Prof. Dr. Christoph Scholl
Tobias Seufert

Freiburg, 14. Juni 2023

Technische Informatik
Übungsblatt 8

Hinweis: Auf diesem Blatt befindet sich eine „Bonusaufgabe“. Diese Aufgabe zählt nicht in die Gesamtheit der Aufgaben, bei sinnvoller Bearbeitung wird sie jedoch zur Menge der sinnvoll bearbeiteten Aufgaben gerechnet.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ sei durch ihre ON-Menge gegeben:

$$ON(f) = \{0000,\ 0001,\ 0100,\ 0101,\ 0110,\ 0111,\ 1000,\ 1010,\ 1100,\ 1110,\ 1111\}$$

Sie haben auch bereits durch Quine-McCluskey die Menge der Primimplikanten bestimmt:

$$Prim(f) = \{--00,\ -1-0,\ -11-,\ 1--0,\ 0-0-,\ 01--\}$$

Erstellen Sie eine Primimplikantentafel zu f und reduzieren Sie die Tafel. Geben Sie in jedem Schritt an welche Spalten/Zeilen Sie für die Reduktion betrachten und welche Reduktionsregel Sie anwenden um Spalten/Zeilen zu löschen. Es ist nicht erforderlich nach jedem Reduktionsschritt die reduzierte PIT anzugeben. Geben Sie nur die reduzierte PIT an, wenn es notwendig oder hilfreich ist um Ihre Vorgehensweise nachzuvollziehen. Wie lautet das berechnete Minimalpolynom?

Hinweis: Das Resultat ist eine leere Tabelle. Die Methode von Petrick muss nicht angewendet werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei für eine boolesche Funktion die folgende Primimplikantentafel für die Minterme $\{a, b, c, d, e, f\}$ und die Primimplikanten $\{A, B, C, D, E, F\}$ bereits ermittelt worden:

	a	b	c	d	e	f
A		1		1		
B	1		1	1		
C			1	1		1
D		1			1	
E			1	1	1	
F	1	1				1

Reduzieren Sie die Primimplikantentafel so weit wie möglich, geben Sie dabei die einzelnen verwendeten Reduktionsregeln an. Wenden Sie dann die Methode von Petrick an, um das aus der gegebenen Primimplikantentafel resultierende Minimalpolynom zu bestimmen. Gehen Sie dabei davon aus, dass alle Primimplikanten die gleichen Kosten haben.

Aufgabe 3 (*Bonusaufgabe:* 2 + 1 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Gegeben sei die Boolesche Funktion $xor_n : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ mit

$$xor_n(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sum_{i=1}^n x_i \text{ ungerade} \\ 0 & \text{wenn } \sum_{i=1}^n x_i \text{ gerade} \end{cases}$$

a) Geben Sie die ON-Menge zu $xor_3(x_1, x_2, x_3)$ an. Verwenden Sie anschließend das Verfahren von Quine-McCluskey um alle Primimplikanten zu berechnen. Bestimmen Sie zum Schluss mithilfe der Primimplikantentafel das Minimalpolynom.

b) Leiten Sie nun das Minimalpolynon zu xor_n für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ her. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise und geben Sie die Anzahl der Primimplikanten im Minimalpolynom an.

c) Sie wollen das Minimalpolynom realisieren und erkennen, dass sowohl die Kosten für eine PLA als auch die Kosten für eine direkte Schaltkreisübersetzung exponentiell mit n anwächst. Sie wollen jedoch eine kostengünstigere Lösung. Sei $g(xor_i(x_1, ..., x_i), xor_{n-i}(x_{i+1}, ..., x_n))$ für $1 \le i \le n-1$ eine alternative Definition für xor_n. Leiten Sie die Funktion für g mithilfe einer Fallunterscheidung her.

d) Skizzieren Sie auf Basis von Aufgabenteil c) einen Schaltkreis für $xor_8(x_1, ..., x_8) = g(xor_i(x_1, ..., x_i), xor_{8-i}(x_{i+1}, ..., x_8))$ für $1 \le i \le 7$ mit möglichst geringer Tiefe.

   Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie i wählen müssen um eine möglichst geringe Tiefe zu erreichen.

e) Benutzen Sie Ihren Schaltkreis aus Aufgabenteil d) um sich einen Schaltkreis für xor_n zu überlegen, der ebenfalls eine möglichst geringe Tiefe hat. Dabei sei $n = 2^k$, mit $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie in Abhängigkeit von n die Kosten und Tiefe ihres Schaltkreises an. In diesem Aufgabenteil ist *keine* Skizzierung des Schaltkreises erforderlich.

Abgabe: 21. Juni 2023, $13^{\underline{00}}$ über das Übungsportal