Просвирин Кирилл
712 группа

Линейная алгебра

Задание 1. Неделя 1

15.45(2). Вычислить:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \implies$$

Ответ: $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

15.54(3). Вычислить:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{(2)-(1)\\(3)-(4)\\\cdots\\(n-1)-(n)}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

15.54(12*). Вычислить:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(n-1)-(n)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{(n-2)-(n-1)\\(n-3)-(n-4)\\\cdots\\(1)-(2)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

15.56. Пусть $A^m = O$. Доказать, что $(E-A)^{-1} = E + A + \dots + A^{m-1}$.

$\square$ По определению A^{-1} — обратная к $A \iff AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Докажем оба равенства.

1. $(E-A)(E+A+\dots+A^{m-1}) \stackrel{?}{=} E$. Раскрывая скобки получим

$$E + A + \dots + A^{m-1} - A - \dots - A^{m-1} = E \Longrightarrow \textbf{верно}$$

2. $(E+A+\dots+A^{m-1})(E-A) \stackrel{?}{=} E$. Раскрывая скобки получим

$$E - \underbrace{A + A} - \underbrace{A^2 + A^2} + \dots + \underbrace{A^{m-1} - A^{m-1}} - 0 = E \Longrightarrow \textbf{верно}$$

$\blacksquare$

15.58. Проверить формулу $(S^{-1}AS)^m = S^{-1}A^mS$.

$$(S^{-1}AS)^m = S^{-1}A\cancel{(S \cdot S^{-1})}AS \cdot \ldots \cdot S^{-1}AS = S^{-1}\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ раз}}S = S^{-1}A^mS.$$