Prof. Dr. Christoph Scholl
Tobias Seufert

Freiburg, 24. Mai 2023

Technische Informatik
Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Weisen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln für beliebige Boolesche Algebren durch Zurückführung auf die Axiome der Booleschen Algebra nach. Zusätzlich dürfen Sie auch die Existenz und Eindeutigkeit neutraler Elemente verwenden, da diese Regel bereits in der Vorlesung bewiesen wurde. Geben Sie dabei bei jedem Schritt an, welche Axiome Sie verwenden.

a) Eindeutigkeit des Komplements:

$$\forall x, y \in M : (x \cdot y = 0 \text{ und } x + y = 1) \Rightarrow y = (\sim x)$$

b) Consensus-Regel:

$$\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) + (\sim x \cdot z) = (x \cdot y) + (\sim x \cdot z) + (y \cdot z)$$
$$\forall x, y, z \in M : (x + y) \cdot (\sim x + z) = (x + y) \cdot (\sim x + z) \cdot (y + z)$$

Hinweis: Es reicht hier nicht aus, die Korrektheit der Regeln für eine konkrete Boolesche Algebra zu zeigen.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 1 Punkte)

Die formale Beschreibung eines Schaltkreises C über der Bibliothek STD sei gegeben durch

$$C := (\overrightarrow{X_3}, (V, E), typ, IN, \overrightarrow{Y_2}),$$

wobei

$$\begin{aligned}
V &= \{0,1\} \cup \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\} \\
E &= \{(v_2, v_4), (x_3, v_3), (x_2, v_1), (v_0, v_4), (v_1, v_3), (x_1, v_0), (x_3, v_2), (x_1, v_1), (x_2, v_0)(v_1, v_2)\} \\
\overrightarrow{X_3} &= (x_1, x_2, x_3) \\
\overrightarrow{Y_2} &= (v_3, v_4) \\
typ &= \{(v_i \mapsto \wedge) \mid i \in \{0,2\}\} \cup \{(v_i \mapsto \oplus) \mid i \in \{1,3\}\} \cup \{(v_4 \mapsto \vee)\} \\
IN &= \{(v_0 \mapsto ((x_1, v_0), (x_2, v_0))), (v_1 \mapsto ((x_1, v_1), (x_2, v_1))), (v_2 \mapsto ((v_1, v_2), (x_3, v_2))), \\
&\quad (v_3 \mapsto ((v_1, v_3), (x_3, v_3))), (v_4 \mapsto ((v_0, v_4), (v_2, v_4)))\}.
\end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie C.

b) Führen Sie für C eine symbolische Simulation durch (geben Sie für jedes Gatter den Booleschen Ausdruck für die an seinem Ausgang berechnete Funktion an).

c) Die Tiefe eines Schaltkreises ist definiert als die maximale Anzahl von Gattern auf einem Pfad von einem Eingang zu einem Ausgang. Bestimmen Sie die Tiefe von C.

Aufgabe 3 (3 + 1 + 2 Punkte)

Betrachten Sie das PLA in Abbildung 2, der die beiden Funktionen $f_1, f_2 \in \mathbb{B}_4$ realisiert. Inverter sind in dieser Abbildung als schwarze Punkte dargestellt.

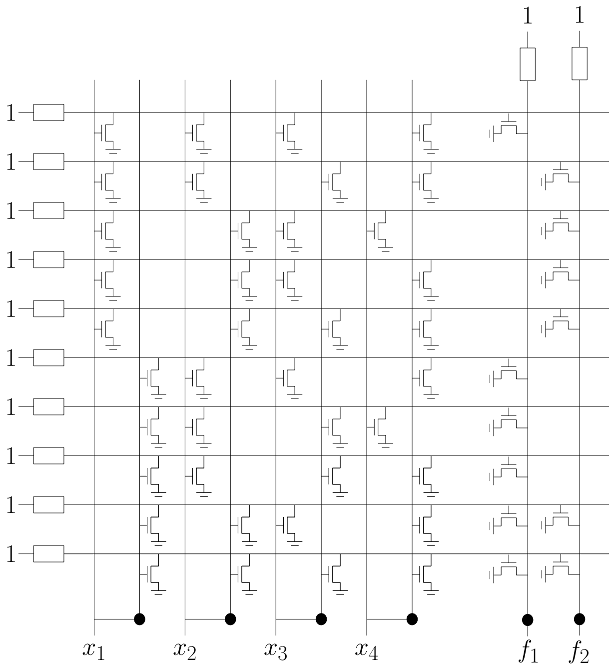

Abbildung 1: Ein PLA.

a) Geben Sie die Polynome $f_1, f_2 \in \mathbb{B}_4$ an (Sie sollten Disjunktionen von Mintermen erhalten).

b) Geben Sie die Kosten $cost(f_1, f_2) = (cost_1(f_1, f_2), cost_2(f_1, f_2))$ an.

c) Zeichnen Sie für f_1 und f_2 jeweils einen 4-dimensionalen Würfel (Hypercube), in dem $ON(f_1)$ bzw. $ON(f_2)$ markiert ist.

Eine Hypercube-Vorlage im PNG- und PDF-Format finden Sie bei den Vorlesungsmaterialien unter "Zusatzmaterial" (Zugang über Ilias oder die Vorlesungsseiten).

Abgabe: 7. Juni 2023, $13^{\underline{00}}$ über das Übungsportal