

Производная.

Формулы и правила вычисления производных

Определение. Производной функции f в точке x_0 называется

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \overline{\mathbb{R}}$$

и обозначается $f'(x_0)$.

Теорема 1. Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 , то

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$.
3. Если дополнительно $g(x_0) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Теорема 2. (Производная сложной функции). Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $z = g(y)$ — в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $z = \varphi(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0 , причем

$$\varphi'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \quad (1)$$

Опуская аргумент и используя другое обозначение для производных, формулу (1) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}. \quad (2)$$

Пример. Вычислить производную функции $z = \sqrt{1 + x^2}$.

▲ Данная функция является композицией функций $y = 1 + x^2$ и $z = \sqrt{y}$, причем

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

По формуле (2) получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad \blacktriangle$$

Теорема 3. (Производная обратной функции). Пусть $\exists y'(x_0) \in \mathbb{R}$, $y'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = u(x_0)$, причем

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}. \quad (3)$$

Пример. Найти производную функции $y = \arcsin x$.

▲ Пользуясь формулой (3) и определением арксинуса получаем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \blacktriangle$$

Теорема 4. (Производные элементарных функций).

- | | |
|--|--|
| 1. $C' = 0$ ($C = \text{const}$); | 5. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$; |
| 2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$; | 6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; |
| 3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$; | 7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; |
| 4. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$; | 8. $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

Задачи для работы в классе

Вычислить производную функции $y = f(x)$. Указать область существования производной.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. | 4. $y = (x + 1) \operatorname{tg} x$. | 7. $y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$. |
| 2. $y = \frac{\ln 3}{x} + e^2$. | 5. $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. | 8. $y = (x^2 - 7x + 8)e^x$. |
| 3. $y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^4}$. | 6. $y = x \arcsin x$ | 9. $y = \log_x 2^x$ |
7. Снаряд вылетел с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. В какой момент скорость изменения высоты снаряда равна нулю.
 8. Количество электричества q (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника, изменяется по закону $q = 3t^2 + 2t$. Найти силу тока в конце пятой секунды.
 9. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот бы сделан за 8 с. Найти угловую скорость через 64 с после начала движения.
 10. Масса $m(t)$ радиоактивного вещества изменяется по закону $m = m_0 2^{(t_0-t)/T}$, где t — время, m_0 — масса в момент времени t_0 , T — период полураспада. Доказать, что скорость распада радиоактивного вещества. Найти коэффициент пропорциональности.
 11. Определить при каком соотношении сопротивлений, последовательно соединенных с источником питания, на них выделяется максимальная мощность.
 12. Свойства идеального газа описывается уравнением Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$. Определить максимальную температуру в процессе $(V_0, 3p_0) \rightarrow (3V_0, p_0)$.