МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Программа экзамена

Государственный экзамен по математике

Выполнил работу: Никита Мокров

Долгопрудный, 2017г.

Содержание

Введение

В данном документе собран материал для подготовки к государственному экзамену по математике в МФТИ. Курс математического анализа базируется на книгах Г.Н. Яковлева **??** и лекциях Р.Н. Карасева **??**. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии основан на лекциях и методичках П.А. Кожевникова **??**. Курс дифференциальных уравнений собран из книг **??**.

1. Математический анализ

1.1 Теорема Больцана-Вейрштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности.

Определение 1. Предел любой подпоследотвальности даной последовательности называют *частичным пределом*

Теорема 1. *Любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.*

▷ $\exists a, b; \forall n : a < x_n < b$. Тогда построим последовательность вложенных отрезков $[a_k, b_k], k \in \mathbb{N}$ путем деления отрезка попалам, начиная с $[a, b]$, и выбирая на каждой итерации правый отрезок, если он содержит бесконечное число членов последовательности в нем, и левый в противном случае. Причем,

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{b-a}{2^k} = 0$$

Следовательно, по теореме Кантора они имеют одну общую точку

$$c = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$$

Рассмотрев последовательно каждый отрезок и выбрав в нем один член последоватльности, по номеру больший, чем предыдуший, мы смоделировали подпоследовательность, которая будет стремиться к c по теореме о трех последовательностях (о двух милиционерах). ■

Определение 2. Наибольший (наименьший) частичный предел последовательности называется ее *верхним (нижним) пределом.*

Следствие 1. *Любая ограниченная последовательность имеет верхний и нижний предел.*

▷ Число c из теоремы 1 очевидно является верхним пределом. Если при построении вложенных отрезков первым выбирать левый, то получим нижний предел. ■

Лемма 1. *Если последоватльность $\{x_n\}$ сходится, то она удовлетворяет условию Коши:*

$$\forall \varepsilon \quad \exists N_\varepsilon : \forall n,m \geq N_\varepsilon \quad |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{1}$$

▷ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ т.е. $\forall\varepsilon \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Значит, для $\forall n \geq N_\varepsilon$ и для $\forall m \geq N_\varepsilon$:

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_m - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

■

Теорема 2. *Если числовая последовательность удовлетворяет условию Коши, то она имеет конечный предел.*

▷ Положив $\varepsilon = 1$ и $m = N_1$, очевидно следует ограниченность последовательности, удовлетворяющая условю Коши. Тогда по теореме 1 существует сходящаяся подпоследовательность. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Тогда из очевидного неравенства $|x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n_p}| + |x_{n_p} - x_0|$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Следствие 2 (Критерий Коши). *Числовая последовтельность сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши.*

1.2 Ограниченность функций, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней.

Определение 3. *Точной верхней гранью множетсва X ($supX$)* называется такое число M:

1. $\forall x \in X \quad x \leq M$;
2. $\forall M' < M \quad \exists x_{M'} \in X : x_{M'} > M'$.

По аналогии вводится $infX$.

Теорема 3. *Любое множество действительных чисел может иметь лишь одну точную верхнюю (нижнюю) грань.*

▷ Доказывая от противного, получим противоречие со вторым условием в опр. 3. ■

Теорема 4. *У любого непустого множества действительных чисел ограниченного сверху (снизу), существует точная верхняя (нижняя) грань, являющаяся действительным числом.*

▷ Пусть $a \in X$ и $\exists b : x \leq b \quad \forall x \in X$. Тогда отрезок $[a, b]$ содержит хотя бы один элемент из X. Рассмотрим нетривиальный случай $a < b$. Построим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, по аналогии из теоремы 1, таких что

1. $x \leq b_n \quad \forall x \in X \, \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\forall a_n \quad \exists x_n \in X : \quad x_n > a_n$.

Значит мы получим точку c, к которой стягиваются отрезки и которая по определению будет являться точной верхней гранью. Аналогично доказаывается существование точной нижней грани. ■

1.3 Теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

1.4 Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

1.5 Формула Тейлора с остатоным членом в форме Пеано или Лагранжа.

1.6 Исследование функции одной переменной при помощи первой и второй производныз на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые и достаточные условия.

1.7 Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте.

1.8 Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.

1.9 Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.

1.10 Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия.

1.11 Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

1.12 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

1.13 Степенные ряды. Радиусы сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

1.14 Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости.

1.15 Формула Остроградского-Гаусса. Соленоидальные векторные поля.

1.16 Формула Стокса.

1.17 Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.

1.18 Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.