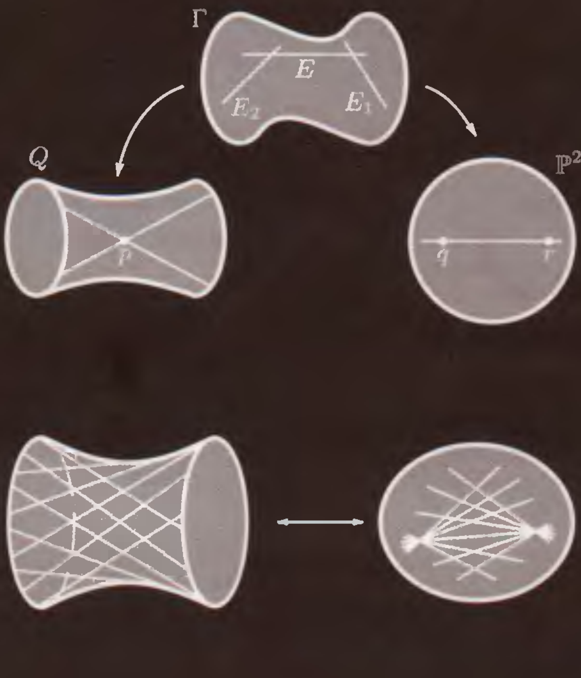
ДЖ. ХАРРИС

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС



Graduate Texts in Mathematics

J. HARRIS

ALGEBRAIC GEOMETRY

A FIRST COURSE

Springer

ДЖ. ХАРРИС

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС

Перевод с английского под редакцией Ф. Л. Зака

Москва
Издательство МЦНМО
2005

Джо Харрис

Алгебраическая геометрия

УДК 512.7
ББК 22.147
Х21

Издание осуществлено при поддержке РФФИ (издательский проект №02-01-14084).

Харрис Дж.

Х21 Алгебраическая геометрия. Начальный курс / Перевод с англ. под ред. Ф. Л. Зака. — М.: МЦНМО, 2005. — 400 с.: ил.

ISBN 5-94057-084-4

Книга представляет собой геометрическое введение в алгебраическую геометрию, написанное одним из крупнейших специалистов в этой области математики. Основное внимание уделено не основаниям предмета, а конкретным примерам и более «геометрическим» его разделам. Благодаря этому неспециалист получит из книги адекватное представление о том, чем занимаются алгебраические геометры, а читатель, желающий в алгебраической геометрии специализироваться, ознакомится с набором примеров и мотивировок, необходимых для изучения технически трудных оснований.

Для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.147

Научное издание

Джо Харрис

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. НАЧАЛЬНЫЙ КУРС

Редактор Т. Коробкова

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 10.02.2005 г. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 25. Тираж 1000 экз. Заказ № 6152.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Можайский полиграфический комбинат». 143200, г. Можайск, ул. Мира, д. 93.

ISBN 0-387-97716-3 (англ.)
ISBN 5-94057-084-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II. Атрибуты многообразий

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

За последние десятилетия алгебраическая геометрия вернула себе положение одной из самых популярных математических дисциплин и обрела новые связи с другими разделами математики и физики. Соответственно расширился круг людей, изучающих алгебраическую геометрию, и появилось множество учебников, рассчитанных на начинающих. Вместе с тем, сильно изменился язык алгебраической геометрии и существенно возросли требования к общематематической подготовке тех, кто ей занимается. В результате перед авторами учебников стоит сложная задача достижения баланса между различными целями: необходимо дать читателю представление о задачах алгебраической геометрии и методах их решения, снабдить его достаточно большим количеством примеров, и наконец, надо ознакомить читателя с техническими средствами, выходящими за рамки обязательных курсов математических факультетов.

Из учебников алгебраической геометрии, имеющихся на русском языке, наибольшую популярность завоевали книги И. Р. Шафаревича «Основы алгебраической геометрии», Р. Хартсхорна «Алгебраическая геометрия», Ф. Гриффитса и Дж. Харриса «Принципы алгебраической геометрии» и Д. Мамфорда «Алгебраическая геометрия I. Комплексные проективные многообразия», в каждой из которых довольно удачно, но по-своему достигается компромисс между содержательностью и доступностью.

Предлагаемый вниманию читателя учебник Дж. Харриса не похож ни на одну из перечисленных выше книг. Прежде всего, у читателя не предполагается почти никаких предварительных знаний — во всяком случае, большая часть книги вполне доступна студентам второго курса механико-математических факультетов. Далее, книга посвящена почти исключительно проективной алгебраической геометрии, что в наше время является редкостью. Точка зрения автора последовательно геометрическая, причем в равной степени используются «аналитический» и «синтетический» подходы. Это представляется особенно важным, поскольку в российских университетах (в отличие, скажем, от итальянских) геометрия как предмет вообще отсутствует — есть только аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия и т. д., причем упор чаще всего делается не на слове «геометрия».

Несмотря на столь классический предмет, стиль изложения в книге вполне современен. Прочитав книгу, читатель не узнает, что такое функтор или схема, однако станет гораздо лучше подготовлен к восприятию этих понятий.

В книге Дж. Харриса нет особенно сложных теорем, зато в ней множество примеров, знания которых часто не хватает тем, кто учился алгебраической геометрии по современным учебникам. Неотъемлемой частью книги являются упражнения и задачи. Только тот читатель, который выполнит значительную часть этих упражнений, может считать, что овладел материалом книги.

По уже упомянутым причинам не существует одного учебника, по которому можно научиться алгебраической геометрии. Тем более не может претендовать на эту роль книга, предлагаемая вашему вниманию, в которой отсутствует, например, даже понятие рода кривой. Но эта книга удачно дополняет другие учебники алгебраической геометрии, имеющиеся на русском языке, и очень подходит для первоначального ознакомления с предметом.

Перевод выполнен с третьего издания (1995 г.).

Над переводом работали И. Анно (лекции 10, 12), С. Галкин (лекция 1), С. Горчинский (лекции 6, 19), В. Жгун (лекция 7), Н. Зак (лекции 4, 15, 20), С. Львовский (лекции 14, 16, 21, 22), М. Мазо (лекция 2), И. Никокошев (лекция 8), О. Попов (лекция 17), В. Пржиялковский (лекция 9), С. Рыбаков (лекции 3, 13), Е. Смирнов (лекции 5, 18), К. Шрамов (лекция 11). В редактировании принимали участие И. Анно (лекция 4), С. Галкин (лекции 10, 15), С. Горчинский (лекции 5, 20), В. Жгун (лекция 6), Н. Зак (лекции 11, 17, 19), М. Мазо (лекции 3, 12), И. Никокошев (лекция 9), О. Попов (лекции 1, 18), В. Пржиялковский (лекция 2), С. Рыбаков (лекция 7), Е. Смирнов (лекция 8), К. Шрамов (лекция 13). Особенно большой вклад в редактирование и окончательную подготовку текста внес С. Львовский.

Ф. Л. Зак

Диане, Лиаму и Дэви

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга основана на семестровом курсе, прочитанном в Гарвардском университете в 1984 году, в Брауновском университете в 1985 году и снова в Гарварде в 1988 году. В соответствии с заглавием, она задумана как первоначальное введение в предмет. К этому краткому определению стоит добавить несколько слов о назначении книги.

За прошедшее столетие алгебраическая геометрия претерпела огромные изменения. В течение XIX века эта дисциплина сосредоточивалась на изучении достаточно конкретных проблем; основным объектом были проективные многообразия, исследуемые геометрическими методами. Расцвет такого подхода приходится на середину века, а его кульминацией была деятельность итальянской школы в конце XIX и начале XX века. В конце концов предмет перерос свои основания: к концу описываемого периода итальянская школа достигла такого прогресса, что используемые ею язык и технические средства уже не могли надлежащим образом выражать идеи ее лучших представителей.

В течение XX века эти трудности были более чем успешно преодолены в результате нескольких циклов преобразований. Началось все с пионерских работ Зарисского которому, основываясь на результатах алгебраистов немецкой школы, удалось поставить предмет на твердую алгебраическую почву. Примерно в то же время А. Вейль ввел понятие абстрактного алгебраического многообразия, изменив таким образом определение основного объекта, который исследует алгебраическая геометрия. Далее, в 50-х годах появились работы Серра, в которых был введен такой фундаментальный инструмент, как теория пучков. И наконец, в 60-х годах Гротендик (которому помогали и которого вдохновляли Артин, Мамфорд и многие другие) ввел понятие схемы, радикально преобразившее предмет и давшее ему принципиально новые основания. В результате всей этой деятельности многие крупные достижения итальянской школы удалось поставить на твердую основу и развить далее: это и происходило в течение последних десятилетий наряду с появлением новых идей, вызванных к жизни современной теорией.

Все это означает, что изучающие сегодня алгебраическую геометрию получают в свои руки весьма мощный инструмент. Но это же создает и педагогическую проблему: неясно, каким образом лучше всего изучать этот предмет. Если ваша цель — просто узнать, что такое алгебраическая геометрия, то есть понять, какие основные объекты в ней рассматриваются, какие вопросы задаются о них и какого рода ответы можно получить на эти вопросы, то, возможно, вам не стоит начинать с более технических разделов. Если же ваша конечная цель — профессионально работать в области алгебраической геометрии, то может показаться целесообразным как можно раньше ввести современный подход и уже на его основе изучать весь предмет. Впрочем, и в этом случае у вас будет больше мотивации для изучения языка схем и вы сможете лучше оценить его преимущества, если вы будете предварительно хоть немного знакомы с элементарной алгебраической геометрией.

В конечном счете, именно сам предмет продиктовал мне решение этой проблемы. Классическая алгебраическая геометрия — это замечательный раздел математики с красивой внутренней структурой и огромным запасом примеров. В ней множество увлекательных проблем с простой формулировкой, как доступных, так и еще не решенных. Короче говоря, и преподавать, и изучать классическую алгебраическую геометрию — огромное удовольствие. По всем этим причинам я решил, что лучше всего начинать изучение предмета с того, чтобы до перехода к современной теории потратить какое-то время на изучение классической алгебраической геометрии. Настоящая книга — результат моей попытки написать такое введение.

Это решение предопределило выбор содержания книги. Например, коль скоро тем, кто продолжит изучение алгебраической геометрии, все равно предстоит заново изучить ее основания на современном языке, нет смысла вводить на раннем этапе больше технических средств, чем абсолютно необходимо. По тем же причинам я по большей части избегал разделов, которые лучше излагать с помощью более продвинутых средств, и сосредоточился на том, что, на мой взгляд, может быть понято на классическом языке не хуже, чем на современном. (Разумеется, сказанное верно не на сто процентов: читатель, знакомый с теорией схем, найдет в книге множество мест, в которых жизнь была бы куда легче, если бы я мог произнести слова «теоретико-схемное пересечение» или «плоское семейство».)

Принятое мною решение по поводу содержания и уровня изложения повлияло, в свою очередь, на множество других вещей, касающихся композиции и стиля книги. Например, для наших целей мне представлялось правильным сосредоточить внимание на примерах, развивая теорию по мере необходимости. Так, в части I вводятся наиболее важные примеры многообразий и конструкций; многие фундаментальные понятия, как, например, размерность и степень, формально определяются только в части II. В книге много недоказанных утверждений и теорем, формулировки которых, по моему мнению, поучительны, а доказательства выходят за рамки технических средств, используемых в книге. Наконец, я старался вести все изложение в неформальном стиле.

Благодарности

Многие люди помогли мне в работе над рукописью. Бенджи Фишер (Benji Fisher), когда он учился в Гарварде, был в числе первых слушателей этого курса и сделал замечательные записки: именно высокое качество его записок подвигнуло меня на то, чтобы заняться этой книгой. Слушатели моих курсов подали множество идей и предложений; это же относится и к читателям различных версий книги, включая Паоло Алуффи (Paolo Aluffi), Дэна Грэйсона (Dan Grayson), Зиновия Рейхштейна (Zinovy Reichstein) и Джона Тэйта (John Tate). Мне были приятны и полезны беседы со многими людьми, в том числе с Давидом Айзенбадом (David Eisenbud), Диком Гроссом (Dick Gross), Куртом Медерером (Kurt Mederer), Рольфдитером Франком (Rolfdieter Frank), Биллом Фултоном (Bill Fulton), Фернандо Цукерманом (Fernando Cukierman) и Ноамом Элкисом (Noam Elkies). Я бы хотел также поблагодарить Бенджи Фишера (Benji Fisher), Сета Падовица (Seth Padowitz), Дэвида Патрика (David Patrick) и Лайла Рэмшоу (Lyle Ramshaw), указавших на ошибки в первом издании.

В этой книге мало литературных ссылок, и я прошу прощения у тех, на чьи работы я не сослался должным образом. Многое из того, что я знаю о предмете, я узнавал неформально, и я по-прежнему гораздо хуже знаком с литературой, чем следовало бы. Отсутствие ссылки при каком-либо обсуждении должно рассматриваться исключительно как свидетельство моего незнания литературы, а не как претензия на новизну.

Я бы хотел поблагодарить Гарвардский университет, и в частности его деканов Кэндас Корви (Candace Corvey) и Майкла Спенса (A. Michael Spence), за то, что они щедро предоставили в мое распоряжение компьютеры, на которых эта книга была написана.

Наконец, особого упоминания заслуживают два человека, внесшие огромный вклад в работу над книгой. Билл Фултон (Bill Fulton) и Давид Айзенбад (David Eisenbud) прочли предпоследнюю версию рукописи с исключительной тщательностью и снабдили меня крайне ценными замечаниями на всех уровнях, от опечаток до вопросов, связанных с полнотой и правильностью изложения. Более того, всякий раз, когда у них находилась причина для замечания, они предлагали и способы борьбы с обнаруженной проблемой, по большей части более удачные, чем то, что сделал бы я сам.

Дж. Харрис,
Гарвардский университет

КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ЭТОЙ КНИГОЙ

Ничего особенного по этому поводу не скажешь, но несколько очевидных замечаний я сделаю.

Во-первых, одного взгляда достаточно, чтобы понять, что «логический каркас» книги занимает относительно малую ее часть: основную массу составляют примеры и упражнения. Большинство их можно пропустить, если они не вызывают интереса, и вернуться к ним позже. Хоть я и уверен, что изучение примеров такого рода — хороший способ познакомиться с предметом, я полагаю, что только подлинный математический обжора, мазохист или одержимый будет изучать их все при первом чтении. Например, один из возможных вариантов для читателя, берущегося за эту книгу впервые, будет состоять в том, чтобы пропустить следующие разделы (тире, за которым не следует цифры, означает «от этого места и до конца лекции»): 1.22—, 2.27—, 3.16—, 4.10—, 5.11—, 6.8—11, 7.19—21, 7.25—, 8.9—13, 8.32—39, 9.15—20, 10.12—17, 10.23—, 11.40—, 12.11—, 13.7—, 15.7—21, 16.9—11, 16.21—, 17.4—15, 19.11—, 20.4—6, 20.9—13 и всю лекцию 21.

Точно так же я бы считал правильным, если кто-то будет, читая книгу, иногда забегать вперед. Как мы отмечали, некоторые из основных тем отложены в этой книге до второй части, и если вам интересно, нет причины не заглянуть вперед. Большинство примеров также рассматриваются по нескольку раз: они появляются на ранней стадии, а затем мы возвращаемся к ним всякий раз, когда появляется возможность взглянуть на них в свете новых понятий. Если вам угодно, вы можете обратиться к указателю и проследить такое развитие для каждого из примеров.

Наконец, несколько слов по поводу требований к подготовке читателя (а также по поводу дальнейшего чтения). Я старался свести эти требования к минимуму: для чтения книги должно быть достаточно некоторых познаний в линейной и полилинейной алгебре и знакомства с основами абстрактной алгебры (определение и основные свойства групп, колец, полей и т. д.), особенно если под рукой есть удобочитаемое руководство по коммутативной алгебре наподобие книг Атьи и Макдональда [AM] или Айзенбада [E].

А что же делать, если, прочитав эту книгу, вы захотите специализироваться в алгебраической геометрии? Тогда на следующем этапе надо будет изучить теорию пучков, когомологии пучков и теорию схем (порядок изучения двух последних тем можно и обратить). Основным источником по теории пучков в контексте алгебраической геометрии является статья Серра [S]. Что до теории схем, то стандартной ссылкой является классическая книга Хартсхорна [H]; введение в этот предмет содержится также в красной книге Мамфорда [M1] и в книге Айзенбада и Харриса [EH]. Альтернативный подход, при котором ряд продвинутых тем трактуется в рамках теории комплексных многообразий, представлен в книге [GH].

Часть I
Примеры многообразий и отображений

Лекция 1
АФФИННЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Замечание об основном поле

Мы будем работать с многообразиями, определенными над полем K, которое будет всюду предполагаться алгебраически замкнутым. Алгебраическую геометрию, бесспорно, можно развивать и над алгебраически незамкнутыми полями (а также в еще большей общности — над кольцами), но для этого нужен более изощренный подход, чем тот, которого мы будем придерживаться; на самом деле самый адекватный язык для работы над алгебраически незамкнутыми полями — язык теории схем. Бóльшая часть классической алгебраической геометрии развивалась над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, и геометрия над $\mathbb{C}$ остается основным источником нашей геометрической интуиции; тем не менее, мы будем стараться не предполагать, что $K = \mathbb{C}$, всюду, где это возможно.

Аффинное пространство и аффинные многообразия

Аффинное пространство над полем K есть множество точек векторного пространства K^n; оно обычно обозначается $\mathbb{A}^n_K$ или $\mathbb{A}^n$. (Главное отличие аффинного пространства от векторного пространства K^n состоит в том, что в аффинном пространстве начало координат не обладает никаким особым статусом.) *Аффинным многообразием* $X \subset \mathbb{A}^n$ называется множество общих нулей набора многочленов $f_\alpha \in K[z_1, \ldots, z_n]$.

Проективное пространство и проективные многообразия

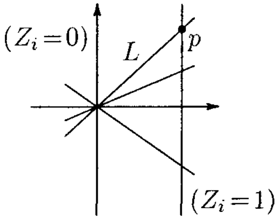
Проективным пространством над полем K называется множество одномерных векторных подпространств векторного пространства $V = K^{n+1}$; иначе его можно определить как фактор пространства $K^{n+1} \setminus \{0\}$ по действию группы K^* умножениями на скаляр λ: $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Иногда мы будем говорить о проективном пространстве, состоящем из одномерных подпространств векторного пространства V над полем K, не указывая конкретного изоморфизма V с K^{n+1} (или даже не уточняя размерности V); в таких случаях оно будет обозначаться через $\mathbb{P}(V)$ или $\mathbb{P}V$. Точка пространства $\mathbb{P}^n$ обычно записывается как «однородный вектор» $[Z_0, \ldots, Z_n]$, под которым мы будем понимать прямую, порожденную $(Z_0, \ldots, Z_n) \in K^{n+1}$; точно так же для любого ненулевого вектора $v \in V$ мы будем обозначать через $[v]$ соответствующую ему точку в $\mathbb{P}V \cong \mathbb{P}^n$.

Многочлен $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ не является функцией на $\mathbb{P}^n$. Однако же если F — однородный многочлен степени d, то, поскольку

$$F(\lambda Z_0, \ldots, \lambda Z_n) = \lambda^d \cdot F(Z_0, \ldots, Z_n),$$

вполне можно говорить о его множестве нулей; мы будем называть *проективным многообразием* $X \subset \mathbb{P}^n$ множество общих нулей набора однородных многочленов $F_\alpha = 0$. Группа $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ действует на пространстве $\mathbb{P}^n$ (в лекции 18 мы покажем, что она является полной группой автоморфизмов $\mathbb{P}^n$), и мы будем говорить, что проективные многообразия X, $Y \subset \mathbb{P}^n$ *проективно эквивалентны*, если одно из них переводится в другое некоторым элементом этой группы.

В этом месте необходимо сделать два замечания по поводу терминологии. Во-первых, стандартные координаты $Z_0, \ldots, Z_n$ на K^{n+1} (или любые их линейные комбинации) называются *однородными координатами* на $\mathbb{P}^n$, но этот термин может ввести в заблуждение: они даже не являются функциями на $\mathbb{P}^n$ (функциями являются только их отношения Z_i/Z_j, да и то только там, где знаменатель не обращается в нуль). Точно так же мы часто будем называть однородный многочлен $F(Z_0, \ldots, Z_n)$ многочленом на $\mathbb{P}^n$, но при этом мы не хотим сказать, что F действительно является функцией. Заметим, что если $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$ есть проективное пространство, соответствующее векторному пространству V, то однородные координаты на $\mathbb{P}V$ суть элементы двойственного пространства V^*, а пространство однородных многочленов степени d на $\mathbb{P}V$ естественно изоморфно векторному пространству $\mathrm{Sym}^d(V^*)$.



Пусть $U_i \subset \mathbb{P}^n$ — множество точек $[Z_0, \ldots, Z_n]$, для которых $Z_i \neq 0$. Тогда на U_i отношения $z_j = Z_j/Z_i$ корректно определены и задают биекцию

$$U_i \cong \mathbb{A}^n.$$

Геометрический смысл этого отображения таков: прямой $L \subset K^{n+1}$, не содержащейся в гиперплоскости $(Z_i = 0)$, сопоставляется точка ее пересечения с гиперплоскостью $(Z_i = 1) \subset K^{n+1}$.

Тем самым проективное пространство можно рассматривать как компактификацию аффинного. Функции z_j на U_i называются *аффинными* (или *евклидовыми*) координатами на проективном пространстве или на открытом множестве U_i; совокупность всех U_i называется стандартным покрытием пространства $\mathbb{P}^n$ открытыми аффинными картами.

Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, то пересечение $X_i = X \cap \cap U_i$ является аффинным многообразием: если X задано многочленами $F_\alpha \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$, то, например, X_0 будет задано уравнениями

$$f_\alpha(z_1, \ldots, z_n) = F_\alpha(Z_0, \ldots, Z_n)/Z_0^d = F_\alpha(1, z_1, \ldots, z_n),$$

где $d = \deg(F_\alpha)$. Таким образом, проективное пространство есть объединение аффинных пространств, а любое проективное многообразие — объединение аффинных многообразий. И обратно, любое аффинное многообразие $X_0 \subset \mathbb{A}^n \cong U_0 \subset \mathbb{P}^n$ можно представить в виде пересечения аффинной карты U_0 с проективным многообразием X: если X_0 задано уравнениями

$$f_\alpha(z_1, \ldots, z_n) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} \cdot z_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{i_n}$$

степеней d_α, то X можно задать однородными уравнениями

$$F_\alpha(Z_0, \ldots, Z_n) = Z_0^{d_\alpha} \cdot f_\alpha(Z_1/Z_0, \ldots, Z_n/Z_0) = \\ = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} \cdot Z_0^{d_\alpha - \Sigma i_j} \cdot Z_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot Z_n^{i_n}.$$

В частности, подмножество проективного пространства $X \subset \mathbb{P}^n$ является проективным многообразием тогда и только тогда, когда все пересечения $X_i = X \cap U_i$ являются аффинными многообразиями.

Пример 1.1. Линейные пространства

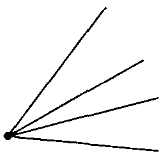
Вложение векторных пространств $W \cong K^{k+1} \hookrightarrow V \cong K^{n+1}$ индуцирует отображение $\mathbb{P}W \hookrightarrow \mathbb{P}V$; его образ Λ называется *линейным подпространством* размерности k в $\mathbb{P}V$, или *k-плоскостью*. $(n-1)$-плоскость в $\mathbb{P}^n$ называется *гиперплоскостью*, а 1-плоскость — *прямой*; отметим, что через любые две различные точки проективного пространства проходит единственная прямая. Линейное подпространство $\Lambda \cong \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ можно также описать как множество нулей $(n-k)$-мерного линейного пространства однородных линейных форм, так что линейное подпространство является подмногообразием в $\mathbb{P}^n$; обратно, всякое многообразие, заданное линейными формами, является линейным подпространством.

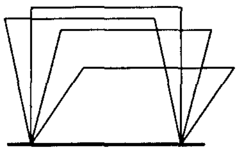
Пересечение двух линейных подпространств тоже является линейным подпространством, возможно пустым. Можно также говорить о линейной оболочке двух (или большего количества) линейных подпространств Λ и Λ': если $\Lambda = \mathbb{P}W$ и $\Lambda' = \mathbb{P}W'$, то это линейное подпространство, соответствующее сумме $W + W' \subset K^{n+1}$, или, что равносильно, наименьшее линейное подпространство, содержащее и Λ, и Λ': линейная оболочка обозначается через $\overline{\Lambda, \Lambda'}$. Вообще, для любых двух подмножеств Γ, $\Phi \subset \mathbb{P}^n$ их *линейной оболочкой* называется наименьшее линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$, содержащее их объединение.

Размерность линейной оболочки $\overline{\Lambda, \Lambda'}$ не превосходит суммы размерностей плюс 1, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Λ и Λ' не пересекаются. В общем случае имеется соотношение

$$\dim(\overline{\Lambda, \Lambda'}) = \dim(\Lambda) + \dim(\Lambda') - \dim(\Lambda \cap \Lambda'),$$

где подразумевается, что размерность пустого линейного пространства равна -1. Отметим, в частности, одно из основных свойств проективного пространства $\mathbb{P}^n$: если $k + l \geqslant n$, то любые два линейные подпространства Λ, Λ' размерностей k и l соответственно пересекаются по линейному пространству размерности не меньшей, чем $k + l - n$.





Заметим, что множество гиперплоскостей в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ тоже является проективным пространством; оно называется *двойственным проективным пространством* к $\mathbb{P}^n$ и обозначается $\mathbb{P}^{n*}$. В инвариантных терминах, если $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$ — проективное пространство, соответствующее векторному пространству V, то $\mathbb{P}^{n*} = \mathbb{P}(V^*)$ — проективное пространство, соответствующее двойственному векторному пространству V^*. Более общим образом, если $\Lambda \cong \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ — k-мерное линейное подпространство, то множество $(k + 1)$-плоскостей, содержащих Λ, является проективным пространством $\mathbb{P}^{n-k-1}$, а множество гиперплоскостей, содержащих Λ, есть двойственное проективное пространство $(\mathbb{P}^{n-k-1})^*$. В инвариантных терминах, если $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$ и $\Lambda = \mathbb{P}W$ для некоторого $(k + 1)$-мерного подпространства $W \subset V$, то пространство $(k + 1)$-плоскостей, содержащих Λ, есть проективное пространство $\mathbb{P}(V/W)$, соответствующее фактору, а множество гиперплоскостей, содержащих Λ, естественно изоморфно проективизации $\mathbb{P}((V/W)^*) = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}(W)) \subset \mathbb{P}(V^*)$ аннулятора $\mathrm{Ann}(W) \subset V^*$ пространства W.

Пример 1.2. Конечные множества

Любое конечное подмножество $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ является проективным подмногообразием: для любой точки $q \notin \Gamma$ можно найти однородный многочлен на $\mathbb{P}^n$, обращающийся в нуль во всех точках $p_i \in \Gamma$, кроме q (например, произведение однородных линейных форм, обращающихся в нуль в p_i, но не в q). Стало быть, если Γ состоит из d точек (в этом случае мы будем говорить, что Γ имеет *степень* d), то Γ можно задать уравнениями степени, не превосходящей d.

В общем случае можно спросить, какова наименьшая возможная степень многочленов, задающих данное многообразие $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$. Оценка, данная нами для конечных множеств, является точной, в чем можно убедиться, рассмотрев пример d точек, лежащих на одной прямой L; нетрудно видеть, что если многочлен $F(Z)$ степени $\leqslant d-1$ обращается в этих точках в нуль, то он тождественно равен нулю на L. С другой стороны, это единственный такой пример, как показывает следующее упражнение.

Упражнение 1.3. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ — конечное множество из d точек, не лежащих на одной прямой. Покажите, что Γ является множеством нулей набора многочленов степени $d-1$ или ниже.

Отметим, что слова «или ниже» в упражнении 1.3 излишни: если многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ является множеством нулей многочленов F_α степеней $d_\alpha \leqslant m$, то X можно представить и как множество нулей набора многочленов $\{X^I \cdot F_\alpha\}$, где для каждого α моном X^I пробегает множество всех мономов степени $m - d_\alpha$.

Можно пойти и в другом направлении, сконцентрировав внимание на множествах точек, удовлетворяющих только самым «неотвратимым» линейным соотношениям. Точнее говоря, набор точек проективного пространства $p_i = [v_i] \in \mathbb{P}^n$ называется *независимым*, если соответствующий набор векторов v_i линейно независим; эквивалентная формулировка: набор из l точек независим тогда и только тогда, когда их линейная оболочка является линейным пространством размерности $l-1$. В частности, любые $n+2$ точки в $\mathbb{P}^n$ всегда зависимы, а набор из $n+1$ точки зависим тогда и только тогда, когда эти точки лежат в некоторой гиперплоскости. Мы будем говорить что конечное множество $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ находятся *в общем положении*, если независимо любое его подмножество из не более чем $n+1$ точки. Если Γ содержит хотя бы $n+1$ точку, это эквивалентно тому, что любое его $(n+1)$-точечное подмножество независимо. Теперь можно спросить, какова наименьшая степень многочленов, с помощью которых можно задать любое конечное множество из d точек в общем положении в $\mathbb{P}^n$; следующие ниже теорема и упражнение дают частичный ответ на этот вопрос.

Теорема 1.4. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ — множество из $d \leqslant 2n$ точек в общем положении. Тогда Γ является множеством общих нулей системы квадратичных многочленов.*

Доказательство. Мы проведем доказательство для множества $\Gamma = \{p_1, \ldots, p_{2n}\}$, состоящего в точности из $2n$ точек (при $d < 2n$ доказательство только проще). Итак, пусть точка $q \in \mathbb{P}^n$ обладает тем свойством, что всякий квадратичный многочлен, обращающийся в нуль на Γ, обращается в нуль и в точке q; нам надо доказать, что $q \in \Gamma$. Для этого заметим, что для всякого разбиения $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ множества Γ на два n-элементных подмножества каждое из множеств Γ_i будет порождать гиперплоскость $\Lambda_i \subset \mathbb{P}^n$; поскольку объединение $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ является множеством нулей квадратичного многочлена, обращающегося в нуль на Γ, должно выполняться включение $q \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. В частности, q должна лежать по крайней мере на одной из гиперплоскостей, порожденных точками из множества Γ.

Пусть теперь $\{p_1, \ldots, p_k\}$ — любое минимальное подмножество в Γ, обладающее тем свойством, что q лежит в линейной оболочке этого подмножества; в силу сказанного выше имеем $k \leqslant n$. Пусть $\Sigma \subset \Gamma \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ — произвольное подмножество из $n - k + 1$ элемента; тогда, в силу общего положения, гиперплоскость Λ, порожденная точками $p_2, \ldots, p_k$ и множеством Σ, не содержит p_1. Следовательно, Λ не может содержать q, поскольку линейная оболочка точек $p_2, \ldots, p_k$ и q содержит p_1; тем самым q обязана лежать в гиперплоскости, порожденной остальными n точками из Γ. Итак, q обязана содержаться в линейной оболочке p_1 и любых $n - 1$ точек из $p_{k+1}, \ldots, p_{2n}$; поскольку в пересечении всех этих гиперплоскостей лежит только сама точка p_1, мы заключаем, что $q = p_1$. □

Упражнение 1.5. Докажите более общее утверждение: при $k \geqslant 2$ любое конечное множество Γ, состоящее из $d \leqslant kn$ точек в общем положении, является множеством нулей многочленов степени, не превосходящей k (как мы увидим в упражнении 1.15, эта оценка точна).

В качестве заключительного замечания о конечных подмножествах в $\mathbb{P}^n$ сформулируем (в упражнении) следующий стандартный факт.

Упражнение 1.6. Покажите, что любые два упорядоченных набора из $n + 2$ точек $\mathbb{P}^n$ в общем положении проективно эквивалентны.

Теперь возникает естественный вопрос о том, когда будут проективно эквивалентны два упорядоченных набора из $d \geqslant n + 3$ точек в $\mathbb{P}^n$ в общем положении. При $n = 1$ ответ дается *двойным отношением*

$$\lambda(z_1, \ldots, z_4) = \frac{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3) \cdot (z_2 - z_4)};$$

поскольку $\lambda(z_1, \ldots, z_4)$ есть образ z_4 при (единственном) линейном отображении проективной прямой, переводящем z_1, z_2 и z_3 в 1, ∞ и 0 соответственно, два набора $z_1, \ldots, z_4$ и $z'_1, \ldots, z'_4 \in \mathbb{P}^1$ можно перевести один в другой с сохранением порядка тогда и только тогда, когда совпадают двойные отношения: $\lambda(z_1, \ldots, z_4) = \lambda(z'_1, \ldots, z'_4)$ (см., например, [A]). Мы дадим ответ на вопрос для произвольного n в случае, когда $d = n + 3$, в упражнении 1.19; аналогичный явный ответ при $d > n + 3$ неизвестен.

Пример 1.7. Гиперповерхности

Гиперповерхностью называется подмногообразие $X \subset \mathbb{P}^n$, являющееся множеством нулей одного однородного многочлена $F(Z_0, \ldots, Z_n)$ — например, плоская кривая или поверхность в трехмерном пространстве $\mathbb{P}^3$. (В лекции 11 мы увидим, что всякое многообразие размерности $n-1$ в $\mathbb{P}^n$ является гиперповерхностью в этом смысле, но для начала нужно будет хотя бы дать определение размерности; см. обсуждение в конце лекции.)

Заметим, что любая гиперповерхность X является множеством нулей однородного многочлена F, не содержащего кратных неприводимых множителей. Если ограничиться только такими многочленами, то F определен по X однозначно с точностью до умножения на скаляр. (Чтобы доказать это, нам потребуется теорема Гильберта о нулях (теорема 5.1). В частности, для того, чтобы это утверждение было верным, надо потребовать, чтобы основное поле было алгебраически замкнутым; например, мы не хотим считать точку $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ гиперповерхностью, хотя она является множеством нулей одного-единственного многочлена $\sum x_i^2$.) Коль скоро этот факт установлен, степень многочлена F называется *степенью* гиперповерхности X. В лекции 18 мы определим понятие степени для произвольного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, обобщающее оба упомянутых до сих пор случая; пока что заметим только, что два наши определения степени согласуются в том случае, когда они оба применимы, а именно, для гиперповерхностей в $\mathbb{P}^1$.

Пример 1.8. Аналитические подмногообразия и аналитические подмножества

Это не столько пример, сколько теорема, которую на этом этапе нам необходимо (без доказательства, разумеется) сформулировать. Для начала заметим, что поскольку многочлены $f(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ являются голоморфными функциями от своих переменных $z_1, \ldots, z_n$, алгебраическое многообразие X в $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ или $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ будет и комплексно-аналитическим подмножеством этих комплексных многообразий (т. е. подмножеством, которое локально можно задать как множество нулей набора голоморфных функций). Замечательным образом это снабжает нас готовым определением размерности алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, а также определением особых и неособых точек многообразия X. С алгебраической точки зрения эти определения неудовлетворительны, и основывать свои рассмотрения на них мы не будем, но время от времени мы будем пользоваться ими неявно, называя, например, какое-то многообразие «кривой».

Знаменитая теорема, которую мы должны тут упомянуть, является обращением (для случая подмножеств проективного пространства) замечаний из предыдущего абзаца.

Теорема 1.9 (теорема Чжоу). *Если $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ — (замкнутое) комплексно-аналитическое подмножество, то X — алгебраическое подмногообразие.*

Отметим, что это утверждение будет совершенно неверно, если заменить $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$; например, множество целых чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ является аналитическим подмножеством. В [S2] читатель найдет широкое обсуждение этой теоремы и смежных вопросов.

Пример 1.10. Скрученная кубика

Ее всегда приводят в качестве первого конкретного примера многообразия, отличного от гиперповерхности или конечного множества. По определению, скрученная кубика C — это образ отображения $\nu\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, заданного в аффинных координатах (в обоих пространствах) формулой

$$\nu\colon x \mapsto (x,\, x^2,\, x^3)$$

или, в однородных координатах на обоих пространствах,

$$\nu\colon [X_0,\, X_1] \mapsto [X_0^3,\, X_0^2X_1,\, X_0X_1^2,\, X_1^3] = [Z_0,\, Z_1,\, Z_2,\, Z_3].$$

Скрученная кубика C лежит на трех квадратичных поверхностях Q_0, Q_1 и Q_2, являющихся множествами нулей многочленов

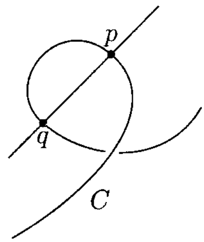
$$F_0(Z) = Z_0Z_2 - Z_1^2, \quad F_1(Z) = Z_0Z_3 - Z_1Z_2, \quad F_2(Z) = Z_1Z_3 - Z_2^2$$

соответственно, и совпадает с их пересечением: если у точки $p \in \mathbb{P}^3$ координаты $[Z_0,\, Z_1,\, Z_2,\, Z_3]$ являются нулями этих трех многочленов, то Z_0 или Z_3 должно быть отлично от нуля; в первом случае можно записать $p = \nu([Z_0,\, Z_1])$, а во втором $p = \nu([Z_2,\, Z_3])$. В то же время C не является пересечением никаких двух из этих квадрик: согласно следующему упражнению, Q_i и Q_j пересекаются по объединению кривой C и прямой L_{ij}.

Упражнение 1.11. (а) Покажите, что при $0 \leqslant i < j \leqslant 2$ поверхности Q_i и Q_j пересекаются по объединению кривой C и некоторой прямой L. (b) И вообще, для всякого $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$ положим

$$F_\lambda = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$$

и обозначим через Q_λ поверхность, заданную многочленом F_λ. Покажите, что при $\mu \neq \nu$ квадрики Q_μ и Q_ν пересекаются по объединению кривой C и прямой $L_{\mu,\nu}$. (Изящный способ доказать это будет описан после упражнения 9.16; на данный момент предполагается, что вы сделаете упражнение «руками», хотя вычисление, видимо, будет утомительным.)



На самом деле прямые, возникающие в этой конструкции, образуют интересное семейство. Например, можно заметить, что всякая секущая кривой C (то есть всякая прямая $\overline{pq}$, соединяющая две точки кривой) может быть получена таким способом. Чтобы в этом убедиться, обозначим через $r \in \overline{pq}$ произвольную точку, отличную от p и q. В трехмерном векторном пространстве многочленов F_λ, обращающихся в нуль на C, содержится двумерное подпространство многочленов, обращающихся в нуль в r; пусть оно порождено многочленами F_μ и F_ν. Эти квадратичные многочлены обращаются в нуль в трех точках на прямой $\overline{pq}$ и, следовательно, тождественно обращаются в нуль на этой прямой; теперь из упражнения 1.11 мы заключаем, что $Q_\mu \cap Q_\nu = C \cup \overline{pq}$.

Одно терминологическое замечание: хотя мы определили скрученную кубику как некоторую конкретную кривую $C \subset \mathbb{P}^3$, мы будем называть скрученной кубикой также любую кривую в $\mathbb{P}^3$, проективно эквивалентную кривой C, то есть любую кривую, задаваемую параметрически как образ отображения

$$[X] \mapsto [A_0(X), A_1(X), A_2(X), A_3(X)],$$

где A_0, A_1, A_2, A_3 образуют базис в пространстве однородных кубических многочленов от $X = [X_0, X_1]$.

Упражнение 1.12. Покажите, что точки любого конечного подмножества скрученной кубики находятся в общем положении, т. е. что любые четыре из них линейно порождают все $\mathbb{P}^3$.

В теореме 1.18 мы увидим, что для любых шести точек общего положения в $\mathbb{P}^3$ существует и единственна скрученная кубика, содержащая все шесть этих точек.

Упражнение 1.13. Покажите, что если семь точек $p_1, \ldots, p_7 \in \mathbb{P}^3$ лежат на скрученной кубике, то множество общих нулей квадратных многочленов, обращающихся в нуль в точках p_i, совпадает с этой скрученной кубикой. (Отсюда мы видим, что оценка из теоремы 1.4 точна, по крайней мере, при $n = 3$.)

Пример 1.14. Нормальные рациональные кривые

Эти кривые можно рассматривать как обобщение скрученной кубики: по определению, нормальная рациональная кривая $C \subset \mathbb{P}^d$ есть образ отображения

$$\nu_d \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d,$$

заданного формулой

$$\nu_d \colon [X_0, X_1] \mapsto [X_0^d, X_0^{d-1}X_1, \ldots, X_1^d] = [Z_0, \ldots, Z_d].$$

Немедленно проверяется, что этот образ $C \subset \mathbb{P}^d$ является множеством общих нулей многочленов $F_{i,j}(Z) = Z_iZ_j - Z_{i-1}Z_{j+1}$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1$. Отметим, что при $d > 3$ кривую C можно задать с помощью только части этих многочленов, например, $F_{i,i}$ при $i = 1, \ldots, d-1$ и $F_{1,d-1}$. (Отметим также, что при $d = 2$ мы получаем плоскую конику $Z_0Z_2 = Z_1^2$; на самом деле нетрудно видеть, что всякая плоская коника — т. е. множество нулей квадратичного многочлена в $\mathbb{P}^2$, — отличная от объединения прямых, проективно эквивалентна этой кривой.) Кроме того, как и в случае скрученной кубики, если мы заменим мономы $X_0^d, X_0^{d-1}X_1, \ldots, X_1^d$ на произвольный базис $A_0, \ldots, A_d$ пространства однородных многочленов степени d на $\mathbb{P}^1$, мы получим отображение, образ которого проективно эквивалентен $\nu_d(\mathbb{P}^1)$; любую такую кривую мы также будем называть нормальной рациональной кривой.

Заметим, что любые $d+1$ точек на нормальной рациональной кривой линейно независимы. Это равносильно тому факту, что определитель Вандермонда обращается в нуль тогда и только тогда, когда две его строки совпадают. Позднее мы увидим, что нормальная рациональная кривая — единственная кривая, обладающая таким свойством. (Более слабое утверждение о том, что никакие три точки на нормальной рациональной кривой не коллинеарны, следует также из того, что C является множеством нулей квадратичных полиномов.)

Упражнение 1.15. Покажите, что если $p_1, \ldots, p_{kd+1}$ — произвольные точки на нормальной рациональной кривой в $\mathbb{P}^d$, то любой однородный многочлен степени k, обращающийся в нуль в точках p_i, обращается в нуль и на всей C. Пользуясь этим, покажите, что оценка из упражнения 1.5 точна.

Пример 1.16. Детерминантальное представление нормальных рациональных кривых

Удобный (и важный) способ записать уравнения нормальной рациональной кривой состоит в том, чтобы представить эти уравнения в виде условия обращения в нуль (2×2)-миноров некоторой матрицы из линейных форм. Именно, для всякого целого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$, нормальную рациональную кривую можно задать как множество точек $[Z_0, \ldots, Z_d] \in \mathbb{P}^d$, для которых ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{k-1} & Z_k \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & \ldots & \ldots & Z_{k+1} \\ Z_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & Z_{d-1} \\ Z_{d-k} & \ldots & \ldots & \ldots & Z_{d-1} & Z_d \end{pmatrix}$$

равен единице. Вообще, многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$, уравнения которого могут быть представлены в таком виде, называется *детерминантальным*: мы будем встречаться с ними в разных местах книги, а непосредственно детерминантальным многообразиям будет посвящена лекция 9.

В упражнении 1.25 мы увидим, что при $k = 1$ или $d-1$ элементы выписанной выше матрицы можно заменить линейными формами $L_{i,j}$ более общего вида, и, если только они не удовлетворяют некоторым нетривиальным условиям, связанным с линейной зависимостью, многообразие, определяемое условием обращения в нуль всех (2×2)-миноров, по-прежнему будет нормальной рациональной кривой. Для других значений k это уже не так.

Пример 1.17. Другая параметризация нормальных рациональных кривых

Есть еще один способ параметризовать нормальную рациональную кривую. Он основан на том наблюдении, что если $G(X_0, X_1)$ — однородный многочлен степени $d+1$ с различными корнями (т. е. $G(X_0, X_1) = \prod(\mu_i X_0 - \nu_i X_1)$, причем точки $[\mu_i, \nu_i] \in \mathbb{P}^1$ различны), то многочлены $H_i(X) = G(X)/(\mu_i X_0 - \nu_i X_1)$ образуют базис в пространстве однородных многочленов степени d: если существует линейное соотношение вида $\sum a_i H_i(X_0, X_1) = 0$, то, подставляя $(X_0, X_1) = (\nu_i, \mu_i)$, получаем $a_i = 0$. Стало быть, образ отображения

$$\nu_d \colon [X_0, X_1] \mapsto [H_1(X_0, X_1), \ldots, H_{d+1}(X_0, X_1)]$$

является нормальной рациональной кривой в $\mathbb{P}^d$. Поделив однородный вектор в правой части на многочлен G, мы можем записать это отображение в виде

$$\nu_d \colon [X_0, X_1] \mapsto \left[\frac{1}{\mu_1 X_0 - \nu_1 X_1}, \ldots, \frac{1}{\mu_{d+1} X_0 - \nu_{d+1} X_1}\right].$$

Заметим, что эта нормальная рациональная кривая проходит через все «координатные точки» $[1, \ldots, 0], \ldots, [0, \ldots, 1] \in \mathbb{P}^d$, так как в них переходят нули полинома G. Кроме того, если все μ_i и ν_i отличны от нуля, то точки 0 и ∞ (то есть $[1, 0]$ и $[0, 1]$) переходят в точки $[\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_{d+1}^{-1}]$ и $[\nu_1^{-1}, \ldots, \nu_{d+1}^{-1}]$, причем при этом могут получиться любые две точки, не лежащие на координатных гиперплоскостях. Обратно, всякая нормальная рациональная кривая, проходящая через $d+1$ координатную точку, может быть параметризована таким способом. Стало быть, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.18. *Через любые $d+3$ точки в общем положении в $\mathbb{P}^d$ проходит единственная нормальная рациональная кривая.*

С помощью теоремы 1.18 мы можем ответить на вопрос, поставленный после упражнения 1.6: когда два набора из $n+3$ точек в общем положении в $\mathbb{P}^n$ проективно эквивалентны? Ответ прост, но изящен. Именно, через $n+3$ точки $p_1, \ldots, p_{n+3} \in \mathbb{P}^n$ проходит единственная нормальная рациональная кривая $\nu_n(\mathbb{P}^1)$, так что можно перевести точки $p_1, \ldots, p_{n+3} \in \mathbb{P}^n$ в $n+3$ точки $q_i = \nu_n^{-1}(p_i) \in \mathbb{P}^1$. q_i

Упражнение 1.19. Покажите, что набор точек $p_i \in \mathbb{P}^n$ эквивалентен как упорядоченное множество другому аналогичному набору $\{p'_1, \ldots$ $\ldots, p'_{n+3}\}$ тогда и только тогда, когда соответствующие упорядоченные наборы $q_1, \ldots, q_{n+3}$ и $q'_1, \ldots, q'_{n+3}$ точек на $\mathbb{P}^1$ проективно эквивалентны, т. е. когда имеется равенство двойных отношений $\lambda(q_1, q_2, q_3, q_i) =$ $= \lambda(q'_1, q'_2, q'_3, q'_i)$ для всех $i = 4, \ldots, n+3$. (Вы можете воспользоваться характеризацией двойного отношения, приведенной после упражнения 1.6.)

Пример 1.20. Семейство плоских коник

В частном случае $d = 2$ на теорему 1.18 можно посмотреть по-другому. В этом случае можно заметить, что нормальная рациональная кривая степени 2 задается однородным квадратичным многочленом $Q(Z_0, Z_1, Z_2)$, не распадающимся в произведение линейных форм; Q определяется кривой C однозначно с точностью до умножения на скаляр. Стало быть, множество таких кривых можно отождествить с подмножеством проективного пространства $\mathbb{P}V = \mathbb{P}^5$, соответствующего векторному пространству

$$V = \{aZ_0^2 + bZ_1^2 + cZ_2^2 + dZ_0Z_1 + eZ_0Z_2 + fZ_1Z_2\},$$

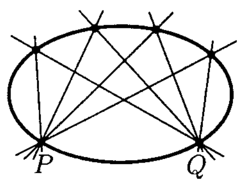
состоящему из квадратичных многочленов. В общем случае элемент этого проективного пространства называется *плоской коникой*, или просто *коникой*, а нормальная рациональная кривая в $\mathbb{P}^2$, то есть точка, соответствующая неприводимому квадратичному многочлену, называется *гладкой коникой*. Заметим теперь, что множество коник, проходящих через данную точку $p = [Z_0, Z_1, Z_2]$, является гиперплоскостью в $\mathbb{P}^5$. а поскольку любые пять гиперплоскостей в $\mathbb{P}^5$ обязаны иметь непустое пересечение (равносильное утверждение: система из пяти однородных линейных уравнений с шестью неизвестными имеет ненулевое решение), существует коника, проходящая через любые пять данных точек $p_1, \ldots, p_5$. Если точки p_i находятся в общем положении, то эта коника к тому же не может быть объединением двух прямых.

Упражнение 1.21. Проверьте, что гиперплоскости в $\mathbb{P}^5$, соответствующие таким образом пяти точкам $p_1, \ldots, p_5$, никакие четыре из которых не коллинеарны, будут линейно независимы (т. е. будут пересекаться в одной точке), и тем самым докажите утверждение о единственности. (На классическом языке это утверждение звучало бы так: «точки $p_1, \ldots, p_5$ накладывают независимые линейные условия на коники».)

Отождествление множества коник с проективным пространством $\mathbb{P}^5$ — первый пример *пространства параметров*, понятия, встречающегося в алгебраической геометрии повсюду; мы определим пространства параметров в лекции 4, а обсудим их более подробно в лекции 21.

Пример 1.22. Синтетическая конструкция нормальных рациональных кривых

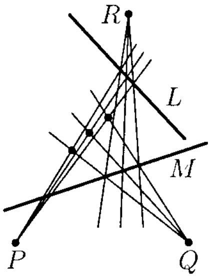
В заключение мы должны упомянуть синтетическую (и полезную по крайней мере в одном отношении) конструкцию нормальных рациональных кривых. Мы начнем со случая коник, когда конструкция совсем проста. Пусть P и Q — две точки на плоскости $\mathbb{P}^2$. Тогда прямые, проходящие через каждую из этих точек, естественно параметризуются точками $\mathbb{P}^1$ (например, если точка P задана как множество общих нулей двух линейных форм $L(Z) = M(Z) = 0$, то прямые, проходящие через P, имеют вид $\lambda L(Z) + \mu M(Z) = 0$, где $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$). Тем самым возникает взаимно однозначное соответствие между прямыми, проходящими через P, и прямыми, проходящими через Q. Выберем какую-нибудь из возникающих таким образом биекций с тем единственным условием, чтобы прямая $\overline{PQ}$ не соответствовала самой себе; тогда две соответствующие друг другу прямые всегда пересекаются ровно в одной точке.



(Заметим, что тем самым исключается простейший способ установления взаимно однозначного соответствия между множествами прямых, проходящих через P и через Q: выбрать вспомогательную прямую L и параметризовать с ее помощью оба множества, т. е. сделать так, чтобы для всякой $R \in L$ прямые $\overline{PR}$ и $\overline{QR}$ соответствовали друг другу.)

Мы утверждаем, что множество точек пересечения соответствующих прямых является коникой, и обратно, что любая коника может быть получена такой конструкцией.

Читатель может сказать, что эта конструкция не является в полной мере синтетической, поскольку биекция между семействами прямых, проходящих через P и Q соответственно, задавалась аналитически.



На самом деле в классической конструкции каждое из этих семейств параметризовалось с помощью своей вспомогательной прямой, после чего между этими вспомогательными прямыми устанавливалось взаимно однозначное соответствие с помощью прямых, проходящих через вспомогательную точку. Конструкция выглядела так: выбрать неколлинеарные точки P, Q и R и две различные прямые L и M таким образом, чтобы точка $L \cap M$ не лежала на прямой $\overline{PQ}$. Для всякой прямой N, проходящей через R, обозначим через S_N точку пересечения прямой L_N, соединяющей P и $N \cap L$, и прямой M_N, соединяющей Q и $N \cap M$. Тогда геометрическое место точек S_N является коникой.

Упражнение 1.23. Покажите, что построенное таким образом множество действительно является гладкой коникой, проходящей через точки P, Q, $L \cap M$, $\overline{RQ} \cap L$ и $\overline{RP} \cap M$. Пользуясь этим, покажите еще раз, что через пять точек в общем положении на плоскости проходит единственная гладкая коника.

Как и было сказано, эту конструкцию можно обобщить до конструкции нормальных рациональных кривых в произвольном проективном пространстве $\mathbb{P}^d$. Именно, начнем с того, что выберем d линейных подпространств коразмерности 2; обозначим их $\Lambda_i \cong \mathbb{P}^{d-2} \subset \mathbb{P}^d$. Стало быть, семейство $\{H_i(\lambda)\}$, состоящее из гиперплоскостей в $\mathbb{P}^d$, содержащих Λ_i, параметризовано параметром $\lambda \in \mathbb{P}^1$; выберем эти параметризации таким образом, чтобы для всякого λ гиперплоскости $H_1(\lambda), \ldots, H_d(\lambda)$ были линейно независимы, т. е. пересекались в единственной точке $p(\lambda)$. В этом случае геометрическое место точек $p(\lambda)$, где $\lambda \in \mathbb{P}^1$, является нормальной рациональной кривой.

Упражнение 1.24. Докажите это утверждение.

С помощью описанной конструкции мы можем еще раз убедиться в том, что через всякие $d+3$ точки в $\mathbb{P}^d$, никакие $d+1$ из которых не являются зависимыми, проходит единственная нормальная рациональная кривая. Именно, обозначим через $\Lambda_i \cong \mathbb{P}^{d-2} \subset H$ линейную оболочку точек $P_1, \ldots, \widehat{P_i}, \ldots, P_d$. Тогда при всяком выборе параметризаций множеств гиперплоскостей в $\mathbb{P}^d$, содержащих Λ_i, выполняется условие независимости, т.е. для каждого $\lambda \in \mathbb{P}^1$ гиперплоскости $H_i(\lambda)$ пересекаются в одной точке $p(\lambda)$. Получающаяся при этом нормальная рациональная кривая обязательно будет содержать точки $P_1, \ldots, P_d$; чтобы она содержала и три оставшиеся точки P_{d+1}, P_{d+2} и P_{d+3}, выберем наши параметризации семейств гиперплоскостей, проходящих через Λ_i, так, чтобы гиперплоскости, содержащие P_{d+1}, P_{d+2} и P_{d+3}, отвечали значениям параметра $\lambda = 0$, 1 и ∞ соответственно.

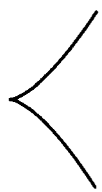
Упражнение 1.25. Как мы отмечали в примере 1.16, нормальную рациональную кривую можно описать как множество таких точек $[Z_0, \ldots, Z_d]$, что матрица

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{d-2} & Z_{d-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & \ldots & \ldots & Z_d \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1. Проинтерпретируйте это в терминах конструкции из упражнения 1.24, взяв в качестве Λ_i плоскость $(Z_{i-1} = Z_i = 0)$, а в качестве $H_i(\lambda)$ — гиперплоскость $(\lambda_1 Z_{i-1} + \lambda_2 Z_i = 0)$. Обобщите эту конструкцию следующим образом: пусть $(L_{i,j})$ — произвольная $(2 \times d)$-матрица линейных форм на $\mathbb{P}^d$, обладающая тем свойством, что для любых $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ гиперплоскости $(\lambda_1 L_{0,j} + \lambda_1 L_{1,j} = 0)$ независимы; тогда множество точек $[Z] \in \mathbb{P}^d$, для которых матрица $L_{i,j}(Z)$ имеет ранг 1, является нормальной рациональной кривой.

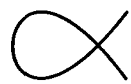
Пример 1.26. Другие рациональные кривые

Для определения отображений ν_d необходимо выбрать базис в пространстве однородных многочленов степени d на $\mathbb{P}^1$. Но можно выбрать и произвольный набор $A_0, \ldots, A_m$, состоящий из линейно независимых многочленов (без общих нулей), и попытаться описать образ получающегося отображения в $\mathbb{P}^m$ (если бы выбранные нами многочлены были линейно зависимы, это всего-навсего означало бы, что образ содержится в собственном линейном подпространстве пространства $\mathbb{P}^m$). Рассмотрим, например, случай $d = 3$ и $m = 2$ и посмотрим на отображения



$y^2 = x^3$

$$\mu, \nu \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2,$$



$y^2 = x^3 + x^2$

заданные формулами

$$\mu \colon [X_0, X_1] \mapsto [X_0^3, X_0X_1^2, X_1^3],$$
$$\nu \colon [X_0, X_1] \to [X_0^3, X_0X_1^2 - X_0^3, X_1^3 - X_0^2X_1].$$

Образы обоих отображений являются кубическими гиперповерхностями в $\mathbb{P}^2$, заданными уравнениями $Z_0Z_2^2 = Z_1^3$ и $Z_0Z_2^2 = Z_1^3 + Z_0Z_1^2$ соответственно; в евклидовых координатах они суть не что иное, как каспидальная кубическая кривая $y^2=x^3$ и нодальная кубическая кривая $y^2=x^3+x^2$.

Упражнение 1.27. Покажите, что образы отображений μ и ν действительно задаются такими кубическими уравнениями.

Упражнение 1.28. Покажите, что образ всякого отображения $\nu\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, заданного тройкой однородных кубических многочленов $A_i(X_0, X_1)$ без общих нулей, удовлетворяет некоторому кубическому уравнению. (На самом деле всякий такой образ проективно эквивалентен одной из двух определенных выше кривых; мы докажем это в упражнении 3.8, а затем еще раз — после упражнения 10.10.) (*)

В качестве другого примера, в котором мы увидим непрерывное семейство кривых, не являющихся проективно эквивалентными (хотя и не сможем доказать, что это семейство именно таково), рассмотрим (при $d=4$ и $m=3$) отображение

$$\nu_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3,$$

заданное формулой

$$\nu_{\alpha,\beta}\colon [X_0, X_1] \mapsto$$
$$\mapsto [X_0^4 - \beta X_0^3 X_1,\ X_0^3 X_1 - \beta X_0^2 X_1^2,\ \alpha X_0^2 X_1^2 - X_0 X_1^3,\ \alpha X_0 X_1^3 - X_1^4].$$

Образы $C_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{P}^3$ этих отображений называются *рациональными кривыми четвертой степени в* $\mathbb{P}^3$. Следующее упражнение, видимо, будет трудно сделать «голыми руками», но после прочтения следующей лекции оно станет проще.

Упражнение 1.29. Покажите, что кривая $C_{\alpha,\beta}$ — действительно алгебраическое многообразие и что ее можно представить в виде множества общих нулей одного квадратичного и двух кубических многочленов.

В упражнении 2.19 мы увидим, что кривые $C_{\alpha,\beta}$ образуют непрерывное семейство, состоящее из проективно неэквивалентных кривых.

Пример 1.30. Многообразия, определенные над подполями поля K

Это не столько пример, сколько предупреждение по поводу терминологии.

Пусть, во-первых, $L \subset K$ — подполе. Тогда через $\mathbb{A}^n(L)$ мы будем обозначать подмножество $L^n \subset K^n$. Аналогичным образом будем обозначать через $\mathbb{P}^n(L) \subset \mathbb{P}^n_K$ множество точек $[Z_0, \ldots, Z_n]$, для которых отношения Z_i/Z_j лежат в L всякий раз, когда они имеют смысл; иными словами, это множество точек, которые можно записать в виде $[Z_0, \ldots, Z_n]$, где $Z_i \in L$. Все дальнейшее применимо и к проективным многообразиям, но мы будем давать формулировки для аффинного случая.

Будем говорить, что подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^n_K$ *определено над* L, если оно является множеством нулей многочленов $f_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \in \in L[z_1, \ldots, z_n]$. Для такого многообразия X определим *множество точек* X, *определенных над* L, как пересечение $X \cap \mathbb{A}^n(L)$. Не следует, однако, смешивать множество точек X, определенных над L, с самим многообразием X; например, подмногообразие в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, заданное уравнением $x^2 + y^2 + 1 = 0$, определено над $\mathbb{R}$ и не имеет точек, определенных над $\mathbb{R}$, но оно не является пустым многообразием.

Замечание о размерности, гладкости и степени

Как уже отмечалось в предисловии, мы стоим перед проблемой. В первой же лекции нам неоднократно приходилось апеллировать к трем основным понятиям алгебраической геометрии: размерности, степени и гладкости. В самом деле, мы называли различные многообразия кривыми или поверхностями; мы определили степень конечных множеств и гиперповерхностей (а неявным образом — и скрученной кубики); наконец, мы провели различие между гладкими и произвольными кониками. Разумеется, три этих понятия лежат в основе всего предмета; они структурируют и фокусируют наше исследование многообразий. Тем не менее формальные определения этих понятий придется отложить до того момента, когда мы разовьем некоторый технический аппарат, дадим необходимые определения и докажем ряд теорем из области оснований. В то же самое время я считаю, что перед (или одновременно с) введением этого аппарата желательно привести как можно больше примеров.

Итак, у нас получился в некотором смысле порочный круг: примеры (согласно нашему решению) идут раньше определений и оснований предмета, эти последние (по необходимости) идут до определения понятий размерности, гладкости и степени, а эти понятия, в свою очередь, играют большую роль в анализе примеров.

Что же можно с этим сделать? Во-первых, у нас все же присутствует наивное представление о том, что следует иметь в виду под размерностью или гладкостью, и если я время от времени буду употреблять соответствующие слова, я попрошу читателя проявить терпимость. (Будем надеяться, что читателя не смутит, если я буду называть множество нулей многочлена в $\mathbb{P}^3$ «поверхностью» до формального определения размерности.) И во-вторых, я призываю читателя, по мере того, как мы будем приводить в части 1 различные примеры, заглядывать, если ему это интересно, в те места части 2, где говорится о размерности, степени, гладкости или касательных пространствах вводимых нами многообразий.

Лекция 2

РЕГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ

В предыдущей лекции мы определили объекты категории, которую мы будем изучать; теперь определим морфизмы. Как и следовало ожидать, это совсем просто для аффинных многообразий и немного сложнее для проективных.

Топология Зарисского

Начнем с того, что введем некоторую терминологию, которая будет нам полезна, хотя поначалу покажется несколько странной. *Топологией Зарисского* на многообразии X называется топология, в которой замкнутыми подмножествами являются подмногообразия в X, т. е. множества общих нулей наборов многочленов на X. Тем самым, если $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие, то база топологии состоит из подмножеств $U_f = \{p \in X \mid f(p) \neq 0\}$, где f пробегает множество многочленов; такие подмножества называются *главными* открытыми подмножествами. Аналогично, если $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, то база топологии на X состоит из множеств $U_F = \{p \in X \mid F(p) \neq 0\}$, где F — однородный многочлен; такие открытые подмножества также называются главными.

Именно этой топологией мы будем снабжать все многообразия, с которыми будем работать, так что если речь будет идти об открытом множестве без дальнейших уточнений, то мы будем под ним понимать дополнение к некоторому подмногообразию. За нашим использованием этой топологии стоит факт фундаментальной важности: практически все конструкции алгебраической геометрии могут быть определены чисто алгебраически и имеют смысл для многообразий над любым полем. Поэтому обычная (или, как говорят, *классическая* или *аналитическая*) топология логически неуместна. В то же время мы должны подчеркнуть, что топология Зарисского — в первую очередь формальная конструкция; она скорее является частью терминологии, чем отражает геометрию многообразия. Так, например, любые две плоские кривые, заданные неприводимыми многочленами над равномощными[1] алгебраически замкнутыми полями, гомеоморфны, какой бы ни была их степень и какими бы ни были поля; как топологические пространства

[1] В этом месте в авторский текст внесено небольшое уточнение. — *Прим. перев.*

они — просто-напросто множества, в которых собственные подмножества замкнуты тогда и только тогда, когда они конечны. Кроме того, топология Зарисского не удовлетворяет никаким обычным аксиомам отделимости, поскольку любые два открытых множества в $\mathbb{P}^n$ пересекаются. Короче говоря, в большинстве случаев, как вы увидите, нам будет очень удобно рассуждать на языке топологии Зарисского, но если вы решите закрыть глаза и представить себе алгебраическое многообразие, то, вероятно, лучше «видеть» классическую топологию.

Отметим, что топология Зарисского является, как говорят, *нётеровой*, то есть для произвольной цепочки $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \ldots$ замкнутых подмножеств многообразия X найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $Y_m = Y_{m+1} = Y_{m+2} = \ldots$ Это утверждение эквивалентно тому, что в кольце многочленов $K[Z_0, \ldots, Z_n]$ любой идеал конечно порожден, что, в свою очередь, означает, что $K[Z_0, \ldots, Z_n]$ является нётеровым кольцом (см. [E], [AM]).

Здесь мы должны дать еще одно определение. Открытое подмножество $U \subset X$ проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ называется *квазипроективным многообразием* (иными словами, квазипроективные многообразия суть *локально замкнутые подмножества* в $\mathbb{P}^n$ относительно топологии Зарисского). Все аффинные и проективные многообразия являются квазипроективными, однако класс квазипроективных многообразий гораздо шире (в упражнении 2.3 мы увидим простейший пример квазипроективного многообразия, не изоморфного ни аффинному, ни проективному); на практике, впрочем, почти все многообразия, с которыми мы будем иметь дело, будут или аффинными, или проективными.

В дальнейшем, когда мы будем говорить о *многообразии* X, мы будем подразумевать квазипроективное многообразие. При этом, если мы будем говорить о *подмногообразии* X многообразия Y или о многообразии $X \subset Y$, мы будем подразумевать замкнутое подмножество.

Надо отметить, что в литературе имеется разнобой в употреблении терминов «многообразие» и «подмногообразие». Иногда многообразия подразумеваются неприводимыми (см. лекцию 5), а порой подмногообразия определяются как локально замкнутые подмножества.

Регулярные функции на аффинных многообразиях

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — многообразие. *Идеалом* X называется идеал

$$I(X) = \{f \in K[z_1, \ldots, z_n] \mid f \equiv 0 \text{ на } X\},$$

состоящий из всех функций, равных 0 на X. *Координатным кольцом* многообразия X называется кольцо

$$A(X) = K[z_1, \ldots, z_n]/I(X).$$

Теперь мы подошли к ключевому определению, а именно, к определению *регулярной функции* на многообразии X. В конечном счете мы хотим, чтобы регулярной функцией на X было ограничение многочлена от $z_1, \ldots, z_n$ на X, т. е. элемент кольца $A(X)$. Однако мы должны дать локальное определение, чтобы можно было определить и кольцо функций на открытом подмножестве $U \subset X$. Поэтому мы дадим следующее определение.

Определение. Пусть $U \subset X$ — произвольное открытое подмножество и $p \in U$ — произвольная точка. Функция f на U называется *регулярной в точке* p, если в некоторой окрестности V точки p функцию f можно представить в виде отношения g/h, где g, $h \in K[z_1, \ldots, z_n]$ и $h(p) \neq 0$. Функция f называется *регулярной на* U, если f регулярна в каждой точке множества U.

Следующая лемма показывает, что данное выше определение удовлетворяет нашим пожеланиям.

Лемма 2.1. *Кольцо функций, регулярных в каждой точке многообразия X, является координатным кольцом $A(X)$. Более того, если $U = U_f$ — главное открытое подмножество в X, то кольцо регулярных на U функций является локализацией $A(X)[1/f]$.*

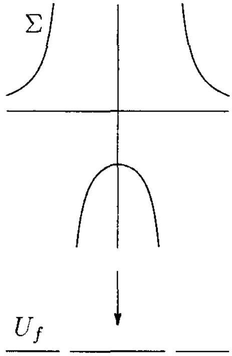
Доказательство этой леммы требует некоторой дополнительной техники. В частности, мы должны знать, что если многочлен $h(z_1, \ldots, z_n)$ не имеет нулей на X, то он обратим в $A(X)$, что является частью теоремы Гильберта о нулях (теорема 5.1); поэтому доказательство леммы мы дадим в лекции 5, после доказательства этой теоремы. Отметим, что в определении и лемме существенно, что основное поле K алгебраически замкнуто, в противном случае мы могли бы взять функцию g/h, где h не имеет нулей на $\mathbb{A}^n_K$ (например, функцию $1/(x^2 + 1)$ на $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$), а такие функции называть регулярными мы не хотим.

Следует также предупредить, что для произвольного открытого множества $U \subset X$ утверждение леммы 2.1 о том, что каждая регулярная на U функция f является отношением g/h, где h не обращается в 0 на U, будет ложно.

Отметим, что главные открытые подмножества сами являются аффинными многообразиями: если $X \subset \mathbb{A}^n$ — многообразие, заданное многочленами $f_\alpha(z_1, \ldots, z_n)$, то многообразие $\Sigma \subset \mathbb{A}^{n+1}$, заданное многочленами f_α (рассматриваемыми формально как многочлены от $z_1, \ldots$ $\ldots, z_{n+1}$) и многочленом

$$g(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 1 - z_{n+1} f(z_1, \ldots, z_n),$$

взаимно однозначно отображается на U_f (и координатное кольцо Σ совпадает с $A(X)[1/f]$, то есть с кольцом регулярных функций на U_f). Так, например, если $X = \mathbb{A}^1$ и U_f — открытое подмножество $\mathbb{A}^1 \setminus \{1, -1\}$, мы можем реализовать U_f как подмногообразие $\Sigma \subset \mathbb{A}^2$, заданное уравнением $w(z^2 - 1) - 1 = 0$ (см. рисунок).



Упражнение 2.2. Опишите кольцо регулярных функций на дополнении к началу координат $(0, 0)$ в $\mathbb{A}^2$.

Мы можем восстановить аффинное многообразие X (но не вложение $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$) по его координатному кольцу $A = A(X)$. Для этого надо выбрать элементы $x_1, \ldots, x_n$, порождающие A над полем K, представить A в виде

$$A = K[x_1, \ldots, x_n]/(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

и положить $X \subset \mathbb{A}^n$ равным множеству нулей многочленов f_α. Более инвариантным образом, по теореме Гильберта о нулях (теорема 5.1) точки X можно поставить во взаимно однозначное соответствие с максимальными идеалами кольца A: для каждой точки $p \in X$ идеал $\mathfrak{m}_p \subset A$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в p, является максимальным. И обратно, мы увидим в доказательстве предложения 5.18, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца $A = K[x_1, \ldots, x_n]/(\{f_\alpha\})$ фактор $A/\mathfrak{m}$ будет полем, конечно порожденным как K-алгебра и, следовательно, изоморфным K. Если теперь обозначить через a_i образы x_i при отображении

$$\varphi\colon A \to A/\mathfrak{m} \cong K,$$

то точка $p = (a_1, \ldots, a_n)$ будет лежать на X, и $\mathfrak{m}$ будет идеалом функций, обращающихся в нуль в p.

Как мы увидим, из теоремы Гильберта о нулях (теорема 5.1) следует, что конечно порожденная алгебра над K является координатным кольцом некоторого аффинного многообразия тогда и только тогда, когда она не содержит нильпотентов.

Еще одно понятие, которое мы должны сейчас ввести, — это *локальное кольцо аффинного многообразия* X в точке $p \in X$, которое обозначается $\mathcal{O}_{X,p}$. Оно определяется как кольцо ростков функций, определенных в некоторой окрестности точки p и регулярных в p. Кольцо $\mathcal{O}_{X,p}$ является прямым пределом колец $A(U_f) = A(X)[1/f]$, где f пробегает все регулярные функции на X, ненулевые в p, или, другими словами, локализацией кольца $A(X)$ в максимальном идеале $\mathfrak{m}_p$. Отметим, что если $Y \subset X$ — открытое множество, содержащее p, то $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_{Y,p}$.

Проективные многообразия

Аналогичные определения можно дать для проективных многообразий $X \subset \mathbb{P}^n$. Снова мы определяем идеал X как идеал многочленов $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$, тождественно обращающихся в нуль на X; отметим, что этот идеал однороден, т. е. порожден однородными многочленами (эквивалентное условие: он является прямой суммой своих однородных компонент). Точно так же мы определяем *однородное координатное кольцо* $S(X)$ многообразия X как факторкольцо $K[Z_0, \ldots, Z_n]/I(X)$; как и $K[Z_0, \ldots, Z_n]$, это градуированное кольцо.

Регулярная функция f на квазипроективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$ — или, в более общей ситуации, на открытом подмножестве $U \subset X$ — это функция, регулярная локально, т. е. обладающая следующим свойством: если $\{U_i\}$ — стандартное открытое покрытие $\mathbb{P}^n$ открытыми множествами $U_i \cong \mathbb{A}^n$, то ограничение f на $U \cap U_i$ регулярно для каждого i (отметим, что по лемме 2.1 определение не зависит от выбора покрытия).

Это определение выглядит (и является) очень громоздким. На самом деле существует более простой способ записи регулярных функций на открытых подмножествах проективного многообразия: иногда их можно записать как отношение F/G, где F, $G \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ — однородные многочлены одинаковой степени и G нигде не равно 0 на U. В частности, то же рассуждение, что и в доказательстве леммы 2.1, показывает, что если $U = U_G \subset X$ — дополнение к множеству нулей однородного многочлена G, то кольцо регулярных на U_G функций совпадает с однородной компонентой степени 0 локализации $S(X)[G^{-1}]$.

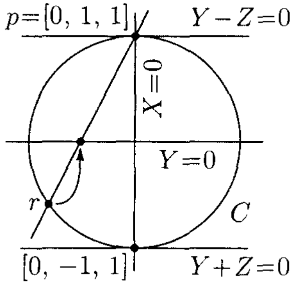
Наконец, мы можем определить локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,p}$ квазипроективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ в точке $p \in X$ так же, как в аффинном случае, а именно, как кольцо ростков функций, регулярных в некоторой окрестности точки $p \in X$. Эквивалентным образом, если $\widetilde{X}$ — произвольное аффинное открытое подмножество X, содержащее p, то мы можем положить $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_{\widetilde{X},p}$, где кольцо $\mathcal{O}_{\widetilde{X},p}$ — локализация координатного кольца $A(\widetilde{X})$ в идеале функций, обращающихся в нуль в точке p.

Регулярные отображения

Отображения в аффинные многообразия можно описать очень просто: *регулярное отображение* из произвольного многообразия X в аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ задается набором n регулярных функций на X, а отображение из X в аффинное многообразие $Y \subset \mathbb{A}^n$ — это отображение в $\mathbb{A}^n$, образ которого содержится в Y. Имеется взаимно однозначное соответствие между такими отображениями и гомоморфизмами координатного кольца $A(Y)$ в кольцо регулярных функций на X.

Отсюда возникает понятие изоморфизма аффинных многообразий: два аффинных многообразия X и Y называются *изоморфными*, если существуют взаимно обратные регулярные отображения $\eta\colon X \to Y$ и $\varphi\colon Y \to X$, или, что то же самое, их координатные кольца изоморфны как алгебры над K (в частности, координатное кольцо аффинного многообразия — инвариант относительно изоморфизма).

Отображения в проективные пространства определяются, естественно, сложнее. Сначала скажем, что отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$ регулярно, если оно локально регулярно, т. е. если оно непрерывно и для каждого стандартного аффинного открытого подмножества $U_i \cong \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ ограничение φ на $\varphi^{-1}(U_i)$ является регулярным. На практике, однако, задавать отображения в проективное пространство с помощью ограничений на прообразы аффинных открытых подмножеств слишком сложно. Более простой способ мог бы состоять в том, чтобы задать набор из $n+1$ регулярной функции, но это может быть невозможно, если X проективно. Если многообразие $X \subset \mathbb{P}^m$ проективно, то мы можем задать набор из $n+1$ однородного многочлена одинаковой степени без общих нулей на X, и это даст нам регулярное отображение в проективное пространство. Оказывается, однако, что этой конструкции недостаточно, чтобы описать *все* отображения проективного многообразия в проективное пространство.



В качестве примера рассмотрим многообразие $C \subset \mathbb{P}^2$, заданное многочленом $X^2+Y^2-Z^2$, и отображение φ из C в $\mathbb{P}^1$, заданное формулой

$$[X, Y, Z] \mapsto [X, Z-Y].$$

Это отображение можно рассматривать как стереографическую проекцию из точки $p = [0, 1, 1]$: оно переводит точку $r \in C$ (отличную от p) в точку пересечения оси ($Y=0$) с прямой $\overline{pr}$. Два многочлена X и $Z-Y$ имеют общий нуль на C — точку $p = [0, 1, 1]$, и, тем самым, приведенная выше формула не имеет смысла при $r = p$; отображение, однако, регулярно и в точке p (точнее, продолжается до регулярного): положим $\varphi(p) = [1, 0]$ и заметим, что в координатах $[S, T]$ на $\mathbb{P}^1$ с аффинными открытыми множествами $U_0\colon (S \neq 0)$ и $U_1\colon (T \neq 0)$ мы имеем

$$\varphi^{-1}(U_0) = C \setminus \{[0, -1, 1]\}, \qquad \varphi^{-1}(U_1) = C \setminus \{[0, 1, 1]\}.$$

Теперь заметим, что на $\varphi^{-1}(U_1)$ отображение φ, бесспорно, регулярно: в терминах координаты $s = S/T$ на U_1 ограничение φ на $\varphi^{-1}(U_1)$

задается формулой
$$[X, Y, Z] \mapsto \frac{X}{Z-Y},$$
правая часть которой, конечно. является регулярной функцией на $C \setminus \{[0, 1, 1]\}$. С другой стороны, на $\varphi^{-1}(U_0)$ мы можем записать наше отображение в терминах евклидовой координаты $t = T/S$ следующим образом:
$$[X, Y, Z] \mapsto \frac{Z-Y}{X}.$$
Может показаться, что оно не регулярно в p, но мы можем написать так:
$$\frac{Z-Y}{X} = \frac{Z^2-Y^2}{X(Y+Z)} = \frac{X^2}{X(Y+Z)} = \frac{X}{Y+Z},$$
а эта функция уже регулярна на $C \setminus \{[0, -1, 1]\}$. Отметим также, что отображение $\varphi\colon C \to \mathbb{P}^1$ не может быть задано парой однородных многочленов на $\mathbb{P}^2$ без общих нулей на C.

Этот пример очень показателен: на практике самый распространенный способ задания в координатах отображения $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$ квазипроективного многообразия в проективное пространство состоит в задании набора из $n+1$ однородного многочлена одинаковой степени. Недостаток этого способа в том, что эти многочлены будут иметь общие нули на X; записав такой набор многочленов, мы не можем сразу сказать, является ли наше отображение регулярным.

Так же, как в случае аффинных многообразий, из определения регулярного отображения вытекает понятие изоморфизма: два квазипроективных многообразия X и Y *изоморфны*, если существуют взаимно обратные регулярные отображения $\eta\colon X \to Y$ и $\varphi\colon Y \to X$. В отличие от аффинного случая, однако, это не означает, что два многообразия изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их однородные координатные кольца. Таким образом, мы имеем два понятия эквивалентности проективных многообразий: два многообразия X и $X' \subset \mathbb{P}^n$ *проективно эквивалентны*, если существует автоморфизм $A \in \mathrm{PGL}_{n+1}K$ пространства $\mathbb{P}^n$, переводящий X в X', или, равносильно, если однородные координатные кольца $S(X)$ и $S(X')$ изоморфны как градуированные K-алгебры, и мы говорим, что они изоморфны, если выполняется более слабое условие, гласящее, что между ними существует бирегулярное отображение (явный пример, показывающий, что эти два понятия различны, мы увидим в упражнении 2.10).

Упражнение 2.3. Используя результат упражнения 2.2, покажите, что при $n \geqslant 2$ дополнение к началу координат в $\mathbb{A}^n$ не изоморфно аффинному многообразию.

Пример 2.4. Отображение Веронезе

Конструкцию нормальной рациональной кривой можно обобщить: для произвольных n и d определим *отображение Веронезе* степени d

$$\nu_d\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

по формуле

$$[X_0, \ldots, X_n] \to [\ldots X^I \ldots],$$

где X^I пробегает множество всех мономов степени d от $X_0, \ldots, X_n$. Как и в случае нормальных рациональных кривых, мы назовем отображением Веронезе также и любое отображение, отличающееся от описанного выше на автоморфизм $\mathbb{P}^n$. Геометрически отображение Веронезе характеризуется тем, что гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$ суть в точности гиперплоские сечения образа $\nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$. Нетрудно видеть, что образ отображения Веронезе является алгебраическим многообразием; его часто называют *многообразием Веронезе.*

Упражнение 2.5. Покажите, что количество мономов степени d от $n+1$ переменной равно биномиальному коэффициенту $\binom{n+d}{d}$, так что $N = \binom{n+d}{d} - 1$.

Например, самый простой случай, отличный от случая $n = 1$, — это квадратичное отображение Веронезе

$$\nu_2\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5,$$

задающееся формулой

$$\nu_2\colon [X_0, X_1, X_2] \mapsto [X_0^2, X_1^2, X_2^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2].$$

Образ этого отображения, обычно называемый *поверхностью Веронезе*, будет часто встречаться в этой книге.

Многообразие Веронезе $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ содержится в большом количестве тривиально конструируемых квадратичных гиперповерхностей: для каждой такой четверки мультииндексов I, J, K и L, что $X^IX^J = X^KX^L$, мы имеем квадратичное уравнение на образ отображения Веронезе. На самом деле нетрудно убедиться, что многообразие Веронезе в точности является множеством нулей таких квадратичных многочленов.

Пример 2.6. Детерминантальное задание многообразий Веронезе

Поверхность Веронезе, т. е. образ отображения $\nu_2\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$, может также быть описана как множество таких точек $[Z_0, \ldots, Z_5] \in \mathbb{P}^5$, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_3 & Z_4 \\ Z_3 & Z_1 & Z_5 \\ Z_4 & Z_5 & Z_2 \end{pmatrix}$$

равен 1. В общем же случае, если $\{Z_{i,j}\}_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ — координаты в $\mathbb{P}^{(n+1)(n+2)/2-1}$, то образ отображения

$$\nu_2\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{(n+1)(n+2)/2-1}$$

является множеством нулей (2×2)-миноров симметрической $(n+1)\times\times(n+1)$-матрицы, в которой элемент с номером (i, j) равен $Z_{i-1,j-1}$ (для всякой пары $i\leqslant j$).

Пример 2.7. Подмногообразия многообразий Веронезе

Отображение Веронезе применимо не только к проективному пространству, но и к любому многообразию $X\subset\mathbb{P}^n$. Отметим, в частности, что ограничение ν_d на подпространство $\Lambda\cong\mathbb{P}^k\subset\mathbb{P}^n$ совпадает с отображением Веронезе степени d на $\mathbb{P}^k$. Например, образы прямых при отображении $\nu_2\colon\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^5$ образуют семейство плоских коник на поверхности Веронезе S, причем через каждую пару точек поверхности S проходит ровно одна коника.

Более общим образом, мы утверждаем, что образ многообразия $Y\subset\subset\mathbb{P}^n$ при отображении Веронезе является подмногообразием в $\mathbb{P}^N$. Чтобы это доказать, заметим сначала, что пространство однородных многочленов степени k от однородных координат Z в $\mathbb{P}^N$ переходит, при замене Z-координат на X-координаты в $\mathbb{P}^n$, в пространство однородных многочленов степени dk. Далее, заметим, что (как в замечании после упражнения 1.3) множество нулей многочлена $F(X)$ степени m также является множеством общих нулей многочленов $\{X_iF(X)\}$ степени $m+1$. Таким образом, многообразие $Y\subset\mathbb{P}^n$, заданное многочленами степени не больше m, может быть задано многочленами степени kd для некоторого k. Отсюда следует, что $\nu_d(Y)\subset\mathbb{P}^N$ является пересечением множества $\nu_d(\mathbb{P}^n)$, про которое мы уже знаем, что оно является многообразием, и множества нулей многочленов степени k.

Если, например, $Y\subset\mathbb{P}^2$ — кривая, заданная кубическим многочленом $X_0^3+X_1^3+X_2^3$, то мы можем задать Y квартиками

$$X_0^4+X_0X_1^3+X_0X_2^3,\quad X_0^3X_1+X_1^4+X_1X_2^3\quad\text{и}\quad X_0^3X_2+X_1^3X_2+X_2^4.$$

Образ $\nu_2(Y)\subset\mathbb{P}^5$ является пересечением поверхности Веронезе и трех поверхностей

$$Z_0^2+Z_1Z_3+Z_2Z_4,\quad Z_0Z_3+Z_1^2+Z_2Z_5\quad\text{и}\quad Z_0Z_4+Z_1Z_5+Z_2^2.$$

В частности, Y — пересечение девяти квадрик.

Упражнение 2.8. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие и $Y = \nu_d(X) \subset \mathbb{P}^n$ — его образ при отображении Веронезе. Докажите, что X и Y изоморфны (т. е. что обратное отображение регулярно).

Упражнение 2.9. Используя предыдущие рассуждения и упражнение 2.8, докажите, что любое проективное многообразие изоморфно пересечению многообразия Веронезе с линейным подпространством (и, следовательно, всякое проективное многообразие изоморфно пересечению квадрик).

Упражнение 2.10. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие и $Y = \nu_d(X) \subset \mathbb{P}^N$ — его образ при отображении Веронезе. Как связаны однородные координатные кольца многообразий X и Y?

В случае, когда характеристика поля K равна нулю, у отображения Веронезе есть бескоординатное описание, которое полезно иметь в виду. Именно, если мы будем рассматривать $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$ как пространство прямых в линейном пространстве V, то отображение Веронезе можно определить как отображение

$$\nu_d\colon \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V)$$

в проективизацию d-й симметрической степени пространства V, заданное формулой

$$\nu_d\colon [v] \to [v^d].$$

Если мы вместо V рассмотрим V^*, то образом отображения Веронезе является проективизация подмножества пространства всех многочленов $\mathrm{Sym}^d V^*$, состоящая из d-х степеней линейных форм. Заметим, что это неверно для полей K положительной характеристики: например, если $\mathrm{char}(K) = p$, то множество p-х степеней линейных форм является прямой, а не нормальной рациональной кривой в $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^p V)$. В положительной характеристике отображение Веронезе ν_d можно рассматривать как отображение $\nu\colon \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V)$, которое переводит вектор v в линейный функционал на $(\mathrm{Sym}^d V^*)$, задаваемый значением многочленов в точке v.

Пример 2.11. Отображение Сегре

Еще одно важное семейство отображений — *отображения Сегре*

$$\sigma\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1},$$

переводящие пару $([X], [Y])$ в точку пространства $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, координаты которой являются попарными произведениями координат $[X]$ и $[Y]$, т. е.

$$\sigma\colon ([X_0, \ldots, X_n], [Y_0, \ldots, Y_m]) \to [\ldots, X_iY_j, \ldots],$$

где координаты в $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ пробегают все попарные произведения координат X_i и Y_j.

Нетрудно видеть, что образ отображения Сегре является алгебраическим многообразием (называемым *многообразием Сегре* и обозначаемым $\Sigma_{n,m}$): если координаты в $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ обозначить через $Z_{i,j}$, то многообразие Сегре — множество общих нулей квадратичных многочленов $Z_{i,j}Z_{k,l} - Z_{i,l}Z_{k,j}$. (В частности, многообразие Сегре — еще один пример *детерминантального многообразия*; оно задается (2×2)-минорами матрицы $(Z_{i,j})$.)

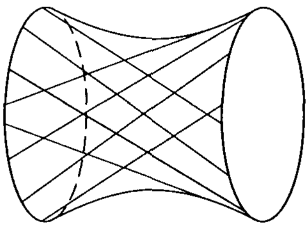
Первый пример многообразия Сегре — многообразие

$$\Sigma_{1,1} = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3,$$

являющееся образом отображения

$$\sigma\colon ([X_0, X_1], [Y_0, Y_1]) \to [X_0Y_0, X_0Y_1, X_1Y_0, X_1Y_1].$$

Это множество нулей одного-единственного многочлена второй степени $Z_0Z_3 - Z_1Z_2$, т. е. просто квадрика. Отметим, что слои двух проекций из $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ на $\mathbb{P}^n$ и $\mathbb{P}^m$ переводятся отображением σ в линейные подпространства в $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$. В частности, слои $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ переводятся в семейства прямых $\{Z_1 = \lambda Z_0, Z_3 = \lambda Z_2\}$ и $\{Z_2 = \lambda Z_0, Z_3 = \lambda Z_1\}$. Отметим также, что представление многочлена $Z_0Z_3 - Z_1Z_2$ как определителя матрицы



$$M = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}$$

позволяет легко увидеть эти два семейства: одно семейство состоит из прямых, элементы которых удовлетворяют данному линейному соотношению на столбцы, другое — из прямых, элементы которых удовлетворяют данному линейному соотношению на строки.

Другой часто встречающийся пример многообразия Сегре — образ

$$\Sigma_{2,1} = \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^5,$$

называемый *трехмерным многообразием Сегре*. Мы с ним еще не раз встретимся (например, $\Sigma_{2,1}$ — пример нормального рационального свитка, обозначаемого $X_{1,1,1}$). Пока что упомянем следующие факты.

Упражнение 2.12. (i) Пусть L, M и $N \subset \mathbb{P}^3$ — три попарно непересекающиеся (т. е. скрещивающиеся) прямые. Покажите, что объединение прямых в $\mathbb{P}^3$, пересекающих все три эти прямые, проективно эквивалентно многообразию Сегре $\Sigma_{1,1} \subset \mathbb{P}^3$ и что это объединение — единственное многообразие Сегре, содержащее L, M и N. (*)

(ii) Докажите более общее утверждение. Пусть L, M и N — три попарно непересекающиеся $(k-1)$-плоскости в $\mathbb{P}^{2k-1}$. Тогда объединение прямых, пересекающих L, M и N, проективно эквивалентно многообразию Сегре $\Sigma_{k-1,1} \subset \mathbb{P}^{2k-1}$, и это объединение — единственное многообразие Сегре, содержащее L, M и N. Существует ли аналогичное описание многообразий Сегре $\Sigma_{a,b}$, где a, $b \geqslant 2$?

Упражнение 2.13. Покажите, что скрученная кубика $C \subset \mathbb{P}^3$ может быть представлена как пересечение трехмерного многообразия Сегре и трехмерной плоскости $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$.

Упражнение 2.14. Покажите, что любая прямая $l \subset \Sigma_{2,1} \subset \mathbb{P}^5$ содержится в образе слоя произведения $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ над $\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{P}^1$ (аналогичное утверждение верно для линейных пространств, содержащихся в любом многообразии Сегре $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, но это более общее утверждение мы отложим до теоремы 9.22). (*)

Упражнение 2.15. Покажите, что образ диагонали $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ при отображении Сегре является многообразием Веронезе $\nu_2(\mathbb{P}^n)$, лежащим в подпространстве пространства $\mathbb{P}^{n^2+2n}$; докажите, что для любого многообразия X диагональ $\Delta_X \subset X \times X$ в произведении многообразия на себя является подмногообразием этого произведения, и аналогично для всех диагоналей в n-кратном произведении X^n.

Пример 2.16. Подмногообразия многообразий Сегре

Снабдив $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ структурой проективного многообразия, естественно спросить, как описать его подмногообразия. Наивный ответ получается немедленно. Для начала скажем, что многочлен $F(Z_0, \ldots, Z_n, W_0, \ldots, W_m)$ от двух наборов переменных называется *биоднородным бистепени* (d, e), если он однороден степени d по первому набору переменных и степени e по второму. Такой многочлен записывается следующим образом:

$$F(Z, W) = \sum_{\substack{I,J:\\ \sum i_\alpha = d\\ \sum j_\beta = e}} a_{I,J} \cdot Z_0^{i_0} \ldots Z_n^{i_n} \cdot W_0^{j_0} \ldots W_m^{j_m}.$$

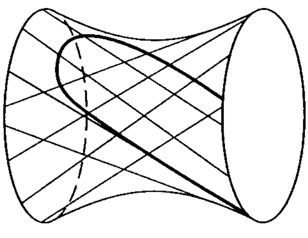
Теперь заметим, что, поскольку многочлены степени d на проективном пространстве $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ соответствуют биоднородным многочленам $F(Z, W)$ бистепени (d, d), то подмногообразия $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ — просто множества общих нулей таких многочленов (отметим, что биоднородные многочлены корректно задают подмножества в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$). В то же время мы видим, что, как и в случае подмногообразий многообразия Веронезе, множество нулей биоднородного многочлена бистепени (d, e)

задается делящимися на него биоднородными многочленами бистепени (d', e') для любых $d' \geqslant d$ и $e' \geqslant e$. Таким образом, любые подмногообразия в многообразии Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ задаются биоднородными многочленами произвольных бистепеней.

В качестве примера рассмотрим скрученную кубику $C \subset \mathbb{P}^3$ из примера 1.10, заданную как замыкание образа отображения

$$t \mapsto [1, t, t^2, t^3].$$

Как мы отмечали раньше, C лежит на квадрике $Z_0Z_3 - Z_1Z_2 = 0$, являющейся поверхностью Сегре $S = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$. Теперь ограничим на S два других квадратичных многочлена, задающих скрученную кубику. Заметим, что многочлен $Z_0Z_2 - Z_1^2$ на $\mathbb{P}^3$ отображается в многочлен $X_0X_1Y_0^2 - X_0^2Y_1^2$, который раскладывается в произведение



X_0 и $F(X, Y) = X_1Y_0^2 - X_0Y_1^2$ и, следовательно, задает объединение скрученной кубики и прямой на S, заданной условием $X_0 = 0$ (или, равносильно, $Z_0 = Z_1 = 0$). С другой стороны, многочлен $Z_1Z_3 - Z_2^2$ отображается в многочлен $X_0X_1Y_1^2 - X_1^2Y_0^2$, который раскладывается в произведение $-X_1$ и F и задает объединение кривой C и прямой $Z_2 = Z_3 = 0$. В результате получаем, что скрученная кубика является множеством нулей одного биоднородного многочлена $F(X, Y)$ бистепени $(1, 2)$ на поверхности Сегре $S = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$; ограничения на S квадратичных многочленов, определяющих C, являются биоднородными многочленами бистепени $(2, 2)$, делящимися на F (иначе говоря, квадрики, содержащие C, высекают на S объединения C и прямых, принадлежащих к одному из семейств прямолинейных образующих поверхности S).

Упражнение 2.17. Обратно, пусть $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ — множество нулей неприводимого биоднородного многочлена $F(X, Y)$ бистепени $(1, 2)$. Покажите, что образ C при отображении

$$\sigma\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$$

является скрученной кубикой.

Упражнение 2.18. Теперь пусть $C = C_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{P}^3$ — рациональная кривая четвертой степени, введенная в примере 1.26. Докажите, что C лежит на поверхности Сегре S, заданной уравнением $Z_0Z_3 - Z_1Z_2 = 0$, и что S — единственная квадрика, содержащая C, а также что C — множество нулей биоднородного многочлена бистепени $(1, 3)$ на $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Используя это, сделайте упражнение 1.29.

Упражнение 2.19. Используя предыдущее упражнение, покажите, что существует непрерывное семейство проективно неэквивалентных друг другу кривых $C_{\alpha,\beta}$. (*)

Упражнение 2.20. (a) Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ и $Y \subset \mathbb{P}^m$ — проективные многообразия. Покажите, что образ $\sigma(X \times Y) \subset \sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}^{nm+n+m}$ отображения Сегре, ограниченного на $X \times Y$, является проективным многообразием.

(b) Теперь предположим, что $X \subset \mathbb{P}^n$ и $Y \subset \mathbb{P}^m$ — всего лишь квазипроективные многообразия. Покажите, что $\sigma(X \times Y)$ тоже квазипроективно, т. е. является локально замкнутым подмножеством в $\mathbb{P}^{nm+n+m}$.

Пример 2.21. Произведения многообразий

В начале примера 2.11 шла речь о произведении $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$; тогда мы могли говорить о произведении только как о множестве, так как на этом пространстве a priori нет структуры алгебраического многообразия. Вложение Сегре, однако, снабжает его этой структурой, и мы воспользуемся ей для определения произведения многообразий. Иначе говоря, когда мы говорим «многообразие $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$», мы имеем в виду образ отображения Сегре. Аналогично, если $X \subset \mathbb{P}^n$ и $Y \subset \mathbb{P}^m$ локально замкнуты, то, согласно упражнению 2.20, образ произведения $X \times Y \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ — локально замкнутое подмножество пространства $\mathbb{P}^{nm+n+m}$: его мы, по определению, и будем считать произведением многообразий $X \times Y$.

Главное, что надо отметить в связи с таким определением произведения, — это то, что при этом действительно получается *произведение в категорном смысле*, т. е. что проекции $\pi_X : X \times Y \to X$ и $\pi_Y : X \times Y \to Y$ являются регулярными и $X \times Y$ вместе с этими проекциями удовлетворяет определению произведения в категории квазипроективных многообразий и регулярных морфизмов. Это значит, что для любого многообразия Z и любой пары морфизмов $\alpha\colon Z \to X$ и $\beta\colon Z \to Y$ существует и единственно отображение $\alpha \times \beta\colon Z \to X \times Y$, композиции которого с π_X и π_Y равны α и β соответственно:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[ddl, bend right, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha\times\beta"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\
& X\times Y \arrow[dl, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

Нетрудно видеть, что в нашем случае это действительно так. Именно, заметим для начала, что отображение $\alpha \times \beta$ определяется отображениями α и β однозначно, и нам остается только проверить, что оно регулярно. Мы сделаем это локально: пусть $r_0 \in Z$ — точка, которую α и β переводят в $p \in X$ и $q \in Y$ соответственно. Предположим, что p лежит в открытом множестве $Z_0 \neq 0$ в $\mathbb{P}^n$; тогда в окрестности r_0 отображение α задается формулой

$$\alpha\colon r \mapsto [1, f_1(r), \ldots, f_n(r)],$$

где $f_1, \ldots, f_n$ — регулярные функции на Z. Пусть β задается аналогичной формулой $\beta(r) = [1, g_1(r), \ldots, g_m(r)]$. Тогда в окрестности точки r_0 отображение $\alpha \times \beta\colon Z \to X \times Y \subset \mathbb{P}^{nm+n+m}$ задается формулой

$$\alpha \times \beta\colon r \to [1, f_1(r), \ldots, f_n(r), g_1(r), \ldots, g_m(r), \ldots, f_i(r)g_j(r), \ldots]$$

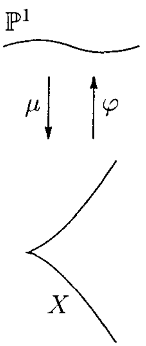
и тем самым является регулярным.

Упражнение 2.22. Покажите, что топология Зарисского на многообразии $X \times Y$ *не совпадает* с произведением топологий Зарисского на X и Y.

Пример 2.23. Графики

Этот пример можно рассматривать как частный случай примера 2.16, но он настолько важен, что заслуживает отдельного рассмотрения. Основное наблюдение содержится в следующем упражнении.

Упражнение 2.24. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное проективное многообразие и $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^m$ — произвольное регулярное отображение. Покажите, что его график $\Gamma_\varphi \subset X \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ является подмногообразием.



Отметим, что не следует думать, будто отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^m$ является регулярным тогда и только тогда, когда его график Γ_φ является подмногообразием. Например, рассмотрим отображение $\mu\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ из примера 1.26 и обозначим через $X \subset \mathbb{P}^2$ его образ (каспидальную кривую $Z_0Z_2^2 = Z_1^3$). Поскольку μ — взаимно однозначное отображение, мы можем (чисто в теоретико-множественном смысле) определить обратное отображение

$$\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1.$$

Нетрудно убедиться в том, что оно нерегулярно, хотя его график, будучи тем же подмножеством в $X \times \mathbb{P}^1$, что и график отображения μ, является подмногообразием в $X \times \mathbb{P}^1$.

Пример 2.25. Расслоенные произведения

У категорного понятия произведения есть прямое обобщение: если (в произвольной категории) даны объекты X, Y и B и морфизмы $\varphi\colon X \to B$ и $\eta\colon Y \to B$, то *расслоенное произведение* X и Y над B (обозначается $X \times_B Y$) определяется как объект Z с такими морфизмами $\alpha\colon Z \to X$ и $\beta\colon Z \to Y$, что $\eta \circ \beta = \varphi \circ \alpha$ и что для любого объекта W и морфизмов $\alpha'\colon W \to X$ и $\beta'\colon W \to Y$ из равенства $\eta \circ \beta' = \varphi \circ \alpha'$ следует, что существует и единствен такой морфизм $\gamma\colon W \to Z$, что $\alpha' = \alpha \circ \gamma$ и $\beta' = \beta \circ \gamma$. Это свойство однозначно определяет объект Z, если только он существует.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta'"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha'"'] & & \\
& Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\
& X \arrow[r, "\varphi"] & B
\end{tikzcd}$$

В категории множеств расслоенное произведение определено: оно равно просто

$$X \times_B Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \varphi(x) = \eta(y)\}.$$

Теперь заметим, что на теоретико-множественном расслоенном произведении двух многообразий можно ввести структуру многообразия. Для это определим $\Gamma \subset X \times B$ и $\Psi \subset Y \times B$ как графики φ и η соответственно. Согласно упражнению 2.24, и $\Gamma \times Y$, и $\Psi \times X$ являются подмногообразиями $X \times Y \times B$, и, следовательно, их пересечение — также подмногообразие. Ясно, что это пересечение является теоретико-множественным расслоенным произведением X и Y. Далее мы будем называть $X \times_B Y$ расслоенным произведением многообразий X на Y над B.

Упражнение 2.26. Покажите, что многообразие $X \times_B Y$ действительно является расслоенным произведением X и Y над B в категории алгебраических многообразий.

Пример 2.27. Комбинации отображений Веронезе и Сегре

С помощью отображений Веронезе и Сегре можно конструировать новые примеры многообразий. Вот простейший пример: пусть $\nu\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ — отображение Веронезе степени 2, а $\sigma\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ — отображение Сегре; рассмотрим композицию

$$\varphi\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \nu} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^5.$$

Образ этого отображения снова является алгебраическим многообразием (в частности, это еще один пример *нормального рационального свитка*, обозначаемого $X_{2,2}$).

Упражнение 2.28. Найдите уравнения, задающие многообразие $X_{2,2}$. Покажите, что нормальная рациональная кривая в $\mathbb{P}^4$ может быть реализована как гиперплоское сечение свитка $X_{2,2}$.

Упражнение 2.29. Реализуем $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ как квадрику Q в $\mathbb{P}^3$, заданную многочленом $Z_0Z_3 - Z_1Z_2$, и пусть $L \subset Q$ — прямая $Z_0 = Z_1 = 0$. Покажите, что размерность векторного пространства однородных квадратичных многочленов от Z_i, равных нулю на L, равна 7, а также что описанное выше отображение $\varphi = \sigma \circ (\mathrm{Id} \times \nu)$ может быть задано формулой

$$\varphi\colon [Z_0, Z_1, Z_2, Z_3] \mapsto [F_0(Z), \ldots, F_5(Z)],$$

где $\{Q, F_0(Z), \ldots, F_5(Z)\}$ — базис этого векторного пространства. Покажите, что это отображение нельзя определить с помощью набора из шести однородных многочленов на $\mathbb{P}^3$ одинаковой степени без общих нулей на Q.

Как и отображение Веронезе, отображение Сегре можно определить бескоординатно: если $\mathbb{P}^n$ и $\mathbb{P}^m$ — проективизации линейных пространств V и W соответственно, то пространство $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ можно естественно отождествить с $\mathbb{P}(V \otimes W)$, и отображение

$$\sigma\colon \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \to \mathbb{P}(V \otimes W)$$

задается формулой

$$\sigma\colon ([v], [w]) \mapsto [v \otimes w].$$

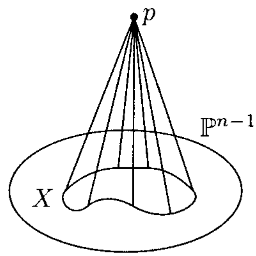
КОНУСЫ, ПРОЕКЦИИ И ЕЩЕ О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Пример 3.1. Конусы

Начнем с того, что рассмотрим гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ и точку $p \in \mathbb{P}^n$, не лежащую на $\mathbb{P}^{n-1}$; если угодно, мы можем выбрать координаты в $\mathbb{P}^n$ так, чтобы гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1}$ задавалась уравнением $Z_n = 0$, а точка p имела координаты $[0, \ldots, 0, 1]$. Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — произвольное многообразие. Определим *конус* $\overline{X, p}$ над X с вершиной p как объединение прямых

$$\overline{X, p} = \bigcup_{q \in X} \overline{qp},$$

соединяющих p со всевозможными точками $q \in X$ (если p лежит в бесконечно удаленной гиперплоскости, то $\overline{X, p}$ больше похож на цилиндр, чем на конус; в проективном пространстве это одно и то же). Легко видеть, что $\overline{X, p}$ является многообразием: если координаты выбраны как выше и $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — множество нулей многочленов $F_\alpha = F_\alpha(Z_0, \ldots, Z_{n-1})$, то конус $\overline{X, p}$ — это множество нулей в $\mathbb{P}^n$ тех же F_α, но рассматриваемых как многочлены от переменных $Z_0, \ldots, Z_n$.



Конструкцию конуса можно слегка обобщить: пусть $\Lambda \cong \mathbb{P}^k$ и $\Psi \cong \mathbb{P}^{n-k-1}$ — дополнительные (т. е. не пересекающиеся и порождающие все $\mathbb{P}^n$) подпространства, а $X \subset \Psi$ — произвольное многообразие; определим конус $\overline{X, \Lambda}$ над X с вершиной Λ как объединение всех $(k+1)$-плоскостей $\overline{q, \Lambda}$, порожденных Λ и точками $q \in X$. Конечно, эта конструкция представляет собой просто итерацию предыдущей; можно построить конус $\overline{X, \Lambda}$, беря конус с вершиной в точке $k + 1$ раз.

Упражнение 3.2. Пусть, как и раньше, Ψ и $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ — дополнительные линейные подпространства, а $X \subset \Psi$ и $Y \subset \Lambda$ — подмногообразия. Покажите, что объединение прямых, соединяющих точки X с точками Y, является многообразием.

В лекции 8 мы укажем аналогичный способ построения многообразия $\overline{X, Y}$ для любой пары многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}^n$.

Пример 3.3. Квадрики

Мы можем воспользоваться понятием конуса, чтобы дать унифицированное описание квадратичных гиперповерхностей. по крайней мере в случае, когда характеристика поля K отлична от 2. Пусть $Q \subset \mathbb{P}V = \mathbb{P}^n$ — квадратичная гиперповерхность, являющаяся множеством нулей однородного квадратичного многочлена $Q\colon V \to K$. Предположим, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Можно рассматривать многочлен Q как квадратичную форму, ассоциированную с билинейной формой Q_0 на V, т. е. можно написать

$$Q(v) = Q_0(v,\, v),$$

где $Q_0\colon V \times V \to K$ задается формулой

$$Q_0(v,\, w) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}.$$

Заметим, что Q_0 симметрична и билинейна. Форме Q_0 соответствует линейное отображение

$$\widetilde{Q}\colon V \to V^*,$$

переводящее v в $Q(v,\, \cdot)$, так что

$$\widetilde{Q}(v)(w) = \widetilde{Q}(w)(v) = Q_0(v,\, w).$$

Чтобы теперь классифицировать квадрики, заметим, что всякая квадратичная форма на векторном пространстве V может в подходящем базисе быть записана в виде

$$Q(X) = X_0^2 + X_1^2 + \ldots + X_k^2.$$

Чтобы убедиться в этом, выберем базис $e_0, \ldots, e_n$ в V следующим образом. Возьмем e_0 так, что $Q(e_0) = 1$, потом выберем $e_1 \in (Ke_0)^{\perp}$ (т. е. $Q_0(e_0,\, e_1) = 0$) так, что $Q(e_1) = 1$, и так далее, пока Q не станет нулевой на $(Ke_0 + \ldots + Ke_k)^{\perp}$. Дополним теперь $e_0, \ldots, e_k$ до базиса на всем пространстве V, добавив произвольный базис $e_{k+1}, \ldots, e_n$ в пространстве $(Ke_0 + \ldots + Ke_k)^{\perp}$. При перечисленных выше условиях говорят, что форма Q имеет *ранг* $k+1$; заметим, что $k+1$ является также рангом линейного отображения $\widetilde{Q}$. Таким образом, квадрика определена своим рангом с точностью до проективного преобразования.

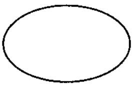
Заметим, что, как и в примере 1.20, мы приходим к тому, чтобы определить квадратичную гиперповерхность как класс эквивалентности ненулевых однородных квадратичных многочленов; два таких многочлена эквивалентны, если они отличаются умножением на скаляр. При этом к классу квадрик причисляется дополнительный объект, а именно *двойная плоскость*, т. е. квадрика, соответствующая квадрату $Q = L^2$ линейного многочлена L.

В $\mathbb{P}^1$ есть два типа квадрик:

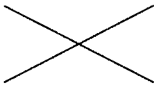
две точки
(ранг 2)

одна двойная точка
(ранг 1)

В $\mathbb{P}^2$ их три:



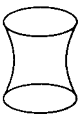
гладкая коника
(ранг 3)



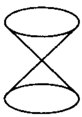
пара прямых
(ранг 2)

двойная прямая
(ранг 1)

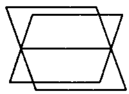
В $\mathbb{P}^3$ их четыре:



гладкая квадрика
(ранг 4)



квадратичный конус
(ранг 3)



пара плоскостей
(ранг 2)

двойная плоскость
(ранг 1)

В общем случае мы будем называть квадрику $Q \subset \mathbb{P}^n$ *гладкой*, если она имеет максимальный ранг $n+1$, т. е. ассоциированная билинейная форма Q_0 невырождена (смысл этого термина, если он пока не ясен, прояснится в лекции 14). После этого мы можем охарактеризовать произвольную квадрику ранга $k \geqslant 2$ геометрически — это конус над гладкой квадрикой $\overline{Q} \subset \mathbb{P}^{k-1}$ с вершиной в $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k}$. При этом Λ — вершина конуса — является проективизацией ядра отображения $\widetilde{Q}$.

Пример 3.4. Проекции

Теперь мы подошли к ключевому примеру. Пусть гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ и точка $p \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$ выбраны как в примере 3.1. Тогда можно определить отображение

$$\pi_p \colon \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^{n-1}$$

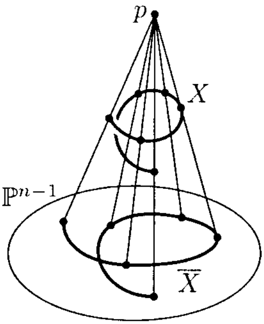
по правилу

$$\pi_p \colon q \mapsto \overline{qp} \cap \mathbb{P}^{n-1},$$

так что точка q, отличная от p, переходит в точку пересечения прямой $\overline{qp}$ с гиперплоскостью $\mathbb{P}^{n-1}$. Отображение π_p называется *проектированием из точки p на гиперплоскость* $\mathbb{P}^{n-1}$. Во введенных ранее координатах Z проектирование записывается очень просто:

$$\pi_p\colon [Z_0, \ldots, Z_n] \mapsto [Z_0, \ldots, Z_{n-1}].$$

Пусть теперь X — произвольное проективное многообразие в $\mathbb{P}^n$, не содержащее точку p. Тогда можно ограничить π_p на X и получить регулярное отображение $\pi_p\colon X \to \mathbb{P}^{n-1}$. Его образ $\overline{X} = \pi_p(X)$ называется *проекцией X из p в* $\mathbb{P}^{n-1}$. Имеет место следующий фундаментальный факт.



Теорема 3.5. *Проекция $\overline{X}$ многообразия X из p в $\mathbb{P}^{n-1}$ является проективным многообразием.*

Доказательство. Существенный ингредиент нашего доказательства — теория исключения, центральным понятием которой является *результант* двух многочленов от переменной z. Сделаем небольшое отступление, чтобы напомнить это понятие.

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — два многочлена от переменной z с коэффициентами в поле K, степеней m и n соответственно, и пусть нас интересует, имеют ли они общий делитель. Ответить на этот вопрос нетрудно: достаточно заметить, что f и g имеют общий делитель тогда и только тогда, когда существует ненулевой многочлен h степени $m + n - 1$, который делится на оба наших многочлена, т. е. когда пространства многочленов степени $m + n - 1$, делящихся по отдельности на f и g, имеют нетривиальное пересечение. Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда многочлены $f, zf, z^2f, \ldots, z^{n-1}f, g, zg, \ldots, z^{m-1}g$ линейно зависимы, или, иными словами, определитель

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 \;\ldots\ldots & 0 \\
\multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & \ldots\ldots\ldots & a_m \\
b_0 & b_1 & \ldots\ldots & b_n & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \ldots\ldots & b_n & 0 \;\ldots & 0 \\
\multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & \ldots\ldots\ldots & b_n
\end{vmatrix}$$

$(m+n)\times(m+n)$-матрицы, составленной из коэффициентов этих многочленов, обращается в нуль. Этот определитель $R(f,\,g)$ называется результантом многочленов f и g относительно z, и мы можем резюмировать наше обсуждение в следующей лемме.

Лемма 3.6. *Два многочлена f и g от переменной z над полем K имеют общий делитель тогда и только тогда, когда их результант $R(f,\,g)$ обращается в нуль.*

Заметим, что если f и g — многочлены степеней строго меньших, чем m и n соответственно (т. е. если $a_m=b_n=0$), то соответствующий определитель также равен нулю. Таким образом, на самом деле $R(f,\,g)$ позволяет проверить, имеют ли однородные многочлены степеней m и n, ассоциированные с f и g, общий нуль в $\mathbb{P}^1$.

Рассмотрим несколько более общую ситуацию, когда f и g — многочлены от переменной z не над полем, а над кольцом $K[x_1,\,\ldots,\,x_n]$. В этом случае снова можно образовать матрицу коэффициентов, компоненты которой a_i и b_j являются многочленами от $x_1,\,\ldots,\,x_n$; определитель этой матрицы $R(f,\,g)\in K[x_1,\,\ldots,\,x_n]$, также являющийся многочленом, снова называется результантом f и g. Этот определитель обладает тем свойством, что для произвольного набора n элементов $y_1,\,\ldots,\,y_n\in K$ равенство $R(y)=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(y,\,z)$ и $g(y,\,z)$, рассматриваемые как многочлены от z, имеют общий корень или же старшие коэффициенты обоих этих многочленов обращаются в нуль.

Возвращаясь к проекции $\overline{X}$ многообразия X из точки p, предположим, что отображение проекции π_p задается, как и раньше, формулой

$$\pi_p\colon [Z_0,\,\ldots,\,Z_n]\mapsto[Z_0,\,\ldots,\,Z_{n-1}].$$

Основной момент состоит в том, что для каждой точки $q=[Z_0,\,\ldots\,\ldots,\,Z_{n-1}]\in\mathbb{P}^{n-1}$ прямая $l=\overline{pq}$ пересекает X тогда и только тогда, когда любые два многочлена $F,\,G\in I(X)$ имеют общий нуль на $l=\{[\alpha Z_0,\,\ldots,\,\alpha Z_{n-1},\,\beta]\}$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если l не пересекает X, то можно сначала найти многочлен F, обращающийся в нуль только в конечном числе точек прямой l, и поскольку ни в одной из этих точек все $G\in I(X)$ не могут обратиться в нуль, мы можем найти многочлен G, не обращающийся в нуль ни в одной из них (заметим, что это утверждение перестает быть справедливым, если вместо любых пар $F,\,G\in I(X)$ брать только пары из некоторого множества образующих).

Теперь любую пару однородных многочленов $F,\,G$ от $Z_0,\,\ldots,\,Z_n$ можно считать многочленами от Z_n над кольцом $K[Z_0,\,\ldots,\,Z_{n-1}]$, и можно образовать их результант относительно Z_n (отметим, что если F и G обращаются в нуль в точке p, то их степени относительно Z_n

ниже, чем соответствующие однородные степени). Этот результант, который мы обозначим $R(F, G)$, является однородным многочленом от $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$. Для произвольной точки $q = [Z_0, \ldots, Z_{n-1}] \in \mathbb{P}^{n-1}$ следующие условия эквивалентны:

• прямая $l = \overline{pq}$ пересекает X;

• любая пара F, G однородных многочленов из $I(X)$ имеет общий нуль на l;

• результант $R(F, G)$ обращается в нуль в точке q для любой пары однородных многочленов $F, G \in I(X)$.

Другими словами, образ $\overline{X}$ при проектировании $\pi\colon X \to \mathbb{P}^{n-1}$ совпадает с множеством общих нулей многочленов $R(F, G)$, где (F, G) пробегает множество всех пар однородных элементов $I(X)$. □

Упражнение 3.7. Обоснуйте первую из этих двух эквивалентностей, т. е. покажите, что если прямая l в $\mathbb{P}^n$ не пересекает X, то найдется пара однородных многочленов $F, G \in I(X)$, не имеющих общих нулей на l.

Упражнение 3.8. Найдите уравнения, задающие проекцию скрученной кубики из точки $[1, 0, 0, 1]$, а также из точки $[0, 1, 0, 0]$ (заметим, что вычисление результантов — не самый эффективный способ сделать это). Попробуйте доказать, что всякая проекция скрученной кубики из точки вне ее проективно эквивалентна одной из этих двух проекций.

Понятие проекции можно несколько обобщить: если $\Lambda \cong \mathbb{P}^k$ — произвольное подпространство, а $\mathbb{P}^{n-k-1}$ — дополнительное подпространство, то можно определить отображение

$$\pi_\Lambda\colon \mathbb{P}^n \setminus \Lambda \to \mathbb{P}^{n-k-1},$$

ставящее в соответствие точке $q \in \mathbb{P}^n \setminus \Lambda$ точку пересечения $(k+1)$-мерного линейного подпространства $\overline{q, \Lambda}$ с $\mathbb{P}^{n-k-1}$. Как и выше, для любого $X \subset \mathbb{P}^n$, не пересекающегося с Λ, получаем регулярное отображение π_Λ многообразия X. Его образ называется *проекцией X из Λ в $\mathbb{P}^{n-k-1}$*. Поскольку это отображение может быть получено как композиция проекций из точек $p_0, \ldots, p_k$, порождающих Λ, теорема 3.5 показывает, что $\pi_\Lambda(X) \subset \mathbb{P}^{n-k-1}$ является многообразием.

Проектирования нетрудно определить инвариантно: если $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$ — проективизация $(n+1)$-мерного векторного пространства V, $\Lambda = \mathbb{P}W$ — проективизация $(k+1)$-мерного подпространства $W \subset V$, а $\mathbb{P}^{n-k-1} = \mathbb{P}U$ для некоторого $(n-k)$-мерного подпространства $U \subset V$, дополнительного к W, то π_Λ соответствует проектированию $V = W \oplus U \to U$. В частности, заметим, что если U' — другое $(n-k)$-мерное подпространство, дополнительное к W, то проектирования в $\mathbb{P}U$ и $\mathbb{P}U'$ получаются друг из друга композицией с изоморфизмом $\mathbb{P}U \cong \mathbb{P}U'$; стало быть, проекция

$\pi_\Lambda(X)$ из Λ в $\mathbb{P}^{n-k-1}$ зависит, с точностью до проективной эквивалентности, только от Λ, а не от выбора $\mathbb{P}^{n-k-1}$.

Упражнение 3.9. Покажите, что кривые $C_{\alpha,\beta}$ из упражнения 1.29 могут быть получены проектированием нормальной рациональной кривой в $\mathbb{P}^4$ из точек $p_{\alpha\beta} \in \mathbb{P}^4$, и используйте этот факт, чтобы показать, что проекции $\pi_p(X)$ и $\pi_{p'}(X)$ многообразия X из точек p и $p' \neq p$ могут не быть проективно эквивалентны.

На самом деле любое регулярное отображение $\varphi\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ из одного проективного пространства в другое можно разложить в композицию отображения Веронезе $\nu_d\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ для некоторого d, проекции $\pi_\Lambda\colon \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^{m'}$ из центра Λ, не пересекающего многообразие Веронезе $\nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$ и, быть может, вложения $\mathbb{P}^{m'} \subset \mathbb{P}^m$, но доказать это на данном этапе было бы сложно.

Пример 3.10. Еще о конусах

Используя проекции, можно следующим образом обобщить наше определение конуса. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное многообразие и $p \in \mathbb{P}^n$ — точка, не лежащая на X. Тогда объединение

$$\overline{X, p} = \bigcup_{q\in X} \overline{qp},$$

которое мы снова будем называть *конусом* над X с вершиной p, является многообразием; в терминологии примера 3.1 это конус с вершиной p над проекцией $\overline{X} = \pi_p(X)$ многообразия X из точки p в гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1}$, не содержащую p. Аналогичным образом для любой k-плоскости $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$, не пересекающейся с X, можно образовать объединение $(k+1)$-мерных линейных подпространств $\overline{\Lambda, q}$, порожденных Λ и точками $q \in X$. Это объединение является многообразием, и мы будем называть его конусом над X с вершиной Λ.

Пример 3.11. Еще о проекциях

Рассмотрим для начала подмногообразие $X \subset Y \times \mathbb{P}^1$, где Y — аффинное многообразие. Такое многообразие можно задать как множество нулей многочленов $F(W_0, W_1)$, однородных по координатам W_0 и W_1 на $\mathbb{P}^1$, коэффициенты которых — регулярные функции на Y. Теория исключения показывает, что образ $\overline{X}$ многообразия X при проектировании $\pi_1\colon Y \times \mathbb{P}^1 \to Y$ является множеством нулей результантов всех пар таких многочленов; в частности это замкнутое подмножество в Y.

Пусть теперь X — подмногообразие в $Y \times \mathbb{P}^2$, и пусть мы хотим доказать аналогичное утверждение. Это можно сделать, выбрав точку $p \in \mathbb{P}^2$ и отобразив сначала $Y \times (\mathbb{P}^2 \setminus \{p\})$ на $Y \times \mathbb{P}^1$, а потом спроектировав

$Y \times \mathbb{P}^1$ на Y. Этот прием работает всегда, кроме случая, когда X пересекает множество $Y \times \{p\}$, так что, обозначив через $V \subset Y$ замкнутое множество $\{q \in Y \mid (q, p) \in X\}$, мы видим, что образ $\overline{X} = \pi_1(X) \subset Y$ пересекается с открытым множеством $U = Y \setminus V$ по подмножеству, замкнутому в U. Но поскольку $\overline{X}$ содержит V, отсюда следует, что $\overline{X}$ замкнуто в Y. В общем случае это рассуждение доказывает следующую теорему.

Теорема 3.12. *Пусть Y — произвольное многообразие, и пусть $\pi: Y \times \mathbb{P}^n \to Y$ — проектирование на первый сомножитель. Тогда образ $\pi(X)$ любого замкнутого подмножества $X \subset Y \times \mathbb{P}^n$ замкнут в Y.*

Объединяя это утверждение с упражнением 2.24, получаем в качестве непосредственного следствия следующую фундаментальную теорему.

Теорема 3.13. *Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное проективное многообразие, а $\varphi: X \to \mathbb{P}^m$ — регулярное отображение, то образ отображения φ является проективным подмногообразием в $\mathbb{P}^m$.*

Регулярную функцию на многообразии X можно рассматривать как отображение $X \to \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$. Применяя теорему 3.13 к этому отображению, получаем такое следствие.

Следствие 3.14. *Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное связное проективное многообразие, а f — регулярная функция на X, то f постоянна.*

Здесь «связное» означает «не являющееся объединением двух непересекающихся собственных замкнутых подмножеств». Это, в свою очередь, приводит к следующему результату.

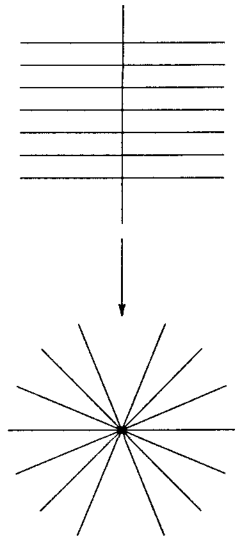
Следствие 3.15. *Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное связное проективное многообразие, отличное от точки, а $Y \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность, то $X \cap Y \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $F(X)$ — однородный многочлен, задающий гиперповерхность Y; обозначим степень F через d. Если $X \cap Y = \varnothing$, то можно применить следствие 3.14 к регулярным функциям G/F, где G пробегает однородные многочлены степени d, и заключить, что X — точка. □

Конструктивные множества

Теорема 3.13 ставит естественный вопрос: каким может быть образ квазипроективного многообразия X при регулярном отображении $f: X \to \mathbb{P}^n$? Первое, что надо иметь в виду: этот образ не обязательно является квазипроективным многообразием. Простейший пример — отображение $f: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, заданное формулой

$$f(x, y) = (x, xy).$$



Заметим, что горизонтальные прямые переходят при этом отображении во все прямые, проходящие через начало координат, за исключением вертикальной; вертикальные же прямые, отличные от оси y, переходят в себя, а ось y стягивается в начало координат. Следовательно, образ отображения f — это объединение начала координат и открытого множества $\{(z, w) \mid z \neq 0\}$, причем в окрестности начала координат образ отображения f не является локально замкнутым.

К счастью, дела не могут обстоять много хуже, чем в рассмотренном примере: образы квазипроективных многообразий образуют класс подмножеств в $\mathbb{P}^n$, называемых *конструктивными*, которые выглядят примерно так, как можно ожидать, основываясь на нашем примере. Конструктивное множество $Z \subset \mathbb{P}^n$ можно определить как конечное объединение непересекающихся локально замкнутых подмножеств $U_i \subset \mathbb{P}^n$, т. е. как множество, представимое в виде

$$Z = X_1 \setminus (X_2 \setminus (X_3 \setminus \ldots \setminus X_n) \ldots),$$

где $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n$ — убывающая цепочка замкнутых подмножеств в $\mathbb{P}^n$ (чтобы увидеть связь между этими двумя определениями, достаточно положить $U_1 = X_1 \setminus X_2$, $U_2 = X_3 \setminus X_4$ и т. д.). Эквивалентным образом можно определить класс конструктивных множеств как наименьший класс, содержащий все открытые множества и замкнутый относительно операций конечного пересечения и дополнения.

Основной факт состоит в том, что образы квазипроективных многообразий при регулярных отображениях конструктивны. На самом деле, ничуть не труднее доказать, что образы произвольных конструктивных множеств также являются конструктивными.

Теорема 3.16. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^m$ — квазипроективное многообразие, $f\colon X \to \mathbb{P}^n$ — регулярное отображение, а $U \subset X$ — конструктивное множество. Тогда $f(U)$ — конструктивное подмножество в $\mathbb{P}^n$.*

Доказательство. Основной шаг состоит в том, чтобы доказать a priori более слабое утверждение: образ $f(U)$ содержит непустое подмножество V, открытое в замыкании $f(U)$. Предполагая, что это уже сделано, положим $U_1 = U \cap (X \setminus f^{-1}(V))$ и заметим, что теорема для U следует из теоремы для U_1. Теперь применим наше утверждение к U_1 и построим замкнутое подмножество $U_2 \subsetneq U_1$ и т. д. Поскольку топология Зарисского нётерова (см. начало лекции 2), строго убывающая цепочка замкнутых подмножеств конструктивного множества конечна, так что в конце концов мы получим требуемый результат.

Осталось доказать сформулированное выше утверждение. Для начала мы можем заменить U на его открытое подмножество; таким образом, можно с самого начала считать, что U аффинно. Ограничив, если необходимо, f на меньшее аффинное открытое подмножество, можно считать, что его образ также содержится в аффинном пространстве. Если теперь вместо U рассмотреть график f, то можно считать, что f — ограничение линейного проектирования $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ на замкнутое подмножество $U \subset \mathbb{A}^n$, так что достаточно доказать утверждение для локально замкнутого подмножества $U \subset \mathbb{A}^n$ и отображения проектирования

$$\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1},$$
$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-1}).$$

Наконец, мы можем заменить $\mathbb{A}^{n-1}$ на $Y = \overline{\pi(U)}$ (замыкание в топологии Зарисского образа U), а $\mathbb{A}^n$ — на прообраз $\pi^{-1}(Y) = Y \times \mathbb{A}^1$. Тем самым достаточно доказать наше утверждение для локально замкнутого подмножества U произведения $Y \times \mathbb{A}^1$ (или, эквивалентно, для локально замкнутого подмножества $U \subset Y \times \mathbb{P}^1$) и проектирования $\pi\colon Y \times \mathbb{P}^1 \to Y$ на первый множитель, при дополнительном предположении, что $\pi(U)$ плотно в Y. Иными словами, мы свели доказательство теоремы к следующей лемме.

Лемма 3.17. *Пусть $\pi\colon Y \times \mathbb{P}^1 \to Y$ — проектирование на первый множитель, и пусть $U \subset Y \times \mathbb{P}^1$ — произвольное локально замкнутое подмножество, образ $\pi(U)$ которого плотен в Y. Тогда $\pi(U)$ содержит подмножество, открытое в Y.*

Доказательство. Пусть X — замыкание U в $Y \times \mathbb{P}^1$, так что

$$U = X \cap V$$

для некоторого открытого подмножества $V \subset Y \times \mathbb{P}^1$. Обозначим через T дополнение к V в $Y \times \mathbb{P}^1$. Заметим, что если $X = Y \times \mathbb{P}^1$, то все уже сделано, поскольку множество таких точек $p \in Y$, что T содержит слой $\{p\} \times \mathbb{P}^1$, является собственным подмногообразием в Y; поэтому будем считать, что $X \subsetneq Y \times \mathbb{P}^1$. По теореме 3.12 множество $\pi(X)$ замкнуто, так что из условия вытекает. что $\pi(X) = Y$; стало быть, достаточно показать, что замкнутое подмногообразие $\pi(X \cap T)$ не совпадает с Y.

В подходящем открытом подмножестве Y идеалы X и T порождаются многочленами F вида

$$F(Z, W) = a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} W + \ldots + a_n W^n.$$

Более того, не у всякой пары многочленов $F \in I(X)$ и $G \in I(T)$ есть общий делитель, ибо если, например, все многочлены $G \in I(T)$ имеют общий делитель H с заданным многочленом $F \in I(X)$, то H не обращается в нуль на U, и, следовательно, частное F/H также содержится в $I(X)$. Но если у F и G нет общего делителя, то $\pi(X \cap T)$ содержится в собственном подмногообразии Y, задаваемом их результантом $R(F, G)$. $\square$

Лекция 4

СЕМЕЙСТВА И ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ

Пример 4.1. Семейства многообразий

Мы переходим к определению понятия, которое на первый взгляд не кажется особо содержательным, но тем не менее играет фундаментальную роль во многих разделах алгебраической геометрии. Речь идет о следующей ситуации. Пусть $\{V_b\}$ — набор проективных многообразий $V_b \subset \mathbb{P}^n$, проиндексированных точками b многообразия B. Мы бы хотели придать точный смысл следующему утверждению: «V_b алгебраически зависит от параметров». Ответ прост: для произвольного многообразия B *семейством проективных многообразий* в $\mathbb{P}^n$ с базой B называется замкнутое подмногообразие $\mathcal{V}$ произведения $B \times \mathbb{P}^n$. Слои $V_b = (\pi_1)^{-1}(b)$ естественной проекции $\pi_1 \colon \mathcal{V} \to B$ называются *членами*, или *элементами* семейства, а многообразие $\mathcal{V}$ — *тотальным пространством* семейства; при этом говорят, что семейство *параметризовано* многообразием B. Смысл этого определения в том, что если $B \subset \mathbb{P}^m$ проективно, то семейство $\mathcal{V} \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ задается многочленами $F_\alpha(Z, W)$, биоднородными по наборам координат Z на $\mathbb{P}^m$ и W на $\mathbb{P}^n$; последние можно рассматривать как однородные многочлены от W, коэффициенты которых являются многочленами на B. Аналогично, если B аффинно, то $\mathcal{V}$ можно задать многочленами $F_\alpha(z, W)$, которые можно рассматривать как однородные многочлены от переменных W с коэффициентами в кольце регулярных функций на B.

К определению семейства можно добавить много различных дополнительных условий, которые будут гарантировать, что многообразие действительно в том или ином смысле варьируется непрерывно. Мы обсудим некоторые из таких условий в лекции 21.

Здесь мы должны отметить, что, как правило, геометрическое условие, наложенное на элементы семейства многообразий $V_b \subset \mathbb{P}^n$, задает конструктивное, а часто даже открытое или замкнутое подмножество пространства параметров B. Например, используя теорему 3.13, нетрудно показать, что для произвольной точки $p \in \mathbb{P}^n$ множество таких $b \in B$, что $p \in V_b$, является замкнутым подмногообразием в B. Справедливо и более общее утверждение.

Упражнение 4.2. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие и $\{V_b\}$ — семейство проективных многообразий в $\mathbb{P}^n$ с базой B. Покажите, что множество

$$\{b \in B \mid X \cap V_b \neq \varnothing\}$$

замкнуто в B. Более того, если $\{W_b\}$ — еще одно семейство в $\mathbb{P}^n$ с базой B, то множество

$$\{b \mid V_b \cap W_b \neq \varnothing\}$$

замкнуто в B.

Упражнение 4.3. Обобщая и далее, покажите, что если $\{W_c\}$ — еще одно семейство проективных многообразий в $\mathbb{P}^n$ с базой C, то множество

$$\{(b, c) \mid V_b \cap W_c \neq \varnothing\}$$

является замкнутым подмногообразием в произведении $B \times C$. Выведите отсюда предыдущее упражнение.

В том же духе, для любого $X \subset \mathbb{P}^n$ и любого семейства $\{V_b\}$ можно рассмотреть подмножество

$$\{b \in B \mid V_b \subset X\}.$$

Оно всегда конструктивно, хотя мы и не можем здесь это доказать. Однако оно не всегда замкнуто; например, возьмем в качестве базы $\mathbb{A}^2$ и зададим семейство $\mathscr{V} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ (с помощью координат z на $\mathbb{A}^2$ и однородных координат W на $\mathbb{P}^1$) уравнением $z_1 \cdot W_2 = z_2 \cdot W_1$, а в качестве $X \subset \mathbb{P}^1$ возьмем произвольную точку. С другой стороны, имеет место следующее утверждение.

Упражнение 4.4. Для любого $X \subset \mathbb{P}^n$ и любого семейства $\{V_b\}$ покажите, что подмножество

$$\{b \in B \mid X \subset V_b\}$$

замкнуто в B.

Пример 4.5. Универсальная гиперплоскость

Представим проективное пространство $\mathbb{P}^{n*}$ как множество гиперплоскостей $H \subset \mathbb{P}^n$ и определим подмножество в произведении $\mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n$ следующим образом:

$$\Gamma = \{(H, p) \mid p \in H\}.$$

Множество Γ является подмногообразием в $\mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n$; действительно, в координатах Z на $\mathbb{P}^n$ и W на $\mathbb{P}^{n*}$, соответствующих двойственным базисам в K^{n+1} и $(K^{n+1})^*$, Γ задается единственным билинейным уравнением

$$\sum W_i \cdot Z_i = 0.$$

В частности, Γ является гиперплоским сечением многообразия Сегре $\mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n^2+2n}$.

Многообразие Γ является простейшим примером семейства; ввиду того, что слоями Γ над первым сомножителем $B = \mathbb{P}^{n*}$ являются все гиперплоскости в $\mathbb{P}^n$, мы мыслим Γ как семейство гиперплоскостей, параметризованных пространством $\mathbb{P}^{n*}$. (Разумеется, ситуация симметрична, и проекция на второй сомножитель позволяет нам рассматривать Γ как семейство гиперплоскостей в $\mathbb{P}^{n*}$, параметризованное пространством $\mathbb{P}^n$.)

«Универсальность» семейства Γ заключается в следующем его свойстве: если семейство гиперплоскостей $\mathscr{V} \subset B \times \mathbb{P}^n$ удовлетворяет некоторому техническому условию, называемому *плоскостность* (см. начало лекции 21), то существует и единственно регулярное отображение $B \to \mathbb{P}^{n*}$, обладающее тем свойством, что $\mathscr{V}$ является расслоенным произведением $B \times_{\mathbb{P}^{n*}} \Gamma$, другими словами, что отображение φ, сопоставляющее точке $b \in B$ гиперплоскость $V_b \in \mathbb{P}^{n*}$, регулярно. К сожалению, нам пришлось воспользоваться еще не определенным понятием «плоское семейство», но без этого утверждение было бы неверно (см. пример, приведенный после упражнения 2.24). Здесь мы столкнулись с одним из многочисленных случаев, где был бы полезен язык схем.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{V} \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{P}^{n*} \end{tikzcd}$$

Пример 4.6. Универсальное гиперплоское сечение

Используя предыдущую конструкцию, можно показать, что гиперплоские сечения произвольного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ образуют семейство. Именно, если через $\Gamma \subset \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n$ обозначено то же многообразие, что и выше, положим

$$\Omega_X = \{(H, p) \mid p \in H \cap X\} = (\pi_2)^{-1}(X),$$

где $\pi_2 \colon \Gamma \to \mathbb{P}^n$ — проекция на второй сомножитель; тогда Ω_X является подмногообразием в $\mathbb{P}^{n*} \times X$, которое можно рассмотреть как семейство гиперплоских сечений многообразия X.

Одним из вопросов, которые можно задать про семейство многообразий $\mathscr{V} \subset B \times \mathbb{P}^n$, является вопрос о наличии *сечения*, то есть такого регулярного отображения $\sigma \colon B \to \mathscr{V}$, что $\pi_1 \circ \sigma$ тождественно на B. Можно также ввести понятие *рационального сечения*, т. е. сечения, определенного на некотором непустом открытом подмножестве $U \subset B$ (происхождение термина «рациональный» станет ясным в лекции 7). Вопрос о том, обладает ли сечением данное семейство, может быть весьма тонким; например, даже в относительно простом случае универсального гиперплоского сечения многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ ответ на него в общем случае неизвестен (даже если X — поверхность). Следующее упражнение станет достаточно простым после того, как мы введем некоторую дополнительную технику (в частности, оно будет немедленно следовать из теоремы 11.4), но небесполезно попробовать решить его и прямо сейчас.

Упражнение 4.7. Покажите, что универсальное гиперплоское сечение Ω_X не обладает рациональным сечением, если X является: (i) гладкой плоской коникой; (ii) скрученной кубикой в $\mathbb{P}^3$.

Пример 4.8. Пространства параметров для гиперповерхностей

Параметризация гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$ с помощью $\mathbb{P}^{n*}$ — первый пример общей конструкции, которую мы сейчас обсудим. Начнем с уже известного из примера 1.20 множества Σ плоских коник $C \subset \mathbb{P}^2$. Коника $C \subset \mathbb{P}^2$ может быть задана в однородных координатах X_i в $\mathbb{P}^2$ как множество нулей многочлена

$$F(X) = a \cdot X_0^2 + b \cdot X_1^2 + c \cdot X_2^2 + d \cdot X_0X_1 + e \cdot X_0X_2 + f \cdot X_1X_2$$

с хотя бы одним ненулевым коэффициентом. Она определяется шестеркой коэффициентов (a, b, c, d, e, f) с точностью до умножения на скаляр (т. к. при любых $\lambda \in K^*$ наборы $(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d, \lambda e, \lambda f)$ и (a, b, c, d, e, f) определяют одну и ту же кривую). Таким образом, множество Σ может быть отождествлено с проективным пространством $\mathbb{P}^5$. (В бескоординатной записи: если $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}V$, то однородные многочлены степени 2 на V образуют векторное пространство $W = \mathrm{Sym}^2(V^*)$, и мы отождествляем Σ и $\mathbb{P}W$, сопоставляя множеству нулей формы F точку $[F] \in \mathbb{P}W$.)

Конечно, если мы хотим рассуждать строго, нам придется определить плоскую конику так, чтобы каждому такому многочлену соответствовала какая-то коника; тем самым, надо будет считать, что такие множества, как пары прямых (например, множество нулей многочлена X_0X_1) и двойные прямые (например, множество нулей многочлена X_0^2), также принадлежат Σ. (В лекции 22 мы увидим, как можно определить множество коник по-другому, если нам не по душе считать кониками двойные прямые и пары прямых.)

Многообразие $\Sigma = \mathbb{P}^5$, параметризующее плоские коники, является примером *пространства параметров*, еще одного фундаментального понятия в алгебраической геометрии. В большинстве геометрических категорий относительно редко встречаются множества геометрических объектов заданного типа, снабженные структурой геометрического объекта того же типа. Например, в дифференциальной геометрии множество подмногообразий данного многообразия не является дифференцируемым многообразием в обычном смысле даже локально. Между тем в алгебраической геометрии эта ситуация встречается повсеместно. Фактически каждый объект, рассматриваемый в алгебраической геометрии, можно параметризовать в том смысле, что множество всех объектов данного типа естественным образом снабжено структурой алгебраического многообразия. Это справедливо не только для подмногообразий проективного пространства, но и для подмногообразий заданного проективного многообразия, а также и для регулярных отображений из одного многообразия в другое (так как они задаются своими графиками).

На данном этапе в нашем распоряжении нет многих важных понятий, необходимых для построения общей конструкции упомянутых пространств параметров, так что мы вынуждены отложить обсуждение этой темы до лекции 21. Пока что заметим лишь, что конструкция пространства параметров $\mathbb{P}^5$ для множества плоских коник мгновенно обобщается на множество гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}^n$: любая такая гиперповерхность задается многочленом

$$F(Z_0, \ldots, Z_n) = \sum a_{i_0,\ldots,i_n} Z_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot Z_n^{i_n},$$

так что это множество гиперповерхностей параметризуется точками проективного пространства $\mathbb{P}^N$ с однородными координатами $a_{i_0,\ldots,i_n}$.

Пример 4.9. Универсальные семейства гиперповерхностей

Во введенной нами терминологии утверждение о том, что множество гиперповерхностей заданной степени в $\mathbb{P}^n$ параметризуется проективным пространством $\mathbb{P}^N$, предполагает наличие семейства гиперповерхностей с базой $B = \mathbb{P}^N$. Такое семейство действительно существует. Например, на знакомое уравнение общей коники в $\mathbb{P}^2$

$$F(X) = a \cdot X_0^2 + b \cdot X_1^2 + c \cdot X_2^2 + d \cdot X_0X_1 + e \cdot X_0X_2 + f \cdot X_1X_2$$

можно смотреть как на уравнение гиперповерхности $\mathscr{X} \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^2$ (X_i — координаты в $\mathbb{P}^2$, а a, b, c, d, e, f — в $\mathbb{P}^5$), причем слоем семейства $\mathscr{X}$ над точкой $C \in \mathbb{P}^5$ является соответствующая кривая $C \subset \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \times \{C\}$, которую мы обозначили той же буквой. Семейство $\mathscr{X}$ называется *универсальным семейством* коник; так же, как и в случае гиперплоскостей, оно называется универсальным потому, что любое плоское семейство гладких коник $\mathscr{V} \subset B \times \mathbb{P}^2$ можно рассматривать как расслоенное произведение

$$\mathscr{V} = B \times_{\mathbb{P}^5} \mathscr{X}$$

относительно некоторого однозначно определенного отображения $B \to \mathbb{P}^5$. (Вместо «семейство гладких коник» можно было бы сказать просто «семейство коник», подразумевая, что к коникам относятся и пары прямых, но этот случай технически сложнее; мы еще затронем этот вопрос в лекции 21.)

В общем случае универсальные семейства существуют для гиперповерхностей любой степени d в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ любой размерности; строятся они совершенно аналогично. Заметим, что в случае $d = 1$ пространством параметров является двойственное проективное пространство $\mathbb{P}^{n*}$, а универсальным семейством служит описанная в примере 4.5 универсальная гиперплоскость $\Gamma \subset \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n$.

Сделанное ранее замечание о том, что геометрические условия, наложенные на элементы семейства, задают конструктивные множества на базе, применимо к пространствам параметров. Пусть, например, $\Sigma \cong \mathbb{P}^5$ — пространство параметров для плоских коник; рассмотрим подмножество $\Psi \subset \mathbb{P}^5$, соответствующее двойным прямым. Оно может быть представлено как образ пространства $\mathbb{P}^{2*}$ прямых в $\mathbb{P}^2$ при отображении ν_2, сопоставляющем прямой l «конику» l^2, т.е. переводящем линейную форму

$$l(X) = aX_0 + bX_1 + cX_2$$

в квадратичный многочлен

$$l(X)^2 = a^2 \cdot X_0^2 + b^2 \cdot X_1^2 + c^2 \cdot X_2^2 + 2ab \cdot X_0X_1 + 2ac \cdot X_0X_2 + 2bc \cdot X_1X_2$$

(все, разумеется, определено с точностью до скалярного множителя). В координатах наше отображение $\nu_2 \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ записывается следующим образом:

$$\nu_2 \colon [a, b, c] \mapsto [a^2, b^2, c^2, 2ab, 2ac, 2bc],$$

и мы узнаем в нем (если характеристика нашего поля не равна двум) квадратичное отображение Веронезе. Таким образом, многообразие Ψ является поверхностью Веронезе в $\mathbb{P}^5$.

Аналогичным способом мы можем охарактеризовать подмножество $\Delta \subset \mathbb{P}^5$, состоящее из коник, распадающихся в пару прямых (т.е. соответствующих квадратичным многочленам, разложимым в произведение двух линейных сомножителей), как образ отображения $\mathbb{P}^{2*} \times \mathbb{P}^{2*} \to \mathbb{P}^5$, сопоставляющего паре линейных форм $([\,l\,], [m])$ их произведение $[l \cdot m]$. В этом отображении мы можем узнать композицию вложения Сегре $\mathbb{P}^{2*} \times \mathbb{P}^{2*} \to \mathbb{P}^8$ и проекции (в инвариантной форме это морфизм $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(V \otimes V) \to \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V)$). В любом случае ясно, что мы имеем дело с регулярным отображением, образ которого, как и было сказано, является подмногообразием в $\mathbb{P}^5$. В лекции 8 мы реализуем Δ как многообразие секущих поверхности Веронезе.

Упражнение 4.10. Пусть $\mathbb{P}^N$ рассматривается, как и ранее, как пространство параметров гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}^n$. Покажите, что подмножество $\Sigma \subset \mathbb{P}^N$, соответствующее приводимым многочленам, является проективным подмногообразием в $\mathbb{P}^n$. (Σ соответствует гиперповерхностям X, содержащим гиперповерхность Y, степень которой строго меньше d, но чтобы доказать это, нам потребуется терема 5.1.)

Упражнение 4.11. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольная гиперповерхность степени d, заданная однородным многочленом $F(Z_0, \ldots, Z_n)$. Покажите, что подмножество гиперплоскостей H, для которых ограничение F на H приводимо (т. е. таких, что $H \cap X$ содержит гиперповерхность степени $< d$ в H), является подмногообразием в $\mathbb{P}^{n*}$.

Вопрос о наличии сечения может быть поставлен в случае универ сальных гиперповерхностей; как указано ниже, в этом случае ответ известен.

Упражнение 4.12. (a) Для произвольного n найдите рациональное сечение универсальной гиперплоскости $\Gamma \subset \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n$. (b) Для нечетного n найдите сечение семейства Γ. (c) Для четного n докажите, что у Γ сечений нет. (Для решения пункта (c) можно использовать тот факт, что любое регулярное отображение $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ задается $m+1$ однородным многочленом.) (*)

Упражнение 4.13. Покажите, что универсальная плоская коника $\mathscr{X} \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^2$ не имеет даже рационального сечения. (*)

Аналогичное утверждение верно и в общем случае: универсальное семейство гиперповерхностей любой степени $d > 1$ не имеет рационального сечения[1].

Упражнение 4.14. (a) Пусть $\mathscr{X} \subset B \times \mathbb{P}^3$ — произвольное семейство скрученных кубик. Покажите, что оно имеет рациональное сечение. (b) Напротив, приведите пример семейства нормальных рациональных кривых степени 4, у которого рационального сечения нет. (*) (В общем случае ситуация такова: семейство нормальных рациональных кривых $\mathscr{X} \subset B \times \mathbb{P}^n$ всегда имеет рациональное сечение, если их степень нечетна, а в случае четной степени это не так.)

Пример 4.15. Одно семейство прямых

Завершим наше обсуждение примерами семейств линейных подпространств в $\mathbb{P}^n$. Начнем с простейшего случая: пусть $U \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ — дополнение к диагонали; рассмотрим подмножество

$$\Omega = \{(p, q; r) \mid r \in \overline{pq}\} \subset U \times \mathbb{P}^n.$$

[1] Я не знаю хорошей ссылки на доказательство этого утверждения. Его можно провести, применив теорему Лефшеца о гиперплоских сечениях к универсальному семейству $\mathscr{X} \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$.

Заметим, что Ω является подмногообразием в $U \times \mathbb{P}^n$, а значит, семейством с базой U, слоем которого над точкой $(p, q) \in U$ является прямая, соединяющая p и q. Так как любая прямая в $\mathbb{P}^n$ лежит в некотором слое проекции $\pi_1 : \Omega \to U$, мы можем рассматривать U как пространство, параметризующее все прямые в $\mathbb{P}^n$. Однако это пространство параметров не оптимально, так как любая прямая встречается при такой параметризации не единственный раз, а многократно. Мы увидим, как исправить эту ситуацию, в лекции 6, когда будем обсуждать грассманианы.

Упражнение 4.16. Покажите, что Ω действительно является подмногообразием в $U \times \mathbb{P}^n$. Далее, покажите, что для любого k множество $U \subset (\mathbb{P}^n)^k$ таких наборов $(p_1, \ldots, p_k)$, что $p_1, \ldots, p_k$ линейно независимы, открыто и что множество

$$\Omega = \{((p_1, \ldots, p_k); r) \mid r \in \overline{p_1, \ldots, p_k}\} \subset U \times \mathbb{P}^n$$

является подмногообразием. Каково замыкание Ω в $(\mathbb{P}^n)^k \times \mathbb{P}^n$?

Упражнение 4.17. Построим теперь другое семейство линейных подпространств. Пусть $V \subset (\mathbb{P}^{n*})^{n-k}$ — открытое подмножество, состоящее из наборов $n-k$ линейно независимых гиперплоскостей, и пусть

$$\Xi = \{((H_1, \ldots, H_{n-k}); r) \mid r \in H_1 \cap \ldots \cap H_{n-k}\} \subset V \times \mathbb{P}^n.$$

Покажите, что Ξ является семейством k-плоскостей. В случае прямых в $\mathbb{P}^3$ сравните семейство, построенное в этом упражнении, с построенным ранее. Изоморфны ли они?

Лекция 5

ИДЕАЛЫ МНОГООБРАЗИЙ, РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ И ТЕОРЕМА О НУЛЯХ

Идеалы, задающие многообразия

Настало время обсудить, в каком смысле многообразие может задаваться набором уравнений. Утверждению, что набор многочленов $\{F_\alpha(Z)\}$ задает многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$, можно придать три различных смысла, и для выражения каждого из этих смыслов существует своя терминология.

Начнем с аффинного случая, в котором возможностей только две. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — многообразие, а $\{f_\alpha(z_1, \ldots, z_n)\}_{\alpha=1,\ldots,m}$ — набор многочленов. Когда мы говорим, что многочлены f_α задают X, мы можем подразумевать одно из двух:

(i) X — множество $V(f_1, \ldots, f_m)$, на котором все многочлены f_α обращаются в нуль;

(ii) многочлены f_α порождают идеал $I(X)$.

Ясно, что второе условие сильнее. Например, множество нулей многочлена $x^2 \in K[x]$ есть начало координат $0 \in \mathbb{A}^1$, но идеал функций, равных нулю в точке 0, — это (x), а не (x^2). Вообще, у идеала функций, равных нулю на многообразии, есть следующее свойство: если для многочлена $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$ верно, что $f^k \in I$ для некоторого натурального k, то $f \in I$. Это можно формализовать, заметив, что для данного идеала I в кольце R множество таких элементов $f \in R$, что $f^k \in I$ для некоторого $k > 0$, снова является идеалом. Он называется *радикалом* I и обозначается $\mathfrak{r}(I)$. Идеал I называется *радикальным*, если он равен $\mathfrak{r}(I)$. Как мы только что заметили, идеалы, не обладающие этим свойством, не могут быть представлены в виде $I(X)$.

Другими словами, существует двустороннее соответствие

$$\left\{\begin{matrix}\text{подмногообразия}\\ \text{в } \mathbb{A}^n\end{matrix}\right\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{идеалы}\\ I \subset K[z_1, \ldots, z_n]\end{matrix}\right\},$$

но оно не является биекцией: само определение многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ равносильно тому утверждению, что $V(I(X)) = X$, так что композиция $V \circ I$ — тождественное отображение, однако композиция в обратном порядке не инъективна и не сюръективна. Это положение можно исправить, рассмотрев образ отображения I. Чудесным образом, существует его простое описание (являющееся на самом деле и описанием композиции $I \circ V$). Это знаменитая теорема Гильберта о нулях[1]:

Теорема 5.1. *Для любого идеала $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ идеал функций, равных нулю на множестве общих нулей идеала I, есть радикал I, то есть*

$$I(V(I)) = \mathfrak{r}(I).$$

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между подмногообразиями $X \subset \mathbb{A}^n$ и радикальными идеалами $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$.

Мы отложим и доказательство теоремы Гильберта о нулях, и формулировку некоторых ее следствий до конца этой лекции, а сейчас продолжим наше обсуждение.

В качестве одного из следствий теоремы о нулях отметим следующий факт: K-алгебра A является координатным кольцом некоторого аффинного многообразия в том и только том случае, если A конечно порождена и не имеет нильпотентных элементов. Ясно, что эти два условия являются необходимыми; обратно, если они выполняются, то мы можем представить A как

$$A = K[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m),$$

так что $A = A(X)$, где $X \subset \mathbb{A}^n$ есть множество общих нулей многочленов f_α.

Здесь можно ненадолго отвлечься и упомянуть одно из фундаментальных понятий теории схем. Если мы хотим «подправить» соответствие на с. 70 так, чтобы оно стало биекцией, мы можем поступить одним из двух способов: либо сузить класс объектов справа, либо расширить класс объектов слева. Как только что было сказано, в классической алгебраической геометрии делается первое; в теории схем, напротив, идут по второму пути. Именно, *аффинная схема* $X \subset \mathbb{A}^n$ определяется как объект, ассоциированный с произвольным идеалом $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$.

Какой в этом может быть смысл? Здесь не место вдаваться в подробности, однако отметим, что бо́льшую часть понятий, с которыми мы имеем дело в алгебраической геометрии, можно определить не только в терминах подмножеств аффинных или проективных пространств, но и в терминах колец и идеалов. Например, если $X \subset \mathbb{A}^n$ — многообразие, соответствующее идеалу X, то функцию на X можно определить как

[1]По-английски ее принято называть немецким словом Nullstellensatz. — *Прим. перев.*

элемент кольца $A(X) = K[z_1, \ldots, z_n]/I$; пересечение двух многообразий $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ задается суммой их идеалов[1]; задание отображения из многообразия X в многообразие Y эквивалентно заданию отображения $A(Y) \to A(X)$, и т. д. Отметим, что все это имеет смысл независимо от того, является ли I радикальным. Схема, ассоциированная с произвольным идеалом $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$, может показаться непохожей на «настоящий» геометрический объект (особенно если I не радикален), но формально она ведет себя именно как таковой и несет некоторую дополнительную информацию, представляющую интерес для геометрии.

Перед тем как двигаться дальше, введем новую терминологию. Будем говорить, что набор многочленов $\{f_\alpha\}$ задает многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ *теоретико-множественно*, если X просто является множеством их общих нулей; если же этот набор к тому же порождает идеал $I(X)$, то будем говорить, что он задает многообразие *теоретико-схемно.*

Идеалы проективных многообразий

Проективный случай в некотором смысле аналогичен аффинному: в нем также имеется соответствие между проективными многообразиями $X \subset \mathbb{P}^n$ и однородными идеалами $I \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$, и если рассматривать только радикальные идеалы, то это соответствие почти биективно («почти», поскольку необходимо исключить радикальный идеал $\mathfrak{m} = (Z_0, \ldots, Z_n)$). Однако здесь существует еще одна интерпретация понятия «многочлены задают многообразие».

Пусть, например, $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное многообразие, и пусть $I \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ — его идеал. Рассмотрим идеал I', получаемый из I пересечением с идеалом $(Z_0, \ldots, Z_n)^k$. Другими словами, если записать идеал I в виде прямой суммы своих однородных компонент

$$I = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} I_m,$$

то идеал I' будет равняться

$$I' = \bigoplus_{m \geqslant k} I_m.$$

Ясно, что радикал I' — это I, так как любой элемент из I, будучи возведенным в достаточно высокую степень, попадет в I'. Но существует и более тесная взаимосвязь между I и I': многочлен $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ лежит в I тогда и только тогда, когда его произведение с любым однородным многочленом достаточно высокой степени лежит в I'. Это

[1] С точностью до перехода к радикалу, разумеется. — *Прим. ред.*

означает, что при ограничении на открытое аффинное подмножество $(Z_i \neq 0) \cong \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ — или, что то же самое, при рассмотрении однородной компоненты степени 0 идеала $(I' \cdot K[Z_0, \ldots, Z_n, Z_i^{-1}])_0$ в локализации координатного кольца $(K[Z_0, \ldots, Z_n, Z_i^{-1}])_0 \cong K[z_1, \ldots, z_n]$ (то есть в кольце регулярных функций на аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$) — мы получаем в точности идеал аффинного открытого подмножества $X \cap \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^n$. В этом случае можно сказать, что идеал I' *локально задает* многообразие X, несмотря на то, что он не совпадает с I.

Чтобы формализовать эти рассуждения, введем понятие *насыщения* $\overline{I}$ идеала $I \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$. Оно определяется так:

$$\overline{I} = \{F \in K[Z_0, \ldots, Z_n] \mid (Z_0, \ldots, Z_n)^k \cdot F \subset I \text{ для некоторого } k\}.$$

Заметим, что, поскольку кольцо $K[Z_0, \ldots, Z_n]$ нётерово, фактор $\overline{I}/I$ конечно порожден, и поэтому k-е однородные компоненты $\overline{I}$ и I совпадают при достаточно больших k. В самом деле, имеет место следующее утверждение.

Упражнение 5.2. Покажите, что для пары однородных идеалов $I, J \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ следующие условия эквивалентны:

(i) насыщения идеалов I и J совпадают;

(ii) $I_m = J_m$ для всех $m \gg 0$;

(iii) I и J совпадают локально, то есть их образы порождают один и тот же идеал в каждой локализации кольца $K[Z_0, \ldots, Z_n]$ вида $K[Z_0, \ldots, Z_n, Z_i^{-1}]$.

В переводе на язык схем все три условия из упражнения 5.2 означают, что I и J определяют одну и ту же подсхему в $\mathbb{P}^n$; часто говорят, что набор функций задает многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ *теоретико-схемно*, или *локально*, если насыщение идеала, порождаемого ими в $K[Z_0, \ldots, Z_n]$, есть однородный идеал $I(X)$. Итак, перечислим три утверждения, которые можно сделать про набор многочленов F_α в связи с многообразием X, в порядке усиления. Многочлены F_α могут:

(i) задавать многообразие X теоретико-множественно, если множество их общих нулей в $\mathbb{P}^n$ есть X;

(ii) задавать многообразие X теоретико-схемно, если насыщение порождаемого ими идеала есть $I(X)$; и, наконец,

(iii) порождать однородный идеал $I(X)$ многообразия X.

Например, если $I = I(X)$ — это идеал прямой $(X = 0)$ на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами X, Y и Z, то идеал $I' = (X^2, XY, XZ)$ порождает I локально, хотя не совпадает с I, а вот идеал (X^2) не порождает I даже локально, хотя множество его нулей то же самое.

Упражнение 5.3. Рассмотрим еще раз нормальную рациональную кривую $C \subset \mathbb{P}^d$ из примера 1.14. Покажите, что однородные квадратичные многочлены

$$F_{i,i} = Z_i^2 - Z_{i-1}Z_{i+1}$$

и

$$F_{i,i+1} = Z_iZ_{i+1} - Z_{i-1}Z_{i+2}$$

порождают идеал нормальной рациональной кривой локально, но при этом не порождают однородный идеал $I(C)$ при $d \geqslant 4$.

Упражнение 5.4. Покажите, что многочлены $F_{i,j} = Z_iZ_j - Z_{i-1}Z_{j+1}$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1$, порождают однородный идеал нормальной рациональной кривой $C \subset \mathbb{P}^d$. Проверьте также, что приведенные ранее уравнения для произвольных многообразий Веронезе и Сегре тоже порождают однородные идеалы этих многообразий.

В качестве последнего примера отметим, что для многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ и точки $p \in \mathbb{P}^n \setminus X$ полученные нами уравнения, задающие проекцию $\overline{X} = \pi_p(X)$ многообразия X из точки p, — попарные результанты многочленов F, $G \in I(X)$ — не обязательно, вообще говоря, порождают однородный идеал многообразия $\overline{X}$ (см., например, упражнение 3.8). На самом деле они порождают идеал многообразия $\overline{X}$ локально, хотя это и не следует из нашего доказательства.

Приведем, наконец, проективный вариант теоремы Гильберта о нулях: идеал многочленов на $\mathbb{P}^n$, обращающихся в нуль на множестве общих нулей набора однородных многочленов $\{F_\alpha\}$, — это радикал идеала, порождаемого $\{F_\alpha\}$ (или идеал, совпадающий со всем кольцом, если множество их общих нулей пусто). В качестве следствия получаем, что произвольная конечно порожденная градуированная алгебра

$$A = \bigoplus A_i$$

над полем K есть однородное координатное кольцо проективного многообразия, если она не содержит нильпотентных элементов и порождена своей компонентой A_1 степени 1.

Неприводимые многообразия и разложение на неприводимые компоненты

Определение. Многообразие X называется *неприводимым*, если для любой пары таких замкнутых подмногообразий Y, $Z \subset X$, что $Y \cup Z = X$, имеем либо $Y = X$, либо $Z = X$.

Заметим, что аффинное многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ неприводимо тогда и только тогда, когда его идеал $I(X) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ прост. Для того, чтобы в этом убедиться, заметим сначала, что если Y и Z —

собственные замкнутые подмногообразия в X, то существуют такие элементы $f \in I(Y)$ и $g \in I(Z)$, что f не лежит в $I(Z)$, а g не лежит в $I(Y)$; однако же если $X = Y \cup Z$, то $f \cdot g \in I(X)$. Обратно, если $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ таковы, что $f \cdot g \in I(X)$, то объединение подмногообразий в X, задаваемых функциями f и g (то есть подмногообразий $Y = V(I(X), f)$ и $Z = V(I(X), g)$), совпадает с X. Более общим образом, будем называть идеал $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ *примарным*, если для любых $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ из того, что $f \cdot g \in I$, следует, что либо $f^m \in I$ для некоторого m, либо $g \in I$; из этого следует, что радикал I прост. Аналогичными рассуждениями можно показать, что для любого примарного идеала I многообразие $V(I)$ будет неприводимо; более того, из теоремы Гильберта о нулях можно вывести, что на самом деле $V(I)$ неприводимо тогда и только тогда, когда радикал идеала I прост.

Аналогичные утверждения верны для проективных многообразий и их однородных идеалов: многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ неприводимо тогда и только тогда, когда его однородный идеал прост; многообразие общих нулей однородного идеала $I \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ неприводимо, если I примарен. Отметим, что если проективное многообразие неприводимо, то неприводимо и его любое непустое открытое подмножество $U = X \cap \mathbb{A}^n$, но обратное верно только в следующем смысле: если аффинное открытое подмножество $X \cap \mathbb{A}^n \subset X$ неприводимо для любой аффинной карты $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ (а не просто для стандартных $U_0, \ldots, U_n$), то X обязано быть неприводимым.

Упражнение 5.5. Покажите, что многообразие X неприводимо тогда и только тогда, когда любое его открытое по Зарисскому подмножество плотно, т. е. любые два открытые по Зарисскому подмножества пересекаются.

Следующее предложение является фундаментальной теоремой из коммутативной алгебры.

Предложение 5.6. *Всякий радикальный идеал $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ единственным образом представим в виде пересечения конечного числа простых идеалов $\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ при $i \neq j$.*

Сопоставив это предложение с нашим обсуждением, получаем следующее.

Теорема 5.7. *Всякое многообразие X может быть единственным образом представлено в виде объединения конечного числа неприводимых подмногообразий X_i, где $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$.*

Многообразия X_i, участвующие в этом разложении, называются *неприводимыми компонентами* многообразия X.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, читатель, знакомый с коммутативной алгеброй, узнает в предложении 5.6 очень слабую форму общей теоремы о примарном разложении идеалов в нётеровых кольцах. Мы докажем эту слабую форму в конце данной лекции: доказательство самой теоремы см. в [AM] или [E]. Во-вторых, отметим, что единственность представления радикального идеала в виде пересечения конечного числа простых получается легким формальным рассуждением с простыми идеалами. Если бы I имел два таких представления: $I=\bigcap \mathfrak{p}_i=\bigcap \mathfrak{q}_j$, то для всякого i мы бы получили, что $\mathfrak{p}_i \supseteq \bigcap \mathfrak{q}_j$, откуда $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{q}_k$ для некоторого k, и наоборот. Обратив это рассуждение (заменив все включения на противоположные, а пересечения — на объединения), получаем единственность представления произвольного многообразия в виде объединения неприводимых компонент.

Имеет смысл вернуться к некоторым из рассматривавшихся ранее многообразий и убедиться в их неприводимости. (Для этого часто бывает полезно то наблюдение, что образ неприводимого проективного многообразия при регулярном отображении также неприводим.) Мы не будем здесь проводить такие рассуждения в явном виде, поскольку доказательства неприводимости станут гораздо проще, когда мы познакомимся с понятием размерности и, в частности, с теоремой 11.14 Стоит, однако, разобрать один пример, который нам вскоре понадобится.

Теорема 5.8. *Пусть $X\subset\mathbb{P}^n$ — неприводимое многообразие, а $\Omega_X\subset\mathbb{P}^{n*}\times X$ — соответствующее ему универсальное гиперплоское сечение* (определение см. в примере 4.6). *Тогда Ω_X неприводимо.*

Доказательство. Для каждой точки $p\in X$ обозначим через $\Gamma_p=(\pi_2)^{-1}(p)$ слой Ω_X над этой точкой. Я утверждаю, что для всякой неприводимой компоненты Ψ многообразия Ω_X множество

$$\varphi(\Psi)=\{p\in X \mid \Gamma_p\subset\Psi\}$$

есть замкнутое подмножество в X. Теорема из этого утверждения следует: поскольку Γ_p изоморфно неприводимому многообразию $\mathbb{P}^{n-1}$, из всякого разложения $\Omega_X=\Psi_1\cup\ldots\cup\Psi_k$ на неприводимые компоненты получаем разложение X:

$$X=\varphi(\Psi_1)\cup\ldots\cup\varphi(\Psi_k).$$

Стало быть, $X=\varphi(\Psi_i)$ для некоторого i, а значит, $\Omega_X=\Psi_i$.

Доказательство нашего утверждения можно произвести локально, на открытом подмножестве $U\subset X$, задаваемом, скажем, условием $Z_0\neq 0$. Теперь для каждого $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{A}^n$ рассмотрим множество $\Phi_\alpha\subset\mathbb{P}^{n*}\times U$, задаваемое в однородных координатах Z на $\mathbb{P}^n$ и в двойственных координатах W на $\mathbb{P}^{n*}$ уравнениями

$$W_0=-\alpha_1Z_1-\ldots-\alpha_nZ_n,\qquad W_i=\alpha_iZ_0,\qquad i=1,\ldots,n.$$

Тогда Φ_α будет замкнутым подмножеством в $\mathbb{P}^{n*} \times U$, пересекающимся с каждым слоем Γ_p ровно в одной точке: более того, объединение всех Φ_α есть прообраз U в Ω_X. Следовательно, $\varphi(\Psi) \cap U$ может быть представлено в виде пересечения

$$\varphi(\Psi) \cap U = \bigcap \{p \in U \mid \Phi_\alpha \cap \Gamma_p \in \Psi\} = \bigcap \pi_2(\Psi \cap \Phi_\alpha)$$

и, стало быть, по теореме 3.12 является замкнутым. □

Упражнение 5.9. Докажите подобными рассуждениями неприводимость произведения двух неприводимых многообразий.

Объекты общего положения

После того как мы ввели понятие неприводимого многообразия, мы можем перейти к рассмотрению одного очень часто встречающегося понятия: объекта общего положения, или общего объекта (по-английски general). Основной его смысл заключается в следующем: если семейство объектов $\{X_p\}_{p\in\Sigma}$ — многообразий, отображений или чего-либо еще — параметризовано точками неприводимого алгебраического многообразия Σ, то утверждение «общий объект X обладает свойством P» следует понимать как то, что «множество таких точек $p \in \Sigma$, что соответствующий объект X_p обладает свойством P, содержит открытое по Зарисскому подмножество в Σ». Так, например, задав точку $p_0 \in \mathbb{P}^2$, можно сказать, что общая прямая $L \subset \mathbb{P}^2$ не содержит p_0, поскольку множество прямых, содержащих p_0, является собственным подмногообразием в двойственной плоскости $\mathbb{P}^{2*}$. В качестве другого примера рассмотрим утверждение: «Общая коника имеет ранг 3 (то есть проективно эквивалентна образу отображения Веронезе $\nu_2\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$)». Оно следует из того, что, как было замечено перед упражнением 1.21, множество коник в $\mathbb{P}^2$ может быть параметризовано точками в $\mathbb{P}^5$. При этом множество точек в $\mathbb{P}^5$, соответствующих тем коникам, которые не являются проективно эквивалентными $\nu_2(\mathbb{P}^1)$, является собственным подмногообразием в $\mathbb{P}^5$.

В некоторых работах слову «общий» придается некоторый специальный технический смысл (и по-английски в этом случае пишут не general, но generic); кроме того, иногда фразу «общий (generic) объект X обладает свойством P» используют в значении «множество таких $p \in \Sigma$, что X_p не обладает этим свойством, содержится в счетном объединении собственных подмногообразий Σ». Впрочем, если вы напишете generic вместо general или наоборот, большим грехом это не будет[1].

Еще одно замечание касается исключительно английской терминологии. Если по-русски говорят, например, что отображение неприво-

[1]Поскольку строгое различение этих терминов в английских текстах не общепринято; по-русски обычно говорят «общий» во всех этих случаях. — *Прим. ред.*

димого многообразия $f\colon X \to \mathbb{P}^n$ является *конечным в общей точке*, в том случае, когда для общей точки $p \in X$ полный прообраз $f^{-1}(f(p))$ состоит из конечного числа элементов, то по-английски эту же мысль принято выражать с помощью наречия: «f is generically finite»[1].

Пример с «общей коникой» указывает на одно неприятное обстоятельство: каждый раз, когда мы используем эту терминологию, мы молчаливо подразумеваем существование пространства параметров. Обычно мы не будем указывать это пространство явно, и в некоторых случаях это может оставить впечатление нестрогости. Вообще говоря, в алгебраической геометрии существуют стандартные конструкции для пространств параметров, которые мы обсудим в лекции 21; именно их мы по умолчанию и имеем в виду. На практике, однако, можно подходить к этому ad hoc. Приведем несколько примеров такого подхода. Начнем со следующего упражнения.

Упражнение 5.10. Рассмотрим пространство прямых в $\mathbb{P}^n$ из примера 4.15. Покажите, что общая прямая не пересекается с фиксированным линейным подпространством $\Gamma \in \mathbb{P}^n$, если размерность Γ не превышает $n-2$. Покажите, что общая прямая в $\mathbb{P}^3$ не пересекается с данной скрученной кубикой $C \subset \mathbb{P}^3$. (Как мы в свое время отмечали, параметризующее прямые пространство, построенное в примере 4.15, не является стандартным, но когда мы, наконец, определим грассманиан, мы увидим, что аналогичные утверждения верны и для него.)

Пример 5.11. Общие проекции

Мы видели, что проекции скрученной кубики $C \subset \mathbb{P}^3$ проективно эквивалентны одной из двух кривых: нодальной кубике $Z_0Z_2^2 = Z_1^3 + Z_0Z_1^2$ или каспидальной кубике $Z_0Z_2^2 = Z_1^3$. Теперь мы можем утверждать следующее: общая проекция скрученной кубики на $\mathbb{P}^2$ проективно эквивалентна нодальной кубике. В этом утверждении подразумевается, что множество проекций скрученной кубики $C \subset \mathbb{P}^3$ параметризуется множеством точек из дополнения $\mathbb{P}^3 \setminus C \subset \mathbb{P}^3$. Само же утверждение заключается в том, что для всех точек p из некоторого открытого подмножества $U \subset \mathbb{P}^3 \setminus C$ проекция $\pi_p(C)$ проективно эквивалентна нодальной кубике. Мы встретимся с другими утверждениями относительно проекций общего положения в лекции 15.

Пример 5.12. Общие скрученные кубики

В качестве другого примера рассмотрим еще раз скрученные кубики. Всякая скрученная кубика C может быть записана как образ отобра-

---

[1]Замечание о русском словоупотреблении добавлено переводчиком. — *Прим. ред.*

жения вида

$$t \mapsto [a_{0,3}t^3 + a_{0,2}t^2 + a_{0,1}t + a_{0,0}, \ldots, a_{3,3}t^3 + a_{3,2}t^2 + a_{3,1}t + a_{3,0}],$$

где определитель матрицы коэффициентов $(a_{i,j})$ отличен от нуля, так что C можно задать невырожденной (4×4)-матрицей. Конечно же, это не дает биекции между многообразием $U \subset K^{16}$ обратимых (4×4)-матриц и множеством скрученных кубик, поскольку кривая C не определяет приведенную выше запись однозначно. На эту ситуацию можно посмотреть и по-другому: согласно теореме 1.18, всякая скрученная кубика определяется шестью точками общего положения в $\mathbb{P}^3$. Таким образом, мы можем сопоставить скрученную кубику всякой точке из открытого подмножества $V \subset (\mathbb{P}^3)^6$, которое соответствует набору точек общего положения. Однако и это соответствие, как и в предыдущем случае, не является биекцией.

На самом деле можно считать, что выражение «общая скрученная кубика обладает свойством X» означает либо «множество точек $C \in U$, для которых соответствующие скрученные кубики обладают этим свойством, содержит открытое плотное подмножество», либо аналогичное утверждение для соответствующих точек $C \in V$. Почему это одно и то же, мы выясним в лекции 21, когда докажем, что универсальное пространство параметров $\mathscr{H}$ для скрученных кубик в $\mathbb{P}^3$ действительно существует и что соответствующие отображения $U \to \mathscr{H}$ и $V \to \mathscr{H}$ регулярны. Из этого будет следовать, что некоторое свойство выполнено для открытого плотного подмножества в U тогда и только тогда, когда оно выполнено для открытого плотного подмножества в $\mathscr{H}$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что оно выполняется для открытого плотного подмножества в V.

Приведем еще две вариации на тему объектов общего положения. Во-первых, ясно, что если семейство объектов параметризуется точками многообразия Σ, то семейство упорядоченных пар (или наборов из n штук) этих объектов параметризуется точками произведения Σ^2 (или Σ^n); когда говорят о свойствах «общей пары объектов», имеется в виду, что этому свойству удовлетворяют пары, лежащие в открытом плотном подмножестве в этом произведении. Так, например, общая тройка точек на $\mathbb{P}^2$ не лежит на одной прямой. Иногда вместо прямого произведения приходится использовать расслоенное произведение; например, общая пара точек на общей прямой в $\mathbb{P}^2$ соответствует точке из открытого подмножества (неприводимого) многообразия $\Gamma \times_{\mathbb{P}^{2*}} \Gamma$, где $\Gamma \subset \mathbb{P}^{2*} \times \mathbb{P}^2$ — это универсальная гиперплоскость (то есть прямая) в $\mathbb{P}^2$ (см. пример 4.5). Также говорят, что объект $X \in \Sigma$, появляющийся в той или иной конструкции, является объектом общего положения (без дальнейших уточнений), если в качестве X можно было бы взять любой объект, соответствующий точке в некотором открытом плотном подмножестве в Σ. Так, общая точка на общей прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ есть общая точка на плоскости, пара общих точек на общей прямой, лежащей в плоскости, есть общая пара точек на плоскости, но неверно, что три общие точки на общей прямой являются общей тройкой точек. Эта терминология может на первый взгляд показаться несколько трудной для понимания, зато она чрезвычайно полезна; так или иначе, после небольшой тренировки в ее использовании она становится совершенно ясной.

Упражнение 5.13. Покажите, что для любых d, $n \leqslant (d+1)(d+2)/2$ общий набор из n точек в $\mathbb{P}^2$ налагает независимые условия на кривые степени d, то есть пространство многочленов, равных нулю в этих точках, имеет коразмерность n в пространстве всех однородных многочленов степени d на $\mathbb{P}^2$. Точкам какого именно открытого подмножества $(\mathbb{P}^2)^n$ соответствуют эти наборы при $n \leqslant 2d+1$?

Упражнение 5.14. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ — кривая степени d, то есть множество нулей однородного многочлена $F(Z_0, Z_1, Z_2)$, в разложении которого на неприводимые множители все сомножители различны. Покажите, что общая прямая $L \subset \mathbb{P}^2$ пересекается с C в d точках.

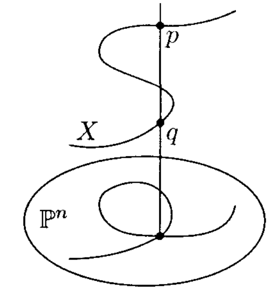
Наконец, еще одним примером использования прилагательного «общий» является следующий факт (сам по себе заслуживающий внимания); он понадобится нам далее.

Предложение 5.15. *Пусть $\pi\colon X \to Y$ — произвольное регулярное отображение, причем Y неприводимо, и пусть $Z \subset X$ — локально замкнутое множество. Тогда для общей точки $p \in Y$ замыкание слоя $Z_p = Z \cap \pi^{-1}(p)$ есть пересечение $\overline{Z}$ (замыкания Z) со слоем $X_p = \pi^{-1}(p)$.*

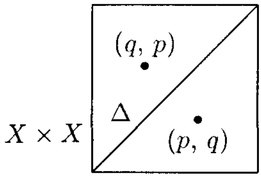
Мы отложим доказательство этого предложения до тех пор, пока не будет доказана теорема 11.12.

Пример 5.16. Множества двойных точек

Классическим примером разложения многообразия на неприводимые является определение множества двойных точек, ассоциированного с конечным в общей точке отображением. Пусть X — неприводимое проективное многообразие, а $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$ — конечное в общей точке отображение (т.е. для общей точки $p \in \varphi(X)$ прообраз $\varphi^{-1}(p)$ конечен). Напомним (см. пример 2.25), что множество Z, состоящее из пар точек $p, q \in X$, отображающихся в одну и ту же точку $\mathbb{P}^n$ (т.е. теоретико-множественное расслоенное произведение $X \times_{\mathbb{P}^n} X$), есть подмногообразие в $X \times X$. Далее, из утверждения о конечности φ в общей точке следует, в частности, что диагональ $\Delta \subset Z \subset X \times X$ есть неприводимая



компонента в Z (для этого надо применить предложение 5.15 к подмногообразию $W = Z \setminus \Delta \subset Z \to X$). При этих условиях мы определяем *множество двойных точек* отображения φ как объединение остальных компонент многообразия Z или как его образ при проекции в X.



Здесь необходимо оговориться: все, что в действительности показывает этот пример, — это то, что множество пар различных точек из X, отображающихся в одну и ту же точку в $\mathbb{P}^n$, есть квазипроективное многообразие (более точно, это замкнутое подмножество дополнения к диагонали в произведении $X \times X$). Для того чтобы доказывать содержательные теоремы про множество двойных точек, требуется гораздо более тонкое определение. Чтобы понять, почему, рассмотрим самый простой пример: такое отображение φ кривой в плоскость, которое взаимно однозначно в общей точке, но при этом у конечного числа точек имеются два прообраза, — например, проекцию пространственной кривой $C \subset \mathbb{P}^3$ из точки $r \in \mathbb{P}^3$, описанную в примерах 1.27 и 3.8. Ясно, что всякая секущая $\overline{pq}$ кривой C, содержащая точку r, соответствует паре точек (p, q) и (q, p) из множества Z двойных точек отображения φ. Но что произойдет, если при вариации центра проекции r одна из секущих выродится в касательную? Обе точки (p, q) и (q, p) устремятся к точке (p, p) на диагонали $X \times X$, и про эту точку хотелось бы сказать, что она тоже принадлежит множеству двойных точек, но наше определение этого «не видит». На самом деле правильное определение множества двойных точек требует большей изощренности, причем для этого лучше перейти в категорию схем, а не многообразий. Эти вопросы хорошо изложены в [F1] и [K].

Немного алгебры

В этом разделе мы приводим доказательства некоторых алгебраических лемм: теоремы Гильберта о нулях (теорема 5.1), одного из ее следствий (лемма 2.1, которая заключается в том, что кольцо регулярных функций на аффинном многообразии совпадает со всем его координатным кольцом $A(X)$) и предложения 5.6, утверждающего, что всякий радикальный идеал является пересечением простых. Мы постараемся доказать эти утверждения с использованием минимального количества алгебраической техники (что касается теоремы Гильберта о нулях, мы приведем два ее доказательства: уже ставшее классическим доказательство Артина—Тэйта и еще одно, короткое, но менее концептуальное); более полное изложение этих вопросов читатель найдет в стандартных курсах коммутативной алгебры [AM] или [E]. Однако мы не сможем обойтись без такого понятия коммутативной алгебры, как нётерово кольцо; мы предполагаем, что читатель с ним знаком, а также знает, что кольцо многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$ нётерово.

Доказательство теоремы Гильберта о нулях. Рассмотрим произвольный идеал I в кольце $K[x_1, \ldots, x_n]$; пусть X — его множество нулей. Очевидно включение

$$\mathfrak{r}(I) \subset I(V(I)).$$

Требуется обосновать обратное включение. Это будет сделано в два этапа. Сначала мы докажем его в частном случае $V(I) = \varnothing$. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.17 (слабая теорема о нулях). *Идеал $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$, не имеющий общих нулей, является единичным.*

Как мы увидим, из нее вытекает исходная теорема, кажущаяся на первый взгляд более сильной.

Доказательство теоремы 5.17. Нам нужно показать, что всякий идеал, строго содержащийся в кольце $K[x_1, \ldots, x_n]$, обязательно имеет непустое множество нулей. Поскольку такой идеал I должен содержаться в некотором максимальном идеале, это будет вытекать из следующего предложения.

Предложение 5.18. *В кольце $K[x_1, \ldots, x_n]$ всякий максимальный идеал $\mathfrak{m}$ имеет вид $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in K$.*

Доказательство. Утверждение о том, что $\mathfrak{m}$ имеет вид $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, эквивалентно тому, что факторкольцо $L = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$ есть само K. Поскольку K алгебраически замкнуто, это, в свою очередь, эквивалентно тому, что L алгебраично над K. Ключевым шагом в доказательстве этого является следующая лемма.

Лемма 5.19. *Пусть R — нётерово кольцо и $S \subset R$ — подкольцо кольца $R[x_1, \ldots, x_n]$, порожденного элементами $x_1, \ldots, x_n$ как R-алгебра*[1]. *Если кольцо $R[x_1, \ldots, x_n]$ конечно порождено как S-модуль, то и само кольцо S конечно порождено как R-алгебра.*

Доказательство леммы 5.19. Пусть $y_1, \ldots, y_n \in R[x_1, \ldots, x_n]$ — образующие $R[x_1, \ldots, x_n]$ как S-модуля; тогда выполняются равенства

$$x_i = \sum a_{i,j} \cdot y_j$$

[1] В этом месте в авторский текст внесено небольшое уточнение. — *Прим. перев.*

и

$$y_i \cdot y_j = \sum b_{i,j,k} \cdot y_k$$

для некоторых $a_{i,j}$, $b_{i,j,k} \in S$. Пусть $S_0 \subset S$ — подкольцо, порожденное над R коэффициентами $a_{i,j}$ и $b_{i,j,k}$; поскольку оно конечно порождено над R, оно также будет нётеровым. В силу выписанных соотношений элементы $y_1, \ldots, y_m$ порождают $R[x_1, \ldots, x_n]$ как S_0-модуль. Однако же подмодуль конечно порожденного модуля над нётеровым кольцом также конечно порожден, так что S является конечно порожденным S_0-модулем и, следовательно, конечно порожденной R-алгеброй. □

Доказательство предложения 5.18. Рассмотрим снова расширение полей $L = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m} \supset K$. Сменив при необходимости нумерацию x_i, можно считать, что $x_1, \ldots, x_k \in L$ алгебраически независимы над K, а $x_{k+1}, \ldots, x_n$ алгебраичны над подполем $K(x_1, \ldots, x_k) \subset L$. Поскольку L есть тем самым конечно порожденный $K(x_1, \ldots, x_k)$-модуль, мы можем применить лемму 5.19 и заключить, что чисто трансцендентное расширение $K(x_1, \ldots, x_k)$ является конечно порожденной K-алгеброй.

Здесь мы, наконец, и приходим к противоречию. Именно, пусть $z_1, \ldots, z_l \in L$ — система образующих поля $K(x_1, \ldots, x_k)$ как K-алгебры. Представим их в виде

$$z_i = \frac{P_i(x_1, \ldots, x_k)}{Q_i(x_1, \ldots, x_k)}$$

для некоторого набора многочленов P_i, Q_i. Пусть теперь $f \in K[x_1, \ldots, x_k]$ — произвольный неприводимый многочлен. По нашему предположению, $1/f$ можно записать как многочлен от рациональных функций z_i; после приведения к общему знаменателю получаем, что f должен делить хотя бы один из многочленов Q_i. В частности, из этого следует, что в $K[x_1, \ldots, x_k]$ только конечное число неприводимых многочленов. Но при $k \geqslant 1$ неприводимых элементов в кольце многочленов $K[x_1, \ldots, x_k]$ бесконечно много (это верно для любого поля K; в нашем случае, поскольку K предполагается бесконечным, достаточно рассмотреть многочлены $\{x - a\}_{a \in K}$). Отсюда можно заключить, что $k = 0$, то есть L алгебраично над K, а значит, совпадает с K. □

Осталось вывести теорему Гильберта о нулях из a priori более слабой теоремы 5.17. Итак, пусть даны произвольный идеал $I \subset K[x_1, \ldots, x_k]$ и многочлен $f \in K[x_1, \ldots, x_k]$, обращающийся в нуль на множестве общих нулей идеала I, то есть $f \in I(V(I))$. Мы хотим показать, что $f^m \in I$ при некотором $m > 0$.

Чтобы это сделать, применим прием, известный под названием «трюк Рабиновича». Его идея состоит в том, чтобы рассмотреть дополнение $U_f = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\} \subset \mathbb{A}^n$ также как аффинное многообразие, а именно, как многообразие

$$\Sigma = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = 1\} \subset \mathbb{A}^{n+1},$$

и применить к этому многообразию слабую теорему о нулях. Конкретно, заметим, что идеал $J \subset K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, порожденный I и многочленом $x_{n+1} \cdot f(x_1, \ldots, x_n) - 1$, не имеет общих нулей и поэтому должен быть единичным. Другими словами, если

$$A = K[x_1, \ldots, x_n][f^{-1}] = K[x_1, \ldots, x_{n+1}]/(x_{n+1} \cdot f - 1)$$

есть координатное кольцо U_f, то мы получаем, что $I \cdot A = (1)$. Таким образом, единицу можно представить в виде

$$1 = \sum g_i \cdot a_i,$$

где $g_i \in I$, $a_i \in A$. Собирая слагаемые, содержащие x_{n+1}, можно переписать это равенство в виде

$$1 = h_0 + h_1 \cdot x_{n+1} + \ldots + h_m \cdot (x_{n+1})^m,$$

где все $h_i \in I$. Умножая, наконец, его на f^m в кольце A, получаем, что

$$f^m = f^m \cdot h_0 + \ldots + h_m,$$

так что $f^m \in I$. □

Другое доказательство теоремы Гильберта о нулях. Как и было обещано, мы приведем более короткое доказательство чуть более слабого утверждения (нам придется дополнительно предположить, что основное поле K имеет бесконечную степень трансцендентности над простым подполем $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$).

Начнем с того, что заменим идеал I в утверждении теоремы на его радикал. Тогда он будет представим в виде пересечения простых идеалов:

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_k.$$

С другой стороны, $X = \bigcup X_i$, где $X_i = V(\mathfrak{p}_i)$, так что

$$I(V(I)) = I(V(\mathfrak{p}_1)) \cap \ldots \cap I(V(\mathfrak{p}_k)).$$

Значит, достаточно доказать теорему Гильберта о нулях для простых идеалов, то есть доказать следующее утверждение.

Лемма 5.20. *Пусть $\mathfrak{p} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ — простой идеал. Если многочлен $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ не лежит в $\mathfrak{p}$, то найдутся такие $a_1, \ldots, a_n \in K$, что*

$$\mathfrak{p} \subset (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n),$$

но $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, т. е. $f \notin (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$.

Доказательство. Мы докажем это утверждение при дополнительном предположении, что K имеет бесконечную степень трансцендентности над полем $k = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$. Считая, что так оно и есть, запишем f в виде

$$f = \sum c_I \cdot x^I.$$

Предположим, что $\mathfrak{p}$ порожден многочленами g_α, и запишем их как

$$g_\alpha = \sum c_{I,\alpha} \cdot x^I.$$

Рассмотрим поле, порожденное над k коэффициентами f и всех g_α:

$$L = k(\ldots, c_I, \ldots, c_{I,\alpha}, \ldots) \subset K,$$

и положим

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap L[x_1, \ldots, x_n] \subset K[x_1, \ldots, x_n].$$

Заметим, что, поскольку все образующие идеала $\mathfrak{p}$ (то есть все g_α) лежат в подкольце $L[x_1, \ldots, x_n] \subset K[x_1, \ldots, x_n]$, то $\mathfrak{p}_0 \cdot K[x_1, \ldots, x_n] = \mathfrak{p}$, а в силу того, что $\mathfrak{p}_0$ — простой идеал в $L[x_1, \ldots, x_n]$, фактор $L[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_0$ является областью целостности. Пусть M — поле частных этого факторкольца. Поскольку M конечно порождено над k как поле, существует вложение полей над L

$$\iota\colon M \hookrightarrow K;$$

Пусть $a_i \in K$ — образ элемента $x_i \in L[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_0 \subset M$ при этом вложении.

Теперь нетрудно видеть, что $a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют условиям леммы: по построению, образующие идеала $\mathfrak{p}_0$ лежат в идеале $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset L[x_1, \ldots, x_n]$, и поэтому $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \cdot K[x_1, \ldots, x_n]$ содержится в идеале $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$. С другой стороны, $f \in L[x_1, \ldots, x_n]$, но $f \notin \mathfrak{p}_0$, поэтому $\iota(f) = f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, то есть $f \notin (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. □

Переформулировки и следствия

Теорему Гильберта о нулях можно переформулировать в виде следующей теоремы, которая также часто бывает полезна.

Теорема 5.21. *Всякий простой идеал в $K[x_1, \ldots, x_n]$ есть пересечение идеалов вида $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, содержащих его.*

Отметим, что аналогичное утверждение для кольца $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ (то есть что всякий простой идеал есть пересечение идеалов вида $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, содержащих его) немедленно следует из теоремы 5.21, примененной к простому идеалу $(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k)$, где

$I = (g_1, \ldots, g_n)$. В частности, заметим, что если многочлен не равен нулю нигде на $V(I)$, он должен быть единицей кольца $K[x_1, \ldots, x_n]/I$.

В качестве следствия теоремы о нулях мы можем теперь доказать лемму 2.1. Рассматривается следующая ситуация: $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие, $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ — произвольный многочлен, $U_f = \{p \in X \mid f(p) \neq 0\}$ — соответствующее главное открытое подмножество. По определению, *регулярная* функция на U_f — это такая функция g, что для любой точки $p \in U_f$ эту функцию можно в некоторой окрестности точки p представить в виде

$$g = h/k,$$

где $k(p) \neq 0$. Утверждается, что кольцо таких функций есть просто локализация $A(X)[1/f]$ кольца $A(X)$.

Чтобы это доказать, заметим для начала, что топология Зарисского является нётеровой (см. лекцию 2). Поэтому если g — регулярная функция на U_f, то можно найти конечное покрытие U_f такими открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, что на каждом из них можно представить g в виде

$$g = h_\alpha/k_\alpha,$$

где k_α отлично от нуля всюду на U_α. Далее, открытые множества, участвующие в покрытии, можно считать главными, то есть положить $U_\alpha = U_f \cap U_{f_\alpha}$ для некоторого набора f_α. Поскольку открытые множества U_{f_α} покрывают U_f, а k_α не обращается в нуль на $U_f \cap U_{f_\alpha}$, множество общих нулей многочленов k_α должно содержаться во множестве нулей f. По теореме Гильберта о нулях, при некотором m имеем $f^m \in (\ldots, k_\alpha, \ldots)$. Другими словами, можно записать, что

$$f^m = \sum l_\alpha \cdot k_\alpha.$$

Но тогда

$$f^m \cdot g = \sum (l_\alpha \cdot k_\alpha) \cdot (h_\alpha/k_\alpha) = \sum l_\alpha \cdot h_\alpha,$$

откуда

$$g = \frac{\sum l_\alpha \cdot h_\alpha}{f^m} \in A(X)[1/f]. \qquad \square$$

Отметим одно непосредственное следствие: всякая регулярная функция на $\mathbb{A}^n$ является многочленом. В частности, отсюда следует, что всякая регулярная функция на $\mathbb{P}^n$ есть константа; это частный случай следствия 3.14.

Доказательство предложения 5.6. Это предложение гласит, что всякий радикальный идеал $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ есть пересечение конечного числа простых идеалов.

Здесь мы используем такое свойство нётеровых колец: всякое семейство идеалов $\{\mathfrak{a}_i\}$ содержит максимальный элемент, то есть идеал, не содержащийся ни в каком другом идеале из этого семейства. Применим это ко множеству радикальных идеалов $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$, не представимых в виде пересечения конечного числа простых: пусть I_0 — максимальный элемент во множестве таких идеалов. По построению I_0 не является простым; пусть $a, b \in K[x_1, \ldots, x_n]$ — многочлены, не принадлежащие I_0, произведение которых лежит в I_0. Обозначим через I_1 и I_2 радикалы идеалов, порожденных I_0 и элементами a и b соответственно:

$$I_1 = \mathfrak{r}(I_0, a), \qquad I_2 = \mathfrak{r}(I_0, b).$$

Поскольку I_1 и I_2 — радикальные идеалы, строго содержащие I_0, их можно представить в виде пересечения конечного числа простых идеалов. Для доказательства предложения достаточно будет показать, что

$$I_0 = I_1 \cap I_2.$$

Чтобы установить это, предположим, что $f \in I_1 \cap I_2$. По определению радикала идеала получаем, что $f^m \in (I_0, a)$ и $f^n \in (I_0, b)$ для некоторых m и n, то есть

$$f^m = g_1 + h_1 \cdot a \quad \text{и} \quad f^n = g_2 + h_2 \cdot b,$$

где $g_1, g_2 \in I_0$. Но тогда

$$f^{m+n} = g_1 g_2 + g_1 h_2 b + g_2 h_1 a + h_1 h_2 \cdot ab \in I_0,$$

откуда в силу радикальности I_0 получаем, что $f \in I_0$. □

Лекция 6

ГРАССМАНИАНЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ МНОГООБРАЗИЯ

Пример 6.1. Грассманианы

Грассманианы — фундаментальные объекты в алгебраической геометрии: они представляют интерес сами по себе и одновременно являются одним из важных средств построения и изучения других многообразий. В этой книге мы постоянно будем иметь дело с грассманианами; сейчас мы определим грассманианы и рассмотрим несколько их основных свойств.

Обозначим через $G(k, n)$ множество[1] k-мерных линейных подпространств в векторном пространстве K^n; если речь зайдет о множестве k-мерных подпространств в абстрактном векторном пространстве V без выбранного базиса, мы будем писать $G(k, V)$. Разумеется, k-мерные векторные подпространства в векторном пространстве K^n соответствуют $(k-1)$-мерным линейным подпространствам в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$, поэтому мы можем рассматривать $G(k, n)$ как множество $(k-1)$-мерных подпространств в проективном пространстве; в этом случае мы будем обозначать его $\mathbb{G}(k-1, n-1)$ или $\mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}V)$.

Чаще всего грассманианы сначала определяют с помощью локальных карт или как факторы групп, а потом доказывают, что они могут быть вложены в проективное пространство. Так как основным объектом наших рассмотрений в этой книге являются проективные многообразия, мы поступим по-другому, сразу описав грассманиан как подмножество проективного пространства. Это просто: если $W \subset V$ — это k-мерное линейное подпространство, порожденное векторами $v_1, \ldots, v_k$, то с ним можно связать поливектор

$$\lambda = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge^k(V).$$

Поливектор λ определен подпространством W однозначно с точностью до умножения на скаляр: при выборе другого базиса в W он умножается на определитель матрицы перехода. Таким образом, мы получаем

[1]Это множество и называется грассманианом. — *Прим. ред.*

корректно определенное отображение множеств

$$\psi\colon G(k,V)\to\mathbb{P}(\Lambda^k V)$$

На самом деле это отображение является вложением: для всякого $[\omega] = \psi(W)$, лежащего в его образе, пространство W однозначно восстанавливается как множество таких векторов $v\in V$, что $v\wedge\omega = 0\in\Lambda^{k+1}V$. Это вложение называется *плюккеровым вложением* грассманиана $G(k,V)$.

Однородные координаты на $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ называются *плюккеровыми координатами* на $G(k, V)$. В явном виде они записываются так: если мы выберем отождествление V с K^n, то пространство W можно представить в виде $(k\times n)$-матрицы M_W, чьи строки являются векторами v_i; матрица M_W определена однозначно с точностью до умножения слева на обратимую $(k\times k)$-матрицу. В такой записи плюккеровы координаты — это просто максимальные миноры матрицы M_W.

Мы описали грассманиан $G(k, V)$ как подмножество в $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$; теперь мы должны проверить, что оно на самом деле является подмногообразием. Для этого нам нужно охарактеризовать множество *разложимых* поливекторов $\omega\in\Lambda^k V$, то есть произведений $\omega = v_1\wedge\ldots\wedge v_k$. Мы начнем со следующего основного наблюдения: если даны поливектор $\omega\in\Lambda^k V$ и вектор $v\in V$, то v делит ω (то есть ω представим в виде $v\wedge\varphi$ для некоторого $\varphi\in\Lambda^{k-1}V$) тогда и только тогда, когда $\omega\wedge v = 0$. Более того, поливектор ω разложим тогда и только тогда, когда пространство векторов v, делящих ω, имеет размерность k. Значит, $[\omega]$ лежит в грассманиане тогда и только тогда, когда ранг отображения

$$\varphi(\omega)\colon V\to\Lambda^{k+1}V,$$
$$v\mapsto\omega\wedge v$$

равен $n-k$. Так как ранг $\varphi(\omega)$ не может быть меньше $n-k$, получаем, что

$$[\omega]\in G(k, V)\iff \operatorname{rank}(\varphi(\omega))\leqslant n-k.$$

Далее, отображение $\Lambda^k V\to\operatorname{Hom}(V,\Lambda^{k+1}V)$, переводящее ω в $\varphi(\omega)$, является линейным, так как элементы матрицы $\varphi(\omega)\in\operatorname{Hom}(V,\Lambda^{k+1}V)$ являются однородными координатами на $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$; стало быть, $G(k, V)\subset\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ — это подмногообразие, задаваемое обращением в нуль всех $(n-k+1)\times(n-k+1)$-миноров матрицы $\varphi(\omega)$.

Это самый простой способ увидеть, что $G(k, V)$ является подмногообразием в $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$, но уравнения, которые мы при этом получаем, далеко не самые простые; в частности, они не порождают однородный идеал многообразия $G(k, V)$. Чтобы найти настоящие образующие этого идеала, нам придется воспользоваться естественным изоморфизмом $\bigwedge^k V$ с внешней степенью $\bigwedge^{n-k} V^*$ двойственного пространства V^* (этот изоморфизм естествен только с точностью до умножения на скаляр, но для наших целей этого хватит). В частности, элемент $\omega \in \bigwedge^k V$, соответствующий $\omega^* \in \bigwedge^{n-k} V^*$, задает отображение

$$\psi(\omega)\colon V^* \to \textstyle\bigwedge^{n-k+1} V^*,$$
$$v^* \mapsto v^* \wedge \omega^*;$$

то же самое рассуждение показывает, что ω разложим тогда и только тогда, когда ранг отображения $\psi(\omega)$ не превосходит k. Кроме того, если ω разложим, то ядро отображения $\varphi(\omega)$, то есть само подпространство W, будет совпадать с аннулятором ядра $\psi(\omega)$; это равносильно тому, что образы сопряженных отображений

$${}^t\varphi(\omega)\colon \textstyle\bigwedge^{k+1} V^* \to V^*$$

и

$${}^t\psi(\omega)\colon \textstyle\bigwedge^{n-k+1} V \to V$$

аннулируют друг друга. Итак, мы видим, что $[\omega] \in G(k,\, V)$ тогда и только тогда, когда для любой пары $\alpha \in \bigwedge^{k+1} V^*$ и $\beta \in \bigwedge^{n-k+1} V$ выполнено равенство

$$\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) = \langle {}^t\varphi(\omega)(\alpha),\, {}^t\psi(\omega)(\beta) \rangle = 0.$$

Итак, $\Xi_{\alpha,\beta}$ являются квадратичными многочленами, множество общих нулей которых совпадает с грассманианом $G(k,\, V)$. Они называются *плюккеровыми соотношениями*, и они уже порождают однородный идеал $G(k,\, V)$, хотя мы и не будем здесь этого доказывать.

Упражнение 6.2. В частном случае $k = 2$ (и в предположении, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$) покажите непосредственно, что бивектор $\omega \in \bigwedge^2 V$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$, и тем самым грассманиан $G(2,\, V) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ — многообразие, высекаемое квадриками. (На самом деле условие $\omega \wedge \omega = 0$ представляет собой $\binom{n}{4}$ независимых квадратичных соотношений, которые порождают пространство соотношений Плюккера.)

Отметим, в частности, что первый нетривиальный — т. е. отличный от проективного пространства — грассманиан есть $G(2,\, 4)$ и что этот грассманиан вложен как квадратичная гиперповерхность в $\mathbb{P}(\bigwedge^2 K^4) \cong \mathbb{P}^5$.

Мы можем взглянуть на грассманиан по-иному, если посмотрим на некоторые его специальные открытые аффинные подмножества. Для начала опишем их на инвариантном языке. Именно, рассмотрим подпространство $\Gamma \subset V$ размерности $n - k$, соответствующее поливектору $\omega \in \bigwedge^{n-k} V = \bigwedge^k V^*$. Можно рассматривать ω как однородную линейную форму на $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$; пусть $U \subset \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ — открытое аффинное подмножество, заданное условием $\omega \neq 0$. Тогда пересечение $G(k, V) \cap U$ — это множество k-мерных подпространств $\Lambda \subset V$, дополнительных к Γ. Такие подпространства находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с графиками отображений из V/Γ в Γ, так что получаем отождествление

$$G(k, V) \cap U \cong \operatorname{Hom}(V/\Gamma, \Gamma) \cong K^{k(n-k)}.$$

Чтобы записать это в координатах, отождествим V с K^n, и пусть Γ порождается последними $n-k$ базисными векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n \in K^n$. Тогда $G(k, n) \cap U$ — это множество таких подпространств Λ, что первый $(k \times k)$-минор у соответствующей матрицы M_Λ ненулевой. Следовательно, каждое $\Lambda \in G(k, V) \cap U$ представимо как пространство, порожденное строками однозначно определенной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-k} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-k} \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n-k} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{i,j}$ этой матрицы задают биекцию $G(k, V) \cap U$ с $K^{k(n-k)}$.

Заметим, что аффинными координатами на этом аффинном открытом подмножестве в $G(k, V)$ являются $(k \times k)$-миноры матрицы M_Λ, то есть миноры всех размеров $k \times (n-k)$-матрицы $(a_{i,j})$. В частности, разложение каждого из соответствующих определителей по любой строке или столбцу дает квадратичное соотношение между этими минорами; так, например,

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

является соотношением между аффинными координатами на $\mathbb{P}(\bigwedge^k K^n)$, ограниченными на $G(k, n)$. Таким образом мы можем получить все соотношения Плюккера в явном виде в координатах.

Наконец, есть еще один способ описать аффинные координаты на открытом подмножестве $G(k, n) \cap U$, состоящем из k-мерных подпространств Λ, дополнительных к данному $(n-k)$-мерному подпространству Γ: выберем векторы $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ так, чтобы вместе с Γ они порождали все K^n, и положим

$$v_i(\Lambda) = \Lambda \cap (\Gamma + v_i).$$

Для всякого $\Lambda \in U$ векторы $v_i(\Lambda)$ образуют базис Λ, и набор из k векторов $v_i(\Lambda) - v_i \in \Gamma$ задает отождествление $G(k, n) \cap U$ с Γ^k.

Подмногообразия грассманианов

Прежде всего заметим, что вложение пространств $W \hookrightarrow V$ индуцирует вложение грассманианов $G(k, W) \hookrightarrow G(k, V)$. Аналогично, факторизация V по l-мерному подпространству U индуцирует вложение $G(k-l, V/U) \hookrightarrow G(k, V)$. Более общим образом, если $U \subset W \subset V$, то имеется вложение $G(k-l, W/U) \hookrightarrow G(k, V)$. Образы таких отображений называются подграссманианами и являются подмногообразиями в $G(k, V)$ (как мы вскоре увидим, в терминах плюккерова вложения $G(k, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^k V)$ они являются пересечениями $G(k, V)$ с линейными подпространствами в $\mathbb{P}(\wedge^k V)$).

Если рассматривать грассманиан как множество линейных подпространств в проективном пространстве $\mathbb{P}V$, то подграссманианы являются множествами пространств, содержащихся в данном подпространстве и/или содержащих данное подпространство. Мы можем также рассмотреть подмножество $\Sigma(V) \subset \mathbb{G}(k, \mathbb{P}V)$, состоящее из k-мерных подпространств, пересекающихся с данным m-мерным линейным подпространством $\Lambda \subset \mathbb{P}V$, или, в большей общности, подмножество $\Sigma_l(\Lambda)$, состоящее из k-мерных подпространств, пересекающих Λ по подпространству размерности не менее l. Это — тоже подмногообразие грассманиана, поскольку $\Sigma_l(\Lambda)$ может быть описано как множество

$$\Sigma_l(\Lambda) = \{[\omega] \mid \omega \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{m-l+1} = 0 \quad \forall v_1, \ldots, v_{m-l+1} \in \Lambda\},$$

откуда видно, в частности, что $\Sigma_l(\Lambda)$, как и подграссманианы, является пересечением грассманиана с линейным подпространством в $\mathbb{P}(\wedge^k V)$. Это, в свою очередь, — частные случаи подмногообразий в $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}V)$, называемых *циклами Шуберта*, о которых у нас еще пойдет речь.

Для грассманианов определен также аналог отображений проекции проективных пространств. Именно, пусть $W \subset V$ — подпространство коразмерности l в n-мерном векторном пространстве V. При $k \leqslant l$ мы получаем отображение $\pi\colon U \to G(k, V/W)$, определенное на открытом подмножестве $U \subset G(k, V)$, состоящем из подпространств размерности k, пересекающихся с W только по нулю, просто беря образ при факторизации; при $k \geqslant l$ получаем отображение $\eta\colon U' \to G(k-l, W)$, определенное на открытом подмножестве U', состоящем из подпространств, трансверсальных к W, беря пересечение. Отметим, что при плюккеровом вложении оба этих отображения могут быть получены при помощи проекции объемлющего пространства $\mathbb{P}(\wedge^k V)$. Например, отображение π является ограничением на $G(k, V)$ линейного отображения $\mathbb{P}(\wedge^k V) \to \mathbb{P}(\wedge^k (V/W))$, индуцированного проекцией $V \to V/W$.

Пример 6.3. Грассманиан $\mathbb{G}(1, 3)$

Следующие несколько упражнений относятся к геометрии грассманиана $\mathbb{G} = \mathbb{G}(1, 3)$, параметризующего прямые в $\mathbb{P}^3$. Как мы видели, его можно рассматривать (в соответствии с плюккеровым вложением) как квадрику в $\mathbb{P}^5$.

Упражнение 6.4. Для каждой точки $p \in \mathbb{P}^3$ и плоскости $H \subset \mathbb{P}^3$, содержащей p, пусть $\Sigma_{p,H} \subset \mathbb{G}$ — множество прямых в $\mathbb{P}^3$, проходящих через p и лежащих в H. Покажите, что при плюккеровом вложении $\mathbb{G} \to \mathbb{P}^5$ множество $\Sigma_{p,H}$ переходит в прямую, и наоборот, каждая прямая в $\mathbb{P}^5$, лежащая в $\mathbb{G}$, имеет вид $\Sigma_{p,H}$ для некоторых p и H.

Упражнение 6.5. Для каждой точки $p \in \mathbb{P}^3$ обозначим через $\Sigma_p \subset \mathbb{G}$ множество прямых в $\mathbb{P}^3$, проходящих через p. Для каждой плоскости $H \subset \mathbb{P}^3$ пусть $\Sigma_H \subset \mathbb{G}$ — множество прямых в $\mathbb{P}^3$, лежащих в H. Покажите, что при плюккеровом вложении и Σ_p, и Σ_H переходят в двумерные плоскости в $\mathbb{P}^5$, и наоборот, всякая двумерная плоскость $\Lambda \cong \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{P}^5$ есть либо Σ_p для некоторой точки p, либо Σ_H для некоторой плоскости H.

Упражнение 6.6. Пусть l_1, $l_2 \subset \mathbb{P}^3$ — скрещивающиеся прямые. Покажите, что множество $Q \subset \mathbb{G}$, состоящее из прямых в $\mathbb{P}^3$, пересекающих обе прямые l_1 и l_2, является пересечением $\mathbb{G}$ с трехмерным линейным подпространством $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ и, следовательно, является двумерной квадрикой. Выведите из этого еще одним способом, что $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Что происходит, если l_1 и l_2 пересекаются?

Упражнение 6.7. Пусть теперь $Q \subset \mathbb{P}^3$ — гладкая двумерная квадрика. Покажите, что два семейства прямолинейных образующих на Q соответствуют плоским коникам на $\mathbb{G}$, лежащим в дополнительных плоскостях Λ_1, $\Lambda_2 \subset \mathbb{P}^5$. Покажите, что и наоборот, прямые в $\mathbb{P}^3$, соответствующие плоской конике $C \subset \mathbb{G}$, заметают гладкую квадрику тогда и только тогда, когда плоскость Λ, содержащая C, не содержится в $\mathbb{G}$. Что происходит с этим соответствием, если квадрика становится конусом или плоскость Λ лежит в $\mathbb{G}$?

Следующее упражнение является непосредственным обобщением предыдущего; в нем рассматриваются многообразия Сегре, отличные от $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Упражнение 6.8. Пусть $\Sigma_{1,k} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ — многообразие Сегре. Для любой точки $p \in \mathbb{P}^1$ обозначим через Λ_p слой $\Sigma_{1,k}$ над p. Мы видели, что Λ_p является k-мерным линейным подпространством в $\mathbb{P}^{2k+1}$. Покажите, что соответствие $p \mapsto \Lambda_p$ определяет регулярное отображение $\mathbb{P}^1$ в грассманиан $\mathbb{G}(k, 2k + 1)$, образом которого является нормальная рациональная кривая, лежащая в $(k+1)$-мерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}(\Lambda^{k+1}K^{2k+2})$.

Перед тем как двигаться дальше, укажем на обобщение упражнения 6.4, которое будет решающим моментом в доказательстве теоремы 10.19 (читателю рекомендуется забежать вперед и прочитать эту теорему, доказательство которой не требует почти ничего выходящего за рамки уже определенного).

Упражнение 6.9. Пусть $G = G(k, V) \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\Lambda^k V)$.

(i) Покажите, что для любых двух точек $\Lambda, \Lambda' \in G$ прямая $\overline{\Lambda, \Lambda'}$, проходящая через них, лежит на G тогда и только тогда, когда соответствующие k-мерные подпространства пересекаются по $(k-1)$-мерному подпространству (или, что равносильно, лежат в $(k+1)$-мерном подпространстве). Таким образом, любая прямая $L \subset G \subset \mathbb{P}^N$ состоит из множества k-мерных подпространств в V, содержащих фиксированное $(k-1)$-мерное подпространство $\Gamma \subset V$ и содержащихся в фиксированном $(k+1)$-мерном подпространстве $\Omega \subset V$.

(ii) Используя (i), покажите, что всякое максимальное линейное подпространство $\Phi \subset G \subset \mathbb{P}^N$ является либо множеством k-мерных подпространств, содержащих фиксированное подпространство из V, либо множеством k-мерных подпространств, содержащихся в фиксированном подпространстве в V.

Пример 6.10. Аналог отображения Веронезе

Не всем известно, что существует аналог отображения Веронезе для грассманианов. Пусть $S = K[Z_0, \ldots, Z_n]$ — однородное координатное кольцо проективного пространства $\mathbb{P}^n$. Обозначим через S_d однородную компоненту S степени d, то есть векторное пространство однородных многочленов степени d от $Z_0, \ldots, Z_n$. Теперь для каждого k-мерного подпространства $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ обозначим через $I(\Lambda)$ его однородный идеал, и пусть $I(\Lambda)_d \subset S_d$ — однородная компонента $I(\Lambda)$ степени d. Тогда $I(\Lambda)_d$ — подпространство коразмерности $\binom{k+d}{d}$ в S_d, так что мы получаем регулярное отображение

$$\nu_d^*\colon \mathbb{G}(k, n) \to G\left(\binom{n+d}{d} - \binom{k+d}{d}, \binom{n+d}{d}\right)$$

или, двойственным образом,

$$\nu_d\colon \mathbb{G}(k, n) \to G\left(\binom{k+d}{d}, \binom{n+d}{d}\right).$$

Упражнение 6.11. Проверьте предыдущие утверждения о коразмерности $I(\Lambda)_d$ в S_d и регулярности отображения ν_d.

Возможно, проще (по крайней мере в характеристике 0) описать это отображение в инвариантных терминах: если рассматривать $\mathbb{P}^n$ как проективное пространство $\mathbb{P}V$, связанное с линейным пространством V, а $\mathbb{G}(k, n) = G(k+1, V)$ как грассманиан $(k+1)$-мерных подпространств в V, то определенное выше отображение просто сопоставляет подпространству $\Lambda \subset V$ подпространство $\mathrm{Sym}^d(\Lambda) \subset \mathrm{Sym}^d(V)$. (В частности, при $k = 0$ мы получаем обычное отображение Веронезе.)

Пример 6.12. Отношения инцидентности

Пусть $\mathbb{G} = \mathbb{G}(k, n)$ — грассманиан k-мерных подпространств в $\mathbb{P}^n$. Мы можем определить подмногообразие $\Sigma \subset \mathbb{G} \times \mathbb{P}^n$, положив

$$\Sigma = \{(\Lambda, x) \mid x \in \Lambda\}.$$

Многообразие Σ — это подмногообразие в произведении, у которого слоем над каждой точкой $\Lambda \in \mathbb{G}$ является само k-мерное подпространство $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$; в терминах лекции 4 это «универсальное семейство» k-мерных подпространств. Самым простым примером этого типа является универсальная гиперплоскость, обсуждавшаяся ранее в примере 4.5, то есть подмногообразие $\Sigma \subset \mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}V$, слоем которого над точкой $H \in \mathbb{P}V^*$ является сама гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}V$. В общем случае это — то самое универсальное семейство, о котором шла речь в примере 4.15, когда мы отмечали, что построенное там семейство неоптимально.

Нетрудно видеть, что Σ является проективным многообразием. Действительно, заметим, что

$$\Sigma = \{([v_1, \ldots, v_k], [w]) \mid v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge w = 0\}$$

или, в случае универсальной гиперплоскости,

$$\Sigma = \{([v^*], [w]) \mid \langle v^*, w\rangle = 0\} \subset \mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}V.$$

Построение Σ является примером общей конструкции, которая постоянно встречается в элементарной алгебраической геометрии. Одним из примеров ее применения является следующее предложение.

Предложение 6.13. *Пусть $\Phi \subset \mathbb{G}(k, n)$ — произвольное подмногообразие. Тогда объединение*

$$\Psi = \bigcup_{\Lambda \in \Phi} \Lambda \subset \mathbb{P}^n$$

также является подмногообразием.

Доказательство. Пусть π_1, π_2 — проекции многообразия инцидентности Σ на $\mathbb{G}(k, n)$ и $\mathbb{P}^n$ соответственно. Тогда

$$\Psi = \pi_2(\pi_1^{-1}(\Phi)),$$

откуда следует, что Ψ является подмногообразием в $\mathbb{P}^n$. □

Пример 6.14. Многообразия инцидентных подпространств

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие. Мы утверждаем, что множество $\mathscr{C}_k(X)$, состоящее из k-мерных подпространств, пересекающихся с X, является подмногообразием грассманиана $\mathbb{G}(k, n)$. Чтобы убедиться в этом, можно использовать многообразие инцидентности $\Sigma \subset \mathbb{G} \times \mathbb{P}^n$, определенное в примере 6.12:

$$\mathscr{C}_k(X) = \pi_1(\pi_2^{-1}(X)) \subset \mathbb{G}(k, n),$$

где Σ — многообразие инцидентности, $\pi_1 : \Sigma \to \mathbb{G}(k, n)$ и $\pi_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^n$ — естественные отображения проекции. Это многообразие, называемое *многообразием инцидентных подпространств*, является полезным во многих случаях, особенно при построении *многообразия Чжоу*. Заметим, что мы уже видели, что $\mathscr{C}_k(X) \subset \mathbb{G}(k, n)$ является подмногообразием, в том частном случае, когда X — линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$.

Упражнение 6.15. Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}^n$ — локально замкнутое подмножество. Покажите, что замыкание в $\mathbb{G}(k, n)$ множества k-мерных линейных подпространств, пересекающих X, является многообразием k-мерных линейных подпространств, пересекающих замыкание $\overline{X}$ множества X.

Упражнение 6.16. (i) Пусть $C \subset \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$ — плоская коника, заданная уравнением $Z_3 = Z_0 Z_2 - Z_1^2 = 0$. Найдите уравнения многообразия инцидентных прямых $\mathscr{C}_1(C) \subset \mathbb{G}(1, 3)$. (ii) Сделайте то же самое для скрученной кубики, заданной параметрически: $t \mapsto [1, t, t^2, t^3]$. (*)

Пример 6.17. Соединение двух многообразий

Пусть $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ — два произвольных непересекающихся проективных многообразия. С помощью предложения 6.13 и примера 6.14 можно показать, что объединение $J(X, Y) \subset \mathbb{P}^n$ прямых, пересекающих X и Y, является проективным многообразием. Прежде всего, из примера 6.14 следует, что множество $\mathscr{J}(X, Y)$ прямых, соединяющих X с Y, является подмногообразием в грассманиане, так как оно представимо в виде пересечения $\mathscr{C}_1(X) \cap \mathscr{C}_1(Y)$. Далее, по предложению 6.13 объединение этих прямых будет подмногообразием в $\mathbb{P}^n$. Многообразие $J(X, Y)$ называется *соединением* многообразий X и Y.

Эта конструкция обобщает конструкцию конуса. В примере 8.1 мы дадим другое доказательство того, что $J(X, Y)$ действительно является подмногообразием в $\mathbb{P}^n$; эта новая конструкция позволит, в частности, обобщить определение $J(X, Y)$ на случай, когда X и Y пересекаются (или даже совпадают).

Упражнение 6.18. Дайте другое доказательство того, что $J(X, Y)$ — подмногообразие в $\mathbb{P}^n$, действуя следующим образом. Во-первых, покажите, что в случае, когда X и Y содержатся в скрещивающихся линейных подпространствах $\Gamma, \Lambda \subset \mathbb{P}^n$, соединение $J(X, Y)$ является пересечением конусов $\overline{\Gamma, Y}$ и $\overline{\Lambda, X}$. Во-вторых, сведите все к этому случаю, заметив, что любую пару непересекающихся многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ можно получить как образ пары многообразий $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$, лежащих в скрещивающихся линейных подпространствах большего проективного пространства $\mathbb{P}^N$, при линейной проекции из $\mathbb{P}^N$ в $\mathbb{P}^n$ и что $J(X, Y)$ является образом $J(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ при этой проекции. Позволяет ли этот подход расширить определение соединения на случай, когда X и Y пересекаются?

Пример 6.19. Многообразия Фано

Важным классом подмногообразий грассманиана $\mathbb{G}(k, n)$ являются *подмногообразия Фано*, связанные с многообразием $X \subset \mathbb{P}^n$. По определению, это множество k-мерных линейных подпространств, содержащихся в X, то есть

$$F_k(X) = \{\Lambda \mid \Lambda \subset X\} \subset \mathbb{G}(k, n).$$

Чтобы увидеть, что $F_k(X)$ действительно является многообразием, заметим сначала, что это достаточно доказать в случае, когда X — гиперповерхность, заданная многочленом $G(Z)$: в общем случае многообразие Фано $F_k(X)$ будет пересечением в $\mathbb{G}(k, n)$ многообразий Фано, соответствующих гиперповерхностям, содержащим X. В случае же, когда X — гиперповерхность, рассмотрим грассманиан локально: сосредоточим наше внимание на аффинном открытом подмножестве $U \subset G(k+1, n+1)$, состоящем из $(k+1)$-мерных линейных подпространств $\Lambda \subset K^{n+1}$, дополнительных к данному $(n-k)$-мерному подпространству Λ_0, и предъявим уравнения для $F_k(X) \cap U \subset U \cong \cong K^{(k+1)(n-k)}$. Начнем с того, что выберем базис $v_0(\Lambda), \ldots, v_k(\Lambda)$ для каждого $\Lambda \in U$, взяв векторы $v_0, \ldots, v_k \in V$ так, чтобы вместе с Λ_0 они порождали все V, и положив

$$v_i(\Lambda) = \Lambda \cap (\Lambda_0 + v_i).$$

Как мы уже видели при обсуждении грассманианов, координаты этих векторов — регулярные функции на U. Теперь рассмотрим однородный многочлен G как элемент $\mathrm{Sym}^d(K^{n+1}) \subset ((K^{n+1})^{\otimes d})^*$ и для каждого мультииндекса $I = \{i_1, \ldots, i_d\}$ положим

$$a_I(\Lambda) = G(v_{i_1}(\Lambda), \ldots, v_{i_d}(\Lambda))$$

(другими словами, a_I — коэффициенты ограничения G на Λ, записанного в базисе, двойственном к базису $\{v_0(\Lambda), \ldots, v_k(\Lambda)\}$). Многочлены $a_I(\Lambda)$ задают $F_k(X)$ в U.

Для более инвариантного объяснения вспомним, что отображение из примера 6.10, сопоставляющее k-мерному подпространству $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ компоненту $I(\Lambda)_d$ (степени d) его однородного идеала, рассматриваемую как подпространство в пространстве S_d однородных многочленов степени d, является регулярным отображением

$$\nu_d^* \colon \mathbb{G}(k, n) \to G(l, N),$$

где $N = \binom{n+d}{d}$, $l = \binom{n+d}{d} - \binom{k+d}{d}$.

Стало быть, подмножество $\Phi \subset G(l, N)$, состоящее из l-мерных подпространств в S_d, содержащих многочлен $G \in S_d$, является подмногообразием, и

$$F_k(X) = (\nu_d^*)^{-1}(\Phi),$$

так что $F_k(X)$ действительно является подмногообразием в $\mathbb{G}(k, n)$.

Упражнение 6.20. Проведите все эти рассуждения в случае квадрики $Q \subset \mathbb{P}^3$, заданной уравнением $Z_0Z_3 - Z_1Z_2 = 0$, и покажите, что многообразие Фано $F_1(Q)$ является объединением двух коник. Сравните это утверждение с параметрическим описанием $F_1(Q)$, возникшим при обсуждении вложения Сегре.

Лекция 7

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рациональные функции

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — неприводимое аффинное многообразие. Так как его координатное кольцо — область целостности, по нему можно построить поле частных; это поле называется *полем рациональных функций* на X и обозначается обычно $K(X)$, а его элементы называются *рациональными функциями* на X. Заметим, что если открытое подмножество $Y \subset X$ само является аффинным многообразием (ср. обсуждение после леммы 2.1), то поле рациональных функций на Y будет таким же, как и на X.

Предупреждение: рациональная функция $h \in K(X)$ записывается как f/g, где $f, g \in A(X)$ — регулярные функции; однако, несмотря на свое название, h не является функцией на X. Даже если разрешить ей принимать значение ∞ в тех точках, где $g = 0$, не удается, вообще говоря, корректно определить h в точках, где f и g обращаются в нуль одновременно. Вскоре мы увидим, в каком смысле можно работать с этими «функциями» как с отображениями.

Рассмотрим теперь неприводимое проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$. Мы можем определить его поле рациональных функций двумя способами: либо взять поле рациональных функций $K(U)$ любого непустого открытого подмножества $U = X \cap \mathbb{A}^n$, либо построить поле частных однородного кольца $S(X)$ и взять в нем функции нулевой степени, т. е. функции, которые можно записать в виде $h(Z) = F(Z)/G(Z)$, где $F(Z)$ и $G(Z)$ — однородные многочлены одной степени.

Упражнение 7.1. Покажите, что все это имеет смысл (т. е. что первое определение не зависит от выбора U) и что второе определение согласуется с первым.

Мы можем обобщить эту конструкцию на приводимые многообразия; например, можно построить кольцо частных координатного кольца произвольного многообразия, обратив все не-делители нуля (хотя в общем случае это кольцо не будет полем: в самом деле, по теореме 5.7 оно будет прямой суммой полей $K(X_i)$, где через X_i обозначены неприводимые компоненты многообразия X). Если действовать по аналогии со вторым определением, то рациональную функцию на приводимом многообразии можно задать, выбрав (произвольным образом) по рациональной функции на каждой неприводимой компоненте или же (что равносильно) задав регулярную функцию на всюду плотном открытом подмножестве в X.

Рациональные отображения

Коль скоро мы ввели понятие рациональной функции, можно обсудить и рациональные отображения. Наше обсуждение пройдет в четыре этапа. Сначала мы дадим предварительное определение, потом объясним, почему оно требует уточнения (проблема, по существу, состоит в слишком вольном использовании известных терминов), затем исправим его, и после этого, наконец, продолжим наш рассказ.

Предварительное определение 7.2. Пусть X — неприводимое многообразие. Тогда *рациональное отображение* φ из X в $\mathbb{A}^n$ задается набором из n рациональных функций:

$$\varphi(x) = (h_1(x), \ldots, h_n(x)),$$

где $h_i \in K(X)$. Аналогичным образом, рациональное отображение из X в $\mathbb{P}^n$ задается набором из $n+1$ рациональной функции:

$$\varphi(x) = [h_0(x), \ldots, h_n(x)].$$

Рациональные отображения обозначаются пунктирными стрелками:

$$\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n.$$

Заметим, что если $X \subset \mathbb{P}^m$ проективно, то есть еще один способ задать рациональное отображение из X в $\mathbb{P}^n$: запишем рациональные функции $h_i(x)$ в виде $F_i(x)/G_i(x)$, где F_i и G_i — однородные полиномы одной степени d_i, а потом умножим вектор $[h_0(x), \ldots, h_n(x)]$ на произведение всех G_i; в результате получится формула

$$\varphi(x) = [H_0(x), \ldots, H_n(x)],$$

где H_i — однородные многочлены одной степени. Разница с данным ранее аналогичным описанием регулярного отображения в $\mathbb{P}^n$, конечно, в том, что теперь мы не требуем, чтобы многочлены H_i одновременно не обращались в нуль на X.

Наконец, заметим, что коль скоро поле рациональных функций на X совпадает с полем рациональных функций на любом аффинном открытом подмножестве $U \subset X$, по существу все равно, задавать рациональное отображение на X или на U. В частности, каждое рациональное отображение многообразия X регулярно на некотором открытом подмножестве в X, и обратно, любое регулярное отображение открытого подмножества многообразия X продолжается до рационального отображения всего X.

Что же во всем этом плохого? Проблемы тут по существу те же, что и с рациональными функциями: несмотря на название, рациональное отображение — вовсе не отображение, так как оно может быть не определено для некоторых точек многообразия X. Но если рациональное отображение — не отображение, то что же это за объект? В определении 7.2 сказано, что рациональное отображение «задается» набором рациональных функций, но там не объясняется, в каком смысле задается, что, конечно, неудовлетворительно с формальной точки зрения. Например, так как рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ не может быть описано как сопоставление каждой точке $p \in X$ какой-то точки на Y, а priori неясно, какие рациональные отображения следует считать одинаковыми.

Выход из этих затруднений основан на том, что, как мы отмечали выше, рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ должно быть определено на некотором открытом по Зарисскому подмножестве $U \subset X$, любое регулярное отображение открытого множества $U \subset X$ должно продолжаться до рационального отображения всего многообразия X, и наконец, рациональное отображение должно определяться его значениями на всяком открытом множестве $U \subset X$, на котором оно регулярно. Учитывая все вышесказанное, получаем следующее определение.

Определение 7.3. Пусть X — неприводимое многообразие, а Y — произвольное многообразие. *Рациональным отображением*

$$\varphi\colon X \dashrightarrow Y$$

называется класс эквивалентности пар вида (U, γ), где $U \subset X$ — плотное[1] открытое по Зарисскому подмножество, а $\gamma\colon U \to Y$ — регулярное отображение; пары (U, γ) и (V, η) называются эквивалентными, если $\gamma|_{U\cap V} = \eta|_{U\cap V}$.

Заметим, что если $Z \subset X$ — произвольное открытое подмножество, то существует естественная биекция между рациональными отображениями из X в Y и рациональными отображениями из Z в Y. Аналогично, если $W \subset Y$ — открытое множество, то мы имеем вложение множества рациональных отображений $X \dashrightarrow W$ в множество рациональных отображений $X \dashrightarrow Y$; образ этого вложения есть множество таких рациональных отображений $[(U, \gamma)]$, что $\gamma(U) \not\subset Y \setminus W$.

[1] Всякое непустое открытое по Зарисскому подмножество неприводимого многообразия автоматически будет плотным (см. упражнение 5.5). — *Прим. ред.*

Пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ и $\eta\colon Y \dashrightarrow Z$ — пара рациональных отображений. Если существуют такие пары (U, f) и (V, g), представляющие φ и η соответственно, что $f^{-1}(V) \neq \varnothing$, то мы можем определить *композицию* $\eta \circ \varphi$ как класс эквивалентности $(f^{-1}(V), g \circ f)$. Если φ — вложение подмногообразия X в многообразие Y, будем называть эту композицию также *ограничением* η на X. Заметим, что ни композиция, ни ограничение не определены в общем случае: так, для пар (U, f) и (V, g) может случиться, что образ отображения f лежит целиком вне V.

Если именно определение 7.3 — правильное, то зачем же было начинать с определения 7.2? Дело в том, что формально нечеткое определение 7.2 гораздо нагляднее и ближе к тому, как представляют себе рациональные отображения на практике: просто как отображения, заданные рациональными функциями. По большей части именно так мы и будем с ними работать, следя за тем, чтобы не приписывать им формальных свойств, которыми они в общем случае не обладают (вроде наличия ограничения или композиции). Определение 7.3 — первая из возможных точек зрения на рациональные отображения: рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ — это регулярное отображение, определенное на открытом плотном подмножестве многообразия X.

Как и в случае рациональных функций, мы можем распространить определение на приводимые многообразия (например, дословно повторив определение 7.3). В частности, задать рациональное отображение многообразия X с неприводимыми компонентами $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — то же самое, что задать отображение на каждой из неприводимых компонент $X_1, X_2, \ldots, X_k$ по отдельности, не накладывая никаких условий согласованности на пересечениях компонент. Поэтому мы ничего не потеряем, если при обсуждении рациональных отображений будем всегда считать многообразие X неприводимым. В связи с этим мы примем следующее терминологическое соглашение: если не оговорено противное, в фразе наподобие «пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ — рациональное отображение» многообразие X подразумевается неприводимым.

Пример 7.4

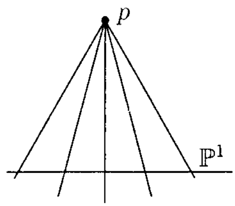
Простейший пример рационального отображения, не являющегося регулярным, — это отображение

$$\varphi\colon \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1,$$

заданное формулой

$$\varphi(x, y) = [x, y].$$

Заметим, что это отображение определено в точности на $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и переводит прямые, проходящие через начало координат в $\mathbb{A}^2$, в представляемые ими точки на $\mathbb{P}^1$; в частности, невозможно непрерывно продолжить это отображение на все $\mathbb{A}^2$. Далее, можно рассматривать φ и как рациональное отображение из $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^1$, которое может быть описано геометрически как проекция из точки $p = [0, 0, 1] \in \mathbb{P}^2$ на прямую.



У этого примера есть очевидное обобщение: для любой плоскости $\Lambda \cong \mathbb{P}^k$ в $\mathbb{P}^n$ проекцию π_Λ из Λ на $\mathbb{P}^{n-k-1} \subset \mathbb{P}^n$, регулярную на дополнении $\mathbb{P}^n \setminus \Lambda$, можно рассматривать как рациональное отображение из $\mathbb{P}^n$ в $\mathbb{P}^{n-k-1}$; аналогично, для любого $X \subset \mathbb{P}^n$, не содержащегося в Λ, ограничение π_Λ на X задает рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}$ вне зависимости от того, пересекается ли X с Λ.

Графики рациональных отображений

Пусть X — проективное многообразие и $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ — рациональное отображение; пусть $U \subset X$ — открытое множество, на котором φ определено. График отображения $\varphi|_U$, как мы видели, есть замкнутое подмногообразие в $U \times \mathbb{P}^n$; под *графиком* же *рационального отображения* φ мы будем понимать многообразие Γ_φ, являющееся замыканием по Зарисскому графика отображения $\varphi|_U$ в $X \times \mathbb{P}^n$. Заметим, что это определение не зависит от выбора открытого множества $U \subset X$ (в частности, если φ регулярно, то это обыкновенный график).

Так как график Γ_φ рационального отображения φ — замкнутое подмногообразие в $X \times \mathbb{P}^n$, он также является проективным многообразием. Отсюда следует, что проекция $\pi_2(\Gamma_\varphi)$ графика Γ_φ в $\mathbb{P}^n$ есть опять-таки проективное многообразие; мы определяем *образ рационального отображения* φ как $\pi_2(\Gamma_\varphi)$.

Используя график рационального отображения φ, мы можем определить понятия образа и прообраза для рациональных отображений. Именно, если φ — такое же, как выше, то для любого замкнутого подмногообразия $Z \subset \mathbb{P}^n$ его *прообразом* $\varphi^{-1}(Z) \subset X$ называется многообразие

$$\varphi^{-1}(Z) = \pi_1(\pi_2^{-1}(Z)),$$

где $\pi_1 : \Gamma_\varphi \to X$ и $\pi_2 : \Gamma_\varphi \to \mathbb{P}^n$ — проекции. Аналогичным образом, для всякого замкнутого подмножества $Y \subset X$ его *образ* (или *полный образ*) определяется как образ проекции

$$\varphi(Y) = \pi_2(\pi_1^{-1}(Y)).$$

Здесь уместно сделать то же предупреждение, что мы сделали по поводу самого́ термина «рациональное отображение»: слова «образ» и «прообраз» могут ввести в заблуждение; например, вовсе не обязательно, чтобы для любой точки $p \in \mathbb{P}^n$, лежащей в образе φ, существовала такая точка $q \in X$, что $\varphi(q) = p$. Особенно опасно говорить об образе подмногообразия $Y \subset X$ при рациональном отображении $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$; упражнение 7.6 показывает, что образ ограничения φ на Y (даже при условии, что ограничение существует), вообще говоря, не совпадет с образом Y под действием φ (образ ограничения φ на Y называется *собственным образом* подмногообразия Y).

Упражнение 7.5. Проверьте, что график Γ_φ не зависит от выбора открытого множества U, и покажите, что образ рационального отображения φ есть замыкание множества $\varphi(U)$.

Упражнение 7.6. Покажите, что если $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ — рациональное отображение, а $Z \subset X$ — такое подмногообразие, что ограничение η отображения φ на Z определено, то график $\Gamma_\eta \subset Z \times \mathbb{P}^n$ содержится в прообразе $(\pi_1)^{-1}(Z) = \Gamma_\varphi \cap (Z \times \mathbb{P}^n) \subset X \times \mathbb{P}^n$, но не обязан с ним совпадать.

Упражнение 7.7. Покажите, что образ нормальной рациональной кривой $C \subset \mathbb{P}^n$ при проекции из точки $p \in C$ есть нормальная рациональная кривая $C' \subset \mathbb{P}^{n-1}$.

Теперь введем еще одно определение: для любого проективного подмногообразия $Y \subset \mathbb{P}^n$ рациональным отображением $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ будем называть рациональное отображение из X в $\mathbb{P}^n$, образ которого содержится в Y; в силу сказанного выше, это равносильно тому, что $\varphi(U) \subset Y$ для всякого открытого $U \subset X$, на котором φ регулярно.

Как мы видели (см. обсуждение после упражнения 2.24), нельзя утверждать, что отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^m$ из проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ регулярно тогда и только тогда, когда график Γ_φ — подмногообразие произведения $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Тем не менее это станет верно, если заменить слово «регулярное» на «рациональное»:

Упражнение 7.8. Пусть $X \subset \mathbb{P}^m$ — неприводимое квазипроективное многообразие. Предполагая, что характеристика поля K равна нулю, покажите, что отображение множеств $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$ рационально тогда и только тогда, когда его график замкнут в $X \times \mathbb{P}^n$. Иными словами, подмногообразие $\Gamma \subset X \times \mathbb{P}^n$, пересекающее общий слой $\{p\} \times \mathbb{P}^n$ в одной точке, задает рациональное отображение из X в $\mathbb{P}^n$. (*)

Упражнение 7.8 — трудное, о чем свидетельствует тот факт, что его утверждение перестает быть верным в положительной характеристике. Пусть, например $\mathrm{char}(K) = p$. Рассмотрим график $\Gamma_\alpha \subset \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ отображения $\alpha\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, заданного по формуле $x \mapsto x^p$. Множество Γ_α

пересекается с общим (на самом деле с любым) слоем $\mathbb{A}^1 \times \{q\}$ в единственной точке, так что у отображения α существует обратное (в теоретико-множественном смысле) отображение φ, причем график φ замкнут в $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$; однако же отображение φ, очевидно, не рационально. Так или иначе, упражнение 7.8 доставляет (по крайней мере в нулевой характеристике) вторую точку зрения на рациональные отображения: рациональные отображения $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с такими неприводимыми замкнутыми подмногообразиями $\Gamma \subset X \times \mathbb{P}^n$, что для общей точки $q \in X$ пересечение $\Gamma \cap (\{q\} \times \mathbb{P}^n)$ состоит из одной точки.

Используя понятие графика, можно обобщить теорему Чжоу на рациональные функции. Именно, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — комплексное подмногообразие[1] в $\mathbb{P}^n$ и f — мероморфная функция на X. По теореме 1.9 множество X является подмногообразием в $\mathbb{P}^n$; но из той же теоремы можно вывести и то, что функция f рациональна.

Упражнение 7.9. Пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ — рациональное отображение, а Γ_φ — его график. Покажите, что существует и единственно такое максимальное открытое подмножество $U \subset X$, что проекция π_1 на первый множитель индуцирует изоморфизм между $(\pi_1)^{-1}(U) \subset \Gamma_\varphi$ и U, то есть (вспоминая определение 7.3) в классе эквивалентности φ существует такая пара (U, f), что для всех $(V, g) \in \varphi$ имеем $V \subset U$.

Максимальное открытое подмножество $U \subset X$, о котором идет речь в этом упражнении, называется *областью определения* рационального отображения, а его дополнение $X \setminus U$ называется *множеством неопределенности* рационального отображения φ.

Бирациональные изоморфизмы

Как мы уже отмечали, среди отличий рациональных отображений от обычных отображений есть и то, что композиция рациональных отображений не всегда определена. Если $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ и $\gamma\colon Y \dashrightarrow Z$ — рациональные отображения, может так случиться, что образ φ лежит вне любого открытого подмножества в Y, на котором γ определено, и тогда композиция не будет определена даже как рациональное отображение. Есть все же случай, когда такого произойти не может, а именно, когда отображение φ *доминантно*, то есть образ φ совпадает со всем Y. (Мы не используем термин «сюръективный», так как, конечно, из того, что $\operatorname{Im}(\varphi) = Y$, не следует, что $\forall p \in Y\ \exists q \in X : \varphi(q) = p$.)

Из определений ясно, что для двух рациональных отображений $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ и $\gamma\colon Y \dashrightarrow Z$, где φ доминантно, композиция $\gamma \circ \varphi$ — кор-

[1] Компактное, разумеется. — *Прим. ред.*

ректно определенное рациональное отображение. В частности, если $f \in K(Y)$ — произвольная рациональная функция, то $\varphi^* f$ — корректно определенная рациональная функция на X. Таким образом, бирациональный доминантный морфизм $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ индуцирует вложение полей функций $\varphi^*\colon K(Y) \hookrightarrow K(X)$ и сам, в свою очередь, определяется этим вложением. Это соображение подсказывает, как определить более слабое отношение эквивалентности между многообразиями, чем обычный изоморфизм.

Определение. Будем говорить, что рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ является *бирациональным*, если существует такое рациональное отображение $\gamma\colon Y \dashrightarrow X$, что оба рациональных отображения $\varphi \circ \gamma$ и $\gamma \circ \varphi$ определены и являются тождественными. Назовем два неприводимых многообразия *бирационально изоморфными*, если между ними существует бирациональный изоморфизм.

Ввиду характеризации рациональных отображений, данной в упражнении 7.8, в характеристике 0 бирациональное отображение — это просто рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$, которое *взаимно однозначно в общей точке*, то есть такое, что для общей точки $q \in Y$ график Γ_φ пересекает слой $X \times \{q\}$ ровно в одной точке, или, что равносильно, прообраз $\varphi^{-1}(q)$ состоит из одной точки. Вот еще два свойства бирациональных изоморфизмов.

Упражнение 7.10. Покажите, что многообразия X и Y бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(i) $K(X) \cong K(Y)$;

(ii) существуют непустые открытые подмножества $U \subset X$ и $V \subset Y$, изоморфные друг другу.

Заметим, что если $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ — произвольное рациональное отображение, то проекция π_1 графика Γ_φ рационального отображения φ на X — также бирациональное отображение (на самом деле всякое регулярное бирациональное отображение тривиальным образом эквивалентно такой проекции). Это, в свою очередь, дает нам третью точку зрения на рациональные отображения: рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ — это регулярное отображение многообразия X', бирационально изоморфного X.

Частный случай понятия бирационального изоморфизма получается при $Y = \mathbb{P}^n$; дадим следующее определение.

Определение. Многообразие называется *рациональным*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(i) X бирационально изоморфно $\mathbb{P}^n$;

(ii) $K(X) \cong K(x_1, \ldots, x_n)$;

(iii) X содержит открытое подмножество U, изоморфное открытому подмножеству в $\mathbb{A}^n$.

Если эти условия не выполнены, многообразие называют *иррациональным*.

Пример 7.11. Двумерная квадрика

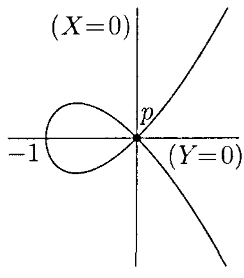
Простейший нетривиальный пример бирационального изоморфизма — это бирациональный изоморфизм между квадрикой в $\mathbb{P}^3$ и плоскостью $\mathbb{P}^2$, задаваемый проекцией. Именно, пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ — квадрика (т. е. поверхность, заданная уравнением $Z_0Z_3 - Z_1Z_2 = 0$) и $p \in Q$ — точка $[0, 0, 0, 1]$. Пусть $\pi_p\colon Q \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^2$ — проекция; при таком выборе Q и p это просто отображение

$$\pi_p\colon [Z_0, Z_1, Z_2, Z_3] \mapsto [Z_0, Z_1, Z_2].$$

Проекция π_p является рациональным отображением $\pi\colon Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Так как общая прямая, проходящая через p, пересекает Q ровно в одной точке, отличной от p (вы можете проверить, что это верно для любой прямой, не лежащей в плоскости $Z_0 = 0$, которая пересекает Q по объединению двух прямых $Z_0 = Z_1 = 0$ и $Z_0 = Z_2 = 0$), отображение взаимно однозначно в общей точке и тем самым имеет обратное рациональное отображение, а именно:

$$\begin{aligned}&\pi^{-1}\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow Q,\\ &[Z_0, Z_1, Z_2] \mapsto [Z_0^2, Z_0Z_1, Z_0Z_2, Z_1Z_2].\end{aligned}$$

Таким образом, квадрика бирационально изоморфна $\mathbb{P}^2$. Разумеется, мы могли также увидеть с помощью изоморфизма $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, что поле функций на Q есть $K(x, y)$ (или же можно заметить, что Q содержит $\mathbb{A}^2$ в качестве открытого по Зарисскому подмножества).



Мы продолжим обсуждение этого бирационального изоморфизма в примере 7.22, а пока что следующие упражнения снабдят читателя новыми примерами рациональных многообразий.

Упражнение 7.12. Рассмотрим кубическую кривую $C \subset \mathbb{P}^2$, заданную уравнением $ZY^2 = X^3 + X^2Z$. Покажите, что проекция π_p из точки $p = [0, 0, 1]$ задает бирациональный изоморфизм C с $\mathbb{P}^1$.

Упражнение 7.13. Покажите, что для любых m и n произведение $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ рационально. Постройте в явном виде бирациональный изоморфизм $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ с $\mathbb{P}^{n+m}$.

Упражнение 7.14. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^n$ — квадрика ранга $r \geqslant 3$ и $p \in Q$ — произвольная точка, не лежащая на вершине Q. Покажите, что проекция $\pi_p \colon Q \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ — бирациональный изоморфизм.

Пример 7.15. Гиперповерхности

В этом месте следует упомянуть о хорошо известном утверждении, гласящем, что любое неприводимое многообразие X бирационально изоморфно гиперповерхности. Существует два способа это увидеть. Первый основан на том, что если X — не гиперповерхность, то общая проекция $\pi_p \colon X \to \mathbb{P}^{n-1}$ является бирациональным изоморфизмом на свой образ $\overline{X}$. (В характеристике 0 это следует из характеризации бирациональных отображений как взаимно однозначных в общей точке, если принять во внимание, что общая прямая, пересекающая X, пересекает X только в одной точке; к сожалению, доказательство этого на первый взгляд очевидного факта придется отложить до лекции 11 (упражнение 11.23).) Применяя эту проекцию нужное число раз, мы в конце концов получим бирациональный изоморфизм между X и гиперповерхностью (или $\mathbb{P}^k$, если X — линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$).

Другое доказательство можно получить, если применить теорему о примитивном элементе и заключить, что если $x_1, \ldots, x_k$ — базис трансцендентности[1] для поля функций на X, то поле $K(X)$ порождено над $K(x_1, \ldots, x_k)$ единственным элементом x_{k+1}, который удовлетворяет неприводимому уравнению

$$F(x_{k+1}) = a_d(x_1, \ldots, x_k) \cdot x_{k+1}^d + \ldots + a_0(x_1, \ldots, x_k)$$

с коэффициентами в $K(x_1, \ldots, x_k)$. Избавившись от знаменателей, мы можем считать F неприводимым полиномом от $k+1$ переменной x_i; отсюда следует, что X бирационально изоморфно гиперповерхности в $\mathbb{A}^{k+1}$, заданной этим уравнением.

Степень рационального отображения

Пусть $f \colon X \dashrightarrow Y$ — доминантное рациональное отображение, соответствующее вложению $f^* \colon k(Y) \to K(X)$ полей функций. Мы можем следующим образом обобщить характеризацию бирациональных отображений как взаимно однозначных в общей точке.

Предложение 7.16. *Общий слой отображения f конечен тогда и только тогда, когда вложение f^* отождествляет $K(X)$ с конечным*

[1] Точнее говоря, «сепарирующий базис трансцендентности», т.е. такой, что $K(X)$ алгебраично и сепарабельно над $K(x_1, \ldots, x_k)$; такой базис трансцендентности всегда существует. — *Прим. ред.*

расширением поля $K(Y)$. Если характеристика поля K равна нулю, то число точек общего слоя отображения f равно степени расширения.

Доказательство. Для начала заметим, что (как в доказательстве теоремы 3.6) нашу задачу можно свести к аффинному случаю: мы можем заменить X и Y на открытые аффинные подмножества и считать f ограничением линейной проекции $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ на замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^n$. Тем самым достаточно доказать утверждение для отображения $f\colon X \to Y$ аффинных многообразий, заданного как ограничение проекции

$$\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1},$$
$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-1}).$$

В этом случае поле функций $K(X)$ порождено над $K(Y)$ одним элементом z_n. Пусть сначала z_n алгебраичен над $K(Y)$, и пусть

$$G(z_1, \ldots, z_n) = a_0(z_1, \ldots, z_{n-1}) \cdot z_n^d + a_1(z_1, \ldots, z_{n-1}) \cdot z_n^{d-1} + \ldots$$

(где $a_i \in K(Y)$) — минимальный многочлен элемента z_n. Избавившись от знаменателей, мы можем считать a_i регулярными функциями на Y, то есть многочленами от $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Пусть $\Delta(z_1, \ldots, z_{n-1})$ — дискриминант G как многочлена от z_n; так как G неприводим в $K(Y)[z_n]$ и $\mathrm{char}(K) = 0$, Δ не может быть тождественным нулем на Y. Стало быть, подмножества в Y, заданные уравнениями $a_0 = 0$ и $\Delta = 0$, являются (собственными) подмногообразиями в Y, и на дополнении к их объединению слои f состоят ровно из d точек.

Если же z_n трансцендентен над $K(Y)$, то для любого многочлена $G(z_1, \ldots, z_n) \in I(X)$, записанного в виде

$$G(z_1, \ldots, z_n) = a_0(z_1, \ldots, z_{n-1}) \cdot z_n^d + a_1(z_1, \ldots, z_{n-1}) \cdot z_n^{d-1} + \ldots,$$

все функции a_i должны быть тождественно нулевыми на Y. Отсюда следует, что X содержит весь слой проекции $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ над любой точкой $p \in Y$, т. е. отображение f не является конечным в общей точке. □

Рациональное отображение, удовлетворяющее условиям предложения 7.16, называют *конечным в общей точке* или *отображением конечной степени*; число точек в общем слое отображения f называют *степенью* отображения[1].

---

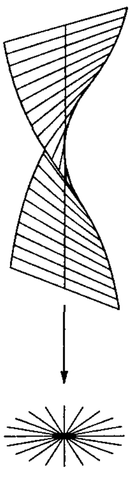
[1] Обычно степенью называют не число точек в общем слое, а степень расширения полей $K(X) \supset K(Y)$; в конечной характеристике это, вообще говоря, не одно и то же. — *Прим. ред.*

Раздутия

Теперь мы подошли, видимо, к достаточно трудной теме: конструкции раздутия многообразия X вдоль подмногообразия Y. Это раздутие является некоторым регулярным бирациональным отображением $\pi\colon \widetilde{X} \to X$, ассоциированным с подмногообразием $Y \subset X$ и являющимся изоморфизмом везде вне Y, но оно может иметь нетривиальные слои над Y. Раздутие — фундаментальная (и к тому же, как мы увидим, легко определяемая) конструкция; сложность же ее в том, что мы не сможем дать хорошее описание того, как раздутие выглядит в общем случае.

Пример 7.17. Раздутие точки

Самый простой пример раздутия — это график Γ_φ рационального отображения $\varphi\colon \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, описанного в примере 7.4. Этот график, обозначаемый $\widetilde{\mathbb{A}}^2$, вместе с проекцией $\pi\colon \widetilde{\mathbb{A}}^2 \to \mathbb{A}^2$, называется *раздутием* $\mathbb{A}^2$ в точке $(0, 0)$. Несложно нарисовать это отображение: $\widetilde{\mathbb{A}}^2$ выглядит как винтовая лестница (со ступеньками, идущими и вверх, и вниз).



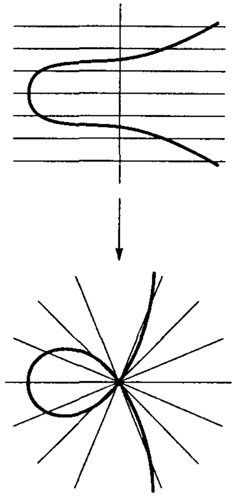
В частности, заметим, что отображение $\widetilde{\mathbb{A}}^2 \to \mathbb{A}^2$ является изоморфизмом вне начала координат $(0, 0)$, а слой над этой точкой — проективная прямая $\mathbb{P}^1$, соответствующая множеству прямых, проходящих через $(0, 0)$.

Чтобы посмотреть на это чуть-чуть по-иному, заметим, что если $[W_0, W_1]$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^1$, то открытое подмножество $W_0 \neq 0$ в $\widetilde{\mathbb{A}}^2 \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ изоморфно $\mathbb{A}^2$, а ограничение π на это открытое подмножество есть отображение $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, заданное формулой

$$f(x, y) = (x, xy)$$

и служившее основным примером в нашем обсуждении конструктивных множеств в лекции 3 (там же оно было изображено на картинке). Напомним, что при этом отображении горизонтальные прямые переходят в прямые, проходящие через начало координат, а вертикальные прямые переходят сами в себя, кроме оси y, которая «схлопывается» в точку $(0, 0)$.

Обобщая далее, пусть $\varphi\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ — рациональное отображение, заданное проекцией из точки $p \in \mathbb{P}^n$, и пусть $\widetilde{\mathbb{P}}^n = \Gamma_\varphi \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ — его график. Отображение $\pi\colon \widetilde{\mathbb{P}}^n \to \mathbb{P}^n$ называется *раздутием* $\mathbb{P}^n$ в точке p. Как и в случае $\mathbb{A}^2$, отображение π отображает $\widetilde{\mathbb{P}}^n$ изоморфно в $\mathbb{P}^n$ вне p, тогда как слой над p изоморфен $\mathbb{P}^{n-1}$ (многообразие $\widetilde{\mathbb{P}}^n$ также иногда называют раздутием.)



В еще большей общности, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — квазипроективное многообразие и $p \in X$ — произвольная точка; обозначим через $\widetilde{X} = \Gamma_\varphi \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$ график проекции X в $\mathbb{P}^{n-1}$ из точки p. Отображение $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ называется раздутием X в точке p. Прообраз $E = \pi^{-1}(p) \subset \widetilde{X}$ в точке p называется *исключительным дивизором* раздутия.

Другой способ задать раздутие многообразия X — реализовать его как подмногообразие в многообразии $\widetilde{\mathbb{P}}^n$, являющемся раздутием $\mathbb{P}^n$ в точке p. Если $\pi\colon \widetilde{\mathbb{P}}^n \to \mathbb{P}^n$ — раздутие $\mathbb{P}^n$ в точке p, то для замкнутого $X \subset \mathbb{P}^n$ мы можем определить *собственный прообраз* $\widetilde{X}$ многообразия $X \subset \widetilde{\mathbb{P}}^n$ как замыкание в $\widetilde{\mathbb{P}}^n$ прообраза $\pi^{-1}(X \setminus \{p\})$ дополнения к p в X. (Если X только локально замкнуто, то возьмем замыкание этого прообраза в $(\pi)^{-1}(X) \subset \widetilde{\mathbb{P}}^n$.) Точнее говоря, ограничение отображения π на $\widetilde{X}$ есть раздутие X в точке p. Так, например, если мы хотим изобразить раздутие нодальной кубики $X \subset \mathbb{A}^2$, заданной уравнением $y^2 = x^3 + x^2$, мы можем ее нарисовать на $\widetilde{\mathbb{A}}^2$.

Пример 7.18. Раздутие подмногообразий

Пусть вообще $X \subset \mathbb{A}^m$ — произвольное аффинное многообразие, а $Y \subset X$ — произвольное подмногообразие. Выберем множество образующих $f_0, \ldots, f_n \in A(X)$ идеала, соответствующего подмногообразию $Y \subset X$ (не обязательно минимальное), и рассмотрим рациональное отображение

$$\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n,$$

заданное формулой

$$\varphi(x) = [f_0, \ldots, f_n].$$

Ясно, что φ регулярно на дополнении $X \setminus Y$, но в общем случае не на Y, так что график Γ_φ будет изоморфно отображаться на X вне Y. График Γ_φ вместе с проекцией $\pi\colon \Gamma_\varphi \to X$ называется *раздутием многообразия X вдоль подмногообразия Y* и иногда обозначается $\mathrm{Bl}_Y(X)$ или просто $\widetilde{X}$. Как и ранее, прообраз $E = \pi^{-1}(Y) \subset \widetilde{X}$ называется *исключительным дивизором*.

То, что X аффинно, по существу неважно: если $X \subset \mathbb{P}^m$ — проективное многообразие и $Y \subset X$ — подмногообразие, мы можем определить раздутие X вдоль Y аналогичным образом, взяв набор однородных многочленов одной степени $F_0, \ldots, F_n$, порождающих идеал, насыщение которого совпадает с $I(Y)$, и обозначив через $\mathrm{Bl}_Y(X)$ график рационального отображения $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, заданного набором многочленов $[F_0, \ldots, F_n]$.

Упражнение 7.19. (a) Покажите, что конструкция $\mathrm{Bl}_Y(X)$ локальна, т. е. что для любого многообразия X, подмногообразия Y и аффинного открытого подмножества $U \subset X$ прообраз $\mathrm{Bl}_Y(X)$ есть $\mathrm{Bl}_{Y\cap U}(U)$. (b) Покажите, что конструкция не зависит от выбора образующих идеала Y в X.

Другая конструкция раздутия многообразия X вдоль подмногообразия Y в категории комплексных многообразий локальна изначально. Начнем с того, что определим раздутие полидиска $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ с центром в начале координат как прообраз Δ в Γ_φ, где $\varphi\colon \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ — рациональное отображение, переводящее z в $[z]$, т. е. как многообразие

$$\tilde{\Delta} = \{((z_1, \ldots, z_n), [w_1, \ldots, w_n]) \mid z_i w_j = z_j w_i \ \forall i, j\} \subset \Delta \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

Если теперь M — комплексное многообразие и $p \in M$ — произвольная точка, мы можем взять окрестность U точки p, изоморфную полидиску $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, и определить раздутие следующим образом:

$$\mathrm{Bl}_p(M) = (M \setminus \{p\}) \underset{\Delta^*}{\cup} \tilde{\Delta},$$

где Δ^* — проколотый полидиск $\Delta \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, изоморфный своему прообразу в $\tilde{\Delta}$.

Более общим образом, мы можем определить раздутие полидиска Δ вдоль координатной плоскости Γ, заданной уравнениями $z_1 = z_2 = \ldots$ $\ldots = z_k = 0$, следующим образом:

$$\tilde{\Delta} = \{((z_1, \ldots, z_n), [w_1, \ldots, w_k]) \mid z_i w_j = z_j w_i \quad \forall i, j\} \subset \Delta \times \mathbb{P}^{k-1}.$$

Как и при раздутии точки, это многообразие изоморфно отображается на свой образ в Δ над дополнением к Γ в Δ, а слой над произвольной точкой $p \in \Gamma$ есть проективное пространство $\mathbb{P}^{k-1}$ нормальных направлений к плоскости Γ в точке p. Более того, многообразие $\tilde{\Delta}$ обладает следующим фундаментальным свойством естественности: если $f\colon \Delta \to \Delta$ — биголоморфное отображение, переводящее Γ в себя, то f единственным образом поднимается до биголоморфного отображения $\tilde{f}\colon \tilde{\Delta} \to \tilde{\Delta}$.

Это последнее свойство позволяет определить раздутие вдоль комплексного подмногообразия и глобально. Если M — комплексное многообразие размерности n, а $N \subset M$ — его подмногообразие размерности $n - k$, то мы можем найти такие открытые подмножества $U_i \subset M$, покрывающие N, что каждое U_i переводится в полидиск посредством изоморфизма, переводящего $U_i \cap N$ в координатную плоскость Г. Теперь можно определить раздутие M вдоль N как объединение

$$\mathrm{Bl}_N(M) = (M \setminus N) \cup \Big(\bigcup \tilde{\Delta}_i\Big),$$

где $\tilde{\Delta}_i$ являются раздутиями U_i вдоль $U_i \cap N$, $\tilde{\Delta}_i$ склеено с $M \setminus N$ по общему открытому подмножеству $U_i \setminus (U_i \cap N)$ и, наконец, $\tilde{\Delta}_i$ склеено с $\tilde{\Delta}_j$ по прообразу $U_i \cap U_j$ посредством индуцированного отображения на раздутиях.

Упражнение 7.20. (a) Проверьте свойство естественности раздутий, описанное выше, и используйте его, чтобы показать, что конструкция $\mathrm{Bl}_N(M)$ корректна. (b) Покажите, что если аффинное многообразие M и его аффинное подмногообразие N являются комплексными многообразиями, то два определения раздутия $\mathrm{Bl}_N(M)$ многообразия M вдоль подмногообразия N эквивалентны[1].

Если закрыть глаза на то, что мы еще не дали определения касательного пространства, то стоит отметить, что касательные пространства дают хороший способ описания раздутия многообразия X вдоль подмногообразия Y, по крайней мере когда оба многообразия гладкие: отображение, соответствующее раздутию $\mathrm{Bl}_Y(X) \to X$, — изоморфизм вне Y, а слой над точкой $p \in Y$ есть проективизация пространства $N_p = T_p(X)/T_p(Y)$, являющегося слоем нормального расслоения к Y в X в точке p.

Раздутия — это всего лишь частный случай бирациональных отображений, но они играют важную роль в изучении рациональных отображений в общем случае. Чтобы описать, какую именно, заметим для начала, что из самого определения следует, что для любого раздутия $\widetilde{X} = \mathrm{Bl}_Y(X) \to X$ многообразия X вдоль подмногообразия Y существует рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, которое может и не быть регулярным, но продолжается до регулярного отображения на всем $\widetilde{X}$. В общем случае имеется следующая фундаментальная теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 7.21. *Пусть X — произвольное многообразие и $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ — произвольное рациональное отображение. Тогда φ может быть «разрешено» с помощью последовательности раздутий: существует такая последовательность многообразий $X = X_1, X_2, \ldots, X_k$, подмногообразий $Y_i \subset X_i$ и отображений $\pi_i\colon X_{i+1} \to X_i$, что*

(i) $\pi_i\colon X_{i+1} \to X_i$ *— раздутие X_i вдоль Y_i;*

[1]В авторскую формулировку были внесены небольшие уточнения. — *Прим. ред.*

8-6152

(ii) *отображение φ разлагается в композицию $\tilde{\varphi} \circ \pi_k^{-1} \circ \ldots \circ \pi_1^{-1}$, где отображение $\tilde{\varphi}\colon X_{k+1} \to \mathbb{P}^n$ регулярно.*

$$\begin{tikzcd}
X_{k+1} \arrow[d] \arrow[ddddr, "\tilde{\varphi}"] & \\
X_k \arrow[d] & \\
\vdots \arrow[d] & \\
X_2 \arrow[d] & \\
X \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd}$$

Иными словами, после того, как мы раздуем многообразие конечное число раз, мы придем к многообразию $\widetilde{X}$ и бирациональному морфизму из $\widetilde{X}$ в X, для которых индуцированное отображение $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{X} \to \mathbb{P}^n$ будет уже в самом деле регулярно. В этом смысле можно сказать, что для того, чтобы понять структуру рациональных отображений, нам достаточно знать, как устроены регулярные отображения и раздутия. В частности, мы можем принять это как нашу *четвертую точку зрения на рациональные отображения*: рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ есть регулярное отображение из какого-то раздутия многообразия X.

Вот, наконец, еще один новый термин: если $\pi\colon Z = \mathrm{Bl}_p(X) \to X$ — раздутие многообразия X в точке p, и если $E = \pi^{-1}(p) \subset Z$ — исключительный дивизор, то процесс перехода от Z к X называется *стягиванием*, так что, например, мы можем сказать, что отображение π стягивает E в точку или что X получается из Z стягиванием дивизора E.

Пример 7.22. Снова двумерная квадрика

Еще раз рассмотрим обсуждавшееся в примере 7.11 отображение

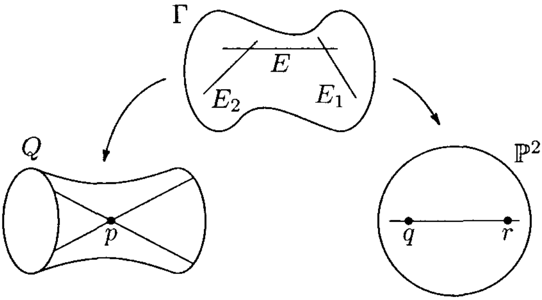
$$\pi\colon Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2,$$

являющееся проектированием квадратичной поверхности $Q \subset \mathbb{P}^3$, заданной уравнением $Z_0Z_3 - Z_1Z_2 = 0$, из точки $p = [0, 0, 0, 1] \in Q$ на плоскость $(Z_3 = 0)$. Мы можем описать это отображение в терминах раздутий следующим образом. Пусть, во-первых, $\Gamma \subset Q \times \mathbb{P}^2$ — график π. Тогда, поскольку однородные многочлены Z_0, Z_1 и Z_2, задающие отображение π, порождают идеал точки p, мы видим, что $\pi_1 : \Gamma \to Q$ есть раздутие Q в точке p. Заметим, что исключительный дивизор раздутия $E \subset \Gamma$ отображается с помощью проекции π_2 изоморфно на прямую, заданную в однородных координатах $[W_0, W_1, W_2]$ на $\mathbb{P}^2$ уравнением $W_0 = 0$.

С другой стороны, отображение $\Gamma \to \mathbb{P}^2$ взаимно однозначно всюду, кроме двух точек $q = [0, 0, 1]$ и $r = [0, 1, 0]$, отвечающих двум прямым на Q, проходящим через p; слои проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathbb{P}^2$ над этими точками являются прямыми. В самом деле, обратное отображение π^{-1} задается формулой

$$\pi^{-1}\colon [W_0, W_1, W_2] \mapsto [W_0^2, W_0W_1, W_0W_2, W_1W_2];$$

так как многочлены W_0^2, W_0W_1, W_0W_2 и W_1W_2 порождают идеал, насыщение которого есть однородный идеал множества $\{q, r\} \subset \mathbb{P}^2$, мы можем заключить, что $\pi_2\colon \Gamma \to \mathbb{P}^2$ есть раздутие $\mathbb{P}^2$ в точках q и r. Наконец, заметим, что образы в Q двух исключительных дивизоров E_1 и E_2 суть прямые на Q, проходящие через p.



В итоге получается, что мы можем описать отображение π как отображение, которое раздувает точку $p \in Q$ и стягивает прямые на Q, проходящие через p; отображение же π^{-1} раздувает точки $q, r \in \mathbb{P}^2$ и стягивает прямую, их соединяющую.

Упражнение 7.23. Покажите, что собственные прообразы в Γ двух семейств прямых на Q (за исключением прямых, проходящих через p) являются собственными прообразами прямых в $\mathbb{P}^2$, проходящих через q или r (за исключением прямой $\overline{qr}$).

Пример 7.24. Кубический свиток в $\mathbb{P}^4$

Рассмотрим рациональное отображение из $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^4$, заданное по формуле

$$\varphi([Z_0, Z_1, Z_2]) = [Z_0^2, Z_1^2, Z_0Z_1, Z_0Z_2, Z_1Z_2].$$

Образ этого отображения (обозначим его X) называется *кубическим свитком* в $\mathbb{P}^4$. Это один из примеров *нормальных рациональных свитков*, которые мы опишем в примере 8.17.

Есть несколько способов описать кубический свиток. Во-первых, он является образом поверхности Веронезе $S \subset \mathbb{P}^5$ при проекции $\pi_p : S \to \mathbb{P}^4$ из точки $p \in S$; в частности, если поверхность Веронезе задана как образ отображения

$$\psi([Z_0, Z_1, Z_2]) = [Z_0^2, Z_1^2, Z_2^2, Z_0Z_1, Z_0Z_2, Z_1Z_2],$$

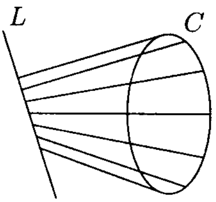
то φ — это просто композиция ψ и проекции

$$\pi_p : [W_0, \ldots, W_5] \mapsto [W_0, W_1, W_3, W_4, W_5]$$

из точки $p = [0, 0, 1, 0, 0, 0]$.

Во-вторых, X изоморфен раздутию плоскости $\mathbb{P}^2$ в точке $q=[0, 0, 1] \in \mathbb{P}^2$, в которой отображение φ не определено. На самом деле, если обозначить через $\Gamma \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ график проекции из q, то X есть не что иное, как образ Γ при вложении Сегре $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5$ (поскольку подмножество $\Gamma \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ определено с помощью билинейной формы, его образ при отображении Сегре лежит в гиперплоскости $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$). Иными словами, φ — композиция обратного отображения к проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}^2$ и вложения Сегре.

Мы можем также описать поверхность X через образы кривых в $\mathbb{P}^2$ при отображении φ. Образ в $\mathbb{P}^4$ исключительного дивизора $E \subset \Gamma$ — это прямая $L \subset \mathbb{P}^4$, которая называется *директрисой* свитка. Далее, заметим, что образы собственных прообразов в Γ прямых на $\mathbb{P}^2$, проходящих через q, суть снова прямые $M_\lambda \subset \mathbb{P}^4$; эти прямые пересекают L. И наконец, образы при отображении φ прямых в $\mathbb{P}^2$, не проходящих через q, будут кониками $C \subset \mathbb{P}^4$, не пересекающимися с L (при этом плоскость, содержащая C, будет дополнительной к L) и пересекающими каждую прямую M_λ в одной точке. Стало быть, если выбрать одну такую конику $C \subset X \subset \mathbb{P}^4$, мы можем описать X как объединение некоторого семейства прямых в $\mathbb{P}^4$, соединяющих прямую L и конику C, лежащие в дополнительных пространствах. Это описание кажется довольно неуклюжим, но у него есть хорошее обобщение, дающее описание произвольных нормальных рациональных свитков.



Упражнение 7.25. Проверьте утверждения об образах в X кривых на Γ, сделанные нами в предыдущем абзаце.

Упражнение 7.26. Пусть $r \in X$ — произвольная точка, $\pi_r : X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ — проекция из r, и пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ — образ отображения π_r. Покажите, что если r не лежит на директрисе, то Q — квадрика ранга 4, а если r лежит на директрисе, то Q — квадрика ранга 3.

Вот еще несколько упражнений на раздутия и стягивания.

Упражнение 7.27. Как и в упражнении 7.14, рассмотрим проекцию квадрики $Q \subset \mathbb{P}^n$ из точки $p \in Q$; предположим, что Q имеет ранг $n+1$ (см. пример 3.3). Покажите, что это бирациональный изоморфизм Q и $\mathbb{P}^{n-1}$, и опишите это отображение в терминах раздутий и стягиваний.

Упражнение 7.28. В порядке другого обобщения примера 7.11 покажите, что для любых n и m бирациональный изоморфизм многообразий $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ и $\mathbb{P}^{m+n}$ можно задать посредством отображения

$$\varphi\colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{m+n},$$

определенного так:

$$\varphi([Z_0, \ldots, Z_m], [W_0, \ldots, W_n]) = \\ = [Z_0W_0, Z_1W_0, \ldots, Z_mW_0, Z_0W_1, \ldots, Z_0W_n].$$

Опишите график этого отображения; опишите само отображение в терминах раздутий и стягиваний.

Упражнение 7.29. Рассмотрим групповой закон

$$A\colon K^n \times K^n \to K^n$$

на векторном пространстве K^n. Он индуцирует рациональное отображение

$$A\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n;$$

для $n = 1$ и 2 опишите график этого отображения и опишите отображение в терминах раздутий и стягиваний.

Унирациональность

В заключение мы должны упомянуть еще одно понятие, связанное с темой этой лекции. Будем говорить, что многообразие X *унирационально*, если для некоторого n существует доминантный рациональный морфизм

$$\varphi\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow X,$$

или, что то же самое, поле функций $K(X)$ может быть вложено в чисто трасцендентное расширение $K(z_1, \ldots, z_n)$ поля K.

Классическая теорема Люрота утверждала, что кривая рациональна тогда и только тогда, когда она унирациональна. Кастельнуово и Энриквес доказали[1] то же самое утверждение для поверхностей.

[1] В предположении, что поле K имеет характеристику нуль; в положительной характеристике имеются контрпримеры. — *Прим. ред.*

После этого в течение более полувека оставался открытым вопрос, совпадают ли понятия рациональности и унирациональности в общем случае; в семидесятых годах Клеменс и Гриффитс [CG] показали, что большинство трехмерных кубик $X \subset \mathbb{P}^4$ унирациональны, но не рациональны, а В. А. Исковских и Ю. И. Манин аналогичным образом проанализировали трехмерные квартики [IM]. (Мы увидим в примере 18.19, что трехмерная кубика унирациональна, но доказательство ее нерациональности далеко выходит за рамки этой книги.)

Возможно, унирациональность является «более правильным» понятием, чем рациональность. По крайней мере, рациональность в общем случае — понятие достаточно капризное. Например, в то время как мы видели, что все квадратичные гиперповерхности рациональны, кубическая гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}^n$ будет иррациональной при $n = 2$, рациональной при $n = 3$, снова иррациональной при $n = 4$ и неизвестно какой в общем случае (по крайней мере некоторые гладкие кубики в любой четной размерности рациональны, но похоже, что не все). Что же до унирациональности, то, напротив, с помощью совершенно элементарных рассуждений можно убедиться (см. упражнение 18.22), что все кубические гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^n$ унирациональны при $n \geqslant 3$.

Лекция 8

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

Теперь, когда большинство основных понятий введено, мы в состоянии описать целый ряд стандартных конструкций.

Пример 8.1. Соединение двух многообразий

Пусть $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ — два неприводимых проективных многообразия. Обозначим через $\mathscr{J}(X, Y) \subset \mathbb{G}(1, n)$ множество прямых, пересекающих и X, и Y. Согласно примеру 6.17, если X и Y не пересекаются, то $\mathscr{J}(X, Y)$ есть подмногообразие в $\mathbb{G}(1, n)$, а значит, объединение этих прямых есть подмногообразие в $\mathbb{P}^n$. Вот другое доказательство этого факта, которое позволит нам обобщить ту же конструкцию на случай, когда X и Y пересекаются (и даже совпадают): отображение

$$j\colon X \times Y \to \mathbb{G}(1, n),$$

переводящее пару (p, q) в прямую $\overline{pq}$, задается формулой

$$([v], [w]) \mapsto [v \wedge w]$$

и, следовательно, является регулярным.

Если X и Y пересекаются, то мы получаем рациональное отображение $j\colon X \times Y \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n)$, образом которого по определению является замыкание множества прямых $\{\overline{xy} \mid x \in X, y \in Y, x \neq y\}$. Этот образ называется *многообразием прямых, соединяющих X и Y*, и обозначается через $\mathscr{J}(X, Y)$. В случае, если X и Y пересекаются в точке p, не очевидно, какие прямые, проходящие через p, будут принадлежать множеству $\mathscr{J}(X, Y)$; ответ (по крайней мере для некоторых случаев) будет дан в примере 15.14.

Согласно предложению 6.13, объединение множества точек всех прямых $L \in \mathscr{J}(X, Y)$ есть подмногообразие в $\mathbb{P}^n$; оно называется *соединением* многообразий X и Y и обозначается $J(X, Y)$. Если X и Y не пересекаются, то мы получим в точности объединение прямых, пересекающих одновременно X и Y; в противном случае, как будет видно из следующего упражнения, может получиться нечто меньшее.

Упражнение 8.2. Вот первый нетривиальный пример такой ситуации. Возьмем в $\mathbb{P}^4$ две 2-плоскости Λ_1 и Λ_2, трансверсально пересекающиеся в точке p, и рассмотрим коники $C_1 \subset \Lambda_1$ и $C_2 \subset \Lambda_2$. Сначала рассмотрим случай непересекающихся C_1 и C_2, например,

$$\Lambda_1: W_0 = W_1 = 0, \qquad \Lambda_2: W_3 = W_4 = 0,$$
$$C_1: W_2^2 = W_3 W_4, \qquad C_2: W_0 W_1 = W_2^2.$$

Покажите, что $J(C_1, C_2)$ есть гиперповерхность 4-й степени. Чтобы разобраться со случаем, когда одна или обе из кривых C_i проходят через точку p, выберем Λ_1 и Λ_2 так же, как в предыдущем примере, а в качестве C_1 и C_2 возьмем такие коники:

$$C_1: W_4^2 = W_2 W_3, \qquad C_2: W_1 W_2 = W_0^2.$$

Проверьте, что их соединение есть кубическая гиперповерхность. Заметьте, в частности, что не каждая прямая, проходящая через p, лежит в $\mathscr{J}(C_1, C_2) \subset \mathbb{G}(1, 4)$. (*)

Возникает естественный вопрос: если X и Y — два многообразия, пересекающихся в точке p, то какие прямые, проходящие через p, лежат в образе $j: X \times Y \to \mathbb{G}(1, n)$? Пока что у нас нет подходящего языка, не говоря уж о технике, для того, чтобы решить эту задачу, но вот частичный ответ для готовых принять на веру существование того и другого: если X и Y гладки и трансверсально пересекаются в точке p, то в $\mathscr{J}(X, Y)$ входят все прямые, которые лежат в подпространстве, натянутом на касательные пространства к X и Y.

Заметим, что для любого подмногообразия $Z \subset X \times Y$, не содержащегося в диагонали $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, можно аналогичным образом, ограничив рациональное отображение j на Z, описать подмногообразие $j(Z) \subset \mathscr{J}(X, Y)$. Объединение соответствующих прямых опять-таки будет подмногообразием в $\mathbb{P}^n$. Эта конструкция встретится нам снова в примерах 8.14 и 8.17.

Пример 8.3. Отображение секущих плоскостей

Это частный случай предыдущей конструкции: для любого неприводимого $X \subset \mathbb{P}^n$ (отличного от точки) имеем рациональное отображение

$$s: X \times X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n),$$

определенное на дополнении к диагонали Δ в $X \times X$, которое переводит пару (p, q) в прямую $\overline{pq}$. Оно называется *отображением секущих*, а его образ $\mathscr{S}(X)$ — *многообразием секущих прямых к* X. Терминология здесь несколько двусмысленна: прямая $L \in \mathbb{G}(1, n)$ называется *секущей к* X, если она принадлежит $\mathscr{S}(X)$, но это не обязательно означает, что L пересекает X по крайней мере в двух точках. В лекции 15 будет объяснено, как охарактеризовать такие прямые.

Разумеется, такую же конструкцию можно провести для $k+1$ точки при любом k: если $X \subset \mathbb{P}^n$ неприводимо и не содержится ни в какой $(k-1)$-плоскости, то аналогичным образом определяется рациональное отображение

$$s_k\colon X^{k+1} \dashrightarrow \mathbb{G}(k, n),$$

переводящее общий набор из $k+1$ точки в X в натянутую на них плоскость. (Заметим, что множество, на котором это отображение нерегулярно, не всегда есть просто диагональ, как это было в случае $k=1$. Соответственно, более сложно описать и плоскости $\Lambda \in s_k(X)$, лежащие в образе, но не порожденные пересечением Λ и X.) Это отображение называется *отображением секущих плоскостей*, а его образ $\mathscr{S}_k(X)$ — *многообразием секущих k-плоскостей к X*.

Упражнение 8.4. Рассмотрим скрученную кубическую кривую $C \subset \mathbb{P}^3$. Покажите, что образ ее многообразия секущих при плюккеровом вложении $\mathbb{G}(1, 3) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ есть поверхность Веронезе. (*)

Пример 8.5. Многообразия секущих

Как и в примере 8.1, можно использовать предложение 6.13 в сочетании с примером 8.3 для конструкции нового многообразия: объединение секущих прямых к многообразию X снова есть многообразие, называемое *многообразием хорд многообразия X*, или *многообразием секущих многообразия X*, и обозначаемое[1] $S(X)$. (Напомним, что секущая прямая к X определяется как элемент образа отображения секущих $X \times X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n)$.) Аналогично, объединение секущих k-плоскостей также есть многообразие, обозначаемое $S_k(X)$.

Упражнение 8.6. Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубическая кривая. Покажите, что каждая точка $p \in \mathbb{P}^3$, не лежащая на C, принадлежит единственной прямой L из образа отображения секущих (и, значит, $S(C) = \mathbb{P}^3$). (*)

Упражнение 8.7. Рассмотрим нормальную рациональную кривую $C \subset \mathbb{P}^4$. Найдите уравнения ее многообразия секущих. (*)

Упражнение 8.8. Пусть $S \subset \mathbb{P}^5$ — поверхность Веронезе. Найдите уравнения ее многообразия секущих и сравните ответ с ответом к предыдущему упражнению.

---

[1] В целом мы стараемся выдерживать следующую систему обозначений: для многообразий в $\mathbb{P}^n$ ассоциированные отображения в грассманиан обозначаются строчными буквами, образы таких отображений — прописными рукописными, а объединения соответствующих плоскостей — прописными латинскими буквами. Мы приносим извинения за возможные неудобства (например, мы уже использовали $S(X)$ для однородного координатного кольца многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$); в каждом случае из контекста должно быть ясно, что имеется в виду.

Пример 8.9. Трисекущие и прочее

Пусть опять X — многообразие в $\mathbb{P}^n$, а $\Delta \subset X \times X \times X$ — его большая диагональ (то есть множество троек точек, среди которых есть одинаковые). Тогда множество $\widetilde{V}_{1,3}(X)$ таких троек различных точек (p, q, r), что p, q, r лежат на одной прямой, есть подмногообразие в $X \times X \times X \setminus \Delta$, а значит, его замыкание $V_{1,3}(X) \subset X \times X \times X$ есть подмногообразие в $X \times X \times X$.

Упражнение 8.10. Покажите, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность степени $d \geqslant 3$, причем $n \geqslant 3$, то малая диагональ в $X \times X \times X$ содержится в $V_{1,3}(X)$. (Большая диагональ, напротив, никогда не содержится в $V_{1,3}(X)$, кроме случая, когда X — линейное подпространство. Это несложно показать, используя понятие проективного касательного пространства из лекции 14, хотя при некоторой изощренности хватит и имеющейся техники.)

Более общим образом, многообразие $V_{k,l}(X)$ (для любых k и l) определяется как замыкание в X^k множества наборов из k различных точек X, содержащихся в l-плоскости.

Многообразие трисекущих $\mathscr{V}_{1,3}(X) \subset \mathbb{G}(1, n)$ определяется как замыкание множества прямых вида $\overline{pqr}$, где $(p, q, r) \in \widetilde{V}_{1,3}$; аналогично, *многообразие k-секущих l-плоскостей* есть замыкание в $\mathbb{G}(l, n)$ множества l-плоскостей, пересекающихся с X по k различным точкам, порождающим l-плоскость.

Упражнение 8.11. Пусть $\Psi_{l,k} \subset X^k \times \mathbb{G}(l, n)$ — отношение инцидентности, определенное как замыкание множества

$$\{(p_1, \ldots, p_k; \Gamma) \mid \Gamma = \overline{p_1, \ldots, p_k};\ p_i \text{ различны}\}.$$

Покажите, что проекции $\Psi_{l,k}$ на X^k и $\mathbb{G}(l, n)$ суть $V_{l,k}(X)$ и $\mathscr{V}_{l,k}(X)$ соответственно.

Упражнение 8.12. Приведите пример многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ и чисел l и $k \geqslant l + 1$, обладающих тем свойством, что $V_{k,l}(X)$ *не есть* замыкание множества $\{(p_1, \ldots, p_k) \mid p_i$ лежат в l-плоскости$\}$. (∗)

Упражнение 8.13. Рассмотрим кривые $C_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{P}^3$ из примера 1.26. Опишите объединения трисекущих прямых для этих кривых. (∗)

Пример 8.14. Соединения соответствующих точек

Пусть опять X и Y — подмногообразия в $\mathbb{P}^n$, и пусть нам дано регулярное отображение $\varphi\colon X \to Y$ со свойством $\varphi(x) \neq x$ для любого $x \in X$. Тогда можно определить отображение

$$k_\varphi\colon X \to \mathbb{G}(1, n),$$

которое переводит точку $x \in X$ в прямую $\overline{x,\ \varphi(x)}$, соединяющую x с ее образом под действием φ. Это отображение регулярно, так что его образ есть многообразие; следовательно, многообразием является и

$$K(\varphi) = \bigcup_{x \in X} \overline{x,\ \varphi(x)}.$$

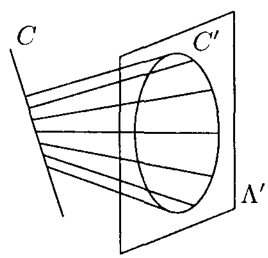
Как и раньше, если условие $\varphi(x) \neq x$ нарушается в некоторых (но не во всех) точках $x \in X$, мы получаем рациональное отображение k_φ, а $K(\varphi)$ тогда определяется как объединение прямых, соответствующих точкам из его образа; наивное определение $K(\varphi)$ как объединения прямых вида $\overline{x,\ \varphi(x)}$, разумеется, уже не проходит.

Упражнение 8.15. Опишите $K(\varphi)$ для случая, когда X и Y — скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$, а φ — изоморфизм между ними.

Упражнение 8.16. Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубическая кривая, а φ — автоморфизм проективного пространства, переводящий X в себя. Как может выглядеть $K(\varphi)$?

Пример 8.17. Нормальные рациональные свитки

Следующий пример, являющийся частным случаем соединения двух многообразий, обобщает как нормальные рациональные кривые, так и конструкцию из упражнения 8.15. Пусть $k \leqslant l$ — натуральные числа, $n = k + l + 1$, а Λ и Λ' — дополнительные линейные пространства размерностей k и l в $\mathbb{P}^n$ (т. е. Λ и Λ' не пересекаются и порождают $\mathbb{P}^n$). Выберем нормальные рациональные кривые $C \subset \Lambda$ и $C' \subset \Lambda'$, а также изоморфизм $\varphi\colon C' \to C$; пусть $S_{k,l}$ будет объединением прямых $\overline{p,\ \varphi(p)}$, соединяющих точки C с соответствующими точками C'. Поверхность $S_{k,l}$ называется *нормальным рациональным свитком*. Прямые $\overline{p,\ \varphi(p)}$ называются *прямолинейными образующими* поверхности $S_{k,l}$; как мы увидим в предложении 8.20, они являются единственными прямыми, лежащими на $S_{k,l}$, если только $k \neq 1$. Обратите внимание, что числа



k и l определяют $S_{k,l}$ с точностью до проективного изоморфизма: можно перевести любую пару плоскостей Λ, Λ' в любую другую пару, любую нормальную рациональную кривую в любую другую и затем изменить φ, беря композицию его с автоморфизмом Λ или Λ', индуцирующим автоморфизм C или C'. Заметим также, что можно рассматривать случай, когда C является точкой (а φ — постоянным отображением) как вырожденный случай, в котором $k = 0$, так что конус над нормальной рациональной кривой $C \subset \mathbb{P}^{n-1}$ можно рассматривать как свиток $S_{0,n-1}$

в $\mathbb{P}^n$. В этих терминах упражнение 8.15 просто утверждает, что свиток $S_{1,1}$ есть квадрика в $\mathbb{P}^3$.

Упражнение 8.18. Пусть $H \subset \mathbb{P}^n$ — гиперплоскость, не содержащая прямолинейной образующей свитка $S = S_{k,l}$. Покажите, что гиперплоское сечение $H \cap S$ есть нормальная рациональная кривая в $\mathbb{P}^{n-1}$.

Упражнение 8.19. Покажите, что образ поверхности Веронезе $S = \nu_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ при проекции из точки $p \in S$ является кубическим свитком $S_{1,2} \subset \mathbb{P}^4$. В частности, покажите, что $S_{1,2}$ изоморфно плоскости $\mathbb{P}^2$, раздутой в точке (см. также пример 7.24).

Следующие упражнения устанавливают некоторые основные факты о свитках; мы соберем эти факты в одном предложении.

Предложение 8.20. (a) *Свитки $S_{k,l} \subset \mathbb{P}^n$ и $S_{k',l'} \subset \mathbb{P}^n$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда $k = k'$.*

(b) *Если $k < l$, то нормальная рациональная кривая $C \subset S = S_{k,l}$ степени k, участвующая в конструкции свитка, есть единственная нормальная рациональная кривая степени $< l$ на S (кроме прямолинейных образующих); в частности, она однозначно определяется по S (она называется* директрисой *S). Это не так для нормальной рациональной кривой C' степени l или для самой C в случае $k = l$.*

(c) *Образ свитка $S = S_{k,l}$ при проекции из точки $p \in S$ проективно эквивалентен $S_{k-1,l}$, если p лежит на директрисе; иначе он проективно эквивалентен $S_{k,l-1}$. В частности, все свитки $S_{k,l}$ рациональны.*

Упражнение 8.21. Покажите, что любые $k+1$ прямолинейных образующих свитка $S_{k,l}$ независимы (то есть порождают $\mathbb{P}^{2k+1}$), а любые $k+2$ зависимы (то есть содержатся в $\mathbb{P}^{2k+2}$). Выведите отсюда часть (a) предложения 8.20.

Упражнение 8.22. В случае, если $k < l$, покажите, что любые $l = n - k - 1$ прямолинейных образующих L_i свитка $S = S_{k,l}$ порождают гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}^n$ и что пересечение H с S состоит из прямых L_i вместе с кривой C. Выведите отсюда часть (b) предложения 8.20.

Упражнение 8.23. *Дополнительным сечением* свитка S называется нормальная рациональная кривая степени l на свитке $S = S_{k,l}$, лежащая в линейном подпространстве $\mathbb{P}^l$, дополнительном к подпространству, порожденному директрисой, и пересекающая один раз каждую прямолинейную образующую. Покажите, что любое дополнительное сечение может играть роль C' из предыдущей конструкции. В случае $k = l$ любая нормальная рациональная кривая $C \subset S$ степени l, пересекающая один раз каждую прямолинейную образующую, называется дополнительным сечением; покажите, что любые две такие кривые лежат в дополнительных подпространствах и могут играть роль C и C' в конструкции свитка.

Упражнение 8.24. Покажите, что каждая гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}^n$, содержащая $n - l = k + 1$ или больше прямолинейных образующих свитка S, пересекает S по объединению прямолинейных образующих и директрисы, тогда как гиперплоскость, содержащая $n - l - 1 = k$ прямолинейных образующих, пересекает S либо по объединению прямолинейных образующих и директрисы, либо по данным k прямым и дополнительному сечению. Выведите отсюда, что любая точка на свитке S, не лежащая на директрисе, лежит на каком-нибудь дополнительном сечении, и получите часть (с) предложения 8.20.

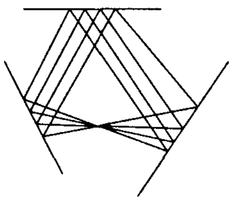
Упражнение 8.25. Пусть $S = S_{k,l} \subset \mathbb{P}^n$ — свиток, причем $k \geqslant 2$. Покажите, что проекция из прямолинейной образующей задает бирегулярный изоморфизм $S_{k,l}$ с $S_{k-1,l-1} \subset \mathbb{P}^{n-2}$. (Более того, если k, $k' > 0$, то $S_{k,l}$ абстрактно изоморфно $S_{k',l'}$ тогда и только тогда, когда $l-k=l'-k'$, но этот факт мы здесь доказывать не будем.)

Пример 8.26. Свитки высшей размерности

Дальнейшее обобщение приведенной выше конструкции состоит в том, чтобы рассматривать несколько нормальных рациональных кривых, а именно, для любого набора $(a_1, \ldots, a_k)$ натуральных чисел, для которого $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$ и $\sum a_i = n - k + 1$, можно взять дополнительные линейные подпространства $\Lambda_i \simeq \mathbb{P}^{a_i} \subset \mathbb{P}^n$ и по нормальной рациональной кривой $C_i \subset \Lambda_i$ в каждом. Выберем изоморфизмы $\varphi_i \colon C_1 \to C_i$ и положим

$$S = \bigcup_{p \in C_1} \overline{p, \varphi_2(p), \ldots, \varphi_k(p)}.$$

Многообразие S называется *k-мерным нормальным рациональным свитком* и иногда обозначается $S_{a_1,\ldots,a_k}$. Как и раньше, S определяется числами a_i с точностью до проективной эквивалентности.



Упражнение 8.27. Покажите, что трехмерное многообразие Сегре, то есть образ $\Sigma_{2,1}$ отображения Сегре

$$\sigma \colon \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5,$$

есть трехмерный нормальный рациональный свиток $S_{1,1,1}$. Более общим образом, многообразие Сегре $\Sigma_{k-1,1} \subset \mathbb{P}^{2k-1}$ есть k-мерный нормальный рациональный свиток $S_{1,\ldots,1}$.

Упражнение 8.28. Пусть $S = S_{1,1,1} \subset \mathbb{P}^5$ — многообразие Сегре, $H \subset \mathbb{P}^5$ — любая гиперплоскость, не содержащая образующую 2-плоскость S. Покажите, что гиперплоское сечение $H \cap S$ есть свиток $S_{1,2}$

в $\mathbb{P}^4$. (Возникает интересный вопрос: какие свитки получаются как гиперплоские сечения данного свитка $S_{a_1,\ldots,a_k}$?)

Есть два вырожденных случая этой конструкции, которые обычно включаются в класс нормальных рациональных свитков. Во-первых, некоторые из чисел a_i могут быть равны нулю. Скажем, пусть $a_1 = \ldots = a_m = 0$; тогда нетрудно видеть, что $S_{0,\ldots,0,a_{m+1},\ldots,a_k}$ есть конус над $S_{a_{m+1},\ldots,a_k}$, вершиной которого является линейная оболочка точек $C_1, \ldots, C_m$. Во-вторых, если $k = 1$, мы получаем обычную нормальную рациональную кривую, которая, таким образом, есть одномерный свиток. С учетом этих соглашений можно сформулировать следующий результат.

Теорема 8.29. *Пусть $S \subset \mathbb{P}^n$ — k-мерный нормальный рациональный свиток.*

(i) *Если точка p лежит в S, то проекция $\bar{S} = \pi_p(S)$ есть снова нормальный рациональный свиток.*

(ii) *Если гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}^n$ не содержит $(k-1)$-плоскости, лежащей на S, то гиперплоское сечение $Y = S \cap H$ есть снова свиток.*

Первая часть этой теоремы относительно бесхитростна: это лишь более продвинутая версия упражнения 8.21. (В частности, если $S = S_{a_1,\ldots,a_k}$, то можно описать свитки, получающиеся проекцией из S.) Для доказательства второй части нужна дальнейшая характеризация свитков, либо как детерминантальных многообразий (как в следующей лекции), либо через степень (как в лекции 19).

Пример 8.30. Еще об отношениях инцидентности

Конструкцию из примера 6.12 можно обобщать многими способами. Например, можно посмотреть на множество пар пересекающихся плоскостей в произведении двух грассманианов плоскостей в одном и том же $\mathbb{P}^n$: положим для каждых k, l

$$\Omega = \{(\Lambda, \Lambda') \mid \Lambda \cap \Lambda' \neq \varnothing\} \subset \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n)$$

Ясно, что это действительно многообразие: можно написать

$$\Omega = \{([v_0 \wedge \ldots \wedge v_k], [w_0 \wedge \ldots \wedge w_l]) \mid v_0 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge w_0 \wedge \ldots \wedge w_l = 0\}.$$

Аналогично, для любых k и $l \geqslant k$ можно рассмотреть множество вложенных пар

$$\mathbb{F}(k, l; n) = \{(\Lambda, \Lambda') \mid \Lambda \subset \Lambda'\} \subset \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n).$$

В случае $k = 0$ обе конструкции оказываются обычным соответствием инцидентности из примера 6.12. В свою очередь, обобщение их обеих выглядит так:

$$\Psi_m = \{(\Lambda, \Lambda') \mid \dim(\Lambda \cap \Lambda') \geqslant m\} \subset \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n),$$

что дает Ω при $m = 0$ и $\mathbb{F}(k, l; n)$ при $m = k < l$.

Конечно, над Ω, $\mathbb{F}(k, l; n)$ и Ψ_m есть «универсальные семейства», относящиеся к ним так же, как обычное соответствие инцидентности Σ к грассманиану $\mathbb{G}(k, n)$. А именно, можно положить

$$\Xi_m = \{(\Lambda, \Lambda'; p) \mid p \in \Lambda \cap \Lambda'\} \subset \Psi_m \times \mathbb{P}^n.$$

Упражнение 8.31. Покажите, что Ω, $\mathbb{F}(k, l; n)$ и Ψ_m действительно являются многообразиями.

Упражнение 8.32. Пусть $\Phi \subset \mathbb{G}(k, n)$ — подмногообразие грассманиана k-плоскостей в $\mathbb{P}^n$, и для каждого $l > k$ обозначим через $\Psi \subset \mathbb{G}(l, n)$ множество плоскостей, содержащих какую-нибудь плоскость из Φ. Покажите, что Ψ является многообразием.

Упражнение 8.33. Пусть Q — квадрика в $\mathbb{P}^3$. Опишите множество плоскостей, содержащих какую-нибудь прямую, лежащую на Q. Более общим образом, пусть $\Sigma_{k,1} = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^k) \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ — многообразие Сегре. Опишите подмножество $(\mathbb{P}^{2k+1})^*$, состоящее из гиперплоскостей в $\mathbb{P}^{2k+1}$, содержащих какую-нибудь k-плоскость, лежащую на $\Sigma_{k,1}$.

Пример 8.34. Многообразия флагов

Соответствие инцидентности $\mathbb{F}(k, l; n)$ из примера 8.30 есть частный случай так называемого *многообразия флагов*. Для каждой возрастающей последовательности чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < n$ оно определяется так:

$$\mathbb{F}(a_1, \ldots, a_k; n) = \{(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k) \mid \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots \subset \Lambda_k\} \subset \\ \subset \mathbb{G}(a_1, n) \times \mathbb{G}(a_2, n) \times \ldots \times \mathbb{G}(a_k, n).$$

Нетрудно видеть, что это действительно подмногообразие в произведении грассманианов (например, оно есть пересечение прообразов многообразий флагов $\mathbb{F}(a_i, a_j; n) \subset \mathbb{G}(a_i, n) \times \mathbb{G}(a_j, n)$ относительно естественных проекций).

Пример 8.35. Еще о соединениях и пересечениях

В предыдущих примерах мы рассматривали подмногообразие в грассманиане, полученное в результате соединения соответствующих точек на двух подмногообразиях $X, Y \subset \mathbb{P}^n$. На самом деле можно рассматривать соединения не только точек, но и произвольных подпространств. Пусть $X \subset \mathbb{G}(k, n)$, $Y \subset \mathbb{G}(l, n)$ — подмногообразия грассманианов k- и l-мерных плоскостей в $\mathbb{P}^n$, а $\varphi\colon X \to Y$ — такое регулярное отображение, что $\varphi(\Lambda)$ не пересекается с Λ для любых Λ. Тем самым получаем регулярное отображение

$$k_\varphi \colon X \to \mathbb{G}(k+l+1,\, n),$$

переводящее точку $\Lambda \in X$ в соединение плоскостей Λ и $\varphi(\Lambda)$ в $\mathbb{P}^n$; как обычно, объединение этих $(k+l+1)$-мерных плоскостей будет являться многообразием $K(\varphi)$. Аналогично $K(\varphi)$ можно определить, если Λ пересекается с $\varphi(\Lambda)$ при некоторых (но не всех) $\Lambda \in X$.

Если скомбинировать эту конструкцию с изоморфизмом $\mathbb{G}(k,\, n) \cong \cong \mathbb{G}(n-k-1,\, n)$, можно построить многообразие пересечений соответствующих членов семейств. А именно, пусть X, Y, φ — такие же, как раньше, причем $k+l \geqslant n$, а для любого $\Lambda \in X$ плоскости Λ и $\varphi(\Lambda)$ пересекаются трансверсально. Тогда определено отображение

$$l_\varphi \colon X \to \mathbb{G}(k+l-n,\, n),$$

переводящее x в $x \cap \varphi(x)$. Стало быть, его образ

$$L(\varphi) = \bigcup_{\Lambda \in X} \Lambda \cap \varphi(\Lambda)$$

также будет многообразием. Как и ранее, эти конструкции можно обобщить на случай нескольких подмногообразий в грассманианах $\mathbb{G}(k_i,\, n)$ или на случай, когда Λ и $\varphi(\Lambda)$ пересекаются трансверсально не для всех Λ.

Пример 8.36. Квадрики ранга 4

Простейший пример конструкции, описанной в примере 8.35, возникает в $\mathbb{P}^3$; он аналогичен конструкции коник из примера 1.22 (ср. также с упражнением 8.5). Рассмотрим скрещивающиеся прямые L, $M \subset \mathbb{P}^3$. Семейство плоскостей, содержащих каждую из них, параметризуется с помощью $\mathbb{P}^1$; выберем для обоих семейств некоторые параметризации (например, можно задать прямую N, не пересекающую ни L, ни M, и сопоставить точке $R \in N$ плоскости $\overline{LR}$ и $\overline{MR}$). Тогда для каждого $\lambda \in \mathbb{P}^1$ плоскости из этих семейств, отвечающие λ, пересекаются по прямой; объединение этих прямых будет квадрикой.

Заметим, что эта квадрика содержит и L, и M, а также, если использовать предложенную выше параметризацию, еще и прямую N, так что мы снова доказали, что через любые три скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$ проходит единственная квадрика. Отметим также, что прямым L и M можно разрешить пересекаться. (Но тогда плоскость $\overline{LM}$ не должна соответствовать сама себе.)

Эту конструкцию можно с тем же успехом применить и в n-мерном проективном пространстве: рассмотреть две $(n-2)$-плоскости $L, M \subset \mathbb{P}^n$, выбрать взаимно однозначное соответствие между семействами гиперплоскостей, проходящих через L и M соответственно. и построить объединение пересечений их соответственных членов. В общем случае в результате получается конус с вершиной $L \cap M$ над квадрикой в $\mathbb{P}^3$ (или коникой в $\mathbb{P}^2$, если пересечение L и M не трансверсальное). Согласно терминологии, введенной в примере 3.3, эти конусы называются *квадриками ранга* 4 *и* 3 соответственно; стало быть, их можно охарактеризовать как:

(i) квадрики, получаемые при помощи предыдущей конструкции;

(ii) конусы над неприводимыми квадриками в $\mathbb{P}^3$;

(iii) многообразия, задаваемые в некоторых координатах уравнением $Z_0Z_3 = Z_1Z_2$ или $Z_0Z_2 = Z_1^2$;

(iv) квадрики, являющиеся одновременно нормальными рациональными свитками (они изоморфны $S_{1,1,0,\ldots,0}$ или $S_{2,0,\ldots,0}$ в обозначениях примера 8.17); или, наконец, как

(v) неприводимые квадрики, содержащие $(n-2)$-мерную плоскость.

Упражнение 8.37. Убедитесь, что эти условия действительно эквивалентны.

Упражнение 8.38. Вернемся к рассмотренной после упражнения 1.24 конструкции общей нормальной рациональной кривой, проходящей через $d+3$ точки. Для всяких i и j обозначим через $Q_{i,j}$ квадрику, полученную применением этой конструкции к семействам гиперплоскостей, содержащих Λ_i и Λ_j. Покажите, что $Q_{i,j}$ порождают пространство всех квадрик, содержащих нормальную рациональную кривую, и, в частности, нормальная рациональная кривая является пересечением квадрик $Q_{i,j}$.

Пример 8.39. Нормальные рациональные свитки, II

Вариант предыдущей конструкции дает нам общий нормальный рациональный свиток. Что делать, понять несложно. Чтобы построить нормальную рациональную кривую — свиток размерности 1 — мы берем n семейств гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$ и рассматриваем пересечения соответствующих членов; для построения квадратичных гиперповерхностей-свитков мы использовали два семейства. Общие нормальные рациональные свитки получаются, когда мы рассматриваем произвольное число семейств.

Именно, пусть $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-k+1}$ — фиксированные плоскости размерности $n-2$ в $\mathbb{P}^n$. Как и раньше, установим взаимно однозначное соответствие между семействами гиперплоскостей, содержащими их, так что семейство гиперплоскостей, содержащих Λ_i, запишется в виде $\{\Gamma_i(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1}$. Предположим также, что для любого $\lambda \in \mathbb{P}^1$ соответствующие гиперплоскости независимы, то есть пересекаются по $(k-1)$-плоскости. Тогда объединение

$$X = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{P}^1} \Gamma_1(\lambda) \cap \Gamma_2(\lambda) \cap \ldots \cap \Gamma_{n-k+1}(\lambda)$$

их пересечений есть нормальный рациональный свиток.

Мы не будем доказывать здесь это утверждение; оно следует из результатов примера 9.10, где нормальные рациональные свитки охарактеризованы как детерминантальные многообразия.

Лекция 9

ДЕТЕРМИНАНТАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В этой лекции мы рассмотрим большой и важный класс многообразий, а именно, многообразия, задающиеся обращением в нуль миноров некоторой матрицы. Как мы увидим, в этот класс входят многие из многообразий, рассматривавшихся нами ранее, например, многообразия Веронезе, Сегре, нормальные рациональные свитки.

Общие детерминантальные многообразия.

Мы начнем с так называемых *общих детерминантальных многообразий.* Пусть $M = \mathbb{P}^{mn-1}$ — проективизация векторного пространства матриц размера $m \times n$. Для всякого k обозначим через $M_k \subset M$ множество матриц, ранг которых не превосходит k; поскольку это множество является множеством общих нулей всех $(k+1) \times (k+1)$-миноров, являющихся однородными многочленами степени $k+1$ на пространстве M, множество M_k является проективным многообразием.

Замечание. Прямо по определению миноры размера $(k+1) \times (k+1)$ задают многообразие M_k теоретико-множественно. Верно и более сильное утверждение — они порождают однородный идеал $I(M_k)$, — но его доказательство нетривиально.

Пример 9.1. Многообразия Сегре

Простейший пример детерминантального многообразия — при $k=1$ — мы уже рассматривали. Действительно, легко убедиться, что матрица $(Z_{i,j})$ размера $m \times n$ имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде произведения $Z = {}^tU \cdot W$, где $U = (U_1, \ldots, U_m)$, $W = (W_1, \ldots, W_n)$ — векторы. Отсюда видно, что подмногообразие $M_1 \subset \subset M = \mathbb{P}^{mn-1}$ является многообразием Сегре, то есть образом отображения Сегре

$$\sigma\colon \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{mn-1}.$$

(На инвариантном языке: гомоморфизм $A\colon K^n \to K^m$ ранга 1 определяется с точностью до множителя своими ядром $\operatorname{Ker}(A) \in (\mathbb{P}^{n-1})^*$ и образом $\operatorname{Im}(A) \in \mathbb{P}^{m-1}$). Таким образом, двумерная квадрика $\Sigma_{1,1} = = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ представляется в виде

$$\Sigma_{1,1} = \left\{ [Z] \mid \begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0 \right\},$$

а трехмерное многообразие Сегре $\Sigma_{2,1} = \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^5$ может быть представлено как

$$\Sigma_{2,1} = \left\{ [Z] \mid \operatorname{rank} \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 & Z_5 \end{pmatrix} \leqslant 1 \right\}.$$

Пример 9.2. Многообразия секущих многообразий Сегре

На самом деле любое детерминантальное многообразие $M_k \subset M$ можно описать в терминах многообразия Сегре M_1. Можно, например, заметить, что линейное отображение $A\colon K^n \to K^m$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда оно представимо в виде суммы двух отображений ранга 1. При $m = 2$ это очевидно; в общем же случае отображение можно представить в виде композиции

$$A\colon K^n \to \operatorname{Im}(A) \hookrightarrow K^m$$

и свести все к случаю $m = 2$ для первого из этих отображений. Отсюда видно, что общее детерминантальное многообразие M_2 является многообразием секущих для многообразия Сегре $M_1 \subset M$. Аналогично, M_k является объединением секущих $(k-1)$-плоскостей многообразия M_1.

Линейные детерминантальные многообразия в общем случае

Более общим образом, рассмотрим $(m \times n)$-матрицу линейных форм $\Omega = (L_{i,j})$ на $\mathbb{P}^l$, не обращающихся в нуль одновременно. Тогда многообразие

$$\Sigma_k(\Omega) = \{[Z_0, \ldots, Z_l] \mid \operatorname{rank}(\Omega(Z)) \leqslant k\} \subset \mathbb{P}^l$$

также называется *линейным детерминантальным многообразием*. Разумеется, оно является прообразом M_k при отображении $\mathbb{P}^l \to M$, задаваемом линейными формами $(L_{i,j})$. (Обобщая далее, для всякого подмногообразия $X \subset \mathbb{P}^l$ множество точек $[Z] \in X$, для которых $\operatorname{rank}(L_{i,j}(Z)) \leqslant k$, также будем называть детерминантальным подмногообразием в X.)

Всякую $(m \times n)$-матрицу, состоящую из линейных форм на $\mathbb{P}^l = \mathbb{P}V$, можно рассматривать как линейное отображение

$$\omega\colon V \to \operatorname{Hom}(U, W),$$

где $U \cong K^n$, $W \cong K^m$ — векторные пространства над K; иначе говоря, ее можно рассматривать как элемент тройного тензорного произведения

$$\omega \in V^* \otimes U^* \otimes W.$$

Ввиду того, что элементы этого произведения можно интерпретировать многими способами — например, можно считать ω отображением из U

в $\mathrm{Hom}(V, W)$ или из $\mathrm{Hom}(U^*, V)$ в W, — мы не будем даже пытаться различать эти представления и будем обозначать их все через ω (в отличие от случая «билинейного» объекта $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V) = U^* \otimes V$, у которого существует только еще одно такое представление — как элемента из $\mathrm{Hom}(V^*, U^*)$, называющегося *отображением, сопряженным к* φ, и обозначающегося ${}^t\varphi$).

Хотя мы рассматриваем «трилинейный» объект ω как $(m \times n)$-матрицу Ω, состоящую из линейных форм на $\mathbb{P}^k = \mathbb{P}V$, на таких объектах действуют три группы $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{GL}(U)$ и $\mathrm{GL}(W)$ — группы автоморфизмов U, V и W соответственно. Матрицы Ω и Ω' называются *сопряженными*, если одну из них можно перевести в другую действием этих групп. Другими словами, Ω и Ω' сопряжены, если из одной из них можно получить другую невырожденными линейными преобразованиями строк и столбцов, а также линейной заменой переменных Z_i.

Здесь следует отметить коренное различие между билинейными и три- или полилинейными объектами. Если билинейный объект $\varphi \in \in V \otimes W$ полностью (с точностью до действия $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$) определяется единственным дискретным инвариантом — *рангом*, то ситуация с трилинейными объектами $\omega \in U \otimes V \otimes W$ значительно сложнее. Вообще говоря, действие $\mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ не имеет конечного числа орбит (или хотя бы всюду плотной орбиты); обычно (как мы увидим в лекции 11) оно имеет непрерывное семейство орбит, инварианты которых известны далеко не полностью. Единственное исключение — случай, когда одно из пространств двумерно; этот случай мы разберем далее в примерах. В конце лекции 22 будет обсуждаться похожая проблема — классификация с точностью до сопряжения элементов пространства $U \otimes \mathrm{Sym}^2 V$ при $\dim(U) = 2$.

Ясно, что действие групп $\mathrm{GL}(U)$ и $\mathrm{GL}(W)$ не влияет на многообразие $\Sigma_k(\Omega)$, построенное по матрице Ω, действие же $\mathrm{GL}(V)$ переводит многообразие $\Sigma_k(\Omega)$ в проективно эквивалентное. Таким образом, детерминантальные многообразия являются инвариантами трилинейных объектов с точностью до сопряжения. Более того, в некоторых случаях (таких как нормальная рациональная кривая в примере 9.3), детерминантальное многообразие $\Sigma_k(\Omega)$ полностью определяет матрицу Ω с точностью до сопряжения, так что изучение геометрии детерминантального многообразия в этих случаях эквивалентно некоторой задаче трилинейной алгебры.

Пример 9.3. Нормальные рациональные кривые

В примере 1.16 мы установили, что нормальная рациональная кривая $C \subset \mathbb{P}^n$, то есть образ отображения Веронезе $\nu_n\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$, переводящего точку $[X, Y]$ в $[X^n, X^{n-1}Y, \ldots, Y^n]$, может быть представлена как детерминантальное многообразие $\Sigma_1(\Omega)$ ранга 1, построенное по матрице линейных форм

$$\Omega = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_{n-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_n \end{pmatrix}.$$

Сейчас мы обобщим этот факт; в частности, мы покажем, что всякая $(2 \times n)$-матрица линейных форм, удовлетворяющая некоторому условию невырожденности, сопряжена матрице Ω.

Для начала напомним инвариантное описание отображения Веронезе, данное нами после упражнения 2.10: если $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}V$ — проективизация двумерного векторного пространства V, то $\mathbb{P}^n$ можно рассматривать как проективизацию n-й симметрической степени $W = \operatorname{Sym}^n V$, и тогда отображение Веронезе переводит точку $[v] \in \mathbb{P}V$ в гиперплоскость $H_v \subset W^*$, состоящую из многочленов, равных нулю в точке $[v]$ (или, иначе, в линейный функционал на W^*, ставящий в соответствие многочлену его значение в точке $[v]$).

Имея это в виду, для каждой пары таких натуральных чисел k, l, что $k + l = n$, рассмотрим отображение (обычное умножение многочленов на V)

$$\operatorname{Sym}^k V^* \otimes \operatorname{Sym}^l V^* \to \operatorname{Sym}^n V^* = W^*.$$

Возьмем двойственное отображение

$$\mu\colon W \to \operatorname{Sym}^k V \otimes \operatorname{Sym}^l V$$

и рассмотрим его как $(k+1) \times (l+1)$-матрицу Ω_k линейных форм на $\mathbb{P}W$. Мы сейчас покажем, что детерминантальное многообразие ранга 1 матрицы Ω_k — это нормальная рациональная кривая $C \subset \mathbb{P}W$. Это эквивалентно тому, что для каждого линейного функционала $\varphi\colon \operatorname{Sym}^n V^* \to K$ на W^* билинейная форма $B_\varphi\colon \operatorname{Sym}^k V^* \times \operatorname{Sym}^l V^* \to K$, определенная как сквозное отображение

$$\operatorname{Sym}^k V^* \times \operatorname{Sym}^l V^* \to \operatorname{Sym}^n V^* \to K,$$

имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда φ является функционалом «значение в точке $p \in \mathbb{P}V$». Ясно, что если форма φ имеет такой вид, то B_φ имеет ранг 1 и каждое из ее ядер (в $\operatorname{Sym}^k V^*$ или $\operatorname{Sym}^l V^*$) есть подпространство многочленов из $\operatorname{Sym}^k V^*$ или $\operatorname{Sym}^l V^*$, равных 0 в точке p. Обратно, если B_φ имеет ранг 1, то его ядро в $\operatorname{Sym}^k V^*$ — такое подпространство U, что образ $U \times \operatorname{Sym}^l V^*$ в $\operatorname{Sym}^n V^*$ содержится в гиперплоскости. По лемме 9.8, которая будет доказана ниже, U является подпространством многочленов, равных нулю в некоторой точке $p \in \mathbb{P}^1$, так что образ $U \times \mathrm{Sym}^l V^*$ в $\mathrm{Sym}^n V^*$ — подпространство многочленов, обращающихся в нуль в p, то есть функционал φ имеет вид «значение в p».

Заметим теперь, что представления C как множества точек, в которых матрицы вида Ω_k имеют ранг 1, — это различные детерминантальные описания нормальной рациональной кривой из примера 1.16; в частности, C является детерминантальным многообразием, построенным по $(2 \times n)$-матрице Ω_1, двойственной к отображению

$$V^* \otimes \mathrm{Sym}^{n-1} V^* \to \mathrm{Sym}^n V^*,$$

а эта матрица и есть наша матрица Ω.

В упражнении 1.25 мы также утверждали, что детерминантальным многообразием матрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \ldots & L_n \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_n \end{pmatrix},$$

где для любой точки $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ линейные формы $\lambda L_1 + \mu M_1, \ldots$ $\ldots, \lambda L_n + \mu M_n$ линейно независимы, является нормальная рациональная кривая. Доказывалось это просто: для каждой точки $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ уравнения

$$\lambda L_1 + \mu M_1 = \ldots = \lambda L_n + \mu M_n = 0$$

определяют точку $p_{[\lambda,\mu]} \in \mathbb{P}^n$, а отображение, переводящее $[\lambda, \mu]$ в $p_{[\lambda,\mu]}$, задается некоторым базисом многочленов степени n на $\mathbb{P}^1$. Условие линейной независимости можно выразить и проще: можно сказать, что все сопряженные к Ω матрицы не имеют нулевых элементов. Это условие можно применить к матрицам произвольного размера; матрицы, для которых оно выполнено, называются 1-*общими*. Определим *обобщенную строку* матрицы Ω как строку какой-то сопряженной ей матрицы (то есть линейную комбинацию строк из Ω). Таким образом, множество точек нормальной рациональной кривой C, которое мы определяли как детерминантальное многообразие 1-общей матрицы Ω, можно определить как множество нулей обобщенных строк матрицы Ω.

Аналогично определяются *обобщенный столбец* и *обобщенная* $(a \times b)$-*подматрица*. В частности, условие 1-общности может быть усилено: будем говорить, что матрица линейных форм Ω является l-*общей*, если элементы каждой ее обобщенной $(l \times l)$-подматрицы линейно независимы. Определенное таким образом условие общности матрицы тесно связано с геометрией ее детерминантальных многообразий (см., например, [E1]).

Пусть, наконец, Ω — 1-общая $(2 \times n)$-матрица линейных форм на $\mathbb{P}^n$, и пусть $C \cong \mathbb{P}^1$ — ее детерминантальное многообразие. Как отмечалось, обобщенным строкам матрицы Ω соответствуют точки кривой C: для каждой точки $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ общие нули линейных форм $\lambda L_j + \mu M_j$ задают точку $p_{[\lambda,\mu]} \in C$. Сейчас мы покажем, что множество нулей обобщенного столбца состоит из $n-1$ точки на C; точнее говоря, элементы обобщенного столбца матрицы Ω являются многочленами степени n на $C \cong \mathbb{P}^1$, имеющими $n-1$ общий нуль.

Для этого заметим, что элемент L_j матрицы Ω является линейной формой на $\mathbb{P}^n$, то есть его ограничение на $C \cong \mathbb{P}^1$ дает многочлен степени n на $\mathbb{P}^1$, и что точка $p_{[1,0]}$ является нулем этого многочлена. С другой стороны, каждый из оставшихся $n-1$ корней $p_{[\lambda,\mu]}$, где $\mu \neq 0$, является также и корнем M_j, то есть элементам столбцов матрицы Ω соответствуют многочлены на C, имеющие $n-1$ общий корень (дополнительного рассуждения требует случай кратного корня $p_{[1,0]}$).

Таким образом, мы убедились, что общим столбцам Ω взаимно однозначно соответствуют многочлены степени $n-1$ на C (с точностью до умножения на скаляр). В частности, по данной точке $[X, Y]$ на $C \cong \mathbb{P}^1$ умножением слева на (2×2)-матрицу из скаляров строки матрицы Ω можно привести к виду, соответствующему точкам $X = 0$ и $Y = 0$, а затем умножением справа на $(n \times n)$-матрицу из скаляров привести столбцы к виду, соответствующему многочленам $X^{n-1}, X^{n-2}Y, \ldots, Y^{n-1}$. Выбрав теперь на $\mathbb{P}^n$ однородные координаты $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ соответствующими многочленам $X^n, X^{n-1}Y, \ldots, Y^n$, мы приведем матрицу Ω к стандартной форме $L_i = Z_{i-1}$, $M_i = Z_i$, указанной выше. Все это можно подытожить в следующем предложении.

Предложение 9.4. *Всякая 1-общая $(2 \times n)$-матрица линейных форм на $\mathbb{P}^n$ сопряжена матрице*

$$\Omega(Z) = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_{n-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_n \end{pmatrix}.$$

Упражнение 9.5. Покажите, что если матрица линейных форм на $\mathbb{P}^n$ не является 1-общей, но у нее существует обобщенная строка с линейно независимыми элементами, то ее детерминантальное многообразие является объединением нормальной рациональной кривой C, содержащейся в некотором собственном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^n$, и прямых, пересекающих C. Используя это, покажите, что, хотя по предложению 9.4 во множестве матриц линейных форм на $\mathbb{P}^n$ размера $2 \times n$ существует открытое подмножество, состоящее из сопряженных друг другу матриц, существует бесконечное количество классов сопряженности матриц.

Пример 9.6. Многообразия секущих нормальных рациональных кривых

Пример 1.16 можно обобщить и дать детерминантальное описание многообразий секущих нормальной рациональной кривой. Это нам пригодится в примере 9.10.

Предложение 9.7. *Если l — натуральное число, для которого $l \leqslant \alpha$, $l \leqslant d - \alpha$, то l-детерминантальное многообразие матрицы*

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{d-\alpha} \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & \ldots & Z_{d-\alpha+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_\alpha & Z_{\alpha+1} & \ldots & \ldots & Z_d \end{pmatrix}$$

является многообразием $(l-1)$-секущих для нормальной рациональной кривой $C \subset \mathbb{P}^d$ (это многообразие обозначается $S_{l-1}(C)$).

Доказательство. Мы докажем предложение при $l = 2$ (для произвольных l см. упражнение 9.9). Ключевой в нашем доказательстве будет следующая лемма.

Лемма 9.8. *Пусть S_d — векторное пространство многочленов степени d на $\mathbb{P}^1$, а $V \subsetneq S_d$ — отличное от S_d линейное подпространство без общих нулей. Пусть $W = S_1 \cdot V$ — подпространство многочленов степени $d+1$, порожденное всевозможными произведениями элементов $F \in V$ на линейные формы. Тогда*

$$\dim(W) \geqslant \dim(V) + 2.$$

Доказательство леммы. Основное наблюдение состоит в том, что если подпространство $V \subset S_d$ имеет размерность k, $p \in \mathbb{P}^1$ и $\mathrm{Ord}_p(V)$ — множество порядков нулей (ненулевых) элементов V в точке p, то множество $\mathrm{Ord}_p(V)$ содержит ровно k элементов.

В частности, если размерность пространства $W = S_1 \cdot V$ меньше $k+2$, то, так как у V нет общих нулей, имеем

$$\mathrm{Ord}_p(W) \supset \mathrm{Ord}_p(V) \cup (\mathrm{Ord}_p(V) + 1),$$

а значит,

$$\mathrm{Ord}_p(V) = \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

и

$$\mathrm{Ord}_p(W) = \{0, 1, \ldots, k-1, k\}.$$

Из первого утверждения следует, что в пространстве V можно найти такой базис $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$, что $\mathrm{ord}_p(F_\alpha) = k - \alpha$ для любого α, где p — нуль линейной формы X. Рассмотрим теперь многочлены XF_1, YF_1, $XF_2 \in W$, где Y — некоторая линейная форма. Порядок нуля каждого из них в точке p не меньше $k-1$, и по второму утверждению они линейно зависимы: существуют такие a_1, b_1. a_2, что

$$a_1 \cdot XF_1 + b_1 \cdot YF_1 + a_2 \cdot XF_2 \equiv 0.$$

Так как XF_1 и YF_1 линейно независимы, коэффициент a_2 не равен нулю, и, следовательно, F_1 и F_2 имеют общий делитель степени $d-1$. Аналогично, так как XF_1, YF_1, XF_2, YF_2 и XF_3 имеют порядок не меньше $k-2$ в точке p, существует линейное соотношение между ними

$$a_1 \cdot XF_1 + b_1 \cdot YF_1 + a_2 \cdot XF_2 + b_2 \cdot YF_2 + a_3 \cdot XF_3 \equiv 0,$$

где $a_3 \neq 0$. Отсюда заключаем, что у F_1, F_2 и F_3 есть общий делитель степени не меньше $d-2$. Продолжая в том же духе, получаем, что $F_1, \ldots, F_\alpha$ имеют как минимум $d-\alpha+1$ общих нулей. Отсюда, так как V по условию не имеет общих нулей, мы заключаем, что V — пространство всех многочленов степени d. Противоречие. □

Предположим теперь, что у нас есть такая точка $[Z_0, \ldots, Z_d] \in \mathbb{P}^d$, что матрица

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{d-\alpha} \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & \ldots & Z_{d-\alpha+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_\alpha & Z_{\alpha+1} & \ldots & \ldots & Z_d \end{pmatrix}$$

имеет ранг не больше двух. Если рассматривать $\mathbb{P}^d = \mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^d V$ как пространство линейных функционалов на пространстве S_d многочленов степени d на $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}V$, то точка $(Z_0, \ldots, Z_d)$ является таким линейным функционалом

$$\varphi\colon S_d \to K$$

на S_d, что композиция

$$S_\alpha \times S_{d-\alpha} \xrightarrow{m} S_d \xrightarrow{\varphi} K,$$

где m — умножение, имеет ранг 2. А это означает, что существуют такие подпространства $V_1 \subset S_\alpha$ и $V_2 \subset S_{d-\alpha}$, каждое коразмерности 2, что произведения $V_1 \cdot S_{d-\alpha}$ и $S_\alpha \cdot V_2$ лежат в ядре $V \subset S_d$ отображения φ. Если $V_1 \cdot S_{d-\alpha}$ или $S_\alpha \cdot V_2$ равно V, то по нашей лемме V имеет общий нуль, то есть $[\varphi]$ — точка на нормальной рациональной кривой. С другой стороны, если $W_1 = V_1 \cdot S_{d-\alpha}$ и $W_2 = S_\alpha \cdot V_2$ имеют коразмерность 2 в S_d, то они оба должны иметь общий делитель P_i степени 2: в самом деле, они должны совпадать с пространством многочленов степени d, делящихся на P_i.

Далее, так как W_i не порождают S_d, они либо совпадают, либо пересекаются по подпространству коразмерности 3 в S_d, а вместе порождают V. Во втором случае многочлены P_i имеют общий корень, который, очевидно, будет и общем корнем многочленов из V, так что $[\varphi]$ опять будет точкой на нормальной рациональной кривой. В первом же случае φ будет линейной формой на S_d, равной нулю на пространстве многочленов, делящихся на $P = P_1 = P_2$, то есть если P имеет два различных корня q и r, то φ представляется в виде линейной комбинации

$$\varphi(F) = a \cdot F(q) + b \cdot F(r)$$

линейных форм, задающихся взятием значений в точках q и r. Таким образом, оказывается, что $[\varphi]$ — это точка на многообразии секущих нормальной рациональной кривой. Наконец, если P имеет двойной корень q, то нетрудно проверить, что $[\varphi]$ лежит в замыкании множества форм вида $\varphi(F) = a \cdot F(q) + b \cdot F(r)$ при $r \in \mathbb{P}^1$. □

Заметим в качестве следствия, что для любой точки $[Z_0, \ldots, Z_d] \in \mathbb{P}^d$ ранг l матрицы

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{d-\alpha} \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & \ldots & Z_{d-\alpha+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_\alpha & Z_{\alpha+1} & \ldots & \ldots & Z_d \end{pmatrix}$$

не зависит от α (при условии, что $l \leqslant \alpha \leqslant d - l$): вообще говоря, l на единицу больше размерности минимальной секущей плоскости к нормальной рациональной кривой, содержащей точку $[Z_0, \ldots, Z_d]$.

Упражнение 9.9. Докажите подобным образом предложение 9.7 в общем случае.

Пример 9.10. Нормальные рациональные свитки, III

Рассмотрим 1-общую матрицу размера $2 \times k$

$$\Omega(Z) = \begin{pmatrix} L_1(Z) & \ldots & L_k(Z) \\ M_1(Z) & \ldots & M_k(Z) \end{pmatrix},$$

состоящую из линейных форм на $\mathbb{P}^n$, и соответствующее детерминантальное многообразие

$$\Psi = \{[Z] \mid \operatorname{rank} \Omega(Z) = 1\}.$$

Чтобы описать Ψ, заметим, что для любого однородного 2-вектора $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ геометрическое место общих нулей обобщенной строки матрицы Ω

$$\Lambda_{[\lambda,\mu]} = \{[Z] \mid \lambda L_1(Z) + \mu M_1(Z) = \ldots = \lambda L_k(Z) + \mu M_k(Z) = 0\}$$

есть линейное пространство $\mathbb{P}^{n-k}$ в $\mathbb{P}^n$, так что многообразие Ψ — это объединение таких линейных пространств по всем $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$. Мы знаем, что в случае $k = n$ наше детерминантальное многообразие является нормальной рациональной кривой, а в случае $k = 2$ — квадрикой ранга 3 или 4. Оказывается, верен и более сильный факт: в общем случае многообразие Ψ является нормальным рациональным свитком размерности $n - k + 1$, что мы сейчас и докажем.

В дальнейшем мы сосредоточимся на случае $k = n - 1$; общий случай отличается только более сложными обозначениями. Для начала же покажем, что, наоборот, любой двумерный нормальный рациональный свиток является детерминантальным многообразием.

Упражнение 9.11. Покажите, что детерминантальное многообразие

$$\Psi = \left\{ [Z] \mid \operatorname{rank} \begin{pmatrix} Z_0 & \dots & Z_{l-1} & Z_{l+1} & \dots & Z_{n-1} \\ Z_1 & \dots & Z_l & Z_{l+2} & \dots & Z_n \end{pmatrix} \leqslant 1 \right\}$$

является нормальным рациональным свитком $X_{l,n-l-1} \subset \mathbb{P}^n$.

Коль скоро это доказано, наше основное утверждение содержится в следующем предложении.

Предложение 9.12. *Всякая* 1*-общая* $2 \times (n-1)$*-матрица* Ω*, состоящая из линейных форм на* $\mathbb{P}^n$*, сопряжена матрице*

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} Z_0 & \dots & Z_{l-1} & Z_{l+1} & \dots & Z_{n-1} \\ Z_1 & \dots & Z_l & Z_{l+2} & \dots & Z_n \end{pmatrix}$$

для некоторого l*.*

Доказательство. Для начала заметим, что если $H \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ — общая гиперплоскость, то ограничение Ω на H будет снова 1-общей матрицей; это эквивалентно тому, что H не содержит прямых $\Lambda_{[\lambda,\mu]}$, задающихся обобщенными строками матрицы Ω. Если H задается линейной формой W, то по модулю W матрицу Ω можно привести к нормальной форме, как в предложении 9.4; иными словами, Ω сопряжена матрице вида

$$\begin{pmatrix} Z_1 + a_{1,1}W & Z_2 + a_{1,2}W & \dots & Z_{n-1} + a_{1,n-1}W \\ Z_2 + a_{2,1}W & Z_3 + a_{2,2}W & \dots & Z_n + a_{2,n-1}W \end{pmatrix}.$$

Простым преобразованием переменных Z_i эта матрица приводится к виду

$$\begin{pmatrix} Z_1 + a_1 W & Z_2 + a_2 W & \dots & Z_{n-1} + a_{n-1}W \\ Z_2 & Z_3 & \dots & Z_n \end{pmatrix}.$$

Нам нужно теперь умножить ее справа на обратимую $(n-1) \times (n-1)$-матрицу скаляров $B = (b_{i,j})$, чтобы она приняла требуемую форму, то есть чтобы $(k+1)$-й элемент первой строки равнялся k-му элементу второй, за исключением одного значения k между 1 и $n-2$. Каждое такое требование накладывает линейное условие на $b_{i,j}$; к примеру, первое утверждает, что

$$b_{1,1}=b_{2,2},\ b_{2,1}=b_{3,2},\ \ldots,\ b_{n-2,1}=b_{n-1,2},\ b_{1,2}=b_{n-1,1}=0 \quad \text{и} \quad a_1b_{1,2}+a_2b_{2,2}+\ldots+a_{n-1}b_{n-1,2}=0, \qquad (*_1)$$

а k-е — что

$$b_{1,k}=b_{2,k+1},\ b_{2,k}=b_{3,k+1},\ \ldots,\ b_{n-2,k}=b_{n-1,k+1},\ b_{1,k+1}=b_{n-1,k}=0 \quad \text{и} \quad a_1b_{1,k+1}+a_2b_{2,k+1}+\ldots+a_{n-1}b_{n-1,k+1}=0. \qquad (*_k)$$

Из того, что соотношения $(*_k)$ выполнены для всех значений k, кроме l, следует, что матрица B постоянна вдоль всех диагоналей (с возможным скачком между l-м и $(l+1)$-м столбцом), имеет нули в первой и последней строке (кроме первого и $(l+1)$-го элементов первой строки и l-го и последнего элементов последней), а ее столбцы (кроме первого и $(l+1)$-го) ортогональны к $(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Таким образом, B имеет вид

$$\begin{pmatrix}
b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0\\
b_2 & b_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & 0\\
b_3 & b_2 & b_1 & 0 & 0 & c_3 & c_2 & c_1\\
b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 0 & c_4 & c_3 & c_2\\
0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & c_5 & c_4 & c_3\\
0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & c_6 & c_5 & c_4\\
0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & 0 & c_6 & c_5\\
0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & c_6
\end{pmatrix}.$$

В частности, B однозначно определяется парой векторов $b=(b_1, \ldots, b_{n-l})$ и $c=(c_1, \ldots, c_{l+1})$ из первого и $(l+1)$-го столбца (в нашем примере $n=9$ и $l=5$). Теперь для каждого m положим

$$A_m=\begin{pmatrix}
a_2 & a_3 & \ldots & a_{m+1}\\
a_3 & a_4 & \ldots & a_{m+2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n-m} & \ldots & \ldots & a_{n-1}
\end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения $(*_k)$ утверждают, что векторы b и c лежат в ядрах матриц A_{n-l} и A_{l+1} соответственно. Таким образом, в качестве l можно взять наименьшее целое число, обладающее тем свойством, что матрица A_{l+1} имеет ядро (по очевидным соображениям размерности l должно быть не больше $(n-1)/2$), и положить $c \in \operatorname{Ker}(A_{l+1})$ равным любому ненулевому вектору; аналогично, мы можем положить b равным общему элементу из $\mathrm{Ker}(A_{n-l})$, размерность ядра которого, очевидно, не меньше $n-2l-1 \geqslant 2$ (в «предельном» случае $l+1=n-l$ в качестве b и c можно взять базис пространства $\mathrm{Ker}(A_{l+1})$).

Осталось показать, что построенная таким образом матрица B невырождена. Для этого вспомним предложение 9.7, которое описывает ранг матриц вида A_m в терминах расположения точки $A=[a_2, \ldots a_{n-1}]$ на многообразии секущих к нормальной рациональной кривой

$$C = \{[1, t, t^2, \ldots, t^{n-3}] \mid t \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^{n-3}.$$

Конкретнее, предложение 9.7 интерпретирует l как наименьшее целое число, обладающее тем свойством, что A лежит на l-секущей плоскости $\overline{p_1, \ldots, p_l}$ к C: в самом деле, доказательство показывает, что вектор b есть вектор коэффициентов многочлена P степени l с нулями в точках p_i. Далее, для любого m из интервала $[l;\ n-2-l]$ точка A не лежит ни на одной m-секущей плоскости к C, кроме тех, что содержат плоскость $\overline{p_1, \ldots, p_l}$ (рассмотрите проекцию C вдоль плоскости $\overline{p_1, \ldots, p_{l-1}}$: ее образом снова будет нормальная рациональная кривая $\overline{C}$ в $\mathbb{P}^{n-l-2}$, точка A перейдет в точку p_l, которая не может лежать на секущей плоскости $\overline{q_1, \ldots, q_m}$ к $\overline{C}$ для $m \leqslant n-l-1$, за исключением случая, когда $q_i = p_l$ для некоторого i). Точно так же, однако, A лежит на многих m-секущих плоскостях $\overline{q_1, \ldots, q_m}$, где $\{q_1, \ldots, q_m\}$ не пересекается с $\{p_1, \ldots, p_l\}$; стало быть, общий элемент ядра матрицы A_{n-l} — это вектор коэффициентов многочлена Q с нулями $q_1, \ldots, q_{n-l-1}$, не лежащими в $\{p_1, \ldots, p_l\}$.

Теперь по лемме 3.6 матрица B невырождена, что и требовалось доказать. □

Упражнение 9.13. Сформулируйте и докажите обобщения упражнения 9.11 и предложения 9.12 для $(2 \times k)$-матриц линейных форм на $\mathbb{P}^n$ и нормальных рациональных свитков.

Упражнение 9.14. Используя упражнение 9.13, убедитесь в корректности описания нормальных рациональных свитков, данного в примере 8.39.

Заметим также, что поскольку все детерминантальные многообразия $\Psi \subset \mathbb{P}^n$, задающиеся матрицами линейных форм, являются пересечениями общих детерминантальных многообразий $M_k \subset M$ с линейными подпространствами в M, из упражнения 9.11 и предложения 9.12 следуют упражнения 8.18 и 8.28. И вообще, мы можем заключить, что любой нормальный рациональный свиток является пересечением многообразия Сегре $\Sigma_{k,1} = \sigma(\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ с некоторым линейным подпространством $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{2k+1}$.

Существует другое доказательство предложения 9.12 (вернее сказать, обобщение доказанного на матрицы размера $2 \times k$ с произвольным k), сообщенное мне Франком Шрейером (Frank Schreyer). Как и раньше, рассмотрим 1-общую $(2 \times k)$-матрицу

$$\Omega(Z) = \begin{pmatrix} L_1(Z) & \dots & L_k(Z) \\ M_1(Z) & \dots & M_k(Z) \end{pmatrix},$$

состоящую из линейных форм на $\mathbb{P}^n$. Предположим, что элементы матрицы Ω вместе порождают векторное пространство W линейных форм на $\mathbb{P}^n$. Покажем, что эта матрица сопряжена матрице

$$\Omega_a = \left(\begin{array}{c|c|c|c} Z_0 \dots Z_{a_1-1} & Z_{a_1+1} \dots Z_{a_2-1} & Z_{a_2+1} \dots Z_{a_l-1} & Z_{a_l+1} \dots Z_{n-1} \\ Z_1 \dots Z_{a_1} & Z_{a_1+2} \dots Z_{a_2} & Z_{a_2+2} \dots Z_{a_l} & Z_{a_l+2} \dots Z_n \end{array}\right)$$

для некоторой последовательности $a_1, \dots, a_l$ ($l = n - k$), то есть матрице, состоящей из $l + 1$ блока размера $2 \times a_1, \dots, 2 \times (n - a_l - 1)$, каждый из которых является *каталектическим*, то есть матрицей A со свойством «$a_{i,j+1} = a_{i+1,j}$ для всех i, j». (Заметим в качестве немедленного следствия, что если элементы Ω порождают подпространство W размерности $m + 1 < n + 1$, то можно привести Ω к такому же виду, где вместо n будет m, а вместо l будет $m - k$.)

Доказательство. Пусть $U_1 \subset W$ порождается элементами первой строки матрицы Ω, а U_2 — элементами второй; по предположению, матрица Ω является 1-общей, так что размерность каждого из U_i равна k. Значит, пересечение $U_1 \cap U_2$ имеет размерность $2k - n - 1$, и, умножив Ω справа на подходящую $(k \times k)$-матрицу, мы можем считать, что пересечение $U_1 \cap U_2$ порождается элементами $M_1, \dots, M_{2k-n-1}$. Пусть Ω' — подматрица, состоящая из первых $2k - n - 1 < k$ столбцов матрицы Ω. Тогда Ω' снова является 1-общей, и, применяя индукцию по k, можно сделать такую замену переменных Z_i и умножить слева и справа Ω на такие матрицы, что матрица Ω' примет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} Z_0 \dots Z_{b_1-1} & Z_{b_1+1} \dots Z_{b_2-1} & Z_{b_2+1} \dots Z_{b_{l'}-1} & Z_{b_{l'}+1} \dots Z_{n'-1} \\ Z_1 \dots Z_{b_1} & Z_{b_1+2} \dots Z_{b_2} & Z_{b_2+2} \dots Z_{b_{l'}} & Z_{b_{l'}+2} \dots Z_{n'} \end{array}\right),$$

где $n' + 1$ — размерность пространства, порожденного элементами матрицы Ω', а $l' = n' - (2k - n - 1)$.

Рассмотрим теперь оставшиеся $n + 1 - k$ столбцов матрицы Ω. В частности, рассмотрим переменные Z_{b_i}, $i = 1, \dots, l'$, и $Z_{n'}$: по построению они лежат в пространстве U_1, порожденном элементами верхней строки матрицы Ω, однако пространство, порожденное ими, не пересекается с пространством, порожденным элементами первой строки матрицы Ω'. Следовательно, умножив справа матрицу Ω на подходящую скалярную матрицу так, чтобы матрица Ω' не изменилась, можно перевести эти переменные в следующие $l'+1$ элементов первой строки матрицы Ω.

Каковы нижние элементы соответствующих столбцов? Нам известно, что они независимы по модулю пространства, порожденного элементами Ω', так что их можно принять за координаты Z_α, $\alpha > n'$. Но тогда эти столбцы можно вставить в конец соответствующего $(l'+1)$-блока матрицы Ω'; после очевидной замены координат подматрица Ω'', состоящая из первых $(2k-n-1)+(l'+1)=n'+1$ столбцов Ω, примет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} Z_0 \dots Z_{a_1-1} & Z_{a_1+1} \dots Z_{a_2-1} & Z_{a_2+1} \dots Z_{a_{l'}-1} & Z_{a_{l'}+1} \dots Z_{n'+l'} \\ Z_1 \dots Z_{a_1} & Z_{a_1+2} \dots Z_{a_2} & Z_{a_2+2} \dots Z_{a_{l'}} & Z_{a_{l'}+2} \dots Z_{n'+l'+1} \end{array}\right),$$

где $a_i = b_i + i$.

Наконец, рассмотрим оставшиеся $k-(n'+1)$ столбцов матрицы Ω. Элементы первых $n'+1$ столбцов порождают подпространство размерности $n'+l'+2$ в $(n+1)$-мерном пространстве W, а по предположению элементы Ω порождают все W. Так как

$$n+1-(n'+l'+2) = n+1-(n'+(n'-(2k-n-1))+2) = 2(k-(n'+1)),$$

элементы последних столбцов независимы по модулю элементов Ω''. Значит, их можно принять за координаты $Z_{n'+l'+2}, \dots, Z_{n'}$ и интерпретировать эти столбцы как

$$l - l' = k - (n'+1)$$

блоков ширины 1. Итак, матрица приведена к требуемому виду. □

Геометрический смысл этого рассуждения таков: 1) предполагается, что детерминантальное многообразие ранга 1 матрицы Ω не является конусом; 2) это многообразие, заметаемое однопараметрическим семейством плоскостей размерности $n-k$, проектируется из одной из таких плоскостей; 3) если получившееся многообразие оказывается конусом, то рассматривается проекция из вершины этого конуса.

Пример 9.15. Нормальные рациональные свитки, IV

Данное выше описание нормальных рациональных свитков приводит к другой классической их конструкции (на самом деле оно ей и эквивалентно). Эта конструкция аналогична описанию скрученной кубики как остаточного пересечения двух квадрик, содержащих прямую $L \subset \mathbb{P}^3$. (Пусть у нас есть такой набор многообразий $X_i \subset \mathbb{P}^n$, содержащих многообразие $Z \subset \mathbb{P}^n$, что Z является неприводимой компонентой их пересечения. Тогда *остаточным пересечением* многообразий X_i называется объединение остальных неприводимых компонент пересечения многообразий X_i.)

Пусть сначала у нас есть k-мерный нормальный рациональный свиток $X \subset \mathbb{P}^n$, заданный как детерминантальное многообразие матрицы линейных форм

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_1(Z) & \dots & L_{n-k+1}(Z) \\ M_1(Z) & \dots & M_{n-k+1}(Z) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ — $(n-2)$-мерная плоскость, задающаяся формами, стоящими в первом столбце матрицы Γ. Тогда для любой точки $[Z] \in \mathbb{P}^n \setminus \Lambda$ матрица Γ имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда оставшиеся столбцы пропорциональны первому, то есть когда ее $(1, j)$-миноры равны нулю при $j = 2, \dots, n-k+1$. Таким образом, если Q_j — квадрика, определяемая минором $(1, j)$, то

$$Q_2 \cap Q_3 \cap \dots \cap Q_{n-k+1} = \Lambda \cup X.$$

Говоря словами, X является остаточным пересечением $n-k$ квадрик, содержащих $(n-2)$-плоскость $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$.

Оказывается, верно и обратное утверждение. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ — подпространство коразмерности 2, а $Q_2, \dots, Q_{n-k+1}$ — набор квадрик, содержащих Λ. Тогда идеал Λ порожден двумя линейными формами $L_1(Z)$ и $M_1(Z)$, так что каждую Q_j можно записать в виде линейной комбинации L_1 и M_1 с однородными линейными коэффициентами:

$$Q_j(Z) = M_j(Z) \cdot L_1(Z) - L_j(Z) \cdot M_1(Z).$$

Значит, пересечение Q_j задается (вне Λ) тем условием, что матрица

$$\begin{pmatrix} L_1(Z) & \dots & L_{n-k+1}(Z) \\ M_1(Z) & \dots & M_{n-k+1}(Z) \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1, которое, если только матрица удовлетворяет условию независимости, задает нормальный рациональный свиток.

Упражнение 9.16. Покажите, что если $Q_2, \dots, Q_{n-k+1}$ — общие квадрики, содержащие Λ, то матрица Γ удовлетворяет условию независимости; выведите отсюда, что остаточное пересечение общих квадрик, содержащих $(n-2)$-плоскость $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$, является нормальным рациональным свитком.

Похожую идею можно использовать для остроумного решения упражнения 1.11, в котором требовалось доказать, что, наоборот, две квадрики Q_1 и Q_2, содержащие скрученную кубику $C \subset \mathbb{P}^3$, пересекаются по объединению C и прямой. Чтобы это показать, представим скрученную кубику в виде детерминантального многообразия матрицы

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда каждая квадрика Q_μ, содержащая скрученную кубику, может быть представлена в виде линейной комбинации (2×2)-миноров этой матрицы, то есть в виде определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

(коэффициенты μ_i — не те, что в упражнении 1.11). Множество вне C, где два таких определителя равны нулю, задается, таким образом, тем условием, что (4×3)-матрица

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $\leqslant 2$, то есть, так как векторы μ и ν независимы, задается двумя минорами

$$\begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \mu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0$$

и, следовательно, является прямой.

Более общие детерминантальные многообразия

Обобщая далее, предположим, что $\{F_{i,j}\}$ — матрица размера $m \times n$, состоящая из таких однородных многочленов на многообразии $X \subset \mathbb{P}^k$, что $\deg(F_{i,j}) = d_{i,j}$, и предположим, что для некоторой пары последовательностей целых чисел $\{e_1, \ldots, e_m\}$ и $\{f_1, \ldots, f_n\}$ выполняется равенство $d_{i,j} = e_i - f_j$ (например, так будет, если степени $F_{i,j}$ постоянны вдоль столбцов или строк). В этом случае миноры матрицы $(F_{i,j})$ являются однородными многочленами, и многообразие, которые они задают, называется детерминантальным подмногообразием в X. (Для тех, кто знаком с понятием векторного расслоения, можно сказать, что и это определение является частным случаем более общего: детерминантальное подмногообразие в X можно определить как множество точек, в которых отображение векторных расслоений $\varphi\colon E \to F$ имеет ранг не больше k.)

Упражнение 9.17. Пусть $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ — поверхность Сегре $Z_0Z_3 - Z_1Z_2 = 0$, а кривая $C \subset S$ задается биоднородным уравнением $F(X, Y)$ степени $(m, m-1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Покажите. что $C \subset \mathbb{P}^3$ можно задать как детерминантальное многообразие вида

$$C = \left\{ [Z] \mid \operatorname{rank} \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & G(Z) \\ Z_2 & Z_3 & H(Z) \end{pmatrix} \leqslant 1 \right\},$$

где G и H — однородные многочлены степени $m-1$; покажите, что верно и обратное.

После таких обобщений понятия детерминантального многообразия к читателю может закрасться мысль, что любое многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ может быть реализовано как детерминантальное. Это, конечно, верно в тривиальном смысле: если X задается однородными многочленами $F_1, \ldots, F_k$, то оно является детерминантальным многообразием матрицы $(F_1, \ldots, F_k)$ размера $1 \times k$. Однако, как показывает следующий пример, неверно, что каждое многообразие может быть представлено как нетривиальное детерминантальное.

Упражнение 9.18. Покажите, что для достаточно большого d существует поверхность степени d в $\mathbb{P}^3$, не задающаяся как детерминант $(d \times d)$-матрицы из линейных форм.

Симметрические и кососимметрические детерминантальные многообразия

Упомянем еще один класс детерминантальных многообразий, определяющийся аналогично, — симметрические и кососимметрические детерминантальные многообразия. Мы приведем несколько примеров таких многообразий, встречавшихся нам ранее в другом контексте.

Упражнение 9.19. Покажите, что квадратичное многообразие Веронезе $\nu_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{(n+1)(n+2)/2-1}$ является множеством точек, в которых некоторая симметрическая $(n+1) \times (n+1)$-матрица линейных форм на $\mathbb{P}^{(n+1)(n+2)/2-1}$ имеет ранг 1.

Упражнение 9.20. Покажите, что грассманиан $\mathbb{G}(1, n) \subset \mathbb{P}^{n(n+1)/2-1}$ задается как множество точек, в которых некоторая кососимметрическая $(n+1) \times (n+1)$-матрица линейных форм на $\mathbb{P}^{n(n+1)/2-1}$ имеет ранг 2.

Так же как и в случае многообразий Сегре, детерминантальное описание многообразий Веронезе и грассманианов позволяет описать их многообразия секущих как детерминантальные.

Заметим напоследок, что упражнение 9.19 вместе с упражнением 2.9 позволяют нам заключить, что любое проективное многообразие изоморфно детерминантальному многообразию, задаваемому матрицей линейных форм.

Пример 9.21. Многообразия Фано детерминантальных многообразий

Мы сейчас подошли к интересной задаче — описанию линейных пространств, лежащих на детерминантальных многообразиях, или, другими словами, векторных пространств матриц маленького ранга. Точнее говоря, если M_k — многообразие матриц ранга не больше k в проективном пространстве M матриц размера $m \times n$, то нас интересует описание многообразия $F_l(M_k)$, состоящего из l-плоскостей на M_k.

Начнем с простейшего случая — с многообразия M_1 матриц ранга 1. Как мы видели, оно является многообразием Сегре $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{mn-1}$; отображение Сегре переводит слои проекций $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ на оба сомножителя в линейные подпространства $\mathbb{P}^{n-1}$ и $\mathbb{P}^{m-1} \subset \mathbb{P}^{mn-1}$ соответственно. Назовем эти семейства линейных пространств *образующими* многообразия Сегре M_1. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 9.22. *Любое линейное подпространство $\Lambda \subset M_1 \subset M \cong \mathbb{P}^{mn-1}$ содержится в какой-нибудь образующей многообразия M_1.*

Доказательство. На языке линейной алгебры утверждение теоремы состоит в том, что если $V \subset \operatorname{Hom}(K^m, K^n)$ — такое векторное пространство, что его элементы имеют ранг не более 1, то либо все ненулевые элементы V имеют одинаковое ядро, либо все они имеют одинаковый образ. Для доказательства теоремы предположим, что существуют два ненулевых элемента $A, B \in V$ с несовпадающими ядрами и образами. Это значит, что существуют два таких вектора $v, w \in K^m$, что $v \in \operatorname{Ker}(A)$ и $w \in \operatorname{Ker}(B)$, но не наоборот. Тогда если $B(v)$ и $A(w)$ линейно независимы, то любая линейная комбинация $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ с ненулевыми коэффициентами α и β будет иметь ранг 2. Значит, для любых двух элементов $A, B \in V$ либо ядро отображения $L_{\alpha,\beta} = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ постоянно, а образ $\operatorname{Im}(L_{\alpha,\beta})$ меняется в зависимости от $[\alpha, \beta]$, либо наоборот. В первом случае любой третий элемент должен иметь ядро, совпадающее с ядром всех $L_{\alpha,\beta}$, так как его образ может совпадать лишь с одним из таких элементов; во втором случае образ C должен совпадать с образом $L_{\alpha,\beta}$. □

Из доказанной теоремы следует, что если $m > n$, то многообразие Фано $F_{m-1}(M_1)$ изоморфно $\mathbb{P}^{n-1}$, а если $m = n$, то оно изоморфно несвязному объединению двух экземпляров $\mathbb{P}^{n-1}$.

Упражнение 9.23. Обобщая упражнение 6.8, покажите, что при $m>n$ плюккерово вложение грассманиана $\mathbb{G}(m-1, mn-1)$ в проективное пространство переводит подмногообразие $F_{m-1}(M_1) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ в многообразие Веронезе.

При $k \geqslant 2$ линейные пространства, лежащие на M_k, ведут себя менее регулярным образом. На M_2, к примеру, есть линейные пространства, определяющиеся аналогично образующим M_1: можно выбрать подпространство $V \cong K^{m-2} \subset K^m$ и рассмотреть пространство таких матриц A, что $\mathrm{Ker}(A) \supset V$, можно также выбрать $W \cong K^2 \subset K^n$ и рассмотреть пространство матриц, образ которых лежит в W, и наконец, можно выбрать гиперплоскость $V \subset K^m$ и прямую $W \subset K^n$ и рассмотреть пространство таких матриц A, что $A(V) \subset W$. Все они будут линейными подпространствами максимальной размерности в M_2. Однако, в отличие от M_1, ими дело не ограничивается: достаточно рассмотреть, к примеру, случай $m = n = 3$ и пространство кососимметрических матриц. Случаи $k = 2$, 3 или 4 на данный момент хорошо поняты, ответ в общем случае неизвестен.

Упражнение 9.24. Рассмотрим случай $m = n = 3$ и $k = 2$. (i) Покажите, что любое линейное пространство $\Lambda \cong \mathbb{P}^l \subset M_2$ размерности $l \geqslant 3$ содержится либо в пространстве матриц, имеющих общее ядро, либо в пространстве матриц, имеющих общий образ. (ii) Покажите, что любое линейное подпространство $\Lambda \cong \mathbb{P}^2 \subset M_2$ либо имеет один из вышеперечисленных типов, либо, после подходящей замены базиса, переходит в пространство кососимметрических матриц.

Лекция 10

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Как и в большинстве геометрических теорий, в классической алгебраической геометрии есть понятие группы. *Алгебраическая группа* определяется как многообразие X, снабженное регулярными отображениями

$$m\colon X \times X \to X$$

и

$$i\colon X \to X,$$

удовлетворяющими обычным свойствам умножения и обратного в группе (например, существует точка $e \in X$, для которой $m(e, p) = m(p, e) = p$ и $m(p, i(p)) = e$ для всех $p \in X$). Аналогично, *морфизм* алгебраических групп — регулярное отображение $G \to H$, которое одновременно является гомоморфизмом групп.

В качестве основных примеров можно привести следующие классические группы.

Пример 10.1. Полная линейная группа $\mathrm{GL}_n K$

Множество обратимых матриц размера $n \times n$ — это просто дополнение в линейном пространстве $\mathbb{A}^{n^2}$ всех $(n \times n)$-матриц к гиперповерхности, заданной условием равенства нулю определителя; стало быть, это — специальное открытое подмножество в $\mathbb{A}^{n^2}$ и, тем самым, также аффинное многообразие. Очевидно, что отображение умножения $\mathrm{GL}_n K \times \mathrm{GL}_n K \to \mathrm{GL}_n K$ регулярно; то, что взятие обратного тоже регулярно, следует из правила Крамера: для обратимой $(n \times n)$-матрицы A имеем

$$(A^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{j,i})/\det(A),$$

где $M_{j,i}$ — матрица, полученная из A вычеркиванием j-й строки и i-го столбца.

Подгруппа $\mathrm{SL}_n K \subset \mathrm{GL}_n K$ является подмногообразием, замкнутым относительно алгебраических операций, так что $\mathrm{SL}_n K$ — алгебраическая подгруппа[1]. Легко видеть, что факторгруппа $\mathrm{PGL}_n K \subset \mathbb{P}^{n^2-1}$

[1] Она называется *специальной линейной группой*. — *Прим. ред.*

(фактор группы $\mathrm{GL}_n K$ по ее центру — группе скалярных матриц) также является алгебраической.

Пример 10.2. Ортогональная группа $\mathrm{SO}_n K$ (в характеристике $\neq 2$)

Эта группа определяется как подгруппа в $\mathrm{SL}_n K$. Именно, предположим, что характеристика поля K не равна 2, и пусть Q — невырожденная симметричная билинейная форма

$$Q\colon V \times V \to K$$

на n-мерном векторном пространстве V. Рассмотрим подгруппу группы $\mathrm{SL}(V)$, заданную условием

$$\mathrm{SO}(V, Q) = \{A \in \mathrm{SL}(V) \mid Q(Av, Aw) = Q(v, w) \quad \forall v, w \in V\}.$$

Очевидно, что это подмногообразие в $\mathrm{SL}(V)$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного и, следовательно, является алгебраической группой. На самом деле из того, что A сохраняет форму Q, следует, что $\det A = \pm 1$, так что если разрешить матрице A лежать в $\mathrm{GL}(V)$, а не обязательно в $\mathrm{SL}(V)$, мы получим расширение $\mathrm{SO}(V, Q)$ с помощью $\mathbb{Z}/2$, обозначаемое просто $\mathrm{O}(V, Q)$.

Заметим, что с тем же успехом мы могли бы определить $\mathrm{SO}(V, Q)$ как подгруппу в $\mathrm{SL}(V)$, сохраняющую квадратичный многочлен $q(v) = Q(v, v)$ на V. Действительно, для любых $v, w \in V$ имеем

$$Q(v, w) = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2},$$

так что Q однозначно определяется по q. Поэтому если $A \in \mathrm{SL}(V)$ и $q(Av) = q(v)$ для всех $v \in V$, то $Q(Av, Aw) = Q(v, w)$ для всех $v, w \in V$, т.е. $A \in \mathrm{SO}(V, Q)$.

Если $V = K^n$ и форма Q определяется как обычное скалярное произведение

$$Q(v, w) = {}^t v \cdot w,$$

то группа $\mathrm{SO}(V, Q)$ обозначается $\mathrm{SO}_n K$ и может быть задана как множество матриц

$$\mathrm{SO}_n K = \{A \in \mathrm{SL}_n K \mid {}^t A \cdot A = I\}.$$

Как и прежде, мы можем разрешить брать $A \in \mathrm{GL}_n K$, и тогда получается группа $\mathrm{O}_n K$ — расширение $\mathrm{SO}_n K$ с помощью $\mathbb{Z}/2$. Группа $\mathrm{O}_n K$ имеет две компоненты связности. Для любой невырожденной симметричной билинейной формы Q на векторном пространстве V существует базис в пространстве V, задающий отождествление V и K^n, в котором Q записывается как стандартное скалярное произведение. Таким образом, все группы $\mathrm{SO}(V, Q)$ для невырожденных симметричных билинейных форм Q на n-мерном векторном пространстве V над полем K изоморфны $\mathrm{SO}_n K$.

Если n четно, то группа $\mathrm{SO}_n K$ имеет нетривиальный центр $\{\pm I\}$; факторгруппа по этому центру обозначается $\mathrm{PSO}_n K$ и естественным образом вкладывается в $\mathrm{PGL}_n K$ (если n нечетно, то $\mathrm{PSO}_n K = \mathrm{SO}_n K$). Точно так же для всех n можно определить факторгруппу $\mathrm{PO}_n K = \mathrm{O}_n K/\{\pm I\}$. Для нечетных n эта группа неприводима, для четных по-прежнему есть две неприводимых компоненты связности. Наконец (хоть мы и не будем здесь это обсуждать), для любого n существует неприводимая алгебраическая группа, обозначаемая $\mathrm{Spin}_n K$, которая двулистно накрывает группу $\mathrm{SO}_n K$.

Пример 10.3. Симплектическая группа $\mathrm{Sp}_{2n} K$

Эта группа определяется аналогично $\mathrm{SO}_n K$, с той разницей, что невырожденная билинейная форма Q выбирается кососимметричной, и поэтому размерность векторного пространства обязана быть четной.

Действие группы

Действием группы G на алгебраическом многообразии X называют регулярное отображение

$$\varphi\colon G \times X \to X,$$

удовлетворяющее обычному условию $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$. (Обычно $\varphi(g, p)$ обозначают просто $g(p)$, опуская φ.) *Проективным действием* на многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$ мы будем называть действие G на $\mathbb{P}^n$, при котором $\varphi(g, X) = X$ для всех $g \in G$. Если, более того, действие G на X поднимается до действия G на кольце $S(X)$ однородных функций на X, говорят, что действие G на X *линейно.*

Пример 10.4. $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ действует на $\mathbb{P}^n$

Очевидно, самым общим в этой теории является действие группы $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ на $\mathbb{P}^n$. Следует отметить, что это действие нелинейно. С другой стороны, если $X = \nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$ — образ $\mathbb{P}^n$ при отображении Веронезе степени d, то действие $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ на X проективно (мы увидим это явно на многих последующих примерах), причем это действие будет линейно тогда и только тогда, когда $n + 1$ делит d.

На самом деле $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ есть вся группа автоморфизмов $\mathbb{P}^n$ (мы увидим это в лекции 18).

Приведем несложное классическое утверждение о действии $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ на $\mathbb{P}^n$.

Упражнение 10.5. Покажите, что для любых двух наборов $\{p_1, \ldots \ldots, p_{n+2}\} \subset \mathbb{P}^n$, $\{q_1, \ldots, q_{n+2}\} \subset \mathbb{P}^n$ из $n + 2$ точек общего положения в $\mathbb{P}^n$ (т. е. таких, что никакая $n+1$ точка не лежит в гиперплоскости) существует и единствен элемент $\mathrm{PGL}_{n+1} K$, переводящий p_i в q_i для всех i.

Упражнение 10.6. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное многообразие. Докажите, что группа

$$\mathrm{Aut}(X, \mathbb{P}^n) = \{A \in \mathrm{PGL}_{n+1} K \mid A(X) = X\}$$

является алгебраической подгруппой в $\mathrm{PGL}_{n+1} K$. Она называется *группой проективных движений* многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$.

Замечание. Группа $\mathrm{Aut}(X, \mathbb{P}^n)$ естественно вкладывается в группу всех автоморфизмов многообразия X. Нетрудно придумать примеры многообразий, для которых это собственная подгруппа, т. е. существуют автоморфизмы X, не продолжающиеся до автоморфизмов проективного пространства, как в упражнении 10.7. Есть также примеры многообразий X, для которых группа $\mathrm{Aut}(X)$ — не алгебраическая, хотя их и трудно описать с помощью нашей ограниченной техники. (Для подготовленных читателей: самое простое, что я могу придумать, — это раздутие X проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в девяти точках пересечения двух общих кубических кривых; X является семейством эллиптических кривых с восемью сечениями, порождающими группу $\mathbb{Z}^8$ автоморфизмов многообразия X.)

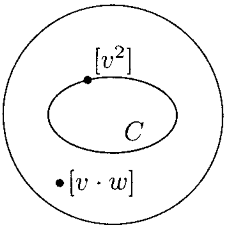
Упражнение 10.7. Приведите примеры таких проективных многообразий $X \subset \mathbb{P}^n$, что $\mathrm{Aut}(X, \mathbb{P}^n) \subsetneq \mathrm{Aut}(X)$. (*)

По многим причинам действия групп играют важную роль в алгебраической геометрии. На элементарном уровне (как мы увидим из дальнейших примеров) многие из тех многообразий, которые нам до сих пор встречались, — например, многообразия Сегре и Веронезе, грассманианы, общие детерминантальные многообразия, свитки, — допускают нетривиальные проективные действия подгрупп классических групп. Описание этих действий необходимо для понимания геометрии перечисленных многообразий. На самом деле честно будет признаться в том, что именно наличие группового действия позволяет изучать те многообразия, которые мы здесь рассматриваем, без привлечения современной техники схем и пучков.

Более глубокая причина важности групповых действий такова. Мы уже упоминали о существовании пространств параметров, то есть многообразий, каждой точке которых соответствует элемент некоторого семейства подмногообразий проективного пространства $\mathbb{P}^n$ (пример: многообразие гиперповерхностей заданной степени d в $\mathbb{P}^n$). Поскольку $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ действует на $\mathbb{P}^n$, эта группа действует и на этих пространствах параметров; ясно, что при изучении семейств многообразий с точностью до проективной эквивалентности данное действие играет ключевую роль. Здесь берет начало *геометрическая теория инвариантов* (эта тема вкратце обсуждается в лекции 21).

Пример 10.8. $\mathrm{PGL}_2 K$ действует на $\mathbb{P}^2$

Предположим, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Если представить $\mathrm{GL}_2 K$ как группу автоморфизмов двумерного векторного пространства V, то она также действует на симметрическом квадрате $\mathrm{Sym}^2 V$. Поскольку на $\mathrm{Sym}^2 V$ центр $\mathrm{GL}_2 K$ по-прежнему действует скалярами, факторгруппа $\mathrm{PGL}^2 K$ действует на проективной плоскости $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V) \cong \mathbb{P}^2$. Точно так же можно определить действие $\mathrm{PGL}_2 K$ на двойственном пространстве $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V^*)$, представляющем собой пространство квадратичных многочленов на $\mathbb{P}^1$ с точностью до постоянного множителя; действие $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^1$ естественным образом индуцирует действие на этом пространстве.



$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V)$

Заметим, что это действие сохраняет подмножество в $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V) \cong \mathbb{P}^2$, состоящее из полных квадратов — векторов вида $v \cdot v$. С другой стороны, это подмножество — просто коника $C = \nu_2(\mathbb{P}^1)$, являющаяся образом квадратичного отображения Веронезе. Если принять на веру тот факт, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}_2 K$, то получается, что

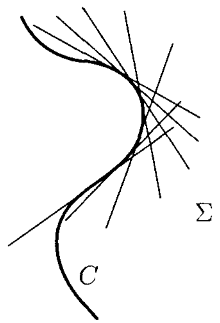
$$\mathrm{PGL}_2 K = \mathrm{Aut}(C, \mathbb{P}^2),$$

т. е. группа проективных движений плоской коники индуцирует действие $\mathrm{PGL}(V)$ на $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V)$.

Заметим также, что любой элемент пространства $\mathrm{Sym}^2 V$ является либо полным квадратом, либо произведением двух линейно независимых линейных множителей, и любое такое произведение может быть переведено в любое другое действием $\mathrm{PGL}_2 K$. Поэтому у действия $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^2$ есть только две орбиты: коника $C \subset \mathbb{P}^2$ и дополнение $\mathbb{P}^2 \setminus C$.

Пример 10.9. $\mathrm{PGL}_2 K$ действует на $\mathbb{P}^3$

Теперь предположим, что $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$. Если, как и в предыдущем примере, V — двумерное векторное пространство, то $\mathrm{PGL}(V)$ действует на проективном пространстве $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^3 V) \cong \mathbb{P}^3$ (или, что то же самое, на двойственном пространстве многочленов степени 3 на $\mathbb{P}^1$ с точностью до скалярного множителя). Это действие сохраняет множество полных кубов $C \subset \mathbb{P}^3$, которое, как мы видели, есть скрученная кубика; таким образом, группа проективных движений скрученной кубики получается из действия $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^3$.



Как и в предыдущем случае, у этого действия есть лишь конечное число орбит: множество полных кубов C, множество Σ произведений полного квадрата на линейный множитель (т. е. точек вида $[v^2 \cdot w]$, где v, w независимы) и множество Φ произведений попарно линейно независимых множителей.

Упражнение 10.10. Покажите, что объединение $\Sigma \cup C$ — гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}^3$. (На самом деле это *поверхность касательных* к C, т. е. объединение всех прямых, касательных к скрученной кубике C.)

Заметим, что из описания орбит $\mathrm{Aut}(C, \mathbb{P}^3)$ сразу следует вторая часть упражнения 3.8 (существуют только две, с точностью до проективной эквивалентности, проекции $\pi_p(C) \subset \mathbb{P}^2$ скрученной кубики из точек $p \notin C$).

Упражнение 10.11. Поскольку группа $\mathrm{PGL}_2 K$ действует на $\mathbb{P}^3$, сохраняя скрученную кубику C, она также действует на пространстве поверхностей степени 2 в $\mathbb{P}^3$, содержащих C, которое, как мы видели, параметризуется $\mathbb{P}^2$. Покажите, что это действие $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^2$ совпадает с описанным в примере 10.8, и опишите две его орбиты. (*)

Пример 10.12. $\mathrm{PGL}_2 K$ действует на $\mathbb{P}^n$ (в частности, на $\mathbb{P}^4$)

Предположим, что $\mathrm{char}(K)$ равна 0 или больше n. Тогда действие $\mathrm{PGL}_2 K = \mathrm{PGL}(V)$ на проективном пространстве $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^n V) \cong \mathbb{P}^n$ задается как отображение в группу проективных движений нормальной рациональной кривой — множества n-х степеней $[v \cdot \ldots \cdot v]$. Описание пространства орбит этого действия в общем случае становится гораздо более интересным; мы опишем это множество для (относительно) простого случая $n = 4$.

Для начала отметим, что есть четыре орбиты действия $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^4$, состоящие не из произведений четырех независимых множителей: нормальная рациональная кривая степени 4

$$C = \{[v^4],\ v \in V\},$$

а также множества

$$\Sigma = \{[v^3 \cdot w] \mid v \text{ и } w \text{ линейно независимы в } V\},$$
$$\Phi = \{[v^2 \cdot w^2] \mid v \text{ и } w \text{ линейно независимы в } V\},$$

и

$$\Psi = \{[v^2 \cdot u \cdot w] \mid v,\ u,\ w \text{ попарно линейно независимы в } V\}.$$

Заметим, что C — единственная замкнутая орбита; она содержится в замыкании Σ и Φ, которые, в свою очередь, содержатся в замыкании Ψ. Пользуясь еще не введенными конструкциями, можно определить Σ как поверхность касательных к C, Ψ как объединение соприкасающихся 2-плоскостей для C и Φ как объединение всех попарных пересечений различных соприкасающихся 2-плоскостей.

Интересные вещи начинаются, если рассмотреть орбиты, состоящие из произведений попарно линейно независимых элементов. Дело в том, что не все такие произведения лежат в одной орбите: каждое соответствует четверке различных точек на $\mathbb{P}^1$ (на $(\mathbb{P}^1)^*$, если быть точным), и не для всех таких четверок $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{P}^1$ одну можно перевести в другую действием $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^1$. Можно перевести три точки z_2, z_3 и z_4 в 0, 1 и ∞ соответственно, и тогда оставшаяся точка z_1 попадет в точку λ, где λ — двойное отношение

$$\lambda(z_1, \ldots, z_4) = \frac{(z_1 - z_2) \cdot (z_1 - z_4)}{(z_3 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}.$$

Если мы теперь переставим точки z_i, двойное отношение λ перейдет в $1 - \lambda$, $1/\lambda$, $1/(1 - \lambda)$, $(\lambda - 1)/\lambda$ или $\lambda/(\lambda - 1)$. Таким образом, одну из двух четверок можно перевести в другую, если и только если подмножества $\{\lambda, 1 - \lambda, 1/\lambda, 1/(1 - \lambda), (\lambda - 1)/\lambda, \lambda/(\lambda - 1)\} \subset K \setminus \{0, 1\}$ для них совпадают. Чтобы выяснить, когда так бывает, введем знаменитую j-функцию

$$j(\lambda) = 256 \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 \cdot (\lambda - 1)^2}$$

(множитель 256 вводится из теоретико-числовых соображений). Сформулируем теперь следующее утверждение:

Упражнение 10.13. Покажите, что подмножества $\{0, \infty, 1, \lambda\}$ и $\{0, \infty, 1, \lambda'\} \subset \mathbb{P}^1$ лежат в одной орбите тогда и только тогда, когда совпадают значения $j(\lambda) = j(\lambda')$.

Из этого упражнения следует, что каждому значению j соответствует своя орбита Ω_j, что завершает описание орбит.

Перечислим несколько свойств орбит Ω_j; все они могут быть выведены напрямую, но мы здесь этого делать не будем. Начнем с того, что для большинства значений j замыкание орбиты Ω_j — гиперповерхность степени 6. Точнее, это верно для всех значений j, кроме $j = 0$ и 1728. Оказывается, что с замыканием $\overline{\Omega}_{1728}$ мы уже встречались: это многообразие секущих для нормальной рациональной квартики, которое является кубической гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$. Многообразие $\overline{\Omega}_0$ также представляет интерес: это гиперповерхность степени 2, содержащая нормальную рациональную квартику. Отсюда следует интересное наблюдение: существует канонически определенная квадрика, содержащая нормальную рациональную квартику $C \subset \mathbb{P}^4$, которая переводится в себя любым движением $\mathbb{P}^4$, сохраняющим C. Это также можно вывести из классической теории представлений, которая гласит, что как представление $\mathrm{SL}_2 K$

$$\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^4 V) = \mathrm{Sym}^8 V \oplus \mathrm{Sym}^4 V \oplus K.$$

Первые два слагаемых в этом разложении соответствуют пространству квадрик $I(C)_2 \subset I(C)$, где $I(C)$ — идеал C, а последнее слагаемое — квадрике $\overline{\Omega}_0$.

Упражнение 10.14. Какие орбиты действия $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^4$ лежат в замыкании данной орбиты Ω_j? (*)

Классики оставили нам явное описание пространства орбит действия $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^n$ для всех $n \leqslant 6$ (оно известно как «the theory of binary quantics»); для общего случая имеется ряд качественных результатов.

Пример 10.15. $\mathrm{PGL}_3 K$ действует на $\mathbb{P}^5$

Предположим, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$. На сей раз мы рассмотрим действие группы $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_3 K$ автоморфизмов трехмерного векторного пространства V на пространстве $\mathrm{Sym}^2 V$. Оно индуцирует действие $\mathrm{PGL}_3 K$ на ассоциированном проективном пространстве $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V) \cong \mathbb{P}^5$. Точно так же мы можем рассмотреть действие на двойственном пространстве $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V^*) \cong \mathbb{P}^5$, которое можно считать пространством коник в $\mathbb{P}^2$, и тогда любой автоморфизм $\mathbb{P}^2$ индуцирует естественный автоморфизм $\mathbb{P}^5$ как пространства коник в $\mathbb{P}^2$.

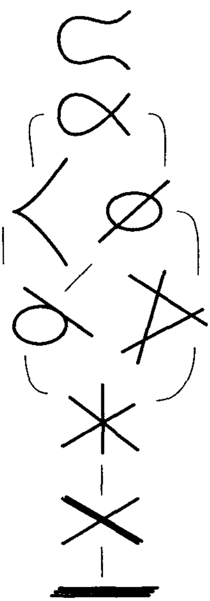
Орбиты этого действия уже были описаны в примере 3.3: есть замкнутая орбита Φ, состоящая из двойных прямых (т. е. квадратов $v \cdot v \in \mathrm{Sym}^2 V$), еще одна орбита Ψ состоит из пар различных прямых (т. е. произведений $v \cdot w$ непропорциональных линейных множителей) и, наконец, есть открытая орбита, состоящая из гладких коник (проективно эквивалентных кривой Веронезе $\nu_2(\mathbb{P}^1)$). Чтобы описать эти орбиты, заметим, что первая — геометрическое место квадратов $[v^2]$ — есть просто поверхность Веронезе $\nu_2(\mathbb{P}^2)$ в $\mathbb{P}^5$. Далее, нетрудно видеть, что квадратный многочлен на $\mathbb{P}^2$ приводим тогда и только тогда, когда он может быть записан в виде суммы двух квадратов (поскольку $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$), и обратно, vw может быть записано как $((v + w)/2)^2 + (i(v - w)/2)^2$. Замыкание $\overline{\Psi} = \Psi \cup \Phi$ — многообразие секущих для поверхности Веронезе.

Отсюда можно вывести, что с точностью до проективной эквивалентности есть только два многообразия в $\mathbb{P}^4$, которые получаются как регулярные проекции $\pi_p(S)$ поверхности Веронезе $S = \nu_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ (т. е. проекции из точки $p \in \mathbb{P}^5$, не лежащей на S).

Пример 10.16. $\mathrm{PGL}_3 K$ действует на $\mathbb{P}^9$

Пусть $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$. Как и при переходе от действия $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^3$ к действию на $\mathbb{P}^n$ для $n \geqslant 4$, ситуация кардинально меняется при рассмотрении действия $\mathrm{PGL}_3 K$ на пространстве $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^3 V) \cong \mathbb{P}^9$ (или, что то же самое, на пространстве кубических многочленов на $\mathbb{P}^2$ с точностью до умножения на скаляр). Мы просто перечислим некоторые факты, касающиеся этого действия, не вдаваясь в объяснения.

Для начала есть несколько орбит, соответствующих приводимым кубикам (или кубикам, имеющим кратные компоненты): тройные прямые (т. е. тензоры вида $[v^3]$) образуют одну орбиту, как и суммы прямой и двойной прямой ($[u \cdot v^2]$ с линейно независимыми $u, v \in V$). Кубики, являющиеся объединением трех различных прямых, образуют две орбиты: одну, для которой прямые не пересекаются в одной точке ($[u \cdot v \cdot w]$ с линейно независимыми u, v и w), и еще одну, для которой три прямые проходят через одну точку ($[u \cdot v \cdot w]$ с u, v, w попарно линейно независимыми, но лежащими в одной плоскости в V). Также есть две орбиты, состоящие из объединений коники и прямой: одна, где прямая пересекает конику в двух точках, и еще одна, где прямая касается коники.



Среди неприводимых кубик еще две орбиты образуют два вида кривых, описанных в упражнении 3.8. Остаются гладкие кубики. Каждая из последних может быть переведена проективным движением в кривую C_λ вида

$$Y^2Z = X \cdot (X - Z) \cdot (X - \lambda Z),$$

и две такие кривые проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда два множества $\{0, 1, \infty, \lambda\}$ и $\{0, 1, \infty, \lambda'\}$ могут быть переведены друг в друга проективным движением $\mathbb{P}^1$, то есть если j-инварианты

$$j(\lambda) = 256 \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 \cdot (\lambda - 1)^2}$$

совпадают. Таким образом, ситуация очень похожа на ту, которая возникала при рассмотрении действия $\mathrm{PGL}_2 K$ на $\mathbb{P}^4$.

На рисунке указаны некоторые из очевидных примыканий между орбитами, в особенности состоящими из особых кубик. В то же время, некоторые тонкости не показаны: например, для каждого значения $j \in K$ орбита, состоящая из гладких кубик с j-инвариантом j, содержит в своем замыкании множество каспидальных кубик (т. е. орбиту кубик, проективно эквивалентных $Y^2Z - X^3$), но не содержит множество треугольников.

Пример 10.17. $\mathrm{PO}_n\,K$ действует на $\mathbb{P}^{n-1}$

Пусть $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Будем теперь рассматривать действие ортогональной группы $\mathrm{O}_n\,K$ на K^n и соответствующее ему действие $\mathrm{PO}_n\,K$ на $\mathbb{P}^{n-1}$. Единственное, что мы хотим сказать, это что действие $\mathrm{PO}_n\,K$ сохраняет квадратичную гиперповерхность

$$X = \{[v] \mid Q(v, v) = 0\};$$

обратно, $\mathrm{PO}_n\,K$ составляет всю группу проективных движений X, т.е. $\mathrm{PO}_n\,K = \mathrm{Aut}(X, \mathbb{P}^{n-1})$.

В частности, заметим, что обе группы $\mathrm{PGL}_2\,K$ и $\mathrm{SO}_3\,K$ можно таким образом отождествить с группой проективных движений коники $X \subset \mathbb{P}^2$, так что эти две группы изоморфны. Аналогично, изоморфизм квадратичной поверхности $X \subset \mathbb{P}^3$ и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{PSO}_4\,K$ и $\mathrm{PGL}_2\,K \times \mathrm{PGL}_2\,K$. Заметим, что полная группа проективных движений квадрики $X \subset \mathbb{P}^3$ есть расширение $\mathrm{PGL}_2\,K \times \mathrm{PGL}_2\,K$ с помощью $\mathbb{Z}/2$, так как $\mathrm{PGL}_2\,K \times \mathrm{PGL}_2\,K$ сохраняет два семейства прямых на квадрике (автоморфизм K^4, сохраняющий Q и переставляющий два семейства прямых на X, имеет определитель -1 и поэтому не лежит в $\mathrm{SO}_4\,K$).

Пример 10.18. $\mathrm{PGL}_n\,K$ действует на $\mathbb{P}(\bigwedge^k K^n)$

В качестве последнего примера рассмотрим действие $\mathrm{GL}_n\,K$ на $\bigwedge^k K^n$ и индуцированное действие на проективном пространстве. Очевидно, это действие сохраняет грассманиан $G(k, n) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^k K^n)$ как множество разложимых векторов $[v_1 \wedge \ldots \wedge v_k]$. На самом деле, кроме случая $n = 2k$, это вся группа автоморфизмов грассманиана, то есть имеется следующая теорема.

Теорема 10.19. *Если $k < n/2$, то*

$$\mathrm{Aut}(G(k, n)) = \mathrm{Aut}(G(k, n), \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^k K^n)) = \mathrm{PGL}_n\,K.$$

В случае $n = 2k$ имеем

$$\mathrm{Aut}(G(k, n)) = \mathrm{Aut}(G(k, n), \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^k K^n)) \supset \mathrm{PGL}_n\,K,$$

где последнее вложение — индекса 2.

Полудоказательство. Доказательство этого факта состоит из двух частей, первая из которых состоит в проверке в обоих случаях равенства $\mathrm{Aut}(G(k, n)) = \mathrm{Aut}(G(k, n), \mathbb{P}(\bigwedge^k K^n))$, то есть в доказательстве того, что любой автоморфизм многообразия $G(k, n)$ проективен. Это нетрудно и сводится к тому утверждению, что все подмногообразия коразмерности 1 в $G(k, n)$ суть пересечения $G(k, n)$ с гиперповерхностями в $\mathbb{P}(\bigwedge^k K^n)$, но для доказательства этого факта у нас пока не хватает средств. Примем его на веру и докажем оставшееся равенство.

Ключевым в данном случае является наблюдение из лекции 6: любое линейное пространство $\Lambda \cong \mathbb{P}^l$, лежащее на грассманиане $G(k, n) \subset \subset \mathbb{P}(\bigwedge^k K^n)$, есть подграссманиан вида $G(1, l+1)$ или $G(l, l+1)$, то есть множество подпространств размерности k, лежащих в данном подпространстве размерности $k+l$ (соответственно $k+1$) и содержащих данное подпространство размерности $k-1$ (соответственно $k-l$). В частности, если $k < n/2$, то любое линейное подпространство $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k} \subset \subset G(k, n)$ относится к первому типу, то есть является множеством подпространств размерности k, содержащих данное подпространство размерности $k-1$. Другими словами, многообразие Фано $F_{n-k}(G(k, n))$ есть не что иное, как грассманиан $G(k-1, n)$ (упражнение 6.9).

Таким образом, всякое проективное движение многообразия $G(k, n)$ задает автоморфизм многообразия $G(k-1, n)$; вспомнив утверждение, что такой автоморфизм всегда проективен, получаем автоморфизм многообразия $G(k-2, n)$, и так далее. В конце получится автоморфизм грассманиана $G(1, n) \cong \mathbb{P}^{n-1}$; этот автоморфизм соответствует элементу в $\mathrm{PGL}_n K$, который и задает данное проективное движение грассманиана $G(k, n) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^k K^n)$.

В случае $n = 2k$ многообразие Фано $(k-1)$-плоскостей на $G(k, n)$ — несвязное объединение двух экземпляров грассманиана $G(k-1, n)$ (или, точнее, несвязное объединение $G(k-1, n)$ и $G(k+1, n)$). Группа движений каждой компоненты в отдельности есть $\mathrm{PGL}_n K$. Существование еще одного автоморфизма, переставляющего компоненты, можно оставить в качестве упражнения. □

Пользуясь последним утверждением, можно вывести еще один изоморфизм в духе тех, что мы рассматривали после примера 10.17: связная компонента единицы в группе автоморфизмов грассманиана $G(2, 4)$ есть $\mathrm{PGL}_4 K$, но $G(2, 4)$ — квадратичная гиперповерхность в $\mathbb{P}^5$, так что

$$\mathrm{PGL}_4 K \cong \mathrm{PSO}_6 K.$$

Факторы

В контексте действия группы G на множестве X возникает естественный и важный вопрос о существовании факторов. В наивном пониманин фактор — это многообразие Y, точки которого взаимно однозначно соответствуют орбитам G на X, причем отображение $\pi\colon X \to Y$ регулярно. Эквивалентным образом фактор можно определить как такое сюръективное отображение $\pi\colon X \to Y$, что $\pi(p) = \pi(q)$ тогда и только тогда, когда существует $g \in G$, для которого $g(p) = q$. На самом деле стоит потребовать большего. Именно, фактор должен быть многообразием Y с отображением $\pi\colon X \to Y$, удовлетворяющим тому условию, что любое регулярное отображение $\rho\colon X \to Z$ в другое многообразие Z пропускается через π тогда и только тогда, когда $\rho(p) = \rho(g(p))$ для всех $g \in G$ и $p \in X$. (Это отсекает различные глупости вроде взятия композиции отображения π с взаимно однозначным, но не изоморфным отображением $\phi\colon Y \to Y'$, а заодно гарантирует единственность фактора в случае его существования.) Говорят, что фактор X по действию G существует, если существуют многообразие Y и отображение $\pi\colon X \to Y$, удовлетворяющие приведенным выше условиям.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Легко видеть, что даже в простейших случаях фактора может не быть. Например, у действия $K^* = \mathrm{GL}_1 K$ на $\mathbb{A}^1$ умножением есть только две орбиты: $\{0\}$ и $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, но сюръективного морфизма из $\mathbb{A}^1$ на многообразие из двух точек не существует.

Это общая проблема с построением факторов: одна орбита может лежать в замыкании другой, и тогда естественная топология на X/G будет патологической. Менее примитивные проявления того же эффекта мы видели в примерах 10.12 и 10.16. В последнем случае хотелось бы получить многообразие, параметризующее классы проективной эквивалентности плоских кубических кривых, и самая естественная возможность для этого — фактор $\mathbb{P}^9$ по действию $\mathrm{PGL}_3 K$, но этого фактора не существует. Как отмечалось, например, орбита, состоящая из всех каспидальных кубик, содержится в замыкании любой орбиты, состоящей из гладких кубик.

Можно ограничиться рассмотрением открытого подмногообразия $U \subset X$, инвариантного относительно действия G, и попробовать взять фактор U по действию G. Так, в примере 10.16 можно в качестве U взять объединение множества всех гладких кубик и неприводимых нодальных кубик. Фактор U по $\mathrm{PGL}_3 K$ существует и изоморфен $\mathbb{P}^1$. Глубоким вопросом о существовании и компактности таких факторов занимается *геометрическая теория инвариантов*.

Одной из ситуаций, когда хорошие факторы всегда существуют, является случай действия конечной группы, который мы и обсудим.

Факторы аффинных многообразий по конечным группам

Начнем с конечной группы G, действующей на аффинном многообразии X, где X — множество общих нулей многочленов $\{f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\}$ в K^n: утверждается, что фактор X по действию G в вышеприведенном смысле всегда существует.

Чтобы убедиться в этом, обозначим идеал X через $I(X)$ и координатное кольцо через $A(X) = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$. По определению фактора, примененному к $Z = \mathbb{A}^1$, регулярные функции на Y суть в точности те функции на X, которые инвариантны относительно действия G, то есть координатное кольцо Y есть подкольцо $A(Y) = A(X)^G \subset A(X)$. Первое, что нужно проверить, — конечную порожденность $A(X)^G$ над K: проверив это, можно записать $A(Y) = K[w_1, \ldots, w_m]/(g_1(w), \ldots, g_l(w))$ и взять в качестве Y множество общих нулей многочленов $g_\alpha(w)$ в K^m.

Чтобы доказать, что $A(X)^G$ конечно порождено над K, заметим сначала, что можно представить $A(X)$ в виде $K[x_1, \ldots, x_m]/I$, где G действует перестановками на образующие x_i: нужно только добавить к исходному множеству образующих $\{z_i\}$ все образы z_i при действии G. Далее, имеется сюръекция

$$K[x_1, \ldots, x_m]^G \twoheadrightarrow (K[x_1, \ldots, x_m]/I(X))^G:$$

любой элемент $\overline{\alpha} \in (K[x_1, \ldots, x_m]/I)^G$ соответствует элементу $\alpha \in \in K[x_1, \ldots, x_m]$, сравнимому по модулю I с любым из образов $g^*(\alpha)$, и для любого такого α усреднение

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^*(\alpha) \in K[x_1, \ldots, x_m]$$

будет инвариантно относительно действия G и при этом отображаться в $\overline{\alpha}$. Поэтому достаточно показать, что конечно порождено кольцо $K[x_1, \ldots, x_m]^G$. Но оно зажато между двумя кольцами многочленов:

$$K[x_1, \ldots, x_m]^{S_m} \subset K[x_1, \ldots, x_m]^G \subset K[x_1, \ldots, x_m],$$

где S_m — группа подстановок m элементов. Далее, кольцо инвариантов $K[x_1, \ldots, x_m]^{S_m}$ изоморфно кольцу многочленов $K[y_1, \ldots, y_m]$, где y_i — элементарные симметрические функции от x_j. Теперь конечная порожденность $K[x_1, \ldots, x_m]^G$ вытекает из конечной порожденности $K[x_1, \ldots, x_m]$ как модуля над $K[y_1, \ldots, y_m]$.

Далее, нужно убедиться, что точки Y соответствуют орбитам действия G на X. Это нетрудно. Предположим, что точки p и $q \in X$ не лежат в одной орбите относительно действия G. Чтобы доказать, что $\pi(p) \neq \pi(q)$, заметим, что можно найти функцию $f \in A(X)$ на X, равную нулю в p, но не в $g(q)$ для всех $g \in G$. Тогда произведение $\prod g^*(f)$ образов f под действием G — функция $f \in A(Y)$, равная нулю в $\pi(p)$, но не в $\pi(q)$. Чтобы доказать сюръективность π, возьмем произвольный идеал $\mathfrak{m} = (h_1, \ldots, h_k)$ в $A(Y)$; нам нужно показать, что $\mathfrak{m} \cdot A(X) \neq A(X)$, если $\mathfrak{m} \neq A(Y)$. Но если $\mathfrak{m} \cdot A(X)$ — единичный идеал, то можно найти такие $a_1, \ldots, a_k \in A(X)$, что

$$1 = a_1 \cdot h_1 + \ldots + a_k \cdot h_k.$$

Складывая все образы этого уравнения при действии G, получаем

$$|G| = \left(\sum g^*(a_1)\right) \cdot h_1 + \ldots + \left(\sum g^*(a_k)\right) \cdot h_k.$$

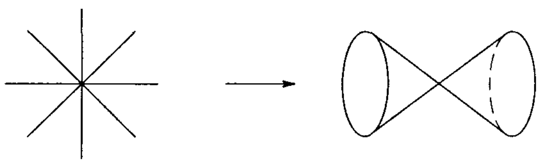
Коэффициенты правой части этого уравнения инвариантны относительно G, то есть лежат в $A(Y)$, и, следовательно, $\mathfrak{m} = A(Y)$.

Проверку условий универсальности для многообразия Y и отображения $\pi\colon X \to Y$ мы оставляем в качестве упражнения. Отметим также, что, несмотря на кажущуюся необходимость нулевой (или хотя бы взаимно простой с порядком G) характеристики поля K, для результата это не нужно. На самом деле, если бы мы провели все рассуждение должным образом (используя понятие целого расширения кольца), можно было бы обойтись без «усреднений». См. по этому поводу [S1].

Упражнение 10.20. Покажите, что действие группы перестановок четырех элементов на четверках различных точек из $\mathbb{P}^1$ индуцирует действие S_4 на $\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\}$ с фактором $\mathbb{A}^1$ и отображением $\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{A}^1$, задаваемым j-функцией (ср. упражнение 10.13).

Пример 10.21. Факторы аффинных пространств

Самые простые примеры получаются из линейных действий на векторных пространствах. Рассмотрим, скажем, инволюцию $(z, w) \mapsto (-z, -w)$ на $\mathbb{A}^2$. Подкольцо $K[z, w]$, инвариантное относительно этой инволюции, порождено многочленами $a = z^2$, $b = zw$ и $c = w^2$, удовлетворяющими одному соотношению $ac = b^2$; поэтому фактор $\mathbb{A}^2$ по этой инволюции — квадратичный конус $Q \subset \mathbb{A}^3$.



В качестве другого примера рассмотрим действие $\mathbb{Z}/3$ на $\mathbb{A}^2$, которое переводит (z, w) в $(\zeta z, \zeta w)$, где ζ — кубический корень из единицы.

Кольцо инвариантов порождено мономами z^3, z^2w, zw^2 и w^3, откуда мы видим, что фактор — конус в $\mathbb{A}^4$ над скрученной кубикой в $\mathbb{P}^3$. Если, напротив, действие $\mathbb{Z}/3$ на $\mathbb{A}^2$ задавать как $(z, w) \mapsto (\zeta z, \zeta^2 w)$, то кольцо инвариантов будет порождаться многочленами $a = z^3$, $b = zw$ и $c = w^3$, удовлетворяющими уравнению $ac = b^3$, что даст совсем другой фактор.

Упражнение 10.22. Покажите, что два последних фактора неизоморфны как многообразия. (*)

Пример 10.23. Симметрические степени

Другой пример фактора по действию конечной группы представляет симметрическая степень $X^{(n)}$ многообразия X. Она определяется как фактор обычного прямого произведения X^n по действию симметрической группы на n элементах. Таким образом, точками $X^{(n)}$ являются неупорядоченные наборы n точек многообразия X. Для примера рассмотрим простейший случай $X = \mathbb{A}^1$. Координатное кольцо обычного прямого произведения $X^n = \mathbb{A}^n$ есть $K[z_1, \ldots, z_n]$, и n-я симметрическая степень в качестве координатного кольца имеет подкольцо симметричных многочленов от $z_1, \ldots, z_n$. Но это подкольцо свободно порождено элементарными симметрическими многочленами $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$; поэтому симметрическое произведение $(\mathbb{A}^1)^{(n)}$ изоморфно $\mathbb{A}^n$. Другими словами, пространство многочленов степени n от одной переменной со старшим коэффициентом 1 есть n-я симметрическая степень прямой $\mathbb{A}^1$.

Упражнение 10.24. Опишите симметрический квадрат $(\mathbb{A}^2)^{(2)}$ и, более общо, симметрический квадрат $(\mathbb{A}^n)^{(2)}$.

Факторы проективных многообразий по конечным группам

Точно так же, как фактор аффинного многообразия по действию конечной группы всегда существует и является аффинным многообразием, фактор проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ по конечной группе всегда существует и является проективным многообразием, хотя доказать это несколько труднее.

Для начала заметим, что любое действие конечной группы на проективном многообразии можно сделать проективным, то есть можно так вложить X в проективное пространство $\mathbb{P}^N$, что G будет действовать на $\mathbb{P}^N$, сохраняя X. Это просто: нужно только вложить первоначальное проективное многообразие X в произведение проективных пространств $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \ldots \times \mathbb{P}^n$, занумерованных элементами группы $g \in G$, при помощи отображения, g-я компонента которого — композиция автоморфизма X, соответствующего элементу g, и вложения X в $\mathbb{P}^n$. Теперь действие G на X получается ограничением на X действия G

на $(\mathbb{P}^n)^{|G|}$ перестановками сомножителей. После вложения $(\mathbb{P}^n)^{|G|}$ в проективное пространство размерности $(n+1)^{|G|}-1$ с помощью отображения Сегре это действие станет проективным. Наконец, взяв композицию с подходящим вложением Веронезе, можно сделать действие линейным.

Пусть теперь $S(X)$ — однородное координатное кольцо X в $\mathbb{P}^n$ и $B = S(X)^G \subset S(X)$ — подкольцо инвариантов относительно действия G. Кольцо B снова градуировано, хотя оно может и не порождаться своей первой компонентой B_1. Например, B_1 может быть нулем. Это не проблема: положим

$$B^{(k)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_{nk}$$

и введем на $B^{(k)}$ градуировку, объявив B_{nk} компонентой градуировки n. Кольцо B конечно порождено, значит, для некоторого k подкольцо $S(Y) = B^{(k)}$ порождено первой градуировочной компонентой. Поэтому можно записать

$$S(Y) = K[Z_0, \ldots, Z_m]/(F_1(Z), \ldots, F_l(Z)),$$

где F_α — однородные многочлены от Z_i. Теперь мы утверждаем, что подмногообразие $Y \subset \mathbb{P}^m$, заданное уравнениями $F_\alpha(Z) = 0$, есть фактор X по действию G в вышеприведенном смысле.

Упражнение 10.25. Проверьте последнее утверждение. (Подсказка: используйте локальность определения фактора в том смысле, что если G сохраняет открытое аффинное подмножество $U \subset X$, то образ U при факторизации есть фактор U по действию G.)

То же рассуждение, кстати, доказывает существование в общем случае фактора квазипроективного многообразия по действию конечной группы.

Упражнение 10.26. Докажите, что n-я симметрическая степень $\mathbb{P}^1$ есть $\mathbb{P}^n$.

Пример 10.27. Взвешенные проективные пространства

Вероятно, один из основных примеров факторизации проективных многообразий по действию конечных групп доставляют взвешенные проективные пространства. Они определяются как фактор проективного пространства по диагональному действию абелевой группы. Точнее говоря, пусть $a_0, \ldots, a_n$ — любые натуральные числа, и пусть группа $(\mathbb{Z}/a_0) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/a_n)$ действует на $\mathbb{P}^n$ автоморфизмами

$$[Z_0, \ldots, Z_n] \mapsto [Z_0, \ldots, \zeta \cdot Z_i, \ldots, Z_n],$$

где ζ — первообразный корень из единицы степени a_i. Фактор $\mathbb{P}^n$ по этому действию называется *взвешенным проективным пространством* и обозначается $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$.

Простейшими примерами взвешенных проективных пространств (в свете упражнения 10.29) являются взвешенные плоскости $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ и $\mathbb{P}(1, 2, 2)$. Первая из них — фактор $\mathbb{P}^2$ по действию $\mathbb{Z}/2$ с образующей

$$[Z_0, Z_1, Z_2] \mapsto [Z_0, Z_1, -Z_2].$$

Подкольцо инвариантов B, таким образом, порождено мономами Z_0, Z_1 и Z_2^2. Стало быть, мы переходим к кольцу $B^{(2)}$, которое порождено мономами

$$W_0 = Z_0^2, \quad W_1 = Z_0Z_1, \quad W_2 = Z_1^2 \quad \text{и} \quad W_3 = Z_2^2,$$

и заключаем, что плоскость $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ изоморфна поверхности в $\mathbb{P}^3$, задаваемой уравнением $W_0W_2 = W_1^2$, то есть конусу над коникой (интересно сравнить этот результат с примером 10.21).

Взвешенная плоскость $\mathbb{P}(1, 2, 2)$ на поверку оказывается менее интересной. Здесь кольцо инвариантов порождается Z_0, Z_1^2 и Z_2^2; переходя к $B^{(2)}$, мы видим, что оно порождается Z_0^2, Z_1^2 и Z_2^2, между которыми нет соотношений, и поэтому $\mathbb{P}(1, 2, 2) \cong \mathbb{P}^2$. На самом деле оба примера являются частными случаями следующего.

Упражнение 10.28. Докажите, что любое взвешенное проективное пространство вида $\mathbb{P}(1, \ldots, 1, k, \ldots, k)$ изоморфно конусу над многообразием Веронезе $\nu_k(\mathbb{P}^l)$ (в частности, $\mathbb{P}(1, k, \ldots, k) \cong \mathbb{P}^n$).

Упражнение 10.29. Докажите, что всякая взвешенная проективная прямая $\mathbb{P}(a, b)$ изоморфна $\mathbb{P}^1$.

В качестве примера, не сводящегося к перечисленным, возьмем взвешенную плоскость $\mathbb{P}(1, 2, 3)$. Это фактор $\mathbb{P}^2$ по действию $\mathbb{Z}/6$ с образующей

$$[Z_0, Z_1, Z_2] \mapsto [Z_0, -Z_1, \omega Z_2],$$

где ω — кубический корень из единицы. Это действие линейно; подкольцо $B \subset K[Z_0, Z_1, Z_2]$ инвариантов относительно $\mathbb{Z}/6$ порождено мономами Z_0, Z_1^2 и Z_2^3. Переходя к кольцу $B^{(6)}$, порожденному мономами

$$\begin{aligned} &W_0 = Z_0^6, && W_1 = Z_0^4Z_1^2, && W_2 = Z_0^2Z_1^4, && W_3 = Z_1^6, \\ &W_4 = Z_0^3Z_2^3, && W_5 = Z_2^6, && W_6 = Z_0Z_1^2Z_2^3, \end{aligned}$$

заключаем, что пространство $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ изоморфно проективному многообразию $X \subset \mathbb{P}^6$, заданному уравнениями

$$\begin{array}{lll} W_0W_2 = W_1^2, & W_0W_3 = W_1W_2, & W_1W_3 = W_2^2, \\ W_0W_5 = W_4^2, & W_2W_5 = W_6^2, & W_1W_5 = W_4W_6. \\ W_2W_6 = W_3W_4, & W_1W_6 = W_2W_4, & W_0W_6 = W_1W_4. \end{array}$$

Упражнение 10.30. Покажите, что все взвешенные проективные пространства рациональны. Можете ли вы явно найти бирациональный изоморфизм между $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ и $\mathbb{P}^2$? (На самом деле $\mathbb{P}(1, 2, 3) \subset \mathbb{P}^6$ — *поверхность Дель Пеццо*; в частности, ее можно представить как образ рационального отображения из $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^6$, заданного кубическими многочленами на $\mathbb{P}^2$.)

Упражнение 10.31. Обычное проективное пространство может быть задано как фактор $K^{n+1} \setminus \{0\}$ по действию K^* скалярным умножением. Покажите, что взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ можно задать как фактор $K^{n+1} \setminus \{0\}$ по K^*, где $\lambda \in K^*$ действует как

$$(Z_0, \ldots, Z_n) \mapsto (\lambda^{a_0} Z_0, \ldots, \lambda^{a_n} Z_n).$$

Часть II
Атрибуты многообразий

Теперь, когда мы накопили некоторый запас примеров многообразий и отображений, мы готовы всерьез разрабатывать инструментарий для работы с ними, что на данном этапе означает «найти побольше инвариантов и свойств, отличающих одни многообразия от других». Разумеется, вместе с введением этих инвариантов мы сможем также определять и описывать новые многообразия.

Характеристики многообразия, которыми мы будем заниматься, таковы: размерность; гладкость или особость; касательные пространства Зарисского (в обоих случаях), а во втором из них — также и касательные конусы; резольвента идеала многообразия вместе с функцией и многочленом Гильберта; степень. В каждом из случаев, дав определение, мы сформулируем основные теоремы, описывающие поведение этих инвариантов при проведении различных конструкций, а затем применим эти теоремы к вычислению инвариантов различных известных нам многообразий.

Лекция 11

ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕРЫ

Начнем мы с того, что дадим ряд различных определений размерности и постараемся объяснить, как они связаны друг с другом. Все наши определения относятся к неприводимому многообразию X; размерность произвольного многообразия будет определяться просто как максимум размерностей его неприводимых компонент.

Первое из определений незаконно в нескольких аспектах, но оно, возможно, наиболее интуитивно понятное. Предположим, что X — неприводимое многообразие над полем комплексных чисел. Если X является комплексным подмногообразием в $\mathbb{P}^n$, то оно связно и мы определяем размерность X как размерность этого комплексного многообразия. Более общим образом, имеет место следующий факт (доказать который мы сможем только в упражнении 14.3): гладкие точки многообразия X образуют плотное подмножество $U \subset X$ (на самом деле это открытое подмножество в топологии Зарисского, являющееся связным комплексным многообразием). Мы определяем размерность X как размерность этого многообразия.

Это определение нелегитимно по четырем причинам: оно использует понятие гладкости, формального определения которому мы не давали; оно ссылается на недоказанную теорему; оно использует специфику комплексных чисел; наконец, оно использует понятие размерности из другой теории. Тем не менее это определение соответствует общепринятому представлению о том, что такое размерность; нашей целью будет найти алгебраическое определение, соответствующее этому представлению.

Давайте начнем с того, с чем никто спорить не будет: размерность $\mathbb{P}^n$ равна n. Вторая интуитивно ясная предпосылка состоит в том, что если X и Y — неприводимые многообразия и $\varphi\colon X \to Y$ — доминантное отображение с конечными слоями, то размерность X должна совпадать с размерностью Y. Исходя из этих предпосылок, мы можем дать следующее предварительное определение.

Определение 11.1. *Размерность* неприводимого многообразия равна k, если X допускает доминантное отображение в $\mathbb{P}^k$ с конечными слоями.

Конечно, это определение нуждается в доработке: не вполне ясно, что такое отображение всегда можно найти или что размерность k проективного пространства. в которое отображается X, будет одной и той же для всех отображений. Со вторым из этих вопросов мы разберемся позднее, когда дадим другие эквивалентные определения размерности; первым же мы займемся прямо сейчас.

Чтобы это сделать, начнем со случая, когда $X \subset \mathbb{P}^n$ проективно. Если $X \subset \mathbb{P}^n$ неприводимо, то конечные отображения в проективное пространство естественно поискать среди проекций. Однако если мы проектируем X из точки $p \in \mathbb{P}^n$, не лежащей на X, то слои будут с неизбежностью конечны, поскольку если $p \notin X$, то всякая прямая, проходящая через p, может пересекаться с X лишь по конечному множеству точек. Если образ $\overline{X} = \pi_p(X)$ не совпадает со всем $\mathbb{P}^{n-1}$, мы можем повторить этот процесс, продолжая проектировать X из точек, пока мы не дойдем до конечного сюръективного отображения X на $\mathbb{P}^k$. Ту же мысль можно выразить другими словами: проекция X из линейного пространства $\Lambda \cong \mathbb{P}^l \subset \mathbb{P}^n$, не пересекающегося с X, будет сюръективна тогда и только тогда, когда всякое подпространство, строго содержащее Λ, будет пересекаться с X, так что нам просто нужно найти максимальное линейное подпространство, не пересекающееся с X. В частности, мы можем охарактеризовать размерность проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ как наименьшее число k, для которого общая $(n-k-1)$-плоскость $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ не пересекается с X. Однако же ввиду упражнения 6.15 для всякого квазипроективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ замыкание в $\mathbb{G}(l, n)$ множества l-плоскостей, пересекающихся с X, есть множество l-плоскостей, пересекающихся с $\overline{X}$. Следовательно, мы можем сформулировать следующее определение.

Определение 11.2. *Размерностью* неприводимого квазипроективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ называется наименьшее целое число k, для которого общая $(n-k-1)$-плоскость $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ не пересекается с X, или, если X проективно, такое, что существует подпространство размерности $n-k-1$, не пересекающееся с X.

Далее, заметим, что общая $(n-k-1)$-плоскость, содержащаяся в общей $(n-k)$-плоскости, является общей $(n-k-1)$-плоскостью. Отсюда следует, что в описанной выше ситуации общая $(n-k)$-плоскость будет пересекать X по конечному множеству точек. Более того, то же рассуждение показывает, что общая $(n-k+1)$-плоскость будет пересекаться с X по многообразию, содержащему бесконечно много точек, так как в противном случае общая $(n-k)$-плоскость не будет пересекаться с X. Тем самым мы даем следующее определение.

Определение 11.3. *Размерностью* неприводимого квазипроективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ называется такое целое число k, что общая $(n-k)$-плоскость в $\mathbb{P}^n$ пересекается с X по конечному множеству точек.

Заметим, что из любого из этих определений вытекает факт, представляющийся очевидным: если X неприводимо и если $Y \subset X$ — собственное замкнутое подмногообразие, то $\dim(Y) < \dim(X)$ (или, равносильно, замкнутое подмногообразие неприводимого многообразия X, имеющее ту же размерность, что X, должно совпадать с X).

Вот замечание, являющееся всего лишь переформулировкой того, что мы сказали, но достаточно полезное, чтобы быть сформулированным как отдельное предложение:

Предложение 11.4. *Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — k-мерное многообразие и $\Lambda \cong \mathbb{P}^l$ — произвольное линейное подпространство размерности $l \geqslant n-k$, то Λ должно пересекаться с X.*

Заметим, что это прямое обобщение следствия 3.15. В упражнении 11.38 мы увидим, как обобщить его до такого утверждения: если $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ — произвольные подмногообразия размерностей k и l, причем $k+l \geqslant n$, то $X \cap Y \neq \varnothing$.

Рассуждения, предшествовавшие двум последним определениям, показывают, что всякое многообразие допускает отображение с конечными слоями на проективное пространство, но из них не следует, что размерность этого проективного пространства одна и та же для всех таких отображений. Чтобы убедиться в этом, нам нужна другая характеризация размерности, зависящая только от инварианта самого многообразия X (а не от конкретного вложения в проективное пространство), а именно, от поля функций $K(X)$.

Ключевым наблюдением является предложение 7.16, гласящее, что для конечного доминантного рационального отображения $\varphi\colon X \to Y$ индуцированное вложение полей функций $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ представляет $K(X)$ в виде конечного алгебраического расширения поля $K(Y)$. В нашей нынешней ситуации это означает, что если X имеет размерность n в смысле любого из приведенных определений, т. е. если X допускает конечное отображение $\pi\colon X \to \mathbb{P}^k$, то мы имеем вложение

$$\pi^*\colon K(\mathbb{P}^k) = K(x_1, \ldots, x_k) \hookrightarrow K(X),$$

представляющее $K(X)$ в виде конечного расширения поля $K(x_1, \ldots, x_k)$. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 11.5. *Размерностью* неприводимого многообразия X называется степень трансцендентности поля рациональных функций $K(X)$ над K.

Достоинством этого определения является, конечно, то, что из него ясно, что размерность — инвариант именно многообразия X, а не какого-то конкретного вложения X в проективное пространство. Из него также следует, что размерность — по существу локальное свойство, поскольку поле функций $K(X)$ неприводимого многообразия X является полем частных локального кольца $\mathscr{O}_{X,p}$ в любой точке $p \in X$. В частности, таким способом мы можем определить размерность неприводимого квазипроективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$; заметим, что определенная таким способом размерность X совпадает с размерностью его замыкания. Мы можем также использовать любое из других стандартных определений размерности локального кольца применительно к кольцу $\mathscr{O}_{X,p}$ (длина максимальной цепочки простых идеалов, минимальное число образующих у $\mathfrak{m}$-примарного идеала и т. п.) и получить тем самым определение размерности многообразия; см. [E] или [AM] по поводу подробного обсуждения различных характеризаций размерности локальных колец.

Отметим, в частности, что длина максимальной цепочки простых идеалов в $\mathscr{O}_{X,p}$ совпадает с длиной максимальной цепочки неприводимых подмногообразий

$$\{p\} \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_{k-1} \subset X_k = X,$$

содержащих точку $p \in X$. Можно непосредственно усмотреть, что эта характеризация размерности равносильна определению 11.1, что дает еще одно доказательство того факта, что введенная в этом определении размерность k является единственной.

Чтобы обобщить определение размерности на многообразия, являющиеся, возможно, приводимыми, мы определяем размерность произвольного многообразия как максимум размерностей его неприводимых компонент; мы будем говорить, что X *равноразмерно размерности* k (или просто *равноразмерно*), если все неприводимые компоненты многообразия X имеют одну и ту же размерность k. Можно также определить[1] *локальную размерность* многообразия X в точке $p \in X$, обозначаемую через $\dim_p(X)$, как максимум размерностей неприводимых компонент X, содержащих p. Таким образом, например, X равноразмерно тогда и только тогда, когда $\dim_p(X) = \dim(X)$ для всех $p \in X$.

Заслуживает упоминания следующий основополагающий факт.

Упражнение 11.6. Пользуясь любым определением размерности, докажите, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное квазипроективное многообразие и $Z \subset \mathbb{P}^n$ — произвольная гиперповерхность, не содержащая ни

[1] В этом месте в авторский текст внесены некоторые поправки. — *Прим. ред.*

одной неприводимой компоненты многообразия X, то[1]

$$\dim(Z \cap X) = \dim(X) - 1.$$

(Аналогичным образом, если f — произвольная регулярная функция, не являющаяся тождественным нулем[2] ни на одной неприводимой компоненте X, то ее множество нулей $Y \subset X$ имеет размерность $\dim(X) - 1$.) Этот факт будет использован в доказательстве более [illegible] теоремы 17.24 о полуаддитивности размерности пересечения.

Мы встретимся с еще одной характеризацией размерности в лекции 13; в некотором отношении это будет самое изящное, но и наименее интуитивно ясное из всех наших определений. А сейчас пришло время обсудить свойства размерности и привести ряд примеров.

Пример 11.7. Гиперповерхности

В лекции 1 мы определили гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ как многообразие, являющееся множеством нулей одного однородного многочлена $F(Z)$. Ввиду сказанного выше X будет равноразмерно размерности $n - 1$. В этом месте стоит упомянуть обратное утверждение: равноразмерное подмногообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ коразмерности 1 является гиперповерхностью. Это следует из того факта, что минимальные простые идеалы в кольце $K[Z_0, \ldots, Z_n]$ являются главными. Это также следует из того, что однородный идеал гиперповерхности порожден одним элементом.

Пример 11.8. Полные пересечения

Определение. Мы будем говорить, что k-мерное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ является *полным пересечением*, если его однородный идеал $I(X) \subset \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ порожден $n - k$ элементами.

Заметим, что ввиду упражнения 11.6 число $n - k$ — минимально возможное число образующих идеала k-мерного подмногообразия.

Часто полные пересечения изучают просто потому, что их в некотором смысле очень много: из теоремы 17.16 будет следовать, что если $F_\alpha(Z)$ — общий однородный многочлен степени d_α, где $\alpha = 1, \ldots, n - k$, то множество общих нулей многочленов F_α является полным пересечением. (Мы будем неявным образом использовать этот факт, когда в дальнейшем будем вычислять размерность семейства полных пересечений.) Поэтому легко выписать в явном виде большое количество многообразий, являющихся полными пересечениями. В то же время мы

[1] Если пересечение в формуле ниже непусто. — *Прим. перев.*

[2] Или константой. — *Прим. ред.*

должны заметить, что полные пересечения образуют очень маленький подкласс многообразий; хотя мы и не можем здесь ничего из этого доказать, существуют многочисленные ограничения на топологию полных пересечений (например, если их размерность два или выше, они обязаны быть односвязными) и на их численные инварианты. Полные пересечения могут образовывать маленькое подсемейство даже среди многообразий с фиксированными топологией и численными инвариантами. Пусть, например, $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ состоит из трех неколлинеарных точек; поскольку однородный идеал $I(\Gamma)$ не содержит элементов степени 1, но размерность $I(\Gamma)_2$ равна трем, $I(\Gamma)$ не может иметь меньше трех образующих; стало быть, Γ не является полным пересечением. Более общим образом, имеется следующий факт.

Упражнение 11.9. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ — общий набор d точек. Тогда Γ является полным пересечением тогда и только тогда, когда $n = 1$, или же $d = 1$ или 2, или же $d = 4$ и $n = 2$. Докажите это утверждение при $n = 2$ и $d \leqslant 7$.

Пример с тремя точками в $\mathbb{P}^n$ иллюстрирует разницу между понятиями полного пересечения и *теоретико-множественного полного пересечения*. Подмногообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ размерности k называется теоретико-множественным полным пересечением, если оно является множеством общих нулей $n - k$ однородных многочленов; например, если $\Gamma = \{p, q, r\} \subset \mathbb{P}^2$ состоит из трех неколлинеарных точек, то оно является пересечением любой неприводимой коники, содержащей эти точки, с кубической кривой $\overline{pq} \cup \overline{pr} \cup \overline{qr}$. На самом деле имеет место следующее утверждение, контрастирующее с упражнением 11.9.

Упражнение 11.10. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ — общий набор d точек. Покажите, что Γ является теоретико-множественным полным пересечением.

Другой знаменитый пример, иллюстрирующий различие этих двух понятий, доставляет скрученная кубика, не являющаяся полным пересечением (по той же причине, по которой таковым не являются три неколлинеарные точки в $\mathbb{P}^2$), но являющаяся теоретико-множественным полным пересечением (доказать это труднее, чем для случая трех точек на плоскости). Неизвестно, всякая ли пространственная кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ является теоретико-множественным полным пересечением; это неизвестно даже для кривых $C_{\alpha,\beta}$ из упражнения 1.29.

Упражнение 11.11. Найдите такие однородный квадратичный многочлен $Q(Z_0, \ldots, Z_3)$ и однородный кубический многочлен $P(Z_0, \ldots, Z_3)$, что множество их общих нулей есть нормальная рациональная кривая $C \subset \mathbb{P}^3$. (Указание: мыслите детерминантально!) (*)

Обсуждение из лекции 5 может навести на мысль, что существует и понятие, промежуточное между полными пересечениями и теоретико-множественными полными пересечениями: что будет, если $X \subset \mathbb{P}^n$ — k-мерное многообразие и многочлены $F_1, \ldots, F_{n-k}$ порождают идеал многообразия X локально? В этом случае, однако, оказывается, что X — полное пересечение и $I(X) = (F_1, \ldots, F_{n-k})$. Чтобы доказать это, однако же, требуется немного коммутативной алгебры: все будет вытекать из того утверждения, что, поскольку $F_1, \ldots, F_{n-k}$ является регулярной последовательностью в кольце $K[Z_0, \ldots, Z_n]$, идеал $(F_1, \ldots, F_{n-k})$ не может иметь вложенных простых идеалов; с другой стороны, если бы $(F_1, \ldots, F_{n-k})$ не совпадал со своим насыщением, то несущественный идеал $(Z_0, \ldots, Z_n)$ входил бы в число его ассоциированных простых идеалов.

Еще одним важным понятием является *локально полное пересечение.* Мы будем говорить, что квазипроективное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$, имеющее локальную размерность k в точке $p \in X$, является локально полным пересечением в точке p, если в $\mathbb{P}^n$ существует такая аффинная окрестность $U \ni p$, что идеал пересечения $U \cap X$ в $A(U)$ порождается $n-k$ элементами; равносильное условие: существует такое не содержащее p подмногообразие $Y \subset \mathbb{P}^n$ размерности k, что $X \cup Y$ является полным пересечением. (Интересно, что это свойство самого многообразия X в точке p; оно не зависит от выбора конкретного вложения.) Мы будем говорить, что многообразие X является локально полным пересечением, если оно таково в каждой точке $p \in X$. Простейший пример многообразия, не являющегося локально полным пересечением, — объединение трех координатных осей в $\mathbb{A}^3$.

Простейшие примеры

Имеется ряд многообразий, размерность которых сразу видна из одного из данных выше определений. Например:

• грассманиан $G(k, n)$ содержит в качестве открытого по Зарисскому подмножества аффинное пространство $\mathbb{A}^{k(n-k)}$ и, тем самым, имеет размерность $k(n-k)$;

• если $X \times Y$ — произведение многообразий размерностей d и e, то оно имеет размерность $d+e$;

• если $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое многообразие размерности d, то конус $\overline{pX}$ с вершиной p над X имеет размерность $d+1$, кроме случая, когда X — линейное пространство и $p \in X$;

• проекция $\overline{X} = \pi_p(X)$ многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ размерности d из точки $p \in \mathbb{P}^n$ имеет ту же размерность d, кроме случая, когда X — конус с вершиной p;

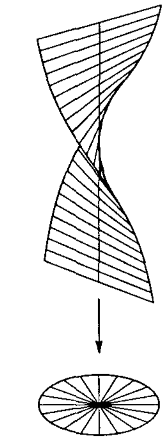
• алгебраические группы $\mathrm{PGL}_n K$, $\mathrm{PO}_n K$ и $\mathrm{PSp}_{2n} K$ имеют размерности n^2-1, $n(n-1)/2$ и $2n^2+n$ соответственно.

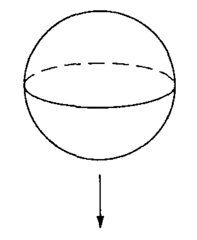
Чтобы находить размерности других многообразий, мы должны знать немного больше о размерности, например, как она себя ведет при отображениях. Основной факт здесь следующий.

Теорема 11.12. *Пусть X — квазипроективное многообразие и $\pi\colon X \to \mathbb{P}^n$ — регулярное отображение; обозначим через Y замыкание его образа. Для всякой точки $p \in X$ обозначим через $X_p = \pi^{-1}(\pi(p)) \subset X$ слой π, проходящий через p, и пусть $\mu(p) = \dim_p(X_p)$ — локальная размерность X_p в точке p. Тогда $\mu(p)$ является полунепрерывной сверху в топологии Зарисского функцией от p, т. е. для всякого m множество таких точек $p \in X$, что $\dim_p(X_p) \geqslant m$, замкнуто в X. Более того, если $X_0 \subset X$ — произвольная неприводимая компонента, $Y_0 \subset Y$ — замыкание ее образа и μ — наименьшее значение $\mu(p)$ на X_0, то*

$$\dim(X_0) = \dim(Y_0) + \mu.$$

Стандартный пример на полунепрерывность сверху $\mu(p)$ — раздутие $\widetilde{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$, имеющее слоем точку над каждой точкой в $\mathbb{P}^2$, кроме раздуваемой точки p, и $\mathbb{P}^1$ над точкой p. Простой пример поведения слоев, ожидаемого в ситуации C^∞-отображений, но запрещаемого теоремой, — проекция двумерной сферы S^2 на прямую, слой которой сначала пуст, затем является точкой, затем окружностью, и обратно.





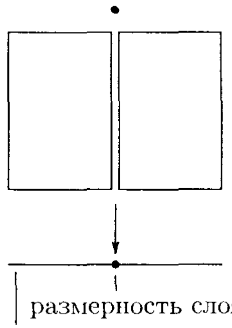
Отметим также, что если X проективно, то мы можем сформулировать эту полунепрерывность в терминах размерности слоя как функции на образе.

Следствие 11.13. *Пусть X — проективное отображение и $\pi\colon X \to \mathbb{P}^n$ — произвольное регулярное отображение; пусть $Y = \pi(X)$ — его образ. Для каждой точки $q \in Y$ положим $\lambda(q) = \dim(\pi^{-1}(q))$. Тогда $\lambda(q)$ является полунепрерывной функцией от q в топологии Зарисского на Y. Более того, если $X_0 \subset X$ — произвольная неприводимая компонента, $Y_0 = \pi(X_0)$ — ее образ и λ — наименьшее значение $\lambda(q)$ на Y_0, то*

$$\dim(X_0) = \dim(Y_0) + \lambda.$$

Условие, что X (и, соответственно, его образ Y) проективно, может быть ослаблено: можно считать, что X квазипроективно и что Y тоже является многообразием. Второе из этих условий не является серьезным ограничением, поскольку мы всегда можем выбрать открытое подмножество $U \subset Y \subset \overline{Y}$

и заменить X на $\pi^{-1}(Y)$. Первое условие накладывается, чтобы исключить дурацкие контрпримеры наподобие того, что получается, если взять в качестве X несвязное объединение $\mathbb{A}^1 \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$ и точки p, а в качестве $\pi\colon X \to \mathbb{A}^1$ — проекцию на второй сомножитель, для которой дополнительно положено $\pi(p) = 0$. Можно также обобщить следствие на рациональные отображения $f\colon X \dashrightarrow Y$, если применить его к графику отображения.



Наконец, перед тем, как приступить к доказательству теоремы 11.12, заметим, что в качестве ее следствия мы имеем следующий критерий неприводимости.

Теорема 11.14. *Пусть $\pi\colon X \to Y$ — регулярное отображение проективных многообразий, причем Y неприводимо. Предположим, что все слои $\pi^{-1}(p)$ отображения π неприводимы и имеют одну и ту же размерность d. Тогда X неприводимо.*

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что X является объединением неприводимых замкнутых подмногообразий X_i; для $p \in Y$ обозначим через $\lambda_i(p)$ размерность слоя отображения $\pi_i = \pi|_{X_i}$. Для каждого p выполняется равенство $\max(\lambda_i(p)) = d$, а поскольку все λ_i полунепрерывны сверху, мы имеем $\lambda_i \equiv d$. Но тогда для каждого $p \in Y$ слой $\pi_i^{-1}(p)$, будучи замкнутым подмногообразием в слое $\pi^{-1}(p)$, имеющим ту же размерность, что и $\pi^{-1}(p)$, должен совпадать с $\pi^{-1}(p)$; отсюда $X_i = X$. □

Упражнение 11.15. Пусть X и Y — неприводимые проективные многообразия, $f\colon X \to Z$ и $g\colon Y \to Z$ — сюръективные отображения. Покажите, что размерность расслоенного произведения удовлетворяет неравенству

$$\dim(X \times_Z Y) \geqslant \dim(X) + \dim(Y) - \dim(Z).$$

Найдите пример, в котором имеет место строгое неравенство. Покажите на примере, что некоторые компоненты $X \times_Z Y$ могут иметь строго меньшую размерность.

Доказательство теоремы 11.12. Доказательство состоит из нескольких редукций и одного более или менее тривиального наблюдения. Во-первых, достаточно доказать теорему для случая, когда X неприводимо. Во-вторых, поскольку утверждение локально, мы можем считать, что X аффинно, и рассматривать отображение $\pi\colon X \to \mathbb{A}^n$. Наконец, поскольку пространство X нётерово, для доказательства полунепрерывности сверху функции μ достаточно показать, что она достигает своего минимума μ_0 на открытом подмножестве (т. е. что существует такое открытое подмножество $U \subset X$, что $\mu \equiv \mu_0$ на U; нам нет нужды доказывать, что $\{p \mid \mu(p) = \mu_0\}$ открыто в X). Стало быть, нам достаточно доказать два утверждения:

(i) $\mu(p) \geqslant \dim(X) - \dim(Y)$ всюду;

(ii) существует такое открытое подмножество $U \subset X$, что $\mu(p) = \dim(X) - \dim(Y)$ для любого $p \in U$.

Доказательство первого утверждения напрямую получается из упражнения 11.6. Именно, из этого предложения следует, что если $\dim(Y) = e$, то для всякой точки $p \in X$ можно найти такой набор функций $f_1, \ldots, f_e$, что множество их общих нулей, принадлежащих Y, есть конечный набор точек, включающий $\pi(p)$. Заменив Y на аффинное открытое подмножество, содержащее $\pi(p)$, но не другие общие нули многочленов $f_1, \ldots, f_e$, а X — на прообраз V, мы можем считать, что множество общих нулей функций f_α есть в точности $\{\pi(p)\}$. Но тогда подмногообразие $X_p \subset X$ есть множество общих нулей функций $\pi^* f_1, \ldots, \pi^* f_e$, и, пользуясь упражнением 11.6 еще раз, мы получаем, что $\mu(p) = \dim_p(X_p) \geqslant \dim(X) - e$.

Для доказательства второго утверждения воспользуемся трюком, который мы уже применяли: мы можем считать, что X является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{A}^{n+m}$, а отображение π — ограничением на X проекции $\pi\colon \mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^n$, заданной формулой $(z_1, \ldots, z_{n+m}) \mapsto (z_1, \ldots, z_n)$. Теперь мы можем разложить отображение π в композицию

$$X = X_m \xrightarrow{\pi_m} X_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} \ldots \xrightarrow{\pi_1} X_0 = Y \subset \mathbb{A}^n,$$

где $X_k \subset \mathbb{A}^{n+k}$ — замыкание образа X при проекции $\mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^{n+k}$, заданной формулой $(z_1, \ldots, z_{n+m}) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n+k})$, а π_k — ограничение проекции $\mathbb{A}^{n+k} \to \mathbb{A}^{n+k-1}$.

Теперь легко убедиться, что теорема 11.12 выполнена для отдельных отображений π_k: ясно, что для отображений π_k размерность $\mu_k(p)$ может равняться только 0 или 1; если $X_k \subset \mathbb{A}^{n+k}$ задается набором многочленов f_α, которые можно записать в виде

$$f_\alpha(z_1, \ldots, z_{n+k}) = \sum a_{\alpha,i}(z_1, \ldots, z_{n+k-1}) \cdot (z_{n+k})^i,$$

то множество точек p, для которых $\mu_k(p) = 1$, будет пересечением X_{n+k} со множеством общих нулей многочленов $a_{\alpha,i}$. Стало быть (учитывая, что X_k будет неприводимо, поскольку неприводимо многообразие X), либо все коэффициенты $a_{\alpha,i}$ тождественно равны нулю на X_{k-1}, μ_k тождественно равно 1 на X_k и $\dim(X_k) = \dim(X_{k-1}) + 1$, либо множество общих нулей коэффициентов $a_{\alpha,i}$ есть подмногообразие $Z_{k-1} \subset X_{k-1}$, отличное от X_{k-1}, μ_k есть нуль вне прообраза этого многообразия, отображение π_k конечно в общей точке на X_k и $\dim(X_k) = \dim(X_{k-1})$.

Заметим, что число значений k, для которых $\mu_k = 1$, совпадает с разностью размерностей $\dim(X) - \dim(Y)$. Для каждого из остальных значений k обозначим через $U_k \subset X$ прообраз открытого множества $X_{k-1} \setminus Z_{k-1}$; пусть $U \subset X$ — пересечение этих открытых подмножеств. Пусть теперь $p \in U$ — произвольная точка. Действуя на X_p последовательно отображениями π_k, мы заключаем, что

$$\dim_p(X_p) \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$$

(мы не можем сразу заключить, что имеет место равенство, поскольку образ многообразия X_p может не быть плотным в слое X_k над $\pi(p)$). Однако же мы уже установили противоположное неравенство для каждой точки p; стало быть,

$$\dim_p(X_p) = \dim(X) - \dim(Y). \qquad \square$$

Упражнение 11.16. (a) Покажите на примере, что в общем случае $\mu \neq \sum \mu_k$ (так что мы не можем вывести полунепрерывность μ непосредственно из аналогичных утверждений для отображений π_k). (b) Обоснуйте третий шаг доказательства: покажите, что для доказательства полунепрерывности μ достаточно проверить, что для всякого отображения π существует открытое подмножество $U \subset X$, на котором μ достигает минимума.

В завершение этого обсуждения заметим, что в качестве следствия теоремы 11.12 мы можем доказать предложение 5.15: если $\pi\colon X \to Y$ — произвольный морфизм и $Z \subset X$ — локально замкнутое подмножество, то для общей точки $p \in Y$ имеем

$$\overline{(Z_p)} = X_p \cap \overline{Z},$$

т. е. замыкание слоя Z_p ограничения $\pi|_Z$ есть слой замыкания $\overline{Z}$ над p.

В самом деле, во-первых, мы можем ограничить отображение π на замыкание Z, т. е. считать, что $X = \overline{Z}$, или, иными словами, что Z — открытое подмножество в X (мы можем также считать X неприводимым). Далее, мы можем считать, что у π плотный образ, поскольку в противном случае обе части доказываемого равенства будут пустыми множествами. Теперь все немедленно получается, если применить теорему 11.12 к отображению π на X и на $W = X \setminus Z$: если размерности Y, X и W равны k, n и $m < n$ соответственно, то локальная размерность X_p не меньше $n - k$ всюду, в то время как для общей точки p размерность W_p должна быть $m - k < n - k$. Следовательно, W_p не может содержать неприводимую компоненту многообразия X_p; стало быть, W_p лежит в замыкании Z_p. □

Теперь мы используем теорему 11.12 (и немного здравого смысла) для нахождения размерности некоторых из многообразий, введенных в части I.

Пример 11.17. Универсальная k-плоскость

В лекции 6 мы определили отношение инцидентности $\Sigma \subset \mathbb{G}(k, n) \times \times \mathbb{P}^n$ по формуле

$$\Sigma = \{(\Lambda, x) \mid x \in \Lambda\}.$$

Как мы тогда отмечали, Σ является «универсальным семейством» k-плоскостей; это просто означает, что это подмногообразие в произведении, чей слой над данной точкой $\Lambda \in \mathbb{G}(k, n)$ есть сама k-плоскость $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$. Стало быть, мы можем применить теорему 11.12 к отображению проекции $\pi_1 \colon \Sigma \to \mathbb{G}(k, n)$ и заключить, что Σ неприводимо и имеет размерность

$$\dim(\Sigma) = k + \dim(\mathbb{G}(k, n)) = nk - k^2 + n.$$

Заметим, что мы могли бы также найти размерность (и установить неприводимость) этого многообразия, глядя на проекцию π_2 (на $\mathbb{P}^n$).

$$\begin{tikzcd} & \Sigma \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{G}(k, n) & & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Слой π_2 над точкой $p \in \mathbb{P}^n$ есть просто подмногообразие в $\mathbb{G}(k, n)$, состоящее из k-плоскостей, содержащих p, и это подмногообразие изоморфно грассманиану $\mathbb{G}(k-1, n-1)$. Стало быть, все слои π_2 неприводимы и имеют размерность $k(n-k)$, а Σ, тем самым, неприводимо и имеет размерность $k(n-k)+n$.

Пример 11.18. Многообразия инцидентных плоскостей

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое многообразие; для всякого k, не превосходящего $n - \dim(X)$, рассмотрим введенное в примере 6.14 многообразие $\mathscr{C}_k(X) \subset \mathbb{G}(k, n)$, состоящее из k-плоскостей, пересекающих X. Мы можем подсчитать размерность $\mathscr{C}_k(X)$, представив его в виде

$$\mathscr{C}_k(X) = \pi_1(\pi_2^{-1}(X)) \subset \mathbb{G}(k, n),$$

где π_1, π_2 — проекции отношения инцидентности, введенные в примере 11.17. Как и в этом примере, все слои π_2 над X изоморфны $\mathbb{G}(k-1, n-1)$; стало быть, они все неприводимы и имеют размерность $k(n-k)$, так что $\Psi = (\pi_2)^{-1}(X)$ неприводимо и имеет размерность $k(n-k) + \dim(X)$. Наконец, поскольку отображение $\Psi \to \mathscr{C}_k(X) \subset \mathbb{G}(k, n)$ конечно в общей точке (на самом деле оно взаимно однозначно в общей точке; см. упражнение 11.23), мы заключаем, что $\mathscr{C}_k(X)$ также неприводимо и имеет размерность $k(n-k) + \dim X$. Словами это выражается так: коразмерность $\mathscr{C}_k(X)$ в $\mathbb{G}(k, n)$ равна разности между коразмерностью X и числом k.

Уже в простейшем примере эта конструкция демонстрирует достаточно интересное поведение. Именно, рассмотрим многообразие $\Phi \subset \mathbb{G}(1, 3)$, состоящее из прямых $l \subset \mathbb{P}^3$, пересекающих данную прямую $X = l_0$. Если обозначить через $\Psi \subset \Sigma \subset \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{P}^3$ отношение инцидентности

$$\Psi = \{(l, p) \mid p \in l\} \subset \Phi \times l_0,$$

то мы увидим, что Ψ отображается на l_0, причем все слои изоморфны $\mathbb{P}^2$; с другой стороны, проекция на Φ взаимно однозначна всюду, кроме как над точкой $l_0 \in \Phi$, слой над который изоморфен $\mathbb{P}^1$.

$$\begin{tikzcd} & \Psi \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{G}(1, 3) \supset \Phi & & l_0 \subset \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

Упражнение 11.19. Чтобы получить другое описание многообразия Φ прямых, пересекающих данную прямую l_0, рассмотрим множество $l_0^* \subset \mathbb{P}^{3*}$, состоящее из плоскостей $H \subset \mathbb{P}^3$, содержащих l_0, и отношение инцидентности

$$\Omega = \{(l, H) \mid l \subset H\} \subset \Phi \times l_0^*.$$

Покажите, что, как и в случае отношения инцидентности Ψ, все слои Ω над l_0^* изоморфны $\mathbb{P}^2$, в то время как отображение $\pi_1 : \Omega \to \Phi$ взаимно однозначно всюду, кроме как над l_0, а слой над l_0 есть $\mathbb{P}^1$. Покажите, что отношения инцидентности Ψ и Ω изоморфны (на самом деле они оба изоморфны нормальному рациональному свитку $X_{2,2,1}$), но между ними нельзя установить изоморфизм, коммутирующий с отображениями на Φ. (*)

Мы будем еще неоднократно встречаться с многообразием Φ в различных его проявлениях. В некотором смысле мы с ним уже встречались в примере 3.1: Φ является квадратичной гиперповерхностью ранга 4 в $\mathbb{P}^4$ (см. также пример 6.3).

Упражнение 11.20. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое невырожденное[1] k-мерное многообразие. Для $l < n - k$ найдите размерность замыкания множества l-плоскостей, пересекающих X не менее чем в двух точках. Покажите на примере, что подобной формулы не существует, если мы заменим «двух» на «трех», даже если наложить условие $l \geqslant 2$.

Упражнение 11.21. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое невырожденное k-мерное многообразие. Покажите, что плоскость, порожденная $n - k + 1$ общей точкой X, пересекает X в конечном числе точек, и воспользуйтесь этим для вычисления размерности замыкания множества l-плоскостей, порожденных своим пересечением с X, при $l \leqslant n - k$.

Пример 11.22. Многообразия секущих

В лекции 8 мы определили многообразие секущих многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$; сейчас мы обсудим, какова его размерность. Для начала напомним, что мы определили отображение секущих

$$s\colon X \times X \setminus \Delta \to \mathbb{G}(1, n)$$

на дополнении к диагонали Δ в $X \times X$, сопоставив паре (p, q) прямую $\overline{pq}$; многообразие секущих $S(X)$ определяется как объединение прямых, соответствующих точкам замыкания образа $\mathscr{S}(X) \subset \mathbb{G}(1, n)$ отображения s. Если теперь X не является линейным подпространством в $\mathbb{P}^n$, то отображение s конечно в общей точке; слой над общей точкой $l = \overline{pq}$ в образе будет иметь положительную размерность в том и только том случае, когда $l \subset X$, а многообразия, содержащие каждую свою секущую, суть в точности линейные подпространства в $\mathbb{P}^n$. Таким образом, размерность многообразия секущих прямых $\mathscr{S}(X)$ всегда равна размерности $X \times X$, то есть удвоенной размерности X.

Упражнение 11.23. С помощью подсчета размерностей покажите, что многообразие $\mathscr{S}(X) \subset \mathbb{G}(1, n)$ секущих прямых многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ размерности $k < n - 1$ является собственным подмногообразием многообразия $\mathscr{C}_1(X)$ инцидентных прямых. Выведите из этого (в характеристике 0), что общая проекция $\pi_\Lambda : X \to \mathbb{P}^{k+1}$ из $(n - k - 2)$-плоскости $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ является бирациональным отображением на свой образ; покажите, в частности, что всякое многообразие бирационально эквивалентно гиперповерхности (ср. с лекцией 7).

[1] См. определение на с. 184. — *Прим. перев.*

Теперь рассмотрим отношение инцидентности

$$\Sigma = \{(l, p) \mid p \in l\} \subset \mathscr{S}(X) \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^n,$$

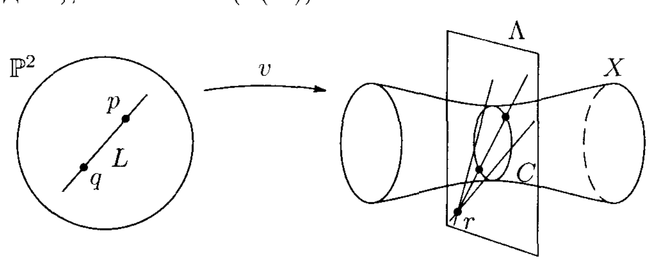
образ которого $\pi_2(\Sigma) \subset \mathbb{P}^n$ есть многообразие секущих $S(X)$. Проекция π_1 на первый сомножитель сюръективна, все ее слои неприводимы и имеют размерность 1; таким образом, Σ неприводимо и имеет размерность $2 \cdot \dim(X) + 1$. Этим доказано следующее предложение.

Предложение 11.24. *Многообразие $\mathscr{S}(X) \subset \mathbb{G}(1, n)$ секущих прямых неприводимого k-мерного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ неприводимо и имеет размерность $2k$. Многообразие секущих $S(X)$ неприводимо и имеет размерность не более $2k + 1$, причем равенство выполнено в том и только том случае, когда через общую точку $p \in \overline{qr}$, лежащую на секущей, проходит лишь конечное число секущих.*

(Заметим, что в этом утверждении нам достаточно рассматривать лишь «настоящие» секущие, то есть прямые, проходящие через две точки на X.)

Упражнение 11.25. Покажите, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимая кривая, то многообразие секущих $S(X)$ трехмерно, если только X не содержится в плоскости.

Иначе дело обстоит с поверхностью Веронезе $X = \nu_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$. Мы утверждаем, что ее многообразие секущих $S(X)$ всего лишь четырехмерно. Это можно увидеть двумя различными способами. Для начала рассмотрим общую точку $r \in \mathbb{P}^5$, лежащую на секущей к X; эту секущую можно записать в виде $\overline{\nu(p), \nu(q)}$ для некоторых $p, q \in \mathbb{P}^2$. Далее, прямая $L = \overline{pq}$ при отображении Веронезе переходит в плоскую конику $C \subset X \subset \mathbb{P}^5$, и так как $r \in \overline{\nu(p), \nu(q)}$, точка r лежит в плоскости Λ, порожденной C. Но тогда всякая прямая в Λ, проходящая через r, является секущей к C, а следовательно, и к X. В частности, отсюда следует, что общая точка секущей к X лежит на одномерном семействе секущих, и размерность $S(X)$, таким образом, не более 4. То, что $S(X)$ не может иметь размерность, меньшую 4, достаточно очевидно (например, в этом случае все конусы $\overline{p, X}$ над X с вершинами в точках $p \in X$ должны были бы совпадать), так что $\dim(S(X)) = 4$.



Другой способ доказательства того, что $\dim(S(X)) = 4$, использует детерминантальную форму уравнений поверхности Веронезе. Напомним, что эти уравнения могут быть представлены как (2×2)-миноры матрицы

$$M = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_3 & Z_4 \\ Z_3 & Z_1 & Z_5 \\ Z_4 & Z_5 & Z_2 \end{pmatrix};$$

другими словами, в пространстве $\mathbb{P}^5$ симметричных (3×3)-матриц множество матриц ранга 1 является поверхностью Веронезе. Однако же линейная комбинация двух матриц ранга 1 имеет ранг, не превосходящий 2, откуда следует, что многообразие $S(X)$ секущих поверхности Веронезе содержится в кубической гиперповерхности, заданной в $\mathbb{P}^5$ уравнением $\det(M) = 0$. (Другими словами, как мы видели в примерах 1.20 и 4.8, множество коник в $\mathbb{P}^2$ параметризовано $\mathbb{P}^5$, причем подмножество двойных прямых есть поверхность Веронезе, так что многообразие секущих поверхности Веронезе есть просто множество коник ранга 1 или 2.)

Будем называть многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ *невырожденным*, если оно порождает $\mathbb{P}^n$, то есть не содержится ни в какой гиперплоскости. Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое невырожденное k-мерное многообразие, у которого многообразие секущих $S(X)$ имеет размерность, строго меньшую, чем $\min(2k+1, n)$, то будем говорить, что X имеет *дефектное многообразие секущих*; в этом случае *дефект* $\delta(X)$ многообразия X определяется как разность

$$\delta(X) = 2k + 1 - \dim(S(X)).$$

Ниже приведено еще несколько примеров многообразий с дефектным многообразием секущих.

Упражнение 11.26. Пусть $\Sigma = \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^8$ — многообразие Сегре. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, покажите (двумя способами), что многообразие секущих многообразия Σ имеет размерность 7, так что дефект Σ есть $\delta(\Sigma) = 2$.

Упражнение 11.27. Пусть $\mathbb{G} = \mathbb{G}(1, n) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 K^{n+1}) = \mathbb{P}^{n(n+1)/2-1}$ — грассманиан прямых в $\mathbb{P}^n$, $n \geqslant 3$. Снова используя аналогичные рассуждения, покажите двумя способами, что многообразие $S(\mathbb{G})$ имеет размерность $4n - 7$, так что $\delta(\mathbb{G}) = 4$.

Упражнение 11.28. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое невырожденное многообразие с дефектным многообразием секущих.

(i) Покажите, что конус $\overline{X} = \overline{p, X} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ над X имеет дефект $\delta(\overline{X}) = \delta(X) + 1$.

(ii) Покажите, что общее гиперплоское сечение $Y = H \cap X$ многообразия X имеет дефект $\delta(Y) = \delta(X) - 1$ (а если $\delta(X) = 1$, то это многообразие не является дефектным). В предложении 18.10 мы покажем, что общее гиперплоское сечение неприводимого невырожденного многообразия размерности $\geqslant 2$ будет снова неприводимо и невырождено.

Первая часть приведенного выше упражнения в числе прочего может служить источником примеров многообразий со сколь угодно большим дефектом. Вот другой, менее тривиальный пример.

Упражнение 11.29. Пусть M — проективное пространство $(m \times n)$-матриц, $M_k \subset M$ — подмногообразие матриц ранга не больше k, определенное в лекции 9; выберем k так, чтобы $2k < \min(m, n)$. Покажите, что многообразие секущих $S(M_k)$ совпадает с подмногообразием $M_{2k} \subset M$ матриц ранга $\leqslant 2k$. Для этого покажите, что для любого отображения $A\colon K^m \to K^n$ ранга $\leqslant 2k$ и любой пары дополнительных k-мерных подпространств Λ, $\Xi \subset \operatorname{Im}(A)$ композиция A с проекциями на Λ и Ξ дает представление A в виде суммы двух матриц ранга $\leqslant k$. Выведите отсюда, что при $\mathbb{P}^n = M$, $X = M_k$ слой отношения инцидентности Σ, определенного в примере 11.22, над общей точкой $S(X)$ имеет размерность $2k^2$, так что

$$\dim(S(M_k)) \leqslant 2 \cdot \dim(M_k) + 1 - 2k^2.$$

Здесь уместно сделать несколько замечаний. С одной стороны, известно, что поверхность Веронезе является единственным примером гладкой поверхности с дефектным многообразием секущих. С другой стороны, про поведение многообразий секущих для многообразий больших размерностей известно намного меньше; например, неизвестно даже, ограничен ли дефект гладких многообразий (как мы увидим при обсуждении гладкости в лекции 14, примеры, доставляемые упражнением 11.29, вообще говоря, особы).

Пример 11.30. Общие многообразия секущих

Начнем с основного вычисления.

Упражнение 11.31. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое невырожденное многообразие размерности k. Используя упражнение 11.21, покажите, что для любого $l \leqslant n - k$ общий слой отображения секущих плоскостей

$$s_l\colon X^{l+1} \dashrightarrow \mathbb{G}(l, n)$$

конечен.

Отсюда видно, что многообразие секущих l-плоскостей, определенное как образ $\mathscr{S}_l(X)$ отображения s_l, всегда имеет размерность $(l+1)k$. Рассуждение с соответствием инцидентности показывает, что многообразие секущих $S_l(X)$, определенное как объединение секущих l-плоскостей, имеет размерность не больше $lk + l + k$, причем равенство выполняется в том и только том случае, когда общая точка $p \in S_l(X)$ лежит лишь на конечном числе секущих l-плоскостей.

Понятно, что про то. когда это условие выполняется, известно еще меньше, чем в случае $l = 1$, обсуждавшемся в предыдущем примере. Так, хотя утверждение о том, что многообразие секущих $S_l(X)$ неприводимой невырожденной кривой $X \subset \mathbb{P}^n$ имеет размерность $2l + 1$, если только это число не превосходит n, верно, его доказательство менее элементарно (оно будет получено как следствие упражнений 16.16 и 16.17). Один очень частный случай, в котором элементарное доказательство все же возможно, — случай нормальной рациональной кривой.

Предложение 11.32. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — нормальная рациональная кривая. Тогда многообразие секущих $S_l(X)$ имеет размерность* $\min(2l + 1, n)$.

Доказательство (для случая $2l + 1 \leqslant n$). Пусть $U \subset \mathscr{S}_l(X)$ — открытое подмножество, состоящее из секущих l-плоскостей, порожденных $l + 1$ различной точкой X (так как образ при отображении s_l дополнения к диагоналям $\Delta \subset X^{l+1}$ плотен и конструктивен, такое U найдется). Достаточно показать, что при $l \leqslant (n-1)/2$ общая точка общей секущей l-плоскости Λ, порожденной точками $p_1, \ldots, p_{l+1} \in X$, не лежит ни на какой другой секущей l-плоскости Λ', где $\Lambda' \in U$. Однако же из утверждения о том, что любые $n + 1 \geqslant 2(l + 1)$ точек на нормальной рациональной кривой независимы (пример 1.14), следует, что пересечение Λ с любой другой $\Lambda' \in U$ содержится в подпространстве Λ, порожденном собственным подмножеством множества $\{p_i\}$. □

Упражнение 11.33. Докажите предложение 11.32 в случае $2l = n$, либо ограничив размерность семейства секущих l-плоскостей, содержащих общую точку $S_l(X)$, либо воспользовавшись предыдущим результатом и тем, что $S_l(X)$ строго содержит $S_{l-1}(X)$ (и, тем самым, имеет бóльшую размерность). Разберите случай $2l > n$ (либо так же, либо сведите его к уже доказанным).

Мы уделили этому примеру столько внимания потому, что он имеет изящную интерпретацию в случае $\mathrm{char}(K) = 0$. Как мы видели в замечании после упражнения 2.10, а затем снова в примере 9.3, если рассматривать $\mathbb{P}^n$ как проективное пространство однородных многочленов степени n на $\mathbb{P}^1$, то множество n-х степеней — это нормальная рациональная кривая. Общая точка многообразия секущих, таким образом, соответствует многочлену, представимому в виде суммы $l + 1$ штуки n-х степеней, так что мы доказали первую часть следующего утверждения.

Следствие 11.34. *Пусть K имеет характеристику 0. Тогда общий многочлен*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

представим в виде суммы d штук n-х степеней

$$f(x) = \sum (\alpha_i x + \beta_i)^n$$

тогда и только тогда, когда $2d - 1 \geqslant n$. Более того, если $2d - 1 = n$, то такое представление единственно.

Упражнение 11.35. (i) Проверьте вторую часть этого утверждения. (ii) Каково наименьшее число m, для которого каждый многочлен степени n представим в виде суммы m штук n-х степеней? $(*)$

У всего этого есть естественный аналог в случае многочленов любого числа переменных; можно точно так же подсчитать ожидаемую размерность многообразия секущих многообразия Веронезе в общем случае и сказать, когда ожидается, что общий многочлен степени n от l переменных разложится в сумму m штук n-х степеней. Когда этот подсчет приводит к правильному ответу, неизвестно (мне, по крайней мере), но бывают случаи, когда ответ другой. Например, наивный подсчет размерностей предсказывает, что общий квадратичный многочлен от двух переменных (или однородный квадратичный многочлен от трех переменных) может быть представлен в виде суммы двух квадратов; но тот факт, что многообразие секущих поверхности Веронезе в $\mathbb{P}^5$ дефектно, означает, что это предсказание не оправдывается (это можно увидеть и непосредственно, если заметить, что сумма двух квадратов — приводимый многочлен).

Пример 11.36. Соединения многообразий

В примерах 6.17 и 8.1 мы определили соединение $J(X, Y)$ двух многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ (частным случаем которого при $X = Y$ является многообразие секущих). Можно заметить, что согласно таким же вычислениям ожидаемая размерность $J(X, Y)$ есть $\dim(X) + \dim(Y) + 1$. На самом деле соединению непересекающихся многообразий значительно труднее не иметь такую размерность. Верно следующее утверждение.

Предложение 11.37. *Пусть $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ — два непересекающихся многообразия. Тогда соединение $J(X, Y)$ имеет размерность в точности $d = \dim(X) + \dim(Y) + 1$ всякий раз, когда $d \leqslant n$.*

Доказательство. Это совсем просто, если X и Y лежат в непересекающихся линейных подпространствах $\mathbb{P}^n$: в этом случае никакие две прямые, соединяющие точки X и Y, не могут пересечься, так что каждая точка соединения лежит лишь на одной прямой, соединяющей X и Y.

Чтобы доказать предложение в общем случае, вложим X и Y заново как подмногообразия $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ непересекающихся линейных подпространств Λ_0, $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$, где Λ_0 — плоскость $Z_0 = \ldots = Z_n = 0$, а Λ_1 — плоскость $Z_{n+1} = \ldots = Z_{2n+1} = 0$. Пусть $\tilde{J} = J(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ — соединение этих двух многообразий, тогда $\dim(\tilde{J}) = \dim(X) + \dim(Y) + 1$. Заметим, что проекция $\pi_L\colon \mathbb{P}^{2n+1} \to \mathbb{P}^n$ из плоскости $L \cong \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$, определенной уравнениями $Z_0 = Z_{n+1}, \ldots, Z_n = Z_{2n+1}$, переводит $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ в X и Y соответственно; более того, из предположения $X \cap Y = \varnothing$ следует, что соединение $\tilde{J}$ не пересекается с L, так что проекция π_L является регулярным отображением $\tilde{J}$ на $J(X, Y)$. Но проекция π_L проективного многообразия из не пересекающегося с ним линейного подпространства L — отображение с конечными слоями; если бы слой $(\pi_L)^{-1}(p)$ содержал кривую C, то C содержалась бы в плоскости $\overline{p, L}$, порожденной p и L, и обязательно пересекалась бы с гиперплоскостью $L \subset \overline{p, L}$. Таким образом, $\pi_L : \tilde{J} \to J(X, Y)$ имеет конечные слои и $\dim(J(X, Y)) = \dim(\tilde{J}) = \dim(X) + \dim(Y) + 1$. □

Упражнение 11.38. Пусть $X, Y, \Lambda_0, \Lambda_1, \tilde{J}$ и L обозначают то же, что и в доказательстве предложения 11.37, но X и Y не предполагаются непересекающимися. Покажите, что если $\dim(X) + \dim(Y) \geqslant n$, то $\tilde{J}$ обязательно пересекается с L; выведите отсюда, что любые два многообразия $X, Y \subset \mathbb{P}^n$, сумма размерностей которых не меньше n, пересекаются.

Следующее утверждение является забавным и полезным следствием упражнения 11.38.

Упражнение 11.39. Покажите, что при $m > n$ не существует непостоянного регулярного отображения $\varphi\colon \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$.

Пример 11.40. Многообразия флагов

Отношение инцидентности из примера 11.17 можно считать частным случаем $\mathbb{F}(0, l, n)$ многообразия флагов

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}(k, l, n) = \{(\Gamma, \Lambda) \mid \Gamma \subset \Lambda\} \subset \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n),$$

определенного в примере 8.34. Размерность общего многообразия флагов может быть найдена таким же способом.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{F} & \\ {}^{\pi_1}\swarrow & & \searrow^{\pi_2} \\ \mathbb{G}(k, n) & & \mathbb{G}(l, n) \end{array}$$

Например, проекция π_1 отображает $\mathbb{F}$ на $\mathbb{G}(k, n)$ со слоями $\mathbb{G}(l-k-1, n-k-1)$ размерности $(l-k)(n-l)$, так что $\mathbb{F}$ неприводимо и имеет размерность

$$\dim(\mathbb{F}(k, l, n)) = \dim(\mathbb{G}(k, n)) + (l-k)(n-l) = \\ = (k+1)(n-k) + (l-k)(n-l);$$

с тем же успехом можно было бы вывести этот результат из того, что $\mathbb{F}$ при помощи π_2 отображается на $\mathbb{G}(l, n)$ со слоями $\mathbb{G}(k, l)$.

Упражнение 11.41. Найдите размерность многообразия флагов $\mathbb{F}(a_1, \ldots, a_l, n)$ в общем случае.

Пример 11.42. Циклы Шуберта (некоторые)

Мы воспользуемся предыдущим примером, чтобы найти размерность некоторых подмногообразий грассманиана, описанных в лекции 6. Как и там, пусть $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ — фиксированная m-плоскость, и пусть

$$\Sigma = \Sigma_k(\Lambda) = \{\Gamma \mid \dim(\Gamma \cap \Lambda) \geqslant k\} \subset \mathbb{G}(l, n).$$

Здесь мы предполагаем, что $m + l - n < k$, так что $\Sigma \neq \mathbb{G}(l, n)$.

Чтобы найти размерность Σ, введем отношение инцидентности

$$\Psi = \{(\Theta, \Gamma) \mid \Theta \subset \Gamma\} \subset \mathbb{G}(k, \Lambda) \times \mathbb{G}(l, n).$$

Проекция на первый сомножитель представляет Ψ как прообраз $\mathbb{G}(k, \Lambda) \subset \mathbb{G}(k, n)$ в многообразии флагов $\mathbb{F}(k, l, n)$, обсуждавшемся выше, и из тех же рассуждений получаем, что Ψ неприводимо и имеет размерность $(k+1)(m-k) + (l-k)(n-l)$; так как отображение проекции $\pi_2 : \Psi \to \Sigma$ взаимно однозначно в общей точке, то же верно и для Σ.

Быть может, более понятной формулировкой было бы «коразмерность образа Ψ в $\mathbb{G}(k, n)$ равна $(k+1) \cdot (k - (m+l-n))$»; первый множитель — это размерность пересечения векторных пространств, соответствующих Γ и Λ, второй — разность между k и числом $m + l - n$, являющимся «ожидаемой» размерностью пересечения m-плоскости и l-плоскости в $\mathbb{P}^n$.

Упражнение 11.43. Найдите размерность более общего отношения инцидентности

$$\Psi = \{(\Gamma, \Lambda) \mid \dim(\Gamma \cap \Lambda) \geqslant m\} \subset \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n).$$

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое k-мерное многообразие. В лекции 4 мы определили универсальное гиперплоское сечение $\Omega_X \subset \mathbb{P}^{n*} \times X$ и показали, что оно неприводимо. В качестве очередного приложения теоремы 11.14 мы можем проверить это и существенно расширить область применимости данного утверждения. Для этого дадим следующее более общее определение.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное многообразие. Назовем *универсальным сечением* $(n-l)$*-плоскостью* (или *универсальным* l*-кратным гиперплоским сечением*) подмногообразие произведения $\mathbb{G}(n-l, n) \times X$, заданное как

$$\Omega^{(l)}(X) = \{(\Lambda, p) \mid p \in \Lambda\}.$$

Упражнение 11.44. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое k-мерное многообразие. Найдите размерность универсального сечения $(n-l)$-плоскостью и покажите, что оно неприводимо.

Лекция 12

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ

Пример 12.1. Детерминантальные многообразия

Как в лекции 9, пусть M будет проективным пространством ненулевых $(m \times n)$-матриц с точностью до умножения на скаляры, а $M_k \subset M$ — многообразием матриц ранга не больше k. Чтобы найти размерность M_k, введем еще одно отношение инцидентности

$$\Psi \subset M \times G(n-k,\, n)$$

следующим образом:

$$\Psi = \{(A,\, \Lambda) \mid \Lambda \subset \mathrm{Ker}(A)\},$$

где матрица A размера $m \times n$ рассматривается как линейное отображение $K^n \to K^m$. Если мы фиксируем Λ, пространство таких отображений $A\colon K^n \to K^m$, что $\Lambda \subset \mathrm{Ker}(A)$, совпадет с пространством $\mathrm{Hom}(K^n/\Lambda,\, K^m)$, и поэтому слои проекции $\pi_2\colon \Psi \to G(n-k,\, n)$ суть проективные пространства размерности $km - 1$. Отсюда выводим, что многообразие Ψ неприводимо и имеет размерность $\dim(G(n-k,\, n)) + km - 1 = k(m+n-k) - 1$. Отображение $\pi_1\colon \Psi \to M$ взаимно однозначно в общей точке, и отсюда мы заключаем, что то же верно и для M_k. Это можно сформулировать в виде следующего предложения.

Предложение 12.2. *Многообразие $M_k \subset M$ матриц $m \times n$ ранга не больше k неприводимо и имеет коразмерность $(m-k)(n-k)$ в M.*

Упражнение 12.3. Покажите, что в неравенстве из упражнения 11.29 имеет место равенство.

Упражнение 12.4. Используйте аналогичную конструкцию, чтобы оценить размерность пространства (i) симметричных матриц $n \times n$ ранга не больше k и (ii) кососимметричных матриц $n \times n$ ранга не больше $2k$.

Пример 12.5. Многообразия Фано

В лекции 6 мы описали многообразие Фано $F_k(X)$, параметризующее линейные пространства размерности k, лежащие на многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$. Сейчас мы оценим его размерность хотя бы для того случая, когда X — общая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$.

Для этого рассмотрим пространство $\mathbb{P}^N$, параметризующее все гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$ (здесь $N = \binom{n+d}{d} - 1$, хотя в вычислениях это не понадобится), и установим соответствие между пространством гиперповерхностей и пространством подпространств размерности k. Именно, определим многообразие $\Phi \subset \mathbb{P}^N \times G(k, n)$ как

$$\Phi = \{(X, \Lambda) \mid \Lambda \subset X\},$$

так что слой Φ над точкой $X \in \mathbb{P}^N$ — многообразие Фано $F_k(X)$. Если образ Φ при отображении проекции $\pi_1 \colon \Phi \to \mathbb{P}^N$ имеет максимально возможную размерность, то для общего X размерность $F_k(X)$ равна размерности Φ минус N.

Чтобы найти размерность Φ, рассмотрим второе отображение проекции $\pi_2 \colon \Phi \to G(k, n)$. Слой этого отображения над произвольной точкой $\Lambda \in G(k, n)$ — пространство гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}^n$, содержащих Λ. Отображение ограничения из множества многочленов степени d на $\mathbb{P}^n$ в множество многочленов степени d на $\Lambda \cong \mathbb{P}^k$ линейно и сюръективно, и поэтому слой π_2 — подпространство размерности $M = \binom{k+d}{d}$ в пространстве $\mathbb{P}^N$ всех гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}^n$. Отсюда следует, что Φ неприводимо и имеет размерность $(k+1)(n-k) + N - M$, а также что ожидаемая размерность общего слоя Φ над $\mathbb{P}^N$, которую мы обозначим $\varphi(n, d, k)$, равна

$$\dim(F_k(X)) = (k+1)(n-k) - \binom{k+d}{d}.$$

Например, ожидаемая размерность многообразия Фано прямых на общей поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ степени d равна $3 - d$. В частности, на общей плоскости в $\mathbb{P}^3$ есть двухпараметрическое семейство прямых (что очевидно), на общей квадрике — однопараметрическое (мы установили раньше, что это именно так) и, наконец, на кубике мы ожидаем найти конечное число прямых (это также верно, что и будет доказано в упражнении 12.7), а на общей поверхности степени $d \geqslant 4$ не лежит ни одной прямой.

Заметьте, что мы вынуждены использовать слово «ожидать», так как предшествующие рассуждения, вообще говоря, не доказывают, что размерность многообразия Фано для общей гиперповерхности задается приведенной выше формулой. Точнее, в случае $\varphi(n, d, k) < 0$ эти рассуждения показывают, что $F_k(X) = \varnothing$ для общего X, но если $\varphi(n, d, k) \geqslant 0$, мы не знаем a priori, отображается ли Φ на $\mathbb{P}^N$ сюръективно или же его образом является некоторое собственное многообразие (так что общее X не содержит подпространств размерности k, но некоторые специальные X содержат более чем $\varphi(n, d, k)$-мерное семейство таковых). И действительно, такое тоже случается. Рассмотрим, например случай $n = 4$, $d = 2$ и $k = 2$, то есть случай плоскостей (двумерных) на квадриках в $\mathbb{P}^4$. Здесь размерность Φ равна размерности $N = 14$ пространства гиперповерхностей степени 2 в $\mathbb{P}^4$, но, как мы увидим дальше, общая квадратичная гиперповерхность $Q \subset \mathbb{P}^4$ не содержит плоскостей. (В этом случае общие конусы над квадриками в $\mathbb{P}^3$, которые составляют подмногообразие коразмерности 1 в многообразии всех квадрик в $\mathbb{P}^4$, содержат однопараметрические семейства плоскостей. На самом деле именно это наблюдение, вместе с подсчетом размерности и фактом неприводимости Φ, заставляет сделать вывод о том, что общая квадрика в $\mathbb{P}^4$ плоскостей не содержит.)

Оказывается, однако же, что все исключительные ситуации относятся к гиперповерхностям степени 2, а при $d \geqslant 3$ формула точна. Мы проверим это явно при $n = 3$, $d = 3$ и $k = 1$ (прямые на кубической поверхности) и оставим общий случай, в котором только обозначения будут сложнее, как упражнение.

Для доказательства того, что Φ сюръективно отображается на $\mathbb{P}^N$, достаточно только предъявить слой отображения Φ, имеющий ожидаемую размерность $\varphi(n, d, k)$. На самом деле, в силу теоремы 11.12, достаточно предъявить такую точку $(X, L) \in \Phi$, что локальная размерность в (X, L) слоя $(\pi_1)^{-1}(\pi_1(X, L)) = F_k(X)$ равна в точности $\varphi(n, d, k)$. Например, в случае $n = 3$, $d = 3$, $k = 1$ достаточно найти кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$, которая содержит изолированную прямую (т.е. такую, что $F_1(S)$ имеет изолированную точку L_0), чтобы показать, что общая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ содержит конечное ненулевое число прямых. В этом частном случае такую поверхность S и прямую L_0 можно явно построить. К примеру, пусть $X = X_{1,2}$ — свиток в $\mathbb{P}^4$, полученный в лекции 8 как объединение всех прямых, соединяющих соответственные точки на прямой L и конике C, лежащей в дополнительной к L плоскости. Нетрудно видеть из этого построения, что прямые, лежащие на X, — это L и прямые, соединяющие L и C; в частности, L — изолированная прямая на X. Более того, если $S = \pi(X)$ — образ X при проекции из общей точки $p \in \mathbb{P}^4$, то образ $L_0 = \pi(L)$ остается изолированным, и множество прямых на S исчерпывается образами прямых на X и образами плоских кривых большей степени на X, причем в последнем случае эти кривые накрывают прямые с кратностью, большей 1, а поскольку отображение $\pi\colon X \to S$ бирационально, таких кривых может быть лишь конечное число.

Упражнение 12.6. (i) Проверьте, что в предыдущем рассуждении поверхность S действительно является кубической поверхностью в $\mathbb{P}^3$. (ii) Проверьте в общем случае сделанное выше утверждение о том, что бирациональное отображение $\pi\colon X \to S$ может терять бирациональность только на конечном множестве кривых в X.

Можно действовать и по-другому: явно выписать уравнения какой-нибудь кубической поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ и прямой $L \subset S$ и проверить, что L изолирована как точка $F_1(S)$, явно выписывая локальные уравнения для $F_1(S)$ в окрестности L. Для этого выберем прямую

$$L_0\colon Z_2 = Z_3 = 0$$

и поверхность

$$S\colon Z_0^2 Z_2 + Z_1^2 Z_3 = 0.$$

Общую прямую на грассманиане $\mathbb{G} = \mathbb{G}(1, 3)$ в окрестности L_0 можно параметризовать с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

следующим образом:

$$[U, V] \mapsto [U, V, aU + cV, bU + dV].$$

Ограничивая задающий S многочлен на эту прямую, получаем кубический многочлен

$$U^2(aU + cV) + V^2(bU + dV) = aU^3 + cU^2V + bUV^2 + dV^3.$$

Таким образом, многообразие Фано $F_1(S)$ в открытом подмножестве $U \subset \mathbb{G}$ задается уравнениями $a = b = c = d = 0$, откуда мы видим, что L_0 — изолированная точка на $F_1(S)$.

На самом деле поверхность S — та же, что и в первом подходе, т. е. проекция двумерного свитка из $\mathbb{P}^4$ (хотя можно было бы, конечно, привести и другие примеры). Стоит заметить, что при этом S имеет одномерное многообразие Фано $F_1(S)$.

Упражнение 12.7. Рассмотрим общие значения n, d и k, для которых $\varphi(n, d, k) = 0$, т. е. мы ожидаем, что общая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$ содержит лишь конечное число подпространств размерности k. Если $d \geqslant 3$, найдите гиперповерхность $X_0 \subset \mathbb{P}^n$ степени d, чье многообразие Фано $F_k(X)$ содержит изолированную точку Λ_0, и выведите отсюда, что на любой такой гиперповерхности лежит линейное подпространство размерности k.

В более общем случае $\varphi(n, d, k) > 0$ ситуация аналогична: за исключением случая квадратичных гиперповерхностей ($d = 2$) при некоторых значениях k, отображение $\Phi \to \mathbb{P}^N$ сюръективно. В итоге имеем следующую теорему.

Теорема 12.8. *Пусть*

$$\varphi(n,\, d,\, k) = (k+1)(n-k) - \binom{k+d}{d}.$$

Тогда для любых n, k и $d \geqslant 3$ многообразие Фано $F_k(X)$ подпространств размерности k на общей гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$ пусто при $\varphi < 0$ и имеет размерность φ, если $\varphi \geqslant 0$.

Доказательство этой теоремы в точности следует предшествующему упражнению, но его, возможно, лучше оставить до обсуждения касательных пространств к многообразиям Фано в примере 16.21. Конечно, в дальнейшем мы сможем больше сказать о геометрии $F_k(X)$ в случае $\varphi \geqslant 0$, а также, коль на то пошло, и в случае $\varphi < 0$. К примеру, хочется верить, что множество гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$, не содержащих подпространство размерности k, имеет размерность $-\varphi$, и оказывается, что это действительно так. Можно исследовать это множество и подробнее (например, в проективном пространстве квартик в $\mathbb{P}^3$ подмногообразие тех, что содержат прямую, является гиперповерхностью степени 320).

В случае $\varphi(n,\, d,\, k) = 0$ (и $d \geqslant 3$) можно вычислить количество подпространств размерности k, лежащих на общей гиперповерхности $X \subset \subset \mathbb{P}^n$ степени d; так, на общей кубической поверхности лежит 27 прямых, на общем трехмерном многообразии степени 5 в $\mathbb{P}^4$ — 2875 прямых, и так далее.

Пространства параметров для скрученных кубик

Теперь обсудим размерность некоторых пространств параметров алгебраических многообразий. Если семейство многообразий X заданного типа параметризовано многообразием $\mathscr{H}$ размерности k, то, согласно классическому словоупотреблению, говорят, что многообразие X из этого семейства «имеет k степеней свободы» или «зависит от k параметров». Например, плоская коника $C \subset \mathbb{P}^2$ имеет 5 степеней свободы.

Конечно, как мы говорили раньше, мы не собираемся строить пространства параметров или доказывать их существование до лекции 21. Сейчас просто поверим, что они ведут себя разумным образом, и попробуем в некоторых случаях определить их размерность.

Пример 12.9. Скрученные кубики

Рассмотрим пространство $\mathscr{H}$ скрученных кубик. Есть несколько способов оценить его размерность. Во-первых, мы можем использовать следующий трюк: как мы видели в лекции 1, через любые шесть точек общего положения в $\mathbb{P}^3$ проходит единственная скрученная кубика. Обозначим через $U \subset (\mathbb{P}^3)^6$ открытое множество, состоящее из шестерок точек общего положения $(p_1, \ldots, p_6)$, и через $\Sigma \subset U \times \mathscr{H}$ отношение инцидентности

$$\Sigma = \{((p_1, \ldots, p_6), C) \mid p_1, \ldots, p_6 \in C, \text{ все точки различны}\}.$$

Множество Σ является многообразием, так как оно может быть реализовано как открытое подмножество в шестикратном расслоенном произведении:

$$\Sigma \subset \mathscr{C} \times_{\mathscr{H}} \mathscr{C} \times_{\mathscr{H}} \ldots \times_{\mathscr{H}} \mathscr{C},$$

где $\mathscr{C} \subset \mathscr{H} \times \mathbb{P}^3$ — универсальная скрученная кубика. По теореме 1.18 многообразие Σ взаимно однозначно отображается на U, поэтому $\dim(\Sigma) = 18$. С другой стороны, слой Σ над любой точкой $C \in \mathscr{H}$ совпадает с дополнением к диагонали $\Delta \subset C^6$ и имеет размерность 6, так что размерность $\mathscr{H}$ должна быть равна 12.

Можно вычислить эту размерность и другим способом. Для этого надо воспользоваться тем обстоятельством, что любую скрученную кубику можно перевести в любую другую с помощью действия $\mathrm{PGL}_4 K$. Фиксируем стандартную скрученную кубику $C_0 \in \mathscr{H}$ и определим отображение $\mathrm{PGL}_4 K \to \mathscr{H}$, которое будет переводить $g \in \mathrm{PGL}_4 K$ в $g(C_0)$. Слой этого отображения над любой кривой $C \in \mathscr{H}$ — подгруппа $\mathrm{PGL}_4 K$, переводящая C в себя, которая, как мы видели в лекции 10, изоморфна группе $\mathrm{PGL}_2 K$. Отсюда получаем:

$$\dim(\mathscr{H}) = \dim(\mathrm{PGL}_4 K) - \dim(\mathrm{PGL}_2 K) = 12.$$

Этот подход по существу эквивалентен следующему: пусть $\mathfrak{M}$ — пространство морфизмов $\nu\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, биективно отображающих $\mathbb{P}^1$ на скрученную кубику. Размерность $\mathfrak{M}$ равна 15, так как $\mathfrak{M}$ можно вложить в качестве открытого подмножества в проективное пространство $\mathbb{P}^{15}$ четверок однородных кубических многочленов на $\mathbb{P}^1$. С другой стороны, образы двух отображений ν и ν' будут совпадать тогда и только тогда, когда они отличаются на автоморфизм $A \in \mathrm{PGL}_2 K$, а именно, $\nu' = \nu \circ A$, так что опять получается $\dim(\mathscr{H}) = 15 - 3 = 12$.

Упражнение 12.10. Найдите размерность пространства параметров для нормальных рациональных кривых $C \subset \mathbb{P}^n$ двумя способами, аналогичными вышеприведенным.

А вот еще один, принципиально иной, способ определить размерность пространства $\mathscr{H}$ скрученных кубик в $\mathbb{P}^3$. Мы уже видели, что скрученная кубическая кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ лежит на квадратичных гиперповерхностях из некоторого семейства $\{Q_\lambda\}$, параметризованного $\lambda \in \mathbb{P}^2$, и что пересечение двух различных квадрик из этого семейства состоит из кривой C и какой-то прямой L. Обратно, если дана прямая L и две общих квадрики Q и Q', содержащие L, то пересечение $Q \cap Q'$ состоит из L и некоторой скрученной кубики C. Это наводит на мысль о другом отношении инцидентности: пусть $\mathbb{P}^9$ — пространство квадрик в $\mathbb{P}^3$, тогда введем отношение Ψ

$$\Psi = \{(C, L, Q, Q') \mid Q \cap Q' = C \cup L\} \subset \mathscr{H} \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^9.$$

В силу сказанного выше, слой Ψ над $L \in \mathbb{G}(1, 3)$ — открытое подмножество произведения $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$, откуда мы можем найти размерность Ψ:

$$\dim(\Psi) = \dim(\mathbb{G}(1, 3)) + 2 \cdot 6 = 16.$$

С другой стороны, слой Ψ над $C \in \mathscr{H}$ — открытое подмножество в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Отсюда получаем:

$$\dim(\mathscr{H}) = \dim(\Psi) - 4 = 12.$$

Упражнение 12.11. Найдите еще раз размерность пространства параметров для нормальных рациональных кривых $C \subset \mathbb{P}^n$, используя конструкцию свитка из примера 9.15 и вычисление, аналогичное проведенному выше. (*)

Пример 12.12. Скрученные кубики на общей поверхности

Зная, что пространство скрученных кубик 12-мерно, мы можем найти все d, для которых общая поверхность степени d содержит скрученную кубическую кривую. Для этого обозначим, как прежде, через $\mathbb{P}^N$ пространство поверхностей степени d в $\mathbb{P}^3$ и через Φ — отношение инцидентности

$$\Phi = \{(S, C) \mid C \subset S\} \subset \mathbb{P}^N \times \mathscr{H}.$$

Чтобы вычислить размерность Φ, рассмотрим отображение проекции $\pi_2 \colon \Phi \to \mathscr{H}$. Слой этого отображения над точкой $C \in \mathscr{H}$ — не что иное, как подмножество в $\mathbb{P}^N$, состоящее из поверхностей степени d, содержащих C. Поскольку отображение ограничения из множества многочленов степени d на $\mathbb{P}^3$ в множество многочленов степени $3d$ на $C \cong \mathbb{P}^1$ линейно и сюръективно, слой — линейное подмножество $\mathbb{P}^N$ размерности $N - (3d + 1)$. Отсюда получаем:

$$\dim(\Phi) = N - (3d + 1) + 12 = N - 3d + 11.$$

В частности, мы можем заключить, что Φ нельзя сюръективно отобразить на $\mathbb{P}^N$, за исключением случая $3d \leqslant 11$. Другими словами, общая поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ степени $d \geqslant 4$ не содержит скрученных кубических кривых.

На основе этих рассуждений можно выдвинуть и гораздо более далеко идущие предположения: что семейство скрученных кубик на поверхности степени $d \leqslant 3$ имеет размерность $11 - 3d$ и что коразмерность в $\mathbb{P}^N$ подмногообразия поверхностей степени d, содержащих скрученную кубику, равна $3d - 11$. Оба эти утверждения действительно верны при $d > 1$, но мы пока не владеем техникой, необходимой для доказательства этого. Один из частных случаев все же достоин упоминания: наличие скрученной кубики на общей кубической поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ может использоваться для доказательства рациональности S. Вкратце, пусть S — кубическая поверхность, а $C \subset S$ — скрученная кубическая кривая. Пусть F_0, F_1, F_2 — базис в пространстве квадратичных многочленов, зануляющихся на C. Рассмотрим рациональное отображение $\varphi\colon S \to \mathbb{P}^2$, заданное следующим образом:

$$[Z] \mapsto [F_0(Z),\, F_1(Z),\, F_2(Z)].$$

Пусть $p \in \mathbb{P}^2$ — общая точка, которая задается двумя линейными уравнениями

$$a_0W_0 + a_1W_1 + a_2W_2 = b_0W_0 + b_1W_1 + b_2W_2 = 0.$$

Тогда прообраз точки p в S состоит из не лежащих на C точек пересечения S и соответствующих квадратичных поверхностей

$$A\colon a_0F_0 + a_1F_1 + a_2F_2 = 0 \quad \text{и} \quad B\colon b_0F_0 + b_1F_1 + b_2F_2 = 0.$$

Но мы видели, что пересечение A и B состоит из C и прямой L, пересекающей C в двух точках q, $r \in C$. Прообраз p как раз будет третьей точкой пересечения L и S, так что отображение φ взаимно однозначно в общей точке.

Упражнение 12.13. Найдите размерность пространства плоских коник $C \subset \mathbb{P}^3$ и покажите, что при $d \geqslant 4$ не каждая поверхность степени d содержит конику. Что ожидается в случае $d = 3$? Покажите, что это так и есть. $(*)$

Пример 12.14. Полные пересечения

Размерность пространства полных пересечений гиперповерхностей заданных степеней в $\mathbb{P}^n$ в общем случае подсчитать нетрудно. В качестве примера мы рассмотрим пространство $\mathscr{U}_{d,e}$ кривых $C \in \mathbb{P}^3$, являющихся полным пересечением поверхностей степеней d и e.

Замечание. В дальнейшем мы будем использовать тот факт, что для общих поверхностей S степени d и T степени e их пересечение $S \cap T$ является полным пересечением, то есть многочлены F и G, задающие S и T, порождают радикальный идеал в $K[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3]$. Если этот факт из коммутативной алгебры вам незнаком, имейте в виду, что он будет доказан у нас в предложении 17.18.

Предположим для начала, что $d < e$. Тогда, если C — полное пересечение поверхностей S и T степеней d и e, поверхность S однозначно определяется по $C \subset \mathbb{P}^3$ как множество нулей единственного (с точностью до скаляра) многочлена F в d-й градуировочной компоненте однородного идеала $I(C)_d$. Напротив, T задана только по модулю многочленов степени e, зануляющихся на S, поэтому T можно считать элементом проективного пространства, получающегося проективизацией пространства $I(S)_e$ многочленов степени e. Поэтому рассмотрим отображение из $\mathscr{U}_{d,e}$ в пространство $\mathbb{P}^N$ поверхностей степени d, переводящее кривую C в поверхность S.

Заметим, что размерность пространства многочленов степени e равна $\binom{e+3}{e}$, а пространство многочленов, равных нулю на S (т. е. делящихся на F), изоморфно пространству многочленов степени $e-d$ и имеет размерность $\binom{e-d+3}{3}$. Отсюда следует, что слой $\mathscr{U}_{d,e}$ над общей поверхностью $S \in \mathbb{P}^N$ — открытое подмножество проективного пространства размерности

$$\binom{e+3}{3} - \binom{e-d+3}{3} - 1 = \frac{d^3 - 3d^2e - 6d^2 + 3de^2 + 12de + 11d - 6}{6} = $$
$$= \binom{d-1}{3} + e \cdot d \cdot \frac{e-d+4}{2}.$$

Поэтому $\mathscr{U}_{d,e}$ имеет размерность

$$\binom{d+3}{3} - 1 + \binom{d-1}{3} + e \cdot d \cdot \frac{e-d+4}{2} = \frac{d^3 + 11d - 3}{3} + e \cdot d \cdot \frac{e-d+4}{2}.$$

Если же $d = e$, мы можем реализовать пространство $\mathscr{U}_{d,d}$ как открытое подмножество грассманиана двумерных подпространств пространства многочленов степени d на $\mathbb{P}^3$; получаем:

$$\dim(\mathscr{U}_{d,d}) = 2 \cdot \binom{d+3}{3} - 4.$$

Заметим, что это отличается на единицу от оценки, получаемой из предыдущей формулы приравниванием $d = e$. Разница в том, что теперь S восстанавливается по C не однозначно. Чтобы яснее это увидеть, рассмотрите отношение инцидентности пар (C, S), где $C \subset S$.

Пример 12.15. Кривые типа $(a,\ b)$ на некоторой квадрике

Мы можем вычислить размерность еще одного семейства кривых в $\mathbb{P}^3$ — семейства $\mathscr{V}_{a,b}$ кривых $C \subset \mathbb{P}^3$, которые имеют тип $(a,\ b)$ на некоторой гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^3$. (Это значит, что при изоморфизме $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ кривая C задается биоднородным многочленом степени $(a,\ b)$ без кратных компонент.) Здесь, если $a \geqslant 3$ или $b \geqslant 3$, то C однозначно задает квадрику Q, которая в этом случае является объединением всех прямых, являющихся трисекущими кривой C. Таким образом, пространство $\mathscr{V}_{a,b}$ отображается на открытое подмножество U в пространстве $\mathbb{P}^9$ всех квадрик. Более того, слой над заданной поверхностью Q будет открытым подмножеством объединения проективных пространств многочленов степеней $(a,\ b)$ и $(b,\ a)$ (если задана только квадрика Q, у нас нет канонического способа различать ее прямолинейные образующие). Размерность каждого из этих пространств равна $(a+1)(b+1)-1 = ab+a+b$, поэтому имеем

$$\dim(\mathscr{V}_{a,b}) = ab + a + b + 9.$$

Заметим, что из этого описания невозможно определить, из одной или двух неприводимых компонент состоит $\mathscr{V}_{a,b}$; на самом деле это пространство неприводимо.

Упражнение 12.16. Пусть $a, b \leqslant 2$. Определите размерность $\mathscr{V}_{a,b}$ с помощью отношения инцидентности между кривыми и квадриками. В частности, проверьте, что для пространства скрученных кубик $\mathscr{V}_{2,1}$ ответ получается тот же, что и раньше.

Упражнение 12.17. Убедитесь, что кривая типа $(1,\ d-1)$ на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^3$ — рациональная кривая степени d, т.е. образ $\mathbb{P}^1$ при отображении в $\mathbb{P}^3$, заданном четырьмя однородными многочленами степени d на $\mathbb{P}^1$, или, что то же самое, проекция нормальной рациональной кривой из $\mathbb{P}^d$. Подсчетом параметров покажите, что при $d \geqslant 5$ общая рациональная кривая степени d не является кривой степени $(1,\ d-1)$ на квадрике.

Пример 12.18. Детерминантальные многообразия

Иногда получается что-то доказать для общего члена некоторого семейства многообразий простым подсчетом размерности. Вспомним, например, что в упражнении 9.18 мы утверждали, что для достаточно больших d общая поверхность степени d в $\mathbb{P}^3$ не является линейным детерминантальным многообразием, то есть не может быть задана как множество вырождения некой $(d \times d)$-матрицы линейных форм в $\mathbb{P}^3$. На самом деле, как мы сейчас увидим, это верно для всех $d \geqslant 4$. Чтобы это доказать, посчитаем параметры, или, другими словами, оценим размерность пространства поверхностей, представляющихся в таком виде.

В самом деле, пусть U — пространство матриц размера $d \times d$, составленных из линейных форм на $\mathbb{P}^3$, с определителем, не равным тождественно нулю (как многочлен степени d на $\mathbb{P}^3$), с точностью до умножения на скаляр. Пространство U, являющееся открытым подмножеством проективного пространства размерности $4d^2 - 1$, отображается на пространство $\mathbb{P}^N$ поверхностей степени d в $\mathbb{P}^3$. Далее, любую матрицу $M = (L_{i,j})$, составленную из линейных форм, мы можем умножить справа или слева на $(d \times d)$-матрицу скаляров, не меняя множество нулей определителя — иными словами, на слоях U над $\mathbb{P}^N$ действует группа $\mathrm{PGL}_d K \times \mathrm{PGL}_d K$. Более того, можно проверить, что для общей M ее стабилизатор относительно этого действия тривиален; отсюда мы заключаем, что размерность подпространства в $\mathbb{P}^N$, состоящего из поверхностей, представимых как линейные детерминантальные многообразия, не превосходит

$$4d^2 - 1 - 2(d^2 - 1) = 2d^2 + 1.$$

Сравнивая эту величину с размерностью $N = \binom{d+3}{3} - 1$, заключаем, что для $d \geqslant 4$ общая поверхность степени d в $\mathbb{P}^3$ не является детерминантальным многообразием.

На самом деле размерность множества всех детерминантальных поверхностей $S \subset \mathbb{P}^3$ степени d в точности равна $2d^2 + 1$. В частности, при $d = 4$ получаем гиперповерхность в пространстве квартик $\mathbb{P}^{34}$.

Упражнение 12.19. Рассмотрим возможные представления поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ в виде более общего детерминантального многообразия, например, в виде множества нулей матрицы 2×2, составленной из многочленов. В пространстве $\mathbb{P}^N$ всех поверхностей степени d выделим подмножество $\Phi_{a,b}$ поверхностей, имеющих следующий вид:

$$S = \left\{ [Z] \mid \begin{vmatrix} F(Z) & G(Z) \\ H(Z) & K(Z) \end{vmatrix} = 0 \right\},$$

где $\deg F = a$, $\deg G = b$, $\deg H = d - b$ и $\deg K = d - a$. Оцените размерность $\Phi_{a,b}$ и покажите снова, что общая поверхность степени $d \geqslant 4$ не лежит в $\Phi_{a,b}$ ни при каких a и b.

Заметим, что в случае $d = 4$ каждый возможный выбор a и b задает некоторую гиперповерхность в пространстве квартик $\mathbb{P}^{34}$. Конечно, мы уже встречались с некоторыми из этих гиперповерхностей: например, поверхность S, заданная условием

$$\begin{vmatrix} L(Z) & M(Z) \\ H(Z) & K(Z) \end{vmatrix} = 0,$$

где L и M — линейные формы, содержит прямую $\Lambda \subset \mathbb{P}^3$, заданную уравнениями $L(Z) = M(Z) = 0$. Обратно, если S содержит эту прямую, то многочлен, задающий S, лежит в однородном идеале $I(\Lambda)$ и может быть представлен в виде линейной комбинации $K(Z) \cdot L(Z) - H(Z) \cdot M(Z)$. Поэтому гиперповерхность $\Phi_{1,1}$ совпадает с множеством квартик, содержащих прямую. Аналогично, неприводимая квартика лежит в $\Phi_{1,2}$ тогда и только тогда, когда она содержит плоскую конику; она может быть задана как множество нулей определителя

$$\begin{vmatrix} L_{11}(Z) & L_{12}(Z) & L_{13}(Z) \\ L_{21}(Z) & L_{22}(Z) & L_{23}(Z) \\ Q_1(Z) & Q_2(Z) & Q_3(Z) \end{vmatrix} = 0,$$

где L_{ij} линейны, а Q_i квадратичны, тогда и только тогда, когда она лежит в замыкании множества квартик, содержащих скрученную кубическую кривую.

Упражнение 12.20. Проверьте последнее утверждение.

Упражнение 12.21. Проверьте вычисление (пример 12.15) размерности семейства кривых типа $(a,\ a-1)$ на квадратичной поверхности, задавая такую кривую $C \subset \mathbb{P}^3$ как детерминантальное многообразие:

$$C = \left\{ [Z] \,\middle|\, \operatorname{rank} \begin{pmatrix} L_{11}(Z) & L_{12}(Z) & F(Z) \\ L_{21}(Z) & L_{22}(Z) & G(Z) \end{pmatrix} \leqslant 1 \right\},$$

где L_{ij} линейны, а F и G имеют степень $a-1$ (сравните с упражнением 9.17).

Действия групп

В качестве последнего примера подсчета размерности рассмотрим действие алгебраической группы G на многообразии X. В этом частном случае теорема 11.12, примененная к отображению $G \to X$, переводящему $g \in G$ в $g(x_0)$ для некоторого заданного $x_0 \in X$, говорит, что размерность G равна сумме размерности орбиты $G \cdot x_0$ и размерности стабилизатора x_0 в G. Мы здесь будем использовать в основном более грубую версию этой теоремы, а именно, тот факт, что орбиты G имеют размерность не больше $\dim(G)$. В частности, действие G на X может быть *квазиоднородным*, то есть иметь плотную орбиту, только если $\dim(G) \geqslant \dim(X)$.

Пример 12.22. $\mathbf{GL}(V)$ действует на $\mathrm{Sym}^d V$ и $\bigwedge^k V$

Сначала рассмотрим действие группы $\mathrm{GL}_n K$ на пространстве однородных многочленов степени d от n переменных. Сопоставив размерность $\mathrm{GL}_n K$, равную n^2, и размерность $\mathrm{Sym}^d(K^n)$, равную $\binom{d+n-1}{n-1}$, мы можем заключить, что число гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}^{n-1}$, взятых с точностью до проективной эквивалентности, будет в общем случае конечным только для $d = 1$ либо 2, или в случае $d = 3$, $n = 2$. Легко проверить, что в каждой из этих ситуаций число гиперповерхностей действительно будет конечным.

Похожая картина получается для действия $\mathrm{GL}_n K$ на $\bigwedge^k(K^n)$ при $n \geqslant 2k$. Размерность $\bigwedge^k(K^n)$ равна $\binom{n}{k}$, и поэтому число кососимметрических k-линейных форм на n-мерном векторном пространстве V, взятых с точностью до автоморфизмов V, будет конечным только при $k = 2$ и произвольном n или же при $k = 3$ и $n = 6$, 7 или 8.

Упражнение 12.23. Покажите, что число орбит действия $\mathrm{GL}_6 K$ на $\bigwedge^3 K^6$ конечно (оно равно четырем, не считая орбиты $\{0\}$). Попробуйте связать это с геометрией грассманиана $G(3, 6) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^3 K^6)$. (*)

Пример 12.24. $\mathbf{PGL}_{n+1} K$ действует на $(\mathbb{P}^n)^l$ и $\mathbb{G}(k, n)^l$

Сравнивая размерности $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ и $(\mathbb{P}^n)^l$, равные, соответственно, $n^2 + 2n$ и $l \cdot n$, мы видим, что общие наборы l точек в $\mathbb{P}^n$ можно перевести друг в друга только при $l \leqslant n + 2$, что представляет собой слабую версию известного утверждения (упражнение 10.5), гласящего, что существует единственный автоморфизм $\mathbb{P}^n$, переводящий заданные $n + 2$ точки общего положения в другие заданные $n + 2$ точки. Заметим, что действие $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ на $(\mathbb{P}^n)^l$ для $4 \leqslant l \leqslant n + 2$ дает пример действия с бесконечным числом орбит, имеющего при этом плотную орбиту.

Существенно более интересные эффекты возникают при рассмотрении более общих конфигураций линейных пространств, например, наборов из l пространств размерности k. Размерность $\mathbb{G}(k, n)^l$ равна $l \cdot (k + 1) \cdot (n - k)$, и отсюда можно заключить, что общие наборы из l подпространств размерности k в $\mathbb{P}^n$ переводятся один в другой только если $l \cdot (k + 1) \cdot (n - k) \leqslant n^2 - 1$. Но, как показывает следующее упражнение, это действие не всегда ведет себя так, как мы того ожидаем.

Упражнение 12.25. Покажите, что стабилизатор общей точки $\mathbb{G}(1, 3)^4$ в $\mathrm{PGL}_4 K$ одномерен, несмотря на то, что $\dim(\mathbb{G}(1, 3)^4) > \dim(\mathrm{PGL}_4 K)$. Можете ли вы явно описать все орбиты, лежащие в открытом множестве $U \subset \mathbb{G}(1, 3)^4$, состоящем из четверок попарно скрещивающихся прямых? (*)

Упражнение 12.26. Покажите, что общие четверки прямых в $\mathbb{P}^4$ могут быть переведены друг в друга элементом $\mathrm{PGL}_5 K$, как это и следует из подсчета размерностей. Верно ли аналогичное утверждение для четверок двумерных плоскостей в $\mathbb{P}^6$? Более общим образом, есть ли пример, в котором $\dim(\mathbb{G}(k, n)^l) \geqslant n^2 + 2n$, но у действия $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ на $\mathbb{G}(k, n)^l$ нет плотной орбиты? (*)

Упражнение 12.27. Покажите, что если еще обобщить последнее упражнение, то ответ будет отрицательным; покажите, например, что действие $\mathrm{PGL}_3 K$ на пространстве $(\mathbb{P}^2)^2 \times (\mathbb{P}^{2*})^2$ не имеет плотной орбиты.

Лекция 13

МНОГОЧЛЕНЫ ГИЛЬБЕРТА

Функции Гильберта и многочлены Гильберта

Коль скоро проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ является пересечением гиперповерхностей, один из первых вопросов, которые можно задать про это многообразие, — как описать гиперповерхности, его содержащие. В частности, хочется узнать, сколько гиперповерхностей данной степени содержат X, т. е. выяснить для каждого значения m, какова размерность векторного пространства однородных многочленов степени m, тождественно равных нулю на X. Чтобы собрать всю эту информацию воедино, определим функцию

$$h_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

где $h_X(m)$ равно коразмерности (в пространстве однородных многочленов степени m на $\mathbb{P}^n$) пространства многочленов, тождественно равных нулю на X; иными словами,

$$h_X(m) = \dim(S(X)_m),$$

где $S(X) = K[Z_0, \ldots, Z_n]/I(X)$ — однородное координатное кольцо, а индекс m означает однородную компоненту степени m. Функция h_X называется *функцией Гильберта* многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$.

Начнем, например, с простейшего случая, когда X состоит из трех точек на плоскости $\mathbb{P}^2$. Тогда $h_X(1)$ говорит нам, коллинеарны ли эти три точки: имеем

$$h_X(1) = \begin{cases} 2, & \text{если три точки коллинеарны,} \\ 3 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С другой стороны, мы утверждаем, что $h_X(2) = 3$ при любом расположении точек. Чтобы увидеть это, заметим, что существует многочлен второй степени, равный нулю в двух точках p_i и p_j, но не равный нулю в третьей точке p_k: умножим линейную форму, равную нулю в p_i, но не в p_k, на форму, равную нулю в p_j, но не в p_k. Таким образом, отображение из пространства многочленов второй степени в K^3, задаваемое значениями в точках p_i, сюръективно[1], поэтому ядро имеет

[1]Конечно, однородные многочлены не принимают значений в точках проективного пространства. Обычно, говоря «отображение из пространства многочленов второй

размерность 3. Аналогично получаем, что $h_X(m) = 3$ для всех $m \geqslant 3$, независимо от расположения точек.

Аналогично, если $X \subset \mathbb{P}^2$ состоит из четырех точек, то возможны две функции Гильберта. Может быть либо

$$h_X(m) = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 1, \\ 3 & \text{при } m = 2, \\ 4 & \text{при } m \geqslant 3, \end{cases}$$

если точки коллинеарны, либо

$$h_X(m) = \begin{cases} 3 & \text{при } m = 1, \\ 4 & \text{при } m \geqslant 2, \end{cases}$$

если нет.

Видно, стало быть, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — конечное множество точек, то значения $h_X(m)$ для малых m дают нам информацию о расположении этих точек (например, $h_X(1) - 1$ — размерность подпространства в $\mathbb{P}^n$, которое они порождают); если же не ограничиваться малыми m, то имеет место следующее утверждение.

Упражнение 13.1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — множество из d точек. Покажите, что при всех значениях m, достаточно больших относительно d (а именно, при $m \geqslant d - 1$), имеет место равенство $h_X(m) = d$.

В качестве примера с многообразием положительной размерности рассмотрим кривую $X \subset \mathbb{P}^2$, т. е. множество нулей многочлена $F(Z)$ степени d. Компонента степени m идеала $I(X)$ кривой X состоит из многочленов степени m, делящихся на F. Стало быть, мы можем отождествить $I(X)_m$ с пространством многочленов степени $m - d$, так что

$$\dim(I(X)_m) = \binom{m - d + 2}{2},$$

и при $m \geqslant d$ имеем

$$h_X(m) = \binom{m + 2}{2} - \binom{m - d + 2}{2} = d \cdot m - \frac{d(d-3)}{2}.$$

Можно заметить, что в рассмотренных нами примерах h_X как функция от m ведет себя довольно хорошо, в частности, при больших m это многочлен. Сейчас мы увидим, что то же верно и в общем случае.

Предложение 13.2. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — многообразие и h_X — его функция Гильберта. Тогда существует такой многочлен p_X, что для всех*

степени в K^3, заданное значениями в точках p_i», мы будем подразумевать, что это отображение задается значениями на векторах $v_i \in K^{n+1}$, лежащих над p_i; на ранг отображения выбор векторов v_i не влияет.

достаточно больших m выполнено равенство $h_X(m) = p_X(m)$; степень многочлена p_X равна размерности многообразия X.

Многочлен p_X называется *многочленом Гильберта* многообразия X. С точки зрения логики изложения, возможно, имело бы смысл определить размерность многообразия именно как степень его многочлена Гильберта, а потом вывести все остальные определения из этого; поскольку, однако же, определение через многочлен Гильберта представляется наименее наглядным, мы избрали другой путь.

Доказательство. Мы докажем предложение 13.2 с помощью утверждения, доказательство которого (немедленно получающееся из теоремы Бертини) будет дано как упражнение 17.19. Сформулируем это утверждение: пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое многообразие размерности k и $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k} \subset \mathbb{P}^n$ — общее линейное подпространство дополнительной размерности, так что пересечение $Y = X \cap \Lambda$ состоит из конечного набора точек. Мы утверждаем, что тогда идеалы X и Λ вместе локально порождают идеал Y, т. е. что насыщение $\overline{(I(X),\ I(\Lambda))}$ совпадает с $I(Y)$. (Для читателя, уже знакомого с понятиями гладкости и касательного пространства к многообразию, мы можем сформулировать это условие более геометрично: оно означает, что в гладких точках X многообразия X и Λ пересекаются трансверсально.)

Имея в виду это утверждение, обозначим через Λ общую $(n-k)$-плоскость в $\mathbb{P}^n$, и пусть $L_1, \ldots, L_k$ — линейные формы на $\mathbb{P}^n$, порождающие идеал Λ. Определим идеалы

$$I(X) = I^{(0)} \subset I^{(1)} \subset \ldots \subset I^{(k)} \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$$

следующим образом:

$$I^{(\alpha)} = (I(X),\ L_1, \ldots, L_\alpha)$$

(в частности, наше утверждение означает, что насыщение идеала $I^{(k)}$ совпадает с $I(Y)$). Пусть $S^{(\alpha)} = K[Z_0, \ldots, Z_n]/I^{(\alpha)}$ — факторкольцо, и определим функции $h^{(\alpha)}$ по формуле

$$h^{(\alpha)}(m) = \dim((S^{(\alpha)})_m),$$

так что $h^{(0)}(m) = h_X(m)$ и, ввиду нашего утверждения и упражнения 13.1, функция $h^{(k)}$ есть константа (равная d — числу точек во множестве Y) при достаточно больших m.

Заметим теперь, что поскольку размерность Y на k меньше размерности X, размерность многообразия, определенного идеалом $I^{(\alpha)}$, в точности равна $k - \alpha$; в частности, образ $L_{\alpha+1}$ в $S^{(\alpha)}$ не является делителем нуля. Поэтому умножение на $L_{\alpha+1}$ определяет вложение

$(S^{(\alpha)})_{m-1} \hookrightarrow (S^{(\alpha)})_m$ с фактором $(S^{(\alpha+1)})_m$; отсюда вытекает, что

$$h^{(\alpha+1)}(m) = h^{(\alpha)}(m) - h^{(\alpha)}(m-1),$$

т. е. $h^{(\alpha+1)}$ — одна из разностей функции $h^{(\alpha)}$.

Из всего сказанного вытекает, что (для больших m) k-я разность функции Гильберта $h_X(m)$ есть $h^{(0)}(m)$, т. е. константа d; стало быть, для больших m функция $h_X(m)$ будет многочленом степени k от m. □

В замечании 13.10 мы приведем другое рассуждение, показывающее, что степень многочлена, с которым $h_X(m)$ совпадает при больших m, совпадает с размерностью X, если известно, что при больших m это действительно многочлен.

Отметим, что из нашего рассуждения вытекает, что старший член многочлена Гильберта $p_X(m)$ равен $(d/k!) \cdot m^k$, где d — число точек пересечения X с общей $(n-k)$-плоскостью Λ. Число d называется *степенью* многообразия X; мы определим и изучим степень в лекции 18.

Пример 13.3. Функция Гильберта нормальной рациональной кривой

Вычислить ее легко. При отображении

$$\nu_d\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d,$$
$$[X_0, X_1] \mapsto [X_0^d, X_0^{d-1}X_1, \ldots, X_1^d],$$

прообраз пространства однородных многочленов степени m в координатах $[Z_0, \ldots, Z_d]$ на $\mathbb{P}^d$ есть все пространство однородных многочленов степени $m \cdot d$ от X_0 и X_1. Если $X \subset \mathbb{P}^d$ — образ этого отображения, то $S(X)_m$ изоморфно пространству однородных многочленов степени $m \cdot d$ от двух переменных. Поэтому

$$h_X(m) = p_X(m) = d \cdot m + 1.$$

Пример 13.4. Функция Гильберта многообразия Веронезе

Точно так же можно выписать функцию Гильберта многообразия Веронезе $X = \nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$. Заметим, что прообраз пространства многочленов степени m на $\mathbb{P}^N$ есть пространство многочленов степени $d \cdot m$ на $\mathbb{P}^n$. Размерность пространства $S(X)_m$ — это размерность пространства многочленов степени $d \cdot m$ на $\mathbb{P}^n$, поэтому

$$h_X(m) = p_X(m) = \binom{m \cdot d + n}{n}.$$

Упражнение 13.5. Найдите функцию Гильберта гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$ и убедитесь, что размерность этого многообразия действительно равна $n-1$.

Упражнение 13.6. Найдите функцию Гильберта многообразия Сегре $\Sigma_{n,m} = \sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ и убедитесь, что размерность этого многообразия действительно равна $n+m$.

Пример 13.7. Многочлены Гильберта кривых (для тех, кто знаком с теоремой Римана—Роха для кривых)

Чтобы увидеть на примере, какого рода информация может содержаться в многочлене Гильберта, рассмотрим кривую $X \subset \mathbb{P}^n$; на время предположим, что $K = \mathbb{C}$ и что X — комплексное подмногообразие в $\mathbb{P}^n$, т.е. риманова поверхность. Предположим, что гиперплоскость $(Z_0 = 0)$ пересекает X трансверсально в d точках $p_1, \ldots, p_d$. Тогда однородному многочлену $F(Z)$ степени m можно сопоставить мероморфную функцию $F(Z)/Z_0^m$ на X; это дает вложение пространства $S(X)_m$ однородных многочленов, по модулю равных нулю на X, в пространство $\mathscr{L}(m \cdot p_1 + \ldots + m \cdot p_d)$ мероморфных функций на X, голоморфных вне точек p_i и с полюсом порядка не больше m в каждой точке p_i. Если m велико, происходят две вещи. Во-первых, дивизор $m \cdot p_1 + \ldots + m \cdot p_d$ становится неспециальным, так что по формуле Римана—Роха имеем $\dim \mathscr{L}(m \cdot p_1 + \ldots + m \cdot p_d) = md - g + 1$; во-вторых, отображение $S(X)_m \to \mathscr{L}(m \cdot p_1 + \ldots + m \cdot p_d)$ становится изоморфизмом. Следовательно,

$$p_X(m) = md - g + 1.$$

Заметим, что коэффициент в линейной части — степень кривой d, а свободный член равен $1 - g$ и тем самым сообщает нам ее род. На самом деле можно распространить понятие рода на случай произвольных полей K и особых кривых: для любой кривой $X \subset \mathbb{P}^n$ с многочленом Гильберта $p_X(m) = a \cdot m + b$ число $1 - b$ называется *арифметическим родом* кривой X.

Отметим еще, что вычисление функции Гильберта плоской кривой $X \subset \mathbb{P}^2$ степени d показывает, что род гладкой плоской кривой равен $\binom{d-1}{2}$, а в общем случае это число равно арифметическому роду любой плоской кривой степени d.

Упражнение 13.8. Найдите арифметический род: (i) пары скрещивающихся прямых в $\mathbb{P}^3$; (ii) пары пересекающихся прямых в $\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{P}^3$; (iii) тройки пересекающихся, но не компланарных прямых в $\mathbb{P}^3$; (iv) тройки пересекающихся компланарных прямых в $\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{P}^3$. (*)

Упражнение 13.9. Рассмотрим плоскую кривую $X \subset \mathbb{P}^2$ степени d и ее образ $Y = \nu_2(X) \subset \mathbb{P}^5$ при отображении Веронезе (степени 2) $\nu_2 \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$. Сравните их многочлены Гильберта и заметьте, в частности, что арифметический род не изменился.

На самом деле (и упражнение 13.9 наводит на эту мысль) свободный член $p_X(0)$ многочлена Гильберта проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ инвариантен относительно изоморфизмов, т. е. не зависит от выбора вложения X в проективное пространство, хотя для доказательства этого нам бы потребовались когомологии. (Один случай элементарен: легко усмотреть инвариантность относительно отображений Веронезе.) В общем случае *арифметический род* проективного многообразия X размерности k определяется как $(-1)^k(p_X(0) - 1)$.

Наконец, естественный вопрос, возникающий в связи с многочленами и функциями Гильберта, состоит в том, каковы должны быть явные оценки на m, чтобы гарантировать равенство $h_X(m) = p_X(m)$. Точнее говоря, по данному многочлену $p(m)$ мы хотим найти наименьшее значение m_0, при котором для каждого неприводимого многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ с многочленом Гильберта $p_X = p$ равенство

$$h_X(m) = p_X(m)$$

выполняется для всех $m \geqslant m_0$. Это очень трудно; существует серьезная теорема, утверждающая, что такое m_0 существует, но мало что известно о конкретном значении m_0 даже для простейшего случая кривых в $\mathbb{P}^3$. Хотя Кастельнуово показал, что для неприводимых кривых $C \subset \mathbb{P}^3$ с многочленом Гильберта $p(m) = d \cdot m + c$ достаточно взять $m_0 = d - 2$ (если использовать в оценке только старший коэффициент d, то эта оценка неулучшаема), и это утверждение было обобщено Грюзоном, Лазарсфельдом и Пескином [GLP] на случай произвольных кривых и Пинкхамом [P] на случай поверхностей, мы все еще далеки от понимания ответа на этот вопрос в общем случае. В качестве примера ситуации, в которой знание такой оценки является критически важным, взгляните на конструкцию многообразия Гильберта, параметризующего подмногообразия в $\mathbb{P}^n$, описанную в лекции 21.

Сизигии

Есть еще один способ доказать существование многочлена Гильберта, при котором заодно вводится и более тонкий инвариант.

Начнем с обозначений. Во-первых, будем для экономии чернил обозначать $K[Z_1, \ldots, Z_n]$ — градуированное координатное кольцо пространства $\mathbb{P}^n$ — просто через S. Далее, предположим, что M — градуированный модуль над кольцом S, т. е. что это модуль с градуировкой

$$M = \bigoplus M_k,$$

так что $S_d \cdot M_k \subset M_{k+d}$. Для всякого целого l обозначим через $M(l)$ тот же модуль M, но с градуировкой, «сдвинутой» на l:

$$M(l)_k = M_{l+k},$$

так что $M(l)$ изоморфен M как S-модуль, но, вообще говоря, не как градуированный S-модуль; $M(l)$ называется *подкруткой* модуля M. Мы ввели это обозначение, чтобы гомоморфизмы модулей, с которыми мы будем иметь дело, стали однородными степени 0 (мы говорим, что гомоморфизм $\varphi\colon M \to N$ градуированных S-модулей *однороден степени* d, если $\varphi(M_k) \subset N_{k+d}$). Например, гомоморфизм из S в S (будем обозначать его $\cdot F$), заданный как умножение на многочлен $F(Z)$ степени d, конечно, не однороден степени 0, но если его рассматривать как гомоморфизм из $S(-d)$ в S, то он именно таков.

Имея это в виду, рассмотрим для начала идеал $I(X)$ многообразия X. Идеал $I(X)$ порожден многочленами F_α степеней d_α. Мы можем теперь сказать, что у нас есть сюръективный однородный гомоморфизм градуированных S-модулей

$$\bigoplus_{\alpha=1}^{r} S(-d_\alpha) \to I(X)$$

или, эквивалентно, что у нас есть точная последовательность градуированных S-модулей

$$\bigoplus_{\alpha=1}^{r} S(-d_\alpha) \xrightarrow{\varphi_1} S \to S(X) \to 0,$$

где гомоморфизм φ_1 задан вектором $(\ldots, F_\alpha, \ldots)$.

Далее, мы хотим описать соотношения между многочленами F_α. Для этого определим *модуль соотношений* M_1 как ядро гомоморфизма φ_1, т. е. как модуль, состоящий из таких наборов $(G_1, \ldots, G_r)$, что $\sum G_\alpha \cdot F_\alpha = 0$. Заметим, что M_1 — действительно градуированный модуль и что, за исключением случая $r = 1$ (когда X — гиперповерхность), он нетривиален, потому что содержит соотношения $F_\alpha \cdot F_\beta - F_\beta \cdot F_\alpha$, т.е. векторы $(0, \ldots, -F_\beta, \ldots, F_\alpha, \ldots, 0)$.

В любом случае, так как M_1 — подмодуль конечно порожденного модуля, он тоже конечно порожден; пусть $\{G_{\beta,1}, \ldots, G_{\beta,r}\}$ $(\beta = 1, \ldots, s)$ — какое-нибудь множество его образующих[1]. Заметим, что для каждого β

[1]Заметим, что мы хотим, чтобы все образующие модуля M_1 и все соотношения между F_α были однородны; чтобы убедится, что такие образующие действительно можно найти, надо проверить, что однородные компоненты соотношений — снова соотношения.

существует такое число e_β, что

$$\deg(G_{\beta,1}) + d_1 = \ldots = \deg(G_{\beta,r}) + d_r = e_\beta.$$

Мы можем переформулировать все это, сказав, что предыдущая точная последовательность может быть продолжена до точной последовательности

$$\bigoplus_{\beta=1}^{s} S(-e_\beta) \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{\alpha=1}^{r} S(-d_\alpha) \xrightarrow{\varphi_1} S \to S(X) \to 0,$$

где гомоморфизм φ_2 задается $(r \times s)$-матрицей $(G_{\beta,\alpha})$.

Теперь будем повторять этот процесс снова и снова: обозначим через M_2 ядро гомоморфизма φ_2 (это ядро называется модулем соотношений между соотношениями и опять конечно порождено). Выбрав множество образующих в M_2, получим отображение φ_3 из другой прямой суммы подкрученных экземпляров S в $\bigoplus\limits_{\beta=1}^{s} S(-e_\beta)$, продолжающее последовательность еще на один шаг и т. д. Основное утверждение об этом процессе — знаменитая *теорема Гильберта о сизигиях*. Она утверждает, что после конечного числа шагов (равного, самое большее, количеству переменных минус 1) мы получим свободный модуль M_k, так что после еще одного шага мы сможем закончить последовательность. Получаем в итоге точную последовательность

$$0 \to N_k \to N_{k-1} \to \ldots \to N_1 \to S \to S(X) \to 0,$$

в которой каждый член N_i — прямая сумма модулей $S(-a_{i,j})$. Такая последовательность называется *свободной резольвентой* модуля $S(X)$; если на каждом шаге выбирается минимальное множество образующих для модуля M_i (т. е. для ядра предыдущего гомоморфизма), то резольвента называется *минимальной*.

Одно из следствий существования резольвенты — возможность описать функцию Гильберта многообразия X. Именно, мы имеем

$$\dim(S(-a)_m) = \dim(S_{m-a}) = \binom{m-a+n}{n}_0,$$

где для $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{Z}$ биномиальный коэффициент $\binom{c}{n}_0$ определен так:

$$\binom{c}{n}_0 = \begin{cases} \dfrac{c \cdot (c-1) \cdot \ldots \cdot (c-n+1)}{n!}, & \text{если } c \geqslant n; \\ 0, & \text{если } c < n. \end{cases}$$

(Заметим, что это определение отличается от некоторых определений биномиального коэффициента при $c < n$, откуда и индекс 0.) Отсюда следует, что если i-й член N_i резольвенты $S(X)$ есть $\bigoplus S(-a_{i,j})$, то размерность пространства $S(X)_m$ будет равна

$$\dim(S(X)_m) = \binom{m+n}{n}_0 + \sum_{i,j}(-1)^i\binom{m-a_{i,j}+n}{n}_0.$$

В частности, мы получаем, что, так как биномиальный коэффициент $\binom{c}{n}_0$ является при $c \geqslant n$ многочленом от c, для $m \geqslant \max(a_{i,j}) - n$ функция Гильберта — многочлен от m.

Замечание 13.10. Стоит заметить, что если заранее известно, что функция Гильберта $h_X(m)$ многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ совпадает с многочленом $p_X(m)$ для больших m, то можно непосредственно установить, что степень этого многочлена должна быть равна числу $k = \dim(X)$. Для этого сделаем такую линейную замену координат, чтобы плоскость Λ, заданная уравнениями $Z_0 = \ldots = Z_k = 0$, не пересекалась с X, и рассмотрим проекцию $\pi_\Lambda\colon X \to \mathbb{P}^k$. Эта проекция сюръективна и потому задает сохраняющее степень вложение однородного координатного кольца $S' = K[Z_0, \ldots, Z_k]$ пространства $\mathbb{P}^k$ в кольцо $S(X)$; стало быть,

$$h_X(m) \geqslant \binom{m+k}{k}$$

для всех m.

С другой стороны, мы утверждаем, что отображение $S' \to S(X)$ превращает кольцо $S(X)$ в конечно порожденный S'-модуль. Чтобы показать это, достаточно представить нашу проекцию в виде композиции проекций из точки, после чего рассмотреть случай именно проекции из точки, скажем $p = [0, \ldots, 0, 1]$, на гиперплоскость $Z_n = 0$. В этом случае обозначим через X' образ многообразия X в $\mathbb{P}^{n-1}$ и запишем $S(X) = S(X')[Z_n]/I(X)$; видно, что всякий однородный многочлен $F \in I(X)$, не обращающийся в нуль в точке p, задает целое уравнение для Z_n над $S(X')$.

Если теперь образующие $S(X)$ как S'-модуля имеют степени d_i, мы имеем сюръекцию $\bigoplus S'(-d_i) \to S(X)$, и, следовательно, неравенство

$$h_X(m) \leqslant \sum \binom{m+k-d_i}{k}_0.$$

Если известно, что $h_X(m)$ — многочлен для больших m, из этих двух неравенств следует, что он должен иметь степень k.

Пример 13.11. Три точки на $\mathbb{P}^2$

Рассмотрим снова случай трех точек на плоскости. Во-первых, если они не коллинеарны, можно считать, что это точки $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 0]$

и [1, 0, 0], так что их идеал порожден квадратичными многочленами

$$F_1 = XY, \quad F_2 = XZ, \quad F_3 = YZ.$$

Соотношения между этими тремя многочленами легко найти; это

$$Z \cdot F_1 = Y \cdot F_2 = X \cdot F_3.$$

Поэтому минимальная свободная резольвента Γ имеет вид

$$0 \to S(-3)^2 \to S(-2)^3 \to S \to S(\Gamma) \to 0$$

и мы видим, в частности, что функция Гильберта равна

$$h_\Gamma(m) = \binom{m+2}{2} - 3\binom{m}{2} + 2\binom{m-1}{2}_0,$$

что при $m \geqslant 1$ совпадает с

$$\frac{(m+2)(m+1) - 3m(m-1) + 2(m-1)(m-2)}{2} = 3.$$

Если, напротив, три точки множества Γ коллинеарны, то Γ — полное пересечение прямой и кубики: если, например, эти три точки суть [0, 0, 1], [0, 1, 0] и [0, 1, 1], то $I(\Gamma)$ порожден $F_1 = X$ и $F_2 = YZ(Y - Z)$ (это можно проверить непосредственно или с помощью предложения 17.18). Между F_1 и F_2 есть только одно, «тривиальное» соотношение $YZ(Y - Z) \cdot F_1 = X \cdot F_2$, так что резольвента имеет вид

$$0 \to S(-4) \to S(-1) \oplus S(-3) \to S \to S(\Gamma) \to 0.$$

Конечно, как вы можете проверить, многочлен Гильберта тоже будет тождественно равен 3, но на сей раз функция Гильберта будет совпадать с ним только для $m \geqslant 2$.

Пример 13.12. Четыре точки на $\mathbb{P}^2$

Мы можем тем же способом описать свободную резольвенту любой конфигурации из четырех точек на плоскости. Начнем с простейшего случая, когда никакие три из них не коллинеарны; тогда мы имеем полное пересечение двух коник: именно, если точки — это три «координатные точки» [0, 0, 1], [0, 1, 0] и [1, 0, 0] плюс точка [1, 1, 1], то идеал Γ порожден $F_1 = XY - XZ$ и $F_2 = XZ - YZ$ (это снова можно проверить либо непосредственно, либо с помощью предложения 17.18). Единственное соотношение между F_1 и F_2 — это очевидное соотношение $(XZ - YZ) \cdot F_1 = (XY - XZ) \cdot F_2$, поэтому свободная резольвента будет такая:

$$0 \to S(-4) \to S(-2)^2 \to S \to S(\Gamma) \to 0.$$

В другом крайнем случае, когда все четыре точки коллинеарны, Γ — снова полное пересечение, на этот раз прямой и квартики; резольвента такова:

$$0 \to S(-5) \to S(-1) \oplus S(-4) \to S \to S(\Gamma) \to 0.$$

Наконец, предположим, что ровно три из этих точек коллинеарны, например, что это три координатные точки и $[0,1,1]$. Теперь идеал Γ порожден двумя кониками $F_1 = XY$, $F_2 = XZ$ и кубикой $F_3 = YZ(Y-Z)$. Соотношения между ними имеют вид

$$Z \cdot F_1 = Y \cdot F_2 \quad \text{и} \quad YZ \cdot F_1 - YZ \cdot F_2 = X \cdot F_3,$$

так что мы имеем точную последовательность

$$0 \to S(-3) \oplus S(-4) \to S(-2)^2 \oplus S(-3) \to S \to S(\Gamma) \to 0.$$

Отметим одну особенность этого примера. Хотя в первом и третьем случаях получилась та же самая функция Гильберта, члены их минимальных свободных резольвент разные. Другими словами, минимальная свободная резольвента идеала многообразия (или набор чисел $a_{i,j}$) содержит больше информации, чем функция Гильберта, которая, в свою очередь, является более тонким инвариантом, чем многочлен Гильберта.

Упражнение 13.13. Проверьте утверждения, сделанные в примере 13.12: именно, покажите, что нет образующих и соотношений сверх перечисленных.

Упражнение 13.14. Найдите минимальную свободную резольвенту $\Gamma \subset \mathbb{P}^3$ в случае, когда: (i) Γ состоит из четырех координатных точек; (ii) Γ состоит из пяти точек, никакие четыре из которых не компланарны.

Упражнение 13.15. Найдите минимальную свободную резольвенту скрученной кубики.

Пример 13.16. Полные пересечения: комплекс Кошуля

Читатель, видимо, заметил, что свободные резольвенты имели относительно простой вид в случае полных пересечений, когда встречались только тривиальные соотношения $F_i \cdot F_j = F_j \cdot F_i$. На самом деле это общая ситуация, хотя если многочленов больше двух, то последовательность обязательно будет длиннее. Мы дадим здесь описание резольвенты полного пересечения в общем случае, но доказательства опустим; по поводу подробностей см. [E].

Для описания ситуации в общем случае предположим, что $X \subset \mathbb{P}^n$ — полное пересечение гиперповерхностей, заданных полиномиальными уравнениями $F_1, \ldots, F_k$, где степень многочлена F_α равна d_α. Первый член в минимальной свободной резольвенте X будет, конечно, прямой суммой $N_1 = \bigoplus S(-d_\alpha)$. Далее, все соотношения тривиальны, так что следующий член будет

$$N_2 = \bigoplus S(-d_\alpha - d_\beta),$$

где прямая сумма берется по всем таким парам (α, β), что $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant k$ и отображение в N_1 переводит образующую $e_{(\alpha,\beta)}$ слагаемого с индексами (α, β) в $(\ldots, -F_\beta, \ldots, F_\alpha, \ldots)$.

Далее, соотношения между образующими N_2 выписать также легко: ядро отображения $N_2 \to N_1$ порождено элементами вида

$$F_\gamma \cdot e_{\alpha,\beta} - F_\beta \cdot e_{\alpha,\gamma} + F_\alpha \cdot e_{\beta,\gamma}$$

для всевозможных троек $\alpha < \beta < \gamma$. Стало быть, третий член резольвенты равен $N_3 = \bigoplus S(-d_\alpha - d_\beta - d_\gamma)$. Общее утверждение оказывается именно тем, что можно ожидать, глядя на первые несколько шагов: i-й член N_i минимальной свободной резольвенты полного пересечения $X \subset \mathbb{P}^n$ с идеалом $I(X) = (F_1, \ldots, F_r)$ — это модуль

$$N_i = \bigoplus S(-d_{\alpha_1} - d_{\alpha_2} - \ldots - d_{\alpha_i}),$$

сумма распространена на все наборы $\alpha_1 < \ldots < \alpha_i$ и отображение переводит образующую $e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i}$ в сумму $\sum(-1)^j F_{\alpha_j} \cdot e_{\alpha_1,\ldots,\widehat{\alpha}_j,\ldots\alpha_i}$. Эта последовательность модулей называется *комплексом Кошуля* полного пересечения X.

Мы можем дать более инвариантное определение комплекса Кошуля полного пересечения в терминах первого модуля

$$M = \bigoplus S(-d_\alpha).$$

Заметим, что набор из k многочленов $(F_1, \ldots, F_k)$ определяет отображение $M \to S$, т. е. элемент двойственного модуля M^*. Это дает нам последовательность отображений

$$\ldots \to \Lambda^3 M \to \Lambda^2 M \to M \to S,$$

и это и есть комплекс Кошуля.

Упражнение 13.17. Используйте предыдущие рассмотрения и упражнение 13.1, чтобы доказать слабую форму *теоремы Безу* в $\mathbb{P}^2$: если F и G — такие многочлены на $\mathbb{P}^2$ степеней d и e без общих делителей, что F и G порождают идеал пересечения их множеств нулей, то пересечение состоит из $d \cdot e$ точек. Покажите также, что если $\Gamma \subset \mathbb{P}^3$ — полное пересечение поверхностей степеней d, e и f, то Γ состоит из $d \cdot e \cdot f$ точек.

Упражнение 13.18. Найдите многочлен Гильберта полного пересечения поверхностей степеней d и e в $\mathbb{P}^3$. В случае, когда пересечение — гладкая кривая, используйте это, чтобы определить (как и в примере 13.7) род соответствующей римановой поверхности.

Подведем итоги. В этой лекции мы связали с многообразием $X \subset \mathbb{P}^n$ три типа данных. Наиболее точную информацию дает набор чисел $a_{i,j}$; иногда их называют *числами Бетти*[1] многообразия X. Числа Бетти определяют функцию Гильберта, а она, в свою очередь, определяет многочлен Гильберта.

Как и можно было предполагать, сложнее всего оказывается получить наиболее точную информацию; в частности, в то время как многочлен Гильберта большинства многообразий более или менее вычисли́м, числа Бетти могут быть посчитаны только у относительно немногих многообразий. Например, многочлен Гильберта произвольного набора d точек в $\mathbb{P}^n$, конечно, константа; функцию Гильберта легко найти для d точек в общем положении и довольно трудно для произвольного набора; наконец, мы вообще не знаем чисел Бетти набора d точек в $\mathbb{P}^n$ при $d \geqslant 2n$. В частности, искать резольвенту идеала многообразия X не является эффективным способом для получения информации о многообразии X, по крайней мере если не прибегать к машинным вычислениям; по большей части резольвенты — это источник интересных вопросов, а не ответов.

[1] С числами Бетти в топологическом смысле они напрямую не связаны. — *Прим. ред.*

Лекция 14

ГЛАДКОСТЬ И КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Касательное пространство Зарисского к многообразию

Определение такого фундаментального понятия, как гладкая точка алгебраического многообразия, аналогично соответствующему определению в дифференциальной геометрии. Мы начнем с аффинного случая; пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — равноразмерное аффинное многообразие размерности k, и пусть его идеал имеет вид $I(X) = (f_1, \ldots, f_l)$. Обозначим через M матрицу размера $l \times n$ с элементами $\partial f_i/\partial x_j$. Тогда нетрудно видеть, что ранг матрицы M не превосходит $n - k$ в любой точке многообразия X, и мы будем говорить, что точка $p \in X$ является *гладкой точкой* многообразия X, если ее ранг в точке p в точности равен $n - k$.[1] Отметим, что в случае, когда основное поле K совпадает с $\mathbb{C}$, это условие равносильно тому, что X является комплексным подмногообразием в $\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$ в окрестности точки p, или что X является вещественным подмногообразием в $\mathbb{C}^n$ в окрестности p. (Если, однако же, X задано многочленами f_α с вещественными коэффициентами, то это условие не равносильно тому, что множество нулей многочленов f_α в $\mathbb{R}^n$ является гладким: рассмотрите, например, начало координат $p = (0, 0)$ на плоской кривой $x^3 + y^3 = 0$.)

Если X гладко в точке p, то мы будем называть ядро матрицы M в точке p *касательным пространством* к X в точке p и обозначать его $T_p(X)$ или T_pX. Аккуратнее выражаясь, это пространство надо рассматривать как подпространство в касательном пространстве к $\mathbb{A}^n$ в точке p, причем это последнее естественно отождествляется с K^n. Иными словами, T_pX — это пространство дифференцирований $D_v = \sum a_i(\partial/\partial z_i)$, обладающих тем свойством, что $(D_v f)(p) = 0$ для всех $f \in I(X)$, или, равносильно,

$$T_pX = \{v \in T_p(\mathbb{A}^n) = K^n \mid (df)(v) = 0 \ \ \forall f \in I(X)\}.$$

В общем случае, независимо от того, гладко ли X в точке p, мы будем называть определенное таким образом подпространство $T_p(X) \subset T_p(\mathbb{A}^n) = K^n$ *касательным пространством Зарисского* к многообра-

[1] Если же точка многообразия не является гладкой, то она называется *особой точкой*. — *Прим. перев.*

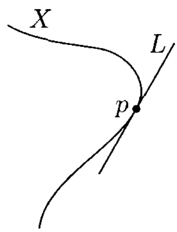
зию X в точке p; перефразируя наше определение гладкости, можно сказать, что

$$\dim(T_pX) \geqslant \dim(X)$$

всегда и что X гладко в точке p, если это неравенство обращается в равенство. Отметим также, что если X гладко в точке p, то T_pX можно реализовать как множество касательных векторов $v'(0)$ в точке $v(0) = p$ к аналитическим дугам

$$t \mapsto v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t)) \in X \subset \mathbb{A}^n.$$

Здесь, конечно, возникает возможность путаницы: хочется рисовать картинки наподобие приведенной и называть при этом прямую L «касательным пространством к X в точке p». Если выражаться аккуратно, то прямую L надо называть *аффинным касательным пространством к X в точке p*, т. е. аффинным подпространством в $\mathbb{A}^n$, проходящим через p и параллельным $T_p(X)$.



Упражнение 14.1. Докажите, что при $K = \mathbb{C}$ многообразие X гладко в p тогда и только тогда, когда X является комплексным подмногообразием в $\mathbb{C}^n$ в точке p, а также тогда и только тогда, когда X является вещественным (C^∞) подмногообразием в $\mathbb{C}^n$ в точке p.

Упражнение 14.2. Покажите, что размерность касательного пространства Зарисского T_pX является полунепрерывной сверху функцией от p (относительно топологии Зарисского на X).

Заметим, что из последнего упражнения вытекает, что множество особых точек многообразия X является подмногообразием в X; мы будем обозначать это подмногообразие через X_{sing}, а дополнение к нему — через X_{sm}. В упражнении 14.3 мы увидим, что X_{sing} является собственным подмногообразием в X, т. е. что для любого многообразия X его подмножество X_{sm} является открытым и плотным.

Для тех, кто нуждается в более инвариантном определении касательного пространства Зарисского (или хотя бы не удовлетворен отсутствием определения касательного пространства к $\mathbb{A}^n$), мы дадим такое определение следующим образом. Сначала определим *кокасательное пространство Зарисского* к многообразию X в точке p (оно обозначается $T_p^*(X)$) как векторное пространство

$$T_p^*(X) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,$$

где $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{X,p}$ — максимальный идеал, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке p. Теперь определим касательное пространство

Зарисского как двойственное векторное пространство

$$T_p(X) = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*.$$

Это определение позволяет нам распространить определение касательного пространства Зарисского на произвольные квазипроективные многообразия.

Заметим, что всякое регулярное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует отображения

$$f^*\colon \mathscr{O}_{Y,f(p)} \to \mathscr{O}_{X,p}$$

и тем самым отображения

$$df\colon T_p(X) \to T_{f(p)}Y.$$

В частности, вложение многообразия X в аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ индуцирует вложение его касательного пространства Зарисского в произвольной точке p в касательное пространство к $\mathbb{A}^n$ в точке p; образ этого вложения есть подпространство в $T_p(\mathbb{A}^n)$, описанное выше.

Упражнение 14.3. (i) Покажите, что если X является гиперповерхностью, то множество его особых точек является собственным подмногообразием в X. (ii) Пользуясь утверждением (i) совместно с тем фактом, что всякое многообразие бирационально изоморфно гиперповерхности (упражнение 11.23), покажите, что на любом многообразии особые точки образуют собственное подмногообразие.

В этом месте мы должны упомянуть связанный с данной тематикой результат, касающийся отображений в характеристике 0. Если принять во внимание упражнения 14.1 и 14.3, то над полем $\mathbb{C}$ утверждение, о котором идет речь, окажется не чем иным, как теоремой Сарда (и ввиду принципа Лефшеца 15.1 оно может быть выведено из этого частного случая). Алгебраическое доказательство этого факта, однако же, не столь просто, о чем свидетельствует то обстоятельство, что над полями характеристики $p > 0$ он неверен.

Предложение 14.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное сюръективное регулярное отображение многообразий, определенных над полем K характеристики 0. Тогда существует такое непустое открытое подмножество $U \subset Y$, что для всякой гладкой точки $p \in f^{-1}(U) \cap X_{\mathrm{sm}}$ в прообразе U дифференциал df_p сюръективен.*

Упражнение 14.5. В положительной характеристике даже более слабое утверждение о существовании непустого открытого подмножества, состоящего из точек $p \in X$, в которых df_p сюръективен, может быть неверным. В качестве простого примера рассмотрим плоскую кривую $X \subset \mathbb{A}^2$, заданную уравнением $y = x^p$, обозначим через $Y = \mathbb{A}^1$ аффинную прямую с координатой y, определим отображение $f\colon X \to Y$

как проекцию $(x, y) \mapsto y$ и выберем в качестве K произвольное поле характеристики p. Покажите, что в этом случае X и Y гладки, а f сюръективно, но при этом $df_q \equiv 0$ для всех $q \in X$.

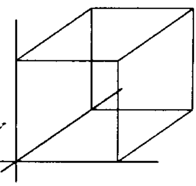
Существует также аналог упражнения 14.2 для отображений.

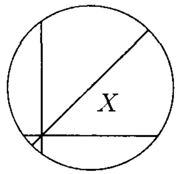
Упражнение 14.6. Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное регулярное отображение аффинных многообразий. Покажите, что размерность ядра дифференциала df_p является полунепрерывной сверху функцией от p.

Отметим, что из этого утверждения не следует, что множество гладких точек слоев отображения f (т. е. множество точек $p \in X$, для которых многообразие $X_{f(p)} = f^{-1}(f(p))$ гладко в p) открыто в X или же что размерность $T_p(X_{f(p)})$ является полунепрерывной сверху функцией от p, поскольку касательное пространство Зарисского к $X_{f(p)}$ может быть меньше, чем $\mathrm{Ker}(df_p)$. (Все эти объекты лучше себя ведут в категории схем: если $X_{f(p)}$ обозначает слой в схемном смысле, то касательное пространство Зарисского к $X_{f(p)}$ в точке p совпадает с $\mathrm{Ker}(df_p)$, откуда все и следует.)

Упражнение 14.7. В качестве примера этого эффекта рассмотрим гиперповерхность $X \subset \mathbb{A}^4$, заданную уравнением $ax^2+y^2-b=0$, обозначим через Y аффинную плоскость с координатами (a, b), и пусть $f\colon X \to Y$ — проекция; предположим, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Покажите, что X гладко и трехмерно и что всякий слой отображения f имеет размерность 1. Найдите множество точек $p \in X$, для которых ранг df_p меньше 2, и удостоверьтесь, что для отображения f утверждение из упражнения 14.6 выполнено. Найдите также множество точек $p \in X$, для которых касательное пространство Зарисского к $X_{f(p)}$ в точке p имеет размерность больше единицы, и покажите, что это множество незамкнуто.

Касательное пространство Зарисского к многообразию в точке p годится не только для того, чтобы выяснять, гладко ли многообразие в этой точке; оно может помочь нам различить многообразия, которые кажутся изоморфными. Рассмотрим, например, следующие кривые X и Y: $X \subset \mathbb{A}^2$ — кубическая кривая $xy(x-y)=0$, а $Y \subset \mathbb{A}^3$ — объединение трех координатных осей, т.е. множество общих нулей многочленов xy, yz и xz. Каждая из этих двух кривых представляет собой объединение трех прямых, пересекающихся в одной точке, и проекция $\pi\colon \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^2$ из бесконечно удаленной точки, лежащей на прямой $\{(t, t, t)\}$, на (x, y)-плоскость индуцирует биекцию между Y и X. Тем не менее эти два многообразия неизоморфны; например, касательное пространство Зарисского

Y




к X в его особой точке $(0, 0)$ является двумерным, а касательное пространство к Y в точке $(0, 0, 0)$ является трехмерным. По-другому (но равносильным образом) эту мысль можно выразить так: на Y существует регулярная функция, имеющая в особой точке нуль порядка два на двух из неприводимых компонент кривой Y, но не на третьей; на X таких функций нет.

Возможно, сейчас имеет смысл вспомнить упражнение 13.8. В этом упражнении мы вычислили многочлены Гильберта замыканий этих кривых $\overline{X} \subset \mathbb{P}^2$ и $\overline{Y} \subset \mathbb{P}^3$ и заключили, что арифметический род кривой $\overline{X}$ (определенный в примере 13.7) равен 1, тогда как арифметический род $\overline{Y}$ равен 0. (Разумеется, чтобы заключить отсюда, что $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ неизоморфны, мы должны знать, что свободный член многочлена Гильберта инвариантен относительно изоморфизма проективных многообразий, что в нашей книге не доказывается. С другой стороны, раз уж мы все равно формулируем утверждения без доказательств, скажем и о том, что отображение проекции проективных многообразий $\pi_p \colon X \to Y$ из точки p, не лежащей на X, является изоморфизмом тогда и только тогда, когда многочлены Гильберта p_X и p_Y совпадают.)

Локальный критерий изоморфизма

Когда мы впервые ввели понятие изоморфизма, мы сказали, что регулярное отображение $\pi \colon X \to Y$ между двумя многообразиями является изоморфизмом, если существует обратное регулярное отображение $\eta \colon Y \to X$. Проверять это условие не очень удобно, особенно учитывая, что запись регулярных отображений в проективных координатах сложна. В категориях C^∞-многообразий или комплексных многообразий существует гораздо более простой критерий: в каждом из этих случаев мы можем воспользоваться теоремой об обратной функции и сказать, что отображение $\pi \colon X \to Y$ является изоморфизмом, если оно биективно и его якобиан нигде не обращается в нуль. Оказывается, что аналогичный результат существует и в алгебраической геометрии, причем не только для гладких многообразий.

Чтобы сформулировать этот результат в должной общности, нам надо ввести еще одно определение. Мы будем говорить, что отображение $\pi \colon X \to Y$ является *конечным*, если у всякой точки $q \in Y$ существует аффинная окрестность $U \ni q$, для которой $V = \pi^{-1}(U) \subset X$ аффинно и естественное отображение

$$\pi^* \colon A(U) \to A(V)$$

задает на $A(V)$ структуру конечно порожденного модуля над $A(U)$. Заметим, что это условие локально по Y; из него вытекает, что слои отображения π конечны, но конечности слоев, разумеется, недостаточно для того, чтобы отображение было конечным (например, вложение $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ в $\mathbb{A}^1$, бесспорно, имеет конечные слои, но координатное кольцо многообразия $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, то есть $K[x, x^{-1}]$, не является конечно порожденным $K[x]$-модулем).

Понятие конечного отображения оказывается полезным на практике по той причине, что в случае, когда многообразия X и Y проективны, конечность отображения по существу эквивалентна конечности его слоев. На самом деле можно сказать и больше: имеет место следующая лемма.

Лемма 14.8. *Пусть $\pi_0\colon X_0 \to Y_0$ — регулярное отображение проективных многообразий. Пусть $Y \subset Y_0$ — открытое подмножество, $X = \pi_0^{-1}(Y)$ — его прообраз, и пусть π — ограничение π_0 на X. Если слои отображения π конечны, то оно конечно.*

Доказательство. Мы начнем с редукций. Во-первых, поскольку вопрос локален по Y, можно считать Y аффинным. Можно также считать, что X является замкнутым подмножеством в $Y \times \mathbb{P}^n$, а отображение π индуцировано проекцией на первый сомножитель. Далее (ограничивая, если нужно, на меньшие аффинные открытые подмножества в Y), мы можем разложить π в композицию

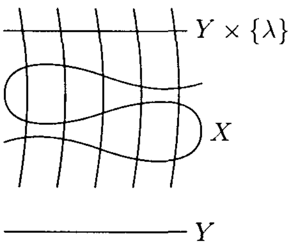
$$X \subset Y \times \mathbb{P}^n \to Y \times \mathbb{P}^{n-1} \to \ldots \to Y \times \mathbb{P}^1 \to Y,$$

где каждое из отображений индуцировано проекцией из точки в $\mathbb{P}^k$; поскольку композиция конечных отображений конечна, достаточно провести доказательство для каждого из этих отображений. Наконец, пользуясь бирациональным изоморфизмом $\mathbb{P}^k$ с $\mathbb{P}^{k-1} \times \mathbb{P}^1$ и еще раз ограничивая на меньшие аффинные открытые подмножества, можно считать, что каждое из отображений имеет вид

$$X \subset Y \times \mathbb{P}^1 \to Y;$$

для таких отображений мы наше утверждение и докажем.

Итак, пусть $q \in Y$ — произвольная точка. Условие, что отображение $\pi\colon X \to Y$ имеет конечные слои, означает попросту, что X не содержит слоев вида $\{q\} \times \mathbb{P}^1$; выберем $\lambda \in \mathbb{P}^1$ таким образом, чтобы $(q, \lambda) \notin X$. Ограничивая на аффинное открытое подмножество, содержащееся в дополнении к $\pi(X \cap (Y \times \{\lambda\})$, можно считать, что $X \cap (Y \times \{\lambda\}) = \varnothing$. Пусть Z и W — однородные координаты на $\mathbb{P}^1$, в которых λ является точкой $(W = 0)$, и пусть $z = Z/W$ — соответствующая аффинная координата на $\mathbb{P}^1 \setminus \{\lambda\} \cong \mathbb{A}^1$. Над некоторым



аффинным открытым подмножеством Y идеал X в $Y \times \mathbb{P}^1$ порождается многочленами F вида

$$F(Z, W) = a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} W + \ldots + a_{n-1} Z W^{n-1} + a_n W^n,$$

где $a_i \in A(Y)$. Однако поскольку $(q, \lambda) \notin X$, среди этих многочленов F существует и такой, для которого $a_0(q) \neq 0$. Ограничивая (последний раз!) на открытую окрестность точки q, заданную условием $a_0 \neq 0$, получаем, что

$$A(X) = A(Y)[z],$$

где z удовлетворяет полиномиальному уравнению с коэффициентами в $A(Y)$ и старшим коэффициентом единица; отсюда вытекает, что $A(X)$ является конечно порожденным $A(Y)$-модулем. □

Теперь мы можем сформулировать и доказать нашу «теорему об обратной функции» для многообразий.

Теорема 14.9. *Пусть $\pi \colon X \to Y$ — конечное отображение многообразий. Тогда π является изоморфизмом в том и только том случае, когда оно биективно и отображение*

$$d\pi_p \colon T_p(X) \to T_{\pi(p)}(Y)$$

инъективно для всех $p \in X$.

Эта теорема будет в основном применяться в сочетании с леммой 14.8, то есть в виде такого следствия.

Следствие 14.10. *Пусть X_0 — проективное многообразие и $\pi_0 \colon X_0 \to \mathbb{P}^n$ — произвольное отображение. Пусть $U \subset \mathbb{P}^n$ — открытое подмножество, $X = \pi_0^{-1}(U)$ — его прообраз в X_0, и пусть π — ограничение π_0 на X. Если π взаимно однозначно и $d\pi_p \colon T_p X \to T_{\pi(p)}\mathbb{P}^n$ является инъекцией для всех $p \in X$, то π является изоморфизмом X на свой образ. В частности, биекция проективных многообразий $\pi \colon X \to Y$ со всюду инъективным дифференциалом является изоморфизмом.*

Доказательство теоремы 14.9. Это доказательство использует несколько больше коммутативной алгебры, чем наши предшествующие рассмотрения; все необходимое можно найти в [AM] или [E]. Основной ингредиент — это просто лемма Накаямы.

Во-первых, все сводится к случаю, когда X и Y аффинны, и тогда отображение π задается гомоморфизмом колец $\pi^* \colon A = A(Y) \to B = A(X)$. Заметим, что, поскольку отображение π сюръективно, π^* является инъекцией (так что в дальнейшем мы будем рассматривать A как подкольцо кольца B); мы, конечно, хотим показать, что это вложение является изоморфизмом.

По теореме о нулях (теорема 5.1) биективность отображения π означает следующее: имеется биекция между максимальными идеалами

$\mathfrak{m} \subset A$ и $\mathfrak{n} \subset B$, в одном направлении задаваемая сопоставлением идеалу $\mathfrak{n} \subset B$ пересечения $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A \subset A$, а в другом направлении переводящая максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$ в единственный максимальный идеал $\mathfrak{n} \subset B$, содержащий идеал $\mathfrak{m}B$, порожденный $\mathfrak{m}$ и B. Чтобы показать, что π^* является изоморфизмом, достаточно проверить, что π^* индуцирует изоморфизм локализаций $A_\mathfrak{m}$ и $B_\mathfrak{n}$ для всех $\mathfrak{m} \subset A$ и $\mathfrak{n} \supset \mathfrak{m}B$; стало быть, мы можем считать, что A и B — локальные кольца с максимальными идеалами $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$.

Заметим, что условие биективности не гарантирует, что $\mathfrak{m}B = \mathfrak{n}$ для соответствующих друг другу $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ (см., например, описанное на с. 221 отображение из объединения трех координатных осей в $\mathbb{A}^3$ в объединение трех пересекающихся в одной точке прямых в $\mathbb{A}^2$ или же отображение из аффинной прямой в каспидальную плоскую кубику, заданное формулой $t \mapsto (t^2, t^3)$). А вот из условия инъективности дифференциала это уже следует: эта инъективность означает, что отображение

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2,$$

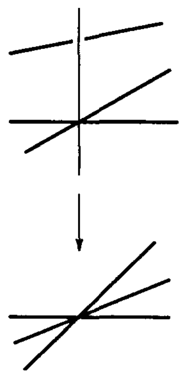
индуцированное вложением

$$\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathfrak{n},$$

является сюръективным, так что имеет место равенство B-модулей

$$\mathfrak{m}B + \mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}.$$

Из леммы Накаямы, примененной к B-модулю $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B$, следует, что $\mathfrak{m}B = \mathfrak{n}$. Теперь имеем



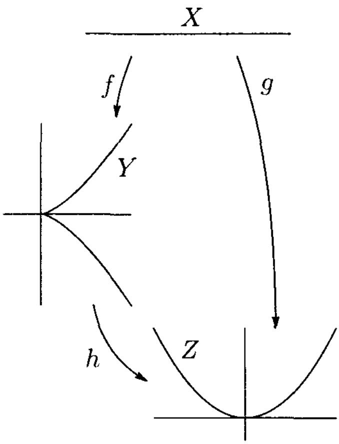
$$B/A \otimes A/\mathfrak{m} = B/(\mathfrak{m}B + A) = B/(\mathfrak{n} + A) = 0,$$

и, применяя лемму Накаямы к конечно порожденному A-модулю B/A, мы заключаем, что $B/A = 0$. □

Чтобы понять, зачем нужны условия наподобие конечности π или проективности X (помимо их использования в последней фразе доказательства), можно в качестве X взять объединение двух прямых $(x = z = 0)$ и $(y = z = 0)$ и прямой $(y - x = z - 1 = 0)$ с выколотой точкой $(0, 0, 1)$, в качестве Y — объединение прямых $(x = 0)$, $(y = 0)$ и $(y - x = 0)$ в $\mathbb{A}^2$, а в качестве π — проекцию $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

Наконец, стоит отметить, что трудность теоремы 14.8 (и необходимость использования коммутативной алгебры в ее доказательстве) проистекает из особого случая. Если X и Y гладки, то результат интуитивно очевиден, но он гораздо менее очевиден в общем случае.

Рассмотрим, например, три кривые X, Y и Z, где: $X = \mathbb{A}^1$ с координатой t; Y — плоская кубика $y^2 = x^3$; Z — плоская квартика $y^3 = x^4$. Мы имеем отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$, заданные формулами $t \mapsto (t^2, t^3)$ и $t \mapsto (t^3, t^4)$ соответственно; они, разумеется, не являются изоморфизмами, поскольку X гладка, а касательные пространства Зарисского к Y и Z в начале координат двумерны. Однако же заметим, что отображение g пропускается через f, в результате чего получается регулярное отображение $h\colon Y \to Z$, являющееся биекцией, причем размерности касательных пространств Зарисского в соответствующих точках $p \in Y$ и $q \in Z$ совпадают; это отображение также не является изоморфизмом, но геометрически уже не настолько ясно, почему оно не индуцирует изоморфизма касательных пространств в начале координат.



Упражнение 14.11. (i) Проверьте непосредственно, что отображение h не индуцирует изоморфизма касательных пространств к Y и Z в начале координат (и тем самым не является изоморфизмом). (ii) Покажите, что Y и Z вообще неизоморфны.

Проективное касательное пространство

С точкой p на аффинном многообразии $X \subset \mathbb{A}^n$ мы связали как касательное пространство Зарисского T_pX, являющееся абстрактным векторным пространством, так и аффинное касательное пространство, являющееся аффинным подпространством в объемлющем $\mathbb{A}^n$. Рассмотрим теперь проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$. С ним также можно связать проективное касательное пространство в точке $p \in X$, обозначаемое $\mathbb{T}_p(X)$, которое является проективным подпространством в объемлющем $\mathbb{P}^n$. Один из способов определить его состоит в том, что надо выбрать аффинное открытое подмножество $U \cong \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$, содержащее p, и сказать, что проективное касательное пространство к X в p есть замыкание в $\mathbb{P}^n$ аффинного касательного пространства в точке p к аффинному многообразию $X \cap U \subset U \cong \mathbb{A}^n$.

Такое определение справедливо представляется довольно неуклюжим; к счастью, у проективного касательного пространства есть и более прямое описание. Именно, предположим для начала, что X — гиперповерхность, заданная однородным многочленом $F(Z)$; пусть $U \cong \mathbb{A}^n$ —

аффинное открытое подмножество ($Z_0 \neq 0$) с аффинными координатами $z_i = Z_i/Z_0$, и положим

$$f(z_1, \ldots, z_n) = F(1, z_1, \ldots, z_n),$$

так что $X \cap U$ является множеством нулей многочлена f. Теперь в точке с координатами $(w_1, \ldots, w_n)$ аффинное касательное пространство является множеством

$$\left\{ (z_1, \ldots, z_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(p) \cdot (z_i - w_i) = 0 \right\}.$$

Тогда, согласно нашему определению, проективное касательное пространство есть множество точек с однородными координатами

$$\left\{ [Z_0, \ldots, Z_n] \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Z_i}(1, w_1, \ldots, w_n) \cdot (Z_i - w_i \cdot Z_0) = 0 \right\}.$$

Однако частные производные однородного многочлена степени d удовлетворяют *тождеству Эйлера*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial Z_i} \cdot Z_i = d \cdot F,$$

а поскольку $F(1, w_1, \ldots, w_n) = 0$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Z_i}(1, w_1, \ldots, w_n) \cdot (-w_i \cdot Z_0) = \frac{\partial F}{\partial Z_0}(1, w_1, \ldots, w_n) \cdot Z_0.$$

Теперь мы можем переписать наши уравнения и сказать, что проективное касательное пространство к гиперповерхности X, заданной однородным многочленом $F(Z_0, \ldots, Z_n)$, в точке $P = [W_0, \ldots, W_n] \in X$ есть множество

$$\left\{ [Z_0, \ldots, Z_n] \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial Z_i}(P) \cdot Z_i = 0 \right\}.$$

Иными словами, если все частные производные многочлена F обращаются в нуль в точке P, то X особо в P и проективное касательное пространство совпадает со всем $\mathbb{P}^n$; в противном случае X гладко в P, и проективное касательное пространство является гиперплоскостью, соответствующей точке $\mathbb{P}^{n*}$, однородные координаты которой являются частными производными F в P. Отметим, в частности, что, ввиду тождества Эйлера, если характеристика поля K равна нулю (или хотя бы взаимно проста с d), то множество особых точек гиперповерхности X

совпадает со множеством общих нулей частных производных многочлена F.

Описав таким образом проективное касательное пространство к гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$, мы можем теперь описать проективное касательное пространство к произвольному подмногообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ как пересечение проективных касательных пространств ко всем гиперповерхностям, содержащим X. В частности, если $\{F_1, \ldots, F_m\}$ — набор однородных многочленов, порождающих идеал многообразия X, то проективное касательное пространство будет просто подпространством в $\mathbb{P}^n$, соответствующим ядру матрицы $(\partial F_i/\partial Z_j)$, рассматриваемой как отображение из K^{n+1} в K^m.

Если X гладко в p и основное поле K есть $\mathbb{C}$, то мы можем также описать проективное касательное пространство $\mathbb{T}_p X$ к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ в терминах параметризации окрестности точки $p \in X$ (в аналитической топологии). Именно, предположим, что аналитическая окрестность $U \ni p$ задана как образ отображения

$$\varphi\colon \Delta \to \mathbb{P}^n,$$

определенного на открытом множестве $\Delta \subset \mathbb{C}^k$ с помощью векторнозначной функции $v(z)$:

$$\varphi\colon (z_1, \ldots, z_k) \mapsto [v(z)] = [v_0(z), \ldots, v_n(z)].$$

Тогда проективное касательное пространство к X в точке $p = [v(0)]$ является подпространством $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$, соответствующим поливектору

$$\mathbb{T}_p(X) = \left[v(0) \wedge \frac{\partial v}{\partial z_1}(0) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial v}{\partial z_k}(0)\right] \in \mathbb{G}(k, n) \subset \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1}),$$

или, что то же самое, подпространством, порожденным строками матрицы

$$\begin{pmatrix} v_0(0) & v_1(0) & \ldots & v_n(0) \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial z_1}(0) & \ldots\ldots\ldots & & \dfrac{\partial v_n}{\partial z_1}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial z_k}(0) & \ldots\ldots\ldots & & \dfrac{\partial v_n}{\partial z_k}(0) \end{pmatrix}.$$

Упражнение 14.12. Проверьте, что пространство, порожденное строками этой матрицы, действительно является проективным касательным пространством к X в точке p.

Такое описание проективного касательного пространства часто бывает полезно, особенно при работе с кривыми и поверхностями. В частности, оно позволяет описывать касательное пространство к многообразию в терминах дуг: проективное касательное пространство $\mathbb{T}_p X$

к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ в гладкой точке $p \in X$ является объединением прямых $[v(0) \wedge v'(0)] \in \mathbb{G}(1, n)$, где $v(t)$ — произвольная аналитическая дуга на X, для которой $[v(0)] = p$.

Может показаться, что это описание завязано на аналитическую топологию, но на самом деле ту же идею можно провести и чисто алгебраически (по крайней мере, в нулевой характеристике), если ввести кольца степенных рядов. Одна вещь, для которой такой подход обычно все же непригоден, — это описание касательных пространств Зарисского к особым многообразиям.

Нечего и говорить, что существует много шансов спутать касательное пространство Зарисского к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ в точке p с проективным касательным пространством, тем более что во многих текстах и то, и другое называется «касательное пространство к X в точке p» и одинаково обозначается T_pX. На словесном уровне мы будем стараться избегать этого, говоря «касательное пространство Зарисского» и «проективное касательное пространство» всякий раз, когда есть опасность путаницы. С обозначениями дело обстоит хуже (мы не можем, например, обозначать проективное касательное пространство через $\mathbb{P}T_p(X)$, поскольку этот набор символов должен обозначать проективное пространство, состоящее из одномерных подпространств в касательном пространстве Зарисского $T_p(X)$, и с этим последним пространством мы тоже иногда будем иметь дело). За неимением лучшего мы решили обозначать проективные касательные пространства через $\mathbb{T}_p(X)$.

Существует еще одно описание проективного касательного пространства к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ в точке $p \in X$. Пусть $\widetilde{X} \subset K^{n+1}$ — конус над X (т. е. замыкание множества таких $v \in K^{n+1}$, что $[v] \in X$, или, что равносильно, множество нулей в K^{n+1} идеала $I(X) \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$), и пусть $v \in K^{n+1}$ — произвольный ненулевой вектор в K^{n+1}, лежащий над p. Тогда проективное касательное пространство $\mathbb{T}_pX$ — не что иное, как подпространство в $\mathbb{P}^n$, соответствующее касательному пространству Зарисского $T_v\widetilde{X} \subset T_v(K^{n+1}) = K^{n+1}$. Легко видеть, что это описание равносильно приведенным выше, в частности, описанию $\mathbb{T}_pX$ в терминах частных производных однородных многочленов F_α, порождающих $I(X)$.

Это описание также проясняет взаимоотношение между проективным касательным пространством и касательным пространством Зарисского. Именно, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное многообразие и $p \in X$ — произвольная точка; предположим, что $\Lambda \subset K^{n+1}$ — подпространство, соответствующее проективному касательному пространству $\mathbb{T}_pX$. Тогда, ввиду сказанного выше, Λ содержит одномерное подпространство

$K \cdot v$, и с точностью до умножения на скаляр мы имеем естественное отождествление касательного пространства Зарисского к X в p с фактором $\Lambda/K \cdot v$. В частности, нормальное пространство к X в p, обозначаемое через $N_p(X/\mathbb{P}^n)$ (или просто $N_p(X)$) и определяемое a priori как фактор

$$N_p(X) = \mathbb{T}_p(\mathbb{P}^n)/\mathbb{T}_p(X),$$

может быть также реализовано как факторпространство K^{n+1}/Λ.

(Если быть более точным, а заодно и объяснять выражение «с точностью до умножения на скаляр», то, как мы увидим в лекции 16, имеются естественные отождествления

$$T_p(\mathbb{P}^n) = (K^{n+1}/K \cdot v) \otimes (K \cdot v)^*,$$
$$T_p(X) = (\Lambda/K \cdot v) \otimes (K \cdot v)^*,$$

и отсюда

$$N_p(X) = (K^{n+1}/\Lambda) \otimes (K \cdot v)^*.)$$

В следующих ниже упражнениях мы выясняем, гладки или особы некоторые из многообразий, введенных в части I.

Упражнение 14.13. С помощью следствия 14.10 покажите, что многообразия Веронезе и Сегре гладки, а также проверьте это непосредственно, исходя из задающих их уравнений. (Еще одна возможность: доказать это без вычислений, пользуясь результатом упражнения 14.3 и их однородностью.)

Упражнение 14.14. Покажите, что нормальный рациональный свиток $X_{a_1,\ldots,a_k} \subset \mathbb{P}^n$ гладок тогда и только тогда, когда $a_i > 0$ для всех i.

Упражнение 14.15. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное неприводимое невырожденное (т. е. не лежащее ни в одной гиперплоскости) многообразие, и пусть $S(X)$ — его многообразие секущих. Покажите, что проективное касательное пространство к $S(X)$ в точке, лежащей на X, совпадает со всем $\mathbb{P}^n$ (в частности, $S(X)$ особо, если оно не совпадает с $\mathbb{P}^n$).

Пример 14.16. Детерминантальные многообразия

Для начала вспомним определение общих детерминантальных многообразий из лекции 9: через M обозначим проективное пространство $\mathbb{P}^{mn-1}$, состоящее из $(m \times n)$-матриц с точностью до умножения на скаляр, а через $M_k \subset M$ обозначим множество матриц ранга, не превосходящего k. В примере 12.1 мы видели, что M_k — неприводимое подмногообразие в M коразмерности $(m-k)(n-k)$; сейчас мы найдем его гладкие и особые точки и опишем касательные пространства Зарисского в тех и других. Мы сделаем это в явном виде, введя на M

координаты и исследуя уравнения, задающие M_k; позднее (в примере 16.18) мы дадим более инвариантное описание.

Начнем с того, что выберем точку $A \in M_k$, соответствующую матрице, ранг которой в точности равен k, т. е. $A \in M_k \setminus M_{k-1}$. (Заметим, что поскольку орбитами действия группы $\mathrm{PGL}_m K \times \mathrm{PGL}_n K$ на M являются в точности множества $M_i \setminus M_{i-1}$, гладкость или особость точки $A \in M_k$ может зависеть только от ее ранга.) Мы можем выбрать базисы в K^m и K^n таким образом, чтобы точка A соответствовала матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

а затем, в аффинной окрестности точки A, заданной условием $(X_{11} \neq 0)$, мы можем взять за аффинные координаты функции $x_{ij} = X_{ij}/X_{11}$; в терминах этих координат общий элемент из U можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \ldots\ldots\ldots & & & x_{1,m} \\ x_{2,1} & 1 + x_{2,2} & x_{2,3} & \ldots\ldots\ldots & & & x_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{l,1} & \ldots\ldots & & 1 + x_{l,l} & x_{l,l+1} & \ldots & x_{l,m} \\ x_{l+1,1} & \ldots\ldots & & x_{l+1,l} & x_{l+1,l+1} & \ldots & x_{l+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n,1} & \ldots\ldots\ldots & & & & & x_{n,m} \end{pmatrix},$$

причем A, разумеется, соответствует началу координат.

Начнем со случая $l = k$. Каковы линейные члены $(k+1) \times (k+1)$-миноров этой матрицы? Ответ таков: ненулевой дифференциал в начале координат будет только у тех из этих миноров, в которые входят первые k строк и первые k столбцов, так что их линейные члены — это в точности координаты $x_{i,j}$, для которых $i, j > k$. Поскольку имеется ровно $(m-k)(n-k)$ таких координат, мы можем заключить, что M_k гладко в точках, принадлежащих $M_k \setminus M_{k-1}$. Далее, если $l < k$, то ни один из $(k+1) \times (k+1)$-миноров линейных членов не содержит. Пользуясь сформулированным нами ранее, но не доказанным фактом, гласящим, что такие миноры порождают идеал M_k, заключаем, что проективное касательное пространство к M_k в точке $A \in M_{k-1}$ совпадает со всем M.

Мы можем дать инвариантное описание касательного пространства к M_k в гладкой точке $A \in M_k \setminus M_{k-1}$. Чтобы сделать это, заметим, что мы отождествили касательное пространство к M_k в точке A с пространством матриц, у которых правая нижняя подматрица размером $(m-k) \times (n-k)$ состоит из одних нулей. Однако же базисы $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ в K^n и K^m выбраны таким образом, что ядро A — это в точности линейная оболочка $e_{k+1}, \ldots, e_n$, а образ A — это в точности линейная оболочка $f_1, \ldots, f_k$. Стало быть, мы имеем

$$\mathbb{T}_A(M_k) = \mathbb{P}\{\varphi \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \mid \varphi(\mathrm{Ker}(A)) \subset \mathrm{Im}(A)\};$$

иными словами, мы можем сказать, не пользуясь координатами, что проективное касательное пространство к M_k в точке A, соответствующей отображению $A\colon K^n \to K^m$ ранга в точности k, является линейной оболочкой отображений $\varphi\colon K^n \to K^m$, переводящих ядро A в образ A.

Лекция 15

ГАУССОВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ, КАСАТЕЛЬНЫЕ И ДВОЙСТВЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В предыдущей лекции мы сопоставили каждой точке проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$; настала пора обсудить, как меняются эти подпространства при движении точки по многообразию, — иными словами, изучить геометрию *гауссова отображения.* Однако перед тем, как углубиться в эту тему, мы должны посвятить некоторое время обсуждению вопроса, который будет иметь все большее отношение к нашим рассмотрениям: каково наше основное поле K и, в частности, какова его характеристика.

Замечание о характеристике

Вплоть до конца лекции 13 большинство наших утверждений было справедливо над произвольным (алгебраически замкнутым) основным полем K. Однако же когда речь заходит о касательных пространствах, и особенно о том, как варьируются проективные касательные пространства к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$, ситуация начинает очень сильно зависеть от характеристики поля K. Причина проста: в характеристике $p > 0$ все производные функции могут тождественно обращаться в нуль при том, что функция отлична от константы. Так, например, утверждение о том, что не все касательные к невырожденной плоской кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ проходят через заданную точку $p \in \mathbb{P}^2$, самоочевидное, если мы доверяем нашей вещественной или комплексной интуиции, является неверным в характеристике p. (Возьмите, например, кривую C, заданную многочленом $XY - Z^2$, $p = [0, 0, 1]$ и $\operatorname{char}(K) = 2$.)

Это не означает, что темы, которые мы будем обсуждать в следующих нескольких лекциях, вообще нельзя рассматривать в конечной характеристике. Однако для этого необходима более продвинутая техника, чем та, что есть в нашем распоряжении. Поэтому для наших нынешних целей мы будем использовать технику анализа, смиряясь с тем фактом, что это по большей части ограничивает наши рассмотрения случаем нулевой характеристики. Мы постараемся в каждом утверждении указывать, справедливо ли оно в произвольной характеристике. (Мы должны также сказать, что начиная с лекции 18 мы вернемся к подходу, от характеристики практически независимому.)

Имеется и еще одно ограничение, которое будет чрезвычайно полезным: если мы предположим, что наше основное поле совпадает с $\mathbb{C}$, мы сможем использовать технику теории комплексных многообразий и теорию функций нескольких комплексных переменных. Мы не будем развивать этот подход сколько-нибудь глубоко, но это будет очень удобно, особенно в том плане, что это позволит нам параметризовать многообразия локально: если $X \subset \mathbb{P}^n$ — k-мерное многообразие и $p \in X$ — общая точка, мы можем описать окрестность U точки p в X как образ аналитического отображения

$$\begin{aligned} \varphi\colon \Delta &\to X \subset \mathbb{P}^n, \\ (z_1, \ldots, z_k) &\mapsto [f_0(z), \ldots, f_n(z)], \end{aligned}$$

где $\Delta \subset \mathbb{C}^k$ — полидиск и $f_0, \ldots, f_n$ — голоморфные функции. Ясно, что такой параметризации не существует в категории алгебраических многообразий, если только X не унирационально.[1]

Может показаться, что условие $K = \mathbb{C}$ гораздо более ограничительно, чем $\operatorname{char}(K) = 0$. Оказывается, однако, что это не так. Это метаматематическое утверждение известно как *принцип Лефшеца*; грубо говоря, он состоит в следующем.

Принцип Лефшеца 15.1. *Всякая справедливая над $\mathbb{C}$ теорема алгебраической геометрии, в которой речь идет о конечном наборе алгебраических многообразий и отображений, справедлива и над произвольным алгебраически замкнутым полем K характеристики нуль.*

Чтобы увидеть, почему это так, заметим, что конечный набор многообразий и отображений задается конечным набором многочленов; они, в свою очередь, задаются своими коэффициентами, которые образуют конечное подмножество $\{c_\alpha\}$ в K. С точки зрения истинности данного нам утверждения ничего не изменится, если мы заменим K на алгебраическое замыкание $L = \overline{\mathbb{Q}(c_\alpha)} \subset K$ подполя $\mathbb{Q}(c_\alpha)$, порожденного c_α над $\mathbb{Q}$. В то же время, так как степень трансцендентности $\mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$ бесконечна, это подполе K может быть вложено также и в $\mathbb{C}$; если мы знаем, что теорема верна над $\mathbb{C}$, то она верна над L и, следовательно, над K.

Это рассуждение должно прояснить, что именно мы понимали под «теоремой алгебраической геометрии»: это практически любая теорема, в которой утверждается существование решения системы полиномиальных уравнений или существование многообразия или отображения со свойствами, выражающимися в терминах решений систем полиноми-

[1] Одним из способов построить аналогичную конструкцию алгебраически является введение пополнения локального кольца X в p.

альных уравнений. Это включает все теоремы, установленные до сих пор в этой книге; например, предложение 14.4, которое, как мы видели, является при $K=\mathbb{C}$ просто одним из вариантов теоремы Сарда, может быть выведено для произвольного алгебраически замкнутого поля K характеристики нуль.

До сих пор мы избегали пользоваться комплексно-аналитической техникой по двум причинам: она не была необходима и потребовала бы от нас ограничиваться случаем характеристики нуль. Однако теперь, когда мы в любом случае принимаем это ограничение, мы будем использовать комплексные числа там, где это удобно.

Пример 15.2. Гауссово отображение

Описание проективного касательного пространства $\mathbb{T}_p(X)$ в гладкой точке p многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ как линейного подпространства в $\mathbb{P}^n$ позволяет нам определить *гауссово отображение*, связанное с гладким многообразием. Если X — гладкое равноразмерное многообразие размерности k, то это просто отображение

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_X : X \to \mathbb{G}(k, n),$$

сопоставляющее точке $p \in X$ ее касательную плоскость $\mathbb{T}_p(X)$. То, что это отображение регулярно, ясно из описания проективного касательного пространства как ядра линейного отображения, заданного матрицей частных производных $\left(\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial Z_i}\right)$, где $\{F_\alpha\}$ — набор образующих идеала X. Заметим, что если X особо, то $\mathscr{G}$ также определено и регулярно на открытом множестве гладких точек X (которое является плотным согласно упражнению 14.3), а значит, задаст рациональное отображение

$$\mathscr{G}: X \dashrightarrow \mathbb{G}(k, n).$$

В дальнейшем, говоря о гауссовом отображении многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ и не уточняя, является ли X гладким, мы будем иметь в виду именно это рациональное отображение. Мы будем называть образ $\mathscr{G}(X)$ *многообразием касательных плоскостей*, или *гауссовым образом* многообразия X, и обозначать его через $\mathscr{T}X$. Заметим, что в случае особого многообразия здесь возможна некоторая путаница, поскольку касательные пространства в особых точках, будучи подпространствами, размерность которых строго больше k, не будут элементами $\mathscr{T}X$, а $\mathscr{T}X$, в свою очередь, будет содержать плоскости, являющиеся пределами касательных плоскостей, но не касательными плоскостями.

Простейшим примером гауссова отображения является отображение, связанное с гиперповерхностью $X \subset \mathbb{P}^n$: если X задана однородным многочленом $F(Z_0, \ldots, Z_n)$, то гауссово отображение $\mathscr{G}_X : X \to \mathbb{G}(n-1, n) = \mathbb{P}^{n*}$ задается формулой

$$\mathscr{G}_X(p) = \left[\frac{\partial F}{\partial Z_0}(p), \ldots, \frac{\partial F}{\partial Z_n}(p)\right].$$

Заметим, что в случае, когда степень F равна 2, это отображение линейно. В самом деле, как мы видели, гладкую квадрику $X \subset \mathbb{P}V = \mathbb{P}^n$ можно задать симметричной билинейной формой

$$Q \colon V \times V \to K,$$

и гауссово отображение является просто ограничением на X линейного отображения $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n*}$, ассоциированного с индуцированным изоморфизмом $\widetilde{Q} \colon V \to V^*$.

Из предыдущего описания легко видеть, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкая гиперповерхность степени $d \geqslant 2$, то слои гауссова отображения $\mathscr{G}_X : X \to \mathbb{P}^{n*}$ конечны: так как частные производные F по Z_i не зануляются одновременно ни в одной точке X, отображение $\mathscr{G}_X$ не может быть постоянным вдоль кривой.[1] Значит, образ $\mathscr{T}X$ гауссова отображения тоже является гиперповерхностью. Имеет место теорема Ф. Л. Зака, которую мы не будем здесь доказывать, утверждающая, что для любого гладкого k-мерного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, отличного от линейного пространства, гауссово отображение конечно и, в частности, размерность многообразия $\mathscr{T}X \subset \mathbb{G}(k, n)$ касательных плоскостей к X тоже равна k [FL]. Это утверждение справедливо в любой характеристике. Для кривых имеется гораздо более сильное утверждение, справедливое только в характеристике нуль.

Предложение 15.3. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимая кривая, отличная от прямой. Тогда гауссово отображение $\mathscr{G}_C : C \to \mathbb{G}(1, n)$ бирационально на свой образ.*[2]

Доказательство. Мы дадим доказательство над полем $K = \mathbb{C}$ с использованием аналитической топологии.

---

[1]Поясним это рассуждение. Если образ кривой $C \subset X$ при гауссовом отображении является точкой, то в $\mathbb{P}^{n*}$ существуют гиперплоскости, эту точку не содержащие; следовательно, для некоторой ненулевой линейной комбинации $G = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(\partial F_i/\partial Z_0)$ гиперповерхность $(G = 0)$ не пересекается с кривой $C \subset \mathbb{P}^n$, что невозможно. — *Прим. ред.*

[2]Кроме того, в нулевой характеристике гауссово отображение бирационально на свой образ для любого гладкого многообразия, отличного от линейного пространства; это нетрудно вывести из цитированной выше теоремы Зака и теоремы 15.24. — *Прим. ред.*

Предположим, что $\mathscr{G}_C$ не бирационально. Тогда мы можем найти компоненту положительной размерности Γ множества

$$\{(p, q) \mid \mathbb{T}_p C = \mathbb{T}_q C\} \subset C_{\mathrm{sm}} \times C_{\mathrm{sm}},$$

которая отлична от диагонали. Пусть (p, q) — гладкая точка на Γ, не лежащая на диагонали, а t — локальный аналитический параметр на Γ в окрестности точки (p, q). Тогда точки p и q на $C \subset \mathbb{P}^n$ могут быть заданы векторнозначными функциями $[v(t)]$ и $[w(t)]$ соответственно, причем $[v(0)] \neq [w(0)]$. В этих терминах утверждения, что $q \in \mathbb{T}_p C$ и $p \in \mathbb{T}_q C$, переходят в тождества

$$v(t) \wedge w(t) \wedge v'(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad v(t) \wedge w(t) \wedge w'(t) \equiv 0.$$

(На самом деле внешнее произведение любых трех из векторов $v(t)$, $w(t)$, $v'(t)$ и $w'(t)$ равно нулю.) Дифференцируя эти уравнения, имеем

$$v(t) \wedge w(t) \wedge v''(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad v(t) \wedge w(t) \wedge w''(t) \equiv 0.$$

Продолжая в том же духе, мы можем вывести, что все производные $v^{(n)}(0)$ и $w^{(n)}(0)$ лежат в подпространстве K^{n+1}, порожденном $v(0)$ и $w(0)$, и, следовательно, C является прямой $\overline{pq}$. □

В качестве следствия теоремы 15.24 мы увидим, что имеется много (с неизбежностью особых) гиперповерхностей $X \subset \mathbb{P}^n$ высших размерностей, гауссовы образы $\mathscr{T}X \subset \mathbb{P}^{n*}$ которых имеют меньшую размерность.

Пример 15.4. Многообразия касательных

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое многообразие размерности k. Объединение

$$TX = \bigcup_{\Lambda \in \mathscr{T}X} \Lambda$$

k-плоскостей, соответствующих точкам образа $\mathscr{T}X$ гауссова отображения, тоже является алгебраическим подмногообразием, называемым *многообразием касательных* к X. Конечно, если X гладко, то это просто объединение его касательных плоскостей; если X особо, то положение сложнее (хотя можно описать $\mathscr{T}X$ как замыкание объединения касательных плоскостей в гладких точках).

Какова размерность TX? На этот вопрос можно дать, в общем-то, простой ответ — так же, как мы действовали, например, в случае многообразия секущих (пример 11.22). Именно, посмотрим на отношение инцидентности

$$\Sigma = \{(\Lambda, p) \mid p \in \Lambda\} \subset \mathscr{T}X \times \mathbb{P}^n$$

(или, эквивалентно, когда X гладко,

$$\Psi = \{(p, q) \mid q \in \mathbb{T}_p X\} \subset X \times \mathbb{P}^n).$$

Образом $\pi_2(\Sigma) \subset \mathbb{P}^n$ многообразия Σ при проекции π_2 является касательное многообразие TX. Проекция π_1 на первый множитель сюръективна, а все ее слои неприводимы и имеют размерность k; значит, Σ неприводимо и его размерность не превосходит $2k$. Отсюда следует, что многообразие касательных к k-мерному многообразию неприводимо и имеет размерность, не большую, чем $2k$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда общая точка q на общей касательной плоскости $\mathbb{T}_p X$ лежит на $\mathbb{T}_r X$ лишь для конечного числа точек $r \in X$.

Упражнение 15.5. Опишите поверхность касательных к скрученной кубической кривой $C \subset \mathbb{P}^3$. В частности, покажите, что это поверхность четвертой степени. Каково ее множество особенностей? (*)

Упражнение 15.6. Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ — произвольная неприводимая неплоская кривая, и пусть Σ — отношение инцидентности, введенное в примере 15.4. Покажите, что проекция $\pi_2 \colon \Sigma \to TX$ бирациональна (т. е. взаимно однозначна в общей точке). (*)

Вполне может оказаться, что многообразие касательных к k-мерному многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ имеет строго меньшую размерность, чем $\min(2k, n)$. Эта ситуация очень похожа на аналогичную ситуацию с многообразием секущих, описанную в предложении 11.24 и при последующем обсуждении: если назвать разность $2\dim(X) - \dim(TX)$ *дефектом* многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, для которого $TX \neq \mathbb{P}^n$, то имеются примеры многообразий со сколь угодно большим дефектом, хотя и неизвестно, нет ли для гладких многообразий универсальной верхней оценки дефекта.

Пример 15.7. Многообразие касательных прямых

Определив проективное касательное пространство к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$, мы можем говорить и о таких вещах, как касательные прямые. Если X гладко, то их определение не вызывает затруднений: *касательные прямые* определяются как прямые в $\mathbb{P}^n$, содержащие точку $p \in X$ и лежащие в соответствующей касательной плоскости $\mathbb{T}_p(X)$. Для произвольного X мы определим *многообразие касательных прямых к* X, обозначаемое через $\mathcal{T}_1(X)$, как замыкание в грассманиане $\mathbb{G}(1, n)$ множества прямых, содержащих какую-нибудь гладкую точку $p \in X$ и лежащих в $\mathbb{T}_p(X)$; эквивалентно, это множество таких прямых L, что $p \in L \subset \Lambda$ для некоторой пары (p, Λ) в графике гауссова отображения $\mathcal{G}_X$.

(Здесь мы должны заметить, что имеется три других подхода к понятию «касательная прямая к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$», эквивалентные данному нами для гладких X, но неэквивалентные друг другу в общем случае. Мы обсудим эти понятия после упражнения 15.16.)

Упражнение 15.8. Покажите, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое неприводимое многообразие, то $\mathscr{T}_1(X) \subset \mathbb{G}(1, n)$ действительно является многообразием.

Размерность множества касательных прямых к k-мерному многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ найти довольно легко. Достаточно ввести отношение инцидентности

$$\Sigma = \{(L, p) \mid p \in L \subset \mathbb{T}_p(X)\} \subset \mathbb{G}(1, n) \times X_{\text{sm}}$$

и рассмотреть слои Σ над X и над его образом в $\mathbb{G}(1, n)$. Проекция π_2 сюръективна, а ее слои изоморфны $\mathbb{P}^{k-1}$, так что размерность Σ равна $2k - 1$; если X не содержит свою общую (а значит, любую) касательную прямую, то есть если X не является линейным подпространством в $\mathbb{P}^n$, то отображение π_1 конечно в общей точке. Значит, если X не является линейным пространством, образ $\pi_1(\Sigma)$ — и, соответственно, его замыкание $\mathscr{T}_1(X)$ — имеет размерность $2k - 1$.

Введя многообразие касательных прямых, мы теперь можем ответить на один из вопросов, поднятых в лекции 8: что именно является секущей прямой к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$? Начнем с относительно бесхитростной части, которую дадим в качестве упражнения.

Упражнение 15.9. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — многообразие. Покажите, что любая касательная прямая к X является и секущей прямой к X, т. е. элементом образа $\mathscr{S}(X)$ при рациональном отображении

$$s\colon X \times X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n),$$

сопоставляющем паре $(p, q) \in X \times X$ прямую $\overline{pq} \in \mathbb{G}(1, n)$. (Отметим, что достаточно это сделать для касательных прямых в гладких точках.)

На самом деле в случае гладкого X справедливо и обратное утверждение:

Предложение 15.10. *Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое многообразие, то каждая точка многообразия $\mathscr{S}(X)$ является либо «настоящей» секущей $\overline{pq}$, где $p \neq q \in X$, либо касательной прямой; другими словами,*

$$\mathscr{S}(X) = s(X \times X \setminus \Delta) \cup \mathscr{T}_1(X),$$

где $\Delta \subset X \times X$, как обычно, обозначает диагональ.

Доказательство. Чтобы это увидеть, запишем в явном виде уравнения для $\mathscr{S}(X)$ следующим образом. Сначала выберем набор многочленов $F_1, \ldots, F_l \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$, порождающих идеал $I(X)$ локально; мы можем выбрать их так, чтобы все F_α имели одинаковую степень d. Далее, мы можем задать все прямые $L \subset \mathbb{P}^n$ из открытого подмножества U

грассманиана $\mathbb{G}(1, n)$ матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

или, параметрически, в виде

$$[S, T] \mapsto [S, T, a_2S + b_2T, a_3S + b_3T, \dots, a_nS + b_nT].$$

Ограничение каждого многочлена F_α на прямую $L_{a,b}$ записывается в виде

$$F_\alpha|_{L_{a,b}} = p_{\alpha,d}(a, b)S^d + p_{\alpha,d-1}(a, b)S^{d-1}T + \dots + p_{\alpha,0}(a, b)T^d,$$

где коэффициенты $p_{\alpha,i}$ являются многочленами от a и b. Пусть теперь m — сколь угодно большое целое число, S_{m-d} — пространство однородных многочленов степени $m-d$ от $Z_0, \dots, Z_n$ и V — пространство многочленов степени m от S и T. Для произвольных значений m, a и b, мы можем определить отображение

$$\varphi_{a,b}\colon (S_{m-d})^l \to V,$$

сопоставляющее набору из l однородных многочленов $G_1, \dots, G_l$ степени $m-d$ сумму

$$(G_1, \dots, G_l) \mapsto \sum (F_\alpha G_\alpha)|_{L_{a,b}}.$$

Это — линейное отображение, матрица которого состоит из многочленов от координат a и b на $U \subset \mathbb{G}(1, n)$. Более того, если $L_{a,b}$ является «настоящей» секущей $\overline{pq}$ многообразия X, то, так как все многочлены F_α имеют два общих нуля $p, q \in L$, образ этого отображения лежит в подпространстве V, состоящем из многочленов, обращающихся в нуль в этих двух точках. В частности, отсюда следует, что для таких (a, b), что $L_{a,b} \in \mathscr{S}(X)$, ранг отображения $\varphi_{a,b}$ не превосходит $m-1$, или, другими словами, все $(m \times m)$-миноры матрицы отображения $\varphi_{a,b}$, рассматриваемые как регулярные функции на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{G}(1, n)$, обращаются в нуль на многообразии $\mathscr{S}(X)$.

Обратно, пусть $\mathscr{S}'$ обозначает множество таких прямых L, что образ отображения $\varphi_{a,b}$ имеет коразмерность 2 для всех m. Нетрудно видеть, что при $L_{a,b} \in \mathscr{S}'$ образ отображения $\varphi_{a,b}$ состоит либо из всех многочленов, обращающихся в нуль в двух точках $p, q \in L_{a,b}$, либо из всех многочленов, имеющих нуль порядка 2 в некоторой точке $p \in L_{a,b}$. В первом случае $L = \overline{pq}$ является настоящей секущей многообразия X; во втором случае (если X гладко) $L_{a,b} \subset \mathbb{T}_pX$, так что $L_{a,b} \in \mathscr{T}_1(X)$. Итак, мы заключаем, что

$$\mathscr{S}' = s(X \times X \setminus \Delta) \cup \mathscr{T}_1(X),$$

и, сравнивая размерности, выводим, что $\mathscr{S}' = \mathscr{S}(X)$. □

Упражнение 15.11. Другой метод доказательства заключается в следующем: покажите, что отображение секущих прямых

$$s\colon X \times X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n)$$

продолжается до регулярного отображения

$$\tilde{s}\colon \mathrm{Bl}_\Delta(X \times X) \to \mathbb{G}(1, n)$$

раздутия $X \times X$ вдоль диагонали. Затем покажите, что отображение $\tilde{s}$ переводит слой $\mathrm{Bl}_\Delta(X \times X) \to X \times X$ над точкой $(p, p) \in \Delta$ в проективное пространство прямых, проходящих через p в $\mathbb{T}_p(X)$.

Упражнение 15.12. Покажите на примере, что без предположения гладкости X предложение 15.10 неверно.

Заметим, что так как, согласно упражнению 15.9, многообразие касательных TX многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ содержится в его многообразии секущих, то примеры многообразий с дефектным многообразием секущих, данные в упражнениях 11.26 и 11.27, доставляют и примеры дефектного многообразия касательных.

Тот факт, что многообразие касательных TX многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ содержится в его многообразии секущих, имеет еще одно замечательное следствие: комбинируя его с теоремой 14.9, мы получаем классическую теорему о вложении гладких многообразий $X \subset \mathbb{P}^n$. Именно, заметим, что проекция $\pi_p\colon X \to \mathbb{P}^{n-1}$ многообразия X из точки $p \in \mathbb{P}^n$ взаимно однозначна тогда и только тогда, когда p не лежит ни на одной «настоящей» секущей многообразия X (т. е. прямой $\overline{qr}$ с различными $q, r \in X$); кроме того, она индуцирует вложения касательных пространств Зарисского к X в соответствующие касательные пространства к образу $\overline{X} = \pi_p(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ тогда и только тогда, когда p не лежит ни в одной проективной касательной плоскости к X. Поэтому, воспользовавшись следствием 14.10, мы получаем, что $\pi_p\colon X \to \overline{X}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда p не лежит на многообразии секущих $S(X)$ многообразия X. Наконец, пользуясь тем, что размерность $S(X)$ не превосходит удвоенной размерности X плюс один, мы выводим, что при $n > 2 \cdot \dim(X) + 1$ многообразие X допускает бирегулярную проекцию в $\mathbb{P}^{n-1}$. В частности, мы получаем следующую теорему.

Теорема 15.13. *Любое гладкое многообразие X размерности k можно вложить в проективное пространство $\mathbb{P}^{2k+1}$.*

Заметим, что это утверждение может быть неверно для особого X: касательное пространство Зарисского к k-мерному многообразию может иметь любую размерность. Например, касательное пространство Зарисского в точке $\rho(0) = [1, 0, \ldots, 0]$ к кривой $C \subset \mathbb{P}^n$, заданной как образ отображения

$$\rho\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n,$$
$$t \mapsto [1,\, t^n,\, t^{n+1},\, \ldots,\, t^{2n}],$$

совпадает со всем $\mathbb{P}^n$, так что эта кривая не может быть изоморфно спроектирована ни в какую гиперплоскость. Дело здесь в том, что для особого многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ размерности k проективное касательное пространство в особой точке p может быть гораздо больше объединения таких плоскостей $\Lambda \cong \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$, что $(p,\, \Lambda)$ лежит в графике гауссова отображения.

Надо также отметить, что теорема 15.13, в общем-то, бесполезна: многообразия, которые при естественном определении оказываются вложенными в проективные пространства большой размерности (многообразия Веронезе, многообразия Сегре, грассманианы и т. п.), почти всегда лучше всего так и рассматривать как вложенные в эти пространства, поскольку при проектировании мы теряем большие группы проективных автоморфизмов, действующие на этих многообразиях.

Пример 15.14. Соединения пересекающихся многообразий

В примере 6.17 мы определили многообразие $\mathcal{J}(X,\, Y) \subset \mathbb{G}(1,\, n)$ прямых, пересекающих каждое из двух непересекающихся многообразий $X,\, Y \subset \mathbb{P}^n$. В примере 8.1 мы расширили это определение на возможно пересекающиеся пары многообразий $X,\, Y \subset \mathbb{P}^n$, но не сказали, какие еще прямые, кроме соединяющих различные точки $p \in X$, $q \in Y$, должны быть включены в $\mathcal{J}(X,\, Y)$. Сейчас мы можем дать частичный ответ на этот вопрос.

Упражнение 15.15. Пусть X и $Y \subset \mathbb{P}^n$ — подмногообразия, пересекающиеся в точке p, являющейся гладкой как на X, так и на Y, причем $\mathbb{T}_p X \cap \mathbb{T}_p Y = \{p\}$. Покажите, что прямая $L \subset \mathbb{P}^n$, проходящая через p и пересекающая X и Y только в p, лежит в многообразии $\mathcal{J}(X,\, Y) \subset \subset \mathbb{G}(1,\, n)$ прямых, соединяющих X и Y, тогда и только тогда, когда L лежит в линейном пространстве, порожденном $\mathbb{T}_p X$ и $\mathbb{T}_p Y$.

Упражнение 15.16. Покажите на примере, что утверждение упражнения 15.15 неверно без предположения $\mathbb{T}_p X \cap \mathbb{T}_p Y = \{p\}$.

Ранее мы отмечали, что существуют три других понятия «касательной прямой к многообразию X в точке p»; сейчас мы их обсудим. Первый подход заключается в том, чтобы брать пределы секущих прямых $\overline{pq}$ к X при стремлении q к p; именно, рассмотрим отображение

$$s_p\colon X \dashrightarrow \mathbb{G}(1,\, n),$$

сопоставляющее точке $q \in X$ прямую $\overline{pq} \in \mathbb{G}(1, n)$, и определим множество касательных прямых к X в p как образ $\{p\}$ при этом отображении, т. е. как образ в $\mathbb{G}(1, n)$ слоя графика s_p над p. Как мы увидим в лекции 20 (см., в частности, упражнение 20.4), множество прямых, касающихся X в точке p в смысле этого определения, является так называемым *касательным конусом* к X в точке p.

Другой подход заключается в определении касательной прямой к X в p как предела секущей прямой $\overline{qr}$ при одновременном стремлении $q \in X$ и $r \in X$ к p, или, другими словами, как образ точки (p, p) при рациональном отображении

$$s\colon X \times X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n).$$

Наконец, третий и наиболее наивный подход заключается в определении касательной прямой к X в p как любой прямой L, содержащей p и лежащей в проективном касательном пространстве $\mathbb{T}_p X$.

Мы обозначим объединение по всем $p \in X$ множеств прямых, касающихся X в p в смысле этих трех подходов, через $\mathcal{T}'(X)$, $\mathcal{T}''(X)$ и $\mathcal{T}'''(X)$ соответственно. Взаимоотношения между этими множествами резюмированы в следующих упражнениях.

Упражнение 15.18.[1] Покажите, что множества $\mathcal{T}''(X)$ и $\mathcal{T}'''(X)$ являются замкнутыми подмногообразиями в $\mathbb{G}(1, n)$, но $\mathcal{T}'(X)$ может таковым и не быть; кроме того, покажите, что все три множества совпадают при гладком X.

Упражнение 15.19. Покажите, что в общем случае

$$\mathcal{T}'(X) \subset \mathcal{T}_1(X) \subset \mathcal{T}''(X) \subset \mathcal{T}'''(X).$$

Для каждого включения приведите примеры, когда оно является строгим. (*)

Один из важных примеров применения второго понятия касательной прямой доставляет красивая теорема Фултона и Хансена. Пусть $\tan(X)$ обозначает объединение всех касательных прямых к X во втором смысле, т. е.

$$\tan(X) = \bigcup_{L \in \mathcal{T}''(X)} L,$$

и пусть $S(X)$, как и раньше, обозначает многообразие секущих для X. Тогда имеет место следующая теорема.

[1] В оригинале в этом месте имеется сбой в нумерации. Для удобства ссылок мы не стали его исправлять. — *Прим. ред.*

Теорема 15.20. *Для любого неприводимого k-мерного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ либо*

$$\text{(i)} \qquad \dim(S(X)) = 2k+1 \quad \text{и} \quad \dim(\tan(X)) = 2k,$$

либо

$$\text{(ii)} \qquad S(X) = \tan(X).$$

Обсуждение этой и связанных с ней теорем см. в [FL].

Пример 15.21. Множество бикасательных прямых

Аналогичным образом мы можем ввести многообразие бикасательных прямых к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$. Сначала рассмотрим отношение инцидентности $\Gamma = \{(L, p, q) \mid p \neq q$ и $\overline{pq} = L \subset \mathbb{T}_p(X) \cap \mathbb{T}_q(X)\} \subset \mathbb{G}(1, n) \times X_{\text{sm}} \times X_{\text{sm}}$. Оно соответствует множеству двойных точек проекции $\pi_1 : \Sigma \to \mathbb{G}(1, n)$, где через

$$\Sigma = \{(L, p) \mid p \in L \subset \mathbb{T}_p X\} \subset \mathbb{G}(1, n) \times X_{\text{sm}}$$

обозначено отношение инцидентности, введенное в примере 15.7; напомним, что множество двойных точек — это объединение неприводимых компонент расслоенного произведения $\Sigma \times_{\mathbb{G}} \Sigma$, отличных от диагонали. Теперь определим *множество бикасательных прямых к X*, обозначаемое через $\mathscr{B}(X)$, как замыкание образа Γ при естественной проекции в $\mathbb{G}(1, n)$.

Применяя основную теорему 11.12 к этому примеру (так, как она применялась, например, в упражнении 11.15), мы можем заключить, что если для общего $(L, p, q) \in \Gamma$ не выполнено включение $\overline{pq} \subset X$, то размерность любой компоненты многообразия Γ больше или равна $4k - 2n$; соответственно, любая компонента множества $\mathscr{B}(X)$ бикасательных прямых, не состоящая из прямых, лежащих на X, имеет размерность, не меньшую, чем $4k - 2n$, где $k = \dim(X)$. Множество $\mathscr{B}(X)$ может и на самом деле иметь меньшую размерность, если всякая бикасательная прямая к X содержится в X, как, например, в случае, когда X является квадратичной или кубической поверхностью в $\mathbb{P}^3$ (в первом случае $\dim(\Gamma) = 3$, а $\dim(\mathscr{B}(X)) = 1$, во втором $\dim(\Gamma) = 2$, а $\dim(\mathscr{B}(X)) = 0$).

Мы должны отметить, что как определение множества двойных точек, данное в примере 5.16, не было оптимальным, так неоптимально и наше определение многообразия бикасательных прямых: более правильно определять его как образ в $\mathbb{G}(1, n)$ множества двойных точек проекции $\Sigma \to \mathbb{G}(1, n)$ при определении множества двойных точек, данном в [F1] или [K], а не так, как это сделано здесь. Один из недостатков нашего определения заключается в том, что оно плохо ведет себя в семействах. Например, заметим, что по нашему определению прямая $(Y = 0) \subset \mathbb{P}^2$ не является бикасательной к плоской кривой C_0, заданной уравнением $(Y^4 + YZ^3 = X^4)$, в то время как она является бикасательной к кривым C_λ, заданным уравнениями $Y^4 + YZ^3 = (X^2 - \lambda Z^2)^2$ при $\lambda \neq 0$. Стало быть, если $\mathbb{P}^{14}$ — проективное пространство, параметризующее плоские квартики, $U \subset \mathbb{P}^{14}$ — открытое множество, параметризующее гладкие плоские квартики, и через

$$\Phi = \{(C, L) \mid L \in \mathscr{B}(C)\} \subset U \times \mathbb{P}^{2*}$$

обозначено отношение инцидентности, слоем которого над $C \in U$ является множество бикасательных прямых к кривой C, то по нашему определению, в отличие от правильного, Φ не будет замкнуто в $U \times \mathbb{P}^{2*}$.

Пример 15.22. Двойственные многообразия

Наряду с касательными прямыми, можно определить, что такое *касательная гиперплоскость* к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$. Как и в случае касательных прямых, определение очевидно, если X гладко: в этом случае гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}^n$ называется касательной гиперплоскостью, если она содержит некоторую касательную плоскость к X. Как и раньше, в случае, когда X особо, мы определим множество касательных гиперплоскостей к X как замыкание в двойственном пространстве $\mathbb{P}^{n*}$ множества гиперплоскостей, содержащих касательную плоскость к X в гладкой точке. Это множество называется *двойственным многообразием* к X и обычно обозначается через $X^* \subset \mathbb{P}^{n*}$.

Имеется другой подход к описанию двойственного многообразия: если X гладко, то в большинстве случаев мы можем сказать, что оно является множеством таких гиперплоскостей $H \subset \mathbb{P}^n$, что пересечение $H \cap X$ особо. Причина, по которой не всегда можно сказать, что X^* является множеством гиперплоскостей H, для которых $H \cap X$ особо, заключается в том, что, в то время как пересечение X с гиперплоскостью H, касающейся X в изолированной точке p, обязательно является особым в p, некоторые гиперплоскости могут касаться X везде вдоль их (гладкого) пересечения. Например, гиперплоские сечения поверхности Веронезе $S \cong \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$ соответствуют плоским коникам; гиперплоскости, соответствующие двойным прямым, будут именно такого типа. (На языке схем характеризация многообразия, двойственного гладкому многообразию X, через особость $X \cap H$ будет полностью строгой.) Справедливым является тот факт, что гиперплоскости рассмотренного типа не могут образовывать неприводимую компоненту множества касательных гиперплоскостей, так что для гладких X мы можем описать X^* как замыкание множества таких H, что $H \cap X$ особо.

Какова размерность двойственного многообразия X^*? Как обычно, мы можем попытаться оценить ее с помощью введения соответствия инцидентности, на сей раз в виде замыкания Φ множества

$$\tilde{\Phi} = \{(p, H) \mid p \in X_{\mathrm{sm}} \text{ и } H \supset \mathbb{T}_p(X)\},$$

состоящего из пар (точка, касательная гиперплоскость). Размерность Φ сразу же считается с помощью отображения проекции $\pi_1 : \Phi \to X$ на первый сомножитель. Слоем этого отображения над гладкой точкой $p \in X$ является подпространство $\mathrm{Ann}(\mathbb{T}_p(X)) \cong \mathbb{P}^{n-k-1} \subset \mathbb{P}^{n*}$ гиперплоскостей, содержащих k-плоскость $\mathbb{T}_p(X)$. Таким образом, полный прообраз множества гладких точек X является неприводимым многообразием размерности $n-1$; отсюда следует, что Φ является неприводимым многообразием размерности $n-1$. (Проверку того, что образ $\pi_2(\Phi) \subset \mathbb{P}^{n*}$ действительно является двойственным многообразием X^*, мы оставляем в качестве *упражнения*.)

Из этого следует, конечно, что двойственное многообразие X^* является неприводимым многообразием, размерность которого не превосходит $n-1$, и что оно имеет размерность $n-1$ (т. е. является гиперповерхностью) в точности тогда, когда общая касательная плоскость к X является касательной в конечном числе точек. Мы могли бы наивно ожидать, что для большинства многообразий X общая касательная гиперплоскость касается X ровно в одной точке, и это в самом деле так в большом количестве примеров; например, общая гиперповерхность или общее полное пересечение обладает таким свойством. Это обстоятельство отражено в терминологии: если двойственное многообразие к многообразию X не является гиперповерхностью, мы говорим, что оно *дефектно*. Однако имеется множество примеров, когда двойственное многообразие не является гиперповерхностью (на самом деле из теоремы 15.24 будет видно, что в некотором смысле таких примеров имеется по крайней мере столько же, сколько многообразий, двойственные к которым *являются* гиперповерхностями).

Конечно, одной из причин того, что двойственное многообразие к X не является гиперповерхностью, может быть постоянство касательных плоскостей к X вдоль подмногообразий в X — например, таким свойством будет обладать конус (легко проверить, что двойственное многообразие к конусу $\overline{pY} \subset \mathbb{P}^n$ с вершиной p над многообразием $Y \subset \mathbb{P}^{n-1}$ является двойственным многообразием к Y, лежащим в гиперплоскости $p^* \subset \mathbb{P}^{n*}$, состоящей из гиперплоскостей, проходящих через p). Однако в общем случае суть дела не в этом; имеются примеры гладких многообразий $X \subset \mathbb{P}^n$, для которых гауссовы отображения взаимно однозначны, а двойственные многообразия тем не менее дефектны.

Возможно, простейшими такими примерами являются нормальные рациональные свитки $X = X_{a_1,\ldots,a_k}$ размерности $k \geqslant 3$. Чтобы это увидеть, вспомним из определения в лекции 8, что свиток X заметается однопараметрическим семейством $(k-1)$-плоскостей (по-английски такое семейство называется ruling). Касательная плоскость к X в любой точке $p \in X$ содержит $(k-1)$-плоскость $\Lambda \subset X$ из этого семейства, проходящую через p, так что если гиперплоское сечение $Y = X \cap H$ особо в p, то оно должно содержать Λ. Но H пересекается с общей плоскостью семейства по $(k-2)$-плоскости, а значит, замыкание Y_0 множества $(X \cap H) \setminus \Lambda$ пересекает Λ по $(k-2)$-плоскости Γ. Это означает, что Y особо вдоль Γ, так что общий слой проекции $\pi_2 \colon \Phi \to \mathbb{P}^{n*}$ имеет размерность $k-2$, а само X^*, соответственно, имеет размерность $n-k+1 < n-1$.

В частном случае многообразия $X_{1,\ldots,1}$ имеется другой способ увидеть, что двойственное многообразие является дефектным. Он базируется на альтернативном описании $X_{1,\ldots,1}$ как многообразия Сегре $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{k-1}) \subset \mathbb{P}^{2k-1}$, или, в инвариантных терминах, как множества

$$\mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \subset \mathbb{P}(V \otimes W)$$

приводимых (т. е. имеющих ранг 1) тензоров $v \otimes w$ в проективном пространстве, ассоциированном с тензорным произведением двумерного векторного пространства V и k-мерного векторного пространства W. Группа $\mathrm{PGL}(V) \times \mathrm{PGL}(W)$ действует на пространстве $\mathbb{P}(V \otimes W)$, сохраняя свиток $X = \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$, и точно так же она действует на двойственном пространстве, сохраняя двойственное многообразие X^*. Однако же с помощью простых рассуждений из линейной алгебры легко показать, что у действия $\mathrm{PGL}(V) \times \mathrm{PGL}(W)$ на $\mathbb{P}(V \otimes W)^* = \mathbb{P}(V^* \otimes W^*)$ имеется только две орбиты: тензоры ранга один и все остальное. Из одного этого следует, что двойственное многообразие X^* может быть только множеством разложимых тензоров; в частности, оно изоморфно самому X.

Заметим, что в этом примере можно непосредственно увидеть тот эффект, о котором шла речь в нашем рассуждении для произвольных свитков: особые гиперплоские сечения многообразия Сегре $X = \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$ соответствуют разложимым тензорам $l \otimes m \in \mathbb{P}(V^* \otimes W^*)$, так что эти сечения состоят из объединения $((l=0) \times \mathbb{P}W) \cup (\mathbb{P}V \times (m=0))$ полных прообразов гиперплоскостей в $\mathbb{P}V$ и $\mathbb{P}W$; в частности, они особы в точности вдоль $(k-2)$-плоскости.

Упражнение 15.23. Найдите двойственное многообразие к многообразию Сегре $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}^{mn+n+m}$ в общем случае. В частности, покажите, что оно является дефектным всегда, кроме случая $m = n$.

Перед тем как двигаться дальше, мы должны упомянуть две теоремы о двойственных многообразиях. Одна из них абсолютно фундаментальна и при этом элементарна (хотя и использует одну идею, которую мы представим только в следующей лекции, где и будет дано доказательство). Она формулируется так.

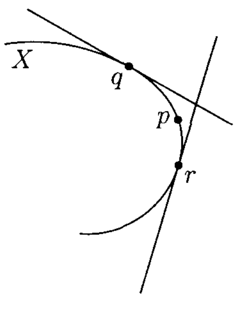
Теорема 15.24. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое многообразие, а $X^* \subset \subset \mathbb{P}^{n*}$ — двойственное к нему; пусть $\Phi_X \subset \mathbb{P}^n \times \subset \mathbb{P}^{n*}$ и $\Phi_{X^*} \subset \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n = = \mathbb{P}^n \times \subset \mathbb{P}^{n*}$ — многообразия инцидентности, связанные с X и X^*. Тогда*

$$\Phi_X = \Phi_{X^*}.$$

В частности, двойственное к двойственному данного многообразия совпадает с исходным многообразием.

Заметим, что, как и было обещано, эта теорема показывает, что многообразий с дефектным двойственным имеется примерно столько же, сколько и остальных, так как каждое многообразие является двойственным к какому-то другому многообразию.

Упражнение 15.25. Докажите непосредственно, что кривая, двойственная к двойственной к плоской кривой $X \subset \mathbb{P}^2$, совпадает с X. Для этого рассмотрите параметризованную дугу $\gamma\colon t \mapsto [v(t)] \in \mathbb{P}^2$, запишите двойственное отображение γ^* из диска в $\mathbb{P}^{2*}$, сопоставляющее точке касательную прямую к ней, и повторите этот процесс.



Классики для доказательства этого случая теоремы 15.24 ограничились бы рисованием картинки, иллюстрирующей утверждение: «Предельное положение пересечения $\mathbb{T}_q X \cap \mathbb{T}_r X$ касательных прямых к гладкой кривой $X \subset \mathbb{P}^2$ в точках q и r, стремящихся к точке $p \in X$, совпадает с p». Более общо, теорема 15.24 может быть следующим образом сформулирована на классическом языке: «Предел пересечения гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_n$, касающихся гладкого многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ в точках $q_1, \ldots, q_n$, стремящихся к точке $p \in X$, содержит p».

Другая теорема еще более замечательна и менее элементарна. Она относится к гладким многообразиям $X \subset \mathbb{P}^n$, двойственные многообразия к которым дефектны; для таких многообразий мы можем назвать разность $n - 1 - \dim(X^*)$, обозначаемую через $\delta(X^*)$, *дефектом двой-*

ственного многообразия к X. С помощью этого обозначения можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 15.26. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное гладкое многообразие с дефектным двойственным многообразием. Тогда*

$$\delta(X^*) \equiv \dim(X) \pmod 2.$$

Эта теорема принадлежит А. Ландману; второе доказательство было дано Л. Айном [Ein].

Лекция 16

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА К ГРАССМАНИАНАМ

Пример 16.1. Касательные пространства к грассманианам

Мы знаем, что грассманиан $\mathbb{G}(k, n)$ является гладким многообразием размерности $(k+1)(n-k)$. Это следует из нашего явного описания покрытия грассманиана открытыми подмножествами $U_\Lambda \cong \mathbb{A}^{(k+1)(n-k)}$, хотя мы могли бы также вывести это из того обстоятельства, что грассманиан является однородным пространством алгебраической группы $\mathrm{PGL}_{n+1} K$. Стало быть, касательные пространства Зарисского к грассманиану являются векторными пространствами той же размерности. По многим причинам, однако, важно иметь более инвариантное описание пространства $T_\Lambda(\mathbb{G})$ в терминах линейной алгебры вложения $\Lambda \subset \subset K^{n+1}$. В этой лекции мы получим такое описание, а затем воспользуемся им для описания касательных пространств к различным многообразиям, построенным в части I с помощью грассманианов.

Для начала посмотрим еще раз на вышеупомянутые открытые подмножества, покрывающие грассманиан. Вспомним, что в лекции 6 объяснялось, что для всякой $(n-k)$-плоскости $\Gamma \subset K^{n+1}$ открытое подмножество $U_\Gamma \subset \mathbb{G}$ определялось как множество плоскостей $\Lambda \subset K^{n+1}$, дополнительных к Γ, то есть таких, что $\Lambda \cap \Gamma = (0)$. Изоморфизм между этими открытыми подмножествами и аффинными пространствами $\mathbb{A}^{(k+1)(n-k)}$ устанавливался следующим образом. Если зафиксировать какое-нибудь подпространство $\Lambda \in U_\Gamma$, то подпространство $\Lambda' \in U_\Gamma$ будет являться графиком некоторого гомоморфизма $\varphi\colon \Lambda \to \Gamma$, так что

$$U_\Gamma = \mathrm{Hom}(\Lambda, \Gamma).$$

В частности, этот изоморфизм пространств индуцирует изоморфизм касательных пространств

$$T_\Lambda(\mathbb{G}) = \mathrm{Hom}(\Lambda, \Gamma).$$

Предположим теперь, что мы начинаем с подпространства Λ, не выбирая конкретного подпространства Γ. В какой степени это отождествление будет независимо от выбора Γ? Ответ прост: всякое подпространство Γ, дополнительное к Λ, естественно отождествляется с факторпространством K^{n+1}/Λ, и если рассмотреть наш изоморфизм касательных пространств под таким углом, то он будет независим от Г. Стало быть, мы имеем естественное отождествление

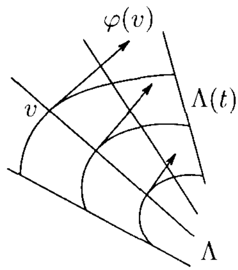
$$T_\Lambda(\mathbb{G}) = \mathrm{Hom}(\Lambda,\ K^{n+1}/\Lambda).$$

Чтобы лучше понять это отождествление, а также по той причине, что следующая ниже конструкция чрезвычайно полезна в приложениях, мы опишем его также в терминах касательных векторов к дугам на $\mathbb{G}$. (Как обычно, проводя вычисления с дугами, мы будем считать, что наше основное поле K совпадает с $\mathbb{C}$, и пользоваться языком комплексных многообразий, но техника и результаты будут применимы к отображениям гладких кривых над любым полем характеристики 0.) Именно, предположим, что $\{\Lambda(t)\} \subset \mathbb{G}$ — голоморфная кривая в $\mathbb{G}$, т. е. семейство плоскостей, параметризованное параметром t, принимающим значения в диске (или на гладкой кривой), для которого $\Lambda(0) = \Lambda$, и пусть $v \in \Lambda$ — произвольный вектор. Мы можем измерить уклонение Λ от вектора v следующим образом. Выберем произвольную голоморфную дугу $\{v(t)\} \in K^{n+1}$, для которой $v(t) \in \Lambda(t)$ для всех t,[1] и поставим в соответствие вектору v вектор

$$\varphi(v) = v'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} v(t).$$

Этот вектор измеряет отклонение Λ от v, не позволяющее нам выбрать $v(t) \equiv v$. Разумеется, $\varphi(v)$ определяется по v не единственным образом; однако же если $w(t)$ — любая другая голоморфная дуга, для которой $w(t) \in \Lambda(t)$ для всех t и $w(0) = v$, то, поскольку $w(0) = v(0)$, можно написать

$$w(t) - v(t) = t \cdot u(t),$$



где $u(t) \in \Lambda(t)$ для всех t. Отсюда следует, что $\varphi(v)$ корректно определено как элемент факторпространства K^{n+1}/Λ. Стало быть, дуга $\{\Lambda(t)\}$ определяет линейное отображение $\varphi\colon \Lambda \to K^{n+1}/\Lambda$, которое как раз и является касательным вектором в смысле описанного выше отождествления.

Существует множество других способов увидеть это отождествление. Например, грассманиан $\mathbb{G}(k, n) = G(k+1, n+1)$ является однородным пространством группы $\mathrm{GL}_{n+1} K$, так что касательное пространство в точке $\Lambda \in G$ естественно отождествляется с фактором алгебры Ли группы $\mathrm{GL}_{n+1} K$ по алгебре Ли стабилизатора Λ. Первая из этих

[1] И при этом $v(0) = v$. — *Прим. перев.*

алгебр — это просто векторное пространство эндоморфизмов K^{n+1}, вторая — подпространство эндоморфизмов, переводящих Λ в себя, так что

$$T_\Lambda G = \mathrm{Hom}(K^{n+1}, K^{n+1})/\{\varphi \mid \varphi(\Lambda) \subset \Lambda\} = \mathrm{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda).$$

Однако же, как мы уже говорили, отождествление с помощью касательных векторов к дугам будет наиболее полезным для наших целей.

Перед тем как идти дальше, мы должны коснуться вопроса обозначений. По многим причинам нам бы хотелось рассматривать грассманианы и проективные пространства как объекты одной природы, по крайней мере на уровне обозначений. Например, символом Λ мы обозначали и векторное подпространство $K^{k+1} \subset K^{n+1}$, и проективное подпространство $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$. Тогда, если быть последовательными, мы должны также использовать один и тот же символ p для обозначения как точки в проективном пространстве, так и прямой в K^{n+1}. В результате у нас будут появляться странно выглядящие формулы наподобие $T_p(\mathbb{P}^n) = \mathrm{Hom}(p, K^{n+1}/p)$, но в конечном счете это будет проще, чем пользоваться разными системами обозначений для $\mathbb{P}^n$ и $\mathbb{G}(k, n)$, в чем можно будет убедиться из следующей серии примеров.

Пример 16.2. Касательные пространства к отношениям инцидентности

Мы рассмотрим здесь основное отношение инцидентности, введенное в лекции 6; именно, мы положим $\mathbb{G} = \mathbb{G}(k, n)$ и

$$\Sigma = \{(p, \Lambda) \mid p \in \Lambda\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{G}.$$

Нетрудно усмотреть, что Σ гладко (либо выведя это из его однородности, либо непосредственно проанализировав задающие его уравнения). Мы хотим выяснить, каким подпространством в касательном пространстве к произведению $\mathbb{P}^n \times \mathbb{G}$ является касательное пространство к Σ. Для этого рассмотрим произвольную точку $(p, \Lambda) \in \Sigma$, и пусть $\sigma(t) = (p(t), \Lambda(t))$ — дуга в Σ, проходящая через (p, Λ) в момент $t = 0$. Касательный вектор к дуге σ при $t = 0$, рассматриваемый как элемент касательного пространства $T_{(p,\Lambda)}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{G}) = T_p(\mathbb{P}^n) \times T_\Lambda(\mathbb{G})$, есть (η, φ), где $\eta \in T_p(\mathbb{P}^n)$ — касательный вектор к дуге $\{p(t)\}$ в $\mathbb{P}^n$ при $t = 0$, а $\varphi \in T_\Lambda$ — касательный вектор к дуге $\{\Lambda(t)\}$ в $\mathbb{G}$ при $t = 0$. Что мы можем сказать про пару (η, φ)?

Ответ ясен из нашего описания касательного пространства к $\mathbb{G}$: если $p(t) = [v(t)]$, где $v(t) \in \Lambda(t)$ для всех t, то по определению $\varphi(v) = \eta(v)$ по модулю Λ. Поскольку это соотношение задает $n - k$ линейных условий на пару (η, φ) и поскольку коразмерность Σ в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{G}$ равна в точности $n - k$, эти условия полностью определяют касательное пространство к Σ в точке (p, Λ). Итак, Σ гладко, а касательное пространство к Σ в точке (p, Λ) есть пространство пар

$$T_{(p,\Lambda)}(\Sigma) = \{(\eta, \varphi) \mid \eta \in \operatorname{Hom}(p, K^{n+1}/p),\ \varphi \in \operatorname{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda) \text{ и } \varphi|_p \equiv \eta \pmod{\Lambda}\}.$$

Упражнение 16.3. Рассмотрим обобщение этого примера. Для всякой пары $k < l$ возьмем *многообразие флагов* $\mathbb{F}(k, l, n)$ из примера 11.40, т. е. отношение инцидентности

$$\Omega = \{(\Lambda, \Gamma) \mid \Lambda \subset \Gamma\} \subset \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n).$$

Покажите, что Ω гладко и что касательное пространство к паре (Λ, Γ) равно

$$T_{(\Lambda,\Gamma)}(\Omega) = \{(\eta, \varphi) \mid \eta \in \operatorname{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda),\ \varphi \in \operatorname{Hom}(\Gamma, K^{n+1}/\Gamma) \text{ и } \varphi|_\Lambda \equiv \eta \pmod{\Gamma}\}.$$

Упражнение 16.4. Рассмотрим еще одно обобщение основного примера: отношение инцидентности пар пересекающихся плоскостей, заданное условием

$$\Omega = \{(\Lambda, \Gamma) \mid \Lambda \cap \Gamma \neq \varnothing\} \subset \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n)$$

(мы предполагаем, что $k + l < n$, так что $\Omega \neq \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n)$). Покажите, что Ω гладко в точке (Λ, Γ) тогда и только тогда, когда Λ и Γ пересекаются ровно по одной точке, и что в этом случае касательное пространство к (Λ, Γ) равно

$$T_{(\Lambda,\Gamma)}(\Omega) = (\eta, \varphi) \mid \eta \in \operatorname{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda),\ \varphi \in \operatorname{Hom}(\Gamma, K^{n+1}/\Gamma) \text{ и } \varphi|_{\Lambda\cap\Gamma} \equiv \eta|_{\Lambda\cap\Gamma} \pmod{\Lambda + \Gamma}\}.$$

Упражнение 16.5. Обобщите два предыдущих упражнения на случай многообразия Ξ пар (Λ, Γ), пересекающихся по подпространству размерности $\geqslant m$.

Пример 16.6. Многообразия инцидентных плоскостей

Найдем теперь касательные пространства к введенному в примере 6.14 многообразию $\mathscr{C}_k(X) \subset \mathbb{G}(k, n)$, состоящему из плоскостей, пересекающих данное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$. Вспомним, что в примере 11.18 мы показали, что если размерность X равна m, то $\mathscr{C}_k(X)$ является подмногообразием коразмерности $n - m - k$ в грассманиане $\mathbb{G}(k, n)$ (мы все время предполагаем, что $k < n - m$, так что $\mathscr{C}_k(X) \subsetneq \mathbb{G}(k, n)$).

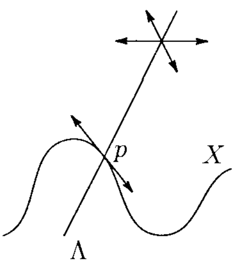
Итак, пусть $\Lambda \in \mathscr{C}_k(X)$ — плоскость, пересекающая X в точности в одной точке p, пусть p гладка на X и пусть $\Lambda \cap \mathbb{T}_p(X) = \{p\}$. Во-первых, мы утверждаем, что при этих условиях $\mathscr{C}_k(X)$ гладко в Λ. Чтобы убедиться в этом, мы вернемся к описанию $\mathscr{C}_k(X)$, которое уже сослужило нам службу раньше:

$$\mathscr{C}_k(X) = \pi_2(\Sigma \cap \pi_1^{-1}(X)),$$

где Σ — отношение инцидентности, описанное в примере 16.2. Однако же мы уже доказали, что Σ гладко в точке (p, Λ) и имеет в ней касательное пространство

$$T_{(p,\Lambda)}(\Sigma) = \{(\eta, \varphi) \mid \eta \in \operatorname{Hom}(p, K^{n+1}/p), \varphi \in \operatorname{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda) \\ \text{и } \varphi|_p \equiv \eta \pmod{\Lambda}\},$$

так что если X гладко в p, то, разумеется, $\pi_1^{-1}(X)$ гладко в (p, Λ) и имеет в этой точке касательное пространство $\{(\eta, \varphi) \mid \eta(p) \subset \mathbb{T}_p(X)\}$.



Если Λ пересекается с $\mathbb{T}_p(X)$ только по точке p,[1] то эти два касательные пространства пересекаются трансверсально, так что $\Sigma \cap \pi_1^{-1}(X)$ будет гладко в точке (p, Λ). Заметим далее, что в этом случае касательное пространство к $\Sigma \cap \pi_1^{-1}(X)$ будет пересекаться с касательным пространством к слою $\mathbb{P}^n \times \mathbb{G}(k, n)$ над $\mathbb{P}^n$ только в точке (p, Λ). Если дополнительно предположить, что Λ пересекается с X только в точке p, т. е. что $\pi_2 \colon \Sigma \cap \pi_1^{-1}(X) \to \mathscr{C}_k(X)$ взаимно однозначно над Λ, то из следствия 14.10 вытекает, что $\mathscr{C}_k(X)$ гладко в точке Λ с касательным пространством

$$T_\Lambda(\mathscr{C}_k(X)) = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda) \mid \varphi(p) \subset \mathbb{T}_p(X) + \Lambda\}.$$

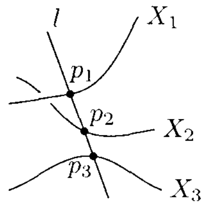
Упражнение 16.7. Пусть $\Lambda \in \mathscr{C}_k(X)$, и предположим, что $\Lambda \cap X$ конечно; будем, кроме того, считать, что $k + \dim(X) < n$, так что $\mathscr{C}_k(X) \neq \neq \mathbb{G}(k, n)$. Покажите, что $\mathscr{C}_k(X)$ гладко в Λ тогда и только тогда, когда $\Lambda \cap X = \{p\}$, $p \in X_{\mathrm{sm}}$ и $\Lambda \cap \mathbb{T}_p(X) = \{p\}$. Замечание: вам может потребоваться следующая слабая форма так называемой «основной теоремы Зарисского».

Предложение 16.8. *Пусть $f \colon X \to Y$ — регулярное бирациональное отображение проективных многообразий, и пусть $q \in Y$. Если слой $f^{-1}(q)$ несвязен, то q является особой точкой на Y.*

Это предложение легко доказывается над $\mathbb{C}$ (а стало быть, и над любым полем характеристики 0 ввиду принципа Лефшеца 15.1), но алгебраическое доказательство довольно хитрое; здесь мы им заниматься не будем.

[1] Здесь и ниже в авторский текст внесены небольшие уточнения. — *Прим. ред.*

Упражнение 16.9. (a) Пусть $X_1, X_2, X_3 \subset \mathbb{P}^3$ — гладкие кривые, и пусть $l \subset \mathbb{P}^3$ — прямая, пересекающая каждую из кривых X_i в единственной точке p_i; предположим, что все точки p_i различны, $l \neq \mathbb{T}_{p_i}(X_i)$ для всех i и прямые $\mathbb{T}_{p_i}(X_i)$ не лежат в одной плоскости. Покажите, что многообразия $\mathscr{C}_1(X_i)$ пересекаются трансверсально в точке $l \in \mathbb{G}(1, 3)$. (b) Пусть теперь нам даны четыре кривые $X_i \subset \mathbb{P}^3$ и прямая l, пересекающая каждую из них в единственной точке p_i, причем выполняются все условия из пункта (a). Пусть $l' \subset \mathbb{P}^3$ — прямая, скрещивающаяся с l, и пусть $q_i = l' \cap \overline{l, \mathbb{T}_{p_i}(X)}$. В предположении, что точки $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ все различны, покажите, что циклы $\mathscr{C}_1(X_i)$ пересекаются трансверсально в точке l тогда и только тогда, когда двойное отношение точек $p_i \in l$ не совпадает с двойным отношением точек $q_i \in l'$.



Пример 16.10. Многообразия секущих прямых

Точно так же, как выше, мы можем описать касательное пространство к многообразию $\mathscr{S}(X)$, состоящему из секущих многообразия X, в точке, соответствующей прямой $l = \overline{pq}$, пересекающей X в точности в двух различных гладких точках p и q, при условии, что l не содержится в $\mathbb{T}_p(X)$ или $\mathbb{T}_q(X)$: это в точности пространство гомоморфизмов из l в K^{n+1}/l, переводящих p в $l + \mathbb{T}_p(X)$ и q в $l + \mathbb{T}_q(X)$. Аналогичное утверждение верно для многообразия $\mathscr{S}_k(X) \subset \mathbb{G}(k, n)$, состоящего из $(k+1)$-секущих k-плоскостей к X.

Упражнение 16.11. Как мы видели в упражнении 15.9, множество $\mathscr{T}_1(X)$, состоящее из прямых, касающихся многообразия X, содержится в его многообразии секущих $\mathscr{S}(X)$. Предположим теперь, что X — кривая. В каких случаях многообразие $\mathscr{S}(X)$ будет особо в точке из $\mathscr{T}_1(X)$ и каково касательное пространство в такой точке в общем случае? Что происходит с многообразиями более высоких размерностей? (*)

Пример 16.12. Многообразия, заметаемые линейными пространствами

Мы рассмотрели некоторые примеры подмногообразий грассманианов. Теперь обратимся к многообразиям, представимым в виде объединений семейств линейных пространств.

Начнем с общего вопроса: пусть $\Gamma \subset \mathbb{G}(k, n)$ — произвольное подмногообразие, и пусть мы образовали семейство

$$X = \bigcup_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda.$$

Когда X будет гладко и каковы его касательные пространства?

Мы ограничимся «общим» случаем, когда размерность X совпадает с ожидаемым числом $\dim(\Gamma) + k$. Мы будем также предполагать, что многообразие X заметается семейством плоскостей однократно, т. е. что общая $p \in X$ лежит на единственной $\Lambda \in \Gamma$. Иными словами, пусть $\Sigma \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{G}(k, n)$ — отношение инцидентности, обсуждавшееся в примере 16.2, и пусть $\Psi = \pi_2^{-1}(\Gamma) \subset \Sigma$. Тогда оба наши условия эквивалентны тому, что отображение $\pi_1 : \Psi \to X$ взаимно однозначно в общей точке, т. е. бирационально.[1]

В этом случае нам надо просто найти касательное пространство к отношению инцидентности Ψ и выяснить, когда оно имеет нетривиальное пересечение с касательным пространством к слою $\mathbb{P}^n \times \mathbb{G}(k, n)$ над $\mathbb{P}^n$. Поскольку касательное пространство к Σ мы уже нашли, это легко: касательное пространство к Ψ в точке (p, Λ) равно

$$T_{(p,\Lambda)}(\Phi) = \{(\eta, \varphi) \mid \eta \in \operatorname{Hom}(p, K^{n+1}/p),\ \varphi \in T_\Lambda(\Gamma) \subset \operatorname{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda) \text{ и } \varphi|_p \equiv \eta \pmod{\Lambda}\}.$$

Когда это пространство содержит ненулевую пару (η, φ), для которой $\eta = 0$? В точности тогда, когда $p \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ для некоторого ненулевого касательного вектора $\varphi \in T_\Lambda(\Gamma)$; если такое включение места не имеет, то образ этого касательного пространства в $T_p(\mathbb{P}^n)$ будет совпадать с линейной оболочкой образов $\varphi(p)$ по всем $\varphi \in T_\Lambda(\Gamma)$.

Говоря иными словами, мы можем рассмотреть включение

$$i\colon T_\Lambda(\Gamma) \to T_\Lambda(\mathbb{G}(k, n)) = \operatorname{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda)$$

как линейное отображение

$$i\colon T_\Lambda(\Gamma) \otimes \Lambda \to K^{n+1}/\Lambda$$

или, равносильно, как отображение

$$j\colon \Lambda \to \operatorname{Hom}(T_\Lambda(\Gamma), K^{n+1}/\Lambda).$$

В этих терминах мы имеем, стало быть, следующую теорему.

Теорема 16.13. *Пусть $\Gamma \in \mathbb{G}(k, n)$ — произвольное подмногообразие размерности l, и пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — объединение всех $\Lambda \in \Gamma$; пусть $p \in X$ — произвольная точка. Предположим, что p лежит на единственной плоскости $\Lambda \in \Gamma$, что Γ гладко в Λ и что отображение*

$$j(p) \in \operatorname{Hom}(T_\Lambda(\Gamma), K^{n+1}/\Lambda)$$

инъективно. Тогда в точке p многообразие X гладко и имеет размерность $k + l$, а его касательное пространство есть $\Lambda + \operatorname{Im}(j(p))$.

[1] В этом месте, разумеется, предполагается, что характеристика равна нулю. — *Прим. перев.*

Упражнение 16.14. Пусть $\mathbb{P}^k$, $\mathbb{P}^l \subset \mathbb{P}^n$ — два непересекающихся линейных подпространства в $\mathbb{P}^n$, и пусть $X \subset \mathbb{P}^k$ и $Y \subset \mathbb{P}^l$ — произвольные гладкие подмногообразия, отличные от линейных подпространств. Пусть $J = J(X, Y)$ — соединение многообразий X и Y (см. примеры 6.17. 8.1 и 11.36). Покажите, что J особо в точности вдоль $X \cup Y$ и что касательное пространство в точке $r \in \overline{pq} \subset J$, отличной от p и q, является линейной оболочкой пространств $\mathbb{T}_p(X)$ и $\mathbb{T}_q(Y)$.

Упражнение 16.15. Пусть $\mathbb{P}^k$, $\mathbb{P}^l$, X и Y означают то же, что и выше, но предположим на сей раз, что X и Y — кривые, а $\varphi\colon X \to Y$ — изоморфизм. Обозначим через $K = K(\varphi)$ поверхность, заметаемую прямыми, соединяющими соответствующие точки (как в примере 8.14). Покажите, что K гладка и что касательные пространства к K в точках $r \in \overline{pq}$ являются всевозможными 2-плоскостями, содержащими прямую $\overline{pq}$ и лежащими в 3-плоскости, порожденной $\mathbb{T}_p(X)$ и $\mathbb{T}_q(Y)$.

Наконец, мы можем воспользоваться данным нами описанием касательных пространств к многообразиям, заметаемым линейными пространствами, для доказательства утверждения, которое мы упомянули в связи с примером 11.30: многообразие секущих $S_l(X)$ кривой[1] $X \subset \mathbb{P}^n$ имеет размерность $2l + 1$, как только $n \geqslant 2l + 1$. Мы проведем доказательство в два шага.

Упражнение 16.16. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимая невырожденная кривая и $p_1, \ldots, p_{l+1} \in X$ — общие точки. Покажите, что при $2l + 1 \leqslant n$ касательные прямые $\mathbb{T}_{p_i}X$ порождают линейное пространство $\mathbb{P}^{2l+1}$, тогда как при $2l + 1 \geqslant n$ они порождают все $\mathbb{P}^n$. (Замечание: это неверно в характеристике $p > 0$.) (*)

Упражнение 16.17. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное неприводимое многообразие и $p_1, \ldots, p_{l+1} \in X$ — общие точки. Покажите, что размерность многообразия секущих $S_l(X)$ совпадает с размерностью линейного пространства, натянутого на касательные плоскости $\mathbb{T}_{p_i}X$. Покажите также, что если это линейное пространство является плоскостью Λ размерности $(l + 1) \cdot \dim(X) + l$ и если $q \in S_l(X)$ — точка, лежащая в линейной оболочке точек p_i и ни в какой другой секущей l-плоскости, то $S_l(X)$ гладко в q и его касательной плоскостью в этой точке является Λ.

Пример 16.18. Разрешение общего детерминантального многообразия

Как мы и обещали, теперь мы вернемся к обсуждению касательных пространств к детерминантальным многообразиям, на сей раз в духе предшествовавших примеров. Для начала обозначим через $M_k \subset \mathbb{P}^{mn-1}$

[1] Невырожденной. — *Прим. перев.*

многообразие $(m \times n)$-матриц ранга, не превосходящего k, в проективном пространстве $\mathbb{P}^{mn-1}$, состоящем из всех ненулевых $(m \times n)$-матриц по модулю скаляров. Вспомним определение многообразия Ψ, ассоциированного с M_k, из примера 12.1: это отношение инцидентности, состоящее из пар (A, Λ), где A — $(m \times n)$-матрица с точностью до умножения на скаляр, а $\Lambda \cong K^{n-k}$ — плоскость, содержащаяся в ядре A, т. е.

$$\Psi = \{(A, \Lambda) \mid A|_\Lambda \equiv 0\} \subset M \times G(n-k, n).$$

Как мы убедились в процессе вычисления размерностей M_k, относительно несложно описать Ψ с помощью проекции на второй сомножитель $G(n-k, n)$: если зафиксировать Λ, то пространство таких отображений $A\colon K^n \to K^m$, что $\Lambda \subset \operatorname{Ker}(A)$, есть пространство $\operatorname{Hom}(K^n/\Lambda, K^m)$, так что слои проекции $\pi_2\colon \Psi \to G(n-k, n)$ суть проективные пространства размерности $km - 1$. В примере 12.1 мы вывели из этого, что многообразие Ψ неприводимо и имеет размерность $\dim(G(n-k, n)) + km - 1 = k(m+n-k) - 1$ (а поскольку отображение $\pi_1\colon \Psi \to M$ является взаимно однозначным в общей точке отображением на M_k, то же самое верно и применительно к M_k); теперь мы можем также показать, что Ψ гладко, и найти его касательное пространство.

Мы сделаем это во многом так же, как в примере 16.2. Пусть $(A, \Lambda) \in \Psi$ — произвольная точка на Ψ, и пусть $\psi(t) = (A(t), \Lambda(t))$ — дуга в Ψ, проходящая через (A, Λ) в момент $t = 0$. Мы будем записывать касательный вектор к дуге ψ при $t = 0$ в виде (α, φ), где

$$\alpha \in T_p(M) = \operatorname{Hom}(K^n, K^m)/K \cdot A$$ [1]

является касательным вектором к дуге $\{A(t)\}$ при $t = 0$ и

$$\varphi \in T_\Lambda(G(n-k, n)) = \operatorname{Hom}(\Lambda, K^n/\Lambda)$$

является касательным вектором к дуге $\{\Lambda(t)\}$ в $G(n-k, n)$ при $t = 0$. Как и раньше, мы задаемся вопросом, что можно сказать про пару (α, φ) исходя из того, что $A(t)|_{\Lambda(t)} \equiv 0$ для всех t.

Ответ немедленно получается из формулы Лейбница. Если $\{v(t)\}$ — произвольная дуга, для которой $v(t) \in \Lambda(t)$ при всех t, то

$$A(t) \cdot v(t) \equiv 0;$$

[1] Точнее говоря, $T_p(M)$ отождествляется с $\operatorname{Hom}(K \cdot A, \operatorname{Hom}(K^n, K^m)/K \cdot A)$. Чтобы упростить обозначения, мы будем по большей части работать по модулю скаляров, отождествлять $T_p(M)$ с $\operatorname{Hom}(K^n, K^m)/K \cdot A$ и приводить точную форму только для окончательных результатов (см., например, следующую сноску).

дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получаем

$$A'(0) \cdot v(0) + A(0) \cdot v'(0) = 0,$$

т. е.

$$\alpha(v(0)) + A(\varphi(v(0))) = 0.$$

(Заметим, что это соотношение имеет смысл, поскольку α определено по модулю кратных A, переводящих в нуль вектор $v(0) \in \Lambda$, а $\varphi(v(0))$ определено по модулю $\Lambda \subset \mathrm{Ker}(A)$.) Поскольку $v(0)$ – произвольный элемент в Λ, мы можем записать это условие в виде

$$\alpha|_\Lambda + A \circ \varphi = 0 \quad \text{в } \mathrm{Hom}(\Lambda, K^m).$$ [1]

Однако же это условие задает в точности $\dim(\mathrm{Hom}(\Lambda, K^m)) = m(n-k)$ линейных условий на пару $(\alpha, \varphi) \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)/K \cdot A \times \mathrm{Hom}(\Lambda, K^n/\Lambda)$. Поскольку это, как мы отмечали выше, совпадает с коразмерностью Ψ в $M \times G(n-k, n)$, из того, что всякий касательный вектор $(\alpha, \varphi) \in T_{(A,\Lambda)}(\Psi)$ удовлетворяет данному условию, немедленно следует, что Ψ гладко в (A, Λ), а касательное пространство равно

$$T_{(A,\Lambda)}(\Psi) = \{(\alpha, \varphi) \mid \alpha \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)/K \cdot A,\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\Lambda, K^n/\Lambda) \\ \text{и } \alpha|_\Lambda = -A \circ \varphi\colon \Lambda \to K^m\}.$$

Как мы и обещали, из этого утверждения получается также описание касательных пространств к M_k, которые мы ранее нашли в примере 14.16. В точке $A \in M_k$, соответствующей отображению $A\colon K^n \to K^m$ ранга ровно k, отображение $\pi_1\colon \Psi \to M_k$ будет взаимно однозначно (единственная точка Ψ, лежащая над A, есть (A, Λ), где $\Lambda = \mathrm{Ker}(A)$), а касательное пространство $T_{(A,\Lambda)}(\Psi)$ не имеет нетривиального пересечения с касательным пространством к слою отображения π_1. Стало быть, в такой точке M_k гладко; касательное пространство $T_A(M_k) = (\pi_1)_*(T_{(A,\Lambda)}(\Psi))$ есть пространство отображений $\alpha\colon K^n \to K^m$, для которых $\alpha|_\Lambda = -A \circ \varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Lambda, K^n/\Lambda)$, т. е. пространству отображений α, переводящих Λ в $\mathrm{Im}(A)$.

Упражнение 16.19. Весь проведенный выше анализ детерминантального многообразия M_k можно было бы выполнить с помощью вспомогательного многообразия, отличного от Ψ, а именно аналогичного ему многообразия

$$\Xi = \{(A, \Gamma) \mid \mathrm{Im}(A) \subset \Gamma\} \subset M \times G(k, m).$$

Проделайте это. Опишите также расслоенное произведение $\Psi \times_{M_k} \Xi$; гладко ли оно, в частности?

[1] Точнее говоря, если $\alpha \in \mathrm{Hom}(K \cdot A, \mathrm{Hom}(K^n, K^m)/K \cdot A)$, то условие состоит в том, что $\alpha(A)|_\Lambda + A \circ \varphi = 0$.

Пример 16.20. Касательные пространства к двойственным многообразиям

Конечно, описание касательного пространства к многообразию X^*, являющемуся двойственным к многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$, составляет содержание теоремы 15.24, которую мы сейчас и докажем (предполагая, как и раньше, что $\mathrm{char}(K) = 0$).

Для этого мы сначала найдем касательное пространство к отношению инцидентности Φ, введенному в примере 15.22. Напомним, что Φ определяется как замыкание множества пар

$$\tilde{\Phi} = \{(p, H) \mid p \in X_{\mathrm{sm}} \text{ и } H \supset \mathbb{T}_p(X)\}$$

и что Φ неприводимо и имеет размерность $n - 1$. Предположим теперь, что X имеет размерность k и что двойственное многообразие X^*, на которое Φ отображается, имеет размерность l; пусть $p \in X$ и $H \in X^*$ — такие гладкие точки, что (p, H) является общей точкой на Φ (так что, в частности, ввиду предложения 14.4 касательное пространство $T_{(p,H)}(\Phi)$ сюръективно отображается на $T_p(X)$ и $T_H(X^*)$); пусть $\alpha \in T_p(X)$ и $\beta \in T_H(X^*)$ — касательные векторы. Чтобы описать касательное пространство к Φ в точке (p, H), заметим сначала, что, поскольку Φ содержится и в $X \times X^*$, и в отношении инцидентности

$$\Sigma = \{(p, H) \mid p \in H\},$$

мы имеем ввиду примера 16.2

$$T_{(p,q)}(\Phi) \subset \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in T_p(X),\ \beta \in T_H(X^*) \ \text{ и } \ \beta|_p \equiv \alpha \pmod{H}\},$$

где мы рассматриваем α как гомоморфизм из p в K^{n+1}/p, а β — как гомоморфизм из H в K^{n+1}/H. Если рассматривать $\mathbb{P}^{n*}$ как множество одномерных подпространств q в двойственном пространстве $(K^{n+1})^*$, а не n-мерных подпространств $H \subset K^{n+1}$, а касательный вектор β, соответственно, как гомоморфизм из q в $(K^{n+1})^*/q$, то можно записать это условие более симметрично, как

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}(\Phi) \subset \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in T_p(X),\ \beta \in T_q(X^*) \\ \text{и } \ \langle \alpha(v), w\rangle + \langle v, \beta(w)\rangle = 0 \text{ при } v \in p,\ w \in q\}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем обстоятельством, что $(p, q) \in \Phi$, т. е. что гиперплоскость H содержит касательную плоскость $\mathbb{T}_p(X)$. Это сводится к тому, что

$$\langle \alpha(v), w\rangle = 0 \quad \text{для всех } \ \alpha \in T_p(X),\ \ v \in p,\ \ w \in q.$$

Вот теперь мы и можем увидеть симметрию, о которой идет речь в теореме 15.24. Мы уже установили, что $\langle \alpha(v), w\rangle = -\langle v, \beta(w)\rangle$, если $(\alpha, \beta) \in T_{(p,q)}(\Phi)$, а поскольку по нашему предположению $T_{(p,q)}(\Phi)$ сюръективно отображается на $T_q(X^*)$, условие $\langle \alpha(v), w\rangle = 0$ влечет противоположное условие

$$\langle v, \beta(w)\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \beta \in T_q(X^*), \quad v \in p, \quad w \in q.$$

Это условие, в свою очередь, говорит, что точка p, рассматриваемая как гиперплоскость в $\mathbb{P}^{n*}$, содержит касательное пространство к X^*. Стало быть, открытое подмножество в Φ (а тем самым и все Φ) содержится в отношении инцидентности Φ_{X^*}; поскольку оба эти отношения инцидентности являются неприводимыми многообразиями размерности $n-1$, мы заключаем, что

$$\Phi_X = \Phi_{X^*}.$$

Пример 16.21. Касательные пространства к многообразиям Фано

Рассмотрим в заключение многообразие Фано $F_k(X)$, состоящее из k-плоскостей, лежащих на многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$. В примере 12.5 мы оценили «ожидаемую» размерность многообразия $F_k(X)$, ассоциированного с общей гиперповерхностью $X \subset \mathbb{P}^n$ степени d; сейчас мы опишем касательное пространство к $F_k(X)$, а по ходу дела завершим доказательство теоремы 12.8.

Все это делается совершенно «в лоб». Пусть X — гиперповерхность, заданная однородным многочленом $F = F(Z_0, \ldots, Z_n)$, и пусть $\{\Lambda(t)\}$ — дуга на многообразии Фано $F_k(X)$, т. е. семейство k-плоскостей, лежащих на X. Тогда для каждой точки $p \in \Lambda_0$ мы можем провести дугу $\{p(t) = [Z_0(t), \ldots, Z_n(t)]\}$, для которой $p(t) \in \Lambda(t)$ для всех t; поскольку $\Lambda(t) \subset X$ для всех t, мы имеем

$$F(p(t)) \equiv 0.$$

Дифференцируя по t, получаем, что

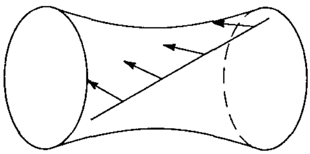
$$\sum \frac{\partial F}{\partial Z_i}(p_0) \cdot Z_i'(0) = 0,$$

то есть, иными словами, что касательный вектор к дуге $\{p(t)\}$ лежит в касательном пространстве к X в точке p_0. Отсюда следует, что касательное пространство к многообразию Фано $F_k(X)$ в точке $\Lambda = \Lambda_0$ содержится в пространстве $\mathscr{H}$, состоящем из гомоморфизмов $\varphi\colon \Lambda \to K^{n+1}/\Lambda$, удовлетворяющих следующему условию:

$$\mathscr{H} = \{\varphi \mid \varphi(p) \in \mathbb{T}_p(X)/\Lambda \quad \text{для всех } p \in \Lambda\}.$$

Поскольку многообразие Фано произвольного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ есть не что иное, как пересечение многообразий Фано гиперповерхностей, содержащих X, то же верно и в общем случае. В частности, если размерность подпространства $\mathscr{H} \subset \mathrm{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda)$, задаваемого этим условием, совпадает с размерностью $F_k(X)$, отсюда будет следовать, что $F_k(X)$ гладко в точке Λ и имеет касательным пространством $\mathscr{H}$.

По сути дела это условие всегда задает касательное пространство к многообразию Фано (в смысле, который мы уточним в упражнении 16.23). Заметим, в частности, что «ожидаемая» размерность пространства $\mathscr{H}$ совпадает, для случая гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^n$, с ожидаемой размерностью $\varphi(n, d, k)$ многообразия Фано $F_k(X)$, описанной в примере 12.5: если даны X $(F = 0)$ и плоскость $\Lambda \subset X$, то всякому гомоморфизму $\varphi\colon \Lambda \to K^{n+1}/\Lambda$ можно сопоставить многочлен



$$G_\varphi(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial Z_0}(p), \ldots, \frac{\partial F}{\partial Z_n}(p)\right) \cdot \varphi(p).$$

Заметим, что это определение корректно (φ определен только по модулю Λ, но Λ лежит в ядре линейной формы, задаваемой частными производными F) и задает линейное отображение из $\mathrm{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda)$ в пространство многочленов степени d на Λ; ядро этого отображения совпадает с $\mathscr{H}$. Стало быть, можно ожидать, что коразмерность $\mathscr{H}$ в $\mathrm{Hom}(\Lambda, K^{n+1}/\Lambda)$ равна $\binom{k+d}{d}$, и тем самым размерность $\mathscr{H}$ равна $(k+1)(n-k) - \binom{k+d}{d} = \varphi(n, d, k)$.

Упражнение 16.22. Для каждой тройки (n, d, k), для которой ожидаемая размерность многообразия Фано $F_k(X)$, состоящего из k-плоскостей на гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^n$ размерности d (найденная в примере 12.5), неотрицательна, предъявите такие гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ степени d и k-плоскость $\Lambda \subset X$, что касательное пространство к $F_k(X)$ в точке Λ имеет размерность, не превосходящую $\varphi(n, d, k)$, и тем самым докажите теорему 12.8.

Упражнение 16.23. Слова «по сути дела» выше означают, как обычно, «в схемном смысле»: касательное пространство к *схеме* Фано, определяемой как подсхема в грассманиане $\mathbb{G}(k, n)$, задаваемая уравнениями из примера 6.19, всегда совпадает с пространством $\{\varphi \mid \varphi(p) \in \mathbb{T}_p(X)/\Lambda\ \forall p\}$. Проверьте это с помощью явного вычисления, т. е. покажите, что градиенты функций, введенных в примере 6.19, задают именно это пространство. (Совет: сделайте это для случая, когда X — гиперповерхность и $k = 1$.)

ДАЛЬНЕЙШИЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ГЛАДКОСТЬЮ И КАСАТЕЛЬНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Пример 17.1. Гауссовы отображения для кривых

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкая кривая. В примере 15.2 мы ввели гауссово отображение

$$\mathscr{G}\colon X \to \mathbb{G}(1, n),$$

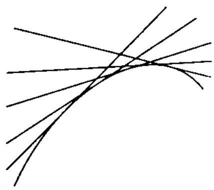
переводящее точку $p \in X$ в касательную прямую $\mathbb{T}_p(X)$. Сейчас мы продолжим исследовать это отображение и, в частности, охарактеризуем среди всех отображений кривых в грассманианы $\mathbb{G}(1, n)$ те, которые получаются таким образом.

Прежде всего отметим, что мы ограничимся случаем $\operatorname{char}(K) = 0$ и будем работать с параметрическим заданием X; иными словами, мы рассматриваем дугу

$$\gamma\colon t \mapsto [v(t)] = [v_0(t), \ldots, v_n(t)] \in \mathbb{P}^n.$$

Мы будем считать, что $v(t_0) \neq 0$ (всегда можно поделить v на степень $t - t_0$, если $v(t_0) = 0$).

Пусть теперь $\mathscr{G}\colon X \to \mathbb{G}(1, n)$ — гауссово отображение, связанное с X, и пусть $\varphi(t)\colon \mathscr{G}(t) \to K^{n+1}/\mathscr{G}(t)$ — касательный вектор к $\mathscr{G}(X)$ в точке $\mathscr{G}(t)$. Тогда $\mathscr{G}(t)$ порождается $v(t)$ и $v'(t)$, и по определению имеем



$$\varphi(t)(v(t)) = v'(t) \equiv 0 \pmod{\mathscr{G}(t)}$$

и

$$\varphi(t)(v'(t)) = v''(t) \pmod{\mathscr{G}(t)}.$$

В частности, $\varphi(t)$ имеет ранг не более 1; то, что мы говорим, на самом деле означает, что с точностью до второго порядка движение касательной $T_p(X)$ к кривой есть вращение вокруг точки p. Заметим также, что $\varphi(t)$ нулевой в точности тогда, когда внешнее произведение $v(t) \wedge v'(t) \wedge v''(t)$ равно 0 (такая точка называется *точкой перегиба* кривой; мы увидим в примере 17.5, что, за исключением случая, когда C — прямая, не всякая точка — точка перегиба). Заметим, что ядро

$\varphi(t)$ — это сам вектор $v(t)$, тогда как образ — это плоскость, порожденная $v(t)$, $v'(t)$ и $v''(t)$ (разумеется, по модулю $\mathscr{G}(t)$). На самом деле имеется следующее обратное утверждение.

Теорема 17.2. *Пусть $\mathscr{G}\colon X \to \mathbb{G}(1, n)$ — произвольное отображение гладкой кривой X в грассманиан прямых, и предположим, что касательные векторы $\varphi(t)$ к $\mathscr{G}(X)$ имеют ранг не более 1 для всех t. Тогда либо $\mathscr{G}$ — гауссово отображение, связанное с некоторым отображением $v\colon X \to \mathbb{P}^n$, либо все прямые $\mathscr{G}(t)$ проходят через фиксированную точку $p \in \mathbb{P}^n$.*

Доказательство. Для доказательства нужно восстановить отображение v по отображению $\mathscr{G}$, а способ сделать это был предложен раньше: $v(t)$ должно быть ядром касательного вектора к $\mathscr{G}(X)$ в $\mathscr{G}(t)$. Так что предположим, что $\mathscr{G}\colon X \to \mathbb{G}(1, n)$ — отображение с касательными векторами $\varphi(t)$ ранга не более 1; так как ранг не может быть всюду нулевым (если это так, то $\mathscr{G}$ постоянно и тем самым является гауссовым отображением, связанным с отображением v из X на прямую в $\mathbb{P}^n$), мы можем считать, что оно имеет ранг в точности 1 вне конечного множества точек в X. Вне этих точек определим

$$v\colon X \to \mathbb{P}^n$$

формулой

$$v\colon t \mapsto \operatorname{Ker}(\varphi(t)).$$

Тогда это отображение продолжается до регулярного отображения всей кривой X; если мы напишем

$$v(t) = [v_0(t), \ldots, v_n(t)],$$

где $v_i(t)$ — мероморфные функции, то после умножения на подходящую степень t мы можем считать, что все v_i голоморфны[1] и не все $v_i(t)$ равны 0.

Теперь мы утверждаем, что либо v постоянно, либо $\mathscr{G}(t)$ порождается $v(t)$ и $v'(t)$ для общего t. В первом случае все прямые $\mathscr{G}(t)$ содержат точку v. С другой стороны, сказать, что $v(t) \in \operatorname{Ker}\varphi(t)$ для всех t, — все равно, что сказать, что $v'(t) \in \mathscr{G}(t)$ для всех t; так как $v'(t)$ будет линейно независимо от $v(t)$ для всех значений t, кроме конечного числа, получается, что $\mathscr{G}(t)$ совпадает с линейной оболочкой $v(t)$ и $v'(t)$ для всех t, кроме конечного набора S. Стало быть, $\mathscr{G} = \mathscr{G}_v$ для всех $t \notin S$, а значит, и для всех t. $\square$

[1] В точке $t = 0$. — *Прим. перев.*

Упражнение 17.3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкая кривая, и пусть через

$$TX = \bigcup_{p \in X} \mathbb{T}_p(X)$$

обозначена ее поверхность касательных. Пусть $q \in TX$ — точка, лежащая на единственной касательной $\mathbb{T}_p(X)$ к X, $q \neq p$. Покажите, что q будет гладкой точкой поверхности TX тогда и только тогда, когда p не есть точка перегиба кривой X, и что тогда касательная плоскость к TX в q постоянна вдоль прямых $\mathbb{T}_p(X) \subset TX$ (касательная плоскость к TX вдоль этой прямой — это *соприкасающаяся* плоскость к X в p; см. пример 17.5).

Упражнение 17.4. Заметим, что, ввиду предыдущего упражнения, если $S \subset \mathbb{P}^n$ — поверхность касательных некоторой кривой, то образ гауссова отображения $\mathcal{G}_S\colon S \to \mathbb{G}(2, n)$ будет одномерен. Классифицируйте все линейчатые поверхности S с тем свойством, что $\mathcal{G}_S$ постоянно вдоль прямых семейства; если вы после этого будете в силах, классифицируйте все поверхности S, для которых многообразие $\mathcal{T}(S)$ касательных плоскостей к S имеет размерность 1. (*)

Пример 17.5. Соприкасающиеся плоскости и ассоциированные отображения

Предшествующие рассмотрения подсказывают, как можно обобщить определение касательной прямой к данной кривой, вводя соприкасающиеся плоскости. Для этого предположим сначала, что $C \subset \mathbb{P}^n$ — гладкая кривая, параметрически заданная как образ векторнозначной функции

$$\gamma\colon t \mapsto [v(t)] = [v_0(t), \ldots, v_n(t)] \in \mathbb{P}^n$$

(если C особа, мы все равно можем по теореме 17.23 (которая для случая кривых будет доказана в лекции 20) рассматривать C как образ гладкой кривой при взаимно однозначном в общей точке отображении, так что дальнейшие рассмотрения применимы и к этому случаю). Как мы видели, гауссово отображение $\mathcal{G}$ кривой C можно описать как

$$\mathcal{G}\colon t \mapsto [v(t) \wedge v'(t)],$$

что не может тождественно обращаться в нуль. Более общим образом, если C неприводима и невырождена, мы видим, что поливектор $v(t) \wedge \ldots \wedge v^{(k)}(t)$ не может тождественно обращаться в нуль ни для какого $k < n$: если бы это произошло, мы могли бы выбрать в качестве k наименьшее из таких натуральных чисел и взять производную по t, после чего получилось бы, что

$$0 \equiv \frac{d}{dt}(v(t) \wedge \ldots \wedge v^{(k)}(t)) = v(t) \wedge \ldots \wedge v^{(k-1)}(t) \wedge v^{(k+1)}(t),$$

т. е. в любой момент времени t производная $v^{(k+1)}(t)$ будет линейно зависеть от $v(t)$ и первых k производных $v'(t), \ldots, v^{(k)}(t)$. Дифференцируя снова, мы видим, что то же верно для $v^{(k+2)}$ и так далее, так что вся кривая C должна лежать в k-мерной плоскости, порожденной $v(t), \ldots, v^{(k)}(t)$.

Так как векторы $v(t), \ldots, v^{(k)}(t)$ не всюду линейно зависимы, мы можем для каждого $k = 1, \ldots, n$ определить рациональное отображение

$$\begin{aligned} \mathscr{G}^{(k)}\colon C &\dashrightarrow \mathbb{G}(k, n), \\ p &\mapsto [v(t) \wedge \ldots \wedge v^{(k)}(t)]. \end{aligned}$$

Как и в доказательстве теоремы 17.2, оно продолжается до регулярного отображения всей C: записав

$$\mathscr{G}^{(k)}(t) = [w_0(t), \ldots, w_N(t)]$$

для некоторых мероморфных функций $w_0, \ldots, w_N$, мы можем умножить все на степень t, в результате чего все w_i станут голоморфными и не все будут обращаться в нуль. При $k = 1$ это, конечно же, гауссово отображение; в общем случае мы назовем $\mathscr{G}^{(k)}$ k-м *ассоциированным отображением*, его образ — k-й *ассоциированной кривой*, а точку образа $\Lambda = \mathscr{G}^{(k)}(p)$ для $p \in C$ — *k-мерной соприкасающейся плоскостью* к C в p.

Упражнение 17.6. Покажите, что k-е ассоциированное отображение, определенное выше, не зависит от выбора параметризации кривой C.

Упражнение 17.7. Есть другой способ охарактеризовать k-мерную соприкасающуюся плоскость к кривой в точке. Мы скажем, что гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}^n$ имеет *касание порядка m* к гладкой кривой $C \subset \mathbb{P}^n$ в точке p, если ограничение на C линейной формы, обращающейся в нуль на H, имеет нуль порядка m в точке p (опять же, этому можно придать смысл и если C особа, параметризуя ее гладкой кривой). Более общим образом, мы определим порядок касания линейного пространства $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ к C в точке p как наименьший порядок касания к C в p гиперплоскостей, содержащих Λ. В этих терминах покажите, что k-мерная соприкасающаяся плоскость к C в p — это (единственная) k-мерная плоскость, имеющая максимальный порядок касания к C в p. (*)

Вообще мы будем говорить, что точка p на кривой $C \subset \mathbb{P}^n$ — *точка обобщенного перегиба*, если k-мерная соприкасающаяся плоскость к C в p (для некоторого $k < n$) имеет касание порядка строго большего, чем $k+1$ (эквивалентно, если соприкасающаяся гиперплоскость имеет порядок касания больше n). Это равносильно утверждению, что для некоторой[1] параметризации C векторнозначной функцией $v(t)$ с $p=[v(0)]$ внешнее произведение $v(0)\wedge v'(0)\wedge\ldots\wedge v^{(n)}(0)$ равно 0. Как мы выяснили выше, у кривой может быть только конечное число точек обобщенного перегиба; с другой стороны, имеется предложение (которое мы не будем здесь доказывать), гласящее, что единственная кривая без точек обобщенного перегиба — это нормальная рациональная кривая.

По аналогии с предыдущим описанием касательных к гауссову образу $\mathscr{G}(C)\subset\mathbb{G}(1,n)$ кривой $C\subset\mathbb{P}^n$ мы можем сказать, что такое касательная к k-й ассоциированной кривой к C в общей точке $\Lambda=\mathscr{G}^{(k)}(p)$: это единственный с точностью до скаляра гомоморфизм Λ в K^{n+1}/Λ с ядром, содержащим $\mathscr{G}^{(k-1)}(p)$, и образом, содержащимся в $\mathscr{G}^{(k+1)}(p)$. Имеется также обратное утверждение, аналогичное теореме 17.2.

Теорема 17.8. *Пусть $\mathscr{G}\colon X\to\mathbb{G}(k,n)$ — произвольное отображение гладкой кривой X в грассманиан, и предположим, что касательные векторы $\varphi(t)$ к $\mathscr{G}(X)$ имеют ранг не более 1 для всех t. Тогда либо $\mathscr{G}$ — k-е ассоциированное отображение некоторой кривой $C\subset\mathbb{P}^n$, либо все плоскости $\mathscr{G}(t)$ проходят через фиксированную точку $p\in\mathbb{P}^n$.*

Упражнение 17.9. Докажите это.

Упражнение 17.10. Точно так же, как мы можем образовать поверхность касательных кривой, мы можем, в большей общности, определить $(k+1)$-*мерное многообразие соприкасающихся плоскостей* $T^{(k)}(C)$ гладкой кривой $C\subset\mathbb{P}^n$ как объединение k-мерных соприкасающихся плоскостей к C. Укажите, когда точка многообразия $T^{(k)}(C)$ является гладкой, и опишите касательное пространство в такой точке. (*)

Пример 17.11. Вторая фундаментальная форма

Хотя мы и не сможем столь же углубиться в эту тему, как в случае кривых, мы рассмотрим здесь производную гауссова отображения для гладкого многообразия $X\subset\mathbb{P}^n$ произвольной размерности k. Такое гауссово отображение $\mathscr{G}$ индуцирует производное отображение касательных пространств: для любой точки $p\in X$ с касательным пространством $\mathbb{T}_p(X)\subset\mathbb{P}^n$ имеем

$$(d\mathscr{G})_p\colon T_p(X)\to\operatorname{Hom}(\mathbb{T}_pX,\,K^{n+1}/\mathbb{T}_pX).$$

Прежде всего надо заметить, что, как и в случае кривых, любой гомоморфизм $\varphi\colon\mathbb{T}_pX\to K^{n+1}/\mathbb{T}_pX$ в образе $(d\mathscr{G})_p$ содержит p в своем ядре,

[1]Взаимно однозначной. — *Прим. ред.*

так что $(d\mathscr{G})_p$ индуцирует отображение

$$(d\mathscr{G})_p\colon T_p(X) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{T}_pX/p,\ K^{n+1}/\mathbb{T}_pX),$$

и, пользуясь отождествлениями касательного пространства

$$T_p(X) = \operatorname{Hom}(p,\ \mathbb{T}_pX/p)$$

и нормального пространства

$$N_p(X) = T_p(\mathbb{P}^n)/T_p(X) = \operatorname{Hom}(p,\ K^{n+1}/\mathbb{T}_p(X))$$

с пространствами гомоморфизмов, мы видим, что это эквивалентно отображению

$$(d\mathscr{G})_p\colon T_p(X) \to \operatorname{Hom}(T_p(X),\ N_p(X)).$$

Равносильным образом это можно рассматривать как отображение

$$(d\mathscr{G})_p\colon T_p(X) \otimes T_p(X) \to N_p(X).$$

В такой форме основное свойство $(d\mathscr{G})_p$ — это то, что оно симметрично по двум своим аргументам; иными словами, оно пропускается через симметрический квадрат $T_p(X)$, задавая отображение

$$II_p\colon\ \operatorname{Sym}^2(T_p(X)) \to N_p(X),$$

или, после дуализации, отображение

$$II_p^*\colon N_p(X)^* \to \operatorname{Sym}^2(T_p^*(X)).$$

Это отображение называется *второй фундаментальной формой.* Оно, в отличие от первой фундаментальной формы подмногообразия в $\mathbb{P}^n$, инвариантно при действии $\mathrm{PGL}_{n+1} K$. Дальнейшее обсуждение см. в [GH1].

Упражнение 17.12. Проверьте, что определенное выше отображение $(d\mathscr{G})_p$ симметрично. (Воспользуйтесь параметризацией X векторнозначной функцией $v = (v_0, \ldots, v_n)$ от k переменных $z_1, \ldots, z_k$.)

Упражнение 17.13. Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое k-мерное многообразие, TX — его многообразие касательных и $q \in TX$ — точка, лежащая на единственной касательной плоскости $\mathbb{T}_p(X)$. При каких обстоятельствах TX гладко в q и какое у него касательное пространство?

Пример 17.14. Многообразие касательных прямых

Пусть опять $X \subset \mathbb{P}^n$ – гладкое многообразие, и пусть $\mathscr{T}_1(X) \subset \subset \mathbb{G}(1, n)$ — многообразие касательных прямых к X, введенное в примере 15.7. В качестве приложения конструкции второй фундаментальной формы мы укажем условие гладкости многообразия $\mathscr{T}_1(X)$ в точке, соответствующей прямой L.

Для этого мы сначала введем отношение инцидентности $\Sigma \subset \subset \mathbb{G}(1, n) \times X$, состоящее из пар (L, p), в которых $p \in L \subset \mathbb{T}_p(X)$, и зададимся вопросом о касательном пространстве к Σ в (L, p). Ответ таков: если (φ, v) — касательный вектор к дуге $\{(L(t), p(t))\}$ в Σ в точке $(L(0), p(0)) = (L, p)$, где $\varphi\colon L \to K^{n+1}/L$, а $v \in T_p(X)$, то

(i) условие, что $p(t) \in L(t)$ для всех t, утверждает, как в примере 16.6, что $\varphi|_p = v \bmod L$ (где $v \in T_p(X) \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{P}^n) = \mathrm{Hom}(p, K^{n+1}/p))$;

(ii) условие, что $L(t) \subset \mathbb{T}_{p(t)}(X)$ при всех t, утверждает, что гомоморфизм

$$(d\mathscr{G})_p(v)\colon \mathbb{T}_p(X) \to K^{n+1}/\mathbb{T}_p(X)$$

после ограничения на L совпадает с гомоморфизмом φ по модулю $\mathbb{T}_p(X)$ (конечно, так как они оба обращаются в нуль на p, это надо проверить лишь для еще одной точки $q \neq p \in L$).

Итак, (i) представляет собой $n-1$ линейных условий на пару (φ, v), а (ii) — $n-k$ таких условий, так что вместе они задают подпространство коразмерности $2n-k-1$ в $T_L(\mathbb{G}(1, n)) \times T_p(X)$, т. е. пространство размерности $2k-1$. Так как мы видели, что Σ равноразмерно размерности $2k-1$, отсюда следует, что Σ гладко для любой L и его касательное пространство задается условиями (i) и (ii).

Наконец, рассмотрим проекцию Σ на $\mathbb{G}(1, n)$ и зададимся вопросом, когда она инъективна на касательных пространствах. Ответ ясен: если $(0, v) \in T_{(L,p)}(\Sigma)$, то по условию (i) v должно принадлежать L, т. е. лежать в одномерном пространстве $T_p(X)$, соответствующем $L \subset \mathbb{T}_p(X)$, а в силу (ii) должно быть $(d\mathscr{G})_p(v)(L) \equiv 0$, или, иными словами, $II_p(v, v) = = 0$, где II_p — вторая фундаментальная форма X в p. Так что в итоге точка $L \in \mathscr{T}_1(X)$ будет гладкой, если L касается X в единственной точке p и $II_p(v, v) \neq 0$, где $v \in T_p(X)$ — какой-нибудь ненулевой вектор вдоль L.

Упражнение 17.15. Прямая L, касающаяся многообразия X в гладкой точке p, для которой $II_p(v, v) = 0$, где $v \in T_p(X)$ направлен вдоль L, называется *прямой перегиба* многообразия X.

(a) Оцените размерность многообразия прямых перегиба многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ размерности k.

(b) Покажите, что L является прямой перегиба многообразия X тогда и только тогда, когда многочлены $F \in I(X)$ имеют общий троекратный нуль на L.

Теорема Бертини

Завершая эту лекцию, следует упомянуть несколько интересных тем, связанных с понятиями гладкости и особости. Первая — это в высшей степени фундаментальный и классический результат.

Теорема 17.16 (теорема Бертини). *Если X — произвольное квазипроективное многообразие, $f\colon X \to \mathbb{P}^n$ — регулярное отображение, $H \subset \mathbb{P}^n$ — общая гиперплоскость и $Y = f^{-1}(H)$, то*

$$Y_{\text{sing}} = X_{\text{sing}} \cap Y.$$

Эту теорему обычно выражают фразой: «Общий член линейной системы на X гладок вне особенностей X и базисных точек линейной системы», имея в виду, что если $f_0, \ldots, f_n$ — функции на X, то при общем выборе $\alpha = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ множество, заданное уравнением $\sum \alpha_i f_i = 0$, гладко вне X_{sing} и множества, заданного уравнениями $f_0 = \ldots = f_n = 0$.

Важное предупреждение: теорема Бертини, вообще говоря, неверна для многообразий в характеристике p. Например, в характеристике 2 любая касательная к гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^4$, заданной уравнением $UV + WY + Z^2 = 0$, проходит через точку $p = [0, 0, 0, 0, 1]$, и наоборот, любая гиперплоскость, проходящая через p, где-то касается X, что противоречит теореме Бертини для отображения $f = \pi_p$, определенного как проекция из p. Коль скоро эта теорема верна только в характеристике нуль, не удивительно, что ее доказательство существенно использует комплексные числа (а именно, теорему Сарда).

Доказательство. Рассмотрим отношение инцидентности

$$\Gamma = \{(p, H) \mid f(p) \in H\} \subset X \times \mathbb{P}^{n*}.$$

Если X k-мерно, то Γ будет иметь размерность $k + n - 1$. Пусть теперь $p \in X$ — произвольная гладкая точка, а $H \subset \mathbb{P}^n$ — гиперплоскость, содержащая $f(p)$; можно так выбрать координаты, что $f(p) = [0, \ldots, 0, 1]$, а H — гиперплоскость $Z_0 = 0$. Тогда в окрестности U точки $p \in X$ можно записать отображение f в виде

$$f(q) = [f_0(q), \ldots, f_{n-1}(q), 1];$$

если мы обозначим за H_α гиперплоскость

$$\{[Z] \mid Z_0 + \alpha_1 Z_1 + \ldots + \alpha_n Z_n = 0\},$$

то $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ будут аффинными координатами на $\mathbb{P}^{n*}$ в окрестности V точки, соответствующей гиперплоскости H. В этих координатах Γ задается в $U \times V$ единственным уравнением

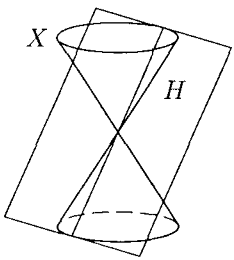
$$f_0 + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1} + \alpha_n = 0.$$

Так как частная производная этого выражения по α_n ненулевая, мы заключаем, что

$$\dim(T_{(p,H)}(\Gamma)) = \dim(T_{(p,H)}(X \times \mathbb{P}^{n*})) - 1;$$

в частности, множество особенностей Γ — это в точности прообраз $\pi_1^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$ множества особенностей X.

Теперь рассмотрим ограничение $\tilde{\pi}_2 : \Gamma_{\mathrm{sm}} \to \mathbb{P}^{n*}$. Теорема Бертини получается применением предложения 14.4 к $\tilde{\pi}_2$; или, более непосредственно, по упражнению 14.6 множество $U \subset \mathbb{P}^{n*}$ гиперплоскостей H, для которых слой $(\tilde{\pi}_1)^{-1}(H) = X_{\mathrm{sm}} \cap H$ гладок, либо содержится в собственном подмногообразии $\mathbb{P}^{n*}$, либо содержит открытое подмножество в $\mathbb{P}^{n*}$, и можно просто применить теорему Сарда к $\tilde{\pi}_2$, чтобы заключить, что имеет место второе. □



Заметим, что не всегда $X_{\mathrm{sing}} \cap H \subset (X \cap H)_{\mathrm{sing}}$: рассмотрите, например, конус $X \subset \mathbb{A}^3$, заданный идеалом $(xy - z^2)$, и плоскость H, заданную идеалом (x). (Это еще один аргумент в пользу языка схем, где это включение всегда выполняется.)

Упражнение 17.17. Воспользуйтесь теоремой Бертини, чтобы показать, что (a) общая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$ гладка, и, в большей общности, что (b) если $k < n$ и $F_1, \ldots, F_k$ — общие однородные многочлены степеней $d_1, \ldots, d_k$ от $n+1$ переменной, то соответствующие гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ трансверсально пересекаются по гладкому $(n-k)$-мерному многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$.

Заметим, что по пункту (b) упражнения 17.17 многочлены $F_1, \ldots, F_k$ порождают идеал X локально, т. е. идеал $(F_1, \ldots, F_k) \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ радикален. Он также и насыщен; это следует из того, что $(F_1, \ldots, F_k)$ не имеет[1] ассоциированных простых идеалов (см. [E]). Мы заключаем отсюда, что эти многочлены на самом деле порождают однородный идеал многообразия X; таким образом, мы имеем следующее утверждение.

Предложение 17.18. *Если $k < n$ и $Y_1, \ldots, Y_k \subset \mathbb{P}^n$ — трансверсально пересекающиеся гиперповерхности, то их пересечение $X = Y_1 \cap \ldots$ $\ldots \cap Y_k$ — полное пересечение в $\mathbb{P}^n$; в частности, пересечение k общих гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$ — полное пересечение.*

[1]Вложенных. — *Прим. перев.*

Упражнение 17.19. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — k-мерное многообразие, $L_1, \ldots \ldots, L_k$ — общие линейные формы на $\mathbb{P}^n$, и пусть $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k} \subset \mathbb{P}^n$ — задаваемое ими линейное подпространство. Покажите, что идеал многообразия X вместе с формами L_i локально порождает идеал пересечения $Y = X \cap \Lambda$, и завершите тем самым доказательство предложения 13.2. (Замечание: тот факт, что общая $(n-k)$-мерная плоскость Λ трансверсальна к X, непосредственно следует из теоремы Бертини. Его также можно усмотреть в произвольной характеристике, пользуясь неприводимостью универсального $(n-k)$-мерного плоского сечения

$$\Omega^{(k)}(X) = \{(\Lambda, p) \mid p \in \Lambda\} \subset \mathbb{G}(n-k, n) \times X$$

(упражнение 11.44) и учитывая, что множество пар (Λ, p), для которых $\Lambda \cap \mathbb{T}_p(X) \supsetneq \{p\}$, — собственное подмногообразие в $\Omega^{(k)}(X)$.)

Одно предупреждение: теорема Бертини говорит нам, например, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ проективно и гладко, а $V \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]_d$ — любое векторное пространство однородных многочленов степени d, то множество нулей общего $F \in V$ на X гладко вне общего множества нулей всех $F \in V$. Но при этом она не говорит, что это особое множество постоянно. Например, имеется следующее утверждение.

Упражнение 17.20. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{P}^4$ — двумерная плоскость. Покажите, что общая гиперповерхность $Y \subset \mathbb{P}^4$ степени $m > 1$, содержащая Λ, особа в конечном (непустом) множестве точек Λ и что все эти точки варьируются вместе с Y.

Это упражнение заставляет предположить (и не зря), что следующее за ним — нетривиально.

Упражнение 17.21. Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — гладкая кривая. Покажите, что для всех достаточно больших m существует содержащая C гладкая поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ степени m. (*)

На самом деле техника упражнения 17.21 позволяет нам доказать более сильное утверждение: если C — любая кривая, у которой во всех точках $p \in C$ касательное пространство Зарисского T_pC имеет размерность не более 2, то C лежит на гладкой поверхности. Не столь ясно, любое ли k-мерное многообразие X с $\dim(T_pX) \leqslant k+1$ для всех $p \in X$ лежит на гладком $(k+1)$-мерном многообразии (ввиду упражнения 17.20 заведомо неверно, что любое такое k-мерное $X \subset \mathbb{P}^{k+2}$ лежит на гладкой гиперповерхности).

Существует изящное обобщение теоремы Бертини, принадлежащее Клейману [K1]. Оно заключается в следующем.

Теорема 17.22. *Пусть X — произвольное многообразие, на котором транзитивно действует алгебраическая группа G, и пусть $Y \subset X$ — произвольное гладкое подмногообразие, а $f\colon Z \to X$ — любое отображе-*

ние. Для любого $g \in G$ обозначим через $W_g = (g \circ f)^{-1}(Y) \subset Z$ прообраз сдвига $g(Y)$. Тогда для общего $g \in G$ имеем

$$(W_g)_{\text{sing}} = W_g \cap Z_{\text{sing}}.$$

В частности, если f — вложение, то теорема утверждает, что общий сдвиг гладкого подмногообразия однородного пространства пересекает любое заданное гладкое подмногообразие трансверсально.

Раздутия, раздутия Нэша и разрешение особенностей

С гладкими многообразиями работать во многих отношениях проще, чем с особыми; отметим лишь самое важное: при исследовании гладких многообразий в характеристике нуль можно пользоваться инструментами и методами теории комплексных многообразий.

Ясно, что мы не можем ограничить свое внимание исключительно гладкими многообразиями, так как особые все время возникают в ходе стандартных построений алгебраической геометрии. Тем не менее постольку, поскольку нас интересуют свойства многообразий, инвариантные относительно бирациональных изоморфизмов, отсюда возникает вопрос фундаментальной важности: для всякого ли многообразия X существует бирационально изоморфное ему гладкое многообразие Y? Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 17.23 (разрешение особенностей). *Пусть X — произвольное многообразие. Тогда существуют гладкое многообразие Y и регулярное бирациональное отображение $\pi\colon Y \to X$.*[1]

Такое отображение $\pi\colon Y \to X$ называется *разрешением особенностей* многообразия X. Эта теорема была доказана Хейсуке Хиронакой [Hi] для многообразий X в характеристике нуль; в характеристике p она известна для кривых и поверхностей, но неизвестна в общем случае. Позже мы докажем эту теорему для кривых.

На самом деле доказательство дает нечто более определенное, чем утверждалось выше: оно показывает, что особенности любого многообразия можно разрешить последовательностью раздутий — то есть для любого данного X есть последовательность многообразий X_i, регулярных отображений

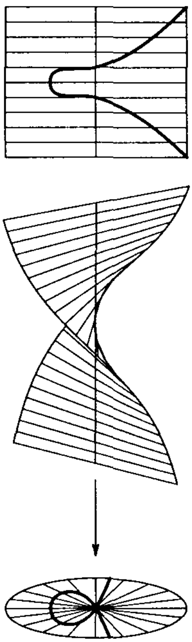
$$Y \xrightarrow{\pi_n} X_n \to X_{n-1} \to \ldots \xrightarrow{\pi_2} X_2 \xrightarrow{\pi_1} X_1 = X$$

[1]При буквальном понимании такой формулировки в качестве Y можно взять открытое по Зарисскому подмножество, состоящее из неособых точек X, что делает теорему тривиальной и неинтересной; на самом деле теорема утверждает больше (например, что существует удовлетворяющее ее условию *проективное* многообразие Y, если само X проективно); см. уточнения ниже. — *Прим. ред.*

и подмногообразий $Z_i \subset X_i$ для $i = 1, \ldots, n$, в которой отображение $\pi_i \colon X_{i+1} \to X_i$ есть раздутие X_i вдоль Z_i.

Чтобы увидеть, почему разумно ожидать, что раздутие может разрешить особенности, рассмотрим самое простое из всех особых многообразий — нодальную кубику $C \subset \mathbb{P}^2$, заданную уравнением $Y^2Z = X^3 + X^2Z$ (или, в аффинных координатах $x = X/Z$, $y = Y/Z$ на $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$, уравнением $y^2 = x^2(x+1)$). Особенность этой кривой в точке $p = [0, 0, 1]$ называется *нодом*; в случае основного поля $K = \mathbb{C}$ ее можно описать тем условием, что некоторая окрестность p в C в аналитической топологии состоит из объединения двух пересекающихся в p гладких дуг с различными касательными.

Что происходит при раздутии кривой C в точке p? Чтобы понять это, сначала просто распишем все в координатах; раздутие — это график рационального отображения



$$\pi \colon C \to \mathbb{P}^1,$$

заданного формулой

$$[X, Y, Z] \mapsto [U, V] = [X, Y],$$

или, в аффинных координатах (x, y) на $\widetilde{C} = C \cap \mathbb{A}^2$ и $v = V/U$ на $\mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$, формулой

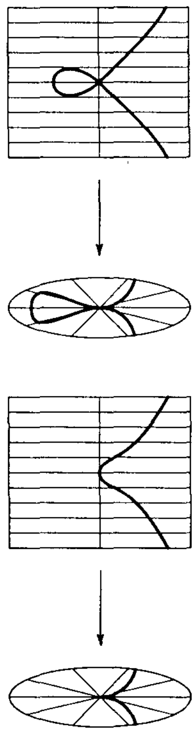
$$(x, y) \mapsto y/x.$$

Тогда внутри открытого подмножества $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$, на котором $x \neq 0$, график задается уравнениями $y^2 = x^2(x+1)$ и $v = y/x$, или, что равносильно, $v^2 = x + 1$ и $vx = y$. Таким образом, $\widetilde{\Gamma}$ — часть графика, лежащая в $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$, — имеет локальные уравнения

$$\Gamma = \{(x, y, v) \mid v^2 - (x+1) = vx - y = 0\};$$

в частности, мы видим, что две точки Γ — $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$ — лежат над точкой $p \in C$ и что обе они — гладкие точки на Γ.

Может быть, легче всего наглядно представить себе это раздутие, посмотрев на раздутие $\pi \colon \widetilde{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$ плоскости $\mathbb{P}^2$ в точке p. Напомним из лекции 7, что $\widetilde{\mathbb{P}}^2$ есть объединение непересекающихся прямых L_v, где L_v отображается в прямую, проходящую через p в $\mathbb{P}^2$ с наклоном v. (Так что можно представлять себе $\widetilde{\mathbb{P}}^2$ как объединение прямых, проходящих через p в $\mathbb{P}^2$, сделанных непересекающимися и лежащих над соответствующими прямыми в $\mathbb{P}^2$ на «высотах», соответствующих их наклону.) Каждая точка на $C \setminus \{p\}$, таким образом, «поднимается» на высоту, равную

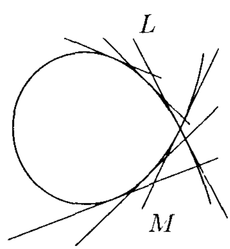


отношению $v = y/x$ ее координат; в частности, когда мы приближаемся к точке p, предельный наклон будет либо 1, либо -1, смотря по тому, на какой ветви C мы находимся.

Такая же картина имеет место, когда мы смотрим на несколько более сложные особенности. Например, если на плоской кривой C есть *точка самокасания* — то есть особая точка p, аналитическая окрестность которой состоит из двух гладких дуг, имеющих простое касание друг с другом, как начало координат на кривой $y^2 = x^4 - x^5$, — то раздутие C в p не будет гладким, но будет иметь нод, так что дальнейшее раздутие разрешит ее особенности[1]. Аналогично, если у C имеется *касп* (как у кривой $y^2 = x^3$, встречавшейся в лекции 1), то раздутие будет гладким.

Есть одна проблема с разрешением особенностей раздутием. Если особенности многообразия X достаточно сложные — например, если множество особых точек имеет положительную размерность, что на самом деле может быть даже после раздутия многообразия с изолированными особенностями, — то неясно, какие подмногообразия в X следует раздувать, чтобы получить желаемое разрешение. Есть другой подход, более канонический, хотя неизвестно, в любом ли случае он работает; он называется *раздутием Нэша* многообразия X.

Раздутие Нэша k-мерного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ — это просто-напросто график Γ гауссова отображения $\mathcal{G}_X : X \dashrightarrow \mathbb{G}(k, n)$. (В частности, оно не зависит ни от какого выбора подмногообразия в X.) Конечно, отображение $\mathcal{G}_X$ регулярно на множестве гладких точек X, так что проекция $\pi : \Gamma \to X$ будет изоморфизмом над X_{sm}. В то же время невозможность продолжить это отображение до регулярного отображения всего X можно считать мерой особости X. Например, если $X = C$ — приведенная выше нодальная кубика, то отображение $\mathcal{G}_C$, очевидно, не будет корректно определено в p: как прямая L, так и прямая M будут пределами касательных к C, так что над $p \in C$ будут лежать две точки (p, L) и $(p, M) \in \Gamma$. Даже в случаях, когда предельное положение касательной плоскости представляется



[1] В точке p. — *Прим. перев.*

единственным, раздутие Нэша привносит изменения. Например, если X — каспидальная кривая, как выше, то не столь очевидно (но проверяется напрямую), что график Γ гладок, в то время как если на X точка самокасания, то опять можно проверить, что у Γ будет нод. Таким образом, можно надеяться, что особенности любого многообразия можно разрешить последовательностью раздутий Нэша; но хотя и доказано, что это верно для кривых, в общем случае это неизвестно.

Полуаддитивность коразмерности пересечений

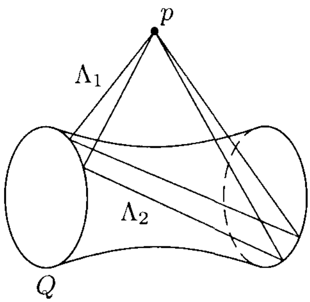
Здесь нам следует сформулировать основную теорему о размерности пересечения многообразий. Вероятно, ее следовало бы сформулировать еще в лекции 11, но из-за необходимого условия гладкости пришлось отложить ее до настоящего момента. Она звучит следующим образом.

Теорема 17.24. *Пусть Y — подмногообразие гладкого многообразия X и $f\colon Z \to X$ — регулярное отображение. Если Y и Z равноразмерны, и при этом Y и $f(Z)$ пересекаются, то*

$$\dim(f^{-1}(Y)) \geqslant \dim(Z) + \dim(Y) - \dim(X);$$

или, другими словами, коразмерность прообраза не превосходит коразмерности Y в X (на самом деле это верно для каждой компоненты $f^{-1}(Y)$). В частности, если f — вложение, так что и Y, и Z — подмногообразия в X, то коразмерность их пересечения (если оно непусто) не превосходит суммы их коразмерностей.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f \times i\colon Z \times Y \to X \times X$, где $i\colon Y \to X$ — включение. Прообраз $f^{-1}(Y)$ — это в точности прообраз $(f \times i)^{-1}(\Delta_X)$, где $\Delta_X \subset X \times X$ — диагональ. Теперь, поскольку X гладко, Δ_X является локально полным пересечением в $X \times X$, т. е. локально является множеством нулей $\dim(X)$ регулярных функций. По упражнению 11.6 отсюда следует оценка на размерность $f^{-1}(Y)$. □



Одно замечание, которое здесь следует сделать, таково: утверждение ложно, если допустить произвольное X; например, возьмем гладкую квадратичную поверхность $Q \subset \mathbb{P}^3$, пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ — конус $\overline{pQ}$ над Q с вершиной p, L_1 и L_2 — прямые из одного и того же семейства на Q (так что, в частности, $L_1 \cap L_2 = \varnothing$) и $\Lambda_i = \overline{p, L_i}$ — плоскость, натянутая на p и L_i. Тогда X, разумеется, трехмерно, а $\Lambda_i \subset X$ — пара двумерных подмногообразий, пересекающихся только в точке $p \in X$. Второе замечание: теорема верна локально; если $p \in f^{-1}(Y)$ — любая точка, то локальная размерность удовлетворяет неравенству $\dim_p(f^{-1}(Y)) \geqslant \dim(Z) + \dim(Y) - \dim(X)$. Это получается из формулировки теоремы просто заменой Z на окрестность точки p в Z.

Последнее замечание: можно объединить эту теорему с вычислениями размерности, проделанными в лекции 11, чтобы получить более общие оценки на размерность. Например, имеется следующее утверждение.

Предложение 17.25. *Пусть X — любое многообразие, $(f_{i,j})$ — $(n \times m)$-матрица регулярных функций на X, и пусть $Z \subset X$ — множество, заданное условием*

$$Z = \{p \in X \mid \operatorname{rank}(f_{i.j}(p)) \leqslant k\}.$$

Тогда либо Z пусто, либо

$$\dim(Z) \geqslant \dim(X) - (m-k)(n-k).$$

Доказательство. Это проверяется непосредственно: функции задают отображение f из X в векторное пространство матриц $\widetilde{M}$, и Z — это в точности прообраз подмногообразия $\widetilde{M}_k \subset \widetilde{M}$ матриц ранга не более k; комбинируя теорему 17.24 и пример 12.1, получаем требуемое утверждение. □

Заметим, что это можно применить и к матрице из однородных многочленов на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^l$, просто применяя сформулированный результат локально.

С учетом этого утверждения можно ввести понятие, аналогичное понятию полного пересечения: если $Z \subset \mathbb{P}^l$ — подмногообразие, идеал которого порождается $(k+1) \times (k+1)$-минорами $(m \times n)$-матрицы однородных многочленов $F_{i.j}$, то мы будем говорить, что Z — *собственное детерминантальное многообразие*, если

$$\dim(Z) = l - (m-k)(n-k).$$

Такие собственные детерминантальные многообразия похожи на полные пересечения в том отношении, что их численные инварианты (например, их многочлены Гильберта) можно полностью описать в терминах степеней многочленов $F_{i,j}$. (На самом деле полные пересечения можно рассматривать как частный случай собственных детерминантальных многообразий; по определению полное пересечение $X \subset \mathbb{P}^n$ коразмерности l — это собственное детерминантальное многообразие, соответствующее $(1 \times l)$-матрице.) Одно предупреждение: в некоторых текстах термин «детерминантальное многообразие» используется для того, что мы здесь называем «собственное детерминантальное многообразие».

Лекция 18

СТЕПЕНЬ

Нашему следующему фундаментальному понятию — *степени* проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ — можно дать различные определения, по большей части аналогичные различным определениям размерности. Как и в случае с размерностью, мы не будем доказывать равносильность этих определений (а иногда — даже их корректность), пока не введем их все.

Для начала вспомним, что понятие размерности мы определяли, полагая размерность $\mathbb{P}^n$ равной n. Далее мы утверждали, что для любого проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ существует конечное сюръективное отображение на некоторое проективное пространство $\mathbb{P}^k$, задаваемое как проекция π_Λ вдоль некоторого линейного подпространства $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k-1}$, не пересекающегося с X, и полагали размерность многообразия X равной k.

Чтобы определить степень, можно снова начать со случая, в котором у нас есть априорное понимание того, что́ это такое. Именно, пусть $X \subset \mathbb{P}^{k+1}$ — гиперповерхность, заданная как множество нулей неприводимого многочлена $F(Z)$. Тогда степенью X называется степень многочлена F. Теперь рассмотрим произвольное неприводимое многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$. Как мы уже знаем, если X не является гиперповерхностью, то проекция $\pi_p\colon X \to \mathbb{P}^{n-1}$ из общей точки $p \in \mathbb{P}^n$ есть бирациональное отображение на свой образ; действительно, если мы выберем произвольную[1] точку $q \in X$, то для выполнения этого условия достаточно, чтобы точка p не лежала на конусе $\overline{qX}$. Стало быть, проектируя последовательно из общих точек, получаем, что проекция $\pi_\Gamma\colon X \to \mathbb{P}^{k+1}$ из общей $(n-k-2)$-мерной плоскости есть бирациональное отображение на свой образ $\overline{X}$, который является гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{k+1}$; назовем степенью многообразия X степень этой гиперповерхности. Конечно, определение степени X как степени его «общей» проекции $\overline{X}$ будет некорректно, пока мы не проверим, что функция $d(\Gamma) = \deg(\pi_\Gamma(X))$ постоянна на открытом подмножестве грассманиана $\mathbb{G}(n-k-2, n)$; этот факт мы установим в упражнении 18.2.

По-другому это можно выразить в терминах проекции $\pi_\Lambda : X \to \mathbb{P}^k$, являющейся не чем иным, как композицией проекции $\pi_\Lambda : X \to \mathbb{P}^{k+1}$

[1] Строго говоря, не просто «произвольную», но «произвольную неособую». — *Прим. ред.*

с проекцией $\pi_p\colon \overline{X} \to \mathbb{P}^k$ из общей точки $p \in \mathbb{P}^{k+1}$, так что общий слой этого отображения состоит из пересечения $\overline{X}$ с общей прямой. Коль скоро $\overline{X}$ есть множество нулей однородного многочлена степени d на $\mathbb{P}^{k+1}$, общая прямая в $\mathbb{P}^{k+1}$ пересечет его в d точках; стало быть, мы можем определить степень многообразия X как степень отображения π_Λ, определенную в лекции 7. т. е. как количество точек в общем слое[1]. Это определение степени параллельно определению размерности как такого числа k, что общая $(n-k)$-мерная плоскость $\Omega \in \mathbb{P}^n$ пересекает X в конечном числе точек: поскольку для $\Omega \supset \Lambda$ пересечение $\Omega \cap X$ есть слой отображения $\pi_\Lambda : X \to \mathbb{P}^k$ над точкой $\Omega \cap \mathbb{P}^k$, получаем, что степень можно определить как число точек пересечения X с общей $(n-k)$-мерной плоскостью $\Omega \subset \mathbb{P}^n$. Подводя итог вышесказанному, получаем следующее определение.

Определение 18.1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое многообразие размерности k. Если Γ, Λ и Ω суть общие плоскости размерностей $n-k-2$, $n-k-1$ и $n-k$ соответственно, то *степень* многообразия X (обозначение: $\deg(X)$) — это

(i) степень гиперповерхности $\overline{X} = \pi_\Gamma(X) \subset \mathbb{P}^{k+1}$;

(ii) степень конечного сюръективного отображения $\pi_\Lambda : X \to \mathbb{P}^k$; или

(iii) число точек пересечения Ω с X.

Упражнение 18.2. Пусть $\operatorname{char}(K) = 0$. Используя упражнения 7.16 и 11.44, покажите, что определение (iii) корректно (для этого достаточно сказать, что степень многообразия X есть степень проекции $\Omega^{(k)}(X) \to \mathbb{G}(n-k, n)$, где $\Omega^{(k)}(X) \subset \mathbb{G}(n-k, n) \times X$ есть универсальное k-кратное гиперплоское сечение X), и выведите отсюда корректность определений (i) и (ii).

Когда в нашем распоряжении будет теорема Безу, мы сможем точно сказать, какие именно $(n-k-2)$-, $(n-k-1)$- и $(n-k)$-мерные плоскости следует считать общими в смысле определения 18.1.

Разумеется, часть (ii) определения 18.1 можно переформулировать с использованием поля функций $K(X)$ (хотя, поскольку степень, в отличие от размерности, очень сильно зависит от вложения, она не может быть определена *только* через $K(X)$). Именно, напомним, что проекция π_Λ индуцирует вложение полей функций

$$K(\mathbb{P}^k) = K(z_1, \ldots, z_k) \hookrightarrow K(X),$$

и поэтому $K(X)$ есть алгебраическое расширение поля $K(z_1, \ldots, z_k)$; тогда степень X будет равна степени этого расширения полей.

[1] Определение степени как числа точек в общем слое корректно, как известно, только в характеристике 0; тем не менее степень многообразия равна степени отображения π_Λ в произвольной характеристике. — *Прим. ред.*

Чтобы завершить аналогию между определениями размерности и степени, дадим определение степени в терминах многочлена Гильберта. Предварительную работу для этого мы уже проделали: как было показано в лекции 13, если h_X — функция Гильберта k-мерного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, то ее k-я разность $h^{(k)}$, определенная индуктивно при помощи соотношений $h^{(0)} = h_X$ и

$$h^{(l+1)}(m) = h^{(l)}(m) - h^{(l)}(m-1),$$

при больших m есть функция Гильберта $h_{X \cap \Omega}$ для пересечения $X \cap \Omega$ многообразия X с общей $(n-k)$-мерной плоскостью $\Omega \subset \mathbb{P}^n$. (Напомним, что это выполнено для любой такой плоскости Ω, что сумма $(I(\Omega), I(X))$ идеалов X и Ω локально порождает идеал пересечения $I(X \cap \Omega)$.) Поскольку многочлен Гильберта для $X \cap \Omega$ есть константа, получаем, что многочлен Гильберта p_X многообразия X — это многочлен степени k. А из того, что эта константа $P_{X \cap \Omega}$ равняется числу точек в $X \cap \Omega$, получаем, что старший член p_X равен $d \cdot m^k/k!$, т. е. степень d многообразия X есть коэффициент при старшем члене многочлена Гильберта p_X, умноженный на $k!$.

Отметим, что такое определение степени позволяет доказать утверждение из упражнения 18.2 в произвольной характеристике, т. к. в силу упражнения 17.19 для общей $(n-k)$-мерной плоскости Ω будет выполнено следующее свойство: насыщение $(I(\Omega), I(X))$ есть $I(\Omega \cap X)$.

Необходимо упомянуть несколько других интерпретаций степени многообразия $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, специфичных для случая комплексных многообразий. Для начала предположим, что X — гладкое многообразие, т. е. комплексное подмногообразие в $\mathbb{P}^n$. Тогда X является компактным ориентируемым вещественным $2k$-мерным многообразием, и ему соответствует фундаментальный класс $[X] \in H_{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$. Однако же четномерные гомологии комплексного проективного пространства равны $\mathbb{Z}$, и их образующей $[\Phi]$ является класс линейного подпространства в $\mathbb{P}^n$, так что имеет место равенство

$$[X] = d \cdot [\Phi],$$

где Φ есть k-мерная плоскость в $\mathbb{P}^n$. Так вот, коэффициент d равен степени многообразия X.

На самом деле это же определение имеет смысл и в случае, когда X не есть комплексное подмногообразие в $\mathbb{P}^n$, хотя увидеть это несколько сложнее. Именно, существует такая триангуляция многообразия X, что точки, в которых X не является гладким, образуют подкомплекс (см. [Hil]). Согласно упражнению 14.3, такие точки многообразия X образуют собственное алгебраическое подмногообразие, так что в этот подкомплекс будут входить только симплексы размерности не более $2k-2$. Стало быть, остается верным утверждение о том, что многообразию X соответствует фундаментальный класс $[X] \in H_{2k}(X, \mathbb{Z}) \to \to H_{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ (и что $[X]$ не зависит от триангуляции, хотя прямо из вышесказанного это не следует). Поэтому степень можно определить таким же образом, как и раньше.

Тот факт, что особому проективному многообразию соответствует фундаментальный класс, немедленно следует также из существования разрешения особенностей (теорема 17.23), но ссылка на это была бы стрельбой из пушки по воробьям. Вместо построения триангуляции многообразия X можно (и это будет проще) показать, что X ведет себя подобно многообразию при интегрировании, т. е. что интеграл по X от любой точной $2k$-формы на $\mathbb{P}^n$ равен нулю: коль скоро этот факт установлен, мы можем определить элемент η_X в пространстве $H^{2k}(\mathbb{P}^n)^*$, двойственном к группе когомологий де Рама $H^{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$, т.е. в $H_{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$; это и будет искомый класс $[X]$. Согласованность гомологического определения степени с предыдущими определениями следует из того, что отображения

$$H_*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \leftarrow H_*(\mathbb{P}^n \setminus \{p\}, \mathbb{Z}) \to H_*(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}),$$

индуцированные вложением $\mathbb{P}^n \setminus \{p\} \subset \mathbb{P}^n$ и проекцией из точки $\pi_p \colon \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^{n-1}$, задают изоморфизмы групп гомологий степени менее $2n$.

Следующую интерпретацию степени можно по праву назвать изысканной. У кэлеровой метрики на комплексном многообразии имеется следующее замечательное свойство: площадь (или объем) комплексного подмногообразия X равна интегралу по X соответствующей степени $(1, 1)$-формы, ассоциированной с метрикой. На $\mathbb{P}^n$, в частности, форма типа $(1, 1)$, ассоциированная со стандартной метрикой Фубини—Штуди (т. е. эрмитовой метрикой на комплексном проективном пространстве, инвариантной относительно унитарной группы U_{n+1}), соответствует классу образующей группы когомологий де Рама $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$. Ее степени соответствуют образующим $H^{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$, так что если X — k-мерное подмногообразие степени d в $\mathbb{P}^n$, то

$$\int_X \omega^k = d \cdot \int_\Lambda \omega^k,$$

где $\Lambda \cong \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ есть k-мерная плоскость. Метрику можно умножить на такое число, чтобы объем k-мерной плоскости был бы равен 1, так что степень подмногообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ будет просто равняться его объему. На самом деле среди всех циклов, соответствующих данному классу когомологий, минимальную площадь имеют комплексные подмногообразия.

Скажем в заключение, что степень приводимого k-мерного многообразия определяется как сумма степеней всех его неприводимых компонент размерности k.

Теорема Безу

Основной факт, который понадобится нам для вычисления степеней в примерах, довольно прост. Чтобы сформулировать теорему Безу в ее простейшем виде, введем для начала одно определение. Пусть X и $Y \subset \mathbb{P}^n$ — два подмногообразия, и пусть Z_i — неприводимые компоненты их пересечения. Тогда говорят, что *X и Y трансверсальны в общей точке*, если для всякого i многообразия X и Y пересекаются трансверсально в общей точке $p_i \in Z_i$, т. е. являются гладкими в p_i и линейная оболочка их касательных пространств равна $T_{p_i}(\mathbb{P}^n)$. Разумеется, если $\dim(X) + \dim(Y) = n$, то трансверсальность в общей точке равносильна обычной трансверсальности. Имея в виду это определение, сформулируем следующий факт.

Теорема 18.3. *Пусть X и $Y \subset \mathbb{P}^n$ — равноразмерные многообразия размерностей k и l соответственно, причем $k + l \geqslant n$ и многообразия трансверсальны в общей точке. Тогда*

$$\deg(X \cap Y) = \deg(X) \cdot \deg(Y).$$

В частности, если $k + l = n$, то $X \cap Y$ состоит из $\deg(X) \cdot \deg(Y)$ *точек.*

Доказательство этой теоремы будет приведено сразу после примера 18.17, а пока мы займемся усовершенствованием этих понятий и разбором примеров, так что читатель может перейти непосредственно к примеру 18.17 и доказательству теоремы.

Утверждение теоремы Безу может быть существенно усилено. Вкратце, дело обстоит так. Будем говорить, что равноразмерные многообразия X и Y *пересекаются правильно*, если размерность их пересечения совпадает с ожидаемой, т. е.

$$\dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y) - n.$$

Каждой паре правильно пересекающихся многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ и неприводимому многообразию $Z \subset \mathbb{P}^n$ размерности $\dim(X) + \dim(Y) - n$ можно сопоставить неотрицательное целое число $m_Z(X, Y)$, называемое *кратностью пересечения* X и Y вдоль Z, обладающее следующими свойствами:

(i) $m_Z(X, Y) \geqslant 1$, если $Z \subset X \cap Y$ (в противном случае полагаем $m_Z(X, Y) = 0$);

(ii) $m_Z(X, Y) = 1$ тогда и только тогда, когда X и Y пересекаются трансверсально в общей точке $p \in Z$;

(iii) кратность $m_Z(X, Y)$ аддитивна, т. е. $m_Z(X \cup X', Y) = m_Z(X, Y) + m_Z(X', Y)$ для любых X и X', если все эти три величины определены, а у X и X' нет общих компонент.

Пользуясь понятием кратности, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 18.4. *Пусть $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ — правильно пересекающиеся равноразмерные многообразия. Тогда*

$$\deg(X) \cdot \deg(Y) = \sum m_Z(X, Y) \cdot \deg(Z),$$

где суммирование ведется по всем неприводимым многообразиям Z соответствующей размерности (реально — по всем неприводимым компонентам $X \cap Y$).

В случае, когда $\dim(X) + \dim(Y) = n$, а X и Y суть правильно пересекающиеся локально полные пересечения, у $m_Z(X, Y)$ есть непосредственное описание: для всякой изолированной точки p пересечения $X \cap Y$ кратность равна размерности фактора $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n,p}/(I_X + I_Y)$ (как векторного пространства над K), где $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n,p}$ — локальное кольцо $\mathbb{P}^n$ в точке p, а I_X и I_Y — идеалы многообразий X и Y. В несколько большей общности, если X и Y — правильно пересекающиеся локально полные пересечения произвольных размерностей, $m_Z(X, Y)$ можно определить, рассмотрев «нормальное сечение», т. е. выбрав общее линейное пространство $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ коразмерности $\dim(X) + \dim(Y) - n$, пересекающееся с Z трансверсально в общей точке $p \in Z$, и положив кратность пересечения X и Y вдоль Z равной $m_p(X_0, Y_0)$, где $X_0 = X \cap \Gamma$ и $Y_0 = Y \cap \Gamma$. Это эквивалентно следующему: выберем аффинное открытое подмножество $U \subset \mathbb{P}^n$, пересекающееся с Z, положим $\widetilde{X} = X \cap U$, $\widetilde{Y} = Y \cap U$, $\widetilde{Z} = Z \cap U$ и определим $m_Z(X, Y)$ как ранг $A(\widetilde{Z})$-модуля $A(U)/(I_{\widetilde{X}} + I_{\widetilde{Y}})$.

Попытки дать более явное описание $m_Z(X, Y)$ в общей ситуации увели бы нас сейчас слишком далеко в сторону, но даже из перечисленных здесь элементарных свойств можно вывести несколько следствий уточненной теоремы Безу. Например, справедливы следующие утверждения.

Следствие 18.5. *Пусть X и Y — правильно пересекающиеся равноразмерные подмногообразия в $\mathbb{P}^n$. Тогда*

$$\deg(X \cap Y) \leqslant \deg(X) \cdot \deg(Y).$$

Следствие 18.6. *Пусть X и Y — правильно пересекающиеся равноразмерные подмногообразия в $\mathbb{P}^n$, и пусть*

$$\deg(X \cap Y) = \deg(X) \cdot \deg(Y).$$

Тогда и X, и Y являются гладкими в общей точке произвольной компоненты $X \cap Y$. В частности, если X и Y имеют дополнительные размерности, то они гладки во всех точках $X \cap Y$.

Упражнение 18.7. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — подмногообразие степени 1. Докажите, что X есть линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$.

С помощью теоремы Безу можно доказать утверждение, которое мы сформулировали уже достаточно давно: любой автоморфизм проективного пространства $\mathbb{P}^n$ линеен, т. е. индуцирован автоморфизмом $A \in \mathrm{GL}_{n+1} K$ пространства K^{n+1}.

Основной шаг доказательства, провести который удается именно благодаря теореме Безу, состоит в следующем наблюдении: если H и $L \subset \subset \mathbb{P}^n$ — подмногообразия размерностей $n-1$ и 1 соответственно, трансверсально пересекающиеся ровно в одной точке, то H — гиперплоскость, а L — прямая. Отсюда следует, что всякий автоморфизм $\mathbb{P}^n$ переводит гиперплоскости в гиперплоскости, а это, по существу, и есть то, что мы хотим доказать: всякий автоморфизм $\varphi\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ можно записать в координатах $(z_1, \ldots, z_n)$ и $(w_1, \ldots, w_n)$ в виде

$$w_i = \frac{f_i(z_1, \ldots, z_n)}{g_i(z_1, \ldots, z_n)},$$

и тот факт, что из линейной зависимости между w_i следует линейная зависимость между z_i, означает, что степени всех f_i и g_i не могут превышать 1, а все g_i отличаются друг от друга умножением на скаляр. □

Отметим, что при $K = \mathbb{C}$ тот факт, что любой автоморфизм $\mathbb{P}^n$ переводит гиперплоскости в гиперплоскости, непосредственно следует из топологического описания гиперплоскостей как подмногообразий, фундаментальный класс которых порождает группу $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$.

Пример 18.8. Нормальная рациональная кривая

Сначала рассмотрим нормальную рациональную кривую $C = \nu_d(\mathbb{P}^1) \subset \subset \mathbb{P}^d$, т. е. образ отображения

$$\nu_d\colon [X_0, X_1] \mapsto [X_0^d, X_0^{d-1}X_1, \ldots, X_1^d].$$

Пересечение C с общей гиперплоскостью $a_0Z_0 + \ldots + a_dZ_d = 0$ есть образ множества нулей общего многочлена $a_0X_0^d + a_1X_0^{d-1}X_1 + \ldots + a_dX_1^d$, которое, разумеется, состоит из d точек; значит, степень C равна d.

Многие факты, которые были доказаны в первой части непосредственно, становятся очевидными ввиду этого утверждения и теоремы Безу. Например, утверждение, что пересечение любых двух квадрик, содержащее скрученную кубику $C \in \mathbb{P}^3$, состоит из объединения C и прямой, получается немедленно: если обе квадрики содержат скрученную кубику, они должны быть трансверсальны в общей точке, так что их пересечение имеет степень 4. Далее мы будем отмечать другие подобные примеры.

Заметим, что из следствий 18.5 и 18.6 немедленно вытекает утверждение, являющееся в некотором смысле обратным к утверждению о степени нормальной рациональной кривой. (Будем называть многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ *невырожденным*, если оно не содержится ни в одной гиперплоскости.)

Предложение 18.9. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^d$ — произвольная неприводимая невырожденная кривая. Тогда $\deg(C) \geqslant d$, и если $\deg(C) = d$, то C — это нормальная рациональная кривая.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения предположим, что степень кривой C строго меньше d, и выберем любые d точек $p_1, \ldots, p_d \in C$. Любые d точек в $\mathbb{P}^d$ содержатся в некоторой гиперплоскости $H \cong \mathbb{P}^{d-1}$, но тогда, согласно следствию 18.5, $\dim(H \cap C) = 1$, и, значит, $C \subset H$. Чтобы доказать вторую часть, заметим, что, поскольку C — неприводимая кривая степени d, не лежащая ни в какой гиперплоскости, любой набор из $d + 1$ точки на C должен быть, согласно предыдущему рассуждению, линейно независимым, а также что ввиду следствия 18.6 кривая C гладка. Теперь выберем произвольные точки $p_1, \ldots, p_{d-1} \in C$; они порождают плоскость $\Lambda \cong \mathbb{P}^{d-2} \subset \mathbb{P}^d$. Для всякой гиперплоскости H, содержащей Λ, пересечение $H \cap \Lambda$ будет состоять из $p_1, \ldots, p_{d-1}$ и еще одной точки $p(H)$ (или просто из $p_1, \ldots, p_{d-1}$, если H касается C в одной из точек p_i). Обратно, для любой точки $p \in C$ обозначим через $H(p)$ гиперплоскость, натянутую на p и $p_1, \ldots, p_{d-1}$ (или, если $p = p_i$, гиперплоскость, натянутую на $p_1, \ldots, p_{d-1}$ и касательную прямую к C в точке p_i). Это соответствие задает изоморфизм между C и прямой $\Lambda^* = \{H \mid H \supset \Lambda\} \cong \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{d*}$, и из общего описания рациональных кривых, приведенного в лекции 1, следует, что C — нормальная рациональная кривая. □

Нижняя оценка из предложения 18.9 может быть обобщена на случай многообразий большей размерности. Вот основной факт, который нам для этого потребуется.

Предложение 18.10. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — невырожденное неприводимое многообразие размерности $k \geqslant 1$, а $Y = X \cap H \subset H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ — общее гиперплоское сечение X. Тогда Y невырождено в $\mathbb{P}^{n-1}$, а если $k \geqslant 2$, то Y неприводимо.*

Доказательство. Утверждение о невырожденности относительно элементарно; мы докажем его для гиперплоскости H, трансверсальной к X в общей точке. Именно, предположим, что Y содержится в подпространстве $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-2}$, и пусть $\{H_\lambda\}$ — семейство гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$, содержащих Λ. Поскольку X не содержится ни в каком конечном объединении гиперплоскостей, общий представитель H_λ этого пучка пересекается с X как минимум в одной точке p, не лежащей на Y; точка p лежит на неприводимой компоненте Z_λ многообразия $X \cap H_\lambda$, не содержащейся в Y. По теореме Безу имеем:

$$\deg(X \cap H_\lambda) \geqslant \deg(Y) + \deg(Z_\lambda) > \deg(Y) = d.$$

Противоречие.

Неприводимость $X \cap H$ является более тонким фактом: здесь мы приведем только набросок доказательства, и то лишь над $\mathbb{C}$. Подробности (и гораздо более сильную теорему) можно найти в [FL].

Чтобы сделать ситуацию более наглядной, заметим, что теорему достаточно доказать для случая, когда X двумерно. Как и выше, достаточно провести доказательство для общей гиперплоскости H, содержащей данную $(n-3)$-мерную плоскость Λ; стало быть, можно рассмотреть отображение проекции $f = \pi_\Lambda \colon X \to \mathbb{P}^2$; тогда нам достаточно доказать, что прообраз $\pi^{-1}(L)$ общей прямой $L \subset \mathbb{P}^2$ неприводим.

Рассмотрим теперь множество Z, состоящее из особых точек X и таких точек $p \in X$, что дифференциал df_p вырожден, т. е. $\operatorname{Ker}(df_p) \neq 0$. Это собственное замкнутое подмножество в X; пусть $B = f(Z)$ — его образ в $\mathbb{P}^2$. A priori множество B есть объединение плоской кривой некоторой степени b и конечного набора точек (на самом деле у B не будет нульмерных компонент[1], но нам этот факт не потребуется). Пусть $U = \mathbb{P}^2 \setminus B$ — дополнение к B, а $V = f^{-1}(U) \subset X$ — прообраз множества U в X.

Возьмем общую точку $q \in U$. Пусть $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ — пучок прямых в $\mathbb{P}^2$, содержащих q, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — такие значения λ, для которых L_λ *не* пересекается с B трансверсально в b точках. Рассмотрим отношение инцидентности

$$\Sigma = \{(\lambda, p) \mid f(p) \in L_\lambda\} \subset \mathbb{P}^1 \times V;$$

это не что иное, как раздутие V в точках $p_1, \ldots, p_d$, лежащих над q. Наконец, в завершение подготовки, выбросим точки $\lambda_i \in \mathbb{P}^1$ и их прообразы в Σ, т. е. положим

$$W = \mathbb{P}^1 \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\},$$
$$\widetilde{\Sigma} = (\pi_1)^{-1}(W).$$

[1]По крайней мере вне образов изолированных особенностей поверхности X. — *Прим. ред.*

После всего этого отображение $\pi_1 : \widetilde{\Sigma} \to W$ превращается в топологическое расслоение, каждый слой которого $(\pi_1)^{-1}(\lambda)$ является d-листным накрытием открытого множества $L_\lambda \setminus (L_\lambda \cap B) \subset L_\lambda$; точки p_i задают сечения этого расслоения. Поскольку X неприводимо, $\widetilde{\Sigma}$ связно; а поскольку у расслоения со связным тотальным пространством, допускающего сечения, слои обязаны быть связны, можно заключить, что $(\pi_1)^{-1}(\lambda)$ связно при всех $\lambda \in W$. Но $(\pi_1)^{-1}(\lambda)$ есть открытое плотное подмножество кривой $f^{-1}(L_\lambda) \subset X$, так что эта кривая неприводима. □

Упражнение 18.11. Докажите невырожденность общего гиперплоского сечения многообразия X без привлечения понятия степени (и теоремы Безу) следующим образом. Во-первых, покажите, что если общее гиперплоское сечение X лежит в k-мерной плоскости, то имеется рациональное отображение

$$\varphi\colon \mathbb{P}^{n*} \dashrightarrow \mathbb{G}(k, n),$$

переводящее общую гиперплоскость $H \in \mathbb{P}^{n*}$ в линейную оболочку пересечения $H \cap X$. Далее, используя неприводимость универсального гиперплоского сечения многообразия X, докажите, что для всех $H \in \mathbb{P}^{n*}$ и для любой точки $\Lambda \in \varphi(H)$ (т. е. для любой точки в образе слоя графика Γ_φ над H) гиперплоское сечение $H \cap X$ лежит в k-мерной плоскости Λ. Из этого следует, что если общее гиперплоское сечение многообразия X вырождено, то таковы и все остальные — но любые n независимых точек на X задают гиперплоскость H, для которой $X \cap H$ невырождено.

Следствие 18.12. *Если $X \subset \mathbb{P}^d$ — произвольное невырожденное многообразие размерности k, то* $\deg X \geqslant d - k + 1$.

Доказательство. Достаточно просто сопоставить предложения 18.9 и 18.10: согласно последнему, пересечение X с общей плоскостью размерности $d - k + 1$ будет неприводимой невырожденной кривой в $\mathbb{P}^{d-k+1}$. □

В теореме 19.9 мы приведем полный список многообразий минимальной степени.

Другие примеры со степенью

Пример 18.13. Многообразия Веронезе

Рассмотрим теперь произвольное многообразие Веронезе, то есть образ отображения Веронезе $\nu_d\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$. Его степень — это число точек пересечения с общим линейным подпространством коразмерности n в $\mathbb{P}^N$, или, что то же самое, с n общими гиперплоскостями $H_i \subset \mathbb{P}^N$.

Однако же прообраз $\nu_d^{-1}(H_i)$ общей гиперплоскости в $\mathbb{P}^N$ есть общая гиперповерхность Y_i степени d в $\mathbb{P}^n$; пересечение n таких прообразов состоит, согласно теореме Безу, из d^n точек (по теореме Бертини гиперповерхности Y_i будут пересекаться трансверсально). Поэтому степень многообразия Веронезе равна d^n.

Отметим, что в приведенном вычислении можно обойтись без теоремы Безу, если использовать тот факт, что каждая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$ есть прообраз $\nu_d^{-1}(H_i)$ некоторой гиперплоскости в $\mathbb{P}^N$. Обозначим через $Y_i \subset \mathbb{P}^n$ гиперповерхность, являющуюся объединением d общих гиперплоскостей $\Lambda_{i,j} \subset \mathbb{P}^n$, так что пересечение $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$ будет состоять из d^n точек

$$p_j = \Lambda_{1,j(1)} \cap \ldots \cap \Lambda_{n,j(n)},$$

где j пробегает все отображения $j\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, d\}$. Конечно, в этом случае еще нужно проверить, что пересечение многообразия Веронезе X с n гиперплоскостями H_i трансверсально в каждой точке $\nu_d(p_j)$.

Другой способ получить этот же результат опирается на использование определения степени в терминах (топологических) когомологий. Именно, поскольку прообраз гиперплоскости в $\mathbb{P}^N$ есть гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$, соответствующее отображение когомологий

$$\nu_d^*\colon H^2(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$$

действует так:

$$\nu_d^*\colon \zeta_{\mathbb{P}^N} \mapsto d \cdot \zeta_{\mathbb{P}^n},$$

где $\zeta_{\mathbb{P}^n}$ есть образующая группы $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$. Следовательно,

$$\nu_d^*\colon (\zeta_{\mathbb{P}^N})^n \mapsto d^n \cdot (\zeta_{\mathbb{P}^n})^n,$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\deg(X) = \langle(\zeta_{\mathbb{P}^N})^n, [X]\rangle = \langle(\zeta_{\mathbb{P}^N})^n, \nu_{d*}[\mathbb{P}^n]\rangle = \langle\nu_d^*(\zeta_{\mathbb{P}^N})^n, [\mathbb{P}^n]\rangle = \\ = \langle d^n \cdot (\zeta_{\mathbb{P}^N})^n, [\mathbb{P}^n]\rangle = d^n.\end{aligned}$$

Найти степень многообразия Веронезе еще одним способом можно с помощью многочлена Гильберта. Вспомним, что в примере 13.4 мы установили, что многочлен Гильберта многообразия $X = \nu_d(\mathbb{P}^n)$ есть

$$p_X(m) = \binom{m \cdot d + n}{n} = \frac{(dm+n)(dm+n-1) \cdot \ldots \cdot (dm+1)}{n!} = \frac{d^n}{n!}m^n + \ldots,$$

так что степень X равна d^n.

Упражнение 18.14. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^n$ — k-мерное многообразие степени e, а $Z = \nu_d(Y)$ — его образ в $\mathbb{P}^N$ при отображении Веронезе. Вычислите степень Z всеми приведенными способами.

Заметим, что степень поверхности Веронезе $S = \nu_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ равна 4: в частности, отсюда следует (с использованием предложений 18.9 и 18.10), что общее гиперплоское сечение S есть нормальная рациональная кривая в $\mathbb{P}^4$ (это можно показать и непосредственно). Отметим однако, что это единственный случай, в котором общее гиперплоское сечение многообразия Веронезе есть многообразие Веронезе.

Пример 18.15. Многообразия Сегре

Теперь мы вычислим степени многообразий Сегре $\Sigma_{m,n} = \sigma(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \subset \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}^{mn+m+n}$. Это можно сделать способами, аналогичными трем из приведенных четырех (единственное, что мы сейчас не можем сделать, — это описать пересечение $\Sigma_{m,n}$ с $m+n$ общими гиперплоскостями в $\mathbb{P}^N$).

Для начала заметим, что среди гиперплоских сечений многообразия $\Sigma_{m,n}$ есть сечения, состоящие из объединения прообразов гиперплоскости в каждом из сомножителей, — если рассматривать многообразие Сегре как $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \subset \mathbb{P}(V \otimes W)$, они соответствуют разложимым элементам $l \otimes m \in V^* \otimes W^*$. Пусть теперь $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{m+n} \subset \mathbb{P}^m$ и $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m+n} \subset \mathbb{P}^n$ — общие гиперплоскости, а $H_i \subset \mathbb{P}^N$ — гиперплоскость, прообраз которой есть

$$\sigma^{-1}(H_i) = \pi_1^{-1}(\Lambda_i) \cup \pi_2^{-1}(\Gamma_i).$$

Далее, поскольку пересечение любых m гиперплоскостей Λ_i есть точка, а пересечение любых $m+1$ из них пусто (и аналогично для Γ_i), имеем равенство

$$H_1 \cap \ldots \cap H_{m+n} \cap \Sigma_{m,n} = \{\sigma(p_I)\},$$

где $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ пробегает все m-элементные подмножества в $\{1, \ldots \ldots, m+n\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ есть дополнение к I, а

$$p_I = (\Lambda_{i_1} \cap \ldots \cap \Lambda_{i_m}) \times (\Gamma_{j_1} \cap \ldots \cap \Gamma_{j_n}).$$

Как и ранее, необходимо проверить, что пересечение $\Sigma_{m,n}$ с гиперплоскостями H_i трансверсально во всех точках; как только это сделано, можно заключить, что степень многообразия Сегре $\Sigma_{m,n}$ равна $\binom{m+n}{n}$.

Второй подход — когомологический. Если $\zeta_{\mathbb{P}^N}$ — это образующая группы $H^2(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z})$, а через α и β обозначены обратные образы в $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ классов $\zeta_{\mathbb{P}^m}$ и $\zeta_{\mathbb{P}^n}$ соответственно, то отображение σ^* переводит $\zeta_{\mathbb{P}^N}$ в $\alpha + \beta$.

Следовательно,

$$\deg(\Sigma_{m,n}) = \langle(\zeta_{\mathbb{P}^N})^{m+n}, [\Sigma_{m,n}]\rangle = \langle(\zeta_{\mathbb{P}^N})^{m+n}, \sigma_*[\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n]\rangle =$$
$$= \langle\sigma^*(\zeta_{\mathbb{P}^N})^{m+n}, [\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n]\rangle = \langle(\alpha+\beta)^{m+n}, [\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n]\rangle.$$

Далее, $\alpha^{m+1} = \pi_1^*((\zeta_{\mathbb{P}^m})^{m+1}) = 0$, и то же верно для β^{n+1}; с другой стороны, по теореме Кюннета имеем $\langle\alpha^m \cdot \beta^n, [\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n]\rangle = 1$. Раскрыв скобки в $(\alpha+\beta)^{m+n}$, получаем, что

$$\deg(\Sigma_{m,n}) = \binom{m+n}{n}.$$

Наконец, для вычисления степени третьим способом запишем многочлен Гильберта $\Sigma_{m,n}$ так, как это было сделано в упражнении 13.6; поскольку однородные многочлены степени l на $\mathbb{P}^N$, будучи ограничены на $\Sigma_{m,n}$, дают все биоднородные многочлены бистепени (l, l) на $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, получаем, что размерность l-й однородной компоненты кольца $S(\Sigma_{m,n})$ равна

$$p_{\Sigma_{m,n}}(l) = \binom{m+l}{m}\binom{n+l}{n} =$$
$$= \frac{(l+m)(l+m-1)\cdot\ldots\cdot(l+1)(l+n)\cdot\ldots\cdot(l+1)}{m!n!} = \frac{1}{m!n!}\,l^{m+n} + \ldots$$

Отсюда заключаем, что степень $\Sigma_{m,n}$ есть коэффициент при старшем члене этого многочлена, умноженный на $(m+n)!$, то есть $\binom{m+n}{n}$.

Отметим, что при $n = 1$ многообразие Сегре $\Sigma_{m,1}$ есть многообразие степени $m+1$ в $\mathbb{P}^{2m+1}$, и, в частности, степень трехмерного многообразия Сегре $\Sigma_{2,1} \subset \mathbb{P}^5$ равна 3. Это еще раз доказывает, что пересечение $\Sigma_{2,1}$ с общей трехмерной плоскостью $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ есть скрученная кубическая кривая. Вообще заметим, что многообразия $\Sigma_{m,1}$ суть многообразия минимальной степени в смысле следствия 18.12; причина этого в том, что они, как мы увидим позже, являются нормальными рациональными свитками.

Пример 18.16. Степени конусов и проекций

Начнем с простейшего случая. Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ — многообразие размерности k и степени d, и пусть $p \in \mathbb{P}^n$ — произвольная точка, не лежащая в $\mathbb{P}^{n-1}$, а $Y = \overline{pX}$ — конус с вершиной p над X. Тогда, поскольку общее гиперплоское сечение Y проективно эквивалентно X, получаем, что степень Y равна степени X, то есть d.

Далее, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$, $p \notin X$, и пусть $\overline{X} = \pi_p(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — проекция X из точки p. Предположим, что $\mathrm{char}(K) = 0$. Поскольку гиперплоскости в $\mathbb{P}^{n-1}$ соответствуют гиперплоскостям в $\mathbb{P}^n$, проходящим через точку p, общий набор из k гиперплоскостей $\overline{H}_i \subset \mathbb{P}^{n-1}$ получается из общего набора из k гиперплоскостей H_i в $\mathbb{P}^n$, проходящих через точку p, которые по теореме Бертини пересекают X трансверсально; по теореме Безу, они пересекутся с X в точности по d точкам p_α. Тогда пересечение $\overline{X}$ с гиперплоскостями $\overline{H}_i$ будет состоять из образов $\overline{p}_i = \pi_p(p_i) \in \mathbb{P}^{n-1}$. Если предположить, что они все различны, то есть что общая прямая, соединяющая p с точкой на X, не пересекается с X в других точках, или, что то же самое, что отображение проекции бирационально на свой образ, то отсюда следует, что степень $\overline{X}$ равна степени d многообразия X.

Как меняется это рассуждение, если $p \in X$? Если p — гладкая точка на X, нетрудно понять, как его можно подправить: ясно, что общий набор из k гиперплоскостей H_i, проходящих через p, пересечет X трансверсально в точке p. Тогда можно опять применить теорему Бертини и заключить, что гиперплоскости H_i пересекут X трансверсально в точках, отличных от p. По-прежнему предполагая, что общая прямая $\overline{pq}$, соединяющая p с другой точкой $q \in X$, пересекается с X только в точках p и q, видим, что точки пересечения $\overline{X}$ с $\overline{H}_i$ соответствуют точкам пересечения X с H_i, отличным от p, так что

$$\deg(\overline{X}) = \deg(X) - 1.$$

В лекции 20 мы выясним, что делать в случае $p \in X_{\mathrm{sing}}$. Заметим, что в обоих случаях $p \notin X$ и $p \in X_{\mathrm{sm}}$ это вычисление проходит в произвольной характеристике, если существует $(n-k)$-мерная плоскость, проходящая через p и трансверсальная к X (в случае $\mathrm{char}(K) > 0$ это утверждение нетривиально, но в следующих ниже приложениях оно проверяется непосредственно).

Заметим, что поскольку нормальный рациональный свиток $X_{2,1} \subset \mathbb{P}^4$ есть проекция поверхности Веронезе $S \subset \mathbb{P}^5$ из точки на S, из приведенных рассуждений следует, что степень многообразия $X_{2,1}$ равна 3.

Пример 18.17. Соединения многообразий

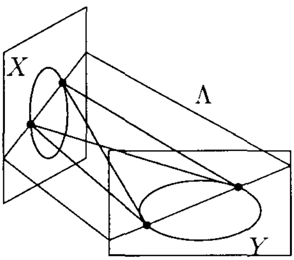
Напомним данное в примере 6.17 определение соединения двух непересекающихся многообразий: пусть $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ — два непересекающихся многообразия; определим соединение X и Y как объединение

$$J(X, Y) = \bigcup_{x \in X, y \in Y} \overline{xy}$$

прямых, соединяющих точки из X с точками из Y. Как было показано в примере 11.36, размерность соединения на единицу больше суммы размерностей $k = \dim(X)$ и $l = \dim(Y)$ многообразий X и Y; сейчас мы найдем его степень.

Сперва мы сделаем это для частного на первый взгляд случая, когда X и Y лежат в дополнительных линейных пространствах $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ и $\mathbb{P}^{n-m-1} \subset \mathbb{P}^n$; этот случай важен, поскольку, как мы видели ранее, всякое соединение может быть реализовано как регулярная проекция соединения такого вида. Приведем три способа вычислить его степень.

Первый способ. Наш первый подход заключается в рассмотрении пересечения многообразия с некоторой специальной плоскостью. Пусть $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k-l}$ — подпространство, натянутое на общую плоскость $\Lambda' \cong \mathbb{P}^{m-k} \subset \mathbb{P}^m$ и общую плоскость $\Lambda'' \cong \mathbb{P}^{n-m-1-l} \subset \mathbb{P}^{n-m-1}$. Тогда Λ' пересекается с X ровно по $\deg(X)$ точкам $p_1, \ldots, p_d$, а Λ'' пересекается с Y ровно по $\deg(Y)$ точкам $q_1, \ldots, q_e$; пересечение Λ с соединением $J(X, Y)$ есть объединение $d \cdot e$ прямых L_{ij}, каждая из которых проходит через некоторую пару точек p_i и q_j. Более того, если Λ' и Λ'' пересекаются с X и Y трансверсально, то из описания касательных плоскостей к $J(X, Y)$, приведенного в упражнении 16.14, следует, что пересечение Λ с $J(X, Y)$ трансверсально в общей точке, так что степень соединения $J(X, Y)$ равна $d \cdot e = \deg(X) \cdot \deg(Y)$.



Второй способ. Это доказательство менее удовлетворительно: оно работает только в характеристике 0 и к тому же использует теорему Безу (что нежелательно, поскольку мы собираемся использовать вычисление степени $J(X, Y)$ для того, чтобы ее доказать). Я поместил его в основном потому, что мне нравится упражнение 18.18.

Предположим, что $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ — общая плоскость размерности, дополнительной к размерности соединения $J(X, Y)$, т. е. размерности $n - k - l - 1$. Можно описать пересечение $\Gamma \cap J(X, Y)$, рассмотрев проекцию π_Γ из $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^{k+l}$. Прямая $\overline{pq}$, соединяющая точки многообразий X и Y, пересекается с Γ (она не может содержаться в плоскости Γ, так как Γ не пересекается с X и Y) тогда и только тогда, когда имеет место совпадение линейных оболочек $\overline{\Gamma, p} = \overline{\Gamma, q}$, т. е. $\pi_\Gamma(p) = \pi_\Gamma(q)$. Поэтому пересечение $\Gamma \cap J(X, Y)$ соответствует пересечению $\pi_\Gamma(X) \cap \pi_\Gamma(Y)$; если это пересечение трансверсально, оно состоит из $\deg(X) \cdot \deg(Y)$ точек. Теперь все вытекает из следующего упражнения.

Упражнение 18.18. (Только для нулевой характеристики.) Пусть $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ — непересекающиеся многообразия размерностей k и l, а $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ — общая плоскость размерности $n-k-l-1$. Покажите, что проекции $\pi_\Gamma(X)$ и $\pi_\Gamma(Y)$ пересекаются трансверсально.

Третий способ. Наконец, заметим, что подсчет степени соединения $J(X, Y)$ двух многообразий, лежащих в непересекающихся линейных подпространствах, можно вывести из описания степени в терминах многочленов Гильберта, без рассмотрения каких бы то ни было пересечений; попросту, если $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ лежат в непересекающихся линейных пространствах, то однородное координатное кольцо $S(J(X, Y))$ соединения $J(X, Y)$ есть тензорное произведение $S(X) \otimes S(Y)$ однородных координатных колец многообразий X и Y (как градуированных колец). Поэтому

$$S(J(X, Y))_m = \bigoplus (S(X)_j \otimes S(Y)_{m-j}),$$

так что

$$\begin{aligned}
h_{J(X,Y)}(m) &= \sum h_X(j) \cdot h_Y(m-j) = \\
&= \sum_{j=0}^{m} \left(\deg(X) \cdot \binom{j+k}{k} + O(j^{k-1})\right) \times \\
&\qquad \times \left(\deg(Y)\binom{m-j+l}{l} + O((m-j)^{l-1})\right) = \\
&= \deg(X) \cdot \deg(Y) \cdot \sum_{j=0}^{m} \binom{j+k}{k} \cdot \binom{m-j+l}{l} + O(m^{k+l}) = \\
&= \deg(X) \cdot \deg(Y) \cdot \binom{m+k+l+1}{k+l+1} + O(m^{k+l}) = \\
&= \frac{\deg(X) \cdot \deg(Y)}{(k+l+1)!} m^{k+l+1} + O(m^{k+l}),
\end{aligned}$$

откуда заключаем, что $\deg(J(X, Y)) = \deg(X)\deg(Y)$.

Что же касается соединения двух произвольных многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}^n$, то из любого из приведенных рассуждений следует, что если общая точка на общей прямой, соединяющей точки из X с точками из Y, лежит ровно на α прямых, соединяющих X с Y, то степень соединения $J(X, Y)$ равна $\deg(X) \cdot \deg(Y)/\alpha$.

Доказательство теоремы Безу. Мы можем использовать вычисление степени соединения для доказательства теоремы Безу в ее первой формулировке (теорема 18.3). Для начала заметим, что ее достаточно доказать в случае, когда размерности многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ дополнительны, то есть когда X и Y трансверсально пересекаются по конечному множеству точек. А теперь рассмотрим X и Y как подмногообразия в двух различных пространствах $\mathbb{P}^n$ и вложим эти $\mathbb{P}^n$ в $\mathbb{P}^{2n+1}$ с помощью отображений $i, j\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{2n+1}$, определенных как

$$i\colon [Z_0, \ldots, Z_n] \mapsto [Z_0, \ldots, Z_n, 0 \ldots, 0]$$

и

$$j\colon [Z_0, \ldots, Z_n] \mapsto [0, \ldots, 0, Z_0, \ldots, Z_n].$$

Пусть $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ — образы X и Y при этом вложении, а $J = J(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ — их соединение.

Обозначим теперь через $L \cong \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ линейное подпространство, заданное следующим образом:

$$L = (Z_0 - Z_{n+1}, Z_1 - Z_{n+2}, \ldots, Z_n - Z_{2n+1}).$$

Заметим, что пересечение L с J состоит в точности из точек $[Z_0, \ldots$ $\ldots, Z_n, Z_0, \ldots, Z_n]$, где $p = [Z_0, \ldots, Z_n] \in X \cap Y$; согласно описанию касательного пространства к J, приведенному в примере 16.14 (и в предположении, что X и Y пересекаются трансверсально), это пересечение должно быть трансверсальным. Таким образом, получаем, что

$$\operatorname{card}(X \cap Y) = \deg(J) = \deg(X) \cdot \deg(Y). \qquad \square$$

На самом деле тот же прием можно будет использовать и для доказательства сильной формы теоремы Безу, как только будет определено понятие кратности пересечения; нужно лишь проверить, что для любой точки $p \in X \cap Y$ кратность пересечения L и J в точке на прямой $\overline{i(p), j(p)}$ равна кратности пересечения многообразий X и Y в точке p.

Пример 18.19. Унирациональность кубических гиперповерхностей

В завершение мы объединим ряд идей, введенных в нескольких последних лекциях, — именно, понятия касательной прямой и порядка касания, а также теорему Безу — для того, чтобы доказать утверждение, сделанное нами в лекции 7.

Предложение 18.20. *Гладкая кубическая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^4$ унирациональна.*

Доказательство. Мы уже видели (теорема 12.8), что X содержит прямые (на самом деле эти прямые заметают все X); пусть L — общая прямая на X. Рассмотрим многообразие $\Sigma \subset \mathscr{T}_1(X)$, состоящее из прямых, касательных к X в точке $p \in L$. Покажем сначала, что Σ рационально.

Чтобы убедиться в этом, зафиксируем общую точку $q \in \mathbb{P}^4$ и двумерную плоскость $\Lambda \cong \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^4$ и рассмотрим рациональное отображение

$$\varphi\colon L \times \Lambda \dashrightarrow \Sigma,$$

задаваемое для общих $p \in L$ и $r \in \Lambda$ по формуле

$$\varphi\colon (p, r) \mapsto \mathbb{T}_p(X) \cap \overline{pqr}.$$

Это отображение бирационально: действительно, для общей касательной M к X в точке p плоскость $\overline{M, q}$ пересекается с Λ в точке r; пара (p, r) будет тогда единственной точкой прообраза $\varphi^{-1}(M)$.

Далее, как будет показано в упражнении 18.21, общая касательная прямая к X имеет касание с X порядка 2 и поэтому пересекает X еще ровно в одной точке. Получаем тем самым рациональное отображение

$$\pi\colon \Sigma \dashrightarrow X.$$

Чтобы показать, что оно доминантно, заметим, что для любой точки $q \in X$, не лежащей на L, плоскость $\overline{L, q}$ пересекает X по плоской кубической кривой; эта кривая содержит L и поэтому имеет особенности, лежащие где-то на L (на самом деле в общем случае она состоит из объединения L и плоской коники, пересекающей L в двух различных точках). Поэтому плоскость $\overline{L, q}$ лежит в касательной плоскости $\mathbb{T}_p(X)$ как минимум для одной точки $p \in L$ (в общем случае опять-таки для двух); соответственно, точка q лежит как минимум на одной касательной прямой $\overline{qp}$ к X, где $p \in L$. □

Упражнение 18.21. Покажите, что общая касательная прямая к X имеет в точке $p \in L$ касание с X порядка 2.

Упражнение 18.22. Имитируя доказательство предложения 18.20, покажите, что гладкая кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ унирациональна при всех $n \geqslant 3$.

Упражнение 18.23. Покажите, что для любого фиксированного d существует такое $n_0 = n_0(d)$, что для всех $n \geqslant n_0$ всякая гладкая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$ унирациональна.

Лекция 19

СТЕПЕНЬ: ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Пример 19.1. Мультистепень подмногообразия в произведении проективных пространств

С тех пор как мы установили, что квадрика $Q \subset \mathbb{P}^3$ как абстрактное алгебраическое многообразие изоморфна $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, мы неоднократно наблюдали, что для изучения кривой $C \subset Q$ намного удобнее использовать ее бистепень (a, b) в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (то есть бистепень биоднородного многочлена F, задающего ее как подмногообразие в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$), чем просто степень C как кривой в $\mathbb{P}^3$ (читатель может проверить, что это просто $a + b$). Зададимся теперь вопросом об определении аналогичных целочисленных инвариантов для произвольных k-мерных подмногообразий $X \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$.

Возможно, быстрее всего наводит на ответ когомологическая интерпретация степени многообразия в $\mathbb{P}^n$. В соответствии с ней, степень многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ — это просто коэффициент, возникающий при выражении фундаментального класса $[X]$, соответствующего многообразию X, через $[\mathbb{P}^k]$ — стандартную образующую группы гомологий $H_{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$. По формуле Кюннета гомологии произведения $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ свободны от кручения и порождаются фундаментальными классами произведений $[\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l] \in H_{2k+2l}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$. Таким образом, для любого k-мерного подмногообразия $X \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ его фундаментальный класс можно представить в виде

$$[X] = \sum d_i \cdot [\mathbb{P}^i \times \mathbb{P}^{k-i}].$$

Это однозначно определяет набор целых чисел d_i, который мы и будем называть *мультистепенью* подмногообразия $X \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$.

Равносильным образом, пусть η_X — фундаментальный класс многообразия X в группе когомологий де Рама[1] $H^{2k}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Z})^* = H^{2n+2m-2k}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$. Тогда в терминах классов $\alpha, \beta \in H^2(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$,

[1] При обычном понимании когомологий де Рама это будут когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, но не $\mathbb{Z}$. Впрочем, эта вольность речи ничему не мешает. — *Прим. ред.*

определенных в примере 18.15, можно сказать, что

$$\eta_X = \sum d_i \cdot \alpha^{m-i}\beta^{n-k+i}.$$

Более наглядное описание чисел d_i заключается в том, что d_i равно количеству точек в пересечении X с произведением $\Gamma \times \Lambda \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, где $\Gamma \subset \mathbb{P}^m$ и $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ являются общими линейными подпространствами в $\mathbb{P}^m$ и $\mathbb{P}^n$ размерности $m - i$ и $n - k + i$ соответственно.

Упражнение 19.2. Пусть $X \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ — произвольное подмногообразие размерности k. Покажите, что степень X, вложенного в проективное пространство как подмногообразие многообразия Сегре $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, равна

$$\deg(X) = \sum \binom{k}{i} d_i.$$

Упражнение 19.3. Выведите из предыдущего упражнения, что любое линейное подпространство $\Lambda \subset \sigma(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{mn+n+m}$, лежащее на многообразии Сегре, содержится либо в слое проекции $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$, либо в слое проекции $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. (Сравните с доказательством теоремы 9.22.)

Пример 19.4. Проективная степень отображения

У понятия степени многообразия существует естественное обобщение, а именно проективная степень отображения $\varphi\colon X \to Y$, где $X \subset \mathbb{P}^n$ и $Y \subset \mathbb{P}^m$ — проективные многообразия. Определяется она просто: если мы определили степень многообразия как количество точек в пересечении с общим линейным подпространством дополнительной размерности, то *проективную степень* $d_0(\varphi)$ отображения $\varphi\colon X \to Y$ определим как число точек в прообразе общего линейного подпространства $\mathbb{P}^{m-\dim(X)} \subset \mathbb{P}^m$. (Это число называется проективной степенью, чтобы отличить его от степени отображения, определенной в лекции 7.) Иными словами, $d_0(\varphi)$ равно нулю, если размерность образа $\varphi(X)$ строго меньше, чем размерность X (т. е. если общий слой отображения имеет положительную размерность), а в остальных случаях $d_0(\varphi)$ равно произведению степени образа на степень отображения (где степень отображения $\deg(\varphi)$ равна числу точек в прообразе общей точки из $\varphi(X)$). Разумеется, с терминами «степень» и «проективная степень» нужно обращаться аккуратно, чтобы не получилась путаница. Отметим, в частности, что $d_0(\varphi)$ не зависит от проективного вложения $X \subset \mathbb{P}^n$.

На самом деле проективная степень отображения является первым (или нулевым) из ряда инвариантов $d_i(\varphi)$, которые тоже можно назвать *проективными степенями* отображения φ. Они определяются как мультистепени графика $\Gamma_\varphi \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$; равносильным образом, если

X имеет размерность k, то $d_i(\varphi)$ можно определить как число точек

$$d_i(\varphi) = \operatorname{card}(\varphi^{-1}(\mathbb{P}^{m-k+i}) \cap \mathbb{P}^{n-i}),$$

где $\mathbb{P}^{m-k+i} \subset \mathbb{P}^m$ и $\mathbb{P}^{n-i} \subset \mathbb{P}^n$ являются общими линейными подпространствами[1]. Заметим, что это число совпадает с проективной степенью ограничения отображения φ на пересечение X с общим подпространством $\mathbb{P}^{n-i} \subset \mathbb{P}^n$, или, что то же самое, со степенью прообраза $\varphi^{-1}(\mathbb{P}^{m-k+i})$, умноженной на степень ограничения φ на этот прообраз. В частности, проективная степень φ, конечно же, равна $d_0(\varphi)$, а степень самого X равна $\deg(X) = d_k(\varphi)$ (и не зависит от φ).

Пример 19.5. Соединение соответствующих точек

Напомним ситуацию из примера 8.14: пусть X и Y — подмногообразия в $\mathbb{P}^n$, и предположим, что задано такое регулярное отображение $\varphi\colon X \to Y$, что $\varphi(x) \neq x$ для всех $x \in X$. Тогда можно рассмотреть объединение

$$K(\varphi) = \bigcup_{x \in X} \overline{x, \varphi(x)}$$

и спросить, какова степень этого многообразия.

Начнем со случая, когда X — кривая. Как и при обсуждении произвольных соединений в примере 18.17, предположим временно, что X и Y лежат в непересекающихся подпространствах $\mathbb{P}^k$, $\mathbb{P}^l \subset \mathbb{P}^n$.

Теперь, чтобы найти степень $K(\varphi)$, рассмотрим его пересечение со специальной гиперплоскостью, а именно с гиперплоскостью Λ, натянутой на все $\mathbb{P}^k$ и общую гиперплоскость Λ_0 в $\mathbb{P}^l$. Нетрудно описать пересечение Λ с $K(\varphi)$ как множество и, в частности, убедиться, что это пересечение является собственным: очевидно, что Λ содержит $X \subset K(\varphi)$, а значит, $\Lambda \cap K(\varphi)$ состоит из самого́ X и объединения $d_0(\varphi)$ прямых $\overline{x, \varphi(x)}$ по всем таким x, что $\varphi(x) \in \Lambda_0$. Используя технику из лекции 16, можно увидеть, что это пересечение достаточно общее (мы оставляем это читателю в качестве упражнения). Отсюда следует, что

$$\deg(K(\varphi)) = \deg(K(\varphi) \cap \Lambda) = \deg(X) + d_0(\varphi).$$

Заметим, наконец, что теперь мы можем ответить на наш исходный вопрос, не предполагая, что X и $\varphi(X)$ лежат в непересекающихся подпространствах, поскольку всякое соединение $K(\varphi)$ может быть получено из соединения рассмотренного нами вида с помощью регулярной проекции:

[1]Обратите внимание, что график Γ_φ рассматривается здесь как подмногообразие в $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$: сомножители взяты в необычном порядке.

если общая точка, лежащая на общей прямой вида $\overline{x, \varphi(x)}$, принадлежит α таким прямым, то степень $K(\varphi)$ будет равна $(\deg(X) + d_0(\varphi))/\alpha$.

В качестве первого примера на использование этого вычисления заметим, что степень нормального рационального свитка $X_{a_1,a_2} \subset \mathbb{P}^n$ равна $a_1 + a_2 = n - 1$.

Упражнение 19.6. Что меняется в предыдущих рассуждениях, если $x = \varphi(x)$ для некоторого x?

Упражнение 19.7. Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — кривые в $\mathbb{P}^n$, и пусть (при $i = 2, \ldots, k$) $\varphi_i : C_1 \to C_i$ — отображения. Положим

$$X = \bigcup_{p \in C_1} \overline{p, \varphi_2(p), \ldots, \varphi_k(p)}$$

равным объединению соединений соответствующих точек, и предположим, что для любой $p \in C_1$ точки $p, \varphi_2(p), \ldots, \varphi_k(p)$ находятся в общем положении. Найдите степень X и выведите отсюда, в частности, что степень k-мерного нормального рационального свитка $X \subset \mathbb{P}^n$ равна $n - k + 1$. (*)

Возвращаясь к обсуждению степени $K(\varphi)$ в общей ситуации, разберем теперь случай отображения φ: $X \to Y$, где X — поверхность. Если использовать тот же прием, что и выше, то есть пересекать $K(\varphi)$ с таким линейным подпространством Λ, что само X будет компонентой пересечения $K(\varphi) \cap \Lambda$, то это подпространство должно быть гиперплоскостью, натянутой на все $\mathbb{P}^k$ и на общую гиперплоскость Λ_0 в $\mathbb{P}^l$. Тогда пересечение $K(\varphi)$ с Λ будет состоять из X и множества K', являющегося объединением прямых $\overline{x, \varphi(x)}$ по всем таким x, что $\varphi(x) \in \Lambda_0$. Но K' само является в точности многообразием $K(\varphi')$, где через φ' обозначено ограничение φ на прообраз гиперплоскости $\Lambda_0 \subset \mathbb{P}^l$. Степень $d_0(\varphi')$ равна, разумеется, проективной степени отображения φ, а степень прообраза $\deg(\varphi^{-1}(\Lambda_0))$ равна $d_1(\varphi)$. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\begin{aligned} \deg(K(\varphi)) &= \deg(\varphi') + \deg(\varphi^{-1}(\Lambda_0)) + \deg(X) = \\ &= d_0(\varphi) + d_1(\varphi) + d_2(\varphi). \end{aligned}$$

Схема рассуждений в общем случае аналогична. Для отображения φ: $X \to Y$ многообразия X размерности k, при условии, что $\varphi(x) \neq x$ для всех $x \in X$ и что общая точка из $K(\varphi)$ лежит на единственной прямой вида $\overline{x, \varphi(x)}$, степень многообразия $K(\varphi)$ будет равна сумме $\sum d_i(\varphi)$ проективных степеней $d_i(\varphi)$ отображения φ. Если общая точка, лежащая на общей прямой вида $\overline{x, \varphi(x)}$, принадлежит α прямым такого вида, то степень $K(\varphi)$ будет равна $\left(\sum d_i(\varphi)\right)/\alpha$.

Пример 19.8. Многообразия минимальной степени

Одно из следствий упражнения 19.7 заключается в том, что нормальные рациональные свитки имеют минимальную возможную степень, которая была найдена в следствии 18.12. На самом деле мы уже знакомы со всеми многообразиями минимальной степени, как утверждает следующая теорема.

Теорема 19.9. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое невырожденное k-мерное многообразие, имеющее степень $n - k + 1$. Тогда X обязательно является одним из следующих многообразий:*

(i) *квадратичная гиперповерхность;*

(ii) *конус над поверхностью Веронезе $\nu_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$;*

(iii) *нормальный рациональный свиток.*

Заметим, что квадратичная гиперповерхность является свитком тогда и только тогда, когда она имеет ранг 3 или 4, а поверхность Веронезе отличает от свитков то, что она не содержит прямых.

Мы не будем здесь доказывать теорему 19.9. Отметим, однако, что из нее следуют многие утверждения, сделанные нами ранее о свитках (а также и о других многообразиях). Например:

(a) общее гиперплоское сечение k-мерного нормального рационального свитка в $\mathbb{P}^n$ является $(k-1)$-мерным нормальным рациональным свитком в $\mathbb{P}^{n-1}$;

(b) проекция нормального рационального свитка $X \subset \mathbb{P}^n$ из точки $p \in X$ является нормальным рациональным свитком;

(c) проекция поверхности Веронезе $S \subset \mathbb{P}^5$ из точки $p \in S$ является кубическим свитком $X_{1,2} \subset \mathbb{P}^4$.

Пример 19.10. Степени детерминантальных многообразий

Сейчас мы найдем степени некоторых детерминантальных многообразий, определенных в лекции 9 и обсуждавшихся в примерах 12.1 и 14.15. Напомним принятые ранее обозначения. Пусть M — проективное пространство $\mathbb{P}^{mn-1}$, ассоциированное с векторным пространством матриц размера $m \times n$. Для каждого k обозначим через $M_k \subset M$ подмножество, состоящее из матриц, ранг которых не превосходит k. Как было замечено в свое время, многообразие M_1 — это многообразие Сегре $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1}$, и его степень уже была вычислена. Рассмотрим теперь другой крайний случай, а именно, когда k на единицу меньше, чем максимальный ранг (т. е. чем $\min(m, n)$). Всюду в дальнейшем будем, для определенности, считать, что $m \geqslant n = k + 1$. Напомним также, что, как мы видели в примере 12.1, коразмерность M_{n-1} равна $m - n + 1$.

Мы вычислим степень многообразия M_{n-1}, пересекая его с линейным подпространством $\Lambda \cong \mathbb{P}^{m-1}$. Задание такого подпространства равносильно заданию $(m \times n)$-матрицы, состоящей из линейных форм на $\mathbb{P}^{m-1}$. Чтобы задать такую матрицу, обозначим через $(a_{i,j})$ числовую $(m \times n)$-матрицу, все $(n \times n)$-миноры которой отличны от нуля. Возьмем в качестве искомой матрицы линейных форм матрицу $(a_{i,j} \cdot X_j)$, то есть матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}X_1 & a_{1,2}X_2 & \dots & a_{1,m}X_m \\ a_{2,1}X_1 & a_{2,2}X_2 & \dots & a_{2,m}X_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}X_1 & a_{n,2}X_2 & \dots & a_{n,m}X_m \end{pmatrix}.$$

Все $(n \times n)$-миноры этой матрицы суть ненулевые кратные произведений n-ок различных координат $X_1, \dots, X_m$; именно, минор, содержащий столбцы с номерами $i_1, \dots, i_n$, равен произведению $X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_n}$ на соответствующий минор матрицы $(a_{i,j})$. Все эти миноры будут обращаться в нуль в точке $[X_1, \dots, X_m]$ тогда и только тогда, когда не менее чем $m - n + 1$ чисел среди $X_1, \dots, X_m$ равны нулю; следовательно, пересечение Λ с детерминантальным многообразием M_{n-1} является объединением $(n-2)$-мерных координатных линейных подпространств в $\mathbb{P}^{m-1}$. Более того, в точке из $\Lambda \cap M_{n-1}$, у которой ровно $n-1$ координата не равна нулю (предположим для определенности, что $X_1 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \neq 0$), миноры вида $X_1 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \cdot X_j$ при $j = n, \dots, m$ имеют независимые дифференциалы, откуда следует, что пересечение $\Lambda \cap M_{n-1}$ является трансверсальным. Значит, степень детерминантального многообразия M_{n-1} равна

$$\deg(M_{n-1}) = \deg(\Lambda \cap M_{n-1}) = \binom{m}{n-1}.$$

Заметим, что это согласуется как с обсужденным в примере 19.5 и упражнении 19.7 случаем $n = 2$ (нормальный рациональный свиток), так и с тривиальным случаем $m = n$. В самом деле, если (в первом из этих случаев) объединить наше вычисление с теоремой 19.9, то получится, что если множество, на котором $(2 \times m)$-матрица из линейных форм имеет ранг 1, неприводимо и имеет ожидаемую коразмерность $m - 1$, то оно является нормальным рациональным свитком (пример 9.10).

Степень детерминантального многообразия M_k, лежащего в пространстве всех $(m \times n)$-матриц, может быть вычислена при всех значениях k, однако мне неизвестны способы сделать это так же просто, как в случае $k = n - 1$. Так или иначе, ответ (см. [F1, пример 14.4.14]) таков:

$$\deg(M_k) = \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{(m+i)! \cdot i!}{(k+i)! \cdot (m-k+i)!} = \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{\binom{m+i}{k}}{\binom{k+i}{k}}.$$

Пример 19.11. Степени многообразий, заметаемых линейными подпространствами

В нашем следующем примере на вычисление степени мы рассмотрим многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$, являющееся объединением линейных подпространств из однопараметрического семейства. Иными словами, выберем кривую $Z \subset \mathbb{G}(k, n)$ и положим

$$X = \bigcup_{\Lambda \in Z} \Lambda.$$

Предположим для начала, что подпространства Λ заметают X однократно, т. е. что общая точка $p \in X$ принадлежит единственному подпространству $\Lambda \in Z$. Отсюда, в частности, следует, что размерность X равна $k+1$ и тем самым степень X равна числу точек, лежащих в его пересечении с общим подпространством $\Gamma \cong \mathbb{P}^{n-k-1} \subset \mathbb{P}^n$. Так как всякая точка из $X \cap \Gamma$ принадлежит единственному подпространству $\Lambda \in Z$, степень X равна числу подпространств $\Lambda \in Z$, пересекающихся с Γ.

Вспомним теперь, что множество k-мерных подпространств $\Lambda \subset \mathbb{G}(k, n)$, пересекающихся с данным $(n-k-1)$-мерным подпространством $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$, является гиперплоским сечением $H_\Gamma \cap \mathbb{G}$ грассманиана $\mathbb{G} = \mathbb{G}(k, n)$, вложенного по Плюккеру. Можно, стало быть, ожидать, что число точек, лежащих в пересечении этого множества с кривой $Z \subset \mathbb{G}$, равно степени кривой Z при плюккеровом вложении. Однако же напрямую из сказанного выше это не следует, так как, несмотря на то, что подпространство Γ — общего положения, соответствующая ему гиперплоскость H_Γ не является общей (множество гиперплоскостей в $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} K^{n+1})$ является проективным пространством $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1}(K^{n+1})^*)$, в котором гиперплоскости вида H_Γ образуют подмножество, состоящее из разложимых векторов, то есть $G(n-k, n+1)$). Мы можем, тем не менее, использовать теорему Бертини в сильной форме (теорема 17.22): коль скоро группа $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ действует транзитивно и на $\mathbb{G}$, и на множестве гиперплоских сечений вида $H_\Gamma \cap \mathbb{G}$, можно заключить, что для общей Γ гиперплоскость H_Γ пересекает данную кривую Z трансверсально. Отсюда мы заключаем, что степень многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, заметаемого однопараметрическим семейством k-мерных подпространств $Z \subset \mathbb{G}(k, n)$, равна степени Z при плюккеровом вложении.

Упражнение 19.12. Изгоните из вышеприведенного рассуждения все ссылки на теорему Бертини, пользуясь описанием касательного пространства из примера 16.12: сначала покажите, что если точка $p \in X$ принадлежит единственному подпространству $\Lambda \in Z$, то подпространство Γ пересекает многообразие X в точке p трансверсально тогда и только тогда, когда гиперплоскость H_Γ пересекает трансверсально кривую Z в точке Λ, а потом выведите отсюда, что для общей Γ пересечение $H_\Gamma \cap Z$ трансверсально.

Одним из применений доказанного результата является другой способ вычисления степени нормального рационального свитка: непосредственно из уравнений можно убедиться, что $(k-1)$-мерные подпространства, образующие k-мерный нормальный рациональный свиток $X \subset \mathbb{P}^n$, соответствуют нормальной рациональной кривой $Z \subset \mathbb{G}(k-1, n)$ степени $n-k+1$, откуда следует, что степень X равна $n-k+1$.

Другим примером является вычисление степени поверхности касательных к нормальной рациональной кривой $C \subset \mathbb{P}^n$. Поскольку кривая C может быть задана параметрически как

$$t \mapsto v(t) = [1, t, t^2, \ldots, t^n],$$

гауссово отображение сопоставляет числу t точку $[v(t) \wedge v'(t)] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 K^{n+1})$, однородные координаты которой равны (2×2)-минорам матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \ldots & t^n \\ 0 & 1 & 2t & \ldots & nt^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Как легко видеть, эти миноры линейно порождают пространство всех многочленов от t степени не выше $2n-2$, так что образ гауссова отображения $\mathscr{G}_C$ является нормальной рациональной кривой степени $2n-2$ в $\mathbb{G}(1, n) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2 K^{n+1})$. Значит, степень касательной поверхности к нормальной рациональной кривой равна $2n-2$.

Упражнение 19.13. Найдите степень семейства $Z \subset \mathbb{G}(1, 5)$, состоящего из прямых, лежащих на трехмерном многообразии Сегре $X_{2,1} = \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^5$ и не лежащих ни на какой двумерной плоскости в X. Используя это вычисление, покажите, что степень многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, однократно заметаемого k-мерными подпространствами из многомерного семейства $Z \subset \mathbb{G}(k, n)$, не обязательно равна степени Z.

Пример 19.14. Степени некоторых грассманианов

При вычислении степеней (некоторых) грассманианов $\mathbb{G}(k, n) \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} K^{n+1})$ мы будем использовать следующий старомодный подход. Для начала заметим, что (см. предыдущий пример) среди всех гиперплоских сечений грассманиана $\mathbb{G}(k, n) \subset \mathbb{P}^N$ есть специальные сечения H_Γ, определяемые $(n-k-1)$-мерными подпространствами $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ следующим образом:

$$H_\Gamma = \{\Lambda \in \mathbb{G} \mid \Lambda \cap \Gamma \neq \varnothing\}.$$

Хотя они и не являются общими гиперплоскими сечениями $\mathbb{G}$, тем не менее из теоремы Бертини в сильной форме (теорема 17.22) следует, что для общего набора $(n-k-1)$-мерных подпространств $\{\Gamma_\alpha\}$ соответствующие гиперплоские сечения H_Γ будут пересекаться с грассманианом трансверсально. В частности, отсюда следует, что степень грассманиана $\mathbb{G}(k, n) \subset \mathbb{P}^N$ можно интерпретировать как число k-мерных подпространств в $\mathbb{P}^n$, пересекающихся с каждым из $(k+1)(n-k)$ общих $(n-k-1)$-мерных подпространств.

Заметим, что мы можем это проверить непосредственно в первом нетривиальном случае грассманиана $\mathbb{G}(1, 3)$ прямых в $\mathbb{P}^3$. Как мы уже видели, множество прямых, пересекающихся с каждой из трех попарно скрещивающихся прямых L_1, L_2, $L_3 \subset \mathbb{P}^3$, является одним из двух семейств прямолинейных образующих $\{M_\lambda\}$ на квадратичной поверхности Q. Четвертая общая прямая L_4 пересечет Q в двух различных точках p и q, через каждую из которых проходит единственная прямая из семейства $\{M_\lambda\}$. Они и являются прямыми, пересекающимися со всеми четырьмя данными прямыми L_i. Это лишь подтверждает то, что мы уже знаем: еще при первом знакомстве с грассманианами в лекции 6 мы заметили, что $\mathbb{G}(1, 3)$ является квадратичной гиперповерхностью в $\mathbb{P}^5$.

Другой способ доказательства того, что существует ровно две прямые, пересекающиеся с четырьмя данными прямыми L_i в $\mathbb{P}^3$, заключается в том, что можно специализировать эти прямые к некоторому «вырожденному» расположению. Предположим, например, что мы выбрали прямые так, что L_1 и L_2 пересекаются в точке p (и тем самым порождают плоскость $H \subset \mathbb{P}^3$), в то время как прямые L_3 и L_4 пересекаются в точке q и порождают плоскость K. Если $p \notin K$ и $q \notin H$, то, как несложно видеть, любая прямая, пересекающая все четыре прямые $L_1, \ldots, L_4$, является либо прямой $\overline{pq}$, либо пересечением $H \cap K$.

Это наблюдение само по себе ничего не доказывает, так как нам следовало выбирать прямые L_i общим образом. В данном случае, однако, можно непосредственно проверить, что гиперплоские сечения H_{L_i} пересекаются трансверсально. В самом деле, в примере 16.6 было показано, что в точке L, соответствующей прямой, пересекающейся с L_i в единственной точке p, касательное пространство к гиперплоскому сечению $H = H_{L_i}$ изоморфно пространству гомоморфизмов

$$T_L(H) = \{\varphi\colon L \to K^4/L \mid \varphi(p) \subset L + L_i\}.$$

Следовательно, в точке, скажем, соответствующей прямой $L = \overline{pq}$, имеем (поскольку $(L + L_1) \cap (L + L_2) = L$)

$$T_L(H_{L_1}) \cap T_L(H_{L_2}) = \{\varphi \mid \varphi(p) = 0\}$$

и аналогично

$$T_L(H_{L_3}) \cap T_L(H_{L_4}) = \{\varphi \mid \varphi(q) = 0\}.$$

Значит, пересечение всех четырех касательных пространств нулевое, и гиперплоские сечения пересекаются трансверсально. Аналогичные рассуждения применимы и к точке, соответствующей прямой $L = H \cap K$.

Упражнение 19.15. Пусть $L_1, \ldots, L_4$ — скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$, а L — прямая, пересекающаяся со всеми ними. Положим $p_i = L_i \cap L$, а плоскость $L + L_i$ обозначим через $H_i \subset \mathbb{P}^3$. Напомним, что, как мы видели в упражнении 16.9, гиперплоские сечения H_{L_i} пересекаются в точке L трансверсально тогда и только тогда, когда двойное отношение четырех точек $p_i \in L$ не равно двойному отношению четырех плоскостей $H_i \in \mathbb{P}(K^4/L)$. Проверьте это непосредственно, используя явное описание прямых, пересекающихся с тремя прямыми L_1, L_2 и L_3. Примените этот результат к предыдущему примеру (имейте в виду, что если никакие три из четырех точек на прямой не совпадают, то их двойное отношение все еще определено, если мы разрешаем ему принимать значение ∞).

Как же вычислять степени других грассманианов? В общем случае намного менее понятно, как использовать указанную выше интерпретацию степени $\deg(\mathbb{G})$, так как трудно напрямую определить число k-мерных подпространств, пересекающихся с $(k+1)(n-k)$ общими $(n-k-1)$-мерными подпространствами. Однако мы можем рассматривать специальные положения этих подпространств подобно тому, как мы это делали в случае $\mathbb{G}(1, 3)$. Рассмотрим, например, грассманиан $\mathbb{G}(1, 4)$ прямых в $\mathbb{P}^4$. Нам надо узнать, сколько прямых в $\mathbb{P}^3$ пересекается со всеми шестью двумерными плоскостями $\Gamma_i \subset \mathbb{P}^4$. Чтобы ответить на этот вопрос, выберем плоскости Γ_i таким образом, чтобы каждая пара Γ_{2i-1}, Γ_{2i} пересекалась по прямой L_i и порождала трехмерное подпространство H_i. Любая прямая, пересекающая все шесть плоскостей, должна либо пересекаться с прямой L_i, либо содержаться в гиперплоскости H_i для каждого $i = 1, 2, 3$.

Теперь заметим, что единственной прямой, лежащей во всех трех гиперплоскостях H_i, является их пересечение, а также что существует лишь одна прямая, пересекающая L_i и L_j и лежащая в H_k (она проходит через точки $L_i \cap H_k$ и $L_j \cap H_k$). Наконец, ровно одна прямая пересекает все три L_i (она может быть получена как пересечение трехмерных подпространств $H_{ij} = \overline{L_i L_j}$), в то время как в общем случае нет ни одной прямой, пересекающей L_i и лежащей в H_j и H_k. Отсюда мы заключаем, что существует ровно пять прямых, пересекающих все Γ_i. Убедившись в трансверсальности пересечения H_{Γ_i}, можно утверждать, что

$$\deg(\mathbb{G}(1, 4)) = 5.$$

Упражнение 19.16. Используя описание касательных пространств из примера 16.6, проверьте, что гиперплоские сечения H_{Γ_i} действительно пересекаются трансверсально.

Описанные выше методы применимы в очень многих ситуациях: в XIX веке из рассмотрений такого рода специализаций выросла целая наука (иные, впрочем, сказали бы, что не наука, а искусство). В частности, на этом пути могут быть вычислены степени всех грассманианов. Мы не будем здесь этого делать, но приведем ответ: степень грассманиана $\mathbb{G}(k, n)$ равна

$$\deg(\mathbb{G}(k, n)) = ((k+1)(n-k))! \prod_{i=0}^{k} \frac{i!}{(n-k+i)!}.$$

Пример 19.17. Теорема Харнака

В качестве примера применения теоремы Безу в ее простейшей форме, касающейся пересечения плоских кривых, приведем доказательство классической теоремы Харнака о топологии вещественных плоских кривых.

Прежде всего сформулируем саму задачу. Пусть $F(Z_0, Z_1, Z_2)$ — такой однородный многочлен степени d с вещественными коэффициентами, что соответствующая плоская кривая $X \subset \mathbb{P}^2$ гладка. Рассмотрим множество его вещественных нулей в $\mathbb{RP}^2$ (будем использовать обозначение $\mathbb{RP}^2$, взятое из топологии, чтобы подчеркнуть, что речь идет о топологическом, а не алгебраическом многообразии). Оно является одномерным вещественным подмногообразием в $\mathbb{RP}^2$ и, стало быть, состоит из некоторого числа δ связных компонент, гомеоморфных S^1 (в классической терминологии они назывались *овалами*). Первый естественный вопрос, который при этом возникает, таков: сколько овалов может у кривой X?

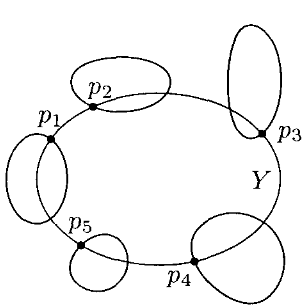
Перед тем как ответить на него, обратим внимание на то, что компоненты $X(\mathbb{R})$ неодинаковы. Так как первая группа гомологий $H_1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, имеется различие между гомологичными нулю («четными») и негомологичными нулю («нечетными») овалами. Различие состоит в том, что дополнение к четному овалу имеет две связные компоненты, одна из которой гомеоморфна диску (она называется *внутренностью* овала), а другая гомеоморфна листу Мёбиуса, в то время как дополнение к нечетному овалу просто гомеоморфно диску. Отсюда, в частности, следует, что любые два нечетных овала непременно пересекаются (петля, лежащая в дополнении к нечетному овалу, гомологична нулю в $\mathbb{RP}^2$), так что гладкая кривая может обладать не более чем одним нечетным овалом. Значит, если степень d кривой X четна, то у $X(\mathbb{R})$ могут быть только четные овалы, а если нечетна, то $X(\mathbb{R})$ обладает ровно одним нечетным овалом.

Учитывая вышесказанное, сформулируем основную теорему, касающуюся числа овалов у плоской кривой.

Теорема 19.18 (теорема Харнака). *Наибольшее возможное число овалов у гладкой плоской кривой степени d равно* $(d-1)(d-2)/2+1$.

Доказательство. Мы докажем теорему лишь в одну сторону: мы покажем, что гладкая плоская кривая X степени d не может иметь более чем $(d-1)(d-2)/2+1$ овалов. Даже и эта часть доказательства будет у нас неполной: мы воспользуемся без доказательства тем фактом, что плоская кривая Y, заданная уравнением с вещественными коэффициентами и содержащая точку p, лежащую на некотором четном овале кривой X, должна либо пересекать этот овал по крайней мере еще раз, либо касаться его, либо быть особой в точке p. Это совершенно очевидно из топологических соображений в том случае, когда кривая Y гладка, но менее очевидно в особом случае (например, если Y имеет особые точки во внутренности овала). Легко проверить наше утверждение и в том случае, когда все овалы лежат в некотором аффинном открытом подмножестве $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$: надо рассмотреть $Y(\mathbb{R})$ как множество нулей вещественного многочлена $f(x,\, y)$ на $\mathbb{R}^2$ и вывести, что f должен иметь, с учетом кратностей, четное число нулей на овале. Это рассуждение можно приспособить и для общего случая, но вдаваться в подробности мы не будем.

Так или иначе, для того, чтобы воспользоваться этим наблюдением, предположим, что $X(\mathbb{R})$ имеет $m=(d-1)(d-2)/2+2$ овалов $U_1, \ldots, U_m$, среди которых $U_1, \ldots, U_{m-1}$ можно считать четными. Отметим точки $p_1, \ldots, p_{m-1}$ так, что $p_i \in U_i$, и выберем точки $q_1, \ldots, q_{d-3}$ на овале U_m. Вспомним теперь, что однородные многочлены степени $d-2$ на $\mathbb{P}^2$ образуют векторное пространство размерности $d(d-1)/2$. Так как

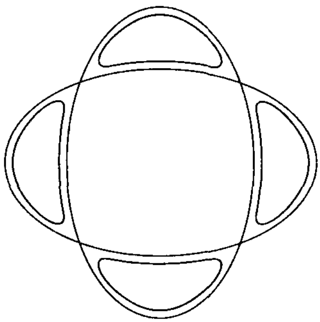


$$d(d-1)/2 > m+d-4,$$

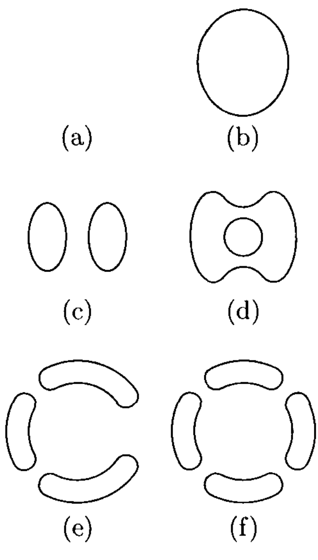
можно найти ненулевой многочлен G степени $d-2$ на $\mathbb{P}^2$, обращающийся в нуль в точках $p_1, \ldots, p_{m-1}$ и $q_1, \ldots, q_{d-3}$, или, что равносильно, плоскую кривую Y степени $d-2$, содержащую все эти точки. Из нашего наблюдения следует, что Y должна пересекать каждый из овалов $U_1, \ldots, U_{m-1}$ по крайней мере двукратно, и при этом, разумеется, кривая пересекает овал U_m по крайней мере в $d-3$ точках. Значит, кривая Y пересскается с X по крайней мере в

$$2(m-1)+d-3=(d-1)(d-2)+2+d-3=d(d-2)+1$$

точках, что противоречит тереме Безу. □



На самом деле можно явно построить гладкую плоскую кривую любой степени, имеющую максимально возможное число овалов. Обычно для этого берут приводимую кривую и слегка ее деформируют. Например, если $f(z_1, z_2)$ и $g(z_1, z_2)$ — квадратичные многочлены, множеством нулей которых являются коники, пересекающиеся по четырем точкам, то кривые X, задаваемые уравнениями вида $f \cdot g + \varepsilon$, при достаточно малых значениях ε будут квартиками, имеющими четыре максимально возможных овала. Конструкция таких «максимальных» кривых в общем случае довольно запутана, и мы не будем ее здесь рассматривать. Познакомиться с ней можно, например, по книге [C].



Разумеется, после того, как мы разрешили вопрос о числе связных компонент множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$ плоской кривой X, возникает много других задач. Например, самый естественный из дальнейших вопросов состоит в том, каков может быть изотопический класс вложения $X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{RP}^2$. Это, в свою очередь, сводится к вопросу о вложенности овалов друг в друга. Будем говорить, что один четный овал *вложен* в другой четный овал, если первый лежит во внутренности второго; тогда возникает вопрос о том, каковы возможные расположения овалов вещественной плоской кривой с этой точки зрения. Рассмотрим, например, первый нетривиальный случай: плоскую квартику. Заметим для начала, что если один ее овал лежит внутри другого, то она не может больше иметь ни одного овала, так как иначе прямая, соединяющая произвольную точку внутреннего овала с любой точкой третьего, будет пересекать нашу кривую по крайней мере в пяти точках (с учетом кратностей). Таким образом, если у квартики три или четыре овала, то они не вложены друг в друга. С другой стороны, если овала только два, то они могут как быть, так и не быть вложены. Это легко увидеть из нашей конструкции (надо взять два произвольно расположенных непересекающихся эллипса, вложенных друг в друга или нет, и продеформировать соответствующее уравнение так, как это делалось выше). Однако в общем случае вопрос о возможных конфигурациях овалов далек от полного решения. Обзор последних результатов на эту тему можно найти в [W].

Помимо рассмотрения вложенности овалов, можно поставить, например, вопрос об их выпуклости. Если, скажем, квартика обладает двумя вложенными овалами, то либо они оба выпуклые, либо внутренний выпуклый, а внешний нет (ясно, что если внутренний овал невыпуклый, то можно провести прямую, пересекающую его в четырех точках и, следовательно, пересекающую исходную кривую в шести точках). С другой стороны, менее очевидно (но верно), что если квартика имеет два не вложенных друг в друга овала, то они оба выпуклы.

Упражнение 19.19. Покажите, что вещественная гладкая квинтика может иметь любое число овалов от одного до семи, и найдите все их возможные расположения (с точки зрения вложенности).

Лекция 20

ОСОБЫЕ ТОЧКИ И КАСАТЕЛЬНЫЕ КОНУСЫ

Касательные конусы

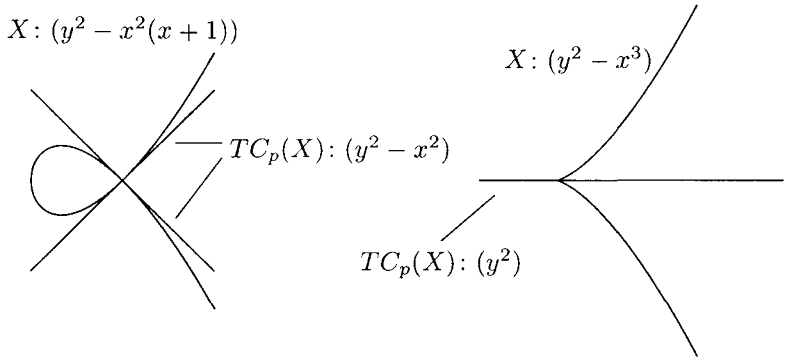
Касательное пространство Зарисского к многообразию $X \subset \mathbb{A}^n$ в точке p описывается с помощью линейных частей регулярных на $\mathbb{A}^n$ функций, обращающихся в нуль на X. Однако же, если точка p особа, оно дает не слишком точную картину локальной геометрии X: если, например, $X \subset \mathbb{A}^2$ — плоская кривая, то касательное пространство Зарисского в любой ее особой точке p совпадает со всем $T_p(\mathbb{A}^2) = K^2$. В этой лекции мы опишем *касательный конус*, объект, который хоть и не дает полного описания локальной структуры многообразия, но является, по крайней мере, некоторым уточнением понятия касательного пространства.

Определение касательного конуса достаточно просто. В определении касательного пространства к многообразию $X \subset \mathbb{A}^n$ в точке p мы брали все функции $f \in I(X)$, разлагали их в ряд в точке p и рассматривали их линейные части; $T_p(X)$ определялось как множество нулей этих однородных линейных форм. Отличие в определении касательного конуса $TC_p(X)$ в следующем: мы берем все $f \in I(X)$, разлагаем их в ряд в p и смотрим не на линейные части, а на *начальные формы* функций f (т. е. на однородные члены наименьшей степени), какова бы ни была степень этих форм. Затем мы определяем касательный конус $TC_p(X)$ как подмногообразие в $\mathbb{A}^n$, задаваемое этими начальными формами. В нашем определении касательный конус является подмногообразием объемлющего пространства $\mathbb{A}^n$, но ввиду того, что линейные формы, определяющие $T_p(X)$, находятся среди начальных форм функций $f \in I(X)$, он оказывается подмногообразием касательного пространства Зарисского $T_p(X)$, вложенного в касательное пространство $T_p(\mathbb{A}^n) = \mathbb{A}^n$.

В простейшем случае, когда $X \subset \mathbb{A}^n$ — гиперповерхность, заданная одним многочленом $f(x_1, \ldots, x_n)$, и $p = (0, \ldots, 0)$, мы пишем

$$f(x) = f_m(x) + f_{m+1}(x) + \ldots,$$

где $f_k(x)$ — однородный многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ степени k; касательным конусом будет конус степени m, заданный однородным многочленом f_m. Так, например, касательным конусом $TC_p(X)$ к плоской кривой $X \subset \mathbb{A}^2$, имеющей нод в точке p, является объединение двух касательных к ее ветвям в p, тогда как касательным конусом к кривой с каспом является двойная прямая.



(Заметим, что линейная часть суммы двух рядов является суммой их линейных частей, так что в определении касательного пространства Зарисского к многообразию $X \subset \mathbb{A}^n$ мы могли рассматривать линейные части только у образующих идеала $I(X)$. Начальная форма суммы, напротив, не всегда лежит в идеале, порожденном начальными формами слагаемых; в общем случае для описания касательного конуса нам понадобится рассмотрение начальных форм всех $f \in I(X)$.)

Дав первоначальное определение касательного пространства Зарисского к вложенному многообразию $X \subset \mathbb{A}^n$, мы описали его и в терминах внутренней геометрии X, а именно, в терминах кольца регулярных функций; аналогично мы можем поступить и в случае касательного конуса. Именно, пусть $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,p}$ — кольцо ростков регулярных функций на X в точке p, и пусть $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}$ — максимальный идеал в этом локальном кольце. Кольцо $\mathcal{O}$ имеет фильтрацию степенями идеала $\mathfrak{m}$:

$$\mathcal{O} \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \mathfrak{m}^3 \supset \ldots;$$

мы определяем кольцо B как ассоциированное градуированное кольцо, а именно,

$$B = \bigoplus_{\alpha=0}^{\infty} \mathfrak{m}^\alpha/\mathfrak{m}^{\alpha+1}.$$

Это кольцо по определению порождается своей первой градуированной компонентой

$$B_1 = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,$$

так что B является факторкольцом A/I симметрической алгебры

$$A = \bigoplus_{\alpha=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^{\alpha}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \bigoplus_{\alpha=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^{\alpha}((T_pX)^*).$$

Кольцо A является не чем иным, как кольцом регулярных функций на касательном пространстве Зарисского $T_p(X) = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$; мы можем определить касательный конус $TC_p(X)$ как подмногообразие в $T_p(X)$, соответствующее этому факторкольцу, т. е. как множество общих нулей многочленов $g \in I \subset A$.

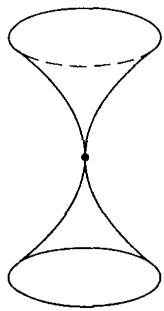
Упражнение 20.1. Покажите, что эти два определения касательного конуса согласуются между собой.

Заметим, что в обоих определениях многочлены, высекающие касательный конус к X в p, — будь то начальные формы функций $f \in I(X)$ в точке p или элементы ядра гомоморфизма колец $A \to B$ — не обязаны порождать идеал подмногообразия $TC_p(X) \subset T_p(X)$. Иными словами, касательный конус является нам не только в качестве подмногообразия в $T_p(X)$, но и как однородный идеал в кольце многочленов на $T_p(X)$, который содержит больше информации, чем множество его нулей. Хотя наше определение и игнорирует эту дополнительную структуру, в дальнейшем мы увидим, что она важна, например, для определения кратности особенности. (Чтобы читатель лишний раз укрепился в сознании важности теории схем, отметим, что наши слова означают, что касательный конус обладает естественной структурой подсхемы в $T_p(X)$.)

Различные конструкции, предложенные ранее для касательного пространства Зарисского, годятся и для касательных конусов. Как и в случае касательных пространств, если $X \subset \mathbb{P}^n$ является проективным многообразием, то можно выбрать дополнение $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ к гиперплоскости, не проходящей через p, и взять замыкание в $\mathbb{P}^n$ аффинного касательного конуса $TC_p(X \cap \mathbb{A}^n)$ (рассматриваемого как подмногообразие в $\mathbb{A}^n$). Допуская вольность речи, мы будем называть это проективное многообразие *проективным касательным конусом* к X в точке p; по аналогии с соответствующей конструкцией проективного касательного пространства, обозначим его $\mathbb{T}C_p(X)$. Кроме того, так как касательный конус определяется однородными многочленами на $T_p(X)$, имеется ассоциированное с ним проективное многообразие $\mathbb{P}TC_p(X) \subset \mathbb{P}T_p(X)$, называемое *проективизированным касательным конусом.*

Мы можем также рассматривать касательный конус $\mathbb{T}C_p(X) \subset \mathbb{P}^n$ как объединение касательных прямых к X в точке p в первом смысле примера 15.7, а проективизированный касательный конус — как множество таких прямых; это будет установлено в упражнении 20.4.

Самое важное свойство касательного конуса заключается в том, что его размерность всегда равна локальной размерности X в p. Это следует из стандартной коммутативной алгебры (см. [AM], [E]), в терминах которой координатное кольцо касательного конуса является ассоциированным градуированным кольцом локального кольца X в p, фильтрованного степенями максимального идеала. Этот факт может показаться менее очевидным с наивной геометрической точки зрения (позже мы дадим более геометрическое доказательство). Бесспорно, это не всегда согласуется с вещественной картиной: например, ограничившись взглядом на рисунок, тяжело увидеть касательный конус к поверхности $z^2 + x^2 = y^4$, вещественная часть которой получается вращением параболы $y^2 - x = 0$ вокруг касательной прямой $x = 0$ в точке $(0, 0)$, хотя, глядя на уравнение, достаточно просто понять, что он из себя представляет.



Существует множество геометрических интерпретаций касательного конуса и особенно проективизированного касательного конуса. Возможно, главная из них связана с понятием раздутия многообразия, введенным в лекции 7; сейчас мы ее обсудим.

Для начала вспомним определение раздутия $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в начале координат: это график проекции $\mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$, задающийся уравнениями

$$\widetilde{\mathbb{A}}^n = \{((z_1, \ldots, z_n), [W_1, \ldots, W_n]) \mid z_i W_j = z_j W_i \quad \forall i, j\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

В этом контексте мы представляем себе $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ в первую очередь в терминах отображения проекции $\pi\colon \widetilde{\mathbb{A}}^n \to \mathbb{A}^n$, которое взаимно однозначно всюду, кроме начала координат $\mathbb{A}^n$, слоем над которым является все $\mathbb{P}^{n-1}$ (заметим, что этот слой естественным образом отождествляется с проективным пространством прямых, проходящих через начало координат, которое может быть отождествлено с проективным пространством, ассоциированным с касательным пространством $T_0(\mathbb{A}^n)$). Этот слой $E = \pi^{-1}(0)$ называется *исключительным дивизором* раздутия.

Теперь для любого подмногообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ мы определяем собственный прообраз X в $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ как замыкание в $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ прообраза $X \cap (\mathbb{A}^n \setminus \{0\})$, или, что то же самое, как замыкание множества $\pi^{-1}(X) \cap U$, где U является дополнением к исключительному дивизору в $\widetilde{\mathbb{A}}^n$. На самом деле собственный прообраз изоморфен раздутию многообразия в начале координат, определявшемуся в лекции 7; если мы думаем о раздутии как о графике проекции π из 0, то речь идет просто о графике проекции $\pi|_X$.

Мы можем записать уравнения собственного прообраза многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в $\widetilde{\mathbb{A}}^n$, если мы знаем их для самого X. Для начала рассмотрим $U_i \subset \widetilde{\mathbb{A}}^n$ — открытое множество, заданное условием $(W_i \neq 0)$; в терминах аффинных координат $w_j = W_j/W_i$ можно написать

$$U_i = \{((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n)) \mid z_j = z_i w_j \quad \forall j \neq i\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n-1}.$$

Из этого описания видно, что $U_i \cong \mathbb{A}^n$ с координатами z_i и $w_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots$ $\ldots, w_n$; отображение $\pi \colon U_i \to \mathbb{A}^n$ имеет вид

$$(z_i, w_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n) \mapsto (z_i w_1, \ldots, z_i w_{i-1}, z_i, z_i w_{i+1}, \ldots, z_i w_n).$$

Заметим, что часть исключительного дивизора $E_i = E \cap U_i$ задается в U_i как координатная гиперплоскость $z_i = 0$, т. е. при ограничении на E открытое покрытие $\{U_i\}$ многообразия $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ дает стандартное открытое покрытие $\mathbb{P}^{n-1}$ аффинными пространствами $\mathbb{A}^{n-1}$ с аффинными координатами $\{w_j\}_{j \neq i}$ на E_i.

Пусть теперь $f \in I(X)$ — произвольный многочлен, обращающийся в нуль на X. Напишем разложение f в сумму однородных частей

$$f = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + \ldots,$$

где $f_m \neq 0$. Когда мы поднимаем f на $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ и ограничиваем на U_i, мы видим, что слагаемое $\pi^*(f_k)|_{U_i}$ делится на z_i ровно k раз; значит, обратный образ $\pi^*(f)|_{U_i}$ делится на z_i ровно m раз, и мы можем написать

$$\pi^*(f)|_{U_i} = z_i^m \cdot \tilde{f},$$

где $\tilde{f}$ не зануляется тождественно на E_i; назовем $\tilde{f}$ собственным прообразом f.

Отсюда видно, что часть $\widetilde{X} \cap U_i$ собственного прообраза $\widetilde{X}$ многообразия X содержится во множестве общих нулей собственных прообразов многочленов $f \in I(X)$. Чтобы увидеть обратное включение, рассмотрим произвольную точку $p \in E_i$, не лежащую на $\widetilde{X} \cap U_i$. Мы можем найти гиперповерхность в U_i, содержащую $\widetilde{X}$, но не содержащую p; беря определяющее уравнение этой гиперповерхности и умножая его на достаточно высокую степень z_i, мы получаем многочлен $f \in I(X)$, полный прообраз которого тождественно обращается в нуль на $\widetilde{X} \cap U_i$, но не в точке p.

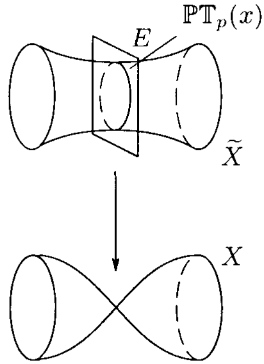
Теперь ограничим все на E. Так как $\pi^*(f_k)|_{U_i}$ делится на z_i по крайней мере $m + 1$ раз, если $k > m$, мы видим, что

$$\tilde{f}|_{E_i} = (\pi^*(f_m)/z_i^m)|_{E_i};$$

стало быть, множество нулей ограничения $\tilde{f}$ на E_i является просто пересечением E_i с множеством нулей начальной формы f_m многочлена f, который рассматривается как однородный многочлен на $E = \mathbb{P}^{n-1}$.

В результате мы видим, что проективизированный касательный конус $\mathbb{P}TC_p(X)$ к X в точке p является просто пересечением $\widetilde{X} \cap E$ полного прообраза X с исключительным дивизором — или, равносильным образом, исключительным дивизором раздутия X в точке p.

Одним из непосредственных следствий этого описания проективизированного касательного конуса является то наблюдение, что он действительно имеет на единицу меньшую размерность, чем X: с одной стороны, так как он лежит в замыкании $\widetilde{X} \setminus (\widetilde{X} \cap E)$, его размерность должна быть строго меньше размерности X, а с другой, так как E локально задается одним уравнением, она может быть меньше размерности X не более чем на единицу. Отсюда следует, что касательный конус, как и было отмечено, имеет ту же размерность, что и X. Кроме того, из этого вырастают другие интерпретации касательного конуса, которые мы сейчас обсудим.



Самая непосредственная из них проистекает (по крайней мере, для многообразий над комплексным полем) из описания касательного конуса к произвольной голоморфной дуге, данного в примерах 17.1 и 17.5. Именно, вспомним (пример 17.5), что если у нас есть произвольная дуга $\gamma\colon \Delta \to X \subset \mathbb{P}^n$, то соответствующее гауссово отображение $\mathscr{G}$, сопоставляющее точке $t \in \Delta$ касательную прямую к дуге в t, которое a priori определено только на гладких точках дуги, на самом деле однозначно продолжается на все Δ. В явном виде, если γ локально записывается как

$$\gamma\colon t \mapsto [v(t)] = [v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \ldots],$$

где $v(0) \neq 0$, то $\mathscr{G}$ может быть продолжено в точку $t = 0$ определением $\mathscr{G}(0)$ как прямой, соединяющей концы вектора v_0 и первого вектора-коэффициента v_k, линейно независимого с v_0. Эта прямая будет называться касательной прямой к γ в точке $\gamma(0)$. Эквивалентно, если мы выберем локальные евклидовы координаты $z_1, \ldots, z_n$ на аффинном открытом подмножестве $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ таким образом, что $v(0) = v_0 = (0, \ldots, 0)$, и запишем

$$\gamma\colon t \mapsto u_1 t + u_2 t^2 + \ldots,$$

то касательная прямая к γ в $t = 0$ — это просто прямая, проходящая через начало координат $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^n$ в направлении первого ненулевого вектора-коэффициента u_k.

Предположим теперь, что дуга $\gamma\colon \Delta \to \mathbb{P}^n$ лежит в многообразии X и что $f(z_1, \ldots, z_n)$ — произвольный многочлен, обращающийся в нуль на X. Запишем f в виде

$$f = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + \ldots,$$

а дугу γ как

$$\gamma\colon t \mapsto u_k t^k + u_{k+1} t^{k+1} + \ldots$$

Из того, что $f(\gamma(t)) \equiv 0$, следует, что начальная форма многочлена f должна обращаться в нуль на первом ненулевом векторе-коэффициенте u_k; другими словами, касательная прямая к дуге γ в точке $p = \gamma(0)$ лежит в касательном конусе к X в p. Таким образом, мы установили половину следующего утверждения.

Предложение 20.2. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — многообразие и $p \in X$ — точка на нем. Тогда проективизированный касательный конус $\mathbb{P}TC_p(X)$, рассматриваемый как множество прямых, проходящих через p, является множеством касательных прямых в точке p к дугам, лежащим на X, а проективный касательный конус $\mathbb{T}C_p(X)$ является объединением этих касательных прямых.*

Упражнение 20.3. Докажите вторую половину предложения 20.2, показав, что для любой точки p из $\widetilde{X} \cap E$ образ на многообразии X дуги $\gamma\colon \Delta \to \widetilde{X}$, для которой $\gamma(0) = p$, будет иметь касательную прямую, соответствующую точке p.

Чтобы выразить предложение 20.2 другим способом, вспомним из примера 15.17, что одним из способов определить касательную к многообразию X в (возможно, особой) точке p является ее определение как предельного положения секущих $\overline{pq}$ при стремлении $q \in X$ к p — т. е. как образа $\{p\}$ при рациональном отображении $X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n)$, переводящем q в $\overline{pq}$. Из предложения 20.2 вытекает следующее утверждение.

Упражнение 20.4. Пусть $p \in X \subset \mathbb{P}^n$, как и выше; покажите, что проективизированный касательный конус является множеством предельных положений прямых $\overline{pq}$ при стремлении $q \in X$ к p.

Пример 20.5. Касательные конусы к детерминантальным многообразиям

Сейчас мы опишем касательные конусы к детерминантальным многообразиям M_k матриц $m \times n$, ранг которых не превосходит k, в том же духе, как мы обсуждали касательные пространства к этим многообразиям в примере 14.15. Начнем с выбора точки A, соответствующей матрице ранга l, т. е. $A \in M_l \setminus M_{l-1}$. Мы можем выбрать базисы в K^m

и K^n так, чтобы матрица A имела вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

а затем, в ее аффинной окрестности U, заданной условием $(X_{11} \neq 0)$, мы можем взять в качестве аффинных координат функции $x_{i,j} = X_{i,j}/X_{1,1}$; в этих терминах матрица A соответствует началу координат, а произвольный элемент из U можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \ldots\ldots\ldots & & & x_{1,m} \\ x_{2,1} & 1+x_{2,2} & x_{2,3} & \ldots\ldots\ldots & & & x_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{l,1} & \ldots\ldots & & 1+x_{l,l} & x_{l,l+1} & \ldots & x_{l,m} \\ x_{l+1,1} & \ldots\ldots & & x_{l+1,l} & x_{l+1,l+1} & \ldots & x_{l+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n,1} & \ldots\ldots\ldots & & & & & x_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Каковы начальные формы $(k+1) \times (k+1)$-миноров этой матрицы? Ответ таков: это — слагаемые из разложений миноров, содержащие произведение диагональных элементов левого верхнего $(l \times l)$-блока нашей матрицы; стало быть, эти начальные формы суть $(k+1-l)\times(k+1-l)$-миноры правого нижнего $(m-l) \times (n-l)$-блока матрицы. Следовательно, касательный конус к M_k в точке A содержится в пространстве матриц φ, правый нижний $(m-l) \times (n-l)$-блок которых имеет ранг не более $k-l$. С другой стороны, это пространство неприводимо и имеет нужную размерность, так что на самом деле касательный конус совпадает с ним.

Как и ранее для касательного пространства, мы можем дать инвариантное описание касательного конуса. Чтобы сделать это, заметим, что базисы $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ пространств K^m и K^n выбраны у нас так, что ядро A является в точности линейной оболочкой векторов $e_{l+1}, \ldots, e_m$, а образ A — линейной оболочкой векторов $f_1, \ldots, f_l$. Значит, правый нижний $(m-l) \times (n-l)$-блок матрицы φ представляет сквозное отображение

$$\varphi' \colon \operatorname{Ker}(A) \hookrightarrow K^m \xrightarrow{\varphi} K^n \to K^n/\operatorname{Im}(A).$$

Таким образом, имеем

$$\mathbb{T}_A(M_k) = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(K^m, K^n) \mid \operatorname{rank}(\varphi' \colon \operatorname{Ker}(A) \to \operatorname{Coker}(A)) \leqslant k-l\};$$

тем самым можно сказать, не привлекая координат, что касательный конус к M_k в точке A, соответствующей отображению $A\colon K^m \to K^n$ ранга l, является многообразием отображений $\varphi \in \operatorname{Hom}(K^m, K^n)$, для которых соответствующее отображение $\varphi' \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Ker}(A), \operatorname{Coker}(A))$ имеет ранг, не превосходящий $k - l$.

Упражнение 20.6. Пусть X и $Y \subset \mathbb{P}^n$ — произвольная пара многообразий, лежащих в скрещивающихся подпространствах в $\mathbb{P}^n$, и пусть $J = J(X, Y)$ — их соединение. Покажите, что касательный конус к J в точке $p \in X$ является соединением Y и проективного касательного конуса $\mathbb{T}C_p(X)$ к X в точке p. Что может произойти, если X и Y не пересекаются, но не лежат в скрещивающихся линейных пространствах (при этом, например, $\mathbb{T}C_p(X)$ может пересекать Y)? А если X и Y пересекаются?

Упражнение 20.7. Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубическая кривая и TC — ее многообразие касательных. Что из себя представляет касательный конус к TC в точке $p \in C$? Верно ли то же самое для произвольной пространственной кривой, если предположить, что точка p не лежит ни на какой касательной прямой к C, кроме $\mathbb{T}_pC$?

Кратность

Как уже было замечено, касательный конус к многообразию X в точке $p \in X$ можно рассматривать не только как многообразие $TC_p(X) \subset T_p(X)$, но и как многообразие вместе с однородным идеалом $I \subset \operatorname{Sym}^*(T_p(X)^*)$ в кольце многочленов на $T_p(X)$. По определению, касательный конус $TC_p(X) = V(I)$ является множеством общих нулей этого идеала, но I не обязан быть идеалом всех функций, обращающихся в нуль на $TC_p(X)$: в случаях каспа $y^2 - x^3$ или точки самокасания $y^2 - x^4$ касательный конус является касательной прямой $y = 0$, но идеал, ассоциированный с ним, является идеалом (y^2). Для последующего нам нужно будет использовать эту дополнительную информацию.

В частности, нам нужно вспомнить об идеале для того, чтобы определить *кратность* особой точки в общем случае. Кратность легко определить в случае гиперповерхности $X \subset \mathbb{A}^n$, т. е. множества нулей одного многочлена $f(z_1, \ldots, z_n)$: кратностью X в p является просто порядок нуля f в p. Таким образом, если мы запишем

$$f = f_m + f_{m+1} + \ldots,$$

где многочлен f_α однороден степени α и $f_m \neq 0$, то кратность X в начале координат будет равна m.

Как обобщить это на произвольное многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$? Пример гиперповерхностей подсказывает ответ: кратностью надо называть степень касательного конуса. Проблема состоит в том, что кратность m гиперповерхности не обязательно равна степени ее касательного конуса, если многочлен f_m содержит кратные множители, как это происходит, например, в случаях каспа и точки самокасания.

Решением является определение кратности в терминах идеала $I \subset \subset \mathrm{Sym}^*((T_p(X))^*)$, а не касательного конуса. Другими словами, вспоминая определение степени через многочлен Гильберта, мы определяем кратность точки p на k-мерном многообразии $X \subset \mathbb{A}^n$ как умноженный на $(k-1)!$ старший коэффициент многочлена Гильберта кольца $\mathrm{Sym}^*(T_p(X)^*)/I$, где I — идеал, порожденный начальными формами разложений в точке p многочленов, обращающихся в нуль на X.

(Как было сказано выше, это определение является аргументом в пользу введения схем: на языке схем мы просто определяем касательный конус $\mathbb{T}_p(X)$ многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в точке p как *подсхему* в $T_p(X)$, определенную этим идеалом, а кратность X в p — как степень этой подсхемы.)

Упражнение 20.8. Пусть $M_k \subset M$ — многообразие матриц ранга, не превосходящего k, в пространстве M всех $(m \times n)$-матриц, и пусть $A \in M_k$ — точка, соответствующая матрице ранга l. Какова кратность M_k в A?

Другой способ описания кратности точки p на k-мерном многообразии X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ аналогичен определению степени многообразия через его фундаментальный класс. Предположим, что X вложено в аффинное пространство $\mathbb{A}^n$, и пусть $\widetilde{X}$ — раздутие X в точке p, естественным образом являющееся подмногообразием раздутия $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ пространства $\mathbb{A}^n$. Раздутие $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ вложено в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ в качестве графика отображения проекции $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$, а проекция $\pi_2\colon \widetilde{\mathbb{A}}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$ является, таким образом, топологическим расслоением со слоем $\mathbb{A}^1 \cong \mathbb{C}$. Отсюда следует, что для когомологий с компактными носителями имеется изоморфизм

$$H_c^m(\widetilde{\mathbb{A}}^n, \mathbb{Z}) \cong H_c^{m-2}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}).$$

Далее, $\widetilde{X}$, будучи замкнутым подмногообразием в $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ вещественной размерности $2k$, определяет линейную форму η_X на $H_c^{2k}(\widetilde{\mathbb{A}}^n, \mathbb{Z})$; мы можем записать

$$\eta_X = m \cdot \varphi,$$

где φ — образующая группы $H_c^{2k}(\widetilde{\mathbb{A}}^n, \mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}$ и $m \geqslant 0$. Целое число m и является кратностью X в p.

(Для тех, кто знаком с соответствующим языком: η_X является просто фундаментальным классом $\widetilde{X}$ в гомологиях Бореля—Мура многообразия $\widetilde{\mathbb{A}}^n$. Эта теория гомологий является двойственной к теории когомологий с компактными носителями; в ней цепи должны быть локально конечными, но не обязательно конечными линейными комбинациями симплексов; см. [BM].)

Предположим теперь, что X — проективное многообразие размерности k и степени d, $p \in X$ — точка кратности m, $\widetilde{X}$ — раздутие X в p, а $\widetilde{\mathbb{P}}^n$ — раздутие $\mathbb{P}^n$ в p. Из предыдущего следует, что фундаментальный класс имеет вид

$$[\widetilde{X}] = d \cdot [\Lambda] - m \cdot [\Gamma],$$

где $\Lambda \cong \mathbb{P}^k$ — k-плоскость в $\mathbb{P}^n$, не проходящая через p, а Γ — k-плоскость, содержащаяся в исключительном дивизоре $E \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \widetilde{\mathbb{P}}^n$ раздутия. Из этого следует другая характеризация кратности точки $p \in X$: если предположить, что отображение проекции $\pi_p\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ бирационально на свой образ $\overline{X} \subset \mathbb{P}^{n-1}$, то степень $\overline{X}$ равна степени X минус кратность X в p. Более общим образом, если $\widetilde{X}$ — раздутие X в p, то отображение $\pi_p\colon \widetilde{X} \to \mathbb{P}^{n-1}$ регулярно и кратность X в p равна разности степени X и проективной степени π_p (см. пример 19.4).

Упражнение 20.9. Используя гомологическое определение кратности, докажите это утверждение.

Упражнение 20.10. Пусть X и $Y \subset \mathbb{P}^n$ — многообразия, а $\overline{X}$ и $\overline{Y} \subset \subset \mathbb{A}^{n+1}$ — конусы над ними. Покажите, что $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ изоморфны тогда и только тогда, когда X и Y проективно эквивалентны.

Упражнение 20.11. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность, $p \in X$ — гладкая точка X, и пусть через

$$II_p\colon N_p(X)^* \to \mathrm{Sym}^2(T_p^*(X))$$

обозначена вторая фундаментальная форма, описанная в примере 17.11. Покажите, что пересечение $Y = X \cap \mathbb{T}_p(X)$ гиперповерхности X и ее касательной гиперплоскости имеет в p особую точку кратности 2 тогда и только тогда, когда $II_p \neq 0$, и что в этом случае касательный конус Y в p задается образом II_p.

Упражнение 20.12. Вспомним ситуацию из упражнения 20.6: нами рассматривалась произвольная пара многообразий X и Y, лежащих в скрещивающихся подпространствах $\mathbb{P}^n$, и их соединение $J = J(X, Y)$. Покажите, что кратность соединения в точке $p \in X$ является не чем иным, как степенью Y, умноженной на кратность точки p на X. Как и в упражнении 20.6, выясните, что происходит в случае, когда X и Y не пересекаются, но не лежат в скрещивающихся линейных пространствах (так что, например, $\mathbb{T}C_p(X)$ может пересекать Y)? А если X и Y пересекаются?

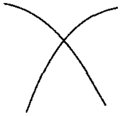
Упражнение 20.13. А теперь вернемся к упражнению 20.7. Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубическая кривая, а TC — ее многообразие касательных. Какова кратность TC в точке $p \in C$? Верно ли то же самое для произвольной пространственной кривой, если предположить, что точка p не лежит ни на какой касательной прямой к C, кроме $\mathbb{T}_pC$?

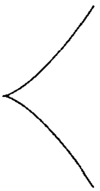
Примеры особенностей

В идеале хотелось бы иметь возможность классифицировать особые точки многообразий с точностью до разумного отношения эквивалентности. На этом пути можно вводить инварианты особенности; мы уже ввели касательное пространство Зарисского, касательный конус и кратность, и есть еще множество других. Можно также определять классы особенностей со специальными свойствами и изучать их; например, можно изучать нормальные особенности, горенштейновы особенности, коэн-маколеевы особенности, особенности локально полных пересечений и т. д. Поэтому выбор отношения эквивалентности между особенностями, используемого при их классификации, зависит от контекста: некоторые авторы изучали особенности с точностью до топологической эквивалентности, считая (в случае $K = \mathbb{C}$), что две особенности $p \in X$ и $p' \in X'$ эквивалентны, если, в аналитической топологии, в окрестностях точек p и p' существуют такие шары B и B', что тройки $(p, X \cap B, B)$ и $(p', X \cap B', B')$ гомеоморфны, в то время как другие смотрели на особенности с точностью до аналитической эквивалентности (говоря, что две особенности p и p' эквивалентны, если у них есть изоморфные в аналитической топологии окрестности; это равносильно тому, что пополнения локальных колец $\mathcal{O}_{X,p}$ и $\mathcal{O}_{X',p'}$ изоморфны).

При всем том проблема классификации всех особенностей алгебраических многообразий остается почти совершенно неисследованной. Это и не удивительно: например, коль скоро среди особенностей многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$ имеются вершины конусов над многообразиями $Y \subset \mathbb{P}^{n-1}$, мы никогда не получим классификацию ростков особенностей, пока в наших руках не будет, в качестве очень специального и относительно простого случая, классификации всех проективных многообразий. Не углубляясь в предмет, мы попробуем очень грубо описать его суть, обсуждая некоторые примеры в простейшем случае $\dim(X) = 1$ и $\dim T_p(X) = 2$. Используя в дальнейшем слово «эквивалентность», мы будем по умолчанию иметь в виду аналитическую эквивалентность в вышеописанном смысле.

Начнем с *нода*. Это особенность, аналитически эквивалентная началу координат на кривых $xy = 0$ или $y^2 - x^2 = 0$ в $\mathbb{A}^2$, т. е. трансверсальному пересечению двух гладких дуг. Эта особенность характеризуется тем, что она является двойной (т. е. кратности два) точкой, касательный конус в которой равен объединению двух различных прямых.





Каспом называется особенность, аналитически эквивалентная началу координат на кривой, задающейся уравнением $y^2 - x^3 = 0$ в $\mathbb{A}^2$. В отличие от нода, эта особенность является локально неприводимой в аналитической топологии (*топологически однолистной* в терминологии теории особенностей); это означает, что она не является объединением двух или более аналитических дуг.

Касп легко нарисовать на вещественной плоскости, но даже в случае такой относительно простой особенности этот рисунок не позволяет увидеть некоторые тонкости. Чтобы лучше понять геометрию каспа над $\mathbb{C}$, мы можем рассмотреть линк особенности, определяемый следующим образом. Пересечем произвольную кривую в $\mathbb{A}^2$, содержащую начало координат, с границей шара радиуса ε с центром в начале координат $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$. Имеем

$$\partial B_\varepsilon((0,\, 0)) = \{(x,\, y) \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\} \cong S^3,$$

и для малых вещественных значений ε эта сфера пересечет кривую по гладкому одномерному многообразию, т. е. по несвязному объединению кривых, гомеоморфных S^1, в S^3. Для малых значений ε изотопический класс этого подмногообразия в S^3 не зависит от ε и называется *линком*, ассоциированным с особенностью кривой в начале координат.

Чтобы увидеть, как выглядит линк каспидальной кривой $C \subset \mathbb{C}^2$, заметим, что абсолютные значения координат x и y любой точки $p \in C \cap \cap\, \partial B_\varepsilon$ равны c и $c^{3/2}$ соответственно, где c — единственное решение уравнения $c^2 + c^3 = \varepsilon^2$. Таким образом, мы можем написать:

$$X \cap \partial B_\varepsilon = \{(ce^{2i\theta},\, c^{3/2}e^{3i\theta})\} \subset \{(x,\, y) \mid |x| = c,\, |y| = c^{3/2}\} \cong \\ \cong S^1 \times S^1 \subset S^3.$$

Другими словами, линк каспа лежит на торе в сфере $\partial B_\varepsilon \cong S^3$, два раза обматываясь вокруг него в одном направлении и три — в другом. В частности, мы видим, что линк обычного каспа является трилистником.

Заметим, что линк гладкой точки является просто незаузленной окружностью $S^1 \subset S^3$; обратно, любая точка с таким линком является гладкой. Вообще, компоненты связности линка особой точки соответствуют ветвям кривой в p, причем индекс пересечения двух таких ветвей равен коэффициенту зацепления соответствующих узлов. В частности, заметим, что объединение двух незацепленных простых замкнутых кривых не может быть линком особенности алгебраической кривой.

Проведя аналогичные рассуждения, можно получить, что линк любой особенности вида $x^p + y^q = 0$, где p и q взаимно просты, является торическим узлом типа (p, q). Более общим образом, узел, ассоциированный с любой топологически однолистной особенностью плоской кривой, является так называемым *итерированным торическим узлом*; его можно получить, взяв тор, нарисовав на нем узел, взяв границу трубчатой окрестности этого узла, которая снова является тором, и повторив эту процедуру конечное число раз.

Упражнение 20.14. Опишите линк кривой $x^p - y^q = 0$ в начале координат в случае, когда p и q не являются взаимно простыми. Убедитесь (по крайней мере в случае $q|p$, но желательно и в общем случае), что это соответствует описанию коэффициентов зацепления компонент связности линка.

Точкой самокасания называется особенность, эквивалентная началу координат на кривой $y^2 - x^4 = 0$, т. е. объединению двух гладких дуг, имеющих касание порядка два. Аналогично, *точкой оскуляции* называется особенность, эквивалентная $y^2 - x^6 = 0$, т. е. состоящая из двух гладких ветвей с касанием порядка три, и так далее. Заметим, что ветви точки оскуляции не обязаны иметь касание третьего порядка со своей аффинной касательной прямой, как это происходит в приведенном примере; например, автоморфизм $\mathbb{A}^2$, заданный формулой $(x, y) \mapsto (x, y + x^2)$, разрушает это свойство. В частности, кривая не обязана иметь степень шесть или больше, чтобы иметь точку оскуляции; ее может иметь, например, неприводимая квартика на плоскости.

Упражнение 20.15. Найдите уравнение неприводимой квартики $C \subset \subset \mathbb{P}^2$, имеющей точку оскуляции $(*)$.

Надо сказать, однако, что в общем случае неизвестно, для каких значений d и n неприводимая плоская кривая степени d может иметь особенность, аналитически эквивалентную началу координат на $y^2 - x^{2n}$.

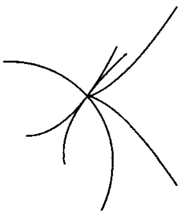
Рамфоидальным каспом называется особенность, эквивалентная началу координат на кривой $y^2 - x^5 = 0$. Так же, как и обыкновенный касп, она является топологически однолистной. В отличие от каспа она не разрешается одним раздутием: раздутие рамфоидального каспа является обыкновенным каспом. Как и в случае точки оскуляции, стандартная форма уравнения

может создать ложное впечатление; рамфоидальный касп не обязан иметь касание пятого порядка со своей касательной (кривая на рисунке является квартикой).

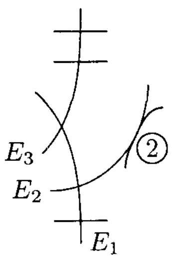
На самом деле мы уже перечислили все двойные точки кривых. Мы приводим следующую теорему (см. [BK]) без доказательства.

Теорема 20.16. *Всякая особая точка кратности два*[1] *на кривой C эквивалентна особенности вида $y^2 - x^n = 0$ для некоторого n.*

За двойными точками идут тройные точки, и так далее. Как и следовало ожидать, здесь ситуация усложняется. Одно из основных отличий состоит в том, что даже в простых случаях возникают семейства непрерывно варьирующихся особенностей. Например, обыкновенная m-кратная точка кривой C определяется как особенность, эквивалентная объединению m пересекающихся в одной точке прямых, т. е. как точка кратности m с касательным конусом, состоящим из m различных прямых. Имеется единственная тройная точка, но четверные точки образуют уже непрерывное семейство: особенности $xy(x-y)(x-\lambda y)$ и $xy(x-y)(x-\lambda' y)$ являются эквивалентными тогда и только тогда, когда таковыми являются проективизированные касательные конусы, рассматриваемые как подмножества проективизированного касательного пространства $\mathbb{P}^1$, то есть тогда и только тогда, когда $j(\lambda) = j(\lambda')$, где через j обозначен j-инвариант, введенный в лекции 10. Таким образом, для особых точек высших кратностей топология особенности не определяет ее класс эквивалентности.



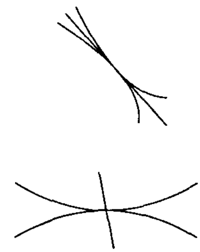
Надо заметить, что тот же эффект имеет место и для топологически однолистных особенностей: для больших значений p и q особенность $x^p - y^q = 0$ допускает деформации, которые тривиальны топологически, но не аналитически.



Тем не менее, мы можем по крайней мере точно определить топологический тип особенности, зная последовательность раздутий, необходимую для ее разрешения, а также количество ветвей, пересекающих каждый исключительный дивизор (вместе с кратностями пересечения). Например, такая особенность, как на рисунке, может быть разрешена последовательностью трех раздутий, результатом которой является несвязное объединение гладких дуг, как показано на рисунке; эта диаграмма определяет топологический тип особенности.

[1] С двумерным касательным пространством Зарисского. — *Прим. перев.*

В классической терминологии точка исключительного дивизора раздутия поверхности в точке p называлась «точкой, бесконечно близкой к p», так что, например, точка самокасания могла быть описана как нод с бесконечно близким нодом. Аналогично, две изображенные здесь особенности — особенность, состоящая из объединения трех дуг с попарным касанием порядка два (называемая тройной точкой самокасания), и объединение трех дуг, две из которых имеют касание порядка два, а третья пересекает их трансверсально, — на классическом языке были бы описаны как «тройная точка с бесконечно близкой тройной точкой» и «тройная точка с бесконечно близким узлом» соответственно.



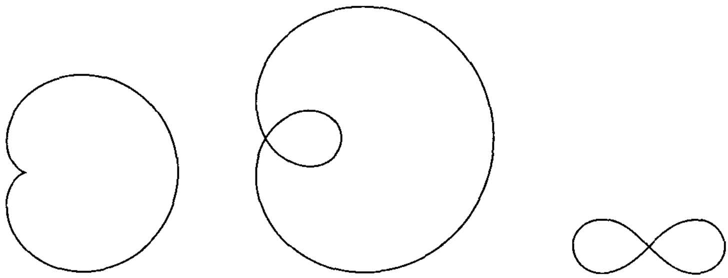
Упражнение 20.17. Покажите, что следующие плоские кривые алгебраичны, найдите их степени и опишите их особенности: (*)

(a) кардиоида, заданная в полярных координатах уравнением $r = 1 + \cos(\theta)$;

(b) улитка Паскаля, заданная уравнением $r = 1 + 2\cos(\theta)$;

(c) лемниската, заданная уравнением $r^2 = \cos(2\theta)$;

(d) четырехлепестковая роза $r = \cos(2\theta)$.



кардиоида улитка Паскаля лемниската

Разрешение особенностей кривых

В заключение этой лекции мы используем вычисление степени проекции для того, чтобы доказать существование разрешения особенностей для кривых (теорема 17.23). Именно, мы докажем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^N$ — произвольная неприводимая проективная кривая. Тогда существует гладкая проективная кривая $\widetilde{C}$, бирационально изоморфная C.*

Доказательство. Вспомним для начала, что проекция $\pi_\Lambda \colon C \to \overline{C} \subset \subset \mathbb{P}^2$ кривой C из общей $(N-3)$-плоскости $\Lambda \subset \mathbb{P}^N$ является бирациональным отображением, так что мы можем считать, что $C \subset \mathbb{P}^2$. Пусть степень C равна d. Выберем большое n и рассмотрим образ C при n-м отображении Веронезе. Размерность векторного пространства однородных многочленов степени n на $\mathbb{P}^2$ равна $\binom{n+2}{2} = (n+2)(n+1)/2$, а подпространство многочленов, обращающихся в нуль на кривой C, имеет размерность $\binom{n-d+2}{2} = (n-d+2)(n-d+1)/2$, так что размерность линейной оболочки образа C_0 кривой C равна

$$N = \dim(\overline{C_0}) = dn - d(d-3)/2,$$

а степень C_0 равна $D_0 = nd$. Пусть n выбрано настолько большим, что $N > D_0/2 + 1$.

Пусть теперь $p_0 \in C_0$ — произвольная особая точка, и пусть $C_1 = = \pi_{p_0}(C_0) \subset \mathbb{P}^{N-1}$ — проекция кривой C_0 из p_0 в гиперплоскость. Обозначим проективную степень отображения π_{p_0} через

$$D_1 \leqslant D_0 - 2 < 2N - 4.$$

Заметим, что кривая C_1 невырождена в $\mathbb{P}^{N-1}$ и D_1 строго меньше чем $2(N-1)$, так что из предложения 18.9 о минимальной степени невырожденных кривых мы видим, что отображение π_{p_0} должно быть бирациональным (и, в частности, $D_1 = \deg(C_1)$).

Теперь предположим, что C_1 имеет особую точку p_1. Тогда мы можем повторить наш процесс, проектируя из p_1. и получить бирациональное отображение из C_1 на кривую C_2, невырожденную в проективном пространстве размерности $N-2$ и имеющую степень $D_2 < 2N - 6$. Мы продолжаем делать это, получая последовательность кривых $C_i \subset \mathbb{P}^{N-i}$ степени $D_i < 2(N-i) - 2$, до тех пор, пока у C_i остаются особые точки. Но этот процесс должен оборваться, так как не существует невырожденной кривой степени 1 в $\mathbb{P}^2$. □

Упражнение 20.18. Покажите, что в предшествующих рассуждениях можно выбрать $n = d - 2$. Используйте это, чтобы показать, что плоская кривая степени d может иметь не более чем $(d-1)(d-2)/2$ особых точек.

Достойно упоминания то обстоятельство, что неизвестно максимально возможное число изолированных особых точек на поверхности степени d в $\mathbb{P}^3$.

Лекция 21

ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ И ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ

Пространства параметров

Теперь мы можем дать более подробное введение в пространства параметров, определенные нами в лекции 4 и время от времени обсуждавшиеся в дальнейшем. Тема эта весьма тонкая, и к тому же ее, бесспорно, лучше всего трактовать на языке теории схем, так что здесь мы в некотором смысле нарушим наш основной принцип иметь дело только с тем, что можно достаточно хорошо понять, оставаясь на элементарном уровне. Тем не менее, поскольку пространства параметров — одна из основных конструкций алгебраической геометрии и поскольку хотя бы сами конструкции на элементарном языке описать можно, мы предпримем это обсуждение. Одним из печальных последствий такого забегания вперед будет то, что процент недоказанных утверждений, и так не маленький в остальном тексте, достигнет в этой лекции совсем чудовищного уровня.

Имея все это в виду, давайте для начала скажем, что следует понимать под пространством параметров. Исходная ситуация состоит в том, что нам задан класс подмногообразий X_α в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ (например, множество всех многообразий заданной размерности и степени или подмножество этого множества, состоящее из многообразий с данным многочленом Гильберта). Тогда задача состоит в том, чтобы установить биекцию множества $\{X_\alpha\}$ с множеством точек некоторого алгебраического многообразия $\mathscr{H}$. Разумеется, не любая биекция нам подойдет; нужно выбрать соответствие, которое будет более или менее естественным в том смысле, что при непрерывной вариации точки X в $\mathscr{H}$ коэффициенты уравнений, задающих многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, также должны меняться непрерывно в любой топологии. Ясно, что первая задача состоит в том, чтобы уточнить это требование.

Один из способов сделать это проистекает из конструкции универсальной гиперповерхности: например, мы видели, что если сопоставить каждой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^n$ степени d точку $X \in \mathbb{P}^N$, то подмножество произведения

$$\{(X, p) \mid p \in X\} \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$$

будет подмногообразием. В общем случае мы можем принять аналогичное утверждение за определение пространства параметров: нашим первым условием для того, чтобы биекция между набором подмногообразий $\{X_\alpha \subset \mathbb{P}^n\}$ и точками алгебраического многообразия $\mathscr{H}$ была алгебраической параметризацией, будет то, что подмножество

$$\mathscr{X} = \{(X, p) \mid p \in X\} \subset \mathscr{H} \times \mathbb{P}^n$$

должно быть подмногообразием. Иными словами, если использовать понятие семейства многообразий, введенное в лекции 4, мы требуем, чтобы параметризованные многообразия образовывали семейство с базой $\mathscr{H}$. Заметим, что если это условие выполнено, то на аффинных открытых подмножествах $U \subset \mathscr{H}$ уравнения многообразия $\mathscr{X} \cap \pi^{-1}(U) \subset U \times \mathbb{P}^n$ будут однородными многочленами $F_i(Z_0, \ldots, Z_n)$, коэффициенты которых являются регулярными функциями на U.

Этого условия, однако, недостаточно для того, чтобы однозначно охарактеризовать $\mathscr{H}$: нужно кое-что еще. Чтобы сформулировать, что именно, заметим для начала, что если у нас есть замкнутое семейство $\mathscr{V} \subset B \times \mathbb{P}^n$, содержащееся в данном множестве $\{X_\alpha\}$, то определено отображение множеств

$$\varphi_{\mathscr{V}} : B \to \mathscr{H},$$

переводящее каждую точку $b \in B$ в точку на $\mathscr{H}$, соответствующую слою $V_b = \pi^{-1}(b)$ проекции $\pi : \mathscr{V} \to B$. Мы бы хотели потребовать, чтобы для всякого такого семейства с базой B соответствующее отображение $\varphi_{\mathscr{V}}$ было регулярным отображением многообразий.

К сожалению, при этом мы требуем слишком многого; если мы хотим, чтобы семейство $\mathscr{V}$ индуцировало регулярное отображение $B \to \mathscr{H}$, надо наложить определенные условия на семейство $\mathscr{V}$. Чтобы понять на простом примере, зачем тут нужны дополнительные условия, возьмем в качестве B каспидальную кубическую кривую $(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ и рассмотрим многообразие $\Gamma \subset B \times \mathbb{A}^1 \subset B \times \mathbb{P}^1$, являющееся графиком отображения $f : \mathbb{A}^1 \to B$, заданного по формуле $t \mapsto (t^2, t^3)$. Проекцию $\Gamma \to B$ можно рассматривать как семейство точек в $\mathbb{P}^1$; однако же индуцированное этим семейством отображение из B в пространство параметров точек на $\mathbb{P}^1$ (то есть в $\mathbb{P}^1$) есть f^{-1}, а это отображение не является регулярным.

Чтобы сформулировать условие, которое исключило бы такой эффект, рассмотрим для семейства $\pi : \mathscr{V} \subset B \times \mathbb{P}^n \to B$ произвольную точку $b \in B$ и произвольную точку $p \in V_b \subset \mathscr{V}$ в слое над b. Тогда π индуцирует отображение $\mathscr{O}_{B,b} \to \mathscr{O}_{\mathscr{V},p}$. Будем говорить, что *слой отображения π приведен в p*, если максимальный идеал $\mathfrak{m}_b$ точки $b \in B$

порождает идеал подмногообразия V_b в $\mathcal{O}_{\mathcal{V},p}$, то есть если композиции с π функций, регулярных в окрестности b и обращающихся в нуль в b, порождают идеал подмногообразия V_b в некоторой окрестности точки $p \in \mathcal{V}$. Мы будем говорить, что семейство *приведено*, если это условие выполнено для всех $b \in B$ и $p \in V_b$; мы будем говорить, что семейство *приведено в общей точке*, если для всякой $b \in B$ это условие выполняется для общей $p \in V_b$.

Чтобы связать это с более стандартной терминологией, принятой в теории схем, скажем, что семейство схем $\pi: \mathcal{V} \to B$ называется *плоским*, если для всякой точки $p \in \mathcal{V}$ локальное кольцо $\mathcal{O}_{\mathcal{V},p}$ является плоским как $\mathcal{O}_{B,\pi(p)}$-модуль. Если B — связное многообразие, $\mathcal{V} \subset B \times \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмногообразие и $\pi: \mathcal{V} \to B$ — проекция, то это условие эквивалентно тому, что многочлены Гильберта у всех схемных слоев π одинаковы (см., например, [EH]). Далее, условие приведенности семейства $\pi: \mathcal{V} \to B$ означает, что схемные слои — то же самое, что слои π как многообразия, так что для такого семейства плоскостность равносильна постоянству многочлена Гильберта теоретико-множественных слоев; это же условие, в свою очередь, вытекает из постоянства размерности и степени слоев. Стало быть, приведенное семейство многообразий постоянной размерности и степени является плоским. Понятие плоскостности играет центральную роль в конструкции схемы Гильберта.

Если мы ограничимся семействами, удовлетворяющими одному из двух сформулированных выше условий, требование, чтобы отображение $B \to \mathcal{H}$, индуцированное семейством, было регулярным, становится разумным. На самом деле можно объединить два наших требования в одно. Если универсальное семейство $\mathcal{X}$ над $\mathcal{H}$ существует и приведено (соответственно приведено в общей точке), то всякое отображение $\varphi: B \to \mathcal{H}$ будет отображением $\varphi_{\mathcal{V}}$, индуцированным некоторым приведенным (соответственно приведенным в общей точке) семейством: в качестве $\mathcal{V}$ надо просто взять расслоенное произведение $\mathcal{V} = B \times_{\mathcal{H}} \mathcal{X}$. Обратно, если всякое отображение $\varphi: B \to \mathcal{H}$ проистекает из семейства $\mathcal{V} \subset B \times \mathbb{P}^n$, то семейство $\mathcal{X} \subset \mathcal{H} \times \mathbb{P}^n$, отвечающее тождественному отображению $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, будет универсальным семейством. В итоге мы можем дать следующее определение.

Определение 21.1. Будем говорить, что многообразие $\mathcal{H}$ вместе с биекцией между множеством точек $\mathcal{H}$ и набором подмногообразий $\{X_\alpha \subset \mathbb{P}^n\}$ является *пространством параметров* для набора $\{X_\alpha\}$, если для всякого многообразия B соответствие, относящее отображение $\varphi_{\mathcal{V}}: B \to \mathcal{H}$ ко всякому семейству $\mathcal{V} \subset B \times \mathbb{P}^n$ (состоящему из многообразий, принадлежащих $\{X_\alpha\}$), индуцирует биекцию

$$\left\{\begin{array}{l}\text{приведенные}\\ \text{замкнутые}\\ \text{семейства}\\ \text{с базой } B\text{, слои}\\ \text{которых лежат}\\ \text{в наборе } \{X_\alpha\}\end{array}\right\} \to \{\text{регулярные отображения } B \to \mathscr{H}\}.$$

Аналогичным образом можно определить *цикловое пространство параметров* как семейство, удовлетворяющее этому условию по отношению к семействам, приведенным в общей точке.

Оставшаяся часть этой лекции будет в основном посвящена описанию двух классических конструкций, одна из которых доказывает существование циклового пространства параметров для множества многообразий $X \subset \mathbb{P}^n$ данной размерности и степени, а другая представляет собой построение пространства параметров для множества многообразий с данным многочленом Гильберта. Получаемые с помощью этих конструкций пространства параметров называются *открытым многообразием Чжоу* и *открытым многообразием Гильберта* соответственно; для каждого из них мы дадим набросок конструкции и скажем пару слов о том, какие объекты параметризуются замыканиями этих многообразий — *многообразием Чжоу* и *многообразием Гильберта.* Мы также опишем более подробно (хотя и без доказательств) один элементарный пример на эти два разные подхода — параметризацию кривых степени 2 в $\mathbb{P}^3$. Наконец, в завершающей части лекции мы очень коротко обсудим связанное со всем предыдущим понятие *пространства модулей.*

Многообразия Чжоу

Первая из конструкций, о которых пойдет речь, — пространство параметров многообразий фиксированной степени и размерности — называется конструкцией Чжоу. Основная ее идея заключается в следующем. Проблема, возникающая при параметризации произвольных многообразий $X \subset \mathbb{P}^n$, состоит в том, что X обычно не удается задать одним-единственным многочленом, коэффициенты которого могут произвольно варьироваться, как в случае гиперповерхностей. Идея состоит в том, чтобы сопоставить произвольному многообразию X гиперповерхность Φ_X, хотя и не в проективном пространстве.

Имеются два по существу эквивалентных способа сделать это. Тот, с которым мы будем иметь дело, использует произведение проективных пространств; в конце раздела мы покажем, что произведение проективных пространств можно заменить на грассманиан, не меняя конструкции. Итак, предположим для начала, что X равноразмерно размерности k, и рассмотрим отношение инцидентности, состоящее из точек $p \in X$ и наборов из $k+1$ гиперплоскости, содержащей p; иными словами,

$$\Gamma = \{(p, H_1, \ldots, H_{k+1}) \mid p \in H_i \quad \forall i\} \subset X \times \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}.$$

С помощью стандартного вычисления легко находится размерность Γ: для всякой точки $p \in X$ множество гиперплоскостей, содержащих p, есть гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{n*}$, так что множество наборов из $k+1$ такой гиперплоскости неприводимо и имеет размерность $(k+1) \cdot (n-1)$. Стало быть, Γ равноразмерно размерности $k + (k+1) \cdot (n-1) = (k+1) \cdot n - 1$, причем неприводимые компоненты Γ находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми компонентами X. С другой стороны, для общих $p \in X$ и $H_1, \ldots, H_{k+1}$, содержащих p, пересечение $X \cap H_1 \cap \ldots \cap H_{k+1}$ будет содержать только точку p, так что отображение проекции $\pi\colon \Gamma \to \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$ будет бирациональным на свой образ. Отсюда следует, что образ Γ при этой проекции будет гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$ (именно здесь мы используем равноразмерность X); мы обозначим эту гиперповерхность через Φ_X.

Однако же, как и в случае произведения двух проективных пространств, всякая гиперповерхность в $\mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$ будет множеством нулей одного мультиоднородного многочлена F; если потребовать, чтобы F не содержал кратных сомножителей, он будет единствен с точностью до умножения на скаляр. Обозначим соответственно через F_X многочлен, задающий гиперповерхность $\Phi_X \subset \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$. Не столь сложно понять, какова будет мультистепень Φ_X (разумеется, поскольку Φ_X инвариантно относительно перестановок сомножителей в $\mathbb{P}^{n*} \times \ldots$ $\ldots \times \mathbb{P}^{n*}$, F_X будет иметь одну и ту же степень по всем наборам переменных). Если зафиксировать k общих гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_k \subset$ $\subset \mathbb{P}^n$, то пересечение этих гиперплоскостей с X будет состоять ровно из d точек p_i, где $d = \deg(X)$; стало быть, $(H_1, \ldots, H_{k+1}) \in \Phi_X$ тогда и только тогда, когда H_{k+1} содержит одну из точек p_i. Стало быть, пересечение Φ_X со слоем $\{(H_1, \ldots, H_k)\} \times \mathbb{P}^{n*}$ будет объединением d гиперплоскостей $p_i^* \subset \mathbb{P}^{n*}$, где p_i^* — множество гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$, содержащих p_i. В частности, степень этого слоя равна d, так что F_X должен иметь степень $d = \deg(X)$ по каждому набору переменных.

Пусть теперь V — векторное пространство мультиоднородных многочленов мультистепени $(d, d, \ldots, d)$ от $k+1$ набора из $n+1$ переменной. Мы поставили в соответствие многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ размерности k и степени d корректно определенный элемент $[\Phi_X] \in \mathbb{P}V$ в проективизации этого пространства; стало быть, мы имеем отображение множеств

$$\left\{\begin{matrix}\text{равноразмерные}\\ \text{многообразия}\\ \text{размерности } k\\ \text{и степени } d\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\xi} \mathbb{P}V.$$

Точка $\xi(X) = [F_X] \in \mathbb{P}V$, соответствующая многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$, называется *точкой Чжоу* многообразия X.

Теперь мы утверждаем, что отображение ξ является инъекцией, т. е. что многообразие X определяется своей точкой Чжоу $[F_X] \in \mathbb{P}V$. Чтобы доказать это, введем еще одно отношение инцидентности Ψ в $\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*})$, определенное по формуле

$$\Psi = \{(p, H_1, \ldots, H_{k+1}) \mid p \in H_i \quad \forall i\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*};$$

через $\pi\colon \Psi \to \mathbb{P}^n$ и $\eta\colon \Psi \to \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$ обозначим проекции. Заметим, что Ψ — не что иное, как $(k+1)$-кратное расслоенное произведение стандартного отношения инцидентности $\Gamma \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n*}$ на себя (над $\mathbb{P}^n$); в частности, слой $\pi^{-1}(q)$ над произвольной точкой $q \in \mathbb{P}^n$ является $(k+1)$-кратным произведением $q^* \times \ldots \times q^* \cong \mathbb{P}^{n-1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n-1}$ гиперплоскости $q^* \subset \mathbb{P}^{n*}$ на себя (где опять через $q^* \subset \mathbb{P}^{n*}$ обозначено множество гиперплоскостей, проходящих через q).

Рассмотрим теперь прообраз $\eta^{-1}(\Phi_X)$. Для всякой точки $q \in X \subset \mathbb{P}^n$ он будет содержать слой $\pi^{-1}(q)$ многообразия Ψ над q. Если же, напротив, $q \notin X$, то $\eta^{-1}(\Phi_X)$ будет пересекаться со слоем $\pi^{-1}(q) \cong \mathbb{P}^{n-1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n-1}$ (слой Ψ над q) по гиперповерхности; если рассматривать $q^* \cong (\mathbb{P}^{n-1})^*$ как двойственное к проективному пространству прямых в $\mathbb{P}^n$, проходящих через q, то пересечение $\eta^{-1}(\Phi_X) \cap \pi^{-1}(q)$ будет гиперповерхностью $\Phi_{\overline{X}}$ в произведении $(\mathbb{P}^{n-1})^* \times \ldots \times (\mathbb{P}^{n-1})^*$, ассоциированной с многообразием $\overline{X} = \pi_q(X)$, являющимся проекцией X из q. Стало быть, мы можем охарактеризовать X так:

$$X = \{q \in \mathbb{P}^n \mid \pi^{-1}(q) \subset \eta^{-1}(\Phi_X)\};$$

равносильным образом можно сказать, что X есть множество таких точек q, что слой многообразия $\eta^{-1}(\Phi_X)$ над q имеет размерность $(k+1)(n-1)$.

Следующее утверждение относительно отображения ξ состоит в том, что его образ является квазипроективным многообразием. Этот образ называется *открытым многообразием Чжоу* подмногообразий размерности k и степени d в $\mathbb{P}^n$ и обозначается $\widetilde{\mathscr{C}}_{k,d} = \widetilde{\mathscr{C}}_{k,d}(\mathbb{P}^n)$ (замыкание этого многообразия обозначается $\mathscr{C}_{k,d}$ и называется просто *многообразием Чжоу*; позднее мы обсудим, чему соответствуют точки, добавляемые при замыкании).

Утверждение о квазипроективности $\mathscr{C}_{k,d}$ является почти элементарным. Мы сначала докажем, что квазипроективным является образ при отображении ξ множества неприводимых подмногообразий $X \subset \mathbb{P}^n$ размерности k и степени d; общий случай рассматривается аналогичным образом. Первое наблюдение состоит в том, что с каждой гиперповерхностью $\Phi \subset \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$ мы можем связать подмногообразие $Z_\Phi \subset \mathbb{P}^n$: положим

$$\begin{aligned} Z_\Phi &= \{q \in \mathbb{P}^n \mid \pi^{-1}(q) \subset \eta^{-1}(\Phi)\} = \\ &= \{q \in \mathbb{P}^n \mid \dim(\pi^{-1}(q) \cap \eta^{-1}(\Phi)) \geqslant (k+1)(n-1)\}; \end{aligned}$$

это подмногообразие в $\mathbb{P}^n$, поскольку размерность слоев отображения $\pi\colon \eta^{-1}(\Phi) \to \mathbb{P}^n$ полунепрерывна сверху. Ключевой момент состоит в том, что соответствие, переводящее Φ в Z_Φ, определяет подмногообразие Ξ в произведении $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}^n$, т. е. что множество таких пар (Φ, q), что $q \in Z_\Phi$, является подмногообразием в $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}^n$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующую диаграмму отношений инцидентности:

$$\begin{tikzcd} & & \Omega \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & \Theta \arrow[dl] \arrow[dr] & & \Psi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}V & \times & (\mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}) & \times & \mathbb{P}^n. \end{tikzcd}$$

Подмножество

$$\Theta = \{(\Phi, H_1, \ldots, H_{k+1}) \mid (H_1, \ldots, H_{k+1}) \in \Phi\} \subset \mathbb{P}V \times \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$$

является, очевидно, подмногообразием, так что таково же и множество

$$\begin{aligned} \Omega = \{(\Phi, H_1, \ldots, H_{k+1}, q) \mid (H_1, \ldots, H_{k+1}) \in \Phi \text{ и } q \in H_1 \cap \ldots \cap H_{k+1}\} \subset \\ \subset \mathbb{P}V \times \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n \end{aligned}$$

(это просто расслоенное произведение $\Theta \subset \mathbb{P}V \times \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$ и $\Psi \subset \subset \mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n$ над $\mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$). Теперь можно написать

$$\Xi = \{(\Phi, q) \mid q \in Z_\Phi\} = \{(\Phi, q) \mid \dim(\gamma^{-1}(\Phi, q)) \geqslant (k+1)(n-1)\},$$

где $\gamma\colon \Omega \to \mathbb{P}V \times \mathbb{P}^n$ — проекция на первый и последний сомножители; из приведенного выше описания следует, что Ξ является подмногообразием в $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}^n$.

Наконец, мы можем проверить, что размерность Z_Φ не может превосходить k и что если гиперповерхность Φ неприводима и $\dim(Z_\Phi) = k$, то степень Z_Φ будет обязательно равна d. Стало быть, если мы ограничимся только неприводимыми X, то все сделано: образ множества неприводимых X при отображении Чжоу будет содержаться в открытом подмножестве $U \subset \mathbb{P}V$, состоящем из неприводимых гиперповерхностей мультистепени $(d, \ldots, d)$, и будет там множеством тех $\Phi \in U$, для которых размерность слоя многообразия Ξ над Φ больше или равна k.

Если мы хотим рассматривать и приводимые многообразия X (а мы этого хотим), то нам придется поработать еще, поскольку для приводимых Φ может случиться так, что $\dim(Z_\Phi) = k$, но $\deg(Z_\Phi) = d' < d$ (так будет, например, если $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где $\Phi_1 = \Phi_Y$ для некоторого многообразия $Y \subset \mathbb{P}^n$, имеющего размерность k и степень d', а Φ_2 — общая гиперповерхность мультистепени $(d - d', \ldots, d - d')$). По этому поводу стоит почитать какое-нибудь из явных описаний уравнений, задающих многообразие Чжоу (например, в [GM]).

Отметим также, что пересечение многообразия $\Xi \subset \mathbb{P}V \times \mathbb{P}^n$ с прообразом $\widetilde{\mathscr{C}}_{k,d} \times \mathbb{P}^n$ является универсальным многообразием размерности k и степени d над открытым многообразием Чжоу (как мы увидим в упражнении 21.6, это семейство приведено только в общей точке). Все это подводит нас к следующей теореме, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема 21.2. *Открытое многообразие Чжоу является цикловым пространством параметров для множества равноразмерных многообразий размерности k и степени d в $\mathbb{P}^n$.*

Существование универсального семейства над открытым многообразием Чжоу позволяет изучить различные естественные атрибуты параметризации Чжоу.

Упражнение 21.3. Пусть $Z \subset \mathbb{P}^n$ — фиксированное многообразие. Пользуясь существованием универсального семейства над открытым многообразием Чжоу $\widetilde{\mathscr{C}}_{k,d}$, покажите, что подмножество

$$\widetilde{\mathscr{C}}_{k,d}(Z) = \{X \in \widetilde{\mathscr{C}}_{k,d} \mid X \cap Z \neq \varnothing\}$$

является подмногообразием в $\widetilde{\mathscr{C}}_{k,d}$.

Упражнение 21.4. Пусть, как и в предыдущем упражнении, $Z \subset \mathbb{P}^n$ — фиксированное многообразие. Пользуясь существованием универсального семейства над многообразием Чжоу $\mathscr{C}_{k,d}$, покажите, что множество

$$\mathscr{C}_{k,d}(Z) = \{X \in \mathscr{C}_{k,d} \mid X \subset Z\}$$

является подмногообразием в $\mathscr{C}_{k,d}$; это подмногообразие называется многообразием Чжоу циклов на Z. (Предупреждение: возможно, будет лучше, если вы сделаете это только для открытого подмногообразия в $\mathscr{C}_{k,d}$, параметризующего неприводимые подмногообразия $X \subset \mathbb{P}^n$.)

Коль скоро многообразие Чжоу $\widetilde{\mathscr{C}}_{k,d}$ квазипроективно, возникает естественный вопрос о том, каково его замыкание в пространстве $\mathbb{P}V$. Оказывается, что ответ очень прост, хотя нам все-таки придется привести его без доказательства. Именно, если многочлен $F \in V$ лежит в замыкании многообразия $\widetilde{\mathscr{C}}_{k,d}$ и если мы разложим его на неприводимые множители

$$F = \prod (F_i)^{a_i},$$

то каждый сомножитель F_i сам является точкой Чжоу некоторого подмногообразия $X_i \subset \mathbb{P}^n$. Разумеется, при этом

$$\sum a_i \cdot \deg(X_i) = \sum a_i \cdot \deg(F_i) = \deg(F) = d.$$

Тем самым мы можем сказать, что замыкание многообразия $\widetilde{\mathscr{C}}_{k,d}$ параметризует *эффективные циклы* на $\mathbb{P}^n$, где эффективный цикл размерности k и степени d есть, по определению, формальная линейная комбинация $\sum a_i X_i$, в которой X_i — неприводимые подмногообразия размерности k, a_i — целые положительные числа и $\sum a_i \cdot \deg(X_i) = d$. Как мы отмечали, это замыкание называется просто *многообразием Чжоу* и обозначается $\mathscr{C}_{k,d}$.

Упражнение 21.5. Покажите, что многообразие Чжоу $\mathscr{C}_{k,d}$ связно, поскольку каждая его компонента содержит множество точек, соответствующих циклам вида $d \cdot \Gamma$, где $\Gamma \cong \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ — линейное подпространство. Найдите количество неприводимых компонент многообразий Чжоу $\mathscr{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3)$, $\mathscr{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ и $\mathscr{C}_{1,4}(\mathbb{P}^3)$, параметризующих кривые степеней 2, 3 и 4 в $\mathbb{P}^3$.

В общем случае количество неприводимых компонент многообразия Чжоу неизвестно, даже для кривых в $\mathbb{P}^3$. Что же до высших гомотопических групп многообразия $\mathscr{C}_{k,d}$, то имеется красивая работа Лоусона [L] о гомотопических группах «бесконечного» многообразия Чжоу $\mathscr{C}_{k,\infty} = \bigcup \mathscr{C}_{k,d}$ (вложения определяются с помощью добавления фиксированной k-плоскости Γ к каждому циклу $\sum a_i \cdot X_i \in \mathscr{C}_{k,d}$).

В начале этого раздела мы упомянули о том, что к конструкции Чжоу существует два эквивалентных подхода. Второй подход состоит в том, что произведение $\mathbb{P}^{n*} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n*}$ заменяется на грассманиан $\mathbb{G} = \mathbb{G}(n-k-1, n)$, состоящий из плоскостей коразмерности $k+1$ в $\mathbb{P}^n$, и каждому подмногообразию $X \subset \mathbb{P}^n$, имеющему размерность k и степень d, ставится в соответствие гиперповерхность

$$\Phi_X = \{\Lambda \mid \Lambda \cap X \neq \varnothing\}.$$

Эта конструкция, конечно, проще первой; единственный дополнительный шаг состоит в том, что мы должны заметить, что гиперповерхность Φ_X является пересечением грассманиана $\mathbb{G}$ с гиперповерхностью степени d в $\mathbb{P}^N$, где $\mathbb{P}^N$ — объемлющее пространство плюккерового вложения. Гиперповерхность задается как множество нулей однородного многочлена F_X степени d на $\mathbb{P}^N$, определенного по модулю пространства $I(\mathbb{G})_d$, являющегося градуированной компонентой степени d в идеале грассманиана $\mathbb{G} \subset \mathbb{P}^N$, а также с точностью до умножения на скаляр. Стало быть, мы можем поставить в соответствие многообразию X точку $[F_X]$ в проективном пространстве $\mathbb{P}(S(\mathbb{G})_d)$, являющемся проективизацией однородной компоненты степени d в однородном координатном кольце грассманиана $\mathbb{G}$; это соответствие также называется отображением Чжоу, а точка $[F_X]$ также называется точкой Чжоу многообразия X.

Упражнение 21.6. Рассмотрим семейство неприводимых кривых $C_t \subset \mathbb{P}^3$, где C_t — образ отображения

$$\varphi_t\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3,$$

заданного формулой

$$\varphi_t\colon [X_0, X_1] \mapsto [X_0^3, X_0^2X_1 + (1-t)X_0X_1^2, tX_0X_1^2, X_1^3].$$

Кривая C_t является образом «стандартной» скрученной кубики C_1 при линейном отображении $A_t\colon \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$, заданном формулой

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так что C_t — это скрученная кубика при $t \neq 0$ и плоская нодальная кубика при $t = 0$. Покажите, что кривые C_t образуют замкнутое семейство в $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^3$. Покажите, что это семейство приведено в общей точке, но приведенным не является (на самом деле никакое семейство, общий член которого является скрученной кубикой, а один из членов является кривой C_0, не может быть приведенным). Выведите отсюда, что универсальное семейство над открытым многообразием Чжоу может быть приведено только в общей точке и что многообразие Чжоу является цикловым пространством параметров, но не пространством параметров.

Многообразия Гильберта

Вторая конструкция пространства параметров для подмногообразий в $\mathbb{P}^n$, а именно конструкция Гильберта[1], удачным образом контрасти-

[1] Принадлежащая не Гильберту, а Гротендику. — *Прим. перев.*

рует с конструкцией Чжоу. В то время как многообразие Чжоу можно определить весьма элементарным способом, изучать его свойства уже сложнее. Конструкция Гильберта, напротив, в некотором смысле гораздо более наивна, а исследовать свойства получающихся многообразий гораздо легче, но для того, чтобы эту конструкцию провести, нам потребуется по крайней мере сформулировать некоторую техническую лемму, доказательство которой далеко выходит за рамки этой книги.

Многообразие Гильберта параметризует не просто многообразия данной размерности и степени, но многообразия с данным многочленом Гильберта p (кроме того, не требуется, чтобы многообразия были равноразмерными). Нам будет необходимо следующее утверждение.

Лемма 21.7. *Для любого многочлена p существует такое целое число m_0, что всякое многообразие X с многочленом Гильберта $p_X = p$ обладает следующими свойствами*:

(i) *значения функции Гильберта $h_X(m)$ совпадают с $p(m)$ при всех $m \geqslant m_0$*;

(ii) *идеал $I(X)$ порождается степенью m_0.*

Второе из этих утверждений означает, что для всякого $m \geqslant m_0$ элементы однородной компоненты степени m идеала $I(X)$ порождают усеченный идеал $\bigoplus\limits_{l \geqslant m} I(X)_l$; в частности, из этого следует, что $I(X)_m$ порождает идеал многообразия X локально, и тем более что множество общих нулей элементов $I(X)_m$ совпадает с X.

Приняв эту лемму, построить многообразие Гильберта проще простого. Трудность с параметризацией многообразий $X \subset \mathbb{P}^n$, отличных от гиперповерхностей, состоит в том, что их идеалы порождаются не одним многочленом, а набором векторных пространств многочленов; преодолевается эта трудность тем, что многообразию ставится в соответствие не точка в проективном пространстве, параметризующем отдельные многочлены с точностью до умножения на скаляр, но точка грассманиана, параметризующего вышеупомянутые векторные пространства многочленов. Именно, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — многообразие с многочленом Гильберта $p_X = p$. Ввиду леммы 21.7 мы знаем, что при $m \geqslant m_0$ пространство $I(X)_m$ имеет коразмерность в точности $p(m)$ в векторном пространстве S_m, состоящем из однородных многочленов степени m на $\mathbb{P}^n$. Стало быть, полагая $N(m) = \binom{m+n}{n}$ и $q(m) = N(m) - p(m)$, мы получаем отображение множеств

$$\left\{\begin{matrix}\text{подмногообразия} \\ X \subset \mathbb{P}^n \\ \text{с многочленом} \\ \text{Гильберта } p_X = p\end{matrix}\right\} \to G = G(q(m), N(m)),$$

называемое отображением Гильберта; точка на грассманиане G, отвечающая подмногообразию $X \subset \mathbb{P}^n$, называется его *точкой Гильберта.* Вторая часть леммы 21.7 гласит, что это отображение взаимно однозначно; его образ мы будем называть *открытым многообразием Гильберта* и обозначать $\widetilde{\mathscr{H}}_p$.

На самом деле открытое многообразие Гильберта является квазипроективным подмножеством в грассманиане G. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для любого векторного подпространства $\Lambda \subset S_m$ и любого целого положительного числа k имеется отображение умножения

$$\Psi_k \colon \Lambda \otimes S_k \to S_{k+m};$$

если у нас есть подпространство $\Lambda \subset S_m$ коразмерности $p(m)$, то оно будет совпадать с градуированной компонентой степени m идеала $I(X)$ некоторого многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ с многочленом Гильберта p тогда и только тогда, когда для всех k ранг отображения Ψ_k будет таким, каким он должен быть, т.е. $q(m+k)$. Однако же на открытых подмножествах $U \subset G$ можно рассматривать пространство $\Lambda \in G$ как порожденное многочленами $F_1, \ldots, F_{q(m)} \in S_m$, коэффициенты которых являются регулярными функциями на U. Тогда отображение Ψ_k можно рассматривать как линейное отображение между фиксированными векторными пространствами $S_k^{\oplus q(m)}$ и S_{k+m}, матричные элементы которого являются регулярными функциями на U. Стало быть, пересечение $\widetilde{\mathscr{H}}_p \cap U$ в окрестности данной точки $I(x) \in \mathscr{H}_p$ является множеством тех точек, в которых ранг Ψ_k равен $q(k+m)$ для всех k, откуда и вытекает, что $\widetilde{\mathscr{H}}_p \cap U$ локально замкнуто в U.

На первый взгляд в этом рассуждении есть слабое место: a priori имеется бесконечно много детерминантальных условий, связанных с отображениями Ψ_k, а бесконечное пересечение локально замкнутых подмножеств не обязано быть локально замкнутым. На самом деле эта проблема серьезной не является, поскольку в маленькой окрестности данной точки $\Lambda \in G$ возможно только конечное число многочленов Гильберта. Более серьезен вопрос о том, зависит ли построенное нами многообразие $\widetilde{\mathscr{H}}_p$ от выбора числа m. Чтобы доказать, что многообразие всегда получается одно и то же, нужна техника, далеко выходящая за рамки этой книги; хорошая ссылка по поводу конструкции $\mathscr{H}$ вообще и по этому вопросу в частности — книга Мамфорда [M3].

Из всего сказанного немедленно вытекает существование универсального семейства $\mathscr{X} \subset \widetilde{\mathscr{H}}_p \times \mathbb{P}^n$: как мы отмечали, на открытых подмножествах $U \subset G$ мы можем представить $\Lambda \in G$ как векторное пространство, порожденное многочленами $F_1, \ldots, F_{q(m)} \in S_m$, коэффициенты которых являются регулярными функциями на U; эти многочлены и являются уравнениями, задающими $\mathscr{X} \cap (U \times \mathbb{P}^n)$. Хорошим упражнением будет также доказать, основываясь на предыдущем обсуждении, следующую теорему.

Теорема 21.8. *Открытое многообразие Гильберта является пространством параметров для множества подмногообразий $X \subset \mathbb{P}^n$ с данным многочленом Гильберта.*

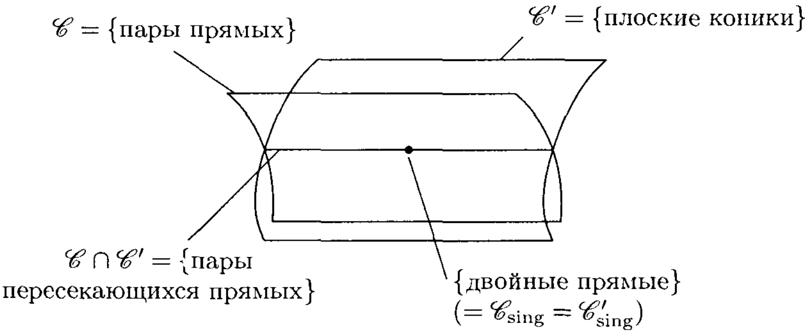
Наконец, мы можем, как и в случае с многообразием Чжоу, спросить, чему соответствуют точки, добавляемые к $\widetilde{\mathscr{H}}_p$ при замыкании. Ответ состоит в том, что они соответствуют подсхемам в $\mathbb{P}^n$ с многочленом Гильберта p. На нашем (неполноценном) языке это означает, что они соответствуют насыщенным идеалам с многочленом Гильберта p, т. е. идеалам $I \subset S = K[Z_0, \ldots, Z_n]$, у которых фактор $A = S/I$ удовлетворяет условию $\dim_K(A_m) = p(m)$ для больших m. Чтобы понять, что это означает практически, надо, вероятно, разобрать пример, что мы сейчас и сделаем.

Кривые степени 2

В качестве примера и на многообразие Чжоу, и на многообразие Гильберта рассмотрим случай кривых степени 2 в $\mathbb{P}^3$. Если такая кривая равноразмерна, она будет либо плоской коникой, либо объединением двух прямых. Стало быть, многообразие Чжоу состоит из двух компонент $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$, пересекающихся по множеству из пар пересекающихся прямых. Вторая компонента изоморфна симметрическому квадрату грассманиана $\mathbb{G}(1, 3)$ (см. пример 10.23), причем диагональ соответствует циклам вида $2 \cdot L$. Отметим, в частности, что эта компонента имеет размерность 8 и, как может проверить читатель, особа в точности вдоль диагонали. Первая компонента — замыкание множества плоских коник — устроена немного хитрее. Возможно, лучший способ понять, как она выглядит, — ввести отношение инцидентности

$$\Gamma = \{(C, H) \mid C \subset H\} \subset \mathscr{C} \times \mathbb{P}^{3*}.$$

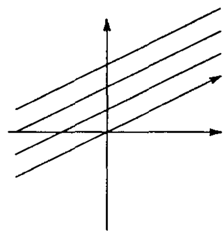
Многообразие Γ отображается на второй сомножитель $\mathbb{P}^{3*}$ со слоями, изоморфными пространству $\mathbb{P}^5$, состоящему из коник на плоскости. На самом деле нетрудно видеть, что даже в топологии Зарисского Γ является расслоением над $\mathbb{P}^3$ со слоем $\mathbb{P}^5$; в частности, оно гладко и имеет размерность 8. Отображение из Γ на $\mathscr{C}$ бирационально, поскольку общая плоская коника $C \in \mathscr{C}$ лежит на единственной плоскости H, но стягивает множество тех пар, где $C = 2 \cdot L$ является двукратной прямой; именно, для каждой $L \in \mathbb{G}(1, 3)$ подмногообразие $\{(2L, H) \mid H \supset L\} \cong \mathbb{P}^1$ отображается в одну точку в $\mathscr{C}$. Отсюда видно, что $\mathscr{C}$ особо в точности вдоль множества двойных прямых (если $f\colon X \to Y$ — регулярное бирациональное отображение и оба многообразия X и Y гладки, то множество точек на X, в которых дифференциал df имеет немаксимальный ранг, либо пусто, либо равноразмерно коразмерности 1). На рисунке все это можно изобразить так:



А теперь для сравнения давайте рассмотрим многообразия Гильберта, параметризующие кривые степени 2. Во-первых, есть много таких многообразий, соответствующих многочленам $p(m) = 2m + c$. Наименьшим значением c, при котором $\mathscr{H}_p \neq \varnothing$, будет $c = 1$; соответствующее многообразие Гильберта $\mathscr{H}_{2m+1}$ параметризует плоские коники. Подобно компоненте $\mathscr{C}'$ в многообразии Чжоу $\mathscr{C}_{1,2}$, многообразие $\mathscr{H}_{2m+1}$ содержит открытое подмножество, параметризующее гладкие плоские коники и пары различных пересекающихся прямых; на самом деле это открытое подмножество изоморфно соответствующему открытому подмножеству в $\mathscr{C}'$. В остальном, однако, $\mathscr{H}_{2m+1}$ отличается от $\mathscr{C}'$; можно проверить, что всякий насыщенный идеал $I \subset K[Z_0, \ldots, Z_3]$ с многочленом Гильберта $2m + 1$ является полным пересечением, то есть порожден линейным и квадратичным многочленами без общих множителей. Отсюда следует, что точки многообразия Гильберта $\mathscr{H}_{2m+1}$ соответствуют парам, состоящим из плоскости $H \subset \mathbb{P}^3$ и коники на H, то есть точкам отношения инцидентности Г. На самом деле $\mathscr{H}_{2m+1}$ и изоморфно Г.

Следующим идет многообразие Гильберта $\mathscr{H}_{2m+2}$. Оно содержит компоненту $\mathscr{H}$, общим членом которой является пара скрещивающихся прямых, — наподобие компоненты $\mathscr{C}$ в многообразии Чжоу $\mathscr{C}_{1,2}$. На самом деле у $\mathscr{H}_{2m+2}$ есть открытое подмножество, изоморфное открытому подмножеству в $\mathscr{C}$, параметризующему пары различных прямых, хотя для точки на $\mathscr{H}_{2m+2}$, соответствующей объединению пересекающихся прямых $L \cup M$, соответствующий идеал не является идеалом объединения: если $\{L_t\}$ и $\{M_t\}$ — семейства прямых, в которых L_t скрещивается с M_t при $t \neq 0$ и $L_0 \cap M_0 = \{p\}$, то предел идеалов $I_t = I_{L_t \cup M_t}$ есть не $I_{L_0 \cup M_0}$, но идеал многочленов, обращающихся в нуль на $L_0 \cup M_0$ и имеющих двукратный нуль в точке p.

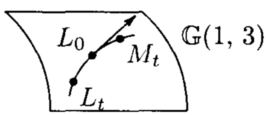
Упражнение 21.9. Проверьте это утверждение, например, для случая, когда L_t задается уравнениями $(Z_0 = Z_1 = 0)$ для всех t, а M_t задается уравнениями $(Z_0 - tZ_3 = Z_2 = 0)$. Проверьте также, что описанный выше идеал насыщен и имеет многочлен Гильберта $p(m) = 2m + 2$.

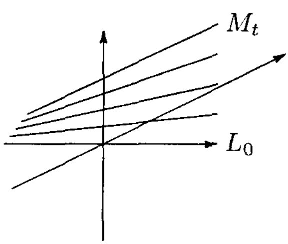


Самое, однако же, интересное в $\mathscr{H}_{2m+2}$ — это то, что происходит с многообразием $L_t \cup M_t$, когда обе прямые стремятся к одной и той же прямой $L_0 = M_0$. В этом случае у нас получается идеал, содержащийся в идеале I_{L_0} и содержащий идеал $(I_{L_0})^2$, но не совпадающий ни с одним из них. На самом деле он будет устроен так: для некоторого выбора линейного отображения $\varphi\colon L_0 \to K^4/L_0$ он состоит из многочленов F, обращающихся в нуль на L_0, нормальная производная которых в каждой точке $p \in L_0$ в направлении $\varphi(p)$ равна нулю — например, если L_0 задана уравнениями $Z_0 = Z_1 = 0$, этот идеал будет иметь вид

$$I = (Z_0^2,\ Z_0Z_1,\ Z_1^2,\ \alpha(Z_0,\ Z_1)\cdot Z_2 + \beta(Z_0,\ Z_1)\cdot Z_3),$$

где α и β — однородные линейные многочлены. (Если φ не является изоморфизмом, мы требуем, чтобы F имел двукратный нуль в точке $p = \operatorname{Ker}(\varphi)$, так что идеал будет иметь коразмерность 1 в идеале, порожденном линейным и квадратичным многочленами.) В частности, предельный идеал семейства $I_{L_t \cup M_t}$ будет зависеть не только от предельного положения $L_0 = M_0$. Один из способов описать этот предел — рассматривать L_t и M_t как точки на грассманиане $\mathbb{G}(1,\ 3)$; когда они обе стремятся к одной точке, этим определяется не только точка $L_0 \in \mathbb{G}(1,\ 3)$, но и касательный вектор $\varphi\colon L_0 \to K^4/L_0$ к $\mathbb{G}(1,\ 3)$ в точке L_0, и именно этот касательный вектор задает предел идеалов.





Упражнение 21.10. Проверьте это утверждение, например, для случая, когда L_t задается уравнениями $(Z_0 = Z_1 = 0)$ для всех t, а M_t задается уравнениями $(Z_0 - tZ_3 = Z_1 - tZ_2 = 0)$. Проверьте и в этом случае, что описанный выше идеал насыщен и имеет многочлен Гильберта $p(m) = 2m + 2$.

В свете всего сказанного мы приходим к заключению, что, по крайней мере теоретико-множественно, компонента $\mathscr{H}$ многообразия $\mathscr{H}_{2m+2}$ отображается изоморфно на $\mathscr{C}$ вне диагонали и что ее слой над точкой $2 \cdot L \in \mathscr{C}$ есть $\mathbb{P}T_L(\mathbb{G}(1, 3))$ — проективизация касательного пространства к грассманиану в точке L. На самом деле это отображение регулярно и $\mathscr{H}$ является раздутием $\mathscr{C}$ вдоль диагонали, Другой способ построить $\mathscr{H}$ — сказать, что это фактор раздутия $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ вдоль диагонали по инволюции, меняющей местами сомножители.

Мы, однако же, еще не закончили с $\mathscr{H}_{2m+2}$: у этого многообразия есть еще одна интересная компонента, а именно $\mathscr{H}'$. Это компонента, общий член которой является объединением плоской коники C и точки $p \in \mathbb{P}^3$, не лежащей на C; без труда проверяется, что такие подмногообразия в $\mathbb{P}^3$ имеют многочлен Гильберта $p(m) = 2m + 2$. Мы не будем много распространяться по поводу этой компоненты, за исключением того, что отметим, что она существует, и заметим, что она пересекается с $\mathscr{H}$ по объединению множества пар пересекающихся прямых и «двойных прямых» $2 \cdot L$, для которых соответствующее линейное отображение $\varphi\colon L \to K^4/L$ имеет ранг один.

Упражнение 21.11. Опишите возможные пределы в $\mathscr{H}'$ объединений $C \cup p_t$, где p_t стремится к точке $p_0 \in C$.

См. [EH] по поводу обсуждения пределов проективных многообразий, включающего и более подробный анализ этих примеров,

Аналогичным образом, существует непустое многообразие Гильберта $\mathscr{H}_{2m+c}$ для всякого $c \geqslant 3$. Оно будет иметь неприводимую компоненту, общий член которой есть плоская коника плюс $c - 1$ точка, и еще одну компоненту, общим членом которой будет объединение двух скрещивающихся прямых и $c - 2$ точек. (*Схема* Гильберта будет содержать и другие компоненты, общие точки которых соответствуют насыщенным, но не радикальным идеалам $I \subset S$, факторы по которым имеют многочлен Гильберта $2m + c$; такие идеалы могут быть устроены довольно сложно.)

Пространства модулей

Понятие пространства параметров, то есть многообразия, точки которого параметризуют подмногообразия проективного пространства $\mathbb{P}^n$, — это только первая половина нашей истории. Еще более фундаментальным во многих отношениях объектом является *пространство модулей*, точки которого параметризуют некоторый класс многообразий, рассматриваемых с точностью до изоморфизма. В некотором смысле такое изменение объекта исследований соответствует разнице подходов, принятых в XIX и XX веках: в XIX веке многообразие рассматривалось в первую очередь как подмножество проективного пространства, а изоморфизм между многообразиями $X \subset \mathbb{P}^n$ и $Y \subset \mathbb{P}^m$ рассматривался как отношение эквивалентности на множестве таких подмногообразий. Точка зрения XX века состоит в том, что основной предмет изучения алгебраической геометрии — абстрактное многообразие, снабженное дополнительными данными, задающими его отображение в проективное пространство. При этом становится не менее важным описывать семейства абстрактных многообразий.

Итак, исходная ситуация состоит в том, что нам дан некоторый класс абстрактных многообразий $\{X_\alpha\}$ и мы спрашиваем, можно ли на множестве этих многообразий, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, ввести естественную структуру алгебраического многообразия. Разумеется, первое, что тут нужно сделать, — это сказать, что мы понимаем под словом «естественный». В случае пространства параметров у нас было два ответа на этот вопрос. Сначала мы говорили, что биекция между подмногообразиями $X_\alpha \subset \mathbb{P}^n$ и точками многообразия $\mathscr{H}$ является алгебраической параметризацией, если подмножество $\mathscr{X}$ в произведении $\mathscr{H} \times \mathbb{P}^n$, определенное по формуле $\mathscr{X} = \{(\alpha, p) \mid p \in X_\alpha\}$, является подмногообразием. В нашей теперешней ситуации, когда параметризуемые объекты являются классами многообразий с точностью до изоморфизма и эти многообразия невозможно канонически вложить в проективное пространство, такое определение не имеет смысла.

С другой стороны, условие из определения 21.1, гласящее, что семейство многообразий должно индуцировать отображение из базы семейства в пространство параметров и что при этом получается биекция между такими семействами и такими отображениями, вполне имеет аналог в нашей нынешней постановке. Для начала определим *семейство* с базой B многообразий из класса $\{X_\alpha\}$ как многообразие $\mathscr{V}$, снабженное таким отображением $\pi\colon \mathscr{V} \to B$, что для каждой точки $b \in B$ слой $\mathscr{V}_b = \pi^{-1}(b)$ изоморфен X_α для некоторого α. Теперь, если у нас есть биекция между множеством классов многообразий из $\{X_\alpha\}$ с точностью до изоморфизма и точками многообразия $\mathscr{M}$, мы можем определить отображение множеств

$$\varphi_\pi\colon B \to \mathscr{M},$$

переводящее точку $b \in B$ в точку на $\mathscr{M}$, соответствующую классу изоморфизма $[X_b]$ многообразия X_b, являющегося слоем $\mathscr{V}$ над b. После этого мы скажем, что наша биекция является алгебраической параметризацией класса многообразий $\{X_\alpha\}$, или что $\mathscr{M}$ является *грубым пространством модулей*, если для всякого приведенного семейства $\pi\colon \mathscr{V} \to B$ индуцированное отображение φ_π является регулярным и при этом $\mathscr{M}$ является максимальным многообразием с этими свойствами, т. е. если $\mathscr{M}' \to \mathscr{M}$ — биективный морфизм, через который пропускается любой φ_π, то $\mathscr{M}' \cong \mathscr{M}$.

Мы можем потребовать и большего. Например, по аналогии с нашим определением пространства параметров мы можем потребовать, чтобы существовало *тавтологическое семейство* над $\mathscr{M}$, то есть такие многообразие $\mathscr{X}$ и отображение $\mathscr{X} \to \mathscr{M}$, что для всякой точки $p \in \mathscr{M}$ слой X_b лежит в классе изоморфизма, представляемом точкой p. Более того, можно потребовать и того, чтобы для всякого многообразия B отображение множеств

$$\{\text{семейства с базой } B\} \to \{\text{регулярные отображения } B \to \mathscr{M}\},$$

переводящее семейство $\pi\colon \mathscr{V} \to B$ в отображение φ_π, было биективно. Если выполнено это дополнительное условие, то семейство $\pi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{M}$ называется *универсальным*.[1] Если универсальное семейство существует, $\mathscr{M}$ называется *тонким пространством модулей* для класса многообразий $\{X_\alpha\}$.

Тонкие пространства модулей встречаются, как мы увидим из следующего примера, значительно реже, чем грубые.

Пример 21.12. Плоские кубики

Фундаментальный пример многообразия модулей встречался нам в примере 10.16, посвященном плоским кубикам. В свете предыдущего обсуждения мы можем сказать, что у плоских кубик не существует даже грубого многообразия модулей. Причина этого состоит в наличии многочисленных примыканий между орбитами действия $\mathrm{PGL}_3 K$ на пространстве плоских кубик $\mathbb{P}^9$. Например, если $\mathscr{M}$ — множество классов изоморфизма плоских кубик, то на $\mathscr{M}$ должна быть точка p, соответствующая неприводимым плоским нодальным кубикам, и еще точка Q, соответствующая каспидальным кубикам. Однако же мы видели в примере 10.16, что тогда точка q должна лежать в замыкании точки p!

В качестве другого примера рассмотрим для какого-нибудь фиксированного значения λ семейство плоских кубик $\mathscr{V} \to \mathbb{A}^1$ (с базой $\mathbb{A}^1$),

[1] В случае пространств параметров $\mathscr{H}$, параметризующих подмногообразия в $\mathbb{P}^n$, различия между тавтологическими и универсальными семействами не было: из существования семейства подмногообразий $\mathscr{X} \subset \mathscr{H} \times \mathbb{P}^n$, в котором слой над $p \in \mathscr{H}$ являлся подмногообразием, соответствующим точке p, следовало свойство универсальности. В данном случае, однако, это уже не так, вследствие чего мы различаем понятия «тавтологическое» и «универсальное».

заданное уравнением

$$y^2 = x \cdot (x - t) \cdot (x - \lambda t).$$

Все слои этого семейства проективно эквивалентны при $t \neq 0$, но не изоморфны слою V_0. Если бы существовало пространство модулей $\mathscr{M}$, то индуцированное отображение $\mathbb{A}^1 \to \mathscr{M}$ было бы постоянно на $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, но не на всем $\mathbb{A}^1$. На самом деле из нашего описания действия $\mathrm{PGL}_3\, K$ на пространстве плоских кубик $\mathbb{P}^9$ (в примере 10.16) ясно, что для того, чтобы получить пространство модулей, надо ограничиться открытым подмножеством, состоящим из гладких кубик и неприводимых нодальных кубик. Если так и сделать, то грубое пространство модулей существовать будет: это прямая $\mathbb{P}^1$ с евклидовой координатой j.

Отметим, что даже с этим ограничением тонкого пространства модулей не существует; например, читатель может проверить, что если $\pi\colon \mathscr{V} \to B$ — произвольное семейство кривых, изоморфных плоским кубикам, то индуцированное отображение $B \to \mathbb{P}^1$ будет разветвлено над точкой $j = 0$, т. е. j-функция, ассоциированная с этим семейством, не может иметь простых нулей. По той же причине не существует универсального семейства и над j-прямой. Если исключить точки $j = 0$ и $j = 1728$, то над оставшейся частью тавтологическое семейство уже будет существовать, но и оно не будет универсальным.

Хотя приведенный пример, будучи слишком простым, не может проиллюстрировать многих тонкостей этой теории, на нем можно увидеть два основных принципа построения пространств модулей для класса алгебраических многообразий $\{X_\alpha\}$. Первый из них состоит в том, что многообразия рассматриваемого класса реализуются как проективные многообразия, даже если вложение таких многообразий в $\mathbb{P}^n$ определено только с точностью до действия $\mathrm{PGL}_{n+1}\, K$.

Чтобы выразить эту мысль, мы можем определить *поляризацию* многообразия X как класс проективной эквивалентности вложений X в $\mathbb{P}^n$ (часто поляризацию понимают и в несколько более широком смысле) и сказать, что первым шагом в построении пространства модулей является нахождение канонической поляризации для каждого многообразия данного класса. Например, для класса гладких кривых рода g мы можем выбрать *каноническое вложение*, то есть для каждой кривой C выбрать базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$ в пространстве голоморфных 1-форм на C, записать ω_α локально в виде $f_\alpha(z)\, dz$, и определить отображение

$$p \mapsto [f_1(p), \ldots, f_g(p)].$$

Равносильным образом, если обозначить через V векторное пространство голоморфных дифференциалов, то мы отображаем C в $\mathbb{P}V^*$, сопоставляя точке $p \in C$ гиперплоскость $\{\omega \in V \mid \omega(p) = 0\} \subset V$. Это отображение является вложением для негиперэллиптических кривых рода g; если мы хотим включить и гиперэллиптические, нужно рассматривать квадратичные дифференциалы вместо 1-форм (а для кривых рода 2 — дифференциалы веса 3).

Если никакой канонической поляризации для многообразий нашего класса найти нельзя, то не исключено, что пространство модулей построить невозможно (по крайней мере таким способом). Одна из возможностей в этом случае — строить многообразие модулей пар (X_α, L), где X_α — многообразие рассматриваемого класса и L — некоторая поляризация (численные инварианты которой — например, степень многообразия X_α — фиксированы).

После того как для каждого X_α выбрано вложение в $\mathbb{P}^n$, вопрос об изоморфизме превращается в вопрос о проективной эквивалентности: множество образов выбранных нами вложений будет локально замкнутым подмногообразием $\mathscr{H}$ в многообразии Чжоу или Гильберта, а пространство модулей, которое мы хотим построить, должно быть фактором этого квазипроективного многообразия по действию группы $\mathrm{PGL}_{n+1} K$ — если такой фактор действительно существует. В этом месте в игру вступает *геометрическая теория инвариантов*, которая доставляет нам общую информацию, аналогичную той, что мы получили «вручную» для случая плоских кубик: существует ли фактор и, более общим образом, каково наибольшее открытое множество $U \subset \overline{\mathscr{H}}$ в замыкании $\mathscr{H}$, обладающее тем свойством, что существует фактор $U/\mathrm{PGL}_{n+1} K$. Например, в случае кривых рода g, если мы выберем m-каноническое вложение (т. е. поляризацию, заданную дифференциалами веса m), то окажется, что для больших m фактор пространства $\mathscr{H}$, состоящего из m-канонически вложенных кривых, действительно существует; на самом деле мы можем также добавить точки из замыкания $\mathscr{H}$, соответствующие кривым $C \subset \mathbb{P}^{m(2g-2)-g}$, все особые точки которых являются нодами, а группа автоморфизмов конечна (равносильное условие: всякая рациональная компонента кривой C проходит не менее трех раз через особые точки C). В конечном счете мы приходим к результатам, являющимся примером успеха этой теории.

Определение. При $g \geqslant 2$ *стабильной кривой рода* g называется связная кривая арифметического рода g, особенностями которой могут быть только ноды и группа автоморфизмов которой конечна.

(Если особенности кривой — только ноды, то ее арифметический род находится так: это сумма геометрических родов, т. е. родов нормализаций, ее компонент плюс число особых точек минус число компонент плюс один.) Теперь мы имеем такую теорему.

Теорема 21.13. *Существует грубое пространство модулей* $\overline{\mathscr{M}}_g$ *для стабильных кривых рода* $g \geqslant 2$; *это многообразие неприводимо и имеет размерность* $3g - 3$.

Конечно, об этом можно сказать гораздо больше. Например, универсальное семейство существует над открытым подмножеством $\overline{\mathscr{M}}_g^0$, состоящим из кривых без автоморфизмов, причем это открытое подмножество гладко; можно описать особенности $\overline{\mathscr{M}}_g$, и так далее. Превосходное обсуждение этой конструкции, включающее ссылки на другие приложения геометрической теории инвариантов, содержится в [M2].

Лекция 22

КВАДРИКИ

В этой заключительной лекции мы изучим с некоторой подробностью многообразие, являющееся, возможно, простейшим и наиболее фундаментальным, а именно квадратичную гиперповерхность. Наша цель отчасти состоит в том, чтобы познакомиться с этим важнейшим многообразием, а отчасти — в том, чтобы продемонстрировать применение некоторых из идей, развитых в предыдущих лекциях. По ходу этой (несколько длинной) лекции мы будем пользоваться понятиями размерности, степени, рационального отображения, гладкости и особости, касательного пространства и касательного конуса, многообразия Фано, семейства — и все это применительно к анализу одного класса объектов. Эта лекция требует гораздо меньшей технической подготовки, нежели предыдущая; мы не пытаемся выжать максимум возможного из имеющейся у нас техники, но проводим классическое и элементарное исследование.

Излишне объяснять, что геометрия индивидуальной квадрики не таит в себе особых сюрпризов: в этой части у нас есть многочисленные пересечения с предыдущим материалом, а также темы, которые мы могли (а возможно, и должны были бы) рассмотреть ранее. Жизнь станет интереснее, когда, ближе к концу лекции, мы начнем изучать геометрию семейств квадрик; эта тема является более тонкой, и она до сих пор продолжает оставаться предметом исследований.

Одно замечание: все результаты и техника этой лекции не зависят от характеристики, за тем исключением, что в случае, когда характеристика основного поля K равна 2, основное соответствие между квадриками и билинейными формами надо определять по-иному. Соответственно, до конца лекции мы будем предполагать, что характеристика поля K отлична от 2.

Начальные определения

Для начала вспомним некоторые обозначения и терминологию, введенные первоначально в примере 3.3. Квадратичная гиперповерхность $Q \subset \mathbb{P}V = \mathbb{P}^n$ — это множество нулей однородного квадратичного многочлена $Q\colon V \to K$, который можно рассматривать как квадратичную форму, ассоциированную с билинейной формой

$$Q_0\colon V \times V \to K$$

или с соответствующим линейным отображением

$$\widetilde{Q}\colon V \to V^*.$$

Если $\widetilde{Q}$ является изоморфизмом, он индуцирует изоморфизм $\mathbb{P}V$ на $\mathbb{P}V^*$, который мы также будем обозначать через $\widetilde{Q}$. В общем случае ранг отображения $\widetilde{Q}$ называется *рангом* квадрики Q; напомним, что, согласно примеру 3.3, квадрика $Q \subset \mathbb{P}^n$ ранга k может быть описана как конус с вершиной $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k}$ над гладкой квадратичной гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{k-1}$.

Касательные пространства к квадрикам

Коль скоро квадратичная форма $Q(v)$ определяется как ограничение билинейной формы $Q_0(v, v)$ на диагональ, дифференциал dQ в произвольной точке v есть линейная форма $2Q_0(v, \cdot)$, т. е. удвоенное $\widetilde{Q}(v)$. Стало быть, для всякой точки $[v] \in Q$ имеем:

(i) если $\widetilde{Q}(v) \neq 0 \in V^*$, то квадратичная гиперповерхность $Q \subset \mathbb{P}V$ гладка в $[v]$, и касательная плоскость совпадает с $[\widetilde{Q}(v)] \in \mathbb{P}V^*$;

(ii) если $\widetilde{Q}(v) = 0$, то Q особа в точке $[v]$.[1]

Иными словами, гауссово отображение $\mathscr{G}\colon Q \to \mathbb{P}V^*$ является ограничением линейного изоморфизма $\widetilde{Q}\colon \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V^*$ на Q. В частности, множество тех точек $P \in Q$, для которых касательное пространство в этой точке содержит данную точку $R \in \mathbb{P}V$, является пересечением Q с гиперплоскостью, соответствующей $\widetilde{Q}(R)$; эта гиперплоскость называется *полярой* точки R относительно Q. Отметим также, что если Q особа с вершиной Λ, то касательные пространства к Q не меняются вдоль прямых на Q, пересекающих Λ, а также все содержат Λ.

В дальнейшем мы нередко будем рассматривать пересечение квадрики Q с ее проективным касательным пространством $\mathbb{T}_x Q$ в гладкой точке $x \in Q$. Пусть

$$Q' = Q \cap \mathbb{T}_x Q \subset \mathbb{T}_x Q \cong \mathbb{P}^{n-1}.$$

Мы утверждаем, что ранг Q' равен рангу Q минус 2. (Заметим, что если $\operatorname{rank}(Q) = 1$, то на Q нет гладких точек.) В самом деле, множество особых точек квадрики Q' есть линейная оболочка объединения вершины Λ квадрики Q с точкой x, так что при переходе от Q к Q' коразмерность множества особенностей падает на 2.

[1] Если мы хотим считать квадриками и «двойные плоскости» ($L^2 = 0$), то для единообразия — например, чтобы было верным утверждение, что квадрика Q особа в точке p тогда и только тогда, когда в этой точке обращаются в нуль все частные производные задающего ее уравнения — нам придется условиться, что квадрики ранга 1 особы всюду.

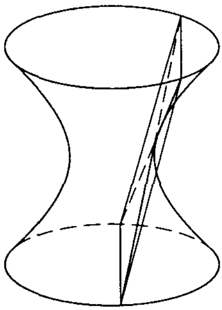
Упражнение 22.1. Покажите, что если $H \subset \mathbb{P}V$ — произвольная гиперплоскость и $Q' = Q \cap H$, то

$$\operatorname{rank}(Q) - 2 \leqslant \operatorname{rank}(Q') \leqslant \operatorname{rank}(Q),$$

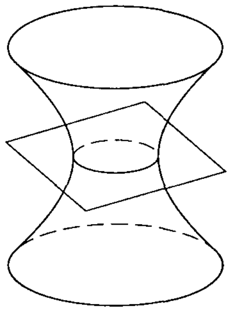
причем равенство[1] достигается тогда и только тогда, когда H касается Q. Более общим образом, покажите, что если $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k}$ и $Q' = \Lambda \cap Q$, то

$$\operatorname{rank}(Q) - 2k \leqslant \operatorname{rank}(Q') \leqslant \operatorname{rank}(Q).$$

Можно проиллюстрировать эти неравенства на плоских сечениях гладкой квадрики в $\mathbb{P}^3$:

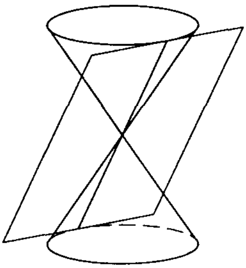


ранг 2

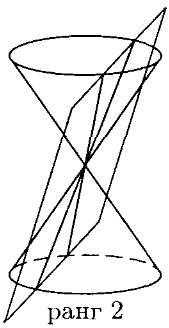


ранг 3

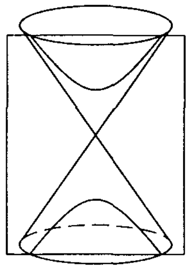
и на плоских сечениях квадратичного конуса:



ранг 1



ранг 2



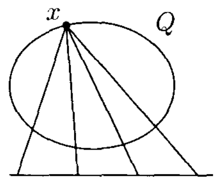
ранг 3

Плоские коники

Мы уже видели, что образ квадратичного отображения Веронезе $\nu_2 \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ является гладкой плоской коникой; в силу сказанного выше, любая гладкая плоская коника проективно эквивалентна вышеописан-

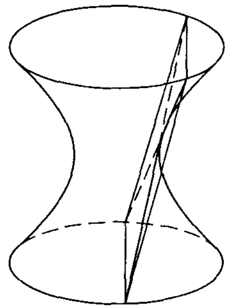
[1] В левом неравенстве. — *Прим. перев.*

ной. Мы можем усмотреть, что коника $Q \subset \mathbb{P}^2$ изоморфна $\mathbb{P}^1$, и более непосредственно, с помощью проекции из точки $x \in Q$; отображение π_x, определенное a priori всюду, кроме точки x, продолжается до изоморфизма, если поставить в соответствие точке x пересечение касательной прямой $\mathbb{T}_x Q$ с прямой $\mathbb{P}^1$.



Квадратичные поверхности

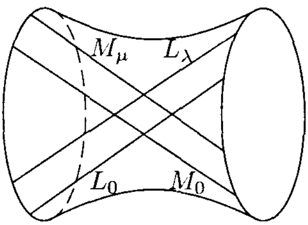
Гладкую квадрику $Q \subset \mathbb{P}^3$ мы также уже описывали: это образ отображения Сегре $\sigma_{1,1}\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$; отсюда следует, что и всякая гладкая квадрика может быть описана таким образом. Более того, мы видели, что слои двух проекций $\pi_i\colon Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ являются прямыми в $\mathbb{P}^3$, так что на квадрике лежат два семейства прямолинейных образующих, причем через каждую точку $x \in Q$ проходит ровно одна прямая каждого семейства.



Интересно, однако, увидеть эти прямолинейные образующие и изоморфизм $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ непосредственно. Наличие прямолинейных образующих можно вывести из того факта, что пересечение квадрики с касательной плоскостью в произвольной (гладкой) точке является квадрикой на 2 меньшего ранга. В нашем случае это означает, что для каждой точки $x \in Q$ пересечение $Q \cap \mathbb{T}_x Q$ является объединением двух различных прямых. Поскольку всякая прямая, лежащая на Q и проходящая через x, должна лежать в этом пересечении, мы снова получаем, что через каждую точку на Q проходят ровно две прямые.

Зафиксируем теперь точку $x_0 \in Q$, и пусть L_0 и M_0 — две прямые на Q, проходящие через x_0. Через каждую точку $\lambda \in L_0$ проходит еще одна прямая, лежащая на Q (обозначим ее через M_λ); аналогично, через каждую точку $\mu \in M_0$ проходит еще одна прямая $L_\mu \subset Q$. Стало быть, на Q имеются два семейства прямолинейных образующих, причем каждое из этих семейств параметризовано с помощью $\mathbb{P}^1$. Заметим, что: 1) прямые из семейства $\{L_\lambda\}$ попарно не пересекаются, поскольку Q не может содержать три попарно пересекающиеся (и тем самым компланарные, поскольку Q гладка) прямые; 2) по тем же причинам ни одна прямая не может лежать одновременно в обоих семействах; наконец, 3) каждая прямая L_λ должна пересекаться с каждой прямой M_μ, поскольку прямая $\mathbb{T}_\lambda Q \cap \mathbb{T}_\mu Q$ должна пересекать Q в двух точках, а именно в x_0 и в точке $L_\lambda \cap M_\mu$.

Наконец, мы утверждаем, что всякая точка $x \in Q$ лежит в точности на одной прямой из каждого семейства. Однако же это очевидно: поскольку две прямые L и M, проходящие через X, составляют пересечение Q с некоторой плоскостью, одна из этих прямых должна пересекаться с L_0 и тем самым иметь вид M_λ, а другая должна пересекаться с M_0 и тем самым иметь вид L_μ. Стало быть, у нас получился изоморфизм Q с $L_0 \times M_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.



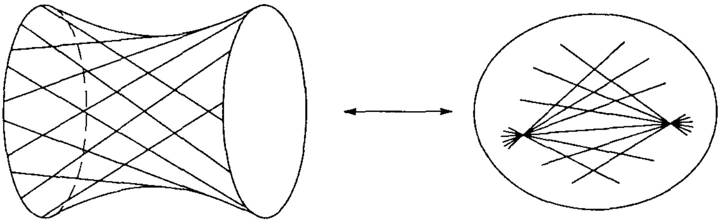
Вспомним также, как в примерах 7.11 и 7.22 мы анализировали отображение проекции $\pi_x \colon Q \to H \cong \mathbb{P}^2$ из точки $x \in Q$ на плоскость H. В этом случае есть два отличия от того, что происходит с плоской коникой. Во-первых, π_x является всего лишь рациональным отображением, и продолжить его до регулярного отображения невозможно: при стремлении точки $y \in Q$ к точке x предельное положение прямой $\overline{xy}$ может быть любой прямой[1] на касательной плоскости $\mathbb{T}_x Q$, а предельное положение ее образа $\pi_x(y)$ может быть любой точкой на прямой $\mathbb{T}_x Q \cap H$. Во-вторых, если в случае коники всякая прямая $l \subset \mathbb{P}^2$, проходящая через x (за исключением касательной прямой), пересекала Q в точности в одной точке, отличной от x, то на Q, напротив, лежат, как мы видели, две прямые L и M, проходящие через x. Стало быть, если говорить о графике Γ отображения π_x, то отображение π_1 из Γ в Q является изоморфизмом всюду, кроме как над точкой x, слой E над которой изоморфен $\mathbb{P}^1$. Отображение $\pi_2 \colon \Gamma \to \mathbb{P}^2$ является изоморфизмом всюду, кроме как над точками p и q, в которых прямые L и M пересекаются с плоскостью $\mathbb{P}^2$, и переводит кривую E в прямую $\mathbb{T}_x Q \cap \mathbb{P}^2 = \overline{pq}$. В примере 7.22 мы выразили эту мысль, сказав, что квадрика Q получается из плоскости $\mathbb{P}^2$ раздутием двух точек p и q и стягиванием соединяющей их прямой.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Gamma = \text{график } \pi_x \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
Q \arrow[rr, dashed, "\pi_x"'] & & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}
$$

Заметим, что коль скоро прямая L переводится в точку $p \in \mathbb{P}^2$, прямолинейные образующие из семейства $\{M_\mu\}$ проектируются в прямые, проходящие через p, а семейство прямых $\{L_\lambda\}$ аналогичным образом

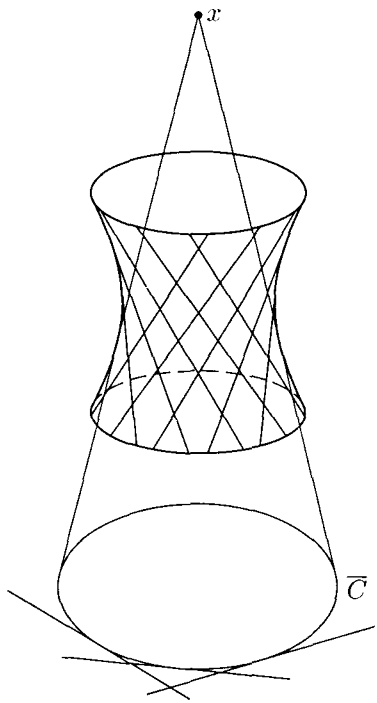
[1]Проходящей через x. — *Прим. перев.*

переходит в пучок прямых, проходящих через q. Тем самым обратное отображение из $\mathbb{P}^2$ в Q может быть реализовано как отображение, переводящее точку $r \in \mathbb{P}^2$ в пару (наклон $\overline{pr}$, наклон $\overline{qr}$).



Читатель легко проверит, что обратное к отображению π_x можно также задать как композицию квадратичного отображения Веронезе $\nu_2\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ и проекции его образа из точек $\nu_2(p)$ и $\nu_2(q)$ (ср. упражнение 22.3).

Наконец, еще одно представление гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^3$ получится, если спроектировать Q из точки x, не лежащей на Q. Разумеется, большинство прямых, проходящих через x, будут пересекать Q дважды, так что это отображение представляет Q в виде двулистного накрытия $\mathbb{P}^2$. Что же до множества тех точек $p \in Q$, для которых прямая $\overline{px}$ касается Q в точке p (иными словами, точек p, для которых $x \in \mathbb{T}_p Q$), то, как мы видели, это множество является пересечением $C = Q \cap H$, где H — некоторая плоскость; стало быть, π_x представляет Q в виде двулистного накрытия плоскости $\mathbb{P}^2$, разветвленного вдоль коники $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$.



Прямолинейные образующие на Q можно представить себе еще и таким способом: каждая прямая, лежащая на Q, пересекает плоское сечение $C \subset Q$ ровно в одной точке, так что и ее образ на плоскости будет прямой, пересекающей $\overline{C}$ ровно в одной точке, т.е. касательной к $\overline{C}$. На самом деле прообраз касательной к $\overline{C}$ в точке $\pi_x(p)$

будет совпадать с пересечением $\mathbb{T}_x Q \cap Q$, которое состоит из объединения двух прямолинейных образующих.

Отметим, что мы уже имели дело с описанным выше отображением, только в другом обличье: отображение $\pi_x\colon Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ есть отображение из произведения $\mathbb{P}^1$ на себя в симметрический квадрат $\mathbb{P}^1$, который, как мы видели (упражнение 10.23), изоморфен $\mathbb{P}^2$. Это отображение переводит упорядоченную пару (p, q) точек на $\mathbb{P}^1$ в неупорядоченную пару $p + q$.

Квадрики в $\mathbb{P}^n$

До сих пор гладкие квадрики, с которыми мы имели дело, были многообразиями, с которыми мы сталкивались и в других контекстах. На самом деле изоморфизмы плоской коники с $\mathbb{P}^1$ и квадрики в $\mathbb{P}^3$ с $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ соответствуют изоморфизмам комплексных групп Ли $\mathrm{SO}_3 K \cong \mathrm{PSL}_2 K$ и $\mathrm{SO}_4 K/\{\pm I\} \cong \mathrm{PSL}_2 K \times \mathrm{PSL}_2 K$ соответственно (разумеется, второй из этих изоморфизмов не имеет места для вещественных групп Ли; этому соответствует то обстоятельство, что вещественная квадрика не обязана иметь прямолинейные образующие). Дальнейшие совпадения $\mathrm{SO}_5 K \cong \mathrm{Sp}_4 K$ и $\mathrm{SO}_6 K/\{\pm I\} \cong \mathrm{PSL}_4 K$ дадут, как мы увидим, альтернативные описания квадрик в $\mathbb{P}^4$ и $\mathbb{P}^5$. Больше, однако, совпадений не будет, так что не будет и изоморфизмов квадрик с другими естественно определяемыми многообразиями (разве что еще один, отвечающий тройственности на $\mathrm{SO}_8 K$; см. упражнение 22.20). Два представления гладкой квадрики Q с помощью проекции остаются, тем не менее, в силе; сейчас мы их опишем.

Начнем с более простого, а именно с того, что получается с помощью проекции из точки $x \notin Q$. Снова каждая прямая, проходящая через x, пересекает Q в одной или двух точках, так что π_x представляет Q в виде двулистного разветвленного накрытия гиперплоскости $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Как и в случае квадратичной поверхности, слои π_x, состоящие из одной точки, соответствуют множеству таких точек $p \in Q$, что прямая $\overline{xp}$ касается Q в точке q. Это условие равносильно тому, что $x \in \mathbb{T}_p Q$, или же, эквивалентным образом, тому, что p лежит в гиперплоскости Λ, соответствующей точке $\widetilde{Q}(x) \in \mathbb{P}V^*$. Поскольку $x \notin Q$, гиперплоскость $\widetilde{Q}(x)$ не касается Q и тем самым пересекает Q по гладкой квадрике $C \subset \Lambda \cong \mathbb{P}^{n-1}$, которая, в свою очередь, изоморфно проектируется на гладкую квадрику $\overline{C} \subset H$. Стало быть, можно сказать, что гладкая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^n$ является двулистным накрытием $\mathbb{P}^{n-1}$, разветвленным вдоль гладкой квадрики $\overline{C} \subset \mathbb{P}^{n-1}$.

Все это, конечно, можно увидеть и непосредственно из уравнения Q: если $x = [0, \ldots, 0, 1] \notin Q$, то уравнение можно записать в виде

$$Q(Z_0, \ldots, Z_n) = Z_n^2 + a(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) \cdot Z_n + b(Z_0, \ldots, Z_{n-1}),$$

где a и b — однородные многочлены степеней 1 и 2 соответственно; тогда Q будет двулистным накрытием над $\mathbb{P}^{n-1}$, разветвленным над гиперповерхностью, заданной уравнением $a^2 - 4b = 0$.

Заметим, что, как и в случае квадратичной поверхности, прямые на Q переходят при проекции π_x в прямые в H, которые либо касаются квадрики $\overline{C}$, либо лежат на ней. Если прямая $l \subset H$ касается $\overline{C}$, то $\pi_x^{-1}(l)$ состоит ровно из двух прямых на Q, а если $l \subset \overline{C}$, то прообразом l будет, конечно, только одна прямая.

Упражнение 22.2. Пользуясь этим представлением гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^n$, найдите размерность многообразия Фано $F_1(Q)$, состоящего из прямых, лежащих на Q, и покажите, что при $n \geqslant 4$ это многообразие неприводимо.

Проекция гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^n$ на гиперплоскость $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ из точки $x \in Q$ приводит к совершенно другой картине. Как и раньше, это рациональное отображение, а не регулярное; предельным положением точки $\pi_x(p)$ при стремлении p к x может быть любая точка из $H \cap \mathbb{T}_x Q$. Тем самым график Γ этого отображения — раздутие квадрики Q в точке x, и проекция переводит исключительный дивизор E этого раздутия в гиперплоскость $\mathbb{T}_x Q \cap H$.

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma = \text{график } \pi_x \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
Q \arrow[rr, dashed, "\pi_x"'] & & \mathbb{P}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

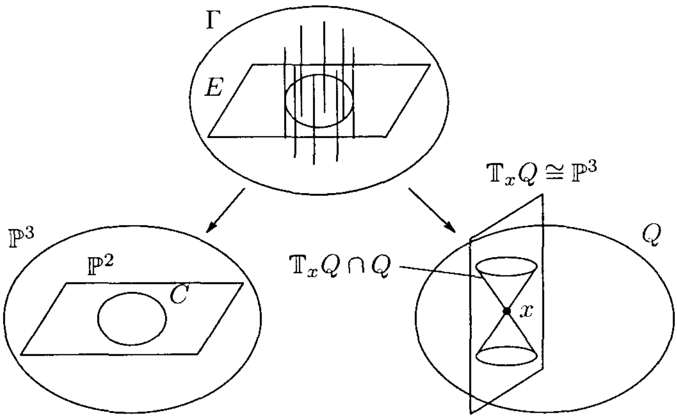
При этом π_2 будет стягивать в точки все прямые, лежащие на Q и проходящие через x. Однако же всякая такая прямая лежит в касательном пространстве $\mathbb{T}_x Q$ и тем самым в пересечении $\mathbb{T}_x Q \cap Q$. В силу сказанного выше это пересечение имеет ранг $n - 1$: значит, оно является конусом над гладкой квадратичной гиперповерхностью C, лежащей в плоскости $\mathbb{T}_x Q \cap H \cong \mathbb{P}^{n-2} \subset H \cong \mathbb{P}^{n-1}$. На графике, стало быть, все эти прямые соответствуют попарно непересекающимся кривым, стягивающимся в точки на квадрике C; на самом деле Γ является раздутием гиперплоскости $\mathbb{P}^{n-1}$ вдоль квадрики C. Подытожим: гладкая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^n$ может быть получена, если раздуть $\mathbb{P}^{n-1}$ вдоль гладкой квадрики C, лежащей в гиперплоскости $\mathbb{P}^{n-2} \subset \mathbb{P}^{n-1}$, а затем стянуть в точку собственный прообраз гиперплоскости $\mathbb{P}^{n-2}$, содержащей C.

Упражнение 22.3. Проверьте это утверждение, показав, что Q является образом $\mathbb{P}^{n-1}$ относительно рационального отображения

$$\varphi\colon \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^n,$$
$$[Z_0, \ldots, Z_{n-1}] \mapsto [F_0(Z), \ldots, F_n(Z)],$$

где $\{F_0, \ldots, F_n\}$ — базис векторного пространства квадрик в $\mathbb{P}^{n-1}$, обращающихся в нуль на квадратичной гиперповерхности $C \subset \mathbb{P}^{n-2} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ (равносильное описание: Q является образом многообразия Веронезе $\nu_2(\mathbb{P}^{n-1}) \subset \mathbb{P}^N$ при проекции из пространства $\Lambda \subset \mathbb{P}^N$, являющегося линейной оболочкой $\nu_2(C)$).

На следующем рисунке мы попытались изобразить отображение π_x для случая квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$.



Упражнение 22.4. Покажите, что прямые на Q, не проходящие через точку x, соответствуют при этой проекции прямым в $\mathbb{P}^{n-1}$, пересекающимся с квадрикой C. С помощью этого утверждения найдите еще раз размерность семейства прямых на Q и покажите, что оно неприводимо при $n \geqslant 4$.

Линейные пространства на квадриках

Теперь мы собираемся дать общее описание линейных пространств, содержащихся в гладких квадриках, то есть описать многообразие Фано

$$F_k(Q) = \{\Lambda \mid \Lambda \subset Q\} \subset \mathbb{G}(k, n),$$

состоящее из k-плоскостей, лежащих на Q (поскольку все гладкие квадрики в $\mathbb{P}^n$ изоморфны, мы будем часто опускать букву Q и обозначать многообразие k-плоскостей на гладкой m-мерной квадрике через $F_{k,m}$).

Мы хотим выяснить, в каких случаях многообразие $F_{k,m}$ непусто, какова его размерность, будет ли оно неприводимо и т. п.

На вопрос о непустоте ответить легко. Плоскость $\Lambda = \mathbb{P}W$ лежит на квадрике $Q \subset \mathbb{P}V$ тогда и только тогда, когда соответствующее линейное подпространство $W \subset V$ является *изотропным* относительно формы Q, то есть когда $Q|_W \equiv 0$, или, равносильно, $\widetilde{Q}(W) \subset \mathrm{Ann}(W)$. Однако же если Q гладка, то $\widetilde{Q}$ является изоморфизмом, так что выполнены неравенства

$$\dim(W) \leqslant \dim(\mathrm{Ann}(W)) = \dim(V) - \dim(W),$$

то есть

$$2 \cdot \dim(W) \leqslant \dim(V).$$

Поскольку размерность квадрики Q на 2 меньше размерности векторного пространства V, а размерность Λ на 1 меньше размерности W, эту мысль можно выразить, сказав, что гладкая квадрика не содержит линейных подпространств, размерность которых превосходит половину ее размерности. Вскоре мы увидим, что при всех $k \leqslant \dim(Q)/2$ квадрика Q действительно содержит k-плоскости.

Отметим, что, хотя на первый взгляд приведенное рассуждение использует специфику квадрик, оно применимо (в слегка измененном виде) и к гиперповерхностям произвольной степени. Именно, если $X \subset \subset \mathbb{P}^{n-1}$, то гауссово отображение $\mathscr{G}\colon X \to \mathbb{P}^{n*}$ является регулярным. Если $\Lambda \subset X$ — линейное пространство, то для всякой точки $x \in \Lambda$ касательное пространство к X в точке x будет, бесспорно, содержать Λ. Стало быть, гауссово отображение отображает Λ в линейное пространство $\mathrm{Ann}(\Lambda) \subset \mathbb{P}^{n*}$, состоящее из гиперплоскостей, содержащих Λ; это пространство является $(n - \dim(\Lambda) - 1)$-плоскостью. Однако же в упражнении 11.39 мы видели, что при $k > l$ не существует регулярного отображения из $\mathbb{P}^k$ в $\mathbb{P}^l$; стало быть,

$$\dim(\Lambda) \leqslant \dim(\mathrm{Ann}(\Lambda)) = n - \dim(\Lambda) - 1 = \dim(X) - \dim(\Lambda).$$

Тем самым X не содержит линейных подпространств, размерность которых превосходила бы половину его размерности.

Пример 22.5. Прямые на квадриках

Один пример мы уже разобрали: как мы неоднократно убеждались, многообразие $F_{1,2}$, состоящее из прямых на квадратичной поверхности, изоморфно несвязному объединению двух экземпляров $\mathbb{P}^1$. Рассмотрим теперь многообразие $\Gamma = F_{1,3}$, состоящее из прямых на гладкой трехмерной квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$. Конечно, трудолюбивый читатель должен был уже подсчитать его размерность и установить его неприводимость, причем двумя способами, представленными в упражнениях 22.2 и 22.4; мы сейчас сделаем это по-другому.

Наш подход будет состоять в рассмотрении отношения инцидентности Ψ, состоящего из пар «точка $x \in Q$ и прямая $l \subset Q$, проходящая через x»: мы полагаем

$$\Psi = \{(x, l) \mid x \in l \subset Q\} \subset Q \times \Gamma.$$

Каким будет слой Ψ над точкой x? Поскольку всякая прямая, лежащая на Q и проходящая через x, должна лежать в касательной гиперплоскости $\mathbb{T}_x Q \cong \mathbb{P}^3$, мы получаем, что все слои Ψ над Q изоморфны $\mathbb{P}^1$. Отсюда следует, что Ψ неприводимо и имеет размерность $\dim(Q) + 1 = 4$. Наконец, поскольку слой Ψ над точкой $l \in \Gamma$ — это сама прямая l, отсюда следует, что Γ неприводимо и имеет размерность $\dim(\Psi) - 1 = 3$.

На самом деле многообразие Ψ нам очень хорошо знакомо: это не что иное, как трехмерное проективное пространство. Доказательство этого факта намечено в следующем упражнении.

Упражнение 22.6. Пусть V — четырехмерное векторное пространство над K и $\Omega\colon V \times V \to K$ — невырожденное кососимметрическое билинейное спаривание. Покажите, что множество Q, состоящее из двумерных изотропных линейных подпространств в V, является подмногообразием в грассманиане $G(2, 4) = \mathbb{G}(1, 3)$, а также что оно изоморфно гладкой квадратичной гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$. Покажите, что для всякой точки $p \in \mathbb{P}V \cong \mathbb{P}^3$ многообразие изотропных подпространств, содержащих p, является прямой на Q, и обратно, что каждая прямая на Q имеет такой вид для единственной точки p. Выведите отсюда, что $F_{1,3} \cong \mathbb{P}^3$.

Отметим, что мы можем воспользоваться отношением инцидентности Ψ для описания семейства прямых на квадрике $Q \subset \mathbb{P}^n$ для любого n: обозначим через $F = F_1(Q)$ многообразие Фано прямых на X и положим, как и выше,

$$\Psi = \{(x, l) \mid x \in l \subset Q\} \subset Q \times F.$$

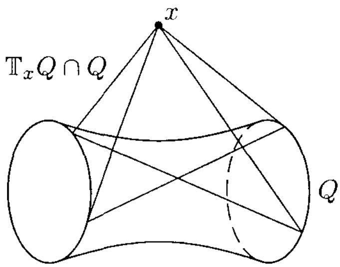
Тогда то же самое рассуждение показывает, что слои Ψ над Q изоморфны гладким квадрикам $Q' \subset \mathbb{P}^{n-2}$, так что Q неприводимо размерности $2n - 4$, а F неприводимо размерности $2n - 5$.

Пример 22.7. Плоскости на четырехмерных квадриках

Теперь посмотрим на гладкую квадратичную гиперповерхность $Q \subset \subset \mathbb{P}^5$ и попробуем изучить многообразие $F = F_2(Q)$, состоящее из 2-плоскостей, лежащих на Q. Мы снова воспользуемся отношением инцидентности между точками и содержащими их плоскостями; именно, положим

$$\Psi = \{(x,\, \Lambda) \mid x \in \Lambda \subset Q\} \subset Q \times F.$$

Чтобы описать слой Ψ над точкой $x \in Q$, заметим, что всякая 2-плоскость на Q, проходящая через x, будет лежать в пересечении $\mathbb{T}_x Q \cap Q$, являющемся конусом над гладкой квадратичной поверхностью Q'. Стало быть, 2-плоскости на Q, проходящие через x, соответствуют прямым на квадрике Q', которые, как мы видели, параметризуются семейством $\Gamma_{1,2} \cong \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$. Отсюда следует, что Ψ имеет размерность $\dim(Q) + 1 = 5$ и тем самым F имеет размерность 3.

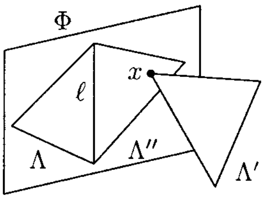


Что можно сказать о неприводимости F? На сей раз ситуация не такая, как прежде: поскольку каждый слой Ψ над Q состоит из двух компонент связности, компоненты слоев Ψ (то есть семейства плоскостей на сечениях Q касательными гиперплоскостями) образуют двулистное накрытие квадрики Q. Тем самым имеются две возможности: либо F неприводимо, либо оно состоит из двух неприводимых компонент связности, причем два разных семейства плоскостей на $\mathbb{T}_x Q \cap Q$ соответствуют разным компонентам. На самом деле имеет место второй случай: на Q лежат два разных семейства 2-плоскостей. Примем пока что это утверждение на веру и продолжим; в конце нашего обсуждения мы укажем три способа его доказать.

При анализе прямых на квадрике в $\mathbb{P}^3$ мы видели, что две прямые из одного семейства либо не пересекаются, либо совпадают, а две прямые из разных семейств всегда пересекаются в одной точке. Зададимся аналогичными вопросами для $Q \subset \mathbb{P}^5$: как именно могут пересекаться различные 2-плоскости на Q? Оказывается, что ответ выводится из ответа для квадратичной поверхности с помощью приведенной выше конструкции.

Именно, предположим, что две плоскости Λ, $\Lambda' \subset Q$ имеют в пересечении хотя бы одну точку x. Тогда они обе лежат в пересечении $\mathbb{T}_x Q \cap Q$ и тем самым являются конусами над прямыми l, l', лежащими на квадратичной поверхности Q'; Λ и Λ' лежат в одном и том же семействе тогда и только тогда, когда l и l' лежат в одном и том же семействе на Q'. Поскольку размерность пересечения $\Lambda \cap \Lambda'$ на единицу больше, чем размерность $l \cap l'$, получаем, что если Λ и Λ' принадлежат к одному и тому же семейству, то $\Lambda \cap \Lambda'$ будет либо точкой, либо 2-плоскостью, а если они принадлежат к разным семействам, то их пересечение (по-прежнему в предположении, что оно непусто) будет прямой.

Что происходит, если Λ и Λ' не пересекаются? Пусть в этом случае Ψ — произвольная 3-плоскость, содержащая Λ. Поскольку пересечение $\Phi \cap Q$ содержит 2-плоскость, его ранг не может превосходить 2; стало быть, в силу упражнения 22.1 этот ранг в точности равен 2, так что $\Phi \cap Q$ является объединением Λ с некоторой другой 2-плоскостью Λ''. Разумеется, Λ'' пересекается с Λ по прямой, так что в силу сказанного выше плоскости Λ'' и Λ должны принадлежать к различным семействам. С другой стороны, Φ должно пересекаться с плоскостью Λ', а поскольку это пересечение содержится в $\Lambda \cup \Lambda''$ и не пересекается с Λ, оно не может быть чем-либо иным, кроме единственной точки, лежащей на Λ''. Отсюда следует, что Λ и Λ'' лежат в одном семействе, так что Λ и Λ' лежат в разных семействах. Итак, мы доказали следующее.



Предложение 22.8. *Две 2-плоскости на Q из одного и того же семейства либо совпадают, либо пересекаются в одной точке; две 2-плоскости из разных семейств либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются.*

Как выглядят компоненты многообразия F? Ответ оказывается простым. Именно, рассмотрим сначала прямую $l \subset Q$. Как мы отмечали, гауссово отображение квадрики Q есть ограничение линейного изоморфизма $\mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^{5*}$, так что гиперплоскости $\mathbb{T}_x Q$, касательные к Q в точках $x \in l$, образуют прямую в $\mathbb{P}^{5*}$. Стало быть, их пересечение является 3-плоскостью Φ_l, пересечение которой с Q особо в каждой точке прямой l. Стало быть, $\Phi_l \cap Q$ должно быть квадрикой ранга 2, т. е. состоять из двух различных 2-плоскостей; обратно, всякая 2-плоскость $\Lambda \subset Q$, содержащая l, будет лежать в $\mathbb{T}_x Q$ для всякой $x \in l$, и тем самым в $\Phi_l \cap Q$. Тем самым мы показали, что всякая прямая $l \subset Q$ содержится ровно в двух плоскостях, лежащих на Q. Конечно, эти 2-плоскости должны лежать в различных семействах, так как они пересекаются по прямой.

Пусть теперь H — общая гиперплоскость в $\mathbb{P}^5$ (на самом деле — любая гиперплоскость, для которой пересечение $Q' = H \cap Q$ гладко). Поскольку Q' не содержит 2-плоскостей, всякая 2-плоскость Λ, лежащая на Q, будет пересекаться с H по прямой l_Λ. Обратно, выше мы видели, что для данной прямой l в каждом из двух семейств существует единственная 2-плоскость, содержащая l; стало быть, соответствие $\Lambda \mapsto l_\Lambda$ задает изоморфизм между каждой из компонент связности многообразия F и многообразием $F_1(Q') = F_{1,3}$, состоящим из прямых на Q'. Поскольку в упражнении 22.6 мы установили, что это последнее изоморфно $\mathbb{P}^3$, мы заключаем, что многообразие Фано F, состоящее из 2-плоскостей, лежащих на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^5$, изоморфно несвязному объединению двух экземпляров $\mathbb{P}^3$.

Три обещанных доказательства того факта, что на Q лежат два семейства 2-плоскостей, предложены в следующих трех упражнениях.

Упражнение 22.9. Выведите тот факт, что многообразие F (многообразие 2-плоскостей на Q) имеет две компоненты, показав, что подсемейство плоскостей, пересекающихся с данной 2-плоскостью Λ_0 в точке или совпадающих с Λ_0, является неприводимой компонентой многообразия F.

Упражнение 22.10. Покажите, что группа $\mathrm{O}(6) = \mathrm{O}(V, Q)$ транзитивно действует на множестве максимальных изотропных подпространств относительно Q и что стабилизатор данного изотропного пространства лежит в $\mathrm{SO}(6)$. Выведите отсюда, что $F_{2,4}$ состоит из двух компонент.

Упражнение 22.11. Докажите, что $F_{2,4}$ состоит из двух компонент, воспользовавшись изоморфизмом Q с грассманианом $\mathbb{G}(1, 3)$ и применив упражнение 6.5.

Пример 22.12. Многообразия Фано квадрик в общем случае

Мы потратили немало времени на случай квадрик в $\mathbb{P}^5$, но зато общий случай получится теперь довольно легко. Чтобы понять (по крайней мере с принятой нами в данный момент точки зрения) строение многообразия $F_k(Q) = F_{k,n-1}$, состоящего из k-плоскостей, лежащих на квадрике в $\mathbb{P}^n$, мы воспользуемся в качестве основного инструмента введенным выше отношением инцидентности Ψ между точками и k-плоскостями, лежащими на Q:

$$\Psi = \{(x, \Lambda) \mid x \in \Lambda \subset Q\} \subset Q \times F_{k,n-1}.$$

Как и выше, слой Ψ над точкой $x \in Q$ есть просто многообразие k-плоскостей $\Lambda \subset Q$, содержащих x, то есть многообразие k-плоскостей на пересечении $\mathbb{T}_x Q \cap Q$, проходящих через x. Однако же $\mathbb{T}_x Q \cap Q$ есть конус с вершиной x над гладкой квадрикой $Q' \subset \mathbb{P}^{n-2}$, так что k-плоскости, лежащие на $\mathbb{T}_x Q \cap Q$, в точности соответствуют $(k-1)$-плоскостям, лежащим на Q'. Иными словами, слои Ψ над Q изоморфны многообразию $F_{k-1}(Q') = F_{k-1,n-3}$, состоящему из $(k-1)$-плоскостей на гладкой квадрике, размерность которой на 2 меньше. Стало быть,

$$\dim(\Psi) = \dim(F_{k-1,n-3}) + n - 1,$$

откуда

$$\dim(F_{k,n-1}) = \dim(F_{k-1,n-3}) + n - k - 1.$$

Более того, если многообразие $F_{k-1,n-3}$ неприводимо, мы можем отсюда вывести, что Ψ, а значит и $F_{k,n-1}$, также неприводимо. Этим покрываются все случаи, кроме случая линейных пространств максимальной размерности на четномерных квадриках. Итак, мы доказали следующий факт.

Теорема 22.13. *Многообразие $F_{k,m}$, состоящее из k-плоскостей, лежащих на m-мерной гладкой квадратичной гиперповерхности, является гладким многообразием размерности*

$$\dim(F_{k,m}) = (k+1)\left(m - \frac{3k}{2}\right),$$

если $k \leqslant m/2$, и пусто в противном случае; если $k < m/2$, то это многообразие неприводимо.

В специальном случае $m = 2k$ ситуация — как опять-таки можно было ожидать, судя по разобранным примерам — более интересна.

Теорема 22.14. *Пусть $Q \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ — гладкая квадрика. Тогда*

(i) *многообразие $F_k(Q) = F_{k,2k}$ состоит из двух компонент связности;*

(ii) *для любых двух k-плоскостей Λ, $\Lambda' \subset Q$ имеем*

$$\dim(\Lambda \cap \Lambda') \equiv k \pmod 2$$

тогда и только тогда, когда Λ и Λ' лежат в одной связной компоненте $F_k(Q)$;

(iii) *для всякой $(k-1)$-плоскости, лежащей на Q, существуют ровно две содержащие ее k-плоскости, лежащие на Q, и эти k-плоскости принадлежат разным компонентам многообразия $F_k(Q)$; стало быть,*

(iv) *каждая из компонент связности многообразия $F_{k,2k}$ изоморфна $F_{k-1,2k-1}$.*

Упражнение 22.15. Докажите теорему 22.14.

Упражнение 22.16. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^n$ — гладкая квадрика; рассмотрим многообразие $F_{k,l}(Q) \subset \mathbb{G}(k, n)$, определенное следующим образом:

$$F_{k,l}(Q) = \{\Lambda \subset \mathbb{P}^n \mid \operatorname{rank}(\Lambda \cap Q) \leqslant l\}.$$

Найдите размерность многообразия $F_{k,l}(Q)$ и его неприводимые компоненты. Гладко ли это многообразие?

Упражнение 22.17. Докажите теорему 22.13 с помощью представления квадрики Q как двулистного накрытия $\mathbb{P}^{n-1}$, разветвленного в квадрике. Можете ли вы таким же способом доказать теорему 22.14?

Упражнение 22.18. То же задание, что в упражнении 22.17, но на сей раз надо воспользоваться представлением Q, получаемым с помощью проекции из точки $x \in Q$.

Упражнение 22.19. Обозначим через $\mathscr{Q}$ проективное пространство, состоящее из всех квадрик в $\mathbb{P}^n$. Выведите утверждения о размерностях, содержащиеся в теоремах 22.13 и 22.14, рассматривая отношение инцидентности $\Xi \subset \mathscr{Q} \times \mathbb{G}(k, n)$, определенное следующим образом:

$$\Xi = \{(Q, \Lambda) \mid \Lambda \subset Q\}.$$

Для этого оцените размерность слоев Ξ над $\mathbb{G}(k, n)$, чтобы найти размерность Ξ, а затем и размерность общего слоя Ξ над $\mathscr{Q}$, то есть $F_{k,n-1}$. Что в этом рассуждении не проходит, если $k > (n-1)/2$?

Упражнение 22.20. Вот еще одно совпадение. Покажите, что каждая из компонент многообразия $F_{3,6}$, состоящего из 3-плоскостей, лежащих на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^7$, изоморфна самой квадрике Q. (Это — проявление *тройственности*, то есть наличие у диаграммы Дынкина группы $\mathrm{SO}_8 K$ автоморфизма порядка 3; см. [FH].)

Семейства квадрик

Как мы отмечали в начале лекции, все становится еще интереснее, когда мы начинаем рассматривать не индивидуальные квадрики, но семейства квадрик. На этом мы и сосредоточимся до конца лекции; для начала мы рассмотрим семейство всех квадрик в $\mathbb{P}^n$ (и даже в $\mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^2$).

Пример 22.21. Семейство квадрик в $\mathbb{P}^1$

Рассмотрим многообразие, параметризующее все квадрики в $\mathbb{P}^1$. Как мы видели, если записать уравнение произвольной квадрики $C \subset \mathbb{P}^1$ в виде

$$C = (aX^2 + bXY + cY^2),$$

то будет ясно, что пространство Ψ, состоящее из всех квадрик в $\mathbb{P}^1$, будет не чем иным, как проективной плоскостью $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами a, b и c. Заметим, что это частный случай изоморфизма между n-й симметрической степенью $\mathbb{P}^1$ и пространством $\mathbb{P}^n$, о котором шла речь в примере 10.23.

В лекции 4 отмечалось, что естественно спросить, какие множества точек на этой плоскости соответствуют двум разным типам квадрик. В данном случае ответ получается немедленно: множество особых квадрик $\Sigma \subset \Psi$ задается дискриминантом

$$\Sigma = (b^2 - 4ac),$$

так что это гладкая плоская коника в $\Psi \cong \mathbb{P}^2$. Рассуждая по-другому, заметим, что отображение

$$v\colon \mathbb{P}^1 \to \Psi \cong \mathbb{P}^2,$$

переводящее точку $P \in \mathbb{P}^1$ в квадрику $2P \in \Psi$, является алгебраическим: оно переводит точку $[\alpha, \beta]$, являющуюся множеством нулей линейного многочлена $\beta X - \alpha Y$, в квадрику $(\beta X - \alpha Y)^2 = \beta^2 X^2 - 2\alpha\beta XY + \alpha^2 Y^2$, так что в координатах мы имеем

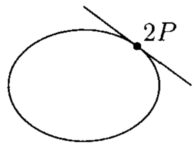
$$v\colon [\alpha, \beta] \mapsto [\beta^2, 2\alpha\beta, \alpha^2].$$

Далее, нам может, например, захотеться описать множество L_P, состоящее из квадрик $C \subset \mathbb{P}^1$, содержащих данную точку $P \in \mathbb{P}^1$, то есть квадрик вида $P + Q$ при фиксированном P. Нетрудно видеть, что это множество будет прямой на $\Psi \cong \mathbb{P}^2$; например, для данной точки $P = [\alpha, \beta]$ условие

$$a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 = 0,$$

означающее, что квадрика обращается в нуль в P, является, очевидно, линейным условием на коэффициенты a, b и c квадрики C, так что множество таких C является прямой. Можно также вместо этого описать множество таких квадрик параметрически. Мы имеем

$L_P = \{P + Q \mid Q \in \mathbb{P}^1\}$



$\{2Q \mid Q \in \mathbb{P}^1\}$

$$L_P = \{(\beta X - \alpha Y) \cdot (\delta X - \gamma Y)\}_{[\gamma, \delta] \in \mathbb{P}^1},$$

так что параметрически L_P задается как прямая

$$L_P = \{[\delta\beta, -\delta\alpha - \gamma\beta, \gamma\alpha]\}_{[\gamma, \delta] \in \mathbb{P}^1}.$$

Как это связано с коникой $\Sigma \subset \Psi$? Ответ ясен: поскольку прямая L_P может пересекаться с коникой Σ только в одной точке — квадрике $2P$, — прямая L_P должна касаться Σ в $2P$. Можно получить то же утверждение и непосредственно с помощью аналитических, а не синтетических методов: касательная к конике

$$\Sigma = (b^2 - 4ac)$$

в точке $[U, V, W]$ есть

$$-4W \cdot a + 2V \cdot b - 4U \cdot c = 0;$$

стало быть, в точке

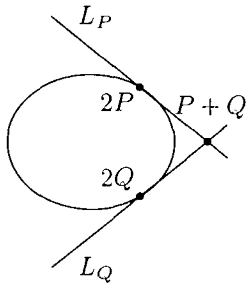
$$2P = [\beta^2, -2\alpha\beta, \alpha^2]$$

это будет прямая

$$\mathbb{T}_{2P}(\Sigma) = (-4\alpha^2 \cdot a - 4\alpha\beta \cdot b - 4\beta^2 \cdot c),$$

что совпадает с данным ранее уравнением прямой L_P.

Отметим в заключение, что касательные прямые к конике Σ, проведенные в точках $2P$ и $2Q$, должны пересечься в точке плоскости Ψ, соответствующей квадрике $P+Q$; обратно, всякая точка $P+Q$ на плоскости Ψ, не лежащая на Σ, будет лежать в точности на двух касательных к Σ; это соответствует тому факту, что многообразие, двойственное к Σ, также будет квадратичной гиперповерхностью.



Пример 22.22. Многообразие квадрик в $\mathbb{P}^2$

Геометрия пространства $\mathbb{P}^5$, параметризующего плоские коники, очень красива. Мы уже несколько раз имели с ней дело; здесь мы соберем то, что мы говорили на эту тему раньше, а также сформулируем в виде упражнений некоторые дополнительные утверждения.

Для начала отметим, что в пространстве квадрик, то есть в $\mathbb{P}^5$, есть два выделенных подмногообразия: множество Φ, состоящее из двойных прямых, и множество особых коник Σ. Первое из этих подмногообразий — это просто поверхность Веронезе: это образ отображения $\mathbb{P}^{2*} \to \mathbb{P}^5$, переводящего прямую $L \subset \mathbb{P}^2$ в соответствующую двойную прямую, а это и есть отображение Веронезе ν_2. Второе подмногообразие можно реализовать либо как многообразие секущих, либо как многообразие касательных поверхности Φ; это гиперповерхность степени 3. Если представить $\mathbb{P}^5$ как множество ненулевых симметрических (3×3)-матриц с точностью до умножения на скаляр, то Φ и Σ будут множествами матриц ранга 1 и ранга $\leqslant 2$ соответственно.

Упражнение 22.23. Покажите, что Σ особо в точности вдоль поверхности Φ.

Упражнение 22.24. Пусть L и M — две различные прямые на $\mathbb{P}^2$. Покажите, что проективное касательное пространство к Φ в точке $2L$ есть пространство коник, содержащих L. Покажите, что проективное касательное пространство к Σ в точке $L+M$ есть пространство коник, содержащих точку $L \cap M$. Выведите отсюда, что многообразие, двойственное к Φ, изоморфно Σ и что многообразие, двойственное к Σ, изоморфно Φ.

Упражнение 22.25. Пусть $L \subset \mathbb{P}^2$ — произвольная прямая и $\Gamma_L \subset \mathbb{P}^5$ — пространство коник, касающихся L или содержащих L. Покажите, что Γ_L является квадратичной гиперповерхностью ранга 3, вершиной которой является линейное пространство Λ_L, состоящее из коник, содержащих L.

Упражнение 22.26. Пусть, как и выше, $L \subset \mathbb{P}^2$ — прямая. Покажите, что проективный касательный конус $\mathbb{T}_{C_{2L}}(\Sigma)$ в точке $2L$ (к Σ) является многообразием коник, касательных к L или содержащих L, и что кратность Σ в точке $2L$ равна 2.

Пример 22.27. Полные коники

Некоторые очень интересные явления, связанные с двойственными многообразиями, можно увидеть в простейшем возможном случае плоских коник. Как мы отмечали (для произвольной квадратичной гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^n$), гауссово отображение $\mathscr{G}_X : X \to \mathbb{P}^{n*}$ является ограничением линейного отображения из $\mathbb{P}^n$ в $\mathbb{P}^{n*}$, так что кривая, двойственная к плоской конике $C \subset \mathbb{P}^2$, будет снова плоской коникой $C^* \subset \mathbb{P}^{2*}$. Сейчас мы посмотрим, что происходит, когда коника C варьируется и, в частности, становится особой.

Многое можно увидеть уже на картинках. Например, посмотрим, что будет, если гладкая коника C_λ стремится к конике C_0 ранга 1, то есть к объединению двух различных прямых L, $M \subset \mathbb{P}^2$.

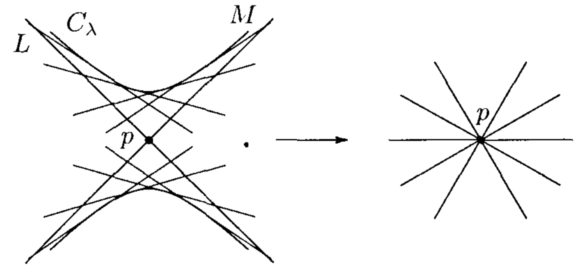
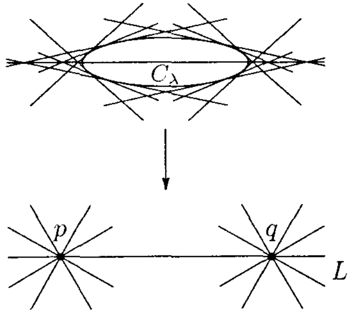


Рисунок подсказывает, что при $\lambda \to 0$ все пределы касательных к C_λ будут проходить через точку $p = L \cap M$. Если это действительно так, то предел двойственной коники при $\lambda \to 0$ должен быть просто двойной прямой $2p^*$ в $\mathbb{P}^{2*}$.



Далее, предположим, что у нас есть достаточно общее семейство коник C_λ, стремящихся к двойной прямой $C_0 = 2L$. («Общее» здесь означает, что коники C_λ пересекают прямую L трансверсально в двух точках p_λ, q_λ, стремящихся при $\lambda \to 0$ к двум различным точкам p, $q \in L$.) Рисунок снова подсказывает ответ: предельными положениями касательных прямых при $\lambda \to 0$ должны быть прямые, проходящие через p или q, и соответственно предел двойственного к C_λ должен быть суммой двух прямых p^*, $q^* \subset \mathbb{P}^{2*}$.

На самом деле это рассуждение можно сделать и точным. Для этого отождествим, как и выше, множество всех коник в $\mathbb{P}V \cong \mathbb{P}^2$ с $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V^*) \cong \mathbb{P}^5$; одновременно отождествим пространство коник на двойственной плоскости $\mathbb{P}V^* = \mathbb{P}^{2*}$ с двойственным проективным пространством $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V) = \mathbb{P}^{5*}$. Пусть $U \subset \mathbb{P}^5$ и $U^* \subset \mathbb{P}^{5*}$ — открытые подмножества, соответствующие гладким коникам. Рассмотрим биекцию

$$\tilde{\varphi}\colon U \to U^*,$$

переводящую конику C в двойственную к ней C^*. Она продолжается до рационального отображения

$$\varphi\colon \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^{5*};$$

обозначим через $\Gamma \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*}$ график этого отображения. Γ называется многообразием *полных коник*, и вопросы по поводу поведения двойственных к коникам в семействах могут быть поставлены в терминах Γ и его проекций. Ответы (подтверждающие наши наглядные рассуждения) собраны в следующем предложении.

Предложение 22.28. *Пара коник $(C, C^*) \in \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*}$ лежит в Γ тогда и только тогда, когда она принадлежит к одному из следующих четырех типов:*

(i) *C и C^* гладки и двойственны друг к другу;*

(ii) *для некоторой пары различных прямых L, $M \subset \mathbb{P}^2$ имеем $C = L \cup M$ и $C^* = 2p^*$, где $p = L \cap M$;*

(iii) *для некоторой пары различных точек p, $q \in \mathbb{P}^2$ имеем $C^* = p^* \cup q^*$ и $C = 2L$, где $L = \overline{pq}$;*

(iv) *для некоторых точки $p \in \mathbb{P}^2$ и прямой $L \subset \mathbb{P}^2$, удовлетворяющих условию $p \in L$, имеем $C = 2L$ и $C^* = 2p^*$.*

Упражнение 22.29. Докажите предложение 22.28.

Упражнение 22.30. Заметим, что в силу предложения 22.28 проекция $\Gamma \to \mathbb{P}^5$ взаимно однозначна всюду, кроме как над подмногообразием двойных прямых $\Phi \subset \mathbb{P}^2$, а слои над точками Φ изоморфны $\mathbb{P}^2$. Покажите, что Γ является раздутием $\mathbb{P}^5$ вдоль поверхности Веронезе Φ.

Пример 22.31. Квадрики в $\mathbb{P}^n$

В общем случае пространство квадратичных гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$ является проективным пространством размерности $N = n(n+1)/2 - 1$; мы можем рассматривать его как проективизацию векторного пространства симметрических $(n+1) \times (n+1)$-матриц M. Через $\Phi_k \subset \mathbb{P}^N$ мы будем обозначать пространство квадрик, ранг которых не превосходит k, т. е. подмногообразие, заданное обращением в нуль всех $(k+1)\times(k+1)$-миноров матрицы M. Эквивалентным образом можно описать Φ_k как множество квадрик, являющихся конусами с вершиной $\Lambda\cong\mathbb{P}^{n-k}$ над квадрикой $\overline{Q}\subset\mathbb{P}^{k-1}$. Заметим, что точки из $\Phi_k\setminus\Phi_{k-1}$ соответствуют конусам, для которых квадрика $\overline{Q}$ гладка или, иными словами, вершина Λ единственна.

Эта характеризация позволяет нам найти размерность Φ_k с помощью отношения инцидентности: как обычно, мы обозначаем через $\mathbb{G}=\mathbb{G}(n-k,\,n)$ грассманиан k-плоскостей в $\mathbb{P}^n$, а через $\Psi_k\subset\mathbb{G}\times\mathbb{P}^N$ множество вида

$$\Psi_k=\{(\Lambda,\,Q)\mid\Lambda\subset Q_{\mathrm{sing}}\}.$$

Для любого $\Lambda=\mathbb{P}W\subset\mathbb{P}^n$ слой Ψ_k над Λ есть пространство квадрик в проективизации факторпространства $\mathbb{C}^{n+1}/W$, так что он имеет размерность $k(k+1)/2-1$; стало быть,

$$\dim\Psi_k=\dim\mathbb{G}+k(k+1)/2-1=kn-(k-1)(k-2)/2.$$

Поскольку отображение $\Psi_k\to\Phi_k$ взаимно однозначно всюду, кроме как над Φ_{k-1}, размерность Φ_k такая же, как у Ψ_k: проще всего ее запомнить, если заметить, что

$$\operatorname{codim}(\Phi_{n+1-l}\subset\mathbb{P}^N)=l(l+1)/2,$$

или, иными словами, коразмерность пространства квадрик коранга l равна биномиальному коэффициенту $l(l+1)/2$. Наиболее обозримые примеры всего этого таковы.

(i) Множество особых квадрик является, конечно, гиперповерхностью, задаваемой обращением в нуль определителя M. Заметим, что, поскольку определитель M является неприводимым многочленом степени $n+1$ от элементов матрицы M, эта гиперповерхность имеет степень $n+1$.

(ii) Противоположная крайность — множество квадрик ранга 1 — является просто многообразием Веронезе; на инвариантном языке, если мы будем рассматривать $\mathbb{P}^n$ как проективизацию $\mathbb{P}V$, а $\mathbb{P}^N$ — как проективное пространство $\mathbb{P}(\operatorname{Sym}^2V^*)$, то Φ_1 будет образом отображения

$$\nu_2\colon\mathbb{P}V^*\to\mathbb{P}(\operatorname{Sym}^2V^*),$$

возводящего линейную форму в квадрат. Как мы видели, это и есть отображение Веронезе на $\mathbb{P}V^*$. Отметим, в частности, что степень Φ_1 равна тем самым 2^n.

(iii) Еще один случай, в котором Φ_k допускает наглядное описание, — это случай $k=2$. В этом случае Φ_2 — это множество пар гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$, то есть образ отображения

$$s\colon \mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}V^* \to \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V^*),$$

переводящего пару линейных форм в их произведение. Заметим, что это просто отображение Сегре $\mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}V^* \to \mathbb{P}(V^* \otimes V^*)$, скомпонованное с проекцией $V^* \otimes V^* \to \mathrm{Sym}^2 V^*$; поскольку общий слой второго из этих отображений над образом многообразия Сегре состоит из двух точек. получаем, что степень Φ_2 равна половине степени многообразия Сегре. Тем самым

$$\deg(\Phi_2) = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

Простейший пример многообразия, не относящегося к типам (i)—(iii) выше, — многообразие Φ_3, состоящее из квадрик ранга не более чем 3 в $\mathbb{P}^4$. Оказывается, что его степень равна 10; я не знаю, можно ли ее вычислить более простым образом, чем сославшись на следующее предложение.

Предложение 22.32. *Степень многообразия Φ_k, состоящего из квадрик ранга $\leqslant k$ в $\mathbb{P}^n$ (и рассматриваемого как подмногообразие в пространстве $\mathbb{P}^N$ всех квадрик в $\mathbb{P}^n$) равна*

$$\deg(\Phi_k) = \prod_{\alpha=0}^{n-k} \frac{\binom{n+\alpha+1}{n-k-\alpha}}{\binom{2\alpha+1}{\alpha}}.$$

Мы не будем рассказывать, как выводится эта формула; см. [FL, пример 14.4.11] или [JLP].

Следующий вопрос, который можно задать о многообразиях Φ_k после того, как найдены их размерность и степень, состоит в том, каковы их множества гладких и особых точек, а также касательные пространства и касательные конусы. Ответы совершенно аналогичны тому, что мы видели в случае детерминантальных подмногообразий в пространстве всех $(m \times n)$-матриц.

Теорема 22.33. *Пусть $Q_0 \in \Phi_m \setminus \Phi_{m-1}$, т. е. Q_0 — конус с вершиной $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-m}$ над гладкой квадрикой $\overline{Q} \subset \mathbb{P}^{m-1}$. Тогда Φ_m гладко в Q_0 с касательным пространством*

$$T_{Q_0}(\Phi_m) = \{Q \mid Q \supset \Lambda\}.$$

Более общим образом, если $Q_0 \in \Phi_{m-k} \setminus \Phi_{m-k-1}$, т. е. если Q_0 — конус с вершиной $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-m+k}$ над гладкой квадрикой, то касательный конус к Φ_m в точке Q_0 равен

$$TC_{Q_0}(\Phi_m) = \{Q \mid \mathrm{rank}(Q|_\Lambda) \leqslant k\},$$

а кратность Φ_m *в точке* Q_0 *равна степени* Φ_k *в пространстве квадрик в* $\mathbb{P}^{n-m+k}$ (*эта степень указана в предложении* 22.32).

Как мы отмечали, доказательство совершенно аналогично тому, что приведено в примерах 14.15 и 20.5, и мы не будем его повторять. Стоит заметить, что, как и в случае детерминанталей в пространстве всех матриц, для того чтобы вычислить кратность исходя из приведенного в формулировке теоремы описания касательного конуса и формулы для степени симметрического детерминантального многообразия, нам нужно знать, что идеалы многообразий Φ_k действительно локально порождаются $(k+1) \times (k+1)$-минорами.

Пучки квадрик

В некотором смысле исследование геометрии пространства $\mathbb{P}^N$, состоящего из всех квадрик в $\mathbb{P}^n$, является всего лишь прелюдией к исследованию более общих семейств квадрик, соответствующих подмногообразиям $B \subset \mathbb{P}^n$ (или, выражаясь более точно, многообразиям B, снабженных отображениями $B \to \mathbb{P}^n$). Мы проиллюстрируем это, обсудив простейшие из таких семейств, а именно семейства, соответствующие прямым $L \subset \mathbb{P}^N$. Такие семейства называются *пучками квадрик*. Множество всех пучков квадрик параметризуется грассманианом $\mathbb{G}(1, N)$, и мы сосредоточимся на исследовании пучков общего положения.

Разумеется, через две точки проективного пространства проходит единственная прямая, и если Q_0, $Q_1 \in \mathbb{P}^N$ — две квадрики, то соответствующий пучок есть семейство квадрик $L = \{Q_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{P}^1\}$, где

$$Q_\lambda = \lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1$$

для всякого $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$. Мы будем рассматривать пересечение этих квадрик, называемое *множеством базисных точек*, или *базисным множеством* пучка:

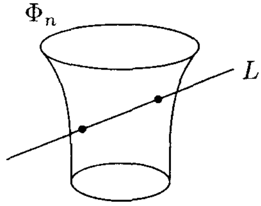
$$X = Q_0 \cap Q_1 = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{P}^1} Q_\lambda.$$

Поскольку пучок предполагается общим, Q_0 и Q_1 будут трансверсально пересекаться по множеству X, т.е. X будет пусто при $n < 2$ и будет гладким многообразием степени 4 и размерности $n-2$ при $n \geqslant 2$. При $n \geqslant 2$ мы имеем, ввиду предложения 17.18,

$$L = \{Q \mid Q \supset X\}.$$

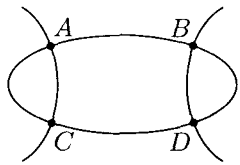
Первое, что можно спросить про семейство квадрик, — это каковы его особые элементы и сколько их. В данном случае, поскольку прямая

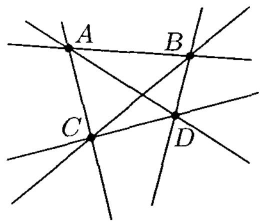
$L \subset \mathbb{P}^N$ предполагалась общей, она не будет пересекаться с подмногообразиями Φ_k при $k \leqslant n-1$, поскольку их коразмерность не меньше трех, и будет пересекать гиперповерхность Φ_n, состоящую из особых квадрик, в $n+1$ точке.

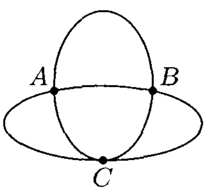


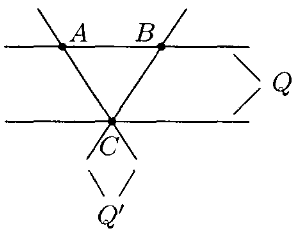
При $n=1$ это означает, что в общем пучке квадрик в $\mathbb{P}^1$ будут содержаться ровно две двойные точки. Заметим, что если в таком пучке количество особых элементов отлично от двух, то он должен касаться коники особых квадрик, то есть иметь непустое базисное множество.

При $n=2$ увидеть особые элементы общего пучка квадрик еще проще. Базисное множество пучка будет состоять из четырех точек A, B, C и D, никакие три из которых не коллинеарны; если X содержится в объединении двух прямых, то каждая из прямых должна содержать в точности две из этих точек. Стало быть, три особых элемента пучка L суть пары прямых $\overline{AB}+\overline{CD}$, $\overline{AC}+\overline{BD}$ и $\overline{AD}+\overline{BC}$. Отметим, в частности, что если базисное множество X состоит из четырех различных точек, то пучок содержит ровно три особых коники. Есть много способов доказать, что верно и обратное; например, если коники Q_0 и Q_1 касаются в точке C и при этом трансверсально пересекаются в точках A и B, то пучок будет состоять из всех коник, проходящих через A, B и C и при этом либо особых в точке C, либо касательных к Q_0 и Q_1 в точке C. Стало быть, особыми кониками в пучке L будут либо сумма Q прямых $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, либо сумма Q' прямой $\overline{AB}$ и прямой, проходящей через C и касающейся Q_0 и Q_1.









В самом деле, в этом случае мы можем воспользоваться упражнением 22.24 (или более общей теоремой 22.33) и заключить, что поскольку все коники пучка содержат особую точку коники Q', прямая L должна касаться множества Φ_2, состоящего из особых коник, в точке Q', так что Q' является двукратной точкой пересечения L с Φ_2 (т. е. многочлен $\det(M)$ на пространстве квадрик, будучи ограниченным на L, имеет нуль не менее чем второго порядка в Q').

Приведенные выше примеры иллюстрируют следующее общее утверждение.

Предложение 22.34. *Пучок L, порожденный Q_0 и Q_1, содержит в точности $n+1$ особый элемент тогда и только тогда, когда Q_0 и Q_1 пересекаются трансверсально.*

Доказательство. Заметим для начала, что условие трансверсальности пересечения Q_0 и Q_1 не зависит от выбора «образующих» Q_0 и Q_1: оно равносильно тому, что дифференциалы dQ_λ многочленов $Q_\lambda \in L$ независимы в каждой точке $P \in X$.

Имея это в виду, предположим сначала, что количество особых элементов пучка L отлично от $n+1$, т. е. что L пересекается с Φ_n нетрансверсально. Такое может произойти в двух случаях: либо L содержит точку Q, являющуюся особой на Φ_n, что, как мы знаем из теоремы 22.33, означает, что $Q \in \Phi_{n-1}$, либо L касается Φ_n в гладкой точке. Если имеет место первый случай, то, поскольку множество особых точек Q имеет положительную размерность, все остальные квадрики $Q' \in L$ будут с ним пересекаться и тем самым нетрансверсально пересекаться с Q. Во втором случае все квадрики $Q' \in L$ будут, ввиду теоремы 22.33, содержать особую точку Q и тем самым опять-таки пересекаться с Q нетрансверсально.

Обратно, если две образующих пучка нетрансверсально пересекаются в точке p, то какой-то элемент $Q \in L$ будет особ в точке p, т. е. для некоторой пары Q, $Q' \in L$ квадрика Q' пересекается со множеством особых точек квадрики Q; тогда либо $Q' \in \Phi_{n-1} = (\Phi_n)_{\text{sing}}$, либо прямая L касается Φ_n в точке Q. □

Упражнение 22.35. Найдите пучок коник в $\mathbb{P}^2$, содержащий только один особый элемент, но не содержащий двойных прямых. В общем случае, существует ли пучок квадрик в $\mathbb{P}^n$, содержащий ровно один особый элемент, но не пересекающийся с Φ_{n-1}? (*)

Имея в виду предложение 22.34, мы будем называть пучок квадрик *простым*, если выполняется одно из эквивалентных условий этого предложения, и сосредоточим наше внимание на таких пучках. Основная задача, которой мы зададимся, — классифицировать простые пучки. Иными словами, мы спрашиваем, все ли простые пучки проективно эквивалентны, а если нет, то что их различает.

Сначала рассмотрим случай $n = 2$, т. е. пучки коник на плоскости. В этом случае мы видели, что простой пучок состоит из всех коник, проходящих через четыре точки на плоскости, никакие три из которых не коллинеарны; поскольку любые два множества точек с этим свойством переводятся друг в друга, отсюда следует, что все простые пучки коник на плоскости также переводятся друг в друга с помощью автоморфизма $\mathbb{P}^2$.

В $\mathbb{P}^3$ ситуация не такова. Во-первых, заметим, что не все множества базисных точек изоморфны; мы увидим в двух следующих упражнениях, что если спроектировать X из точки $P \in X$ на плоскость, то X изоморфно отобразится на гладкую плоскую кубическую кривую $\overline{X}$, у которой есть j-инвариант, и что таким образом можно получить любую плоскую кубику.

Упражнение 22.36. Пусть X — гладкое пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^3$ и $P \in X$ — произвольная точка. Покажите, что проекция π_P из P на плоскость индуцирует изоморфизм X с плоской кубикой.

Упражнение 22.37. Пусть теперь $E \subset \mathbb{P}^2$ — плоская кубика с уравнением
$$y^2 = x^3 + ax + b.$$
Покажите, что отображение $E \to \mathbb{P}^3$, переводящее (x, y) в $[1, x, x^2, y]$, изоморфно отображает E на пересечение квадрик
$$Z_0Z_2 - Z_1^2 = 0 \quad \text{и} \quad Z_3^2 = Z_1Z_2 + aZ_0Z_1 + bZ_0^2.$$

С другой стороны, у пучка квадрик есть и «непосредственно наблюдаемый» инвариант. Если $L = \{Q_\lambda\}$ — простой пучок квадрик, то существует четыре значения $\lambda \in \mathbb{P}^1$, для которых квадрика Q_λ особа. У этих четырех точек на $\mathbb{P}^1$ имеется нетривиальный инвариант: именно, если λ — двойное отношение этих точек, взятых в каком-то порядке, то j-инвариант
$$j = 256 \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2},$$
введенный нами в лекции 10, не зависит от выбора упорядочения точек и инвариантен относительно автоморфизмов $\mathbb{P}^1$. Стало быть, два простых пучка могут быть переведены один в другой только в том случае, если их j-инварианты совпадают. На самом деле верно и обратное: j-инвариант является полным инвариантом пучка, как мы увидим в дальнейшем.

Не будет большим сюрпризом узнать, что инвариант простого пучка можно также найти непосредственно по его множеству базисных точек X. Именно, мы имеем следующее предложение.

Предложение 22.38. *Базисное множество X простого пучка квадрик в $\mathbb{P}^3$ с особыми элементами Q_{λ_i}, $i = 0, 1, 2, 3$, изоморфно кривой E*

с уравнением

$$y^2 = \prod (x - \lambda_i);$$

иными словами, j-инвариант пучка равен j-инварианту кривой X.

Доказательство. Можно было бы, конечно, доказать это исходя из явных уравнений, приведенных в упражнении 22.37, но мы будем рассуждать геометрически; мы покажем, что и X, и E совпадают с некоторым a priori отличным от них третьим объектом. Зафиксируем точку $P \in X \subset \mathbb{P}^3$ и введем кривую, состоящую из прямых, проходящих через P и лежащих на какой-нибудь квадрике из пучка. Именно, мы положим

$$Y = \{(\lambda, l) \mid P \in l \subset Q_\lambda\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{G}(1, 3).$$

Заметим для начала, что кривая Y гладка, поскольку ее проекция на второй сомножитель отображает Y на плоскую кривую $\overline{X}$, рассматриваемую как подмногообразие в $\Sigma_P = \{l \mid P \in l\} \cong \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{G}(1, 3)$.

Чтобы убедиться теперь, что Y изоморфна X, заметим, что всякая прямая l, лежащая на квадрике $Q \in L$, будет пересекаться с X в двух точках (это точки пересечения l с любой квадрикой $Q' \in L$, отличной от Q); стало быть, мы можем определить отображение $\varphi\colon Y \to X$, переводящее (λ, l) в точку пересечения l с X, отличную от P (и в P, если l касается X в точке P). С другой стороны, для всякой точки $R \in X$ существует единственная квадрика $Q_\lambda \in L$, содержащая прямую $l = \overline{PR}$. Для всякой точки $S \in l$, отличной от P и R, квадрика $Q \in L$ содержит l тогда и только тогда, когда она содержит S; но множество квадрик, содержащих S, есть гиперплоскость H в пространстве $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^9$, состоящем из всех квадрик, а поскольку прямая L не содержится в H, она должна пересекать его в единственной точке Q_λ. Стало быть, мы можем обратить φ, переведя R в (λ, l), где $l = \overline{PR}$ и Q_λ — единственная квадрика в L, содержащая l.

Наконец, чтобы показать, что $Y \cong E$, заметим, что всякая гладкая квадрика $Q \in L$ будет содержать две прямых, проходящих через точку P, а особая квадрика — только одну. Поскольку кривая Y гладка, отсюда следует, что проекция на первый сомножитель представляет Y в виде двулистного накрытия над $\mathbb{P}^1$, разветвленного в четырех точках $\lambda_i \in \mathbb{P}^1$, так что Y изоморфна E. □

Упражнение 22.39. Покажите, что проекция кривой $X \subset \mathbb{P}^3$ на плоскость из точки P, не лежащей на X, либо бирационально отображает X на плоскую квартику с двумя нодами, нодом и каспом, двумя каспами или точкой самокасания, либо представляет X в виде двулистного накрытия коники. (*)

Упражнение 22.40. Пусть Q — любая из четырех особых квадрик в пучке квадрик, содержащих X. Покажите, что четыре из касательных прямых $T_P X$ к X лежат на Q и что их четыре точки касания $P \in X$ лежат в одной плоскости. Покажите, что получаемые этой конструкцией 16 точек являются в точности точками перегиба кривой X.

Ответ на общий вопрос о том, когда два простых пучка эквивалентны, очень похож на то, что можно было бы ожидать, глядя на разобранный пример. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 22.41. *Пусть $L = \{Q_\lambda\}$ и $M = \{R_\lambda\}$ — пучки квадрик в $\mathbb{P}^n$ с особыми элементами Q_{λ_i} и R_{μ_i}, $i = 1, \ldots, n+1$. Тогда L и M проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда два подмножества $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_i\} \subset \mathbb{P}^1$ конгруэнтны, т. е. когда существует автоморфизм $\mathbb{P}^1$, переводящий $\{\lambda_i\}$ в $\{\mu_i\}$.*

Этот результат, в свою очередь, вытекает из следующей леммы.

Лемма 22.42 (нормальная форма для простых пучков). *Пусть L — простой пучок квадрик в $\mathbb{P}^n$. Тогда в $\mathbb{P}^n$ можно выбрать однородные координаты, в которых все квадрики $Q \in L$ диагональны; иными словами, L порожден квадриками Q и R, где*

$$Q(X) = \sum X_i^2, \qquad R(X) = \sum \lambda_i X_i^2.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$, где V — векторное пространство, и пусть Q и R — образующие L, отвечающие гладким квадрикам; рассмотрим соответствующие отображения

$$\widetilde{Q}, \widetilde{R} \colon V \to V^*.$$

Базис в V, который нам нужен, будет состоять из собственных векторов композиции

$$A = \widetilde{R}^{-1} \circ \widetilde{Q} \colon V \to V.$$

Заметим, что при ином выборе Q и R отображение A заменится на линейную комбинацию A и тождественного отображения; в частности, это не повлияет на собственные векторы. Заметим также, что A не может иметь двух независимых собственных векторов с одним и тем же собственным значением λ, поскольку в этом случае ранг линейной комбинации $Q - \lambda R$ не превосходил бы $n - 1$.

Чтобы убедиться, что собственные значения A обладают желаемыми свойствами, мы воспользуемся стандартным вычислением: если $v, w \in V$ — собственные векторы оператора A с собственными значениями λ и $\mu \neq \lambda$ соответственно, то

$$Q(v, w) = \langle \widetilde{Q}v, w\rangle = \langle \widetilde{R}Av, w\rangle = \lambda \cdot R(v, w),$$

но при этом

$$Q(v,\, w) = \langle v,\, \widetilde{Q}w\rangle = \langle v,\, \widetilde{R}Aw\rangle = \mu \cdot R(v,\, w),$$

так что мы заключаем, что $Q(v,\, w) = R(v,\, w) = 0$.

Остается убедиться, что оператор A диагонализируем. Предположим противное; тогда существуют два вектора $v,\, w \in V$, для которых $(A - \lambda I)v = 0$ и $(A - \lambda I)w = v$. Заменяя Q на $Q - \lambda R$, мы можем считать, что $\lambda = 0$ (так что $\widetilde{Q}v = 0$; иными словами, точка $[v] \in \mathbb{P}V$ особа на квадрике Q) и что $\widetilde{R}^{-1}\widetilde{Q}w = v$. Но тогда мы имеем

$$R(v,\, v) = \langle \widetilde{R}v,\, v\rangle = \langle \widetilde{R}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{Q}w,\, v\rangle = \langle \widetilde{Q}w,\, v\rangle = Q(w,\, v) = \langle w,\, \widetilde{Q}v\rangle = 0,$$

так что квадрика $R \subset \mathbb{P}V$ содержит точку $[v] \in Q$, в противоречие с предположением о том, что пучок $L = \overline{QR}$ прост. $\square$

Заметим, что если бы мы хотели быть педантичными, мы могли бы уточнить эту лемму: именно, поскольку множество Φ_n особых квадрик имеет кратность k вдоль Φ_{n-k+1}, для всякого пучка квадрик $L = \{Q_\lambda\}$, не все из которых особы, имеем

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{P}^1} (n + 1 - \operatorname{rank}(Q_\lambda)) \leqslant n + 1,$$

так что предшествующее рассуждение показывает, что все элементы пучка одновременно диагонализируемы тогда и только тогда, когда это неравенство обращается в равенство.

Доказательство теоремы 22.41. Записав квадрики $Q,\, R \in L$ в виде

$$Q(X) = \sum X_i^2, \qquad R(X) = \sum \lambda_i \cdot X_i^2,$$

мы видим, что множество значений λ, для которых линейная комбинация $Q_\lambda = -\lambda Q + R$ особа, есть $\{\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_{n+1}\}$. Стало быть, при замене Q и R на линейные комбинации $R' = aR + bQ$ и $Q' = cR + dQ$ каждое из λ_j заменяется на $(a\lambda_j + b)/(c\lambda_j + d)$, так что с точностью до проективной эквивалентности пучок определяется подмножеством $\{\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_{n+1}\} \subset \mathbb{P}^1$, рассматриваемым с точностью до дробно-линейных преобразований $\mathbb{P}^1$. $\square$

УКАЗАНИЯ К НЕКОТОРЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

1.3. Надо показать, что для всякой $q \notin \Gamma$ существует многочлен степени $d-1$, обращающийся в нуль на Γ, но не в точке q. Есть много способов сделать это; возможно, самый быстрый — провести индукцию по d.

1.11 (b). Как бы то ни было, прямая $L_{\mu,\nu}$ задается уравнениями

$$(\mu_0\nu_1 - \mu_1\nu_0)Z_0 + (\mu_0\nu_2 - \mu_2\nu_0)Z_1 + (\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1)Z_2 = 0,$$
$$(\mu_0\nu_1 - \mu_1\nu_0)Z_1 + (\mu_0\nu_2 - \mu_2\nu_0)Z_2 + (\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1)Z_3 = 0.$$

1.13. Для начала заметьте, что однородному квадратичному многочлену на $\mathbb{P}^3$ соответствует однородный многочлен шестой степени на $\mathbb{P}^1$.

1.27. Покажите, что прямая $\alpha Z_1 - \beta Z_2 = 0$ пересекает кривую, заданную уравнением $Z_0 Z_2^2 = Z_1^3$, только в точках $[1, 0, 0]$ и $\mu([\beta, \alpha])$; аналогично для ν.

1.28. Заметьте, что однородные многочлены степени 3 на $\mathbb{P}^2$ соответствуют при отображении ν однородным многочленам степени 9 на $\mathbb{P}^1$ и что это соответствие не может быть изоморфизмом.

1.29. Заметьте, что при $[Z_0, \ldots, Z_3] = \nu([X_0, X_1])$ мы имеем $Z_1/Z_0 = Z_3/Z_2 = X_1/X_0$, что дает нам квадратичный многочлен, обращающийся в нуль на образе. Теперь выразите Z_2/Z_0 и Z_3/Z_1 через эти отношения, чтобы найти два кубических многочлена, высекающих $C_{\alpha,\beta}$.

2.12. Сначала покажите, что при подходящем выборе однородных координат $[X_1, \ldots, X_{2k}]$ любые три данные попарно непересекающиеся $(k-1)$-плоскости в $\mathbb{P}^{2k-1}$ будут записываться в виде $(X_1 = \ldots = X_k = 0)$, $(X_{k+1} = \ldots = X_{2k} = 0)$ и $(X_1 = X_{k+1}, \ldots, X_k = X_{2k})$. Для части (ii) воспользуйтесь тем фактом, что многообразие Сегре — множество нулей квадратичных многочленов.

2.14. Возможно, самый быстрый способ это сделать — выбрать точки $P, P' \in \mathbb{P}^1$, $Q, Q' \in \mathbb{P}^2$ и показать, что все линейные комбинации точек $\sigma(P, Q)$ и $\sigma(P', Q')$ лежат в $\Sigma_{2,1}$ тогда и только тогда, когда $P = P'$ или $Q = Q'$.

2.19. Опять-таки есть много способов это сделать. Например, можно заметить, что каждый элемент одного из двух семейств прямых на поверхности S пересекается с кривой C ровно в одной точке, в то время как все прямые из второго семейства, кроме конечного числа, пересекают C в трех точках. Это конечное число прямых из второго семейства в общем случае равно четырем (если C задано биоднородным многочленом бистепени $(1, 3)$, то это множество нулей дискриминанта указанного многочлена по второй переменной); стало быть, можно образовать двойное отношение.

2.29 (заключительная часть). Заметьте, что если бы отображение φ можно было задать таким образом, то прообраз большинства гиперплоскостей в $\mathbb{P}^5$ был бы множеством нулей биоднородного многочлена бистепени (d, d) для некоторого d, что не имеет места.

4.12 (части (b) и (c)). Ключевое наблюдение: ранг кососимметрической матрицы всегда четен.

4.13. Один из возможных (и относительно элементарных) способов: сначала покажите, что достаточно это сделать для семейства коник $\{X^2 + aY^2 + bZ^2\}$, параметризованного $\mathbb{A}^2$. Чтобы убедиться, что у этого семейства не может быть рационального сечения, покажите, что в противном случае нашлась бы пара рациональных функций $Y(a, b)$, $Z(a, b)$, удовлетворяющих уравнению $aY^2 + bZ^2 + 1 = 0$, или, что равносильно, четверка многочленов P, Q, R, S от переменных a и b, удовлетворяющих тождеству $(QS)^2 + a \cdot (PS)^2 + b \cdot (RQ)^2 \equiv 0$. (Есть и другие подходы, использующие больше техники, но более концептуальные; например, вы можете показать, что всякое пятимерное подмногообразие в $\mathscr{X}$ будет пересекаться с общим слоем отображения $\mathscr{X} \to \mathbb{P}^5$ в четном числе точек.)

4.14. Один из возможных способов: выбрать точки $p, q \in \mathbb{P}^3$ таким образом, чтобы прямая $\overline{pq}$ пересекалась не с каждым членом семейства. Теперь если $X_b \subset \mathbb{P}^3$ — произвольный член семейства, то пусть Q — единственная квадрика, содержащая X_b, p и q; обозначим через $l \subset Q$ проходящую через p прямую из того семейства прямолинейных образующих Q, члены которого пересекают X_b в одной точке, и положим $r(b) = l \cap X_b \in X_b$.

5.13. Проведите индукцию по d. Для ответа на второй вопрос покажите, что $d \leqslant 2n + 1$ точек в $\mathbb{P}^2$ не будут накладывать независимых условий на кривые степени n тогда и только тогда, когда $n + 2$ из них коллинеарны.

6.16. Может помочь то обстоятельство, что прямая $l \subset \mathbb{P}^3$ будет пересекаться со скрученной кубикой C тогда и только тогда, когда ограничения на l трех квадрик, высекающих C, будут линейно зависимы;

таким способом можно выписать уравнение $\mathscr{C}_1(C)$ в виде определителя (3×3)-матрицы.

7.8. Это можно сделать в точности тем же способом, как в доказательстве предложения 7.16.

8.2. Возможно, наиболее поучительный способ — использовать конструкцию, предложенную в упражнении 6.18.

8.4. Один из способов — воспользоваться упражнением 1.11.

8.6. Это можно сделать прямым вычислением; другой способ — посмотрите на квадрики, содержащие $C \cup \{p\}$.

8.7. Лобовой способ сделать это — спроектировать из точки, лежащей на нормальной рациональной кривой C; образ точки $r \in \mathbb{P}^4$ будет лежать на единственной секущей к образу C, и мы можем записать условие на то, чтобы и сама точка p лежала на соответствующей секущей кривой C. Более изящный способ состоит в использовании детерминантального описания кривой C, предложенного в примере 1.16 (для $k = 2$), имея в виду, что ранг суммы двух матриц ранга 1 не превосходит 2.

8.8. Как и в случае с упражнением 8.7, это можно сделать «руками»; проще, однако, воспользоваться детерминантальным описанием поверхности Веронезе из примера 2.6.

8.12. Попробуйте, например, так: $k = 4$, $l = 2$, X — проекция нормальной рациональной кривой $C \subset \mathbb{P}^n$ из точки $p \in \mathbb{P}^n$, лежащей на трисекущей плоскости к C, но не на секущей прямой.

8.13. Объединение трисекущих прямых к кривой $C_{\alpha,\beta}$ является единственной квадрикой, содержащей $C_{\alpha,\beta}$.

9.18. Сосчитайте параметры: сравните число коэффициентов у многочлена степени d и в $(d \times d)$-матрице линейных форм.

10.7. Посмотрите, к примеру, на проекцию нормальной рациональной кривой.

10.11. Это можно сделать напрямую, но можно и воспользоваться детерминантальным описанием нормальной рациональной кривой из примера 9.3.

10.14. Ответ: C и Σ; главный ингредиент решения: j-функция.

10.22. Можно заглянуть в обсуждение касательных пространств Зарисского в лекции 14.

11.11. Один из ответов:

$$Q(Z) = \begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \qquad P(Z) = \begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_2 & Z_3 & Z_0 \end{vmatrix}.$$

(Отметим, что в правом нижнем углу второго определителя вместо Z_0 может стоять любая линейная форма.)

11.19. Чтобы установить изоморфизм Φ со свитком $X_{2,2,1}$, зафиксируем различные точки q, $r \in l_0$ и прямую $M \subset \mathbb{P}^3$, не пересекающуюся с l_0, и рассмотрим образы относительно вложения Сегре $\mathbb{G}(1, 3) \times l_0$ следующих трех кривых:

$$\{(l_0, p)\}_{p \in l_0};$$
$$\{(\overline{qs}, q)\}_{s \in M};$$
$$\{(\overline{rs}, r)\}_{s \in M}.$$

11.35. Наименьшее число — это $m = n$; столько необходимо для многочленов вида $x^n + x^{n-1}$ (например, соответствующих точкам, лежащим на касательной к нормальной рациональной кривой).

12.11. Главное — это заметить, что плоскость Λ из нашей конструкции является общей $(n-2)$-секущей плоскостью к нормальной рациональной кривой.

12.13. Естественно ожидать, что общая кубическая поверхность содержит двумерное семейство коник; так оно и есть, поскольку каждая коника на S лежит в одной плоскости с некоторой прямой, содержащейся в S.

12.23. См. [D].

12.25. Три из скрещивающихся прямых будут лежать на единственной гладкой квадрике $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$; четвертая будет в общем случае пересекать эту квадрику в двух различных точках q и r и будет ими однозначно определена. Проверьте, что группа автоморфизмов Q, сохраняющих эти три прямые и точки q и r, будет одномерна.

12.26. Идея в том, чтобы посмотреть на гиперплоскости, порождаемые парами этих прямых. На общий вопрос ответ «нет», но элементарное доказательство этого мне неизвестно.

13.8. Род равен -1, 0, 0 и 1 соответственно. Интересный момент здесь — это то, что род тройки пересекающихся в одной точке прямых, лежащих в одной плоскости, отличен от рода тройки пересекающихся в одной точке некомпланарных прямых. В лекции 14 мы покажем, что эти многообразия действительно неизоморфны.

13.13. Для этого (и двух следующих) упражнений воспользуйтесь тем, что вам известна функция Гильберта; например, если вы хотите показать, что $F_1, \ldots, F_k \in I(X)$ порождают идеал, покажите, что $\dim(S/(F_1, \ldots, F_k)_m = h_X(m)$.

14.9. Самый быстрый способ усмотреть, что Y и Z неизоморфны, — сравнить размерности кондукторов в их локальных кольцах в начале координат; по поводу другого способа см. обсуждение кратности в лекции 20.

15.5. Это можно сделать напрямую; один из способов сократить работу — реализовать $\mathbb{P}^3$ как пространство однородных кубических многочленов от двух переменных с точностью до умножения на скаляры, скрученную кубику — как множество полных кубов, а ее касательную поверхность TC — как множество многочленов с нулевым дискриминантом.

15.6. Если бы общая точка общей касательной прямой $\mathbb{T}_pX$ к кривой X лежала более чем на одной касательной прямой, то всякая касательная к X пересекалась бы с $\mathbb{T}_pX$.

15.18. Заметьте, что $\mathcal{T}^m(X)$ есть множество таких прямых L, что для всякого многочлена F, лежащего в идеале $I(X)$ многообразия X, ограничение $F|_L$ имеет кратный корень.

15.19. Для конуса над неприводимой невырожденной кривой $C \subset \mathbb{P}^r$, где $r \geqslant 4$, все неравенства будут в общем случае строгими.

16.11. Прямая L, касательная к кривой X в неособой точке p, будет особой точкой на $\mathcal{S}(X)$, если она пересекает X еще где-нибудь (это очевидно) или если она имеет контакт порядка > 2 с X в p, то есть если всякий многочлен, обращающийся в нуль на X, имеет на L в точке p нуль порядка по крайней мере 3 (это менее очевидно). См. дальнейшее обсуждение в лекции 17 (до примера 17.14 включительно).

16.16. Рассмотрите проекцию из плоскости, порожденной $\mathbb{T}_{p_1}X, \ldots$ $\ldots, \mathbb{T}_{p_l}X$.

17.4. См. [GH1].

17.7. Разложите параметризацию в степенной ряд.

17.10. Точка $q \in T^{(k)}(C)$ будет неособой, если она лежит на единственной соприкасающейся с C k-плоскости $\mathcal{G}^{(k)}(p)$, не лежит на $(k-1)$-плоскости $\mathcal{G}^{(k-1)}(p)$ и при этом соприкасающаяся плоскость $\mathcal{G}^{(k)}(p)$ имеет с кривой C в точке p контакт порядка в точности $k+1$. В этом случае касательная плоскость к $\mathscr{G}^{(k)}(C)$ в точке q будет совпадать с $\mathscr{G}^{(k+1)}(p)$.

17.21. Это делается в два шага. Покажите, что общая поверхность, содержащая C, гладка вне C (Бертини), а затем — что она гладка и на C (Бертини для раздутия $\mathbb{P}^3$ вдоль C плюс еще некоторые соображения).

19.7. Сделайте это индукцией по k, или, что равносильно, последовательным применением формулы для степени.

20.7. Да.

20.13. Нет.

20.15. Один из способов сделать это (не единственный) заключается в том, что надо продеформировать объединение двух коник, имеющих в некоторой точке контакт порядка 3.

20.17. (a), (b) и (c) — квартики; (d) — секстика.

22.1. Покажите, что если $\Lambda = \mathbb{P}W$ для некоторого $W \subset V$, то Q' представляется в виде композиции

$$W \to V \to V^* \to W^*,$$

где среднее отображение есть $\widetilde{Q}$.

22.35. К первой части: заметьте, что общая 2-плоскость в $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^5$ будет пересекаться с Φ_2 по гладкой кубической кривой и вообще не будет пересекаться с Φ_1; выберите в качестве L прямую, касающуюся этой кубики в этой плоскости, в точке перегиба. Как выглядит соответствующее семейство плоских коник?

22.39. Квартика с точкой самокасания возникает, когда P является гладкой точкой на одной из четырех особых квадрик в пучке квадрик, содержащих X; двойная коника получается, когда P — вершина одной из этих квадрик.

ЛИТЕРАТУРА

Основные источники

[AM] *Atiyah M. F., MacDonald I. G.* Introduction to Commutative Algebra. – Addison-Wesley, 1969. (Русский перевод: *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. – М.: Мир, 1972.)

[E] *Eisenbud D.* Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. — Springer-Verlag, 1996.

[EH] *Eisenbud D., Harris J.* Schemes: the Language of Modern Algebraic Geometry. — Wadsworth, 1992.

[F] *Fulton W.* Algebraic Curves. New York: W. A. Benjamin, 1969.

[GH] *Griffiths Ph., Harris J.* Principles of Algebraic Geometry. — Wiley and Sons, 1978. (Русский перевод: *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии (в двух томах). — М.: Мир, 1982.)

[H] *Hartshorne R.* Algebraic Geometry. — Springer-Verlag, 1977. (Русский перевод: *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. — М.: Мир, 1981.)

[M] *Mumford D.* Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties. — Springer-Verlag, 1976. (Русский перевод: *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия 1. Комплексные проективные многообразия. — М.: Мир, 1979.)

[M1] *Mumford D.* Red Book. — Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Mathematics, V. 1358).

[SR] *Semple J., Roth L.* Introduction to Algebraic Geometry. — Oxford Univ. Press, 1949.

[S] *Serre J.-P.* Faisceaux algébriques cohérents // Ann. Math. 1955. V. 61. P. 197—278. (Русский перевод: *Серр Ж.-П.* Когерентные алгебраические пучки // Собрание сочинений. Т. 2. М.: НМУ: МЦНМО, 2004. С. 23—113.)

[Sh] *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии (в двух томах). — М.: Наука, 1988.

Более частные вопросы

[A] *Ahlfors L.* Complex Analysis. — McGraw-Hill, 1953.

[BM] *Borel A., Moore J.* Homology theory for locally compact spaces // Michigan Math. J. 1960. V. 7. P. 137—159.

[BK] *Brieskorn E.*, *Knörrer H.* Plane Algebraic Curves. — Birkhäuser Boston, 1981.

[C] *Coolidge J.* A Treatise on Algebraic Plane Curves. — Dover, 1931.

[CG] *Clemens H.*, *Griffiths P.* The intermediate Jacobian of a cubic threefold // Ann. Math. 1972. V. 95. P. 281—356. (Русский перевод: *Клеменс К. Г.*, *Гриффитс Ф. А.* Промежуточный якобиан трехмерной кубической гиперповерхности // Математика. 1972. Т. 16, вып. 1. С. 3—32; 1973. Т. 17, вып. 1. С. 3—41.)

[D] *Donagi R.* On the geometry of Grassmannians // Duke Math. J. 1977. V. 44. P. 795—837.

[Ein] *Ein L.* Varieties with small dual varieties // Inv. math. 1986. V. 86. P. 63—74.

[E1] *Eisenbud D.* Linear section of determinantal varieties // Am. J. Math. 1988. V. 110. P. 541—575.

[F1] *Fulton W.* Intersection Theory. — Springer-Verlag, 1984. (Русский перевод: *Фултон У.* Теория пересечений. — М.: Мир, 1989.)

[FH] *Fulton W.*, *Harris J.* Representation Theory: a First Course. — Springer-Verlag, 1991.

[FL] *Fulton W.*, *Lazarsfeld R.* Connectivity and its applications in algebraic geometry // Algebraic Geometry / A. Libgober, P. Wagreich (Eds.). Springer-Verlag, 1981. (Lecture Notes in Mathematics, V. 862). P. 26—92.

[GH1] *Griffiths P.*, *Harris J.* Algebraic geometry and local differential geometry // Ann. Éc. Norm. Sup. 4e série. 1979. V. 12. P. 355—452.

[GLP] *Gruson L.*, *Lazarsfeld R.*, *Peskine C.* On a theorem of Castelnuovo and the equations defining space curves // Inv. math. 1983. V. 72. P. 491—506.

[GM] *Green M.*, *Morrison I.* The equations defining Chow varieties // Duke Math. J. 1986. V. 53. P. 733—747.

[Hi] *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic 0 // Ann. Math. 1964. V. 79. I: P. 109—203; II: P. 205—326. (Русский перевод: *Хиронака X.* Разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями характеристики нуль // Математика. 1965 Т. 9, вып. 6. С. 3—70; 1966. Т. 10, вып. 1. С. 3—89; 1966. Т. 10, вып. 2. С. 3—58.)

[IM] *Исковских В. А.*, *Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86, №1. С. 140—166.

[JLP] *Józefiak T.*, *Lascoux A.*, *Pragacz P.* Классы детерминантных многообразий, ассоциированных с симметрическими и кососимметрическими матрицами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. С. 662—673.

[K] *Kleiman S.* The enumerative theory of singularities // Real and Complex singularities. Oslo, 1976 / P. Holm (Ed.). Sijthoff and Noordhoff, 1977. P. 297—396. (Русский перевод: *Клейман С.* Численная теория особенностей // Успехи математических наук. 1980. Т. 35, вып. 6. С. 69—148.)

[K1] *Kleiman S.* The transversality of a general translate // Compositio Math. 1974. V. 28. P. 287—297.

[L] *Lawson H. B.* Algebraic cycles and homotopy theory // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 253—291.

[M2] *Mumford D.* Stability of projective varieties // L'Enseign. Math. 1977. V. 23. P. 39—110.

[M3] *Mumford D.* Lectures on Curves on an Algebraic Surface. — Princeton Univ. Press, 1966. (Русский перевод: *Мамфорд Д.* Лекции о кривых на алгебраической поверхности. — М.: Мир, 1971.)

[P] *Pinkham H.* A Castelnuovo bound for smooth surfaces // Inv. Math. 1986. V. 83. P. 321—332.

[S1] *Serre J.-P.* Groupes algébriques et corps de classes. — Hermann, 1959. (Русский перевод: *Серр Ж.-П.* Алгебраические группы и поля классов. — М.: Мир, 1968.)

[S2] *Serre J.-P.* Géométrie algébrique et géométrie analytique // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1956. V. 6. P. 1—42. (Русский перевод: *Серр Ж.-П.* Геометрия алгебраическая и аналитическая // Собрание сочинений. Т. 2. М.: НМУ: МЦНМО, 2004. С. 134—166.)

[W] *Wilson G.* Hilbert's sixteenth problem // Topology. 1978. V. 17. P. 53—73.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Номера страниц, набранные *курсивом*, отсылают к определению или формулировке теоремы.

Как известно, написать хороший учебник по алгебраической геометрии для начинаюших чрезвычайно трудно. Тем не менее, выдаюшемуся американскому математику Дж. Харрису это удалось.

Автор дает яркое введение в собственно геометрические разделы предмета. Читатель, не собираюшийся специализироваться в алгебраической геометрии, получит о ней адекватное представление, а будущий алгебраический геометр — предварительную подготовку, необходимую для освоения более абстрактных разделов этой науки.

ISBN 5-94057-084-4

9 785940 570844 >