Tutorat 1

Vollständige Induktion, Aussagenlogik, O-Notation

Gruppe 9

Präsentator:
Jürgen Mattheis
(juergmatth@gmail.com)

Vorlesung von:
Prof. Dr. Scholl

Übungsgruppenbetreuung:
Tobias Seufert

11. Mai 2023

Universität Freiburg, Lehrstuhl für Rechnerarchitektur

Gliederung

Aufgabe 1

Aufgabe 1 I

Vollständige Induktion

Voraussetzungen 1.1

- $\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$
- *es gelte:* $z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 1 II

Lösung 1.1

- *Induktionsanfang:* $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} z^i = 1 = \frac{z-1}{z-1} = \frac{z^{0+1}-1}{z-1}$$

- *Induktionsschritt:* $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} z^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} z^i\right) + z^{n+1} \\
&= \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + z^{n+1} \quad \text{wegen Induktionsvoraussetzung} \\
&= \frac{z^{n+1}-1+z^{n+1}\cdot(z-1)}{z-1} \\
&= \frac{z^{n+1}-1+z^{n+2}-z^{n+1}}{z-1} \\
&= \frac{z^{n+2}-1}{z-1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 I

Aussagenlogik

Voraussetzungen 2.1

$$x \vee y := x + y - x \cdot y$$
$$x \wedge y := x \cdot y$$
$$\neg x := 1 - x$$

- *es gilt:* $x^2 = x \cdot x = x$, *da* $x \in \{0, 1\}$ *oder wenn man auf den* $\wedge$*-Operator zurückführt:* $x^2 = x \cdot x = x \wedge x = x$

Aufgabe 2 II

Aussagenlogik

Lösung 2.1

x	y	z	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \wedge z$	$y \wedge z$	$x \wedge (y \wedge z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Aufgabe 2 III

Aussagenlogik

Lösung 2.1

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y) \vee z$	$y \vee z$	$x \vee (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Aufgabe 2 IV

Aussagenlogik

Lösung 2.1

x	y	$y \wedge \neg y$	$x \vee (y \wedge \neg y)$	$y \vee \neg y$	$x \wedge (y \vee \neg y)$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1

Aufgabe 2 I

Aussagenlogik

Lösung 2.2

$$
\begin{aligned}
x \lor (x \land y) &= x + (x \cdot y) - x(x \cdot y) \\
&= x + xy - x^2 y \\
&\overset{*}{=} x + xy - xy \\
&= x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 II

Aussagenlogik

Lösung 2.2

$$
\begin{aligned}
x \wedge (x \vee y) &= x \cdot (x + y - xy) \\
&= x^2 + xy - x^2 y \\
&\overset{*}{=} x + xy - xy \\
&= x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 III

Aussagenlogik

Lösung 2.2

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= (x + y - xy) \cdot (x + z - xz) \\
&= x(x + z - xz) + y(x + z - xz) + xy(x + z - xz) \\
&= x^2 + xz - x^2 z + xy + yz - xyz - x^2 y - xyz + x^2 yz \\
&= x + xz - x^2 z + xy + yz - xyz - xy - xyz + xyz \\
&= x + yz - xyz \\
&= x + (y \wedge z) - x \wedge (y \wedge z) \\
&= x \vee (y \wedge z)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 IV

Aussagenlogik

Lösung 2.2

$$
\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= xy + xz - (xy \cdot xz) \\
&= xy + xz - (x^2 yz) \\
&= xy + xz - (xyz) \\
&= x(y + z - yz) \\
&= x \cdot (y \vee z) \\
&= x \wedge (y \vee z)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 I

O-Notation

Voraussetzungen 3.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c \qquad \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \qquad (c \in \mathbb{N}_0) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \qquad \Rightarrow f(n) \notin O(g(n)) \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(c \cdot n)}{n} = 0 \qquad (c \in \mathbb{N}_{\geq 1}) \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\log n)^c} = \infty \qquad (c \in \mathbb{N}_{\geq 1}) \tag{4}$$

Aufgabe 3 II

O-Notation

Lösung 3.1

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{100n + \log n}{n + (\log n)^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{100n + \log n}{n + 1^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{100 + \frac{\log n}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{100 + 0}{1 + 0} = 100 \in \mathrm{N}_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(n) \in O(g(n))$$

Aufgabe 3 III

O-Notation

Lösung 3.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + (\log n)^2}{100n + \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{(\log n)^2}{n}}{100 + \frac{\log n}{n}}$$

$$\stackrel{(4)}{=} \frac{1+0}{100+0} = \frac{1}{100} \leq 1 \in \mathbb{N}_0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(n) \in O(f(n))$$

Aufgabe 3 I

O-Notation

Lösung 3.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{\log n}}{n(\log n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\log n}}{(\log n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\log n)^3} \overset{(4)}{=} \infty \overset{(2)}{\Rightarrow} f(n) \notin O(g(n))$$

Lösung 3.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \in \mathbb{N}_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(n) \in O(f(n))$$

ODER

$$f(n) \notin O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \notin \Omega(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \in o(f(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$$

Bonus

Bonus I

Vollständige Induktion über natürliche Zahlen

- für Allbehauptungen: $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{E}(n)$ (Eigenschaft $\mathcal{E}$)
- die allgemeine Form wird als Strukturelle Induktion bezeichnet, Vollständige Induktion ist zum Beweis von Aussagen für alle Natürlichen Zahlen
    - Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ weißt geignete Struktur auf, da auf ihnen die Nachfolgerbeziehung besteht
- man führt Teilbewise für 2 Fälle:
    - Basisfall: $\mathcal{E}(0)$, d.h. die natürliche Zahl 0 hat die Eigenschaft ϵ
    - Induktionsfall: $\forall i \in \mathbb{N}\,(\mathcal{E}(i) \Rightarrow \mathcal{E}(i+1))$, d.h. die Eigenschaft ϵ überträgt sich von jeder natürlichen Zahl i auf ihren Nachfolger $i+1$

Bonus II

Vollständige Induktion über natürliche Zahlen

- bei beweisender Allbehauptung für den Induktionsfall wird Implikation: Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig. Zu zeigen: $\epsilon(i) \Rightarrow \epsilon(i+1)$ zerlegt in: Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte: $\epsilon(i)$. Zu zeigen: $\epsilon(i+1)$
- Diese Darstellung des Induktionsfalls legt seine Zerlegung in die üblichen drei Bestandteile Induktionsannahme, Induktionsbehauptung, Induktionsschritt nahe:

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}\ \mathcal{E}(n)$

Beweis: Durch vollständige Induktion nach n.

Basisfall $n = 0$: *Teilbeweis, dass $\mathcal{E}(0)$ gilt.*

Induktionsfall $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: $\mathcal{E}(n)$

Induktionsbehauptung: $\mathcal{E}(n+1)$

Induktionsschritt: *Teilbeweis, dass die Induktionsbehauptung gilt.*
In diesem kann die Induktionsannahme verwendet werden.

Bonus III

Vollständige Induktion über natürliche Zahlen

- Induktionsfall beweist Allbehauptung mit darin enthaltener Implikationsbehauptung
- Wenn für Eigenschaft ϵ Basisfall und Induktionsfall bewiesen sind, gilt, dass jede natürliche Zahl die Eigenschaft ϵ hat, denn:

0. Wegen des Basisfalls gilt $\epsilon(0)$.
1. Mit $\epsilon(0)$ gilt wegen des Induktionsfalls auch $\epsilon(1)$.
2. Mit $\epsilon(1)$ gilt wegen des Induktionsfalls auch $\epsilon(2)$.
3. Mit $\epsilon(2)$ gilt wegen des Induktionsfalls auch $\epsilon(3)$.
4. ...

Bonus IV

Vollständige Induktion über natürliche Zahlen

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis: Durch vollständige Induktion nach n.

Basisfall $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$

Induktionsfall $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsbehauptung: $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}$

Bonus V

Vollständige Induktion über natürliche Zahlen

Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &= \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Bonus

O-Notation

- Man will Funktionen irendwie vergleichen und das einzige sinnvolle was man vergleichen kann ist die Wachstumsrate, denn für zwei Funktionen kann gleichzeitig gelten: $g = O(f)$, also g wächst nicht stärker als f und $g > f$, also g ist überall echt größer als f
- Konstate Faktoren und Summanden $c \cdot x$ und $c + x$ sollen keine Rolle, aber es geht um Wachstumsrate, Konstante Faktoren und Summanden spielen keine Rolle
- Die Operatoren $O, \Omega, \Theta, o, \omega$ sind auf Funktionen, was die Operatoren $\leq, \geq, =, <, >$ auf Zahlen sind
- $f = O(g)$ wird gesprochen als „f ist Groß-O von g“, wobei eigentlich $f \in O(g)$ mathematisch korrekt ist
  - man sagt die „Laufzeit eines Algorihmus ist: $\Omega(n \cdot log(n))$“, man sagt NICHT, dass ein „Algorithmus Laufzeit mindestens $O(n \cdot log(n))$ hat“

Bonus I

Landau-Symbole

- formal:
  - $O(g) = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c > 0, \forall n \geq n_0, h(n) \leq c \cdot g(n)\}$
    - $f \in O(g)$ bedeutet „f wächst höchstens so stark wie g“
  - $\Omega(g) = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c > 0, \forall n \geq n_0, h(n) \geq c \cdot g(n)\}$
    - $f \in \Omega(g)$ bedeutet „f wächst mindestens so stark wie g“
  - $\Theta(g) = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \forall n \geq n_0, c_1 \cdot g(n) \leq h(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$
    - $f \in \Theta(g)$ bedeutet „f wächst genauso stark wie g“
  - $o(g) = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, h(n) \leq c \cdot g(n)\}$

Bonus II

Landau-Symbole

- $f \in o(g)$ bedeutet „f wächst (strikt) langsamer als g“
- $\omega(g) = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, h(n) \geq c \cdot g(n)\}$
  - $f \in \omega(g)$ bedeutet „f wächst (strikt) schneller als g“

Anmerkungen

- $o(g) \cap \omega(g) = \emptyset$,
- $\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$
- $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ and $f(n) \in \Omega(g(n))$

- Transpose symmetry:
  - $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

Bonus III

Landau-Symbole

- $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$

- Bestimmung über Grenzwerte:

1. $f = O(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
2. $f = \Omega(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$
3. $f = \Theta(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
4. $f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Bonus IV

Landau-Symbole

5. $f = \omega(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Bonus

Regel von L'Hopital

- $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
  - wird verwendet bei Grenzwertbetrachtung bei der man bei Zähler und Nenner entweder den Fall $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ hat und beide Ableitungen differenzierbar
  - dann Zähler und Nenner des Bruches getrennt voneinander ableiten und dann nochmal Grenwertbetrachtung
  - wenn nochmal unbestimmter Ausdruck rauskommt und wieder entweder der Fall $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ und beide Ableitungen differenzierbar, dann nochmal anwenden oder sonst Pech gehabt