先端データ解析論　第 1 回レポート

電子情報学専攻　48-176403 石毛真修

2017 年 4 月 17 日

大問 1.

A.

$$p(X=\text{好}, Y=\text{眠}) = p(X=\text{好}) \times p(Y=\text{眠} \,|X=\text{好}) = 0.2$$

B.

$$p(X=\text{嫌}, Y=\text{眠}) = p(X=\text{嫌}) \times p(Y=\text{眠} \,|X=\text{嫌}) = 0.05$$
$$p(X=\text{眠}) = P(X=\text{好}, Y=\text{眠}) + p(X=\text{嫌}, Y=\text{眠}) = 0.25$$

C.

$$p(X=\text{好} \,|Y=\text{眠}) = \frac{p(X=\text{好}, Y=\text{眠})}{p(X=\text{眠})} = 0.8$$

D.

統計の好き嫌いと授業中眠くなるかどうかが独立であるか？

$$p(X=\text{好}, Y=\text{眠}) = 0.2$$
$$p(X=\text{好}) \times p(Y=\text{眠}) = 0.2$$
$$\therefore p(X=\text{好}, Y=\text{眠}) = p(X=\text{好}) \times p(Y=\text{眠})$$

$$p(X=\text{嫌}, Y=\text{眠}) = 0.05$$
$$p(X=\text{好}) \times p(Y=\text{眠}) = 0.05$$
$$\therefore p(X=\text{嫌}, Y=\text{眠}) = p(X=\text{嫌}) \times p(Y=\text{眠})$$

$$
\begin{aligned}
&p(Y=\text{覚}\,|X=\text{好}) = 1 - p(Y=\text{眠}\,|X=\text{好}) = 0.75\\
&p(X=\text{好}, Y=\text{覚}) = p(Y=\text{覚}\,|X=\text{好}) \times p(X=\text{好}) = 0.6\\
&p(Y=\text{覚}\,|X=\text{嫌}) = 1 - p(Y=\text{眠}\,|X=\text{嫌}) = 0.75\\
&p(X=\text{嫌}, Y=\text{覚}) = p(Y=\text{覚}\,|X=\text{嫌}) \times p(X=\text{嫌}) = 0.15\\
&p(Y=\text{覚}) = p(X=\text{好}, Y=\text{覚}) + p(X=\text{嫌}, Y=\text{覚}) = 0.75\\
&p(X=\text{好}) \times p(Y=\text{覚}) = 0.6\\
&\therefore p(X=\text{好}, Y=\text{覚}) = p(X=\text{好}) \times p(Y=\text{覚})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p(Y=\text{覚}\,|X=\text{嫌}) = 1 - p(Y=\text{眠}\,|X=\text{嫌}) = 0.75\\
&p(X=\text{嫌}, Y=\text{覚}) = p(Y=\text{覚}\,|X=\text{嫌}) \times p(X=\text{嫌}) = 0.15\\
&p(X=\text{嫌}) \times p(Y=\text{覚}) = 0.15\\
&\therefore p(X=\text{好}, Y=\text{覚}) = p(X=\text{好}) \times p(Y=\text{覚})
\end{aligned}
$$

以上から，統計の好き嫌いと授業中眠くなるかどうかは独立である．

大問 2.

A.

$E[c] = c$ を示す．

証明：

f(x) を X の確率密度関数とすると，

$$
\begin{aligned}
E[c] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ c\ f(x)\\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\\
&= c \quad \text{確率密度関数の定義より}
\end{aligned}
$$

B.

$E[X+X'] = E[X] + E[X']$ を示す

証明：

X と X' の実現値をそれぞれ x_1，x_2 とし，$f(x_1, x_2)$ を X と X' の同時確率密度関数，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ をそれぞれ X と X' の確率密度関数とする．

$$\begin{aligned} E[X+X'] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ dx_2\ (x_1+x_2)\ f(x_1,x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ x_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ f(x_1,x_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ x_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ f(x_1,x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ x_1\ f_1(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ x_2\ f_2(x_2) \quad \text{周辺化} \\ &= E[X] + E[X'] \end{aligned}$$

C.

$E[cX] = cE[X]$ を示す

証明：

$f(x)$ を X の確率密度関数とすると，

$$\begin{aligned} E[cX] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ cx\ f(x) \\ &= c\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ f(x) \\ &= cE[X] \end{aligned}$$

大問 3.

A.

$V[c] = 0$ を示す．

証明：

$f(x)$ を定数 c の確率密度関数とする．

$$\mu = E[c] = c$$

$$\begin{aligned} V[c] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ (c-\mu)^2\ f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ (c-c)^2\ f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

B.

$V[X+c] = V[X]$ を示す．

証明：
$f(x)$ を X の確率密度関数とする．

$$\mu = E[X+c] = E[X] + E[c] = E[x] + c$$

$$\begin{aligned}
V[X+c] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \{(x+c) - \mu\}^2\ f(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \{(x+c) - (E[x]+c)\}^2\ f(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \{x - E[x]\}^2\ f(x) \\
&= V[X]
\end{aligned}$$

C.

$V[X+X'] = V[X] + V[X'] + 2Cov(X, X')$ を示す．

証明：
X と X' の実現値をそれぞれ x_1，x_2 とし，$f(x_1, x_2)$ を X と X' の同時確率密度関数，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ をそれぞれ X と X' の確率密度関数とする．

$$\mu = E[X+X'] = E[X] + E[X']$$

$$\begin{aligned}
V[X+X'] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \{(x_1+x_2) - \mu\}^2\ f(x_1, x_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ dx_2\ \{(x_1+x_2) - (E[X]+E[X'])\}^2\ f(x_1, x_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ dx_2\ \{(x_1+x_2)^2 + (E[X]+E[X'])^2 - 2(x_1+x_2)(E[X]+E[X'])\}\ f(x_1, x_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ dx_2\ \{(x_1-E[X])^2 + (x_2-E[X'])^2 + 2(x_1-E[X])(x_2-E[X'])\}\ f(x_1, x_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ (x_1-E[X])^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ f(x_1, x_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ (x_2-E[X'])^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ f(x_1, x_2) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ dx_2\ 2(x_1-E[X])(x_2-E[X'])\ f(x_1, x_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ (x_1-E[X])^2\ f_1(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ (x_2-E[X'])^2\ f_2(x_2) \\
&\quad + 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ dx_2\ (x_1-E[X])(x_2-E[X'])\ f(x_1, x_2) \\
&= V[X] + V[X'] + 2E[(X-E[X])(X'-E[X'])] \\
&= V[X] + V[X'] + 2Cov(X, X')
\end{aligned}$$