Неопределенный интеграл.
Общие приемы и методы интегрирования

Определение. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и на (a,b) заданы функции $f(x)$ и $F(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на (a,b), если

$$\forall x \in (a,b) \hookrightarrow F'(x) = f(x).$$

Теорема 1. (О структуре множества первообразных.) Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (a,b). Тогда функция $F(x)_1$ является первообразной функции $f(x)$ на (a,b) в том и только в том случае, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in (a,b) \hookrightarrow F_1(x) = F(x) + C$.

Определение. *Неопределенным интегралом* $\displaystyle\int f(x)dx$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$.

Теорема 2. Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$. Тогда неопределенный интеграл функции $f(x)$ — это множество функций вида $F(x)+C$, где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная константа: $\int f(x)dx = \{F(x)+C : C \in \mathbb{R}\}$, что для краткости записывают в виде

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Замечание. Операция взятия дифференциала d и операция взятия неопределенного интеграла $\displaystyle\int$ являются взаимно обратными.

Теорема 3. (Свойства линейности неопределенного интеграла).Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на (a,b), $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, то на (a,b)

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx.$$

Теорема 4. (Метод интегрирования по частям.) Пусть на (a,b) заданы дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Тогда на (a,b)

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Теорема 5. (Формулы для основных неопределенных интегралов.)

1. $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq 1, x > 0;$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C, \quad x \neq -a;$
3. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1;$
4. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C;$
5. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C;$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0;$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad x \neq \pm a;$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \ x^2 > -a.$

Задачи для работы в классе

Вычислить производную функции $y = f(x)$. Указать область существования производной.

1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$, и ее неопределенный интеграл.

2. Для функции $f(x) = 1/x, x \in (-\infty, 0)$, найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(-2, 2)$.

3. Найти интеграл:

(a) $\displaystyle\int (x - 2e^x) dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 4x^2}.$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx.$

(e) $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2} dx.$

(f) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

(g) $\displaystyle\int 3^x \cdot 5^{2x} dx.$

(h) $\displaystyle\int (3x-5)^{10} dx.$

(i) $\displaystyle\int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx.$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx.$

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \cos^2 x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1 - x^{16}}}.$

(m) $\displaystyle\int \ln x dx.$

(n) $\displaystyle\int x \sin x dx.$

(o) $\displaystyle\int x^2 e^x dx.$

4. Частица массой m, движущиеся горизонтально, с начальной скоростью v_0 попадает на поверхность, где на нее действует сила вязкого трения $F = \alpha v$. Найти зависимость пройденного частицей пути от времени.

5. Тело начинает падать с высоты H под действием силы тяжести. В процессе падения оно испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Определить время падения.