Tutorat 7

Implikanten und Primimplikanten, ON-Menge und Literale, Quine-McCluskey-Algorithmus, Hypercubes und Kosten eines Polynoms

Gruppe 9

Präsentator:
Jürgen Mattheis
(juergmatth@gmail.com)

Vorlesung von:
Prof. Dr. Scholl

Übungsgruppenbetreuung:
Tobias Seufert

17. Juli 2023

Universität Freiburg, Lehrstuhl für Rechnerarchitektur

Gliederung

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

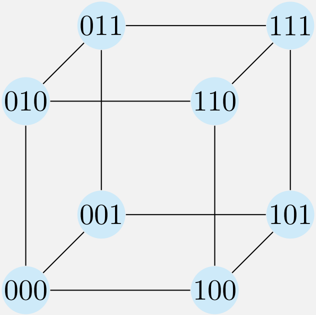
Appendix

Aufgabe 1

Aufgabe 1 I

Implikanten und Primimplikanten

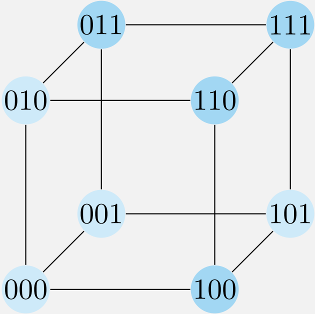
Aufgabe 1.1



Aufgabe 1 II

Implikanten und Primimplikanten

Aufgabe 1.1

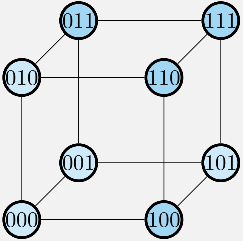


Aufgabe 1 III

Implikanten und Primimplikanten

Lösung 1.1

- *Die konstante 1-Funktion ist kein Implikant, es gibt Belegungen* $a \in \mathbb{B}^3$ *für die* $f(a) = 0$

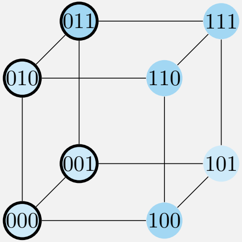


Aufgabe 1 IV

Implikanten und Primimplikanten

Lösung 1.2

- *a ist kein Implikant, also auch kein Primimplikant. Es gilt nicht, dass* $\psi(a) \leq f$*, denn* $\psi(a)(1,0,1) = 1 \neq f(1,0,1)$

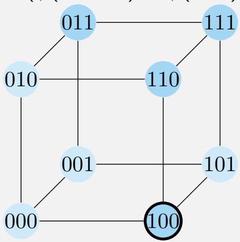


Aufgabe 1 V

Implikanten und Primimplikanten

Lösung 1.3

- *$a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ ist ein Implikant von f , denn $\psi(a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}) \leq f$ $a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ ist aber kein Primimplikant, denn es existiert ein „größerer" Implikant $a \cdot \overline{c}$ $(\psi(a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}) < \psi(a \cdot \overline{c}))$*

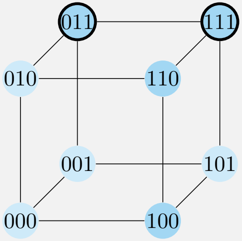


Aufgabe 1 VI

Implikanten und Primimplikanten

Lösung 1.4

- *$b \cdot c$ ist ein Primimplikant (und damit natürlich auch ein Implikant). $b \cdot c$ ist maximal, denn es kann kein Literal gestrichen werden, so dass wieder ein Implikant entsteht (weder b noch c sind Implikanten von f)*



Aufgabe 2

Aufgabe 2 I

ON-Menge und Literale

- Behauptung: $m \leq m' \Rightarrow L(m') \subseteq L(m)$
  - sei $L : BE(X_n) \rightarrow \mathcal{P}(\{\overline{s} \mid s \in X_n\} \cup X_n)$

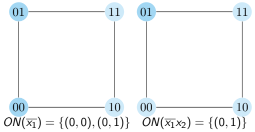


Abbildung 1: Veranschaulichung anhand eines Beispiels

- Beweis durch Kontraposition:
  - ZZ: $L(m') \not\subseteq L(m) \Rightarrow ON(m) \not\subseteq ON(m')$
  - es gilt: $L(m) \subset L(m')$, wobei m ein Monom ist und $m' = mx_i^{\omega_i}$
  - man betrachte $(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots \omega_n) \in ON(m)$
  - da $x_i^{\omega_i}$ nicht in m vorkommt, gilt auch $(\omega_1, \ldots, \overline{\omega_i}, \ldots, \omega_n) \in ON(m)$
  - aber $(\omega_1, \ldots, \overline{\omega_i}, \ldots, \omega_n) \notin ON(m')$
  - daraus folgt: $ON(m) \not\subseteq ON(m')$
  - daher gilt die Behauptung $\square$

- Beweis durch Widerspruch:
  - Annahme: $ON(m) \subseteq ON(m') \Rightarrow L(m') \subseteq L(m)$ gilt nicht, also $ON(m) \subseteq ON(m') \wedge L(m) \subset L(m')$
  - es gilt: $L(m) \subset L(m')$, wobei m ein Monom ist und $m' = mx_i^{\omega_i}$
  - man betrachte $(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots \omega_n) \in ON(m)$
  - da $x_i^{\omega_i}$ nicht in m vorkommt, gilt auch $(\omega_1, \ldots, \overline{\omega_i}, \ldots, \omega_n) \in ON(m)$
  - aber $(\omega_1, \ldots, \overline{\omega_i}, \ldots, \omega_n) \notin ON(m')$
  - daraus folgt: $ON(m') \subset ON(m)$
  - Widerspruch, denn $ON(m) \subset ON(m')$!
  - die Annahme gilt nicht, also gilt die Behauptung $\square$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 I

Quine-McCluskey-Algorithmus, Hypercubes und Kosten eines Polynoms

Voraussetzungen 3.1

- $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4$

Aufgabe 3 II

Quine-McCluskey-Algorithmus, Hypercubes und Kosten eines Polynoms

Lösung 3.1

1. Schleifeniteration:

$L_0^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$

0000
0001 0100 1000
0101 0110 1010 1100
0111 1110
1111

$Prim = \emptyset$

Aufgabe 3 III

Quine-McCluskey-Algorithmus, Hypercubes und Kosten eines Polynoms

Lösung 3.1

2. Schleifeniteration:

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$

000-

010-

011-

111-

$L_1^{\{x_1,x_2,x_4\}}$

01-0
10-0

01-1
11-0

$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$

0-00

0-01
1-00

1-10

$L_1^{\{x_2,x_3,x_4\}}$

-000

-100

-110

-111

$Prim = \emptyset$

Aufgabe 3 IV

Quine-McCluskey-Algorithmus, Hypercubes und Kosten eines Polynoms

Lösung 3.1

3. Schleifeniteration

$L_2^{\{x_1,x_2\}}$
01–

$L_2^{\{x_1,x_3\}}$
0-0-

$L_2^{\{x_1,x_4\}}$
1–0

$L_2^{\{x_2,x_3\}}$
-11-

$L_2^{\{x_2,x_4\}}$
-1-0

$L_2^{\{x_3,x_4\}}$
–00

$Prim = \emptyset$

Aufgabe 3 V

Quine-McCluskey-Algorithmus, Hypercubes und Kosten eines Polynoms

Lösung 3.1

4. Schleifeniteration

$L_3^{\{x_1\}} = \emptyset$

$L_3^{\{x_2\}} = \emptyset$

$L_3^{\{x_3\}} = \emptyset$

$L_3^{\{x_4\}} = \emptyset$

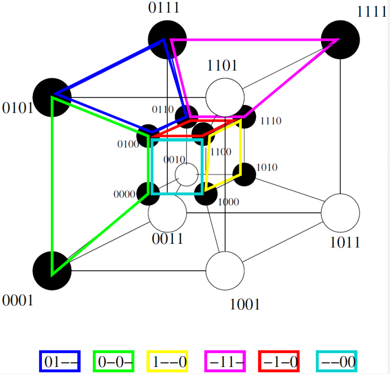
Prim = {*01–, 0-0-, 1–0, -11-, -1-0, –00*}

$\cup_M L_3^M(f) = \emptyset \Rightarrow$ *Schleifenabbruch, Prim wird zurückgegeben*

Aufgabe 3 VI

Quine-McCluskey-Algorithmus, Hypercubes und Kosten eines Polynoms

Lösung 3.2



Aufgabe 3 VII

Quine-McCluskey-Algorithmus, Hypercubes und Kosten eines Polynoms

Lösung 3.3

- *primäre Kosten:* # PLA-Zeilen, d.h. #Monome
- *sekundäre Kosten:* #PLA-Transistoren, d.h. #Literale + #Monome

Lösung 3.3

$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4$

- $cost_1 = \#Monome = 11$
- $cost_2 = \#Literale + \#Monome = 44 + 11 = 55$

Lösung 3.3

$f_{red} = \bar{x}_1x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_4 + x_2x_3 + x_2\bar{x}_4 + \bar{x}_3\bar{x}_4$

- $cost_1 = \#Monome = 6$
- $cost_2 = \#Literale + \#Monome = 12 + 6 = 18$

Appendix

Appendix I

Verschiedene Interpretationen von Implikation

1. Implikation als If-Statement

   - $a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b \Leftrightarrow \texttt{if}(a)\{b\}$, d.h. Lazy Evaluation, b wird nur ausgewertet, wenn $\psi(a)(\omega) = 1$ bzw. $\psi(\neg a)(\omega) = 0$, da 0 der Non-Controlling Value der ODER-Operation ist und daher das Ergebnis erst feststeht, sobald der zweite Operand ausgewertet ist

2. Teilmenge $\subseteq$

a	b	f	g	h	$f \rightarrow h$	$g \rightarrow h$
0	0	1	1	1	1	1
0	1		1		1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1			1	1	1

3. Implikant

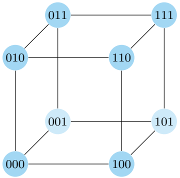
Appendix II

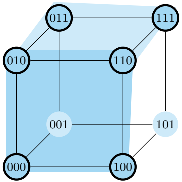
Verschiedene Interpretationen von Implikation

- ein Implikant von f ist ein Monom q mit $q \leq f$. Ein Primimplikant von f ist ein maximaler Implikant q von f, d.h. es gibt keinen Implikanten s ($s \neq q$) von f mit $q \leq s$

- $ON(f) = \{000, 100, 010, 011, 110, 111\}$
- $f = \neg a \neg b \neg c \vee a \neg b \neg c \vee \neg ab \neg c \vee \neg abc \vee ab \neg c \vee abc$
- $f_{red} = b \vee \neg c$
- Warum nicht $f_{red} = bc \vee \neg c$?

a	b	c	b	bc	$\neg c$	$bc \vee \neg c$	$b \vee \neg c$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1





Appendix I

Beweis durch Kontraposition

- $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \Leftrightarrow \neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \Leftrightarrow \neg\neg\mathcal{G} \vee \mathcal{F} \Leftrightarrow \neg\mathcal{G} \rightarrow \neg\mathcal{F}$
- Konstraposition der Behauptung, die eine Implikation ist wird bewiesen. Immer mit Beweismuster für Implikation kombiniert, da Kontraposition der Behauptung auch eine Implikation ist

Behauptung: $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$

Beweis: Beweis durch Kontraposition, zu zeigen: $\neg\mathcal{G} \Rightarrow \neg\mathcal{F}$

Es gelte $\neg\mathcal{G}$.

Teilbeweis, dass dann $\neg\mathcal{F}$ gilt.

Appendix II

Beweis durch Kontraposition

Wir zeigen: Eine natürliche Zahl mit geradem Quadrat ist selbst gerade.

Voraussetzung:

$(\star)\ \forall n \in \mathbb{N}(\, \neg gerade(n) \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k+1\,)$ (Eigenschaft von *gerade*)

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}(\, gerade(n^2) \Rightarrow gerade(n)\,)$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Beweis durch Kontraposition, zu zeigen: $\neg gerade(n) \Rightarrow \neg gerade(n^2)$

Es gelte $\neg gerade(n)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k+1 && \text{(wegen } (\star))\\
\Rightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } n^2 = (2k+1)^2 && \text{(Quadrierung)}\\
& \qquad\qquad\qquad = 4k^2+4k+1 && \text{(arithmetische Umformung)}\\
& \qquad\qquad\qquad = 2(2k^2+2k)+1 && \text{(arithmetische Umformung)}\\
\Rightarrow \quad & \neg gerade(n^2) && \text{(wegen } (\star))
\end{aligned}
$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, gilt die Behauptung. ■

Appendix I

Links

- https://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae/lectures/ti1/code/qmc/
- https://we.tl/t-xUFDLiFCy0
- https://we.tl/t-tnBjVtcgZH