Tutorat 6

Eindeutigkeit des Kommplements, Boolesche Algebra, Formale Beschreibung von Schaltkreisen, Programmable Logic Arrays

Gruppe 9

Präsentator:
Jürgen Mattheis
(juergmatth@gmail.com)

Vorlesung von:
Prof. Dr. Scholl

Übungsgruppenbetreuung:
Tobias Seufert

15. Juni 2023

Universität Freiburg, Lehrstuhl für Rechnerarchitektur

Gliederung

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Appendix

Aufgabe 1

Aufgabe 1 I

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra

Lösung 1.1

- *Existenz und Eindeutigkeit neutraler Elemente bereits in Vorlesung gezeigt* $\rightarrow$ *Es kann* $1 = x + \neg x$ *verwendet werden*
- *Annahme 1:* $x + y = 1$
- *Annahme 2:* $x \cdot y = 0$
- *Analoges Korollar zur Vorlesung:* $1 = x + \neg x$

Aufgabe 1 II

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra

Lösung 1.1

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && (\textit{Neutrales Element})\\
&= y \cdot (x + \neg x) && (\textit{Korollar})\\
&= (y \cdot x) + (y \cdot \neg x) && (\textit{Distributivität})\\
&= (x \cdot y) + (y \cdot \neg x) && (\textit{Kommutativität})\\
&= 0 + (y \cdot \neg x) && (\textit{Annahme 2})\\
&= (x \cdot \neg x) + (y \cdot \neg x) && (\textit{Korollar})\\
&= \neg x \cdot (x + y) && (\textit{Kommutativität + Distributivität})\\
&= \neg x \cdot 1 && (\textit{Annahme 1})\\
&= \neg x && (\textit{Neutrales Element})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1 III

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra

Lösung 1.1

$$
\begin{aligned}
y &= y + 0 && \textit{(Neutrales Element)}\\
&= y + (x \cdot \neg x) && \textit{(Komplement)}\\
&= (y + x) \cdot (y + \neg x) && \textit{(Distributivität)}\\
&= (x + y) \cdot (y + \neg x) && \textit{(Kommutativit)}\\
&= 1 \cdot (y + \neg x) && \textit{(Annahme 1: } x + y = 1\textit{)}\\
&= (x + \neg x) \cdot (y + \neg x) && \textit{(Neutrales Element der Konjunktion)}\\
&= (\neg x + x) \cdot (\neg x + y) && \textit{(Assoziativität)}\\
&= \neg x + (x \cdot y) && \textit{(Distributivität)}\\
&= \neg x + 0 && \textit{(Annahme 2: } x \cdot y = 0\textit{)}\\
&= \neg x && \textit{(Neutrale Element der Disjunktion)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1 IV

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra

Lösung 1.1

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) + (\neg x \cdot z) &= (x \cdot y) + ((x \cdot y) \cdot z) + ((\neg x \cdot z) + ((\neg x \cdot z) \cdot y) && (\mathit{Absorption}) \\
&= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + ((x \cdot y) \cdot z) + ((\neg x \cdot z) \cdot y) && (\mathit{Kommutativität}) \\
&= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + (x \cdot (y \cdot z)) + (\neg x \cdot (z \cdot y)) && (\mathit{Assoziativität}) \\
&= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + (x \cdot (y \cdot z)) + (\neg x \cdot (y \cdot z)) && (\mathit{Kommutativität}) \\
&= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + ((x + \neg x) \cdot (y \cdot z)) && (\mathit{Kommutativität} + \mathit{Distributivität}) \\
&= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + (y \cdot z) && (\mathit{Kommutativität} + \mathit{Komplement})
\end{aligned}
$$

Anmerkungen

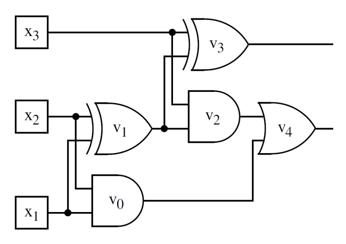
- Der zweite Teil geht analog durch Verweisen auf das Dualitätsprinzip oder durchrechnen mit genau derselben Axiomanwendung in genau derselben Reihenfolge

Aufgabe 2

Aufgabe 2 I

Formale Beschreibung von Schaltkreisen

Lösung 2.1



Aufgabe 2 II

Formale Beschreibung von Schaltkreisen

Lösung 2.2

Gatterausgang	*Funktion*
v_0	$x_1 \wedge x_2$
v_1	$x_1 \oplus x_2$
v_2	$(x_1 \oplus x_2) \wedge x_3$
v_3	$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$
v_4	$(x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \oplus x_2) \wedge x_3)$

Lösung 2.3

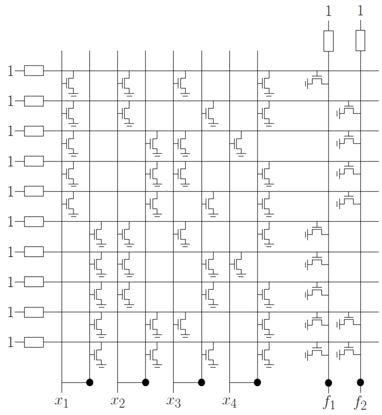
$depth(C) = 3$, *über den Pfad* v_1, v_2, v_4

Aufgabe 3

Aufgabe 3 I

Programmable Logic Arrays

Voraussetzungen 3.1



Aufgabe 3 II

Programmable Logic Arrays

Aufgabe 3.1

Gesucht sind die beiden Polynome $f_1, f_2 \in \mathbb{B}_4$, die durch dieses PLA implementiert werden

Lösung 3.1

$$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$
$$f_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

Aufgabe 3.2

Kosten des PLA

Aufgabe 3 III

Programmable Logic Arrays

Lösung 3.2

Primäre Kosten $cost_1(f_1, f_2) = 10$ *(Zeilen des PLA bzw. Anzahl der Monome)*
Sekundäre Kosten $cost_2(f_1, f_2) = 52$ *(Zahl der Transistoren im PLA)*

Aufgabe 3.3

Hypercubes von f_1 und f_2 zeichnen

Aufgabe 3 IV

Programmable Logic Arrays

Lösung 3.3

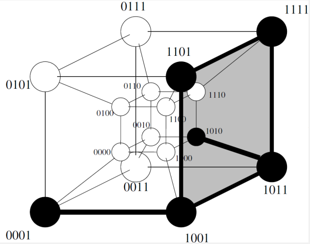


Abbildung 1: Funktion f_1

Aufgabe 3 V

Programmable Logic Arrays

Lösung 3.3

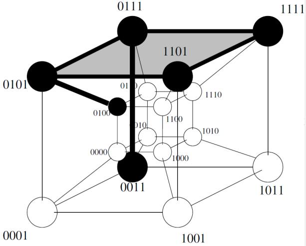


Abbildung 2: *Funktion f_2*

Appendix

Appendix I

Kleine Korollare

$$
\begin{aligned}
x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 && \text{Neutrales Element der Konjunktion} \\
&= (x + 1) \cdot (x + \neg x) && \text{Komplement} \\
&= x + (1 \cdot \neg x) && \text{Distributivität} \\
&= x + \neg x && \text{Neutrale Element der Konjunktion} \\
&= 1 && \text{Komplement}
\end{aligned}
$$

Appendix II

Kleine Korollare

$$
\begin{aligned}
x \cdot 0 &= (x \cdot 0) + 0 && \text{Neutrales Element der Disjunktion} \\
&= (x \cdot 0) + (x \cdot \neg x) && \text{Komplement} \\
&= x \cdot (0 + \neg x) && \text{Distributivität} \\
&= x \cdot \neg x && \text{Neutrale Element der Disjunktion} \\
&= 0 && \text{Komplement}
\end{aligned}
$$

Appendix III

Kleine Korollare

$$
\begin{aligned}
y \cdot y &= y \cdot y + 0 && \text{Neutrales Element} \\
&= y \cdot y + y \cdot \neg y && \text{Komplement} \\
&= (y + \neg y) \cdot y && \text{Distributivität} \\
&= 1 \cdot y && \text{Komplement} \\
&= y && \text{Neutrales Element}
\end{aligned}
$$