

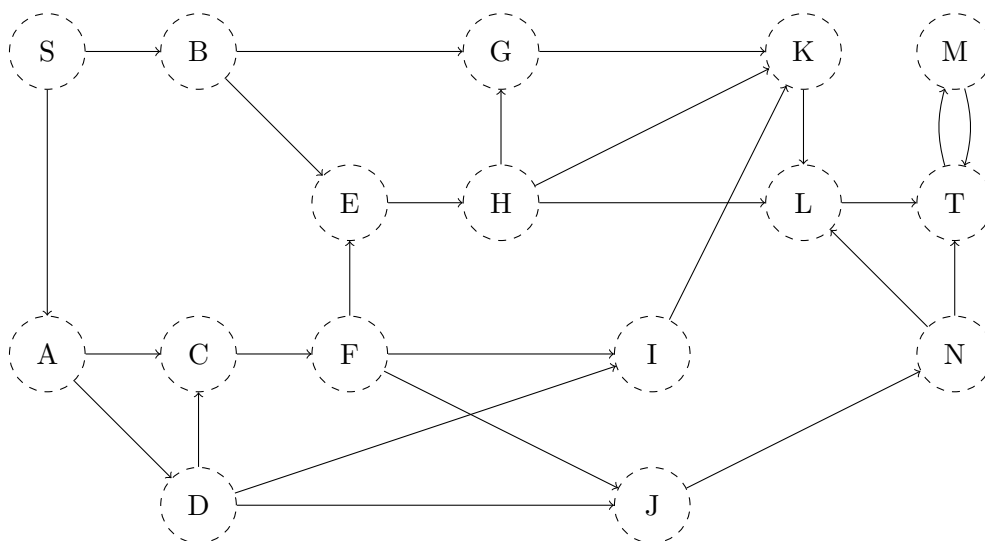
Übungen zur Vorlesung
Graph Theory
Summer 2023
Blatt 6

Please upload exactly one PDF file in Ilias. The submissions will **not** be graded. They serve only as feedback for the tutor.

Aufgabe 1: Graph Coloring, Cliques and Independant Sets

(5 Punkte)

Sie befinden sich immer noch im Zug aus Aufgabe 1 des letzten Übungsblattes. Der Zug hat sich in den letzten Stunden immer noch nicht von der Stelle bewegt. Sie beobachten, wie der Lokführer sich in einem schwarzen Mantel und mit einem tief ins Gesicht gezogenen Hut aus dem Führerhaus des Zuges davonsieht und in einem neben den Gleisen stehenden PKW wegfährt. Sie beschließen bei einer Geschäftsstelle des großen Bahnunternehmens eine Beschwerde über diesen Lokführer einzureichen. Des Weiteren wollen sie den Lokführer in einem Polizeirevier anzeigen, da dieser mit einem halb ausgetrunkenen alkoholhaltigen Cocktail in der Hand in seinen PKW eingestiegen ist. Sie wollen ebenfalls bei einer Busticketverkaufsstelle ein Ticket kaufen, um einen Bus zu ihrem Bestimmungsort zu nehmen.



Um schonmal vor auszuplanen nehmen Sie wieder den Plan des Schienennetzes aus dem letzten Übungsblatt zur Hand. Sie wollen die eben genannten Orte aufsuchen. Sie wissen, dass 2 benachbarte Städte zusammen immer nur eine Geschäftsstelle des großen Bahnunternehmens, ein Polizeirevier oder eine Busticketverkaufsstelle beherbergen.

- Führen Sie den greedy Algorithmus aus der Vorlesung für die Knotenfärbung auf dem Schienennetz aus, wobei Sie die Städte in alphabetischer Reihenfolge einfärben.
- Ist ihre gefundene Einfärbung die optimale Lösung des Problems? Wenn Ja, begründen Sie das. Wenn Nein, zeigen Sie eine bessere Einfärbung, die weniger Farben benötigt.
- Fügen sie eine Kante zum Graphen des Schienennetzes hinzu, damit der Algorithmus eine Einfärbung produziert, die eine Farbe mehr benötigt.

Sie beobachten, dass andere Fahrgäste draußen beginnen Eisenbahn-Draisinen aus einem nahegelegenen Lagerhaus auf die Gleise zu hieven, um doch noch irgendwie unter Körpereinsatz an ihren Bestimmungsort zu kommen. Sie beschließen sich diesen Fahrgästen anzuschließen und mit einer Draisine und dem in den letzten Teilaufgaben gesammelten Wissen alle die von Ihnen gewünschten Orte aufzusuchen.

- d) Zum Glück wissen Sie das 2 benachbarte Städte zusammen immer nur höchstens ein Lagerhaus besitzen, in welches Sie ihre Draisine wieder zurückbringen können. Bestimmen Sie die maximal mögliche Anzahl von Städten mit Lagerhäusern.

Da die Stadt, die Sie zuletzt aufsuchen wollen glücklicherweise ein Lagerhaus besitzt, konnten Sie direkt das letzte Stück ihrer Heimreise mit dem Bus antreten. Mit Freude blicken Sie auf den nächsten herannahenden Tag.

Aufgabe 2: Planarity and Hyper-Cubes

(5 Punkte)

Unter einem Hyperwürfel Q_i verstehen wir einen ungerichteten Graphen mit der Knotenmenge aus Bitstrings $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$, in der zwei Knoten mit einer Kante verbunden sind, wenn sie sich genau in einem Bit unterscheiden.

- a) Zeichnen Sie Q_1, Q_2, Q_3 soweit möglich als planare Graphen.
- b) Bestimmen Sie die Färbungszahl von Q_i für $i \geq 1$.
- c) Untersuchen Sie, ob für $i \leq 3$ ob der vollständige Graph K_{i+1} ein Unterteilungsgraph von Q_i ist.
- d) Zeichnen Sie Q_4 .
- e) Untersuchen Sie, ob Q_4 planar ist und beweisen Sie Ihre Aussage.