Association Mathématique du Québec

Les tuiles Girih : de l'art islamique aux fractions

France Caron,
Université de Montréal

Résumé

Cet article présente une activité mathématique pour des élèves du 3e cycle du primaire, qui tire parti d'une découverte récente sur l'art islamique et permet de lier certains apprentissages en arithmétique et en géométrie. En proposant de mettre momentanément de côté les instruments de mesure et en optant plutôt pour l'alternance de phases d'exploration, de création, d'observation, d'inférence et de déduction, l'activité s'inscrit dans le développement du raisonnement mathématique.

Dans la conception d'activités d'apprentissage en mathématiques pour les élèves du primaire, il est toujours intéressant de trouver des situations authentiques où les mathématiques ont apporté, ou apportent encore, un éclairage particulier. Lorsque ces situations sont abordables par des élèves du primaire ou peuvent être adaptées en ce sens, il y a là une nouvelle occasion de faire apprécier le sens et la puissance des mathématiques pour mieux comprendre le monde qui nous entoure.

En 2007, un jeune physicien américain réussissait à élucider un des mystères de l'art islamique en montrant que la variété et la complexité apparente de certains motifs décoratifs (appelés Girih) pouvaient en fait être ramenées aux différents dallages[1] permis par cinq polygones très simples. La publication de cette découverte, qui pourrait témoigner d'une connaissance des pavages non périodiques plus de cinq cents ans avant leur étude en occident, a suscité un vif intérêt médiatique qui s'est manifesté à travers le monde dans différents quotidiens, magazines, chaînes de radio et télévision : *The New York Times, Iran Daily, BBC, Radio-Canada, Discover*, etc.

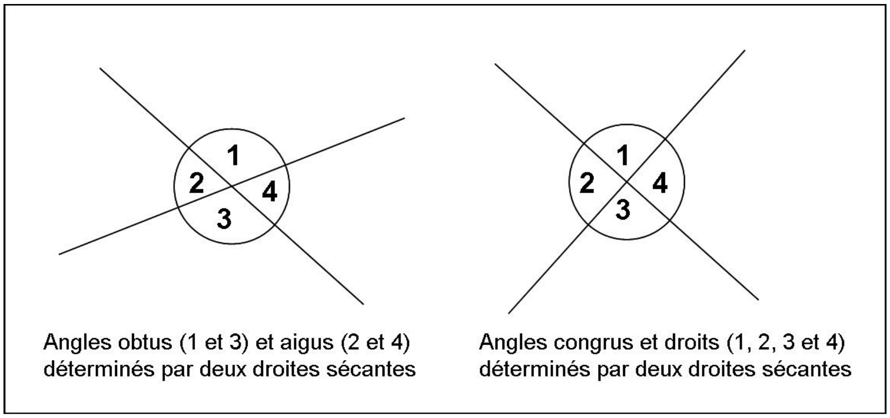
En examinant les possibilités de transposition de cette jolie découverte en activité d'apprentissage pour des élèves du primaire, nous y avons vu l'occasion de retravailler la notion d'angle et d'établir, à travers l'exploration de dallages, des ponts avec l'apprentissage des fractions. C'est donc une activité d'apprentissage orientée en ce sens que nous présentons, après avoir exposé brièvement l'intérêt de mettre temporairement de côté le degré comme unité de mesure des angles.

L'angle comme partie d'un tout

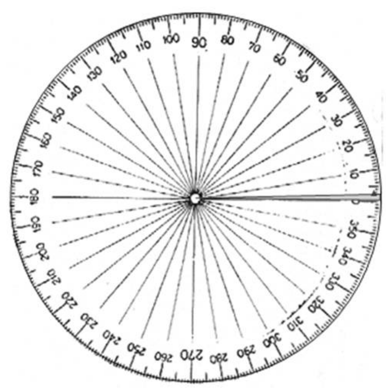
L'usage conduit souvent à définir l'angle droit comme un angle de 90°. Cela n'est évidemment pas faux, mais il s'agit davantage d'une propriété qui découle à la fois du choix du degré comme

[1] Aussi appelés *pavages*

unité et d'une caractéristique plus fondamentale de l'angle droit, qui en constitue davantage l'essence : lorsque, dans un même plan, deux droites se coupent en définissant quatre angles congrus, chacun de ces angles constitue un angle droit.



Ainsi, si l'on associe l'angle plein à une rotation d'un tour complet autour d'un point, l'angle droit peut être associé à une rotation d'un quart de tour et donc être vu comme le quart de l'angle plein ; de même, l'angle plat (de 180°) vaut la moitié d'un angle plein et correspond à une rotation d'un demi-tour. Et le degré n'est rien d'autre que la mesure d'un angle qui correspond à 1/360 de tour et donc à 1/360 de l'angle plein.



Le choix du degré comme unité conventionnelle de mesure des angles permet dans bien des cas de travailler uniquement en nombres entiers, en raison notamment des nombreux facteurs du nombre 360 et du degré de précision que permet un tel nombre de divisions de l'angle plein.[2]

En contrepartie, le choix de l'angle plein comme *unité naturelle* de mesure des angles se révèle très intéressant pour travailler conjointement angles et fractions, et pour introduire plus tard au diagramme circulaire en statistique sans avoir à recourir explicitement aux proportions. En fait,

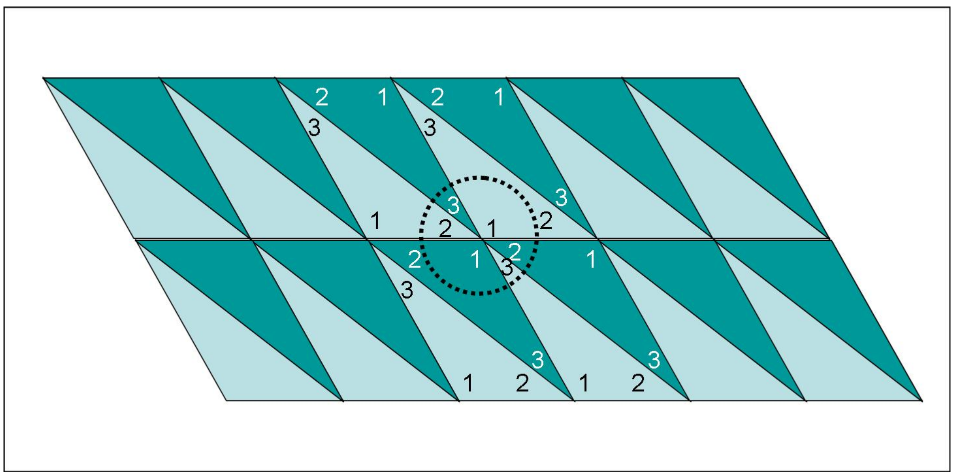
[2]Ce choix renvoie au système sexagésimal de numération des Babyloniens dont on trouve aussi des traces dans le choix des unités pour marquer le temps (heures, minutes, secondes). Rappelons d'ailleurs que lorsque l'emploi des degrés ne suffit pas à la précision visée, chacune des 360 divisions de l'angle plein associées aux degrés peut être divisée en 60 minutes et que chacune de ces minutes peut elle-même être divisée en 60 secondes.

avec pareille unité, on peut envisager la mesure d'un angle dans le plan comme la portion (entre 0 et 1), délimitée par les demi-droites associées à l'angle, de l'aire d'un disque centré au sommet de cet angle.

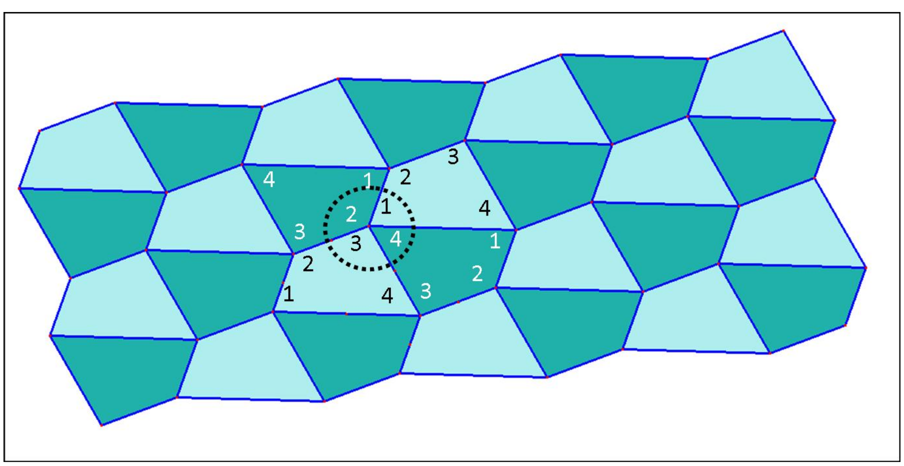
Les dallages constituent un contexte particulièrement intéressant pour étudier l'angle comme fraction de l'angle plein et pour travailler par conséquent les opérations sur les fractions. En effet, la visualisation d'un disque autour d'un sommet d'un polygone d'un dallage conduit à examiner la mesure des différents angles qui s'y rencontrent comme des nombres dont la somme donne 1, comme des parties d'un tout, qu'on peut exprimer, lorsque les angles s'y prêtent, sous forme de fractions de l'angle plein. Cela permet même d'inférer certaines propriétés géométriques et arithmétiques.

Ainsi, de l'observation de dallages obtenus par translation et rotation d'un même polygone, on peut par exemple inférer (sans pour autant le démontrer formellement) que :

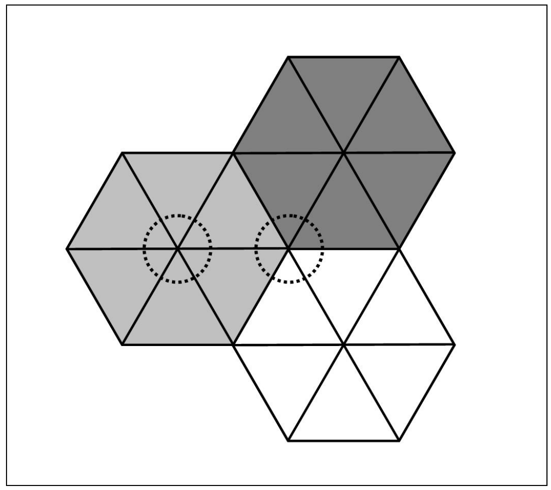
- La somme des angles d'un triangle quelconque vaut la moitié d'un angle plein.



- La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère quelconque vaut un angle plein.



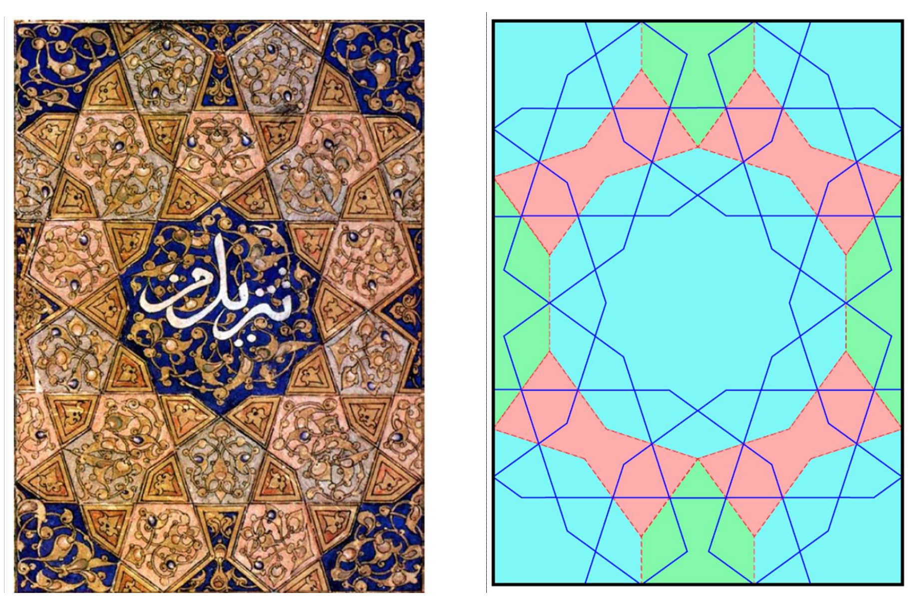
■ Chacun des angles intérieurs d'un triangle équilatéral vaut le sixième d'un angle plein, alors que chacun de ceux d'un hexagone régulier en vaut le tiers.



Munis de ces quelques repères pour aborder l'étude des angles, nous nous tournons à présent vers les motifs Girih.

Le mystère révélé des motifs Girih

L'art islamique est réputé pour la richesse et la complexité de ses motifs géométriques. Les motifs Girih, qui se présentent comme un entrecroisement de droites qui se brisent en d'innombrables zigzags, suscitent depuis des siècles une réelle fascination.

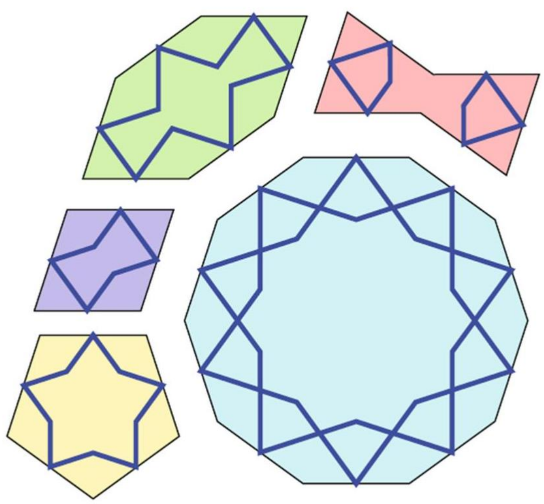


Jusqu'à tout récemment, un véritable mystère planait autour de ces motifs qu'on retrouve de la Turquie à l'Afghanistan dans des éléments de l'architecture islamique médiévale : comment les artisans de l'époque avaient-ils fait pour réaliser de tels ouvrages en évitant toute distorsion géométrique ? Malgré la complexité et la taille du motif qui auraient dû donner lieu à des décalages en travaillant avec une règle et un compas, l'alignement paraissait parfait.

Le voile a pu être levé sur ce mystère grâce au regard de Peter J. Lu, alors étudiant au doctorat en physique à l'Université Harvard et passionné de géologie et d'histoire de l'art. Il a pu montrer que ces nombreux motifs riches et variés ne s'appuyaient en fait que sur la combinaison de cinq polygones de base décorés de quelques lignes. Ces cinq polygones permettent de créer une grande variété de dallages et d'assurer aux lignes qui les décorent de s'aligner tout naturellement. Ce sont ces lignes que l'on voit se croiser et non les côtés des polygones ; ces derniers disparaissent pour ne laisser voir que les lignes décorées, tout comme on oublie le contour des pièces individuelles d'un casse-tête lorsqu'on arrive à reconstituer l'image.

Cette découverte conduit à croire aujourd'hui qu'à partir du 13^{e} siècle, l'alignement parfait des motifs Girih reposait en fait sur l'utilisation par les artisans de tuiles conçues par des mathématiciens et basées sur ces cinq polygones, qu'on appelle aujourd'hui tuiles Girih. Certains dallages non périodiques réalisés au 15^{e} siècle avec ces tuiles, où un même motif ne se répète jamais, semblent témoigner de connaissances mathématiques particulièrement avancées pour l'époque.

Les cinq tuiles Girih sont représentées ci-dessous :



Cet ensemble est constitué d'un décagone régulier, d'un pentagone régulier, d'un hexagone convexe non régulier, d'un hexagone non convexe (ou nœud papillon), ainsi que d'un losange.

Après avoir reproduit plusieurs de ces tuiles Girih sur du papier rigide (idéalement d'une couleur distincte pour chacun des cinq polygones), on peut en faire une activité d'exploration pour les élèves.

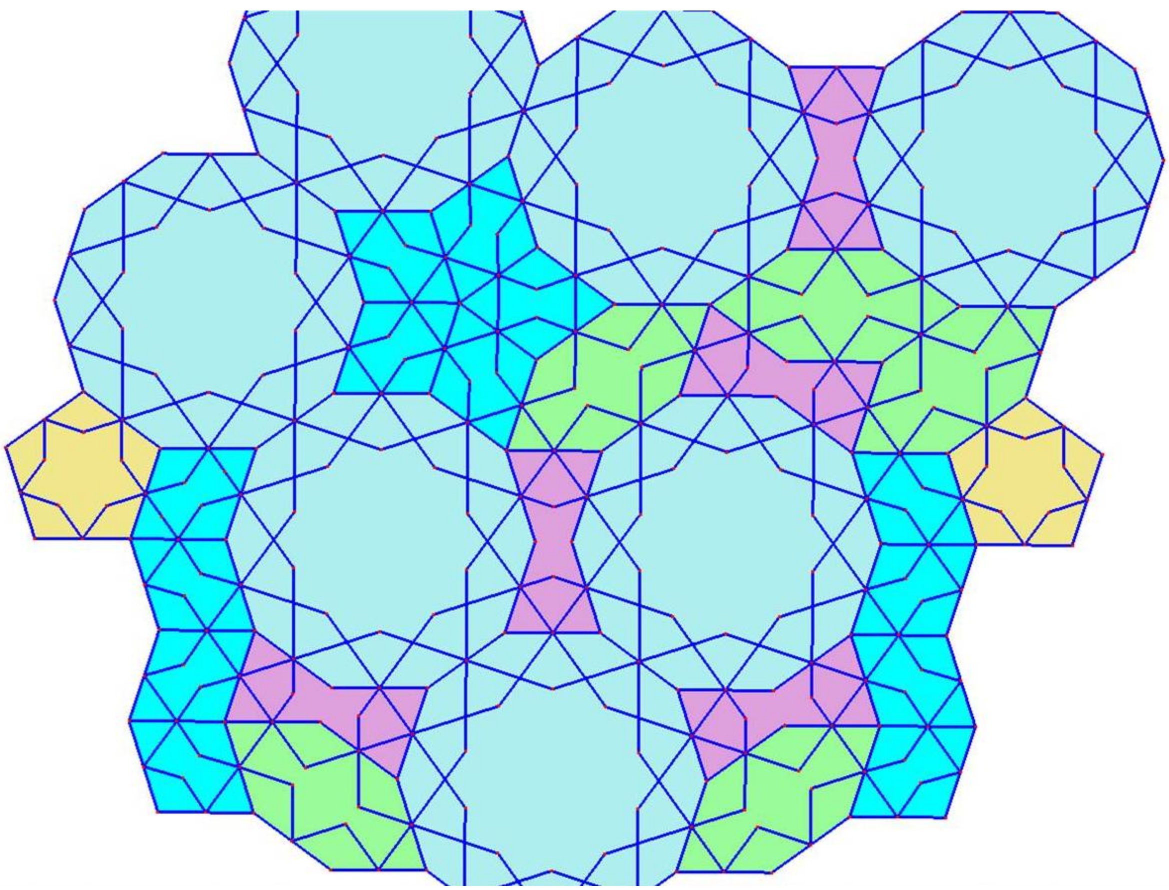
Exploration des tuiles Girih

On invite d'abord les élèves à découper les polygones, à les manipuler et à les examiner, de façon à leur faire dégager les caractéristiques qu'ils ont en commun :

- tous leurs côtés sont de même longueur ;
- ils ont au moins deux axes de symétrie ;
- deux lignes décoratives se croisent au point milieu de chacun des côtés, en respectant toujours le même angle.

En les découpant ou en les superposant, les élèves remarqueront peut-être que leurs angles intérieurs ne sont pas tous égaux. Cela permet alors de relever (ou de rappeler) que la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur des segments qui le déterminent.

On peut ensuite inviter les élèves à constituer différents dallages, plus ou moins complexes, en jouant avec les multiples combinaisons que ces tuiles Girih permettent. En voici un exemple :

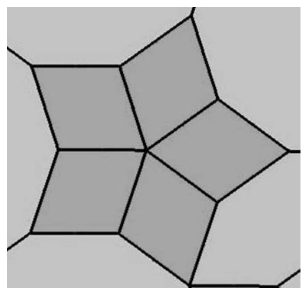


La question qui se pose alors est la suivante : qu'est-ce qui, dans ces polygones, permet une telle variété de dallages ? Le fait que leurs côtés soient congrus aide certainement à les agencer, mais on sent bien qu'il faut que leurs angles collaborent aussi.

Nous proposons donc d'examiner ce qui caractérise la mesure de ces angles, en procédant par manipulation, observation, inférence et déduction.

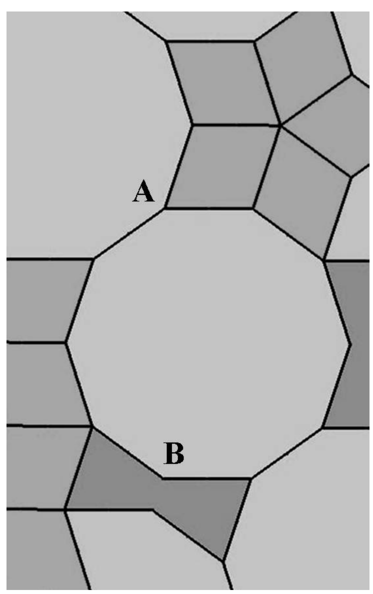
La mesure ... sans mesurer

Après cette première exploration, le jeu consiste donc à déterminer, *sans recourir au rapporteur*, la valeur de chacun des angles des différents polygones en utilisant l'angle plein comme angle unité. Différentes stratégies peuvent alors être mises à contribution :



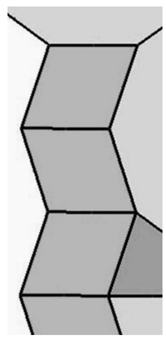
L'élève peut observer un fragment de dallage faisant intervenir un seul type de tuile et un seul angle autour d'un même sommet.

Ainsi, en arrivant à former une étoile par rotation du losange Girih autour du sommet d'un de ses angles aigus, il peut en inférer que l'angle aigu de ce losange vaut le cinquième (1/5) d'un angle plein.



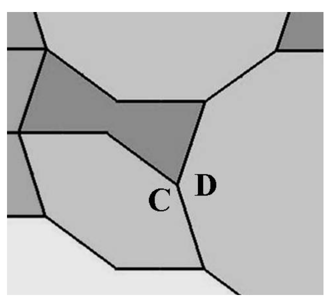
L'élève peut observer un fragment de dallage autour d'un point où se rencontrent les sommets de différents angles dont certains sont connus et dont on peut déduire la mesure des autres.

Ainsi, l'angle plein « autour du point A » paraît constitué de deux angles intérieurs congrus du décagone régulier ainsi que de l'angle aigu du losange de Girih. Si l'élève connaît déjà la mesure de cet angle (1/5 d'angle plein), il peut en inférer qu'il lui reste 4/5 d'angle plein à partager également entre les deux angles intérieurs du décagone régulier, ce qui correspond à 2/5 d'angle plein pour chacun de ces deux angles. Il peut ensuite valider ce résultat en observant qu'il est un peu en deçà du demi-angle plein qui correspond à l'angle plat. En appliquant le même raisonnement au point B, il peut ensuite inférer que l'angle rentrant de l'hexagone Girih non convexe (le « nœud papillon ») vaut 3/5 de l'angle plein, soit un peu plus qu'un angle plat.



L'élève peut recourir à ses connaissances plus générales en géométrie pour déduire, à partir des angles qu'il connaît déjà, la mesure d'un nouvel angle.

Ainsi, s'il sait que la somme des angles d'un quadrilatère vaut un angle plein, et que chacun des deux angles aigus du losange Girih vaut 1/5 de cet angle plein, il peut en déduire qu'il lui reste 3/5 à partager également entre les deux angles obtus, ce qui laisse 3/10 d'angle plein pour chacun de ces deux angles. Il peut à nouveau valider cette réponse en remarquant qu'il s'agit bien d'un angle obtus puisqu'il est supérieur au quart de l'angle plein qui définit un angle droit.

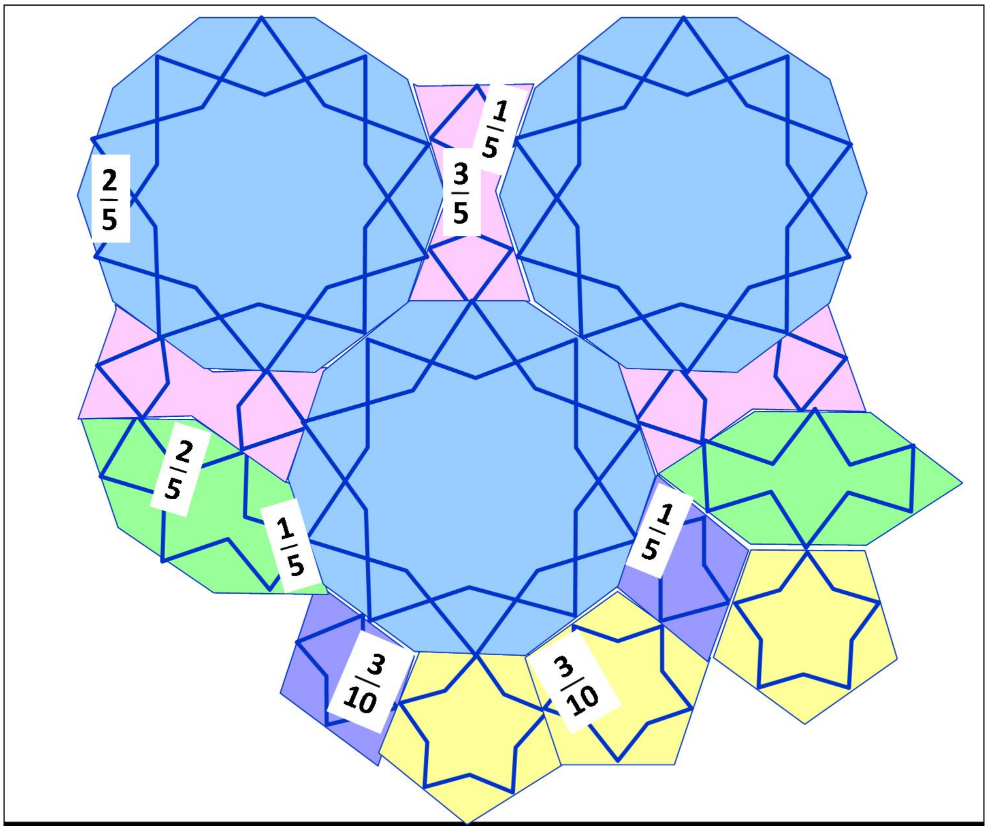


L'élève peut superposer deux figures pour inférer de nouvelles relations de congruence et en déduire de nouvelles informations.

Ainsi, les côtés de l'angle obtus de l'hexagone convexe (en C) coïncident parfaitement, lorsqu'on les superpose, avec deux côtés consécutifs du décagone (en D). On peut alors inférer que les angles C et D sont congrus, et en déduire que l'angle obtus de l'hexagone vaut lui aussi 3/10 de l'angle plein.

Et ainsi de suite… D'autres stratégies plus sophistiquées peuvent faire intervenir les angles au centre des polygones réguliers.

Ainsi, d'un polygone à l'autre, l'élève pourra, avec la collaboration de ses pairs et un peu de soutien de l'enseignant, retrouver la mesure de tous les angles sans avoir à recourir au rapporteur, uniquement par observation, raisonnement et validation. Et ce faisant, il découvrira un peu de la force des mathématiques.



L'éclairage des fractions

Une fois ce travail complété, les élèves seront à même de constater que chacun des angles intérieurs des tuiles Girih a pour mesure l'une des quatre fractions décimales suivantes de l'angle plein : 1/5, 3/10, 2/5, ou 3/5. La variété des dallages possibles avec ces tuiles vient un peu de cette simplicité, car plusieurs combinaisons de ces valeurs (et donc des angles qui leur sont associés) donnent une somme de 1.

$$5 \times \frac{1}{5} = 1$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = 1$$

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = 1$$

Il peut être intéressant de faire générer ces différentes combinaisons par les élèves, de les leur faire repérer sur leur dallage, et peut-être même de les encourager à enrichir leur dallage et ainsi créer de nouveaux effets sur le plan visuel :

- avec une combinaison de termes qu'ils n'auraient pas encore utilisée ;
- en changeant un polygone pour un autre avec un même angle ;
- en tirant parti de la commutativité et l'associativité de l'addition pour permuter les termes et donc l'ordre des figures dans la rotation autour d'un sommet.

Ces fractions qui ont toutes 5 ou 10 pour dénominateur ont aussi l'avantage de permettre un passage aisé par la représentation décimale et donc de favoriser l'établissement de liens entre les opérations sur ces deux modes de représentation des nombres.

Notons que l'activité pourrait être conduite en utilisant les degrés (et en assurant alors une somme de 360 degrés autour de chaque sommet), ou même reprise en passant par les fractions équivalentes. Par exemple, l'angle de 3/10 correspond à 108 degrés puisque

$$\frac{3}{10} = \frac{3 \times 36}{10 \times 36} = \frac{108}{360}.$$

Il est fort probable que dans ce contexte, l'emploi explicite de l'angle plein comme unité de mesure se révèle plus « parlant » pour l'élève que le recours aux degrés. D'une part, il peut avoir plus de facilité à visualiser la taille des angles en jeu, car le recours aux fractions simples favorise un retour aux images mentales développées avec les « pointes de pizza ». D'autre part, l'emploi de ces fractions simples (plus simples que les trois cent soixantièmes auxquels renvoie implicitement l'emploi du degré) conduit à jouer avec de plus petits nombres qui permettent d'anticiper plus aisément les combinaisons qui permettront de recouvrir le plan autour d'un sommet. La fraction a donc un caractère économique dans cette tâche, ce qui pourrait aider à la rendre plus sympathique aux yeux de l'élève...

Conclusion

Dans l'initiation à la mesure des longueurs, surfaces, volumes et capacités, le *Programme de formation de l'école québécoise* (Gouvernement du Québec, 2006, p.137) recommande de recourir à des unités non conventionnelles (ex. trombones, carrés-unités) avant d'introduire les unités conventionnelles (ex. cm, m^2), de façon à mieux faire saisir les idées de comparaison et de rapport au cœur de la mesure. Nous avons voulu faire valoir ici l'intérêt d'appliquer une approche semblable pour la mesure des angles, en proposant de recourir à l'angle plein comme unité naturelle avant l'introduction du degré comme unité conventionnelle. Nous croyons que cette étape intermédiaire pourrait favoriser à la fois un approfondissement de la notion d'angle et l'établissement de liens précieux avec les fractions, en passant par les dallages et les transformations géométriques.

En proposant une tâche qui demande de « retrouver des mesures sans mesurer », nous avons cherché à mettre en valeur la puissance du raisonnement mathématique et l'utilité des fractions simples, tout en laissant un certain espace pour la créativité des élèves, tant artistique que mathématique.

Si un regard mathématique contemporain a permis d'élucider le mystère des motifs Girih, et de révéler à travers eux tout un pan de l'art et des connaissances mathématiques du moyen-âge islamique, l'occasion semble trop belle pour ne pas convier les élèves à y faire leurs propres explorations et à vivre à leur tour le plaisir de la découverte.

Références

[1] Gouvernement du Québec (2006). Programme de formation de l'école québécoise, Éducation préscolaire – Enseignement primaire. Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

[2] Lu, P.J. et Steinhardt P.J. (2007) « Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. » *Science* 315, 1106-1110. (Le matériel complémentaire à cet article est accessible à : http ://www.sciencemag.org/cgi/data/315/5815/1106/DC1/1)

[3] Site de Peter J. Lu à Harvard, avec plusieurs liens vers des articles et entrevues de vulgarisation sur sa découverte : http ://www.physics.harvard.edu/~plu/