

Неопределенный интеграл.

Общие приемы и методы интегрирования

Определение. Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и на (a, b) заданы функции $f(x)$ и $F(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на (a, b) , если

$$\forall x \in (a, b) \hookrightarrow F'(x) = f(x).$$

Теорема 1. (О структуре множества первообразных.) Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (a, b) . Тогда функция $F(x)_1$ является первообразной функции $f(x)$ на (a, b) в том и только в том случае, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in (a, b) \hookrightarrow F_1(x) = F(x) + C$.

Определение. *Неопределенным интегралом* $\int f(x)dx$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$.

Теорема 2. Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$. Тогда неопределенный интеграл функции $f(x)$ — это множество функций вида $F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная константа: $\int f(x)dx = F(x) + C : C \in \mathbb{R}$, что для краткости записывают в виде

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Замечание. Операция взятия дифференциала d и операция взятия неопределенного интеграла \int являются взаимно обратными.

Теорема 3. (Свойства линейности неопределенного интеграла). Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на (a, b) , $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, то на (a, b)

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx.$$

Теорема 4. (Метод интегрирования по частям.) Пусть на (a, b) заданы дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Тогда на (a, b)

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Теорема 5. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любой ее первообразной F имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Теорема 6. (Формулы для основных неопределенных интегралов.)

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, x > 0;$
2. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C, \quad x \neq -a;$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1;$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;$
7. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0;$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$
9. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad x \neq \pm a;$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C, \quad x^2 > -a.$

Задачи для работы в классе

Вычислить производную функции $y = f(x)$. Указать область существования производной.

1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x) = 1/\sqrt{x}, x \in (0, +\infty)$, и ее неопределенный интеграл.
2. Для функции $f(x) = 1/x, x \in (-\infty, 0)$, найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(-2, 2)$.
3. Найти интеграл:

- | | | |
|--|---------------------------------------|--|
| (a) $\int (x - 2e^x)dx.$ | (f) $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$ | (k) $\int \frac{dx}{2 + \cos^2 x}, \quad x < \frac{\pi}{2}.$ |
| (b) $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} dx.$ | (g) $\int 3^x \cdot 5^{2x} dx.$ | (l) $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1 - x^{16}}}.$ |
| (c) $\int \frac{dx}{x^4 + 4x^2}.$ | (h) $\int (3x - 5)^{10} dx.$ | (m) $\int \ln x dx.$ |
| (d) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 3\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^4 - 9}} dx.$ | (i) $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx.$ | (n) $\int x \sin x dx.$ |
| (e) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$ | (j) $\int \operatorname{tg} x dx.$ | (o) $\int x^2 e^x dx.$ |

4. Частица массой m , движущиеся горизонтально, с начальной скоростью v_0 попадает на поверхность, где на нее действует сила вязкого трения $F = \alpha v$. Найти зависимость пройденного частицей пути от времени.
5. Тело начинает падать с высоты H под действием силы тяжести. В процессе падения оно испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Определить время падения.