PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA: METODO DEL BRANCH AND BOUND

CORSO DI OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA

1. Introduzione

1.1. Programmi lineari interi. Un problema di ottimizzazione formulato come

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \left(\text{oppure: } \min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \tag{1}$$

soggetto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = k+1, \ldots, l, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = l+1, \ldots, m, \tag{4}$$

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

è detto problema di *programmazione lineare intera* (o semplicemente programma lineare intero). Nel seguito si analizzano tecniche volte a risolvere programmi lineari interi. Nello studio presentato si manterranno sempre (salvo casi esplicitamente segnalati) le seguenti ipotesi, che non sono strettamente necessarie ma semplificano alcuni aspetti della trattazione.

(i) Le costanti a_{ij}, c_j, b_i ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) sono *numeri razionali*; nel caso in cui il problema venga risolto su calcolatore, questa è sostanzialmente una necessità.

(ii) Tutte le variabili di controllo del problema assumono valori interi; le tecniche presentate si estendono comunuqe facilmente ai casi di programmazione *mista,* dove parte delle variabili sono di tipo continuo e parte di tipo intero.

Se le costanti del problema sono numeri razionali, senza perdita di generalità si possono considerare solo i programmi lineari interi formulati nella *forma standard per programmazione lineare intera:*

$$\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+\}, \qquad \text{con } \mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m, \mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m\times n}. \tag{6}$$

Per trasformare qualunque programma della forma (1)–(4) in uno della forma (6) si moltiplicano se necessario funzione obiettivo e vincoli per opportuni numeri interi — per eliminare eventuali coefficienti frazionari — e dopo si applicano le trasformazioni usate per porre i programmi lineari in forma standard.

Date: A. A. 2014/15.

1.2. **Regione ammissibile intera.** Dato un programma lineare intero nella forma standard (6), in modo analogo a quanto fatto per i programmi lineari a variabili continue si può definire una "regione" ammissibile

$$Z_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\},$$

È importante segnalare che, benché la rappresentazione di un programma lineare intero in termini di funzione obiettivo e vincoli sia simile a quella di un programma lineare a variabili continue, il livello di difficoltà nella sua risoluzione è, in generale, molto più alto.

2. Branch and bound

2.1. **Rilassamento.** Un *rilassamento* di un problema di ottimizzazione (non necessariamente un programma lineare)

$$\max\{z = f(x) \colon x \in S_a\} \tag{7}$$

è un altro problema di ottimizzazione

$$\max\{w = g(x) \colon x \in T_a\} \tag{8}$$

per cui risulta

$$T_a \supseteq S_a \quad \text{e inoltre } g(x) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in S_a. \tag{9}$$

Se esistono gli ottimi $\hat{x}$ e x^* dei problemi (7) e (8) si ha necessariamente $f(\hat{x}) \leq g(x^*)$; il rilassamento fornisce quindi una sovrastima dell'ottimo di (7).

2.2. **Rilassamento continuo.** Dato un programma lineare intero P nella forma standard (6), il programma lineare *a variabili continue*

$$\max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad c \in \mathbb{Z}^n, b \in \mathbb{Z}^m, A \in \mathbb{Z}^{m\times n}. \tag{10}$$

è un rilassamento del programma intero (6), poiché $S_a \supseteq Z_a$. Il programma (10) è detto *rilassamento continuo* (o anche *rilassamento lineare*) del programma intero.

L'algoritmo del simplesso, in generale, *non* risolve il programma lineare intero P ma il suo rilassamento continuo.

Esempio 1. Si consideri il programma lineare intero in due variabili

$$\begin{aligned}
\max\ z =& x_1 + 2x_2 \\
\text{soggetto a}\quad & 3x_1 + 5x_2 \quad \leq 11 \\
& -x_1 + 2x_2 \quad \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Senza trasformare il problema in forma standard, è possibile visualizzare nel piano la Z_a e la S_a del rilassamento lineare (Figura 1). La regione ammissibile del rilassamento è evidenziata in grigio, mentre gli elementi di Z_a sono i singoli punti marcati a coordinate intere. L'ottimo del rilassamento lineare corrisponde al punto $\mathbf{x}^* = (x_1 = \frac{7}{11}, x_2 = \frac{20}{11})$, di valore $\frac{47}{11}$ mentre si può verificare che il programma lineare intero ha come soluzione ottima il punto $(x_1 = 2, x_2 = 1)$, di valore 4.

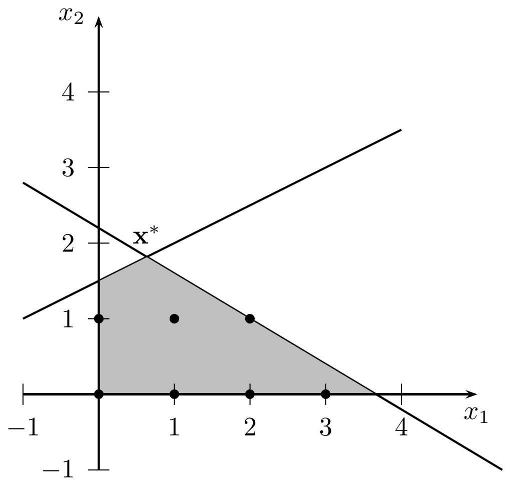

FIGURA 1. S_a (poligono colorato) e Z_a (punti •) per l'esempio 1.

2.3. **Branch and bound.** La tecnica del *branch and bound* permette di risolvere P generando una serie (potenzialmente molto grande) di programmi lineari interi $P, P_1, \dots, P_t$ più "semplici" e risolvendo i corrispondenti rilassamenti continui. Al termine delle operazioni si ottiene una soluzione ottima intera $\hat{\mathbf{x}}$, oppure l'indicazione che per P si ha $Z_a = \emptyset$.

La risoluzione del rilassamento di P può portare ad una delle seguenti situazioni.

(i) $S_a(P) = \emptyset$. In tal caso necessariamente $Z_a = \emptyset$, cioè P è privo di soluzioni ammissibili. Si noti che in generale $S_a \neq \emptyset$ non implica $Z_a \neq \emptyset$ come risulta dall'esempio

$$\max\{z = x_1 + x_2 \colon 1 \leq 4x_1 \leq 3,\, 1 \leq 4x_2 \leq 3,\, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+\}.$$

(ii) Il rilassamento di P ha una soluzione ottima $\mathbf{x}^*(P)$ le cui componenti sono tutte intere. In tal caso risulta $\mathbf{x}^*(P) \in Z_a$, e risolvendo il rilassamento si è risolto anche P stesso.

(iii) Il rilassamento P ha una soluzione ottima $\mathbf{x}^*(P)$ con una o più componenti non intere.

I casi (i) e (ii) sono casi "facili", nei quali l'applicazione del simplesso permette di chiudere anche il programma intero.

Nel caso (iii), la risoluzione del rilassamento fornisce solo una sovrastima del valore ottimo di P, detta *upper bound:*

$$\mathrm{UB(P)} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \geq \hat{z}.$$

In questo caso è necessaria un'esplorazione più approfondita dell'insieme delle soluzioni ammissibili. L'approccio più semplice consiste nel generare due sottoproblemi sfruttando una componente non intera x_k^* della soluzione ottenuta.

$$P_1: \quad \max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, x_k \leq \lfloor x_k^* \rfloor,\, x \in \mathbb{Z}_+^n\},$$
$$P_2: \quad \max\{z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, x_k \geq \lceil x_k^* \rceil,\, x \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

L'operazione sopra descritta è anche detta operazione di *branch* (suddivisione).

Si può osservare che i due programmi lineari interi P_1, P_2 hanno come regioni ammissibili

$$Z_a(P_1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, x_k \leq \lfloor \bar{x}_k \rfloor\},$$
$$Z_a(P_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, x_k \geq \lceil \bar{x}_k \rceil\},$$

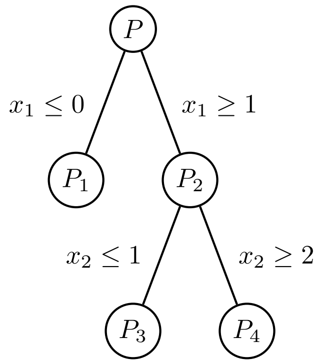

FIGURA 2. Albero di ricerca per il programma intero dell'esempio 1
.

che formano una partizione della regione ammissibile Z_a. Inoltre i corrispondenti rilassamenti continui hanno regioni ammissibili disgiunte $S_a(P_1), S_a(P_2) \subset S_a$ che non contengono la soluzione $\mathbf{x}^*(P)$.

La risoluzione di P_1 e P_2 produce l'ottimo di P (=il migliore dei due ottimi). Per risolvere P_1 e P_2 si risolvono ricorsivamente i rispettivi rilassamenti, ricadendo in uno dei casi (i), (ii), (iii), e così via. Poiché ogni operazione di branch produce programmi con regione ammissibile più ristretta dei precedenti, il processo genera in un tempo finito programmi "facili", i cui rilassamenti ricadono nei casi (i) o (ii).

Il processo, iterato, può essere rappresentato come lo sviluppo di un albero, nel quale il nodo radice rappresenta il problema P, i suoi due figli i problemi P_1 e P_2, ecc. Ogni nodo, eccetto il nodo radice, rappresenta un problema che è il prodotto di un'operazione di branch. L'unione delle Z_a dei (problemi associati ai) nodi figli di uno stesso nodo padre corrisponde alla Z_a del padre. L'albero ha per "foglie" (nodi privi di figli) i nodi corrispondenti a problemi i cui rilassamenti lineari ricadono nei casi (i) e (ii).

Nel caso dell'esempio 1, si sviluppa un albero come quello di Figura 2.

Il rilassamento di P ha come soluzione ottima il punto

$$x_1^* = \frac{7}{11},\ x_2^* = \frac{20}{11};$$

si generano quindi i programmi P_1 e P_2.

$$(P_1) \qquad \begin{aligned} \max\ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

$$(P_2) \qquad \begin{aligned} \max\ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

I rilassamenti di P_1, P_2 ammettono le soluzioni ottime

$$P_1 : x_1^* = 0,\ x_2^* = \frac{3}{2}, \qquad z^* = 3,$$
$$P_2 : x_1^* = 1,\ x_2^* = \frac{8}{5}, \qquad z^* = \frac{21}{5}.$$

I rilassamenti di P_1 e P_2 presentano u ottimi a variabili frazionarie; a partire da uno dei due, ad esempio P_2, si possono allora generare i programmi interi P_3 e P_4.

$$(P_3) \qquad \begin{aligned} \max\ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

$$(P_4) \qquad \begin{aligned} \max\ z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

I rilassamenti dei due programmi vengono poi risolti, e il processo, se necessario, reiterato. In particolare risulta che:

- il rilassamento di P_3 fornisce un ottimo a coordinate intere $\mathbf{x}^*(P_3) = (2, 1)$, di valore $z^* = 4$; questa è la prima soluzione intera che si incontra;
- il rilassamento di P_4 non ha soluzioni ammissibili.

I problemi P_3, P_4 non vengono ulteriormente suddivisi: da P_3 non si ricaverebbe alcuna soluzione con $z > 4$, mentre P_4 ovviamente non può fornire alcuna soluzione intera (non avendone neanche di continue).

A questo punto, una semplice considerazione permette di evitare di suddividere P_2: da P_2 non si possono ottenere soluzioni intere con $z > \text{UB}(P_2) = 3$. Essendo già nota una soluzione intera di valore 4, il confrontoUB$(P_2) \leq 4$ dimostra che P_2 non può fornire soluzioni migliori, e si evita quindi la suddivisione. Lo sviluppo dell'albero quindi non procede oltre.

L'algoritmo seguente fornisce un'implementazione efficiente dello schema di suddivisione descritto.

$\hat{\mathbf{x}} := \textit{null}$, $\hat{z} = -\infty$;
Risolvi il rilassamento continuo di P;
if $\mathbf{x}^*(P) \in \mathbb{Z}_+^n$ **then**
    $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*(P)$, $\hat{z} = z^*(P)$;
    return $\hat{\mathbf{x}}$;
else
    $\mathcal{P} = \{P\}$, $\hat{z} = -\infty$;
end if
while $\mathcal{P} \neq \emptyset$ **do**
    Scegli $P \in \mathcal{P}$;
    Branch(P), genera P_1, P_2 e risolvi i rilassamenti.
    for $k = 1, 2$ **do**
        if $\exists\, \mathbf{x}^*(P)$ and $\mathbf{x}^*(P_k) \in \mathbb{Z}_+^n$ and $z^*(P_k) > \hat{z}$ **then**
            $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*(P_k)$, $\hat{z} = z^*(P_k)$;

```
15:         end if
16:         if ∃x*(P) and z*(P) > ẑ then
17:             𝒫 = 𝒫 ∪ {P_k};
18:         end if
19:     end for
20:     𝒫 = {P ∈ 𝒫 ∪ {P_1, P_2}: x*(P) ∉ Z^n_+, UB(P) = z*(P) > ẑ};
21: end while
22: return x̂;
```

Osservazioni.

- L'algoritmo mantiene in memoria una "miglior soluzione nota" $\hat{\mathbf{x}}$, di valore $\hat{z}$. Solo alla conclusione della procedura questa $\hat{\mathbf{x}}$ è dimostrabilmente l'ottimo. Inizialmente non si conosce una soluzione ammissibile intera, quindi $\hat{z}$ e $\hat{\mathbf{x}}$ sono impostati ai valori convenzionali $-\infty$ e *null* (riga 1).
- I problemi dell'insieme $\mathcal{P}$ sono detti *nodi (o problemi) aperti;* essi rappresentano tutti e soli quei sottoproblemi dai quali *potrebbe* emergere una soluzione intera migliore di $\hat{\mathbf{x}}$.
- La miglior soluzione nota $\hat{\mathbf{x}}$ viene aggiornata quando si risolve un rilassamento lineare che produce una soluzione a variabili intere *migliore* della $\hat{\mathbf{x}}$ corrente (righe 12–16).
- I nodi con soluzione intera o privi di soluzioni ammissibili non vengono aggiunti a $\mathcal{P}$. Questi nodi sono detti *chiusi per ottimalità o per inammissibilità,* rispettivamente.
- Ad ogni iterazione si eliminano da $\mathcal{P}$ tutti i nodi con UB $\leq \hat{z}$: questi sono nodi che *non possono* dare soluzioni intere migliori di $\hat{\mathbf{x}}$, e quindi sono privi di interesse per la ricerca dell'ottimo intero. I nodi eliminati in questo modo sono detti *nodi (o problemi) chiusi per bound.*
- La chiusura di nodi limita lo sviluppo dell'albero.
- Il verificarsi della condizione $\mathcal{P} = \emptyset$ dimostra l'ottimalità di $\hat{\mathbf{x}}$ — oppure, se $\hat{\mathbf{x}} =$ *null* e $\hat{z} = -\infty$, che P è privo di soluzioni ammissibili.

3. Implementazione

Il rilassamento continuo di un programma lineare intero si può risolvere naturalmente per mezzo dell'algoritmo del simplesso. I sottoproblemi derivati con l'operazione di branch si possono risolvere in modo efficiente partendo dalla riformulazione ottima dei rispettivi problemi "padri" sfruttando un'applicazione del simplesso duale. La tecnica si può illustrare bene sull'esempio del paragrafo precedente.

Il programma

$$\begin{aligned} \max\ z =\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

equivale al problema in forma standard

$$(P)\qquad \begin{aligned} \max\ z =\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

(si noti che anche le x_3, x_4 sono intere). Il rilassamento continuo ammette la base ottima $\{x_1, x_2\}$ con riformulazione

$$\begin{array}{rrrr} \max\ z = & \frac{47}{11} & -\frac{4}{11}x_3 & -\frac{1}{11}x_4 \\ x_1 = & \frac{7}{11} & -\frac{2}{11}x_3 & +\frac{5}{11}x_4 \\ x_2 = & \frac{20}{11} & -\frac{1}{11}x_3 & -\frac{3}{11}x_4 \\ & & x_1, \dots, x_4 \geq 0. & \end{array}$$

L'operazione di branch genera i problemi

$$P_1\colon P \wedge x_1 \leq 0$$
$$P_2\colon P \wedge x_1 \geq 1.$$

Conoscendo la base ottima di P, è possibile risolvere i problemi di P_1, P_2 incrementalmente. Si consideri P_1 per fissare le idee. Il vincolo addizionale $x_1 \leq 0$ si può inserire in P usando una nuova variabile di slack $x_5 \geq 0$ ed il vincolo $x_1 + x_5 = 0$. Nel punto $\mathbf{x}^*(P) = (\frac{7}{11}, \frac{20}{11})$ risulta $x_5 = -\frac{7}{11} < 0$. Se si riformula il vincolo

$$x_1 + x_5 = 0 \iff x_5 = 0 - x_1 = -\frac{7}{11} + \frac{2}{11}x_3 - \frac{5}{11}x_4 \qquad (x_5 \geq 0)$$

si può osservare che la seguente riformulazione corrisponde alla base $\{x_1, x_2, x_5\}$ che risulta

- non ammissibile, ma
- duale-ammissibile

per il problema P_1.

$$\begin{array}{rrrr} \max\ z = & \frac{47}{11} & -\frac{4}{11}x_3 & -\frac{1}{11}x_4 \\ x_1 = & \frac{7}{11} & -\frac{2}{11}x_3 & +\frac{5}{11}x_4 \\ x_2 = & \frac{20}{11} & -\frac{1}{11}x_3 & -\frac{3}{11}x_4 \\ x_5 = & -\frac{7}{11} & +\frac{2}{11}x_3 & -\frac{5}{11}x_4 \\ & & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & \end{array}$$

Applicando il simplesso duale (esce di base x_5, entra x_3) si ottiene

$$\begin{array}{rrrr} \max\ z = & 3 & -2x_5 & -x_4 \\ x_1 = & 0 & -x_5 & \\ x_2 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -\frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = & \frac{7}{2} & +x_5 & -\frac{5}{2}x_4 \\ & & x_1, \dots, x_5 \geq 0, & \end{array}$$

che è la riformulazione ottima di P_1. Analogamente, il vincolo $x_1 \geq 2$ di P_2 si può inserire nella riformulazione di P inserendo una x_5, questa volta di surplus:

$$x_1 \geq 1 \iff x_1 - x_5 = 1 \qquad (x_5 \geq 0)$$

e, riformulando $x_5 = x_1 - 1 = -\frac{4}{11} - \frac{2}{11}x_3 + \frac{5}{11}x_4$ si ottiene anche per (il rilassamento di) P_2 una riformulazione duale-ammissibile:

$$\begin{array}{rrrr} \max\ z = & \frac{47}{11} & -\frac{4}{11}x_3 & -\frac{1}{11}x_4 \\ x_1 = & \frac{7}{11} & -\frac{2}{11}x_3 & +\frac{5}{11}x_4 \\ x_2 = & \frac{20}{11} & -\frac{1}{11}x_3 & -\frac{3}{11}x_4 \\ x_5 = & -\frac{4}{11} & -\frac{2}{11}x_3 & +\boxed{\frac{5}{11}x_4} \\ & & x_1, \dots, x_5 \geq 0, & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrrr} \max\ z = & \frac{21}{5} & -\frac{2}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_5 \\ x_1 = & 1 & & +x_5 \\ x_2 = & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5}x_3 & -\frac{3}{5}x_5 \\ x_4 = & \frac{4}{5} & +\frac{2}{5}x_3 & +\frac{11}{5}x_5 \\ & & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & \end{array}$$

Questo completa il calcolo degli upper bound di P_1 e P_2. Per i rilassamenti di P_3 e P_4 si lavora partendo dalla riformulazione ottima del rilassamento di P_2.

$$P_3\colon P_2 \wedge x_2 \leq 1 \iff P_2 \wedge x_2 + x_6 = 1 \qquad (x_6 \geq 0)$$
$$P_4\colon P_2 \wedge x_2 \geq 2 \iff P_2 \wedge x_2 - x_6 = 2 \qquad (x_6 \geq 0).$$

Per P_3 si ha $x_6 = 1 - x_2 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_5$ e quindi

$$\begin{array}{rrrr} \max\ z = & \frac{21}{5} & -\frac{2}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_5 \\ x_1 = & 1 & & +x_5 \\ x_2 = & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5}x_3 & -\frac{3}{5}x_5 \\ x_4 = & \frac{4}{5} & +\frac{2}{5}x_3 & +\frac{11}{5}x_5 \\ x_6 = & -\frac{3}{5} & +\frac{1}{5}x_3 & +\boxed{\frac{3}{5}x_5} \\ & \multicolumn{3}{c}{x_1,\dots,x_5 \geq 0} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrrr} \max\ z = & 4 & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_6 \\ x_1 = & 2 & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{5}{3}x_6 \\ x_2 = & 1 & & -x_6 \\ x_4 = & 3 & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{11}{3}x_6 \\ x_5 = & 1 & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{5}{3}x_6 \\ & \multicolumn{3}{c}{x_1,\dots,x_6 \geq 0} \end{array} \quad \text{(sol. intera).}$$

Per P_4 risulta $x_6 = x_2 - 2 = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5$, quindi si ottiene la riformulazione

$$\begin{array}{rrrr} \max\ z = & \frac{21}{5} & -\frac{2}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_5 \\ x_1 = & 1 & & +x_5 \\ x_2 = & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5}x_3 & -\frac{3}{5}x_5 \\ x_6 = & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}x_3 & -\frac{3}{5}x_5 \\ & \multicolumn{3}{c}{x_1,\dots,x_6 \geq 0,} \end{array}$$

che corrisponde ad una situazione con duale illimitato (il rilassamento di P_4 non ha soluzioni ammissibili).

4. Metodo dei piani di taglio

Si può osservare che le soluzioni ammissibili di un problema di PLI possono essere descritte in modo più forte rispetto a quanto fatto finora. Ad esempio, il PLI dell'esempio 1 potrebbe essere descritto in modo più efficace dal modello:

$$\begin{array}{rll} \max\ z = & x_1 + 2x_2 & \\ \text{soggetto a} & x_2 & \leq 1 \\ & x_1 + x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. & \end{array}$$

La regione ammissibile del rilassamento continuo di tale modello è strettamente contenuta nella regione ammissibile mostrata in Figura 1. Inoltre tutti le soluzioni a coordinate intere in Z_a sono ancora contenute nella regione ammissibile S'_a del rilassamento del nuovo modello. Non solo, ma i vertici di S'_a sono tutti a coordinate intere: come consseguanza, l'algoritmo del simplesso applicato a tale modello troverebbe l'ottimo intero del PLI dell'esempio 1 senza bisogno di ricorrere al branch and bound.

Più in generale, si potrebbe risolvere ogni problemo di PLI per mezzo del semplice simplesso qualora si fosse in grado di descrivere con un insieme finito di equazioni (e/o disequazioni) il *convex hull* della regione ammissibile intera Z_a. Il *convex hull* di un insieme di punti S è definito come il più piccolo insieme convesso che contiene ogni $\mathbf{x} \in S$, e si denota $\text{conv}(S)$. Si può dimostrare che il convex hull delle soluzioni ammissibili di qualunque problema di PLI nella forma (6) è descrivibile da un insieme finito di equazioni e/o disequazioni. Tuttavia il numero di tali equazioni può essere in generale astronomico — in particolare, può crescere come 2^n, spostando quindi di fatto la complessità dalla procedura di risoluzione (tipo branch and bound) alla descrizione del problema. Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e una disuguaglianza $\sum_{i=1}^n \pi_i x_i \leq \pi_0$, tale disuguaglianza è detta *valida* per S se e solo se essa è soddisfatta per ogni $\mathbf{x} \in S$. Si consideri un problema di PLI nella forma (6)

$$\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{X} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n_+\},$$

la cui regione ammissibile è $Z_a \subseteq \mathbb{Z}^n_+$ ed il cui rilassamento continuo ha la forma (10)

$$\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{X} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+\},$$

con regione ammissibile S_a. La descrizione di $\mathrm{conv}(Z_a)$ è ottenibile sfruttando disuguaglianze che siano valide per Z_a ma non valide per S_a. Una classe importante di disuguaglianze è costituita dalle disuguaglianze di Gomory. Data un'uguaglianza

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \beta$$

valida per S_a, i coefficienti α_j si possono scrivere come $\alpha_j = \lfloor \alpha_j \rfloor + \mathrm{frac}\, \alpha_j$, dove $\lfloor \alpha \rfloor = \max\{\gamma \colon \gamma \leq \alpha\}$ è il più grande intero $\leq \alpha$ — la "parte intera" di un numero — e $\mathrm{frac}(\alpha_j) = \alpha_j - \lfloor \alpha \rfloor$ — la "parte frazionaria". Allora risulta

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor \alpha_j \rfloor x_j + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{frac}(\alpha_j) x_j = \lfloor \beta \rfloor + \mathrm{frac}(\beta). \tag{11}$$

Si può osservare allora che, essendo $\lfloor \alpha_j \rfloor \leq \alpha_j$

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor \alpha_j \rfloor x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \beta,$$

e se tutte le x_j assumono valori interi si ha anche

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor \alpha_j \rfloor x_j \leq \lfloor \beta \rfloor. \tag{12}$$

L'equazione (12) vale per ogni $\mathbf{x} \in Z_a$. Confrontata con la (11) essa implica che si deve avere per ogni soluzione $\mathbf{x} \in Z_a$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{frac}(\alpha_j) x_j \geq \mathrm{frac}(\beta). \tag{13}$$

L'equazione (13) è particolarmente significativa se applicata ad una riga della riformulazione ottima del rilassamento continuo con termine noto <u>non intero</u>. In tal caso L'equazione è

$$x_i = \beta_i + \sum_{x_j \notin B} \alpha_{ij} x_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_i - \sum_{x_j \notin B}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i$$

dove x_i è la variabile di base sulla riga in oggetto, e le x_j che appaiono nella sommatoria sono le variabili fuori base rispetto alla base ottima B. L'equazione (13) diventa quindi

$$\sum_{j \notin B} \mathrm{frac}(-\alpha_{ij}) x_j \geq \mathrm{frac}(\beta_j). \tag{14}$$

La (14), per costruzione, è un vincolo rispettato dalle $\mathbf{x} \in Z_a$ ma *violato* dalla soluzione ottima del rilassamento continuo. Essa è detta *taglio di Gomory* associato alla riga scelta.

Si può dimostrare che la generazione iterativa dei tagli di Gomory è sufficiente a determinare l'ottimo intero di un PLI (il numero di tagli necessario può essere molto grande). È quindi corretto il seguente algoritmo.

Input: Un PLI $P : \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n_+.\}$
Output: La soluzione ottima intera, se esiste.
Risolvi il rilassamento

$$P' \colon \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

while [l'ottimo di P' $\mathbf{x}^*$ non è intero] **do**
Sia B la base ottima.

Scegli nella riformulazione rispetto a B una riga

$$x_i = \beta_i \sum_{x_j \notin B} \alpha_{ij} x_j \qquad \text{con } \beta_i \notin \mathbb{Z}.$$

if [una tale riga non esiste] **then**
  return [Nessuna soluzione intera]
else
  Aggiungi a P' il vincolo $\displaystyle\sum_{j \notin B} \mathrm{frac}(-\alpha_{ij}) x_j \geq \mathrm{frac}(\beta_i)$.
  Risolvi il nuovo P'.
end if
end while
return $\mathbf{x}^*$

Esempio 2. Il programma dell'esempio 1 ha soluzione ottima del rilassamento continuo data dalla seguente riformulazione.

$$\begin{array}{rrrr}
\max\ z = & \frac{47}{11} & -\frac{4}{11}x_3 & -\frac{1}{11}x_4 \\
x_1 = & \frac{7}{11} & -\frac{2}{11}x_3 & +\frac{5}{11}x_4 \\
x_2 = & \frac{20}{11} & -\frac{1}{11}x_3 & -\frac{3}{11}x_4 \\
& & x_1, \ldots, x_4 \geq 0. &
\end{array}$$

Considerando la riga di x_1, si può generare il taglio di Gomory

$$\frac{2}{11}x_3 + \frac{6}{11}x_4 \geq \frac{7}{11}.$$

Il taglio si può inserire direttamente nella riformulazione utilizzando una variabile di surplus x_5,

$$\frac{2}{11}x_3 + \frac{6}{11}x_4 \geq \frac{7}{11} \iff \frac{2}{11}x_3 + \frac{6}{11}x_4 + x_5 = \frac{7}{11} \quad (x_5 \geq 0).$$

La riformulazione così aumentata si può riottimizzare per mezzo del simplesso duale.

$$\begin{array}{rrrr}
\max\ z = & \frac{47}{11} & -\frac{4}{11}x_3 & -\frac{1}{11}x_4 \\
x_1 = & \frac{7}{11} & -\frac{2}{11}x_3 & +\frac{5}{11}x_4 \\
x_2 = & \frac{20}{11} & -\frac{1}{11}x_3 & -\frac{3}{11}x_4 \\
x_5 = & -\frac{7}{11} & +\frac{2}{11}x_3 & +\boxed{\frac{6}{11}x_4} \\
& & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. &
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rrrr}
\max\ z = & \frac{25}{6} & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{6}x_5 \\
x_1 = & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{5}{6}x_5 \\
x_2 = & \frac{3}{2} & & -\frac{1}{2}x_5 \\
x_4 = & \frac{7}{6} & +\frac{1}{3}x_3 & +\frac{11}{6}x_5 \\
& & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. &
\end{array}$$

Effettuando ancora un taglio sulla riga di x_1, si ottiene il taglio di Gomory

$$\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_5 \geq \frac{1}{6} \iff \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_5 - x_6 = \frac{1}{6} \quad (x_6 \geq 0).$$

Procedendo analogamente a prima si aumenta la riformulazione e si applica il simplesso duale.

$$\begin{array}{rrrr}
\max\ z = & \frac{25}{6} & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{6}x_5 \\
x_1 = & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{5}{6}x_5 \\
x_2 = & \frac{3}{2} & & -\frac{1}{2}x_5 \\
x_4 = & \frac{7}{6} & +\frac{1}{3}x_3 & +\frac{11}{6}x_5 \\
x_6 = & -\frac{1}{6} & +\boxed{\frac{1}{3}x_3} & +\frac{1}{6}x_5 \\
& & x_1, \ldots, x_6 \geq 0 &
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rrrr}
\max\ z = & 4 & -x_6 & \\
x_1 = & 1 & -x_6 & +x_5 \\
x_2 = & \frac{3}{2} & & -\frac{1}{2}x_5 \\
x_4 = & \frac{4}{3} & +x_6 & +\frac{5}{3}x_5 \\
x_3 = & \frac{1}{2} & +3x_6 & -\frac{1}{2}x_5 \\
& & x_1, \ldots, x_6 \geq 0. &
\end{array}$$

Infine, considerando la riga di x_2 si ottiene il taglio

$$\frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}x_5 - x_7 = \frac{1}{2} \quad (x_7 \geq 0)$$

e quindi

$$
\begin{array}{rrrr}
\max\ z = & 4 & -x_6 & \\
x_1 = & 1 & -x_6 & +x_5 \\
x_2 = & \frac{3}{2} & & -\frac{1}{2}x_5 \\
x_4 = & \frac{4}{3} & +x_6 & +\frac{5}{3}x_5 \\
x_3 = & \frac{1}{2} & +3x_6 & -\frac{1}{2}x_5 \\
x_7 = & -\frac{1}{2} & & +\boxed{\frac{1}{2}x_5} \\
\multicolumn{4}{c}{x_1, \ldots, x_7 \geq 0}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rrrr}
\max\ z = & 4 & -x_6 & \\
x_1 = & 2 & -x_6 & -2x_7 \\
x_2 = & 1 & & -x_7 \\
x_4 = & 3 & +x_6 & -5x_7 \\
x_3 = & 0 & +3x_6 & -x_7 \\
x_5 & = 1 & & +2x_7 \\
\multicolumn{4}{c}{x_1, \ldots, x_7 \geq 0}
\end{array} .
$$

A quest'ultima riformulazione corrisponde l'ottimo a coordinate intere.