RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA

ANTONIO SÁNGARI - CRISTINA EGÜEZ

asangari2000@gmail.com criseguez@gmail.com

Resumen. Esta cartilla consiste en una serie de ejercicios, de problemas y de breves notas teóricas que abordan situaciones de geometría elemental. En general, la secuencia de los ejercicios es una concatenación de demostraciones geométricas de propiedades conocidas. Los problemas abordan distintos temas de búsqueda de lugares geométricos y de posiciones y medidas óptimas. El énfasis en este trabajo, como así el motivo de este curso es la **Geometría,** que hace uso de un recurso principalmente educativo, como es el GeoGebra. Las sugerencias que se brindan al final, son sólo eso, el participante puede plantear las resoluciones sin atender dichas sugerencias.

1. Ángulo Inscrito

Definición 1. Un ángulo se dice inscrito en una circunferencia si tiene vértice sobre la circunferencia y subtiende un arco cuyos extremos están sobre los lados del ángulo.

Definición 2. Un ángulo central es el que tiene vértice en el centro de una circunferencia.

Ejercicio 1. Realice las siguientes instrucciones:

1. Abra el archivo 1-explorar-Ang-Ins.ggb.
2. el punto E y el punto F y observe los efectos en la figura.
3. Ídem al anterior, arrastrando el punto C y el punto D.
4. Formule conjeturas en cada caso.
5. Ejecute Vista→ Vista Algebraica. Luego haga clic en el redondel de texto 1. Este texto, ¿confirma su conjetura?
6. Ejecute Vista→ Barra de Navegación por Pasos de Construcción →Muestra.
7. Vaya al inicio de la construcción e interprete los pasos en la Vista Algebraica y en la Gráfica. Preste atención a los elementos que aparecen en la Vista Algebraica pero que están ocultos para la Vista Gráfica.
8. Busque la herramienta Tangentes (→) y aplíquela sobre los puntos C y D de la circunferencia.

Date: Noviembre de 2012.

9. Dibuje dos puntos H e I sobre la tangente por C, de un lado y otro de C.
10. Mida los ángulos DCH y DCI (menores que 180°).
11. Obtenga conclusiones.

Teorema 1. *Sea una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y una cuerda AB. Todo ángulo α inscrito en $\mathcal{C}$ que subtiende a AB del mismo lado de O con respecto a AB es igual a la mitad del ángulo central que subtiende a AB.*

Ejercicio 2. Abra el archivo 2-prueba-Ang-Ins.ggb visualice la prueba del Teorema 1

Ejercicio 3. Justifique que *un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto*. Realice un dibujo que represente la demostración.

Ejercicio 4. Muestre que *el centro de la circunferencia circunscrita de los triángulos rectángulos está en el punto medio de la hipotenusa* (Sugerencia 1). Construya una figura dinámica correspondiente a la prueba.

Ejercicio 5. Muestre que *un triángulo es rectángulo si y sólo si uno de sus lados diámetro de la circunferencia que pasa por sus vértices.*

Teorema 2. *Sea una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y una cuerda AB. Si el ángulo inscrito β subtiende a AB desde el otro lado de O con respecto a AB, $\beta = \pi - \alpha$, donde α es la mitad del ángulo central.*

Ejercicio 6. Demuestre el Teorema 2.

Ejercicio 7. A partir de los teoremas 1 y 2, justifique que *los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes.*

Ejercicio 8. Justifique que *las rectas paralelas determinan arcos congruentes sobre un círculo.*

Ejercicio 9. Demuestre que *si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia sus ángulos opuestos son suplementarios.*

Ejercicio 10. Abra el archivo 3-recip-Ang-Ins.ggb. Active el rastro del punto D y arrastre el punto C. Realice conjeturas e intente probarlas. (Sugerencia 2)

Ejercicio 11. Justifique que *si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, entonces dicho cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia.*

Definición 3. Un ángulo se dice seminscrito en una circunferencia8 si tiene su vértice en ella, uno de sus lados tangente y el otro secante a la misma.

Ejercicio 12. Pruebe que *todo ángulo seminscrito es igual a la mitad del ángulo central que contiene al mismo arco.*

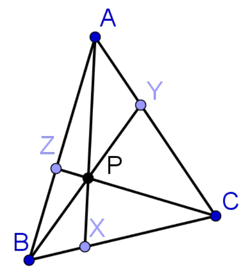


FIGURA 2.1. Teorema de Ceva

2. PUNTOS Y RECTAS INTERESANTES

Teorema 3. *(Teorema de los senos generalizado) Para un triángulo ABC con radio de la circunferencia circunscrita R:*

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

Ejercicio 13. Use las propiedades demostradas en los ejercicios 5 y 7 para demostrar el teorema de los senos generalizado.

Ejercicio 14. Probar que las bisectrices interiores de un triángulo dividen el lado opuesto en dos segmentos de longitud proporcional a la longitud de sus lados adyacentes.

Definición 4. El segmento que une el vértice de un triángulo con cualquier punto del lado opuesto, o su prolongación, se llama ceviana.

Teorema 4. *Si tres cevianas AX, BY, CZ, cada una de ellas partiendo de un vértice de un triángulo ABC, son concurrentes, entonces:*

$$\frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} \times \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Ejercicio 15. Use la figura 2.1 para mostrar que:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(ABP)}{(CAP)}$$

donde P es el punto de intersección de las cevianas. (Sugerencia 3)

Ejercicio 16. Enuncie el recíproco del teorema 4 y esboce una demostración de ambos.

Ejercicio 17. Use el recíproco del teorema de Ceva y muestre que las alturas (de un triángulo acutángulo), las medianas y las bisectrices se cortan en un punto.

Ejercicio 18. Para cada punto: el incentro I, el circuncentro O , el baricentro G y el ortocentro H :

1. Realice la construcción de los mismos y la grabe en un archivo ggb.
2. Guarde la figura como imagen, en un archivo png, con el mismo nombre que el punto en cuestión. (*Ver* B.1)
3. Cree las herramientas (*Ver* A.2) para cada construcción.
4. Configure la vista de la pantalla a fin de poder acceder a las herramientas (*Ver* A.3) creadas y ser utilizada en otras construcciones.

Definición 5. El punto de Fermat (o de Torricelli) es la intersección de las rectas que van desde el vértice libre de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados de un triángulo dado al vértice opuesto de este último triángulo.

Ejercicio 19. Construya una herramienta para el punto de Fermat y anéxela a la barra de herramientas para que quede disponible.

Definición 6. El triángulo que tiene como vértices a los pies de las alturas de un triángulo, se llama triángulo órtico.

Ejercicio 20. Mostrar que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico.

Ejercicio 21. Demostrar que las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos de igual área.

Ejercicio 22. Probar que las medianas de un triángulo se dividen una a la otra en razón de $2:1$; es decir que se triseccionan una a las otras.

Definición 7. El triángulo que tiene como vértices a los puntos medios de los lados de un triángulo , se llama triángulo medial.

Ejercicio 23. Para un triángulo ABC realice lo siguiente:

1. Dibuje el triángulo $A'B'C'$
2. Justifique que $A'B'C'$ divide a ABC en cuatro triángulos congruentes y que ABC y $A'B'C'$ son semejantes.
3. Marque el baricentro G de $A'B'C'$, ¿qué relación tiene este punto con ABC?
4. Encuentre una relación entre el circuncentro O de ABC con el ortocentro de $A'B'C'$
5. Trace los segmentos OA', AH, HG y OG . Use la herramienta Inserte Texto y escriba OA=objeto segmento OA (ver nombre en Vista Algebraica), ídem para los otros tres. Desplace los distintos vértices de ABC. Observe la figura, los valores, enuncie conjeturas. Demuestre las conclusiones.

Teorema 5. *El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de cualquier triángulo están alineados. El baricentro divide al circuncentro en la razón 2:1.*

Definición 8. La recta en la que están situados estos tres puntos se denomina *recta de Euler*.

Teorema 6. *En cualquier triángulo, se puede construir una circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices, dicha circunferencia se llama circunferencia de los nueve puntos.*

Ejercicio 24. Realice los siguientes pasos para construir la circunferencia de los 9 puntos.

1. Dibuje un triángulo ABC ( )
2. Determine los puntos medios de los lados (→)
3. Renombre los puntos medios como A', B', C' (clic derecho sobre el punto→Renombra)
4. Ponga color verde a los puntos A', B', C' (clic derecho sobre el punto→Propiedades de Objeto→Color)
5. Marque el ortocentro (Ortocentro, herramienta creada)
6. Determine los pies de las alturas (→)
7. Ponga color rojo a los pies de las alturas. (clic derecho sobre el punto→Propiedades de Objeto→Color)
8. Oculte la última recta (clic derecho sobre la recta→Muestra Objeto)
9. Determine los puntos medios entre los vértices y el ortocentro (→)
10. Cambie el color de estos puntos medios (clic derecho sobre el punto→Propiedades de Objeto→Color)
11. Oculte el ortocentro (clic derecho sobre el punto→Muestra Objeto)
12. Trace la circunferencia de los 9 puntos (→)
13. Compruebe que existe para cualquier ABC (sobre los vértices)
14. Repase la construcción realizada (Vista→Protocolo de Construcción)

Ejercicio 25. Demuestre el teorema 6. (Sugerencia 4)

Ejercicio 26. Demuestre que *el centro de la circunferencia de los 9 puntos es el punto medio del segmento que une el circuncentro con el ortocentro del triángulo.*

Ejercicio 27. Desde un punto P interior a una circunferencia, trace dos rectas que corten a la circunferencia en los puntos A, A' (pueden ser coincidentes) y B, B' (pueden ser coincidentes), respectivamente.

1. Marque los segmentos PA, PA', PB, PB', cree un comando (*Ver* C.1) para que realice las operaciones $AP \times PA'$ y $BP \times PB'$ formule conjeturas. Justifique.

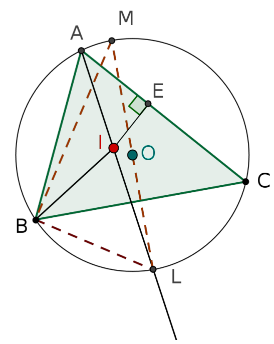


FIGURA 2.2. Expresión de Euler

2. Compruebe que también se cumple si P es exterior a la circunferencia. Justifique. (Sugerencia 5)
3. ¿Qué pasa si P está sobre la circunferencia?

Ejercicio 28. Para los puntos del ejercicio 27, suponga ahora que B y B' son extremos de un diámetro. Sean d la distancia de P al centro de la circunferencia y R el radio. Muestre que $AP \times PA' = BP \times PB' = R^2 - d^2$, si P es interior; y $AP \times PA' = BP \times PB' = d^2 - R^2$ si P es exterior a la circunferencia.

Definición 9. Para cualquier circunferencia de radio R y cualquier punto P que diste d del centro, el valor de $d^2 - R^2$, se llama potencia de P respecto a la circunferencia.

Así, la potencia puede ser positiva, cero o negativa, según P esté fuera, sobre o dentro de la circunferencia.

Ejercicio 29. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de potencia constante, mayor que $-R^2$, respecto a una circunferencia dada?

Ejercicio 30. Muestre que la potencia del centro de la circunferencia inscrita con respecto a la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC es $-2rR$ (r radio de la inscrita y R de la circunscrita) Considere la figura 2.2. (*Ver* Sugerencia 6)

Definición 10. Sea triángulo ABC y un punto P. El triángulo que tiene como vértices los pies de las perpendiculares desde P a los lados (o su prolongación) de ABC, se llama triángulo pedal P con respecto a ABC.

Ejercicio 31. Los pies de las perpendiculares desde un punto a los lados de un triángulo están alineados si y sólo si el punto está situado en la circunferencia circunscrita.

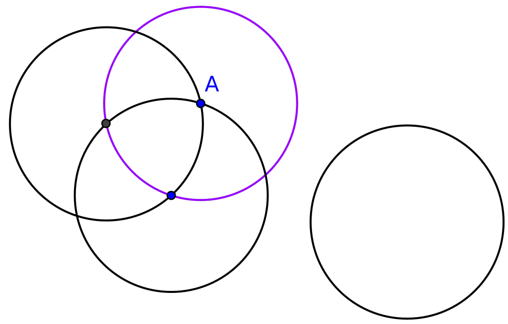


FIGURA 3.1. Composición de traslaciones

Definición 11. La recta que pasa por los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo, trazadas desde un punto de la circunferencia circunscrita, se llama *recta de Simson* del punto con respecto al triángulo.

3. Transformaciones en el plano

Definición 12. Se llama traslación de vector $\overrightarrow{v}$ a la transformación que a cada punto P le hace corresponder como imagen un punto P' tal que $PP' = \overrightarrow{v}$.

Ejercicio 32. Reconstruya la casa. Abra el archivo Casa.ggb. Use las herramientas Vector entre Dos Puntos (→Vector entre Dos Puntos) y Traslada Objeto por un Vector (→Traslada Objeto por un Vector)

Ejercicio 33. Determine vectores de una composición de traslaciones aplicada a la circunferencia con centro en A, de modo que resulte la siguiente como se muestra en la figura 3.1. Abra el archivo TrasladaCircunf.ggb. Compruebe.

Ejercicio 34. "Inscriba" segmentos iguales y paralelos al segmento DE en el triángulo ABC de la figura 3.2 Abra el archivo TrasladaSegmento.ggb

Ejercicio 35. Dibuje parte de la figura que puede obtenerse de trasladar un triángulo equilátero ABC según todos los vectores que resulten de la suma de un múltiplo entero de AB más un múltiplo entero de AC. Para ello, puede seguir las siguientes instrucciones:

1. Construya ABC equilátero (→Polígono Regular)
2. Sobre los segmentos AB y AC, aplique la herramienta Vector Entre Dos Puntos (→Vector Entre Dos Puntos)

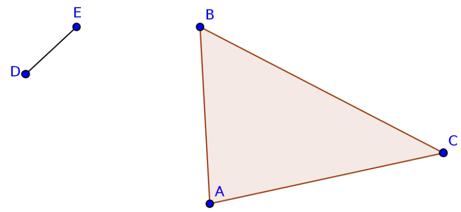


FIGURA 3.2. Segmento inscribible por traslación

3. En la barra de comandos, escriba $m * u + n * v$, donde $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$, y m y n son distintos valores enteros (entre -2 y 2, por ejemplo), para cada traslación.

Definición 13. Se llama rotación de centro O y ángulo de giro θ a la transformación, que a todo punto P le hace corresponder como imagen un punto P' tal que $OP = OP'$ y $P\hat{O}P' = \theta$.

Convenimos que el ángulo es positivo si el giro es en sentido antihorario, negativo en caso contrario.

Ejercicio 36. Encuentre el ángulo y el centro de giro del autito. Abra el archivo Auto.ggb

Ejercicio 37. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea P un punto interior, rote el triángulo APB, alrededor de B con un ángulo de 60° de modo que obtenga el triángulo $C'P'B$. Justifique que la longitud de la poligonal $C'P'PC$ es igual a la suma de los segmentos que unen el punto P con cada uno de los vértices. Es decir $C'P' + P'P + PC = AP + BP + CP$.

Definición 14. Una simetría axial de eje e es una transformación que hace corresponder a cada punto P otro punto P' tal que la recta e es mediatriz del segmento PP'.

Le dedicamos un regalo si la inicial de su nombre y/o apellido tiene simetría de eje horizontal y vertical.

Ejercicio 38. Sea el triángulo ABC, construya un triángulo arbitrario UVW, donde U está en BC, V en CA y W en AB. Sean U', U'' las imágenes de U por reflexión en CA y CB, respectivamente. Muestre que $UV + VW + WU = U'V + VW + WU'$.

Proposición 1. *Si un paralelogramo y un triángulo tienen la misma base, y están comprendidos entre las mismas paralelas, entonces el área del paralelogramo es doble de la del triángulo. Esto es tanto como decir que a igual base y altura, el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo.*

Ejercicio 39. Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Demuestre el teorema de Pitágoras aplicando los siguientes pasos:

1. Construya externamente cuadrados, $CFGB$, $ADEC$ y $BIKA$, sobre los lados a,b y c respectivamente.
2. Trace el segmento CJ que es prolongación de la altura CM (del lado c).
3. Rote el triángulo ACK con centro en A y giro de 90°.
4. Use la proposición 1, y pruebe que $(ADEC) = (AHJK)$
5. Rote el triángulo BCI con centro en B y giro de 90°.
6. Use la proposición 1 y pruebe que $(BCFG) = (HBIJ)$.
7. A partir de aquí, es inmediato que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Ejercicio 40. Desde un mismo lado de una recta r se encuentran dos puntos A y B. Construya el camino más corto que une A con B tocando en un punto a la recta r.

Ejercicio 41. En un medio homogéneo, un rayo de luz que parte desde un punto A a B pasando por un espejo, lo hace a lo largo de un camino mínimo. Si el rayo incide en el espejo con un ángulo α, halle el ángulo con que se refleja.

Ejercicio 42. Dado un triángulo escaleno ABC cuyos lados son capaces de reflejar la luz, ¿en qué pundo del lado AB debería estar situada una fuente luminosa de forma que el rayo emitido, después de reflejarse sucesivamente en los otros dos lados, retornara a la fuente? (*Ver* Sugerencia 7)

Definición 15. Se llama homotecia de centro O y razón k (distinto de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto P otro P', tal que: $OP' = k \star OP$.

La homotecia es directa $(k > 0)$ o inversa $(k < 0)$. Según A' esté en la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ o en la opuesta. Si $k < 1$ es una contracción y si $k > 1$ es una dilatación.

Ejercicio 43. Abra el archivo ImagenHomot.ggb. Desde el punto A aplique una homotecia, de razón 4 y 0,4, a las imágenes 1 y 2 respectivamente.

Ejercicio 44. Abra el archivo HomotAngulos.ggb. Encuentre el centro y la razón de la homotecia aplicada a la imagen 1. Luego aplíquela a la imagen 2.

Ejercicio 45. Dado un sector circular AOB, inscriba en él un cuadrado con un lado paralelo a la cuerda AB. (*Ver* Sugerencia 8)

Ejercicio 46. $ABCD$ es un paralelogramo; E y F puntos tales que $DE = DC$ y $BF = BC$ como indica la figura 3.3.

1. Demuestre que existe una homotecia de centro E y razón k que hace corresponder al punto C, el punto F. (*Ver* Sugerencia 9)

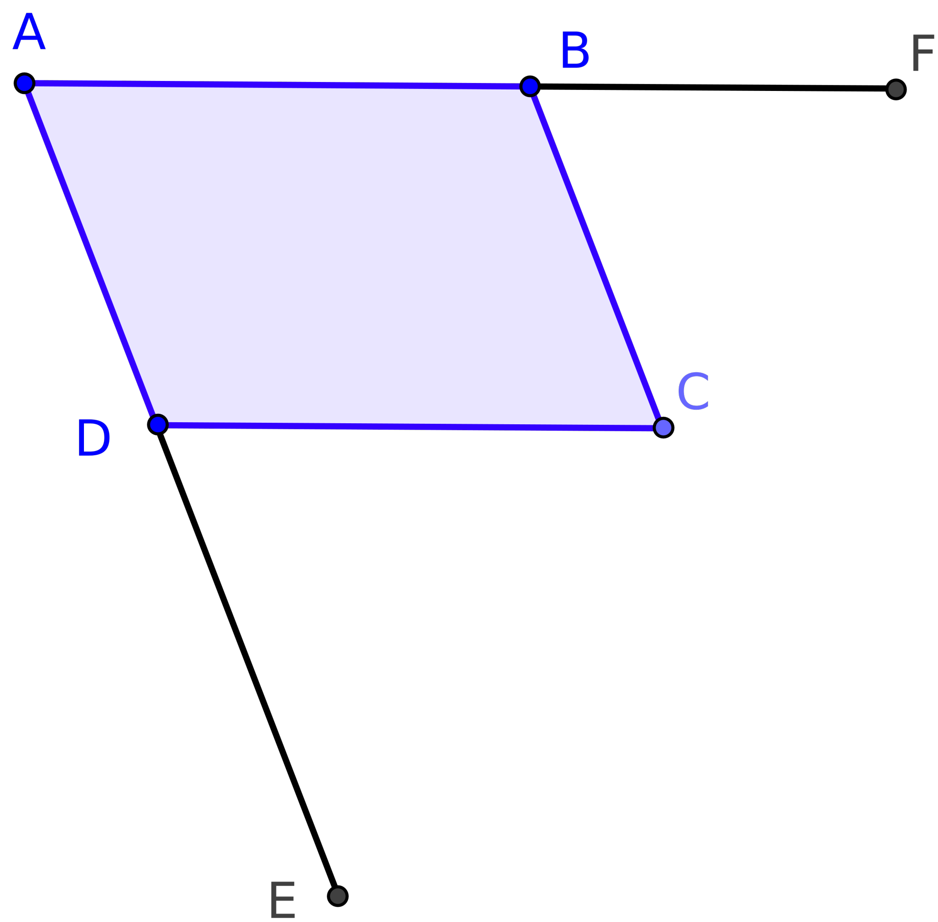


FIGURA 3.3. Ejercicio 46

2. Si el paralelogramo se deforma manteniendo constante la longitud de sus lados, ¿cree que lo anterior sigue siendo válido?
3. Si fija el punto E en el plano, ¿cómo haría para variar la razón de homotecia? Encuentre k (*Ver* Sugerencia 9)

Definición 16. Dada una circunferencia w, con centro O y radio k, se llama inversión a la transformación que hace corresponder a un punto P otro P', en la semirrecta $\overrightarrow{OP}$, tal que: $OP \times OP' = k^2$.

Ejercicio 47. Abra un archivo ggb. Trace una circunferencia y aplique la herramienta Inversión (→ ). Observe los casos cuando P está dentro, sobre y fuera de la circunferencia. Justifique. ¿Cuáles son los puntos fijos? ¿Es involutiva?

Ejercicio 48. Sin usar la herramienta, construya el inverso de un punto P interior a la circunferencia. Para ello, trace la cuerda TU que pasa por P y es perpendicular a OP. Use semejanza de triángulos y pruebe que P' es la intersección de OP con la tangente que pasa por T.

Ejercicio 49. Sin usar la herramienta, construya el inverso de un punto P exterior a la circunferencia. Para ello, trace una circunferencia que tiene como diámetro OP. Si T y U son los puntos de intersección con w, pruebe que P' es el punto medio de TU.

Ejercicio 50. Justifique que la imagen de:

1. Una recta que pasa por el origen, es la misma recta.
2. Una recta que no pasa por el origen, es una circunferencia que pasa por el origen, y recíprocamente.
3. Una circunferencia que no pasa por el origen, es una circunferencia que no pasa por el origen.

Ejercicio 51. ¿Para qué circunferencia w los lados de un triángulo se invierten en tres arcos de circunferencias iguales?

Ejercicio 52. ¿Cómo están relacionados los triángulos ABC y su imagen $A'B'C'$, si O es: a) el centro de la circunferencia circunscrita b) el ortocentro c) el incentro.

4. Optimización

4.1. La mejor posición.

Problema 1. El ratoncito tiene tres salidas de su ratonera situados en los puntos A, B y C que el gato conoce. ¿Dónde debe sentarse el gato para encontrar la menor distancia posible de la salida más lejana? (Sugerencia 10)

Problema 2. En una parte del bosque, limitada por tres ferrocarriles rectos, vive un oso. ¿En qué punto debe hacerse la guarida para encontrarse a mayor distancia del ferrocarril más cercano? (Sugerencia 11)

Problema 3. Una familia quiere trasladarse desde su casa a un punto que está mejor situado con respecto a la escuela de los chicos y los lugares de trabajo de los padres. Actualmente ellos viven en un lugar F, la escuela está en A, el trabajo de la madre está en B y el trabajo de la madre está en C, como se muestra en la figura 4.1.

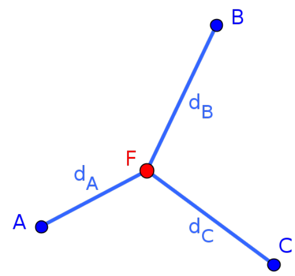


FIGURA 4.1. Problema 3

Ellos quieren minimizar $d = d_A + d_B + d_C$; donded_A es la distancia a la escuela, d_B es la distancia al trabajo de la madre y d_C es la distancia al trabajo del padre. ¿Qué condición geométrica caracteriza este lugar? (Sugerencia 12)

4.2. La medida óptima.

Problema 4. *Sea A un punto del primer cuadrante. Entre todos los triángulos que tienen al punto A en uno de sus lados, y los lados restantes sobre los ejes de coordenadas, encuentre el de menor área.*

Problema 5. Use la demostración anterior para probar el siguiente teorema.

Teorema 7. Sea un ángulo A y un punto A' en el interior de A. De todos los triángulos tales que comparten el ángulo A y el lado opuesto BC contiene a A', el de menor área es el que tiene a A' como punto medio de BC.

Problema 6. Sea A *un punto del primer octante. Entre todos los tetraedros que tienen al punto A en una de sus caras, y las caras restantes sobre los plano coordenados, encuentre el de menor volumen.*

Teorema 8. Sea un ángul*o triedro* A de vértice O y un punto A' en el interior de A. De todos los tetraedros tales que comparten el ángulo A, y la cara opuesta *a* O contiene a A', el de menor volumen es el que tiene a A' como baricentro de dicha cara.

5. Funciones Reales

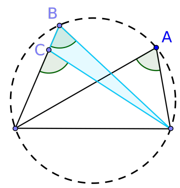
En revisión

6. Derivación e integración gráfica

En revisión

Sugerencias para la resolución de los problemas

Sugerencia 1 Trace la base media. (*Volver al ejercicio* 4)

Sugerencia 2 Suponga que el vértice A de un ángulo inscrito no está sobre la circunferencia, como muestra la figura 

(*Volver al ejercicio* 10)

Sugerencia 3 Haga la razón entre áreas de triángulos con la misma altura, luego aplique la propiedad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$. (*Volver al ejercicio* 15)

Sugerencia 4 Aplique lo demostrado en los ejercicios 5 y 11. (*Volver al ejercicio* 25)

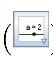
Sugerencia 5 Trace la tangente desde el punto P, encuentre un triángulos semejantes teniendo en cuenta el punto de tangencia. (*Volver al ejercicio* 27)

Sugerencia 6 Use la relación $R^2 - d^2 = LI \times LA$ y muestre que $LI = LB$ (*Volver al ejercicio* 30)

Sugerencia 7 Tenga en cuenta el ejercicio 20

Sugerencia 8 Construya un cuadrado exterior sobre la cuerda $ABCD$. Ubique la intersección de OD y OB con el arco del sector circular. (*Volver al ejercicio* 45)

Sugerencia 9 1. Demuestre que E ,C y F están alineados. Lo que es equivalente a probar que $ECD + DCB + BCF = 180°$. 2. Dado que $\frac{EF}{EC} = k$, aplique el teorema del coseno en los triángulos EDC y EAF, para encontrar k en función de los lados del paralelogramo. (*Volver al ejercicio* 46)

Sugerencia 10 Llame A, B y C a los puntos de salida. Cree un deslizador r (). Trace circunferencias con centro en cada uno de los puntos de salida y radio r. Explore la situación moviendo el deslizador r. Formule conjeturas. Analice para ABC acutángulo, rectángulo y obtusángulo. (*Volver al problema* 1)

Sugerencia 11 Esquematice un modelo de esta situación. Trace el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las vías (consideradas sobre rectas). Determine la región de ubicación de los puntos de la guarida del oso. (*Volver al problema* 2)

Sugerencia 12 Rote el triángulo AFB (→) con centro en A, un ángulo de 60º, de modo que AB' quede del otro lado de ABC, respecto de la recta AB. ¿Qué puede decir de los triángulos $AB'B$ y AFF'? Trace la poligonal $B'F'FC$. (*Volver al problema* 3)

Apéndice A. Herramientas

Las herramientas permiten crear nuevos objetos a través de mecanismo de señalamiento y acción. Los objetos pueden ser de distintos tipos, en general nos ocuparemos de los *objetos geométricos*.

A.1. *Caja de herramientas***.** Las distintas herramientas para construcciones geométricas se encuentran desplegando los siguiente iconos:

A.2. *Creación de una nueva herramienta***.** Desde una construcción existente, se pueden crear herramientas propias.

Menú de Herramientas→ Creación de Herramienta Nueva

Se despliega una ventana de diálogo donde se especifican los objetos de salida (desplegar la barra de arriba y seleccionar), los objetos de entrada, el nombre de la herramienta, el nombre del comando, una breve ayuda para usar la herramienta y el icono con que aparecerá en la barra de herramientas.

Cuando se guarda el archivo en que se creó la nueva herramienta, ésta también queda automáticamente salvada con un archivo .ggb como parte del mismo, y queda accesible para emplearse con el mouse o ratón. (Volver al ejercicio 18)

A.3. *Acceso a herramientas creadas* **.** Se pueden guardar las herramientas creadas como archivos .ggt, para poder reutilizarlas en otras construcciones de GeoGebra.

Menú de Herramientas→ Gestión de Herramientas→ Guarda como...

Para que esta herramienta quede disponible para otras construcciones:

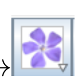
Menú Archivo→ Abre→Todos los archivos→clic en el archivo ggt correspondiente→Apariencias→Guarda la Apariencia Actual (*Volver al ejercicio* 18)

Apéndice B. Imágenes

B.1. *Cómo salvar una imagen***.**

1. Limitar la zona que se quiere exportar como imagen enmarcando con el ratón la zona a exportar (clic sobre una posición libre de la vista gráfica y arrastrar).
2. Archivo→Exporta→Vista Gráfica como Imagen (png,eps)... (*Volver al ejercicio* 18)

B.2. *Cómo insertar una imagen***.**

→


Apéndice C. Comandos

Los comandos son una gama más amplia de herramientas. Con éstos se pueden crear nuevos objetos o modificar los existentes. La línea de comandos se encuentra en la parte inferior.

Se clasifican según su función o funciones dado que pueden emplearse con diversos propósitos y su modalidad puede incluso cambiar según el contexto en que operen.

C.1. *Crear un comando para hacer cuentas*. En la barra de Entrada, introducir, por ejemplo: $potencia = c{*}d$, donde c y d son las longitudes de dos segmentos creados anteriormente. (*Volver al ejercicio* 27)

Nomenclatura

$(ADEC)$	Área del polígono ADEC
A',B',C'	Puntos medios de los lados de un triángulo
D,E,F	Pies de las alturas de un triángulo
G	Baricentro (intersección de las medianas del triángulo)
H	Ortocentro (intersección de las alturas del triángulo)
I	Incentro (intersección de las bisectrices interiores del triángulo)
K,L,M	Puntos medios de los segmentos que van del ortocentro al vértice
N	Centro de la circunferencia de los nueve puntos
O	Ortocentro (intersección de las mediatrices del triángulo)
X,Y,Z	Pie de las cevianas