

$$\ker N_H / I_H A' \xrightarrow{\sim} A^H / N_H A$$

cores
 \downarrow

$$\ker N_G / I_G A' \xrightarrow{\sim} A^G / N_G A$$

cores
 \downarrow

$$\overline{\varphi} \pmod{I_H A'} \longmapsto a$$

\downarrow

$$\overline{\varphi} \pmod{I_G A'} \longmapsto \sum_i \sigma_i a$$

\downarrow