Zintegrowany Program Rozwoju
Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie
Nr umowy: **POWR.03.05.00-00-Z307/17**

Instrukcja do ćwiczeń laboratoryjnych

Nazwa przedmiotu	Teoria Współbieżności
Numer ćwiczenia	6
Temat ćwiczenia	Zastosowaniem teorii śladów do szeregowania wątków współbieżnej eliminacji Gaussa

Poziom studiów	I stopień
Kierunek	Informatyka
Forma studiów	Stacjonarne
Semestr	5

dr inż. Maciej Woźniak

Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Kraków, 2019

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z zastosowaniem teorii śladów do szeregowania wątków z zastosowaniem w klasycznych algorytmach algebry liniowej. Jako przykład omawiany jest algorytm współbieżnej eliminacji Gaussa. Ćwiczenie zakłada znajomość podstaw programowania współbieżnego oraz podstaw z algebry liniowej (poznanych na pierwszym semestrze studiów).

2. Plan ćwiczenia

Teoria śladów [1, 2] służy głównie do modelowania zachowania systemów współbieżnych. Opisuje zależności pomiędzy elementami predefiniowanego zbioru niepodzielnych zadań obliczeniowych. Podstawowym pojęciem teorii śladów jest alfabet będący skończonym zbiorem niepodzielnych zadań obliczeniowych (tasków) - to znaczy niepodzielnych i składających się jedynie z instrukcji wykonywanych sekwencyjnie. Teoria śladów jest szeroko stosowanym formalizmem pozwalającym wyprowadzić optymalne zrównoleglenie dla zadanej grupy tasków.

W trakcie ćwiczenia studenci:

- Definiują alfabet w sensie teorii śladów dla zadanego problemu obliczeniowego
- Definiują relacje pomiędzy elementami alfabetu
- Obliczają postać normalną Foaty oraz budują graf Diekerta
- Wyprowadzają formalny model równoległości zadanego problemu obliczeniowego
- Implementują wyprowadzony wyżej model równoległy

2.1. Współbieżna eliminacja Gaussa

Wykład do przedmiotu Teoria Współbieżności [4] zawiera wprowadzenie teoretyczne (razem z przykładem - poniżej) do tego zadania.

Rozważmy problem rozwiązywania układów równań liniowych metodą Gaussa dla poniższych wartości. Problem można przedstawić jako $M \times x = y$, gdzie M jest macierzą kwadratową, natomiast x oraz y są wektorami. Elementy macierzy M będziemy indeksować jako $M_{i,j}$. Elementy wektora y będziemy indeksowac jako y_i.

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Mamy następujące niepodzielne zadania obliczeniowe za pomocą których można rozwiązać w.w. układ

- $A_{i,k}$ - znalezienie mnożnika dla wiersza i, do odejmowania go od k-tego wiersza,
  $m_{k,i} = M_{k,i}/M_{i,i}$

- $B_{i,j,k}$ - pomnożenie j-tego elementu wiersza i przez mnożnik - do odejmowania od k-tego wiersza,
  $n_{k,i} = M_{i,j} * m_{k,i}$
- $C_{i,j,k}$ - odjęcie j-tego elementu wiersza i od wiersza k,
  $M_{k,j} = M_{k,j} - n_{k,i}$.

  Mamy zadany następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 27 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dla uproszczenia zapisu będziemy stosować poniższą notację.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 16 & 27 \end{array}\right] \tag{3}$$

Używamy pierwszego wiersza do „wyprodukowania” zer w pierwszej kolumnie.
Drugi wiersz = drugi wiersz - 2 * pierwszy wiersz

$$A_{1,2}, B_{1,1,2}, C_{1,1,2}, B_{1,2,2}, C_{1,2,2}, B_{1,3,2}, C_{1,3,2}, B_{1,4,2}, C_{1,4,2} \tag{4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 16 & 27 \end{array}\right] \tag{5}$$

Trzeci wiersz = trzeci wiersz - 3 * pierwszy wiersz

$$A_{1,3}, B_{1,1,3}, C_{1,1,3}, B_{1,2,3}, C_{1,2,3}, B_{1,3,3}, C_{1,3,3}, B_{1,4,3}, C_{1,4,3} \tag{6}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \end{array}\right] \tag{7}$$

Używamy drugiego wiersza do „wyprodukowania” zer w drugiej kolumnie
Trzeci wiersz = trzeci wiersz - 2 * drugi wiersz

$$A_{2,3}, B_{2,1,3}, C_{2,1,3}, B_{2,2,3}, C_{2,2,3}, B_{2,3,3}, C_{2,3,3}, B_{2,4,3}, C_{2,4,3} \tag{8}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&A_{1,2}, B_{1,1,2}, C_{1,1,2}, B_{1,2,2}, C_{1,2,2}, B_{1,3,2}, C_{1,3,2}, B_{1,4,2}, C_{1,4,2},\\ &A_{1,3}, B_{1,1,3}, C_{1,1,3}, B_{1,2,3}, C_{1,2,3}, B_{1,3,3}, C_{1,3,3}, B_{1,4,3}, C_{1,4,3},\\ &A_{2,3}, B_{2,2,3}, C_{2,2,3}, B_{2,3,3}, C_{2,3,3}, B_{2,4,3}, C_{2,4,3}\}\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}D = \mathrm{sym}\{\{&(A_{1,2}, B_{1,1,2}), (A_{1,2}, B_{1,2,2}), (A_{1,2}, B_{1,3,2}), (A_{1,2}, B_{1,4,2}),\\ &(B_{1,1,2}, C_{1,1,2}), (B_{1,2,2}, C_{1,2,2}), (B_{1,3,2}, C_{1,3,2}), (B_{1,4,2}, C_{1,4,2}),\\ &(A_{1,3}, B_{1,1,3}), (A_{1,3}, B_{1,2,3}), (A_{1,3}, B_{1,3,3}), (A_{1,3}, B_{1,4,3}),\\ &(B_{1,1,3}, C_{1,1,3}), (B_{1,2,3}, C_{1,2,3}), (B_{1,3,3}, C_{1,3,3}), (B_{1,4,3}, C_{1,4,3}),\\ &(A_{2,3}, B_{2,2,3}), (A_{2,3}, B_{2,3,3}), (A_{2,3}, B_{2,4,3}),\\ &(B_{2,2,3}, C_{2,2,3}), (B_{2,3,3}, C_{2,3,3}), (B_{2,4,3}, C_{2,4,3}),\\ &(C_{1,2,2}, A_{2,3}), (C_{1,2,3}, A_{2,3}), (C_{1,2,2}, B_{2,2,3}), (C_{1,2,3}, B_{2,2,3}),\\ &(C_{1,3,2}, B_{2,3,3}), (C_{1,3,3}, C_{2,3,3}), (C_{1,4,2}, B_{2,4,3}), (C_{1,4,3}, C_{2,4,3})\}^{+}\} \cup I_{\Sigma}\end{aligned} \tag{11}$$

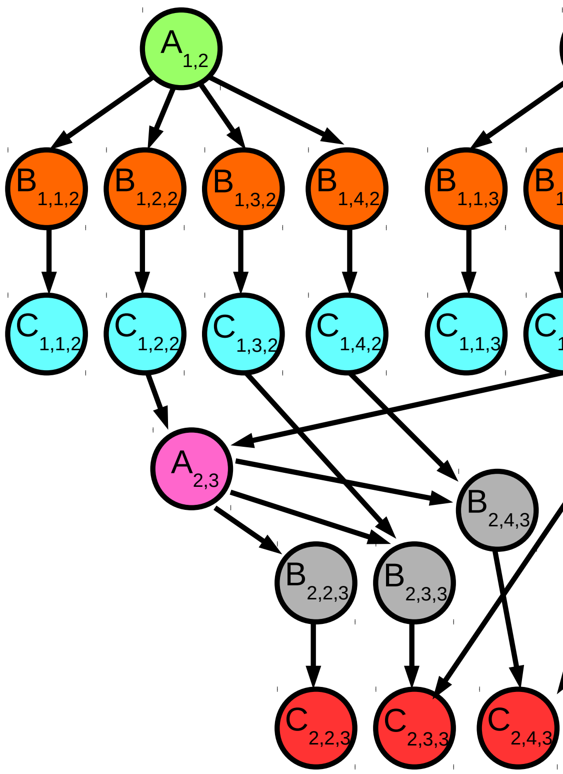
$$\begin{aligned}t = [w]_{\equiv_I^+} = [\langle &A_{1,2}, B_{1,1,2}, C_{1,1,2}, B_{1,2,2}, C_{1,2,2}, B_{1,3,2}, C_{1,3,2}, B_{1,4,2}, C_{1,4,2},\\ &A_{1,3}, B_{1,1,3}, C_{1,1,3}, B_{1,2,3}, C_{1,2,3}, B_{1,3,3}, C_{1,3,3}, B_{1,4,3}, C_{1,4,3},\\ &A_{2,3}, B_{2,2,3}, C_{2,2,3}, B_{2,3,3}, C_{2,3,3}, B_{2,4,3}, C_{2,4,3}\rangle]_{\equiv_I^+}\end{aligned} \tag{12}$$

Postać Normalna Foaty:

$$\begin{aligned}t = [\langle A\rangle]_{\equiv_I^+} = &[\{A_{1,2}, A_{1,3}\}]_{\equiv_I^+}\\ &\frown[\{B_{1,1,2}, B_{1,2,2}, B_{1,3,2}, B_{1,4,2}, B_{1,1,3}, B_{1,2,3}, B_{1,3,3}, B_{1,4,3}\}]_{\equiv_I^+}\\ &\frown[\{C_{1,1,2}, C_{1,2,2}, C_{1,3,2}, C_{1,4,2}, C_{1,1,3}, C_{1,2,3}, C_{1,3,3}, C_{1,4,3}\}]_{\equiv_I^+}\\ &\frown[\{A_{2,3}\}]_{\equiv_I^+}\frown[\{B_{2,2,3}, B_{2,3,3}, B_{2,4,3}\}]_{\equiv_I^+}\\ &\frown[\{C_{2,2,3}, C_{2,3,3}, C_{2,4,3}\}]_{\equiv_I^+} =\\ &[F_1]_{\equiv_I^+}\frown[F_2]_{\equiv_I^+}\frown[F_3]_{\equiv_I^+}\frown[F_4]_{\equiv_I^+}\frown[F_5]_{\equiv_I^+}\frown[F_6]_{\equiv_I^+}\end{aligned} \tag{13}$$

Zadanie polega na wykonaniu następujących etapów (dla macierzy o rozmiarze N):

1. Proszę zlokalizować niepodzielne czynności wykonywane przez algorytm, nazwać je oraz zbudować alfabet w sensie teorii śladów
2. Proszę skonstruować relacje zależności i niezależności dla alfabetu, opisującego algorytm eliminacji Gaussa.
3. Proszę przedstawić algorytm eliminacji Gaussa w postaci ciągu symboli alfabetu.



Rysunek 1. Graf Diekerta wraz z kolorowaniem

4. Proszę wygenerować graf zależności Diekerta.
5. Proszę przekształcić ciąg symboli opisujący algorytm do postaci normalnej Foaty.

Proszę zaprojektować i zaimplementować równoległy algorytm eliminacji Gaussa bazujący na informacji uzyskanej z grafu zależności. W szczególności proszę zwrócić uwagę na implementację jak najlepiej odwzorowującą graf zależności. Sugerowane rozwiązania to wykorzystanie biblioteki GALOIS, biblioteki CILK, lub odpowiednich języków programowania. Program ma działać dla zadanych rozmiarów macierzy N oraz macierzy na wejściu/wyjściu w formacie zadanym przez prowadzącego. Rozwiązanie może nie uwzględniać konieczności zamiany miejscami wierszy.

3. Sposób oceny

Ocenie podlega część teoretyczna 60%

- Poprawność definiowania podstawowych niepodzielnych zadań obliczeniowych,
- Poprawność identyfikacji ciągu zadań obliczeniowych wykonywanych przez algorytm sekwencyjny,
- Poprawność identyfikacji alfabetu w sensie teorii śladów,
- Poprawność identyfikacji relacji zależności,
- Poprawność wyprowadzenia grafu zależności Diekerta,

- Poprawność obliczania klas Foaty.

Oraz część implementacyjna 40%

- Poprawność implementacji podstawowych operacji macierzowych,
- Poprawność implementacji schedulera dla nowych klas Foaty opisujących algorytm eliminacji Gaussa,
- Poprawność działania eliminacji Gaussa (czy uzyskane rozwiązanie jest poprawne).

Literatura

[1] V. Diekert, Y. Métivier – Partial commutation and traces, [w:] Handbook of Formal Languages, Springer, 1997, str. 457-553, dostępne tutaj

[2] Diekert V., Rozemberg G. - The book of traces, 1995

[3] Dowolny podręcznik z algebry liniowej lub metod numerycznych z zakresu sekwencyjnego algorytmu eliminacji Gaussa

[4] Wykład z przedmiotu "Teoria współbieżności" – rozdział dotyczący teorii śladów

[5] Bruce Eckel, "Thinking in Java" - rozdział o wątkach