Betriebssysteme - Erläuterung Blatt 7, 2c)

Nach Definition gilt $\forall n \geq 2 : f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, also auch $\forall n \geq 3 : f(n) = 2f(n-2) + f(n-3)$. Da $f(k) \geq 1$ für $k \geq 1$ erhalten wir

$$\forall n \geq 2 : f(n) \geq 2f(n-2) \tag{1}$$
$$\forall n \geq 4 : f(n) > 2f(n-2) \tag{2}$$

Iterative Anwendendung von Eq.1 bzw. 2 ergibt $\forall n \geq 4\ \forall 1 \leq k \leq n/2$

$$\begin{aligned} f(n) &> 2f(n-2) \\ &\geq 2 * 2f(n-2*2) \\ &... \\ &\geq 2^k f(n-2k) \end{aligned}$$

Wähle nun $k_0 := \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, also $k_0 = \frac{n-1}{2}$ falls n ungerade und $k_0 = \frac{n-2}{2}$, falls n gerade. Dann ist $n - 2k_0 = 1$ oder $n - 2k_0 = 2$ und somit $f(n-2k_0) = 1$. Es folgt

$$\forall n \geq 4 : \ f(n) > 2^{k_0} f(n-2k_0) = 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$$

Da $t(n) = f(n+1)$ gilt für $n \geq 4$:

$$t(n) > 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq 2^{\frac{n}{2}-1} \geq 0.5\sqrt{2}^n,$$

also $f(n) = \Omega((\sqrt{2})^n)$.