

Работу выполнил
Просвирин Кирилл, 712гр.

07 октября 2017
14 октября 2017

Лабораторная работа № 1.2.5

Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

В работе используется: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

Теоретическая справка

Момент сил, который необходимо приложить к маховику для того, чтобы вызвать вращение оси маховика с угловой скоростью $\vec{\Omega}$, определяется формулой

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (1)$$

Для изучения регулярной прецессии гироскопа будем подвешивать к его оси дополнительные грузы. Это сместит общий центр масс и создаст момент сил тяжести, вызывающий прецессию. Скорость прецессии в этом случае равна

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (2)$$

где m — масса груза, l — расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (рис. 1).

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}} \quad (3)$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого можно легко вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (4)$$

здесь $T_{\text{ц}}$ — период крутильных колебаний цилиндра.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка для исследования прецессии уравновешенного гироскопа показана на рис. 1. Ротором гироскопа является ротор высокооборотного электромотора М. Кожух мотора скреплен с кольцом Б. Мотор с кольцом могут вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси bb , которое может вращаться вокруг вертикальной оси aa . Рычак С направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы Г, с помощью которых можно менять силу F , момент которой определяется расстоянием l от точки подвеса до горизонтальной оси кольца А.

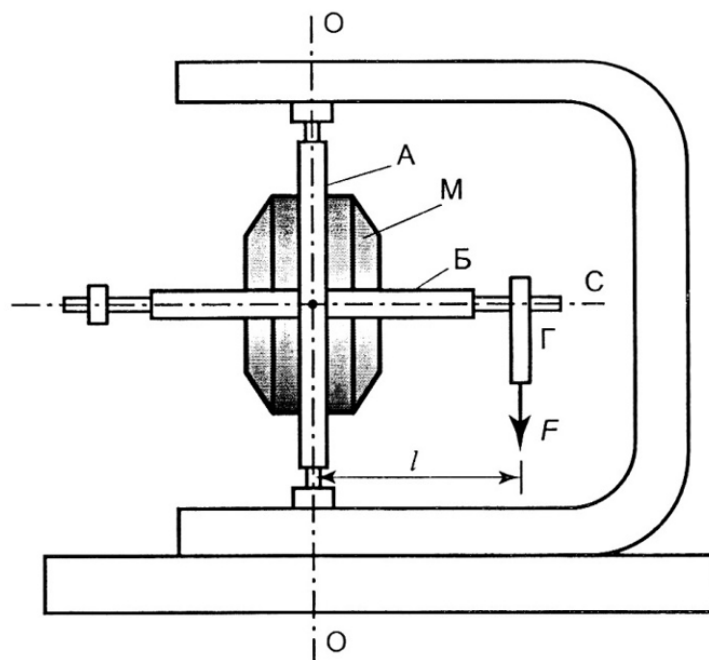


Рис. 1: Схема установки

Ход работы

1. Определим в какую сторону вращается ротор.
2. Подвесим на рычаг груз и отклоним его на $5 - 10$ градусов и с помощью секундомера найдем угловую скорость регулярной прецессии Ω . Также измерим скорость опускания рычага.
3. Проведем серию измерений, описанных в предыдущем пункте при $5 - 7$ значениях момента M и силы F относительно центра масс гироскопа. Построим график зависимости Ω от M .
4. Измерим момент инерции ротора гироскопа относительно оси симметрии методом крутильных колебаний. Оценим погрешности I_0 и Ω .
5. Определим частоту вращения ротора гироскопа по фигурам Лиссажу.

Проведение измерений

1. При легком постукивании по рычагу положение гироскопа в пространстве не изменяется. Это означает, что модуль вектора момента импульса вследствие вращения вокруг своей оси достаточно велик, и малый момент сил не приводит к отклонению этого вектора на сколь-нибудь значимый угол.
2. Воздействуя на рычаг гироскопа, расположим его горизонтально, перпендикулярно лучу зрения. Подвесим груз к рычагу справа. При этом начинается медленное вращение гироскопа против часовой стрелки, если смотреть сверху. Другими словами, вектор угловой скорости прецессии $\vec{\Omega}$ направлен вверх, а вектор \vec{M} направлен от экспериментатора (рис. 2). Тогда из (1) следует, что вектор \vec{L} направлен вправо. Таким образом, по направлению прецессии удалось определить направление вращения ротора.

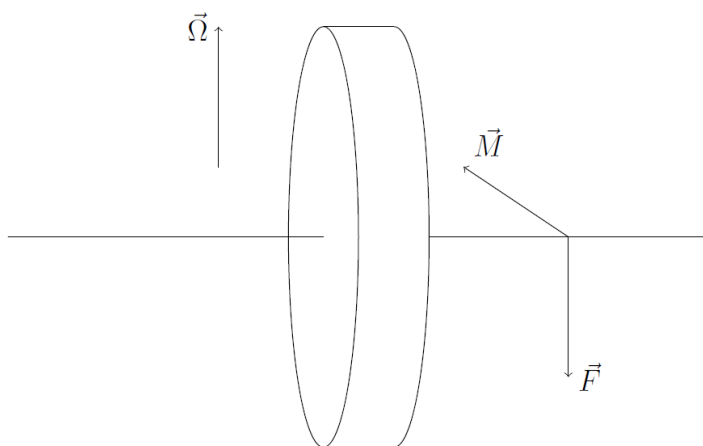


Рис. 2: Направление векторов \vec{M} , \vec{L} , $\vec{\Omega}$

3. Отклоним рычаг на $5 - 10$ градусов вверх от горизонтальной плоскости. Подвесим груз и дождемся момента времени, когда он опустится на $5 - 10$ градусов ниже горизонтальной плоскости, сделав целое число оборотов N . При этом будем измерять время, в течение которого происходит прецессия. По времени оборота T можно получить угловую скорость прецессии $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. По массе груза m и расстоянию от точки подвеса груза до центра масс гироскопа $l = (120 \pm 1)$ мм определим момент силы, действующей на ротор: $M = mgl$. Проведем измерения для нескольких значений масс m . Результаты занесем в таблицу 1.

NT, c	227,13	169,32	270,36	214,46	177,26	139,90	113,64	91,61	74,69
N	1	1	2	2	2	2	2	2	2
$\Omega, 10^{-4} \text{ рад/с}$	276,62	371,07	464,79	585,94	708,90	898,21	1105,77	1371,68	1682,42
$\Delta\Omega, 10^{-4} \text{ рад/с}$	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	1,6
$m, \text{ г}$	57	74	93	116	142	180	219	273	335
$M, 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$	67,1	87,1	109,5	136,6	167,2	211,9	257,9	321,5	394,5
$\Delta M, 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$	1,2	1,5	1,9	2,4	2,9	3,7	4,5	5,5	6,8

Таблица 1: Измерения периода для грузов различных масс

4. По таблице 1 построим график зависимости $\Omega(M)$ (рис. 3). Поскольку $M = \Omega L$, то угловой коэффициент на график $1/L$. Его можно вычислить методом наименьших квадратов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \right\rangle = \frac{\langle M\Omega \rangle}{\langle M^2 \rangle} \approx 0,428 \frac{\text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$$

$$\Delta \left(\frac{1}{L} \right) = \frac{1}{\sqrt{9}} \sqrt{\frac{\langle \Omega^2 \rangle}{\langle M^2 \rangle} - \left\langle \frac{1}{L} \right\rangle^2} \approx 0,0006 \frac{\text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$$

$$L = (2,336 \pm 0,003) \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$$

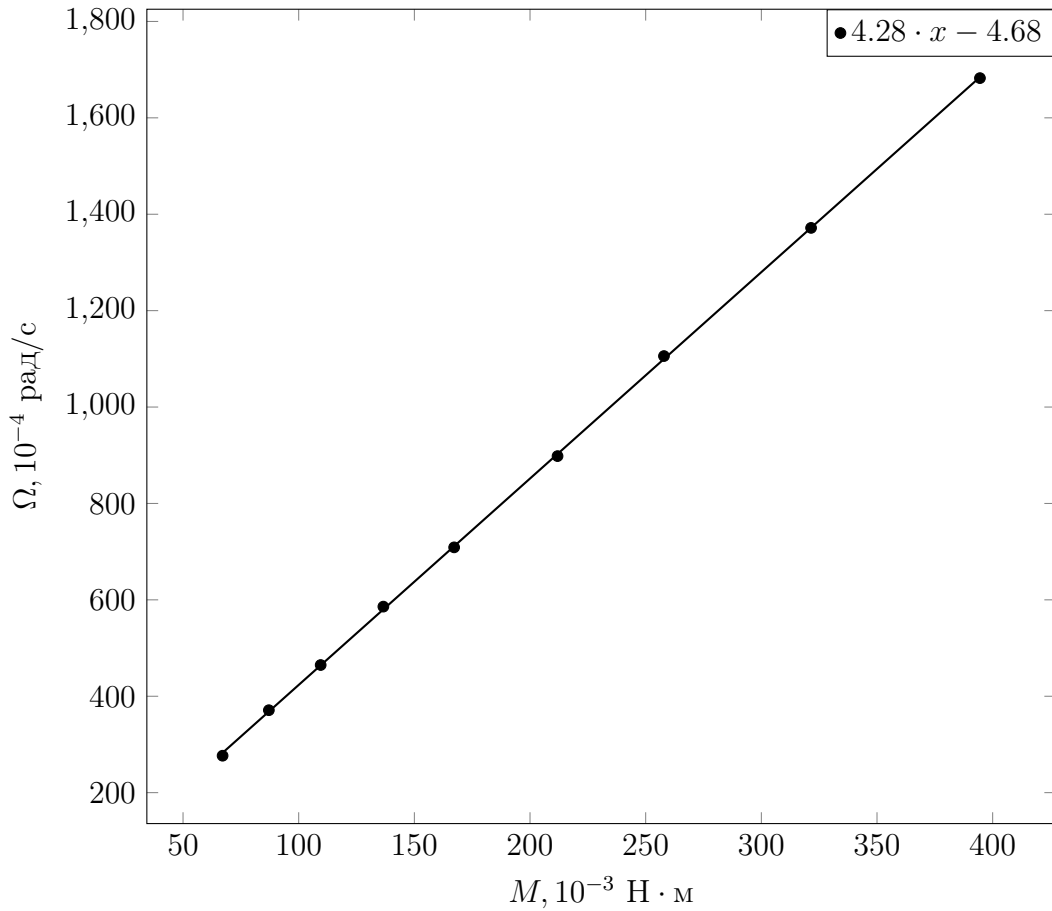


Рис. 3: График зависимости $\Omega(M)$

В свою очередь, $L = I_0\omega_0$, где I_0 — момент инерции ротора относительно оси симметрии, ω_0 — угловая скорость вращения вокруг своей оси.

5. Для измерения момента инерции воспользуемся крутильными колебаниями. Проведем измерения для ротора и для цилиндра. Будем считать время 10 колебаний. Результаты занесем в таблицу 2.

Из формулы (3) следует, что $T_0 \sim \sqrt{I_0}$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\frac{T_0}{T_c} = \sqrt{\frac{I_0}{I_c}} \Rightarrow I_0 = I_c \frac{T_0^2}{T_c^2} \quad (5)$$

№	T_c	T_0	$\langle T_c \rangle$	$\langle T_0 \rangle$
1	40,78	32,29	40,79	32,39
2	40,69	32,33		
3	40,90	32,55		

Таблица 2: Период колебаний ротора и цилиндра за $T = 10$ с

Момент инерции цилиндра определяется по его массе $m_c = (1618,4 \pm 0,5)$ г и диаметру $d_c = (7,7 \pm 0,01)$ см):

$$I_c = \frac{1}{2} m_c \left(\frac{d_c}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} m_c d_c^2 \quad (6)$$

Тогда из (5) и (6) имеем формулу для момента инерции ротора:

$$I_0 = \frac{m_c d_c^2 T_0^2}{8 T_c^2} = (0,796 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (7)$$

Окончательно частота вращения гироскопа:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{L}{2\pi I_0} = (457 \pm 6) \text{ Гц} \quad (8)$$

- Используем намагниченность ротора электромотора, чтобы измерить частоту вращения гироскопа. Для этого на один вход осциллографа подадим переменное напряжение регулируемой частоты, а на другой вход — ЭДС индукции, наводимую в «отключенной» обмотке статора гироскопа. При совпадении частот на экране изобразится эллипс. Получаем значение $(472,3 \pm 0,5)$.

Вывод

- Первый метод привел к результату, который занижен на 3% по сравнению с тем значением, которое получается измерением частоты ЭДС индукции. Вторым способом будем считать более достоверным вследствие того, что он предполагает лишь одно прямое измерение. Расхождение не укладывается в пределы погрешностей, попытаемся найти причину такой ошибки. Вероятно, она вызывается моментом сил трения в горизонтальной оси. Действительно, поскольку рычаг гироскопа опускается, то происходит вращение вокруг горизонтальной оси. Значит, будет существовать момент сил трения. Чтобы сделать оценку, приравняем его к моменту сил трения в вертикальной оси.

Трение в вертикальной оси приводит к прецессии вокруг горизонтальной оси. За время проведения каждого из экспериментов, отраженных в таблице 1, рычаг гироскопа опускался примерно на 10° . Используя величину продолжительности измерений, получаем угловую скорость прецессии $\Omega_{\text{пр}} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ рад/с (это значение можно рассматривать лишь по порядку величины, поскольку погрешность измерения угла составляет 5°). Тогда момент сил трения равен

$$M_{\text{тр}} = \Omega_{\text{пр}} L \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Это составляет около 1% от момента силы со стороны груза.

8. В качестве дополнения приведем график зависимости f от времени t , которое прошло с момента выключения гироскопа (рис. 4). На достаточно большом промежутке график хорошо приближается к прямой с угловым коэффициентом около $-0,3 \text{ Гц}^2$. Оценим момент сил трения в оси гироскопа:

$$M_\omega = I_0 |\dot{\omega}| = 2\pi I_0 |\dot{f}| \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Если же рассматривать самое начало временного промежутка, то угловой коэффициент можно грубо оценить по двум точкам, то есть $\approx -0,9 \text{ Гц}^2$. В итоге получаем момент сил, в 3 раза больший, чем «установившийся»: $4,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

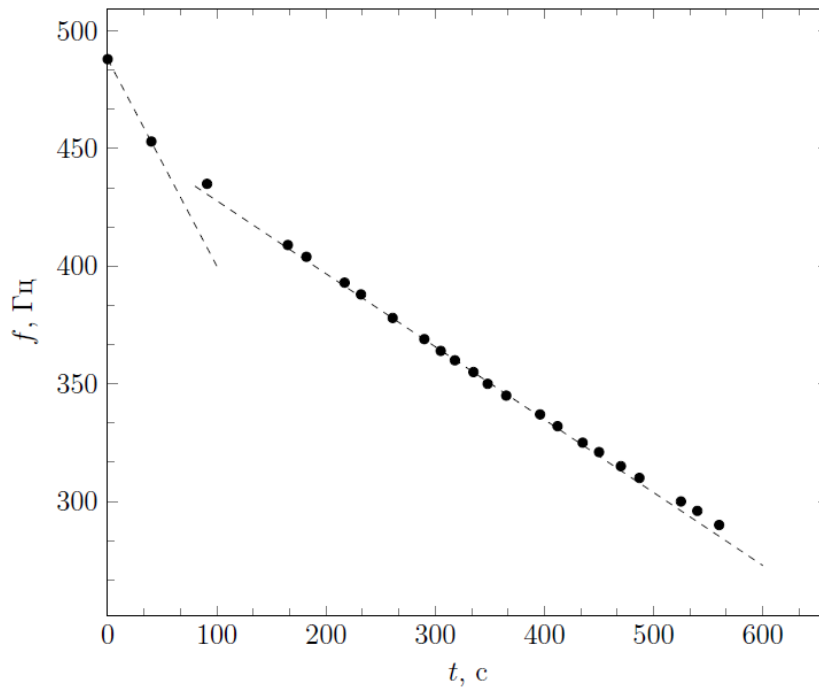


Рис. 4: График зависимости $f(t)$