

# Notes on 音乐与数学

Matthew Mo

2020 年 10 月 19 日

## 目录

<b>1 Basics</b>	<b>1</b>
1.1 节奏: 音乐的时间形式 . . . . .	2
1.2 旋律与对称 . . . . .	2
<b>2 成绩</b>	<b>2</b>
<b>3 音乐基本知识</b>	<b>2</b>
3.1 音乐的诸要素 . . . . .	2
3.2 乐谱 . . . . .	3
<b>4 音乐的数学理论</b>	<b>3</b>

## 1 Basics

和谐的音程:

- 1:1 同度
- 2:1 八度
- 3:2 纯五度
- 4:3 纯四度
- 5:4 大三度 (理想)

---

## 1.1 节奏: 音乐的时间形式

音乐的要素: 节奏, 旋律, 和声

**Def.** 节奏是乐音时值的有组织的顺序...

**Note** 区分节拍和节奏

**Def.** 节拍... 2/4 etc.

**Def.** 固定节奏型 (rhythmic orisnato). “拍”(pulse): 十六分音符.

**Prop.** 极大均衡原则: 在所有的拍上, 起拍应该尽量均匀.

**Def.** “圆周上的几何节奏模型”

**Prop.** 节奏奇性: 圆周上起拍对位不是起拍.

**Def.** 距离序列: 起拍之间的间隔序列.

听觉系统对绝对时间差相对不敏感, 对相对变化敏感  $\Rightarrow$

**Def.** 轮廓 (Contour): 节奏间隔变化的序列; 轮廓同构: 若节奏型可以通过循环轮换等价...

**Def.** 影子节奏. 古巴颂节奏轮廓同构于影子节奏轮廓!

## 1.2 旋律与对称

**Def.** 旋律 (melody): 不同音高组成的序列. \* 旋律应遵循对称原则  
重复与变化!

旋律的变化: 移调 (transposition) 分为严格移调和调性移调.

旋律的变化: 逆行 (retrograde), 倒影 (...)

这些都是旋律的某种对称. 传统调性音乐对这些对称的应用进行限制.

对称是美的重要来源. 群论用于研究对称.

## 2 成绩

成绩评定: 平时 20' 期中研究 30' 期末闭卷考试 50'

教材: 音乐与数学.

“基本乐理通用教材, 李重光”, “数学与音乐, 周明儒”

个人网页 | 北京大学电子教参平台

“TheEnjoymentofMusic - A Glossory”

## 3 音乐基本知识

### 3.1 音乐的诸要素

音乐:.... 声音是音乐的载体, 声波是纵波. 音乐的要素:

1. 频率  $\Rightarrow$  音高 (pitch);
2. 空气压力  $\Rightarrow$  力度;

---

3. 时间长度  $\Rightarrow$  时值 (durations);

4. 波形  $\Rightarrow$  音色 (timbre).

音乐会音高 440Hz - Center C

力度: 20 微帕 = 0dB@1kHz. SPL:  $L_p = 20 \log(p/p_0)$ . HRTF/等响曲线

音色: 泛音 (overtone), 波形 (waveform), 频谱 (spectrum) 决定了音色.

乐音体系: 乐音 (musical tone) 与噪音 (noise). 有组织的噪音 (organized noise). 打击乐器中也有有固定音高 (木琴, 定音鼓) 和无固定音高的乐器 (噍, 锣, 小军鼓). 每一个音有一个音名 (pitch name): CDEFGAB, 是基本音级. 在每个八度 (octave) 里循环使用, 分为了若干音组. 变音符号  $\Rightarrow$  变化音级 (升降号, 重升降号, 还原号). 异名同音: 两个音名有相同音高  $\Rightarrow$  等音的 (enharmonic). 唱名: do re mi fa so la si, mi-fa, si-do 之间是半音. 首调唱名法 (movable do),  $1 = X$ .

### 3.2 乐谱

记谱法 (notation), 五线谱. 非线性坐标系! 音符: 符头, 符干, 符尾. 音符代表的时值是相对长度 取决于拍子. 谱号 (clef), 常用的有高音谱号 (二线为  $G_4$ ), 低音谱号 (冒号中心为四线  $F_3$ ), 这二者的上/下加一线为中央 C; 中音谱号 (次中音谱号...). 谱号 + 五线谱  $\Rightarrow$  谱表 (staff). 变音记号: 谱号后面的调号 (key signature), 在未改变调号之前都生效.

音程: 两个音级之间的距离称为音程 (interval), 上方音 (冠音)-下方音 (根音); 度数 (五线谱上的线和间的个数) + 半音数决定了音程! 小二度 (半音数为 1), 大二度 (半音数为 2); 小三度 (和谐? 半音数为 3), 大三度 (半音数为 4); 纯四度 (半音数为 5, 和谐!), 增四度 (半音数为 6, 三全音); 减五度 (半音数为 6), 纯五度 (半音数为 7, 和谐?); 小七度 (11), 纯八度 (12), 纯一度 (0). 自然音程 (diatonic interval): 两边都是白键, 自然音程增减半音变为变化音程. 大/纯增一个半音为增音程, 小/纯减一个半音为减音程.

(不) 协和 (consonant) 音程: 纯五度最和谐开始; 和谐: 纯四/五/八 (完全协和), 大小三/六度 (不完全协和), 其他不协和.

练习: 练耳程序-协和程度 | 预习教材第二章

泛音列重合理论.

## 4 音乐的数学理论

乐器的分类: 气鸣乐器, 弦鸣乐器, 电鸣乐器, 体鸣乐器, 膜鸣乐器.

振动满足 Laplace 初值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

---

一维振动方程的解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L}t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L}t\right) \end{aligned} \quad (2)$$

**Theorem 4.1** (*Mersenne*)

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

称  $f_1$  为基音,  $f_n$  为  $n-1$  泛音, 都是基频的倍频, 总共称为泛音列.

拨弦振动 ( $L/2$  处) 的 Fourier 级数阶  $\Rightarrow$  只有奇次谐波!

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad (1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{L}t\right) \end{aligned} \quad (3)$$

管乐器的空气柱边界条件不确定, 往往调音 (端口校正, end correction) 需要靠听. 不计端口校正, 开口处为波腹, 闭口处必为波节. 故开管乐器  $\lambda_n = \frac{2L}{n}, f_1 = \frac{v}{2L}, f_n = n f_1$ , 闭管乐器  $\lambda_n = \frac{4L}{n}, n$  为奇数,  $f_1 = \frac{v}{2L}, f_n = n f_1$ , 只有奇数次谐波