Маршрут II № 5

Работу выполнил
Просвирин Кирилл, 712гр.

24 октября 2017
31 октября 2017

Лабораторная работа № 1.2.4
Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Цель работы: измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

В работе используется: установка для получения крутильных колебаний (жесткая рамка, имеющая винты для закрепления в ней твердых тел, подвешенная на натянутой вертикально проволоке), набор исследуемых твердых тел, секундомер.

1 Теория и метод измерений

Крутильный маятник представляет собой массивное тело, подвешенное на тонкой упругой струне. При повроте маятника из положения равновесия на некоторый угол φ на него со стороны нити действет «упругий момент»

$$M_{\text{упр}} = -f\varphi, \tag{1}$$

пропорциональный углу поворота φ. f — постоянная, характеризующая момент упругих сил.

Движние маятника описывается уравнением моментов:

$$I_M\ddot{\varphi} = I_M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f\varphi, \tag{2}$$

где момент инерции маятника I_M равен сумме момента инерции пустой рамки I_P и момента инерции исследуемого тела I:

$$I_M = I + I_P \tag{3}$$

Из (2) собственная частота колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{I_M}} \tag{4}$$

Подставляя ω_0 из (4) находим период крутильных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_P}{f}} \tag{5}$$

На рис. 1 показано, как про ят оси вращения в параллелепипеде. Оси AA', BB', CC' являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответсвенно I_x, I_y, I_z.

Момент инерции I_d при вращении относительно диагонали DD' выражается через главные моменты следущим образом:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2}, \qquad (6)$$

где длина диагонали $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Отсюда получаем соотношение

$$(a^2 + b^2 + c^2) I_d = a^2 I_x + b^2 I_y + c^2 I_z. \qquad (7)$$

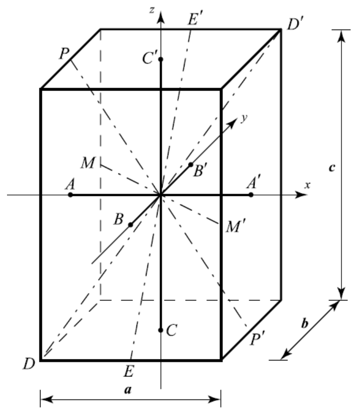

Рис. 1: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний (5), получаем соотношение между периодами колебаний

$$(a^2 + b^2 + c^2) T_d^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2. \qquad (8)$$
$$(b^2 + c^2) T_d^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2. \qquad (9)$$
$$(a^2 + c^2) T_d^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2. \qquad (10)$$
$$(a^2 + b^2) T_d^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2. \qquad (11)$$

2 Экспериментальная установка

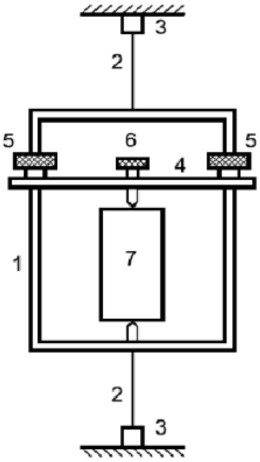

Рис. 2: Схема установки

Оборудование:

1. Рамка
2. Провалока
3. Зажимы для проволоки
4. Планка
5. Гайка
6. Винт
7. Твердое тело

Описание установки. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7.

3 Ход работы

1. Для пустой рамки и всех тел при различных их положениях отсительно оси колебаний определим период колебаний по времени 10-15 колебаний, повторяя каждое измерение не менее 3 раз

2. Штангенциркулем измерим геометрические размеры параллепипеда. Вычислим главные моменты инерции. По полученным ранее данным проверим справедливость формул.

3. Проведем аналогичные измерения для куба и убедимся в равенстве всех центральных моментов инерции.

4 Проведение измерений

1. С помощью штангенциркуля измерим размеры параллепипеда и куба. После серий измерений длины стороны таковы

   (a) Для параллелепипеда
   $a = 10{,}00 \pm 0{,}01$см
   $b = 5{,}00 \pm 0{,}01$см
   $c = 15{,}00 \pm 0{,}01$см

   (b) Для куба
   $a_{\text{к}} = 10 \pm 0{,}01$см

2. Найдем период колебаний пустой рамки. Будем считать время 10 колебаний.

№	Период T_{10}, c	Амплитуда A, α	Изменение амплитуды $\Delta\alpha$
1	44,96	20°	1
2	44,86	30°	2
3	45,09	35°	4

Таблица 1: Период колебаний пустой рамки за $T = 10c$

Затухания незначительные ($\approx 12\%$).

3. Найдем погрешности периода колебаний $\sigma_{\text{сл}}$ и $\sigma_{\text{сист}}$ соотвественно

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{D}{N-1}} = \sqrt{\frac{0{,}0012}{2}} = 0{,}024c.$$

$$\sigma_{\text{сист}} = 0{,}01c.$$

Находим полную погрешность измерения

$$\sigma_{T_{\text{рамки}}} = \sqrt{\sigma_{\text{сл}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} = 0{,}027c.$$

Окончательно, период крутильных колебаний пустой рамки равен

$$T_{\text{рамки}} = \left(\overline{T} \pm \sigma_T\right) = (4{,}53 \pm 0{,}027)c.$$

4. Найдем период кручения вместе с рамкой для главных осей параллелепипеда и для побочных.

№	AA' T'_{10}	BB' T'_{10}	CC' T'_{10}	DD' T'_{10}	EE' T'_{10}	PP' T'_{10}	MM' T'_{10}
1	64,41	69,27	55,11	59,15	56,63	58,15	65,33
2	64,32	69,53	55,33	59,18	56,9	58,23	65,24
3	64,05	68,75	55,45	59,36	56,68	58,19	65,27

Таблица 2: Период крутильных колебаний для параллелепипеда

Окончательно, периоды крутильных колебаний параллелепипеда вместе с пустой рамкой равны

$$T'_X = (6{,}43 \pm 0{,}02)c.$$
$$T'_Y = (6{,}95 \pm 0{,}02)c.$$
$$T'_Z = (5{,}53 \pm 0{,}02)c.$$
$$T'_D = (5{,}92 \pm 0{,}02)c.$$
$$T'_E = (5{,}67 \pm 0{,}02)c.$$
$$T'_P = (5{,}82 \pm 0{,}02)c.$$
$$T'_M = (6{,}53 \pm 0{,}02)c.$$

5. Период крутильных колебаний для пустой рамки может быть найден как

$$T_{\text{P}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{P}}}{f}}, \tag{12}$$

Тогда из (5) и (12) находим периоды колебаний для каждой оси

$$T_X = \sqrt{(T'_X)^2 - T^2_{\text{рамки}}} = \sqrt{6{,}43^2 - 4{,}53^2} = 4{,}59c.$$
$$T_Y = \sqrt{(T'_Y)^2 - T^2_{\text{рамки}}} = \sqrt{6{,}95^2 - 4{,}53^2} = 5{,}30c.$$
$$T_Z = \sqrt{(T'_Z)^2 - T^2_{\text{рамки}}} = \sqrt{5{,}53^2 - 4{,}53^2} = 3{,}21c.$$
$$T_D = \sqrt{(T'_D)^2 - T^2_{\text{рамки}}} = \sqrt{5{,}92^2 - 4{,}53^2} = 3{,}85c.$$
$$T_E = \sqrt{(T'_E)^2 - T^2_{\text{рамки}}} = \sqrt{5{,}67^2 - 4{,}53^2} = 3{,}45c.$$
$$T_P = \sqrt{(T'_P)^2 - T^2_{\text{рамки}}} = \sqrt{5{,}82^2 - 4{,}53^2} = 3{,}69c.$$
$$T_M = \sqrt{(T'_M)^2 - T^2_{\text{рамки}}} = \sqrt{6{,}53^2 - 4{,}53^2} = 4{,}73c.$$

Погрешность T будем считать по формуле погрешности косвенных измерений

$$\sigma_T = T\sqrt{\left(\frac{\sigma_{T'}}{T'}\right) + \left(\frac{\sigma_{T_{\text{p}}}}{T_{\text{p}}}\right)}. \tag{13}$$

Окончательно, периоды крутильных колебаний параллелепипеда равны

$$T_X = (4{,}59 \pm 0{,}02)c. \tag{14}$$
$$T_Y = (5{,}30 \pm 0{,}02)c. \tag{15}$$
$$T_Z = (3{,}21 \pm 0{,}02)c. \tag{16}$$
$$T_D = (3{,}85 \pm 0{,}02)c. \tag{17}$$
$$T_E = (3{,}45 \pm 0{,}02)c. \tag{18}$$
$$T_P = (3{,}69 \pm 0{,}02)c. \tag{19}$$
$$T_M = (4{,}73 \pm 0{,}02)c \tag{20}$$

6. Нам нужно сравнить теоретическое и эксперементальное значения периодов. Найдем теоретически.

$$T_D = \sqrt{\frac{a^2T_X^2 + b^2T_Y^2 + c^2T_Z^2}{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{2106{,}81 + 702{,}25 + 2318{,}42}{100 + 25 + 225}} \approx 3{,}83c$$

$$T_E = \sqrt{\frac{b^2T_Y^2 + c^2T_Z^2}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{702{,}25 + 2318{,}42}{25 + 225}} \approx 3{,}48c$$

$$T_P = \sqrt{\frac{a^2T_X^2 + c^2T_Z^2}{a^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{2106{,}81 + 2318{,}42}{100 + 225}} \approx 3{,}69c$$

$$T_M = \sqrt{\frac{a^2T_X^2 + b^2T_Y^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{2106{,}81 + 702{,}25}{100 + 25}} \approx 4{,}74c$$

Видим, что эти значения лежат в облости определения значений (17) — (20). Т.е. получили, что с учетом погрешностей эксперементально и теоретически полученные значения равны, а значит формулы (8) — (11) верны.

7. Проделаем тоже самое для куба и для диска.

	T'_{10}, c	T'_{10}, c	T'_{10}, c	$\overline{T}_{10}, c$	T, c
Главная ось	53,05	53,21	53,03	53,1	5,31
Через середины противоположных ребер	52,84	52,99	52,91	52,91	5,29
Главная диагональ	52,95	52,89	53,01	52,95	5,3

$T_1 = 5{,}31 \pm 0{,}02c$
$T_2 = 5{,}29 \pm 0{,}02c$
$T_3 = 5{,}30 \pm 0{,}02c$

Таблица 3: Период крутильных колебаний для куба

Как и ожидалось, периоды кручения куба (а значит и моменты инерции) будут одинаковыми для всех центральных осей.

	T'_{10}, c	T'_{10}, c	T'_{10}, c	$\overline{T}_{10}, c$	T, c
OX	59.66	59.60	1:00	59,75	5,98
OY	52,81	52,78	52.65	52,75	5,27

$T_1 = 5{,}98 \pm 0{,}02c$
$T_3 = 5{,}27 \pm 0{,}02c$

Таблица 4: Период крутильных колебаний для диска

8. Нарисуем сечения эллипсоида инерции главными плоскостями. Для этого необходимо вдоль выбранно оси, проходящей через центр эллипсоида, провести радиус-вектор $\vec{r}$ до пересечения с поверхностью эллипсоида. Длина r будет определять момент инерции тела относительно оси:

$$I = \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{I}}. \tag{21}$$

Учитывая данный факт и то, что $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}$ находим, что

$$r \propto \frac{1}{T} \tag{22}$$

Плоскость (Oxy) : $\begin{cases} r_X \propto \dfrac{1}{T} = 21{,}8 \pm 0{,}2 \\ r_X \propto \dfrac{1}{T} = 18{,}9 \pm 0{,}1 \end{cases}$, где $\sigma_r = \left|\dfrac{\partial r}{\partial T}\right| \sigma_T$

Для остальных плоскостей находим аналогично:

$$r_Z \propto \frac{1}{T_Z} = 31{,}2 \pm 0{,}3$$
$$r_D \propto \frac{1}{T_D} = 26{,}0 \pm 0{,}3$$
$$r_E \propto \frac{1}{T_E} = 29{,}0 \pm 0{,}4$$
$$r_P \propto \frac{1}{T_P} = 27{,}1 \pm 0{,}3$$
$$r_M \propto \frac{1}{T_M} = 21{,}1 \pm 0{,}2$$

Построим сечения эллипсоида инерции главными плоскостями.

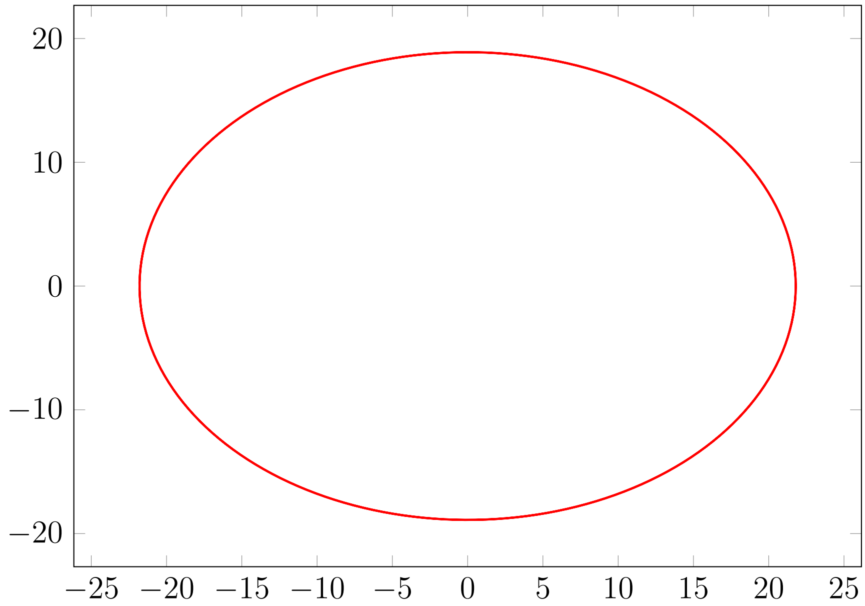

Рис. 3: Плоскоть Oxy

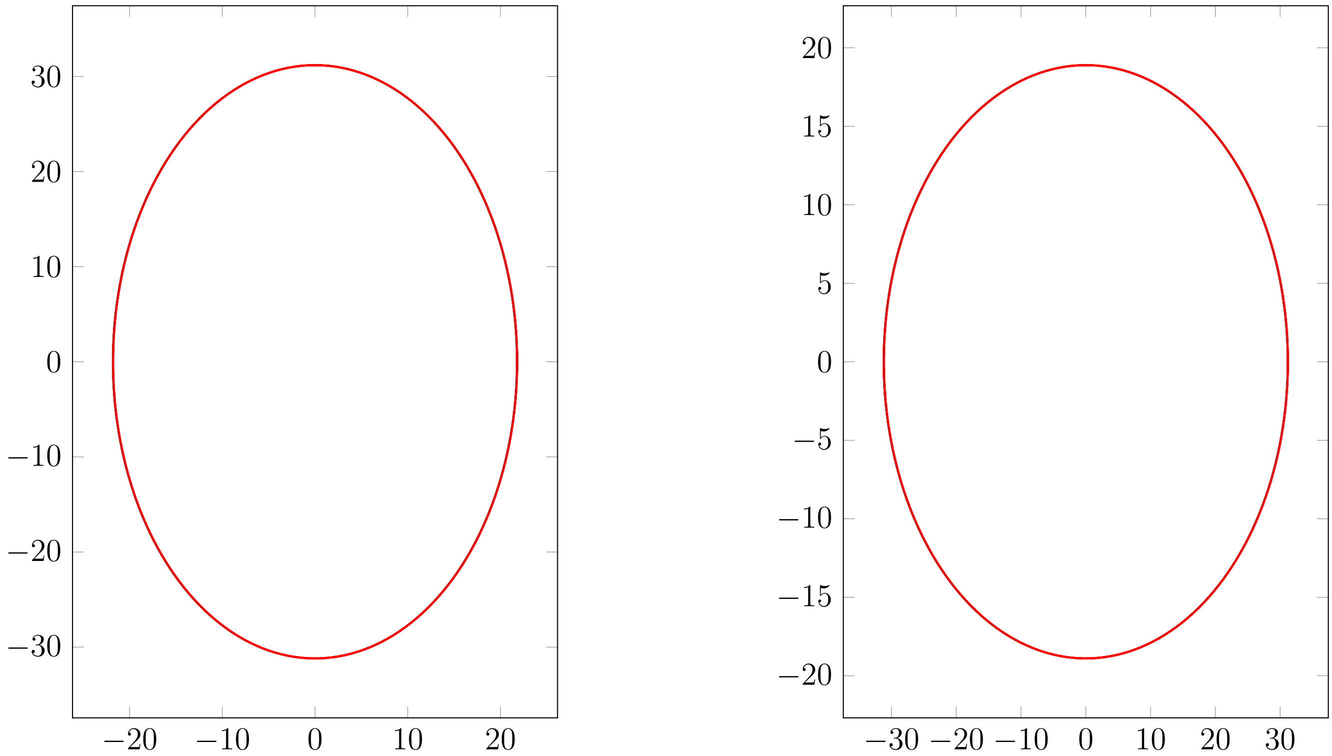

Рис. 4: Плоскости Oxz и Oyz

9. **Вывод.** Мы сравнили теоретичесие и эксперементальные значения периодов кручения тела. В пределах погрешностей они оказались равными, а значит формулы (8) — (11) оказались верны.

   Периоды кручения куба относительно центральных осей оказались равными, а значит и их моменты инерции относительно центральных осей также равны.