Производная.
Формулы и правила вычисления производных

Определение. *Производной* функции f в точке x_0 называется

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\in\overline{\mathbb{R}}$$

и обозначается $f'(x_0)$.

Теорема 1. Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то

1. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$;
2. $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$.
3. Если дополнительно $g(x_0)\neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Теорема 2. (Производная сложной функции). Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z=g(y)$ — в точке $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $z=\varphi(x)=g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$\varphi'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0). \tag{1}$$

Опуская аргумент и используя другое обозначение для производных, формулу (1) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Пример. Вычислить производную функции $z=\sqrt{1+x^2}$.
▲ Данная функция является композицией функций $y=1+x^2$ и $z=\sqrt{y}$, причем

$$\frac{dy}{dx}=2x\quad\text{и}\quad\frac{dz}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

По формуле (2) получаем

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{y}}2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\ \blacktriangle$$

Теорема 3. (Производная обратной функции). Пусть $\exists y'(x_0) \in \mathbb{R}$, $y'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = u(x_0)$, причем

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}. \tag{3}$$

Пример. Найти производную функции $y = \arcsin x$.
▲ Пользуясь формулой (3) и определением арксинуса получаем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \ ▲$$

Теорема 4. (Производные элементарных функций).

1. $C' = 0 \quad (C = const)$;
2. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0,\ x \in \mathbb{R}$;
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$;
4. $(x^\alpha)' = ax^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$;
5. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
8. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Задачи для работы в классе

Вычислить производную функции $y = f(x)$. Указать область существования производной.

1. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$
2. $y = \dfrac{\ln 3}{x} + e^2.$
3. $y = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x^3} + \dfrac{c}{x^4}.$
4. $y = (x+1)\operatorname{tg} x.$
5. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}.$
6. $y = x \arcsin x$
7. $y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}.$
8. $y = (x^2 - 7x + 8)e^x.$
9. $y = \log_x 2^x$

7. Снаряд вылетел с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. В какой момент скорость изменения высоты снаряда равна нулю.

8. Количество электричества q (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника, изменяется по закону $q = 3t^2 + 2t$. Найти силу тока в конце пятой секунды.

9. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот бы сделан за 8 с. Найти угловую скорость через 64 с после начала движения.

10. Масса $m(t)$ радиоактивного вещества изменяется по закону $m = m_0 2^{(t_0-t)/T}$, где t — время, m_0 — масса в момент времени t_0, T — период полураспада. Доказать, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству вещества. Найти коэффициент пропорциональности.

11. Определить при каком соотношении сопротивлений, последовательно соединенных с источником питания, на них выделяется максимальная мощность.

12. Свойства идеального газа описывается уравнением Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$. Определить максимальную температуру в процессе $(V_0, 3p_0) \to (3V_0, p_0)$.