

Работу выполнил
Просвирин Кирилл, 712гр.

13 октября 2017
19 октября 2017

Лабораторная работа № 1.4.5

Изучение колебаний струны

Цель работы: изучение поперечных стоячих волн на струне; определение собственных частот колебаний струны; исследование зависимости скорости распространения поперечных волн на струне в зависимости от ее натяжения.

В работе используется: закрепленная на станине стальная струнаб, набор грузов, элкетромагнитные датчики, звуковой генератор, двухканальный осциллограф, частото-метр.

1 Теоретическая справка

Волны на струне

Уравнение свободных малых поперечных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Уравнение (1) называют *волновым уравнением*. Кроме волн на струне, оно может описывать волновые процессы в самых разных системах, в том числе волны в сплошных средах, электромагнитные и т.д.

Бегущие волны

Общее решение дифференциального уравнения в частных производных (1) представимо в виде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями $\pm u$:

$$y(x, t) = y_1(x - ut) + y_2(x + ut), \quad (2)$$

где $u = \frac{T}{\rho_l}$ — скорость распространения волны. Заметим, что скорость u распространения поперечных волн на струне зависит только от силы натяжения струны T и ее погонной плотности ρ_l .

Для гармонических волн:

$$y(x, t) = a \cos(\omega t - kx) + b \cos(\omega t + kx). \quad (3)$$

Собственные колебания струны. Стоячие волны

Собственные колебания струны с *закрепленными концами*. Положив $x = 0$ и $x = L$, используя (3) находим:

$$y(0, t) = a \cos \omega t + b \cos \omega t, \quad (4)$$

откуда следует, что $a = -b$. Тогда после тригонометрических преобразований выражение (4) примет вид:

$$y = (x, t) = 2a \sin kx \cdot \sin \omega t. \quad (5)$$

Колебания струны, описываемые функцией (5), называются *стоячими волнами*. Видно, что стоячая волна может быть получена как интерференция двух гармонических бегущих волн, имеющих равную амплитуду и движущихся навстречу друг другу.

Замечание: В точках, где $\sin kx = 1$, амплитуда колебаний максимальна — называются *пучностями*. Точки, в которых $\sin kx = 0$, неподвижны, называются *узлами*.

Из второго граничного условия $y = (L, t) = 0$ найдем условие образования стоячих волн на струне: $y = (x, t) = 2a \sin kL \cdot \sin \omega t = 0$, откуда

$$\sin kL = 0 \rightarrow k = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Таким образом, стоячие волны на струне с закрепленными концами могут быть образованы только если *на длине струны укладывается целое число полуволн*:

$$L = \frac{\lambda_n}{2} n. \quad (7)$$

Поскольку длина волны однозначно связана с ее частотой, струна может колебаться только с определенными частотами:

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho l}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

Набор (*спектр*) разрешенных частот ν_n называют *собственными частотами* колебаний струны. Наименьшая частота ν_1 называется также *основным тоном*, а остальные ($\nu_2 = 2\nu_1, \nu_3 = 3\nu_1, \dots$) — *обертонами*.

2 Экспериментальная установка

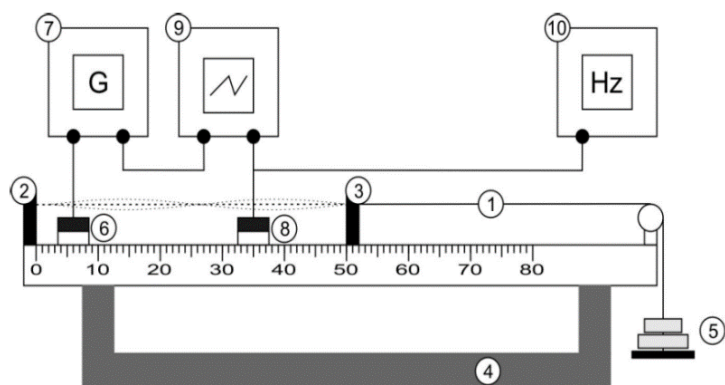


Рис. 1: Схема установки

Оборудование:

1. Струна
2. Стойка
3. Станина
4. Груз
5. Груз
6. Возбуждающий датчик
7. Генератор
8. Регистрирующий датчик
9. Осциллограф

3 Ход работы

1. Оценим скорость распространения волны по формуле $u = \frac{T}{\rho l}$. Расчитаем частоту основной гармоники.
2. Проведем частот не менее 5 *нечетных* ($n = 1, 3, 5, 7, 9$) гармоник стоячих волн. Для этого регистрирующий датчик разместим в центре под струной.
3. Измерим частоты *четных* ($n = 2, 4, \dots$) гармоник.
4. Проведем опыты 2 и 3 не менее, чем для пяти различных натяжений струны
5. Для каждого значения натяжения струны T построим график зависимости частоты от резонанса ν_n от n .
6. Построим график зависимости u^2 от T . По наклону прямой определим погонную плотность струны ρ_l .

4 Проведение измерений

1. Расчитаем частоту основной гармоники для груза $m_1 = 1018,6\text{г}$. Воспользуемся формулой (8):

$$\nu_1 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} = \frac{1}{2 \cdot 0,5\text{м}} \sqrt{\frac{1018,6 \cdot 10^{-3}\text{кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{568,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг}}{\text{м}}}} \approx 132,52\text{Гц}$$

2. Настроим струну примерно на основную гармонику, которую мы посчитали в 1 пункте: $\nu_1 \approx 132,52\text{Гц}$.

Настроим частоту генератора таким образом, чтобы амплитуда сигнала была максимальна. Запишем окончательное значение основной гармоники: $\nu_1 = 129,12\text{Гц}$

Замечание. Всю дальнейшую регистрацию стоячих волн будем осуществлять с помощью осциллографа.

3. Проведем измерение для нечетных гармоник для пяти различных натяжений струны. Получившиеся результаты запишем в таблицу 1.

Таблица 1: Результаты измерений для нечетных гармоник

	ν_1	ν_3	ν_5	ν_7	ν_9
T_1	100,58	306,49	512,49	726,79	942,79
T_2	129,12	401,57	642,58	944,58	1222,21
T_3	152,58	470,58	787,28	1106,13	1454,68
T_4	178,48	542,48	912,58	1280,68	1650,58
T_5	200,79	603,59	1003,37	1408,37	1810,37

$$T_1 = 5,57\text{Н}$$

$$T_2 = 9,98\text{Н}$$

$$T_3 = 14,83\text{Н}$$

$$T_4 = 19,66\text{Н}$$

$$T_5 = 24,39\text{Н}$$

4. Проведем измерение для четных гармоник для пяти различных натяжений струны.

Таблица 2: Результаты измерений для четных гармоник

	ν_2	ν_4	ν_6	ν_8
T_1	203,49	410,49	621,39	831,39
T_2	269,65	540,57	815,31	1087,08
T_4	320,28	643,08	966,38	1295,48
T_3	364,08	729,68	1098,18	1466,24
T_5	401,58	804,77	1207,17	1634,79

$$\begin{aligned} T_1 &= 5,57H \\ T_2 &= 9,98H \\ T_3 &= 14,83H \\ T_4 &= 19,66H \\ T_5 &= 24,39H \end{aligned}$$

5. Для каждого значения натяжения струны T построим график зависимости ν_n от n .

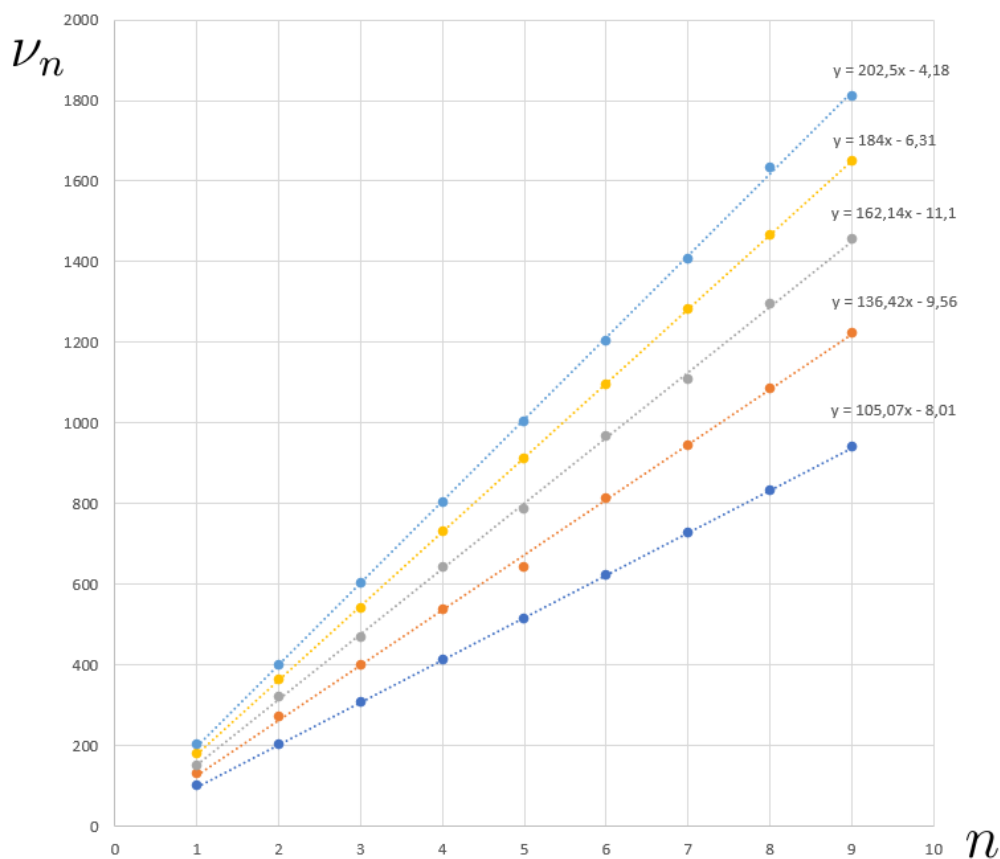


Рис. 2: График зависимости частоты ν_n от n

По наклону прямой с помощью формулы (8) определим скорость u волн при данном натяжении.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
u	105,7	136,42	162,14	184,1	202,5
u^2	11039,7049	18610,4164	26289,379	33856	41006,25

Таблица 3: Зависимость скорости волны в зависимости от натяжения

Погрешность σ_u будем считать по формуле:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2}, \quad \text{где } y = \nu_n, x = n$$

Тогда получим:

$$u(T_1) = (105,7 \pm 1,9) \text{ м/с}$$

$$u(T_2) = (136,4 \pm 2,5) \text{ м/с}$$

$$u(T_3) = (162,1 \pm 2,9) \text{ м/с}$$

$$u(T_4) = (184,1 \pm 3,3) \text{ м/с}$$

$$u(T_5) = (202,5 \pm 3,7) \text{ м/с}$$

6. Построим график зависимости u^2 от T . По наклону прямой определим погонную плотность струны ρ_l .

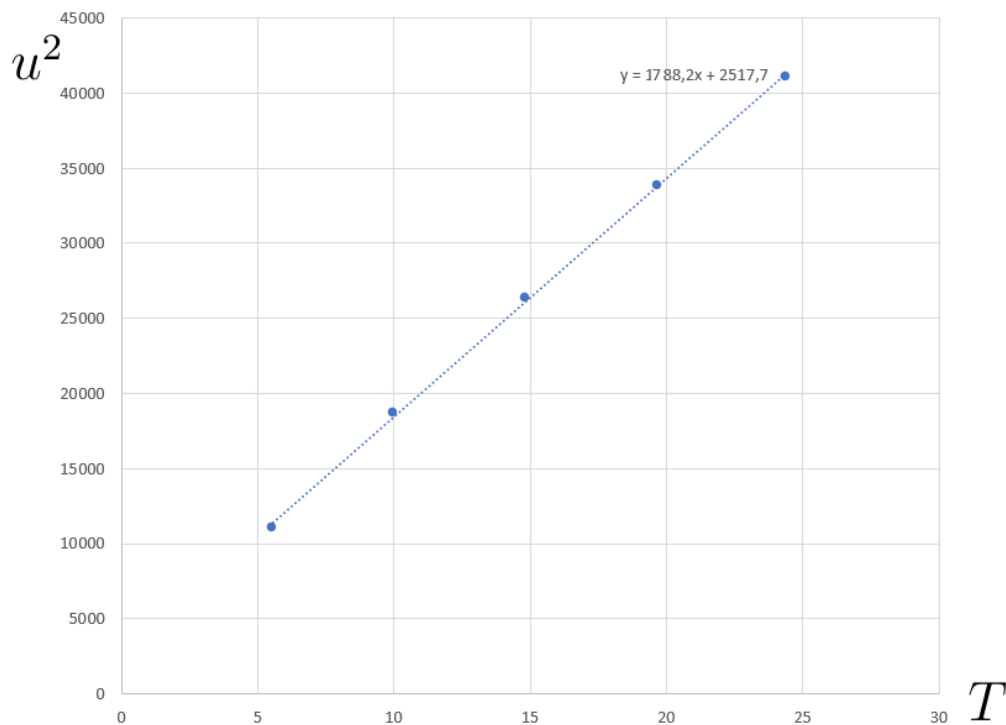


Рис. 3: График зависимости u^2 от T

По наклону прямой с помощью формулы $u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$ определим погонную плотность струны ρ_l .

$$\rho_l = \frac{1}{1588,2} \text{ кг/м} = 559,64 \text{ мг/м}$$

Погрешность погонной плотности будем также считать по формуле:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}},$$

где $y = u^2$, $x = T$

Тогда получим:

$$\rho_l = (559,64 \pm 16) \text{ мг/м}$$

Истинное значение ρ_l указанного на установке, попадает в область определения нашего ρ_l , к которое мы нашли экспериментальным путем.