$

(uscente). In particolare, nel caso di un quadrato di lato $a = b = 2R$, abbiamo:

$$\boxed{B(O) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi R}}.$$

2. Nel caso del cerchio di raggio a , basta usare la definizione:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

con $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a$, $dl = ad\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Dunque:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{ad\vartheta}{a^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} d\vartheta = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2a}}$$

(uscente).

3. Per un poligono regolare qualsiasi, possiamo applicare la formula

$$B(O) = nB(L, d)$$

con L e d opportuni. Ora, se il poligono possiede n lati, prendiamo L come la lunghezza del lato e d come la distanza di ogni lato dal centro del poligono. Chiamiamo infine 2ϑ l'angolo sotteso ad ogni lato. Valgono banalmente:

$$\vartheta = \frac{\pi}{n}; \quad d = a \cos \vartheta; \quad L = 2a \sin \vartheta.$$

In conclusione,

$$B(O) = n \frac{\mu_0 I}{2\pi d \cos \vartheta} \frac{2a \sin \vartheta}{\sqrt{4a^2 \cos^2 \vartheta + 4a^2 \sin^2 \vartheta}} = \boxed{\frac{n\mu_0 I}{2\pi a} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Per $n = 4$ e $a = \sqrt{2}R$, si ritrova immediatamente il risultato calcolato precedentemente per il quadrato. Per $n \rightarrow \infty$, possiamo usare la valutazione asintotica

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n},$$

ottenendo immediatamente il campo al centro di una spira circolare di raggio a .

■

Problema 40. In una piattina conduttrice scorre una corrente di densità lineare $\mathbf{j} = 12\hat{\mathbf{k}}$ (A/m). La piattina è situata nel piano $x = 0$ tra le rette di equazioni $x = 0$, $y = 5$ (m) e $x = 0$, $y = 1.5$ (m). Sull'asse z giace anche un filamento rettilineo infinitamente lungo attraversato da una corrente $I_1 = 5$ A in direzione $\hat{\mathbf{k}}$. Calcolare:

1. La forza unitaria esercitata sul filamento dalla piattina.
2. La forza per unità di lunghezza della piattina sul filamento.

SOLUZIONE:

1. Posto

$$dI_2 = jdy$$

abbiamo che la forza (attrattiva) tra il filo ed un "nastro" infinitesimo di superficie a distanza y dal filo e avente larghezza dy è – per unità di lunghezza

$$\frac{dF}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 dI_2}{y} = \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 j dy}{y}}.$$

2. Per trovare la forza esercitata da tutta la piattina, basta integrare:

$$\frac{F}{l} = \int_{0.5}^{1.5} \frac{dF}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 j \int_{0.5}^{1.5} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0}{2\pi} 5 \cdot 2 \ln(3) = \boxed{30\mu_0 \ln(3)}.$$

■

Problema 41. In una lamina sottile, piana e indefinita, disposta sul piano $y = 0$, scorre una corrente di densità lineare $j_0 \hat{\mathbf{k}}$ (A/m).

1. Calcolare il campo magnetico \mathbf{B} generato dalla lamina in tutto lo spazio.
2. Due lamine sottili piane infinitamente grandi occupano rispettivamente i piani $y = -y_0$ ed $y = y_0$. La prima lamina è percorsa dalla corrente di densità $\mathbf{j}_1 = j_0 \hat{\mathbf{k}}$ (A/m), la seconda dalla corrente di densità $\mathbf{j}_2 = -j_0 \hat{\mathbf{k}}$ (A/m). Determinare $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$.
3. Calcolare la forza per unità di area esercitata da una lamina sull'altra (data la discontinuità di \mathbf{B} in $y = \pm y_0$ considerare il valore di \mathbf{B} sulle facce interne delle lamine).

SOLUZIONE:

1. Per ragioni di simmetria, si può concludere subito che il campo \mathbf{B} è parallelo alla lamina, lungo l'asse x . Per la regola della mano destra, \mathbf{B} è concorde all'asse x se $y < 0$, discorde all'asse x se $y > 0$. Conoscendo già a priori la forma del campo, conviene applicare il Teorema di Ampère per conoscerne il modulo:

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

Scegliamo come percorso un rettangolo complanare al piano y , che racchiuda una parte della lamina. Sia d la lunghezza del lato parallelo all'asse x . Valgono:

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bd;$$

$$\mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \left| \int_l \mathbf{j} dx \right| = \mu_0 j_0 d.$$

Dunque si conclude subito che

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 j_0}{2}}.$$

2. Dal punto precedente, notiamo che il valore del campo non dipende dalla distanza dalla lamina. Inoltre, le due densità di correnti \mathbf{j}_1 e \mathbf{j}_2 sono uguali ed opposte; quindi si vede immediatamente che il campo per $y < -y_0 \vee y > y_0$ è nullo, mentre il campo per $-y_0 < y < y_0$ è pari al doppio del campo di una singola lamina, ossia

$$\boxed{B = \mu_0 j_0}.$$

3. Sappiamo già a priori che la forza fra le due lamine è repulsiva, perché le correnti scorrono in senso opposto. Consideriamo, su una delle due lamine, un elemento di area di dimensione l lungo il verso di \mathbf{j} e dimensione x lungo l'asse x , e definiamo $A = xl$. Notiamo che

$$Il = (j_0 x)l = j_0 A,$$

quindi

$$F = |\mathbf{I} \wedge \mathbf{B}| = j_0 AB = j_0 A \frac{\mu_0 j_0}{2},$$

da cui

$$\boxed{\frac{F}{A} = \frac{\mu_0 j_0^2}{2}}$$

(repulsiva).

■

Problema 42. *I filamenti riportati in figura (FIGURA DA FARE!) sono infinitamente lunghi e sono percorsi dalla corrente stazionaria I . Determinare per ciascuno di essi il campo magnetico nel punto P .*

SOLUZIONE:

1. Da calcoli fatti in precedenza, risulta che il campo generato da un filo di lunghezza L in un punto a distanza d dal suo asse è pari a

$$B(L, d) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4d^2}}.$$

Nel nostro caso, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} B(P) &= B(b, a) + \frac{1}{2}B\left(2a, \frac{b}{2}\right) + \frac{1}{2}B\left(2a, \frac{b}{2}\right) \\ &= B(b, a) + B\left(2a, \frac{b}{2}\right) \\ &\vdots \\ &= \boxed{\frac{\mu_0 I \sqrt{a^2 + b^2}}{2\pi ab}} \end{aligned}$$

(entrante). Notiamo che è, come ci aspettavamo, metà del campo al centro di un rettangolo di lati b e $2a$.

2. Come nel caso precedente, il campo è metà di quello generato da una spira circolare nel suo centro. Dunque:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4a}}$$

(entrante).

3. Percorrendo il filo, vediamo che dobbiamo sommare metà del contributo per un filo infinito, più metà del contributo di una spira circolare, più – ancora – metà del contributo di un filo infinito. Quindi:

$$B(P) = B(\infty, a) + \frac{\mu_0 I}{4a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{4a} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4a} \left(\frac{2}{\pi} + 1\right)}$$

(entrante).

■

Problema 43. Determinare quali dei seguenti vettori può essere un campo magnetico e per questi ultimi calcolare la densità di corrente \mathbf{j} ;

1. $\mathbf{B} = cr\hat{\mathbf{u}}_\varphi$ (coordinate cilindriche (r, φ, z));
2. $\mathbf{B} = c(x\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}})$ (coordinate cartesiane (x, y, z));
3. $\mathbf{B} = c(-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}})$ (coordinate cartesiane (x, y, z));
4. $\mathbf{B} = cr\hat{\mathbf{r}}$ (coordinate sferiche (r, ϑ, φ));

SOLUZIONE: Dobbiamo innanzitutto trovare i campi che soddisfano la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Per questi campi, possiamo calcolare la densità di corrente usando la legge

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

1.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = c \neq 0.$$

Questo non può essere un campo magnetico, tranne che nel caso banale ($c = 0$).

2.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = c - c = 0.$$

Questo può essere un campo magnetico! Calcoliamo la densità di corrente:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} = \boxed{0}.$$

3.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Questo può essere un campo magnetico! Calcoliamo la densità di corrente:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} = \boxed{\frac{2c}{\mu_0} \hat{\mathbf{k}}}.$$

4.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 cr) = \frac{1}{r^2} c \cdot 3r = 3c \neq 0. \end{aligned}$$

Questo non può essere un campo magnetico, tranne che nel caso banale ($c = 0$).



Problema 44. La piastra mostrata in figura (FIGURA) ha una superficie infinitamente grande ed uno spessore finito d (m). Essa è attraversata da una densità di corrente $j_0 \hat{\mathbf{k}}$ (A/m²). Determinare il campo magnetico generato dalla corrente in tutto lo spazio.

SOLUZIONE: Non conosciamo le caratteristiche del materiale di cui è costituita la piastra, quindi ci limiteremo a calcolare il campo magnetico al suo esterno. Possiamo vedere la piastra come una successione di lamine di spessore infinitesimo, in cui scorre una corrente di densità lineare $j_l = j_0 dy \hat{\mathbf{k}}$. Il campo generato da una singola lamina – già calcolato in precedenza col Teorema di Ampère – ha modulo

$$dB = \frac{\mu_0 j_l}{2} = \frac{\mu_0 j_0 dy}{2}.$$

Per trovare il campo totale, basta integrare in dy su tutto lo spessore d :

$$B = \int_{-d/2}^{d/2} dB = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\mu_0 j_0 dy}{2} = \boxed{\frac{\mu_0 j_0 d}{2}}.$$

Al solito, il campo sarà concorde all'asse x per $y < -d/2$, discorde per $y > d/2$.



Riferimenti bibliografici

[Griffiths] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Addison-Wesley, 4th edition, 2012. ISBN-13 978-0-321-85656-2.

[Mencuccini] Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini, *Fisica II: Elettromagnetismo – Ottica*. Liguori Editore, Napoli, 1988. ISBN 88-207-1633-X.