De Morgan's Laws on sets state that

1. $(A \cup B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$,
2. $(A \cap B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}$.

First we prove that $(A \cup B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$.

Proof. Choose $x \in (A \cup B)^{\mathsf{C}}$. Then $x \notin A \cup B$. So $x \notin A$ and $x \notin B$. So $x \in A^{\mathsf{C}}$ and $x \in B^{\mathsf{C}}$. So $x \in A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$. So $(A \cup B)^{\mathsf{C}} \subseteq A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$.

Now choose $x \in A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$. Then $x \in A^{\mathsf{C}}$ and $x \in B^{\mathsf{C}}$. So $x \notin A$ and $x \notin B$. So $x \notin A \cup B$. So $x \in (A \cup B)^{\mathsf{C}}$. So $A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}} \subseteq (A \cup B)^{\mathsf{C}}$.

Therefore, $(A \cup B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$. $\square$

Next we prove that $(A \cap B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}$.

Proof. Choose $x \in (A \cap B)^{\mathsf{C}}$. Then $x \notin A \cap B$. So $x \notin A$ or $x \notin B$. So $x \in A^{\mathsf{C}}$ or $x \in B^{\mathsf{C}}$. So $x \in A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}$. So $(A \cap B)^{\mathsf{C}} \subseteq A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}$.

Choose $x \in A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}$. Then $x \in A^{\mathsf{C}}$ or $x \in B^{\mathsf{C}}$. So $x \notin A$ or $x \notin B$. So $x \notin A \cap B$. So $x \in (A \cap B)^{\mathsf{C}}$. So $A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}} \subseteq (A \cap B)^{\mathsf{C}}$.

Therefore, $(A \cap B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}$. $\square$