

Tutorat 6

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra, Formale Beschreibung von Schaltkreisen, Programmable Logic Arrays

Gruppe 9

Präsentator:
Jürgen Mattheis
(juergmatth@gmail.com)

Vorlesung von:
Prof. Dr. Scholl

Übungsgruppenbetreuung:
Tobias Seufert

15. Juni 2023

Universität Freiburg, Lehrstuhl für Rechnerarchitektur

Gliederung

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Appendix

Aufgabe 1

Aufgabe 1 I

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra

Lösung 1.1



- ▶ *Existenz und Eindeutigkeit neutraler Elemente bereits in Vorlesung gezeigt \rightarrow Es kann $1 = x + \neg x$ verwendet werden*
- ▶ *Annahme 1: $x + y = 1$*
- ▶ *Annahme 2: $x \cdot y = 0$*
- ▶ *Analoges Korollar zur Vorlesung: $1 = x + \neg x$*

Aufgabe 1 II

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra

Lösung 1.1



$$y = y \cdot 1$$

(*Neutrales Element*)

$$= y \cdot (x + \neg x)$$

(*Korollar*)

$$= (y \cdot x) + (y \cdot \neg x)$$

(*Distributivität*)

$$= (x \cdot y) + (y \cdot \neg x)$$

(*Kommutativität*)

$$= 0 + (y \cdot \neg x)$$

(*Annahme 2*)

$$= (x \cdot \neg x) + (y \cdot \neg x)$$

(*Korollar*)

$$= \neg x \cdot (x + y)$$

(*Kommutativität + Distributivität*)

$$= \neg x \cdot 1$$

(*Annahme 1*)

$$= \neg x$$

(*Neutrales Element*)

Aufgabe 1 III

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra

Lösung 1.1

$y = y + 0$	<i>(Neutrales Element)</i>
$= y + (x \cdot \neg x)$	<i>(Komplement)</i>
$= (y + x) \cdot (y + \neg x)$	<i>(Distributivität)</i>
$= (x + y) \cdot (y + \neg x)$	<i>(Kommutativität)</i>
$= 1 \cdot (y + \neg x)$	<i>(Annahme 1: $x + y = 1$)</i>
$= (x + \neg x) \cdot (y + \neg x)$	<i>(Neutrales Element der Konjunktion)</i>
$= (\neg x + x) \cdot (\neg x + y)$	<i>(Assoziativität)</i>
$= \neg x + (x \cdot y)$	<i>(Distributivität)</i>
$= \neg x + 0$	<i>(Annahme 2: $x \cdot y = 0$)</i>
$= \neg x$	<i>(Neutrale Element der Disjunktion)</i>

Aufgabe 1 IV

Eindeutigkeit des Komplements, Boolesche Algebra

Lösung 1.1



$$\begin{aligned}
 (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) &= (x \cdot y) + ((x \cdot y) \cdot z) + ((\neg x \cdot z) + ((\neg x \cdot z) \cdot y)) && \text{(Absorption)} \\
 &= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + ((x \cdot y) \cdot z) + ((\neg x \cdot z) \cdot y) && \text{(Kommutativität)} \\
 &= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + (x \cdot (y \cdot z)) + (\neg x \cdot (z \cdot y)) && \text{(Assoziativität)} \\
 &= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + (x \cdot (y \cdot z)) + (\neg x \cdot (y \cdot z)) && \text{(Kommutativität)} \\
 &= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + ((x + \neg x) \cdot (y \cdot z)) && \text{(Kommutativität + Distributivität)} \\
 &= (x \cdot y) + (\neg x \cdot z) + (y \cdot z) && \text{(Kommutativität + Komplement)}
 \end{aligned}$$

Anmerkungen 🔍

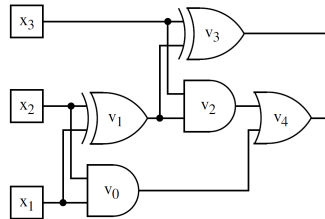
- ▶ Der zweite Teil geht analog durch Verweisen auf das Dualitätsprinzip oder durchrechnen mit genau derselben Axiomanwendung in genau derselben Reihenfolge

Aufgabe 2

Aufgabe 2 I

Formale Beschreibung von Schaltkreisen

Lösung 2.1



Aufgabe 2 II

Formale Beschreibung von Schaltkreisen

Lösung 2.2

<i>Gatterausgang</i>	<i>Funktion</i>
v_0	$x_1 \wedge x_2$
v_1	$x_1 \oplus x_2$
v_2	$(x_1 \oplus x_2) \wedge x_3$
v_3	$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$
v_4	$(x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \oplus x_2) \wedge x_3)$

Lösung 2.3

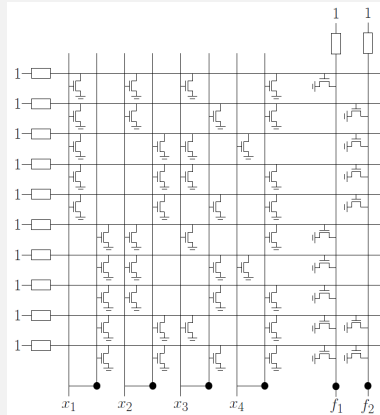
$\text{depth}(C) = 3$, über den Pfad v_1, v_2, v_4

Aufgabe 3

Aufgabe 3 I

Programmable Logic Arrays

Voraussetzungen 3.1



Aufgabe 3 II

Programmable Logic Arrays

Aufgabe 3.1

Gesucht sind die beiden Polynome $f_1, f_2 \in \mathbb{B}_4$, die durch dieses PLA implementiert werden

Lösung 3.1

$$f_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$f_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

Aufgabe 3.2

Kosten des PLA

Aufgabe 3 III

Programmable Logic Arrays

Lösung 3.2

Primäre Kosten $\text{cost}_1(f_1, f_2) = 10$ (Zeilen des PLA bzw. Anzahl der Monome)

Sekundäre Kosten $\text{cost}_2(f_1, f_2) = 52$ (Zahl der Transistoren im PLA)

Aufgabe 3.3

Hypercubes von f_1 und f_2 zeichnen

Aufgabe 3 IV

Programmable Logic Arrays

Lösung 3.3

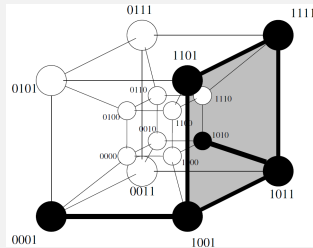


Abbildung 1: Funktion f_1

Aufgabe 3 V

Programmable Logic Arrays

Lösung 3.3

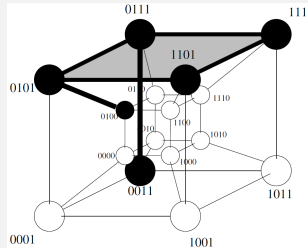


Abbildung 2: Funktion f_2

Appendix

Appendix I

Kleine Korollare

$$\begin{aligned}x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 \\&= (x + 1) \cdot (x + \neg x) \\&= x + (1 \cdot \neg x) \\&= x + \neg x \\&= 1\end{aligned}$$

Neutrales Element der Konjunktion

Komplement

Distributivität

Neutrales Element der Konjunktion

Komplement

Appendix II

Kleine Korollare

$$\begin{aligned}x \cdot 0 &= (x \cdot 0) + 0 \\&= (x \cdot 0) + (x \cdot \neg x) \\&= x \cdot (0 + \neg x) \\&= x \cdot \neg x \\&= 0\end{aligned}$$

Neutrales Element der Disjunktion

Komplement

Distributivität

Neutrale Element der Disjunktion

Komplement

Appendix III

Kleine Korollare

$$y \cdot y = y \cdot y + 0$$

$$= y \cdot y + y \cdot \neg y$$

$$= (y + \neg y) \cdot y$$

$$= 1 \cdot y$$

$$= y$$

Neutrales Element

Komplement

Distributivität

Komplement

Neutrales Element