Tutorat 9

4-Bit-Carry-Ripple-Addierer, Tiefe, n-Bit Inkrementer INC_n, Signextension, Zweierkomplementzahlen

Gruppe 9

Präsentator:
Jürgen Mattheis
(juergmatth@gmail.com)

Vorlesung von:
Prof. Dr. Scholl

Übungsgruppenbetreuung:
Tobias Seufert

22. August 2023

Universität Freiburg, Lehrstuhl für Rechnerarchitektur

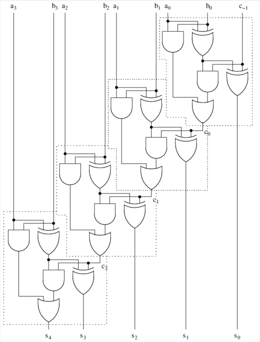
Gliederung

Aufgabe 1

Aufgabe 1 I

4-Bit-Carry-Ripple-Addierer, Tiefe

Lösung 1.1

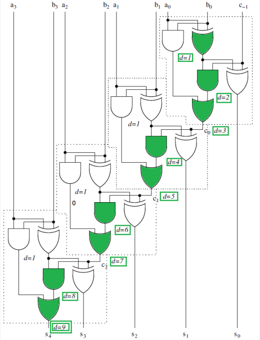


Aufgabe 1 II

4-Bit-Carry-Ripple-Addierer, Tiefe

Lösung 1.2

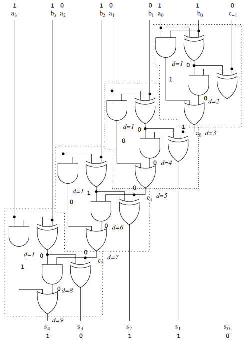
- *Allgemein gilt* $depth(CR_n) = 3 + 2(n-1)$. *Hier:* $depth(CR_4) = 3 + 2(4-1) = 9$



Aufgabe 1 III

4-Bit-Carry-Ripple-Addierer, Tiefe

Lösung 1.3

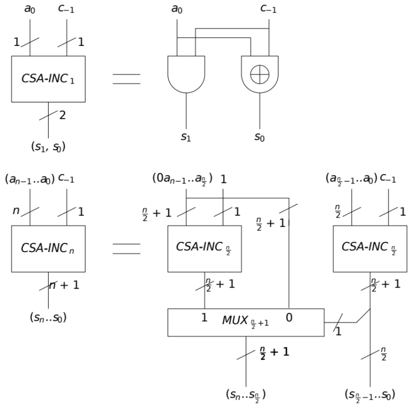


Aufgabe 2

Aufgabe 2

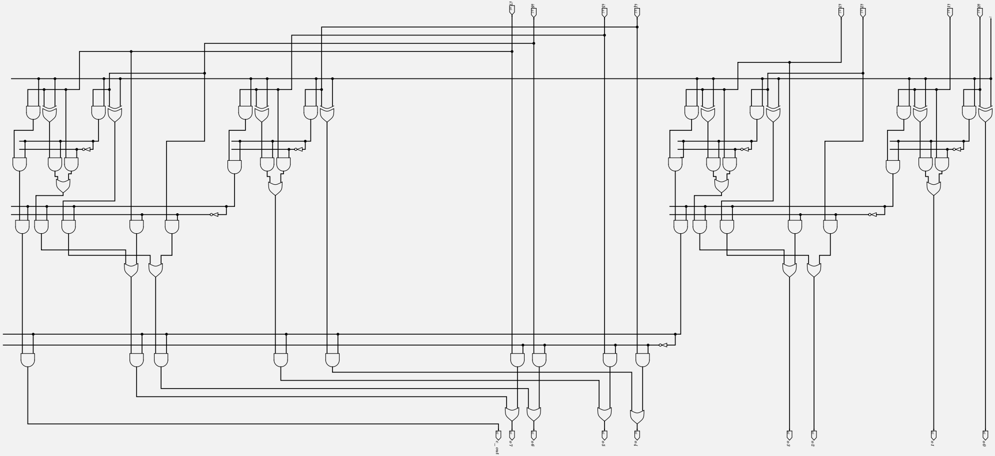
n-Bit Inkrementer INC_n

Lösung 2.1



Aufgabe 2

Lösung 2.1



Aufgabe 2

n-Bit Inkrementer INC_n

Lösung 2.2

- *Tiefe:*
  - $k = 0$: 1
  - $k = 1$: $1 + 3 \cdot 1 = 4$
  - $k = 2$: $1 + 3 \cdot 2 = 7$
  - $k = 3$: $1 + 3 \cdot 3 = 10$
  - *allgemein:*
    - $\mathrm{depth}(\mathrm{CSA} - \mathrm{INC}_{\frac{n}{2^k}}) = \mathrm{depth}(\mathrm{CSA} - \mathrm{INC}_1) = \mathrm{depth}(\mathrm{HA}) = 1$
    - $\mathrm{depth}(\mathrm{CSA} - \mathrm{INC}_n) = \mathrm{depth}(\mathrm{CSA} - \mathrm{INC}_{\frac{n}{2^1}}) + \mathrm{depth}(\mathrm{MUX}_{\frac{n}{2}+1}) = \mathrm{depth}(\mathrm{CSA} - \mathrm{INC}_{\frac{n}{2^1}}) + 3 = \mathrm{depth}(\mathrm{CSA} - \mathrm{INC}_{\frac{n}{2^2}}) + 3 + 3 = \mathrm{depth}(\mathrm{CSA} - \mathrm{INC}_{\frac{n}{2^k}}) + 3 \cdot k = 3 \cdot k + 1 = 3 \cdot log(n) + 1$

Aufgabe 2

Lösung 2.3

- *Kosten:*
  - $k = 0$: 2
  - $k = 1$: $2 \cdot 2 + (3 \cdot 1 + 2) \cdot 1 = 9$
  - $k = 2$: $2 \cdot 4 + (3 \cdot 1 + 2) \cdot 2 + (3 \cdot 2 + 2) \cdot 1 = 26$
  - $k = 3$: $2 \cdot 8 + (3 \cdot 1 + 2) \cdot 4 + (3 \cdot 2 + 2) \cdot 2 + (3 \cdot 4 + 2) \cdot 1 = 66$
  - *allgemein:*
    - $\mathrm{cost}(\mathrm{CSA}-\mathrm{INC}_{\frac{n}{2^k}}) = \mathrm{cost}(\mathrm{CSA}-\mathrm{INC}_1) = \mathrm{cost}(\mathrm{HA}) = 2$
    - $\mathrm{cost}(\mathrm{CSA}-\mathrm{INC}_n) = 2 \cdot \mathrm{cost}(\mathrm{CSA}-\mathrm{INC}_{\frac{n}{2^1}}) + \mathrm{cost}(\mathrm{MUX}_{\frac{n}{2^1}+1}) = 2 \cdot \mathrm{cost}(\mathrm{CSA}-\mathrm{INC}_{\frac{n}{2^1}}) + (3 \cdot 2^{k-1} + 2) \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{cost}(\mathrm{CSA}-\mathrm{INC}_{\frac{n}{2^2}}) + (3 \cdot 2^{k-2} + 2) \cdot 2 + (3 \cdot 2^{k-1} + 2) \cdot 1 = 2^k \cdot \mathrm{cost}(\mathrm{CSA}-\mathrm{INC}_{\frac{n}{2^k}}) + (3 \cdot 2^0 + 2) \cdot 2^{k-1} + (3 \cdot 2^1 + 2) \cdot 2^{k-2} + \ldots + (3 \cdot 2^{k-2} + 2) \cdot 2^1 + (3 \cdot 2^{k-1} + 2) \cdot 2^0 = n \cdot 2 + \sum_{i=0}^{k-1} (3 \cdot 2^{k-i-1} + 2) \cdot 2^i = n \cdot 2 + \sum_{i=0}^{\log(n)-1} (3 \cdot 2^{\log(n)-i-1} + 2) \cdot 2^i = 4n + 3n \cdot \frac{\log(n)}{2} - 2$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 I

Signextension

Lösung 3.1

1. *Zurückführung auf Sign Extension um 1 Bit:*
   Lemma: *Sei* $a \in \mathbb{B}^n$, $a = a_{n-1} \dots a_0$. *Dann gilt* $[a]_2 = [a_{n-1}a]_2$.
   Beweis:
   $$[a_{n-1}a]_2 = -a_{n-1} \cdot 2^n + \sum_{i=0}^{n-i} a_i \cdot 2^i = -a_{n-1} \cdot 2^n + \left(a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot 2^i \right) = -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot 2^i = [a]_2$$
   Damit: $[y]_2 = [y_{n-1}^1 y]_2 = [y_{n-1}^2 y_{n-1}^1 y]_2 = \dots = [y_{n-1}^k \dots y_{n-1}^1 y]_2 = [\mathrm{sext}_k(y)]_2$.

Aufgabe 3 II

Signextension

Lösung 3.1

2. *Direkter Beweis:* *Sei* $y \in \mathbb{B}^n, y = y_{n-1} \dots y_0$

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{sext}_k(y)]_2 = [\underbrace{y_{n-1} \dots y_{n-1}}_{k-mal} y]_2 &= \sum_{i=0}^{n-2} y_i \cdot 2^i + \sum_{i=n-1}^{n+k-2} y_{n-1} \cdot 2^i - y_{n-1} \cdot 2^{n+k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} y_i \cdot 2^i + y_{n-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+k-2} 2^i - \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \right) - y_{n-1} \cdot 2^{n+k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} y_i \cdot 2^i + y_{n-1} \cdot \left(\frac{2^{n+k-1} - 1}{2 - 1} - \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \right) - y_{n-1} \cdot 2^{n+k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} y_i \cdot 2^i + y_{n-1} \cdot 2^{n+k-1} - y_{n-1} \cdot 2^{n-1} - y_{n-1} \cdot 2^{n+k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} y_i \cdot 2^i - y_{n-1} \cdot 2^{n-1} \\
&= [y]_2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 I

Addition von Zweierkomplementzahlen

Lösung 4.1

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 100000 & = & -32 \\
+ & 011111 & = & 31 \\
(\ddot{U}) & 0000000 & & \\
\hline
 & 111111 & = & -1
\end{array}
$$

Lösung 4.2

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 100000 & = & -32 \\
+ & 100000 & = & -32 \\
(\ddot{U}) & \textcolor{red}{1}000000 & & \\
\hline
 & (\textcolor{red}{1})000000 & = & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ *Überlauf*

Aufgabe 4 II

Addition von Zweierkomplementzahlen

Lösung 4.3

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 010001 & = & 17 \\
+ & 011011 & = & 27 \\
(\ddot{U}) & 0100110 & & \\
\hline
 & (0)101100 & = & -20
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ *Überlauf*