Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

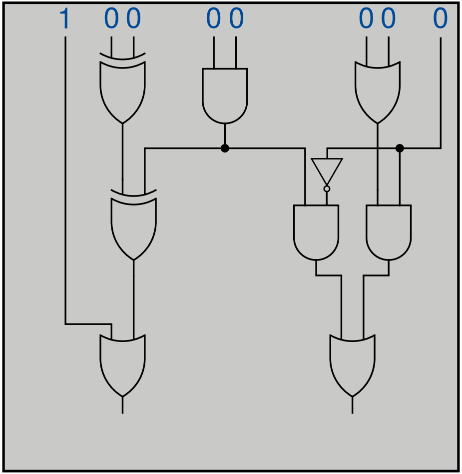
Prof. Dr. Christoph Scholl

Institut für Informatik

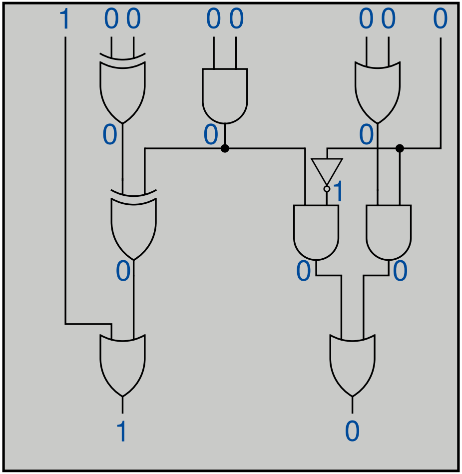
Sommersemester 2023

Schaltkreis: Zunächst informal durch Beispiel ($f \in \mathbb{B}_{8,2}$)

Welche Werte an den Ausgängen werden "berechnet", wenn an den Eingängen $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ anliegt?



Beispiel für einen Schaltkreis ($f \in \mathbb{B}_{8,2}$)



UNI FREIBURG

Schaltkreise

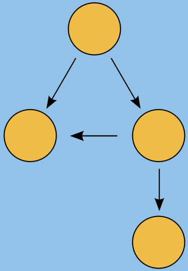
- Idee:
  „gerichteter Graph mit einigen zusätzlichen Eigenschaften”

Exkurs: Gerichteter Graph

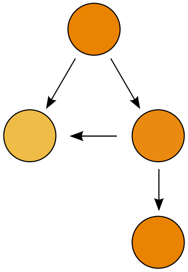
Definition

$G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph, wenn folgendes gilt:

- V endliche, nichtleere Menge (Knoten)
- E endliche Menge (Kanten)
- Abbildungen $Q : E \to V$ und $Z : E \to V$
  $Q(e)$ ist Quelle, $Z(e)$ Ziel einer Kante e
- Abbildungen $indeg : V \to \mathbb{N}$ und $outdeg : V \to \mathbb{N}$
  $indeg(v) = |\{e \mid Z(e) = v\}|$ ist der Eingangsgrad,
  $outdeg(v) = |\{e \mid Q(e) = v\}|$ der Ausgangsgrad von v.



Exkurs: Pfade in gerichteten Graphen



- Ein Knoten mit
  - $indeg(v) = 0$ heißt Wurzel.
  - $outdeg(v) = 0$ heißt Blatt.
  - $outdeg(v) > 0$ heißt innerer Knoten.
- Ein Pfad (der Länge k) in G ist eine Folge von k Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ $(k \geq 0)$ mit $Z(e_i) = Q(e_{i+1})$ für alle i $(k-1 \geq i \geq 1)$ $Q(e_1)$ heißt Quelle, $Z(e_k)$ Ziel des Pfades.
- Ein Zyklus in G ist ein Pfad der Länge ≥ 1 in G, bei dem Ziel und Quelle identisch sind
- G heißt azyklisch, falls kein Zyklus in G existiert.
- Die Graph-Tiefe eines azyklischen Graphen ist definiert als die Länge des längsten Pfades in G.

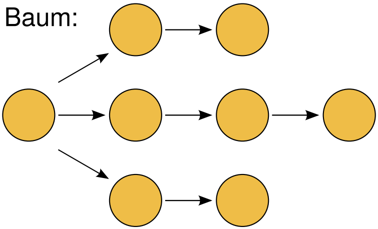
Exkurs: Bäume, Binäre Bäume

Definition

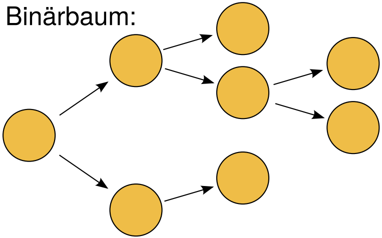
Ein (Out-)Baum ist ein gerichteter, azyklischer Graph mit genau einer Wurzel w ($indeg(w) = 0$) und $indeg(v) = 1$ für alle andere Knoten v.
Ein Baum heißt binär (bzw. Binärbaum), wenn für seine innere Knoten v $outdeg(v) \leq 2$ gilt.

Beispiele:

Baum:



Binärbaum:



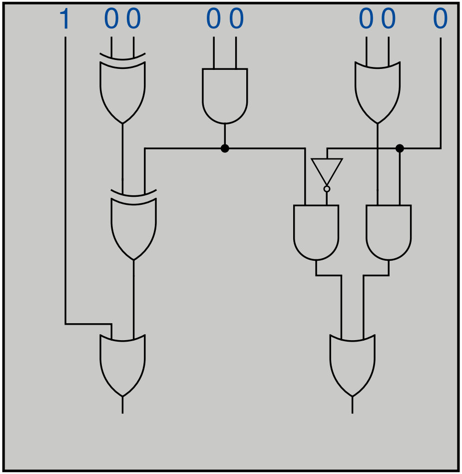
Modellierung durch Schaltkreise (1/2)

- Eine Zellenbibliothek $BIB \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_n$ enthält Basisoperatoren, die den Grundgattern entsprechen.
- Ein 5-Tupel $SK = (\vec{X}_n, G, typ, IN, \vec{Y}_m)$ heißt Schaltkreis mit n Eingängen und m Ausgängen über der Zellenbibliothek BIB genau dann, wenn
  - $\vec{X}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ ist eine endliche Folge von Eingängen.
  - $G = (V, E)$ ist ein azyklischer, gerichteter Graph mit $\{0,1\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$.
  - Die Menge $I = V \setminus (\{0,1\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\})$ heißt Menge der Gatter. Die Abbildung $typ : I \to BIB$ ordnet jedem Gatter $v \in I$ einen Zellentyp $typ(v) \in BIB$ zu.
  - …

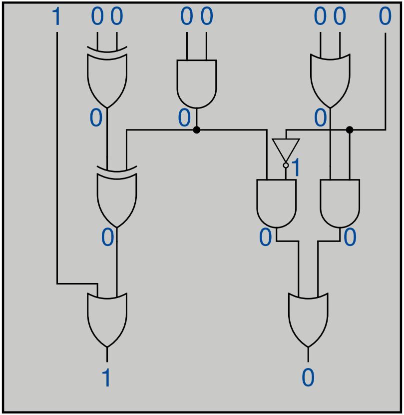
Modellierung durch Schaltkreise (2/2)

- ...
- Für jedes Gatter $v \in I$ mit $typ(v) \in \mathbb{B}_k$ gilt $indeg(v) = k$.
- $indeg(v) = 0$ für $v \in \{0,1\} \cup \{x_1,\ldots,x_n\}$.
- Die Abbildung $IN : I \to E^*$ legt für jedes Gatter $v \in I$ eine Reihenfolge der eingehenden Kanten fest, d.h. falls $indeg(v) = k$, dann ist $IN(v) = (e_1,\ldots,e_k)$ mit $Z(e_i) = v \ \forall 1 \leq i \leq k$.
- Die Folge $\vec{Y}_m = (y_1,\ldots,y_m)$ zeichnet Knoten $y_i \in V$ als Ausgänge aus.

Schaltkreis für $f \in \mathbb{B}_{8,2}$



Informale Semantikdefinition ($f \in \mathbb{B}_{8,2}$)



Die Boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_{8,2}$ kann aus dem Schaltkreis hergeleitet werden, indem man für alle Werte aus $\mathbb{B}^8$ den Schaltkreis auswertet ("simuliert").

Formale Semantikdefinition für Schaltkreise (1/2)

- Sei $SK = (\vec{X}_n, G, typ, IN, \vec{Y}_m)$ ein Schaltkreis über einer Zellenbibliothek BIB.
- Sei eine Eingangsbelegung $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{B}^n$ gegeben.
- Eine Belegung $\Phi_{SK,\alpha} : V \to \mathbb{B}$ für alle Knoten $v \in V$ ist dann gegeben durch die folgenden Definitionen:
  - $\Phi_{SK,\alpha}(x_i) = \alpha_i \ \forall 1 \leq i \leq n$.
  - $\Phi_{SK,\alpha}(0) = 0$, $\Phi_{SK,\alpha}(1) = 1$.
  - falls $v \in I$ mit $typ(v) = g \in \mathbb{B}_k$, $IN(v) = (e_1, \ldots, e_k)$, dann ist $\Phi_{SK,\alpha}(v) = g(\Phi_{SK,\alpha}(Q(e_1)), \ldots, \Phi_{SK,\alpha}(Q(e_k)))$.

Zwischenbemerkung:

- Warum ist das wohldefiniert?
- Weil G azyklisch!

Formale Semantikdefinition für Schaltkreise (2/2)

- $(\Phi_{SK,\alpha}(y_1), \ldots, \Phi_{SK,\alpha}(y_m))$ ist dann die unter Eingangsbelegung $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ berechnete Ausgangsbelegung des Schaltkreises SK.
- Die Berechnung von $\Phi_{SK,\alpha}$ bei Eingangsbelegung α heißt auch Simulation von SK für Belegung α.

- Die an einem Knoten v berechnete Boolesche Funktion $\Psi(v) : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ ist definiert durch

$$\Psi(v)(\alpha) := \Phi_{SK,\alpha}(v)$$

  für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{B}^n$.
- Die durch den Schaltkreis berechnete Funktion ist

$$f_{SK} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m, f_{SK}(\alpha) = (\Psi(y_1)(\alpha), \ldots, \Psi(y_m)(\alpha)).$$

Standardzellen-Bibliothek

- Eine Standardzellen-Bibliothek enthält eine Menge von Gattern (Standardzellen).
  - Z.B. AND-Gatter mit 4 Eingängen, 8-Bit-Addierer
- Für jedes Element der Bibliothek werden Parameter wie Fläche auf dem Chip, Schaltgeschwindigkeit, Leistungsaufnahme des Gatters bzw. der Standardzelle abgespeichert.
- Es sind oft z. B. mehrere Inverter unterschiedlicher Größe und Geschwindigkeit vorhanden.

Kombinatorische Logiksynthese

- Allgemeine kombinatorische Logiksynthese optimiert mehrere Parameter gleichzeitig.
- Exakte Verfahren existieren, stoßen aber schon für kleinste Schaltkreise an ihre Grenzen.
- In der Praxis werden Heuristiken eingesetzt, die auf Ausschnitten eines großen Schaltkreises lokale Optimierungen durchführen.
- Hier beschränken wir uns auf eine wichtige Unterklasse von kombinatorischen Schaltkreisen:
  Die zweistufige Logik.
- Allgemeinere kombinatorische Schaltkreise betrachten wir später bei der Einführung arithmetischer Schaltkreise.