Содержание

1. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию

1.1 Предварительные сведения и напоминания

Определение 1. Собственный идеал I в кольце R называется *простым*, если $ab \in I \implies a \in I$ или $b \in I$.

Собственный идеал I в кольце R называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале.

Простейшие свойства:

1. Для любого собственного идеала существует максимальный идеал, содержащий его.
2. Любой максимальный идеал является простым.
3. Собственный идеал I является простым тогда и только тогда, когда R/I — область целостности.
4. Собственный идеал I является максимальным тогда и только тогда, когда R/I — поле.

Определение 2. Элементы a и b называются *ассоциированными*, если $aR = bR$.

Необратимый элемент $a \in R$ называется *неприводимым*, если из равенства $a = bc$ следует, что или b или c ассоциирован с a.

Элемент называется *простым*, если главный идеал (a) простой.

Замечание. Простой $\implies$ неприводимый. Обратное, вообще гооворя, неверно.

Определение 3. Кольцо R называется *нётеровым*, если оно удовлетворяет условию обрыва **возрастающих** цепочек (ACC) для идеалов. Модуль называется *нётеровым*, если он удовлетворяет ACC для подмодулей.

Лемма 1. Следующие условия на кольцо R эквивалентны:

1. R нетерово.
2. Любой идеал в R конечнопорожден.
3. Любой подмодуль коненчопрожденного R-модуля конечнопрожден.
4. Любой конечнопорожденный R-модуль нетеров.

Теорема 1 (Гильберта, о базисе)**.** *Кольцо многочленов от конечного числа переменных над нётеровым кольцом нётерово. Иными словами, если R — нётерово кольцо, то любой идеал в кольцо $R[x_1, \dots, x_n]$ порожден конечным числом многочленов.*

1.2 Аффинные алгебраические многообразия

Я думаю, что как только я нормально послушаю курс алгебриаческой, этот параграф будет переписан.

Пусть F — поле, $\mathbb{A}^n_F = F^n$ — аффинное пространство над ним.

Пусть $J \subset A = F[t_1, \dots, t_n]$, обозначим через $V(J)$ множество всех общих нулей всех многочленов из идеала J, то есть

$$V(J) = \{x \in \mathbb{A}^n_F \mid f(x) = 0 \,\forall f \in J\}.$$

Определение 4. Пусть I — идеал в кольце R. *Радикал* идеала I определяется, как

$$\sqrt{I} \overset{\text{def}}{=} \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon f^n \in I\}.$$

Идеал I называется *радикальным*, если он совпадает со своим радикалом.

Замечание. Другими словами, I — радикальный идеал $\Leftrightarrow R/I$ — редуцированное кольцо (т.е. без нильпотентных элементов).

Несложно заметить, что $V(J) = V(AJ)$, где $AJ = \sum_{f \in J} Af$. Действительно, если $f(x) = 0, g(x) = 0$, то $\forall q, p \in F[t_1, \dots, t_n]$ $fq + pg = 0 \Rightarrow V(J) = V(AJ)$. Соотвественно, так как $f^m(x) = 0 \implies f(x) = 0$, мы имеем $V(J) = V(\sqrt{AJ})$, а это говорит нам, что имеет смысл рассматривать только радикальные идеалы.

Определение 5 (Топология зарисского)**.** Определим на $\mathbb{A}_F^n$ *топологию Зарисского*: набором замкнутых множеств будет

$$\{V(J) \subset \mathbb{A}_F^n \mid J - \text{радикальный идеал в } F[t_1, \dots, t_n]\}.$$

Замкнутые подмножества $\mathbb{A}_F^n$ в этой топологии называют *аффинными алгебраическими многообразиями (affine algebraic variety).*[1]

Замечание. Проверим, что это удовлетворяет аксиомам топологии:

- $V(1) = \varnothing$.
- $V(0) = \mathbb{A}_F^n$.
- $V(\bigcup_k J_k) = \bigcap_k V(J_k)$, то есть пересечение замкнутых замкнуто.

Для подмножества $X \subset \mathbb{A}_F^n$ определим $I(X) = \{f \in F[t_1, \dots, t_n] \mid f(x) = 0 \, \forall x \in X\}$. Легко видеть, что $V(I(X)) = \mathrm{Cl}(X)$ в топологии Зарисского. Совершенно ясно, что $I(X)$ — идеал в кольце $F[t_1, \dots, t_n]$.

Определение 6. *Морфизмом* аффинных алгебраических многообразий $X \subset \mathbb{A}_f^n, Y \subset \mathbb{A}_F^n$ называется полиномиальное отображение $X \to Y$.

Аффинные многообразия с таким набором морфизмов образуют категорию $\mathfrak{Aff}$.

Определение 7. Так как $\mathbb{A}_F^1 = F$, морфизмы $X \to \mathbb{A}_F^1$ — просто какие-то элементы $F[x_1, \dots, x_n]$. Соотвественно, морфизмы f и g совпадают, если $f - g \in I(X)$, то есть $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(X, \mathbb{A}_F^1) \cong F[t_1, \dots, t_n]/I(X)$. Это кольцо называется *аффинной алгерой* многообразия X и обозначается $F[X]$.

Так как $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(\_, \mathbb{A}_F^1)$ является контравариантным функтором, а кольцевые операции определяются на $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(X, \mathbb{A}_F^1)$ естественным образом, отображение $X \mapsto F[X]$ определяет контравариантный функтор $\mathfrak{Aff} \to F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ — конечнопорожденные редуцированные алгебры.

Построим функтор в обратную сторону. Рассмотрим $R \in F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ и выберем в ней набор образующих (то есть, выберем эпиморфизм $\pi_R \colon F[t_1, \dots, t_n]$). Рассмотрим функтор $\mathcal{X} = \mathrm{Hom}_{F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}}(\_, F) \colon F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.} \to \mathfrak{Set}$.

Множество $\mathcal{X}(A)$ мы можем отождествить с $\mathbb{A}_{F^n}$ по формуле

$$\varphi \mapsto (\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)).$$

Таким образом, $\mathcal{X}(R)$ вкладывается в $\mathbb{A}_F^n$ при помощи отображения $\psi \mapsto \psi \circ \pi_R$. Кроме того, множество $\mathcal{X}(R) = V(\mathrm{Ker}\, \pi_R)$ является аффинным алгебраическим многообразием с аффинной алгеброй $F[t_1, \dots, t_n]/I(V(\mathrm{Ker}\, \pi_R))$. Так мы имеем:

$$\mathcal{X}(F[X]) = \mathcal{X}(A/I(X)) = V(I(X)) = X \quad F[X(R)] = A/I(V(\mathrm{Ker}\, \pi_R)).$$

Последняя алгебра изоморфна R тогда и только тогда, когда $I(V(J)) = J$, где $R \cong A/J$.

Теорема 2 (Теорема Гильберта о нулях)**.** *Пусть $F = F^{alg}$, $J \subset F[t_1, \dots, t_n]$, а $f \in F[t_1, \dots, t_n]$. Тогда $f(V(J)) = 0 \Leftrightarrow f \in \sqrt{RJ}$. Иными словами, $f \in I(V(J)) \Leftrightarrow f \in \sqrt{RJ}$.*

Другими словами, теорема Гильберта о нулях говорит нам, что над алгебраически замнутым полем F аффинные алгебраические многообразия (замкнутые подмножества $\mathbb{A}_F^n$) взаимно однозначно соотвествуют радикальным идеалам в $F[t_1, \dots, t_n]$ и категории $\mathfrak{Aff}$ и $F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ антиэквивалентны.

Аналогичные рассуждения можно провести и для замкнутых подмножеств аффинного многообразия X и радикальных идеалов его аффинной алгебры $F[X]$. При этом точкам аффинного многообразия X соотвествуют максимальные идеалы $F[X]$, то есть, элементы $\mathrm{Specm}(F[X])$.

[1]вообще говоря, кажется, что это не вполне правильное определение, так как тут это просто алгебраическое множество, а вот аффинное многообразие — окольцованное пространство. Поговорим об этом позже.

1.3 Топология Зарисского на спектре кольца

Пусть R — кольцо, $\operatorname{Specm} R$ — его максимальный спектр (множество его максимальных идеалов). Зададим на $\operatorname{Specm} R$ набор замкнутых множеств

$$\widetilde{V}(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \mid \mathfrak{m} \supset J\},\ J \subset R.$$

При таком определении топологии X будет гомеоморфно $\operatorname{Specm}(F[X])$ (как мы и отмечали выше, точки соотвествуют максимальным идеалам).

В случае незамкнутого поля или бесконечнопорожденных алгебр правильно вместо максимального спектра рассматривать простой спектр. Топология Зарисского на нём определяется следующим образом;

$$J \subset R, \quad V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid J \subset \mathfrak{p}\}.$$

1.4 Словарик алгебраической геометрии

Геометрия	Алгебра
Замкнутые подмножества X	Идеалы в $F[X]$
Точки X	Максимальные идеалы в $F[X]$
Неприводимые замкныте подмножества в X	Простые идеалы в $F[X]$
will be upd	will be upd.

1.5 Локализация. Поведение спектра при локализации. Локальный принцип.

Напомним основные примеры локализаций:

1. Для $s \in R$ можно рассмотреть мультипликативное подмножество $\langle s\rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Локализация $\langle s\rangle^{-1}R$ называется *главной локализацией* и обозначается R_s.
2. Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца R, то $R \setminus \mathfrak{p}$ — мультипликативное подмножество. В этом случае локализация $R_{\mathfrak{p}} \stackrel{\text{def}}{=} (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$ называется локализацией кольца R в простом идеале $\mathfrak{p}$.

Определение 8. Кольцо называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал и *полулокальным*, если максимальных идеалов конечное число.

Если $\mathfrak{p}$ — прсотой идеал, то $R_{\mathfrak{p}}$ — локальное кольцо с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.

Пусть теперь $\varphi\colon R \to A$ — гомоморфизм коолец, тогда он индуцирует следующие отображения на идеалах:

- $\varphi^*\colon \operatorname{Ideals} A \to \operatorname{Ideals} R,\ \varphi^*(J) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1}(J)$.
- $\varphi_*\colon \operatorname{Ideals} R \to \operatorname{Ideals} A,\ \varphi_*(I) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(I)A$.

Заметим, что так как прообраз простоого идеала прост, φ^* можно сузить до отображения $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R$.

Лемма 2. Если $I \in \operatorname{Im} \varphi^*$, то $I = \varphi^*(\varphi_*(I))$.

Доказательство. Пусть $I = \varphi^*(J) = \varphi^{-1}(J)$, тогда $\varphi(I) \subseteq J \implies \varphi_*(I) = \varphi(I)A \subseteq JA \subseteq J$. Но тогда $\varphi^*(\varphi_*(I)) \subseteq \varphi^{-1}(J) = I$. С другой стороны, $I \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(I)) \subseteq \varphi^*(\varphi_*(I))$. □

Предыдущее утверждение можно *сузить* на простые идеалы:

Лемма 3. Пусть $\varphi\colon R \to A$ — произвольный гомоморфизм колец. Тогда $\mathfrak{p} \in \varphi^*(\operatorname{Spec} A)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p} = \varphi^*(\varphi_*(\mathfrak{p}))$.

Доказательство допишу в сессию.

2. Алгебраическая теория чисел

2.1 Разложение идеалов в произведение простых в кольцах целых числовых полей

Лемма 4. Пусть A — нётерово, $I \subset A$ — ненулевой идеал. Тогда существуют такие простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$, что $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \subset I$.

Доказательство. Предположим противное, то есть, что существуют идеаы, для которых не выполнено условие леммы. Выберем среди таких максимальный (мы можем так сделать в силу нётеровости кольца), назовём его I. Заметим, что I — не простой идеал, что означает, что $\exists x, y \colon \notin I : xy \in I$. Кроме того, I — собственный идеал. Значит,

$$I + (x) \supset (x), \quad I + (y) \supset I,$$

причем включение строгое. Тогда для идеалов $I + (x)$ и $I + (y)$ условие леммы уже выполняется, то есть $\exists \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ и $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ такие, что $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \subset I + (x)$, $\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_m \subset I + (y)$. Но тогда мы имеем

$$\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_m \subset (I + (x))(I + (y)) \subset I, \text{ так как } xy \in I,$$

что даёт нам противоречие. □

Определение 9. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, $0 \neq I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда введём

$$I^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K \mid xI \subset \mathcal{O}_K\}.$$

Свойства:

1. $x, y \in I^{-1} \implies x + y \in I^{-1}$.
2. Если $x \in I^{-1}$, а $a \in \mathcal{O}_K$, то $ax \in I^{-1}$.

Доказательство. Действительно, $(x + y)I \subset xI + yI \subset \mathcal{O}_K$. Если $xI \subset \mathcal{O}_K$, то для $a \in \mathcal{O}_K$ мы получим $axI = xaI = xI$, так как I — идеал в $\mathcal{O}_K$. □

Замечание. Заметим, что I^{-1} — $\mathcal{O}_K$-модуль. Кроме того, если $a \in I$, то aI^{-1} — идеал в $\mathcal{O}_K$. В частности, aI^{-1} конечнопорожден, а значит, aI^{-1} — конечнопорожденный $\mathcal{O}_K$-модуль.

Пример 1. Пусть $K = \mathbb{Q}$, тогда $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ и любой идеал $I \subset \mathbb{Z}$ имеет вид $I = (a)$. Тогда $(a)^{-1} = a^{-1}\mathbb{Z}$.

Лемма 5. Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — ненулевой собственный идеал. тогда $I^{-1} \neq \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Докажем, что существует $x \in K$ такой, что $x \notin \mathcal{O}_K$ и при этом $xI \in \mathcal{O}_K$. Выберем в I ненулевой элемент a. Рассмотрим $(a) \subset I$, по лемме 4 найдутся такие ненулевые $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, что $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \subset (a)$.

Так как I — собственный, а кольцо $\mathcal{O}_K$ одномерно, I лежит в некотором простом идеале $\mathfrak{p}$. Так мы получаем цепочку включений

$$\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \subset (a) \subset \mathfrak{p} \implies \exists i \colon \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}.$$

Так как оба идеала максимальны, это не включение, а равенство. Не умаляя общности, пусть $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$. Теперь, пусть $k = 1$. Тогда мы имеем $\mathfrak{p} \subset (a) \subset I \subset \mathfrak{p} \implies I = \mathfrak{p} = (a) \implies I^{-1} = a^{-1}\mathcal{O}_K$. Значит, $x = a^{-1} \notin \mathcal{O}_K$, так как иначе $I = \mathcal{O}_K$.

Теперь пусть $k \geq 2$, выберем k минимально возможным. Тогда

$$\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \not\subset (a) \implies \exists b \in \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \setminus (a).$$

Тогда мы можем взять $x = \frac{b}{a}$ и тогда $xI = \frac{b}{a}I \subset \frac{b}{a}\mathfrak{p}_1 \subset \frac{\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k}{a} \subset \frac{(a)}{a} = \mathcal{O}_K$. Остаётся проверить, что $\frac{b}{a} \notin \mathcal{O}_K$.В самом деле, если $\frac{b}{a} \in \mathcal{O}_K$, то $b \in (a)$, что противоречит выбору b. □

Замечание. Ясно, что включение $\mathcal{O}_K \subset I^{-1}$ верно всегда, так как просто по определению идеала $\forall x \in \mathcal{O}_K \; xI \subset \mathcal{O}_K$

Возьмём $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ и рассмотрим $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}$. С одной стороны, это идеал в $\mathcal{O}_K$, причём он содержит $\mathfrak{p}$.

Лемма 6. Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \emptyset_K$, тогда $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = (1) = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Предположим противное, тогда в силу максимальности идеала $\mathfrak{p}$ мы имеем $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{p} = (u_1, \ldots, u_n)$, тогда если $\alpha \in \mathfrak{p}^{-1} \setminus \mathcal{O}_K$ (тут мы пользуемся леммой 5), то $\alpha u_1 \in \mathfrak{p}$ и мы можем написать систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha u_1 = \sum\limits_{u=1}^{n} a_{1i} u_i \\ \alpha u_2 = \sum\limits_{u=1}^{n} a_{2i} u_i \\ \vdots \\ \alpha u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni} u_i \end{cases}$$

В матричной форме эта система будет иметь вид

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \alpha - a_{22} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \alpha - a_{nn} \end{pmatrix}}_{=B} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0.$$

Значит, $\det B = 0$, что даёт нам унитарный многочлен с коэффициентами из $\mathcal{O}_K$, обнуляющий α. Тогда, так как $\mathcal{O}_K$ — целозамкнуто, $\alpha \in \mathcal{O}_K$, противоречие. $\square$

Теперь мы достаточно подготовились, чтоб доказать, что в кольце $\mathcal{O}_K$ любой идеал раскладывается в произведение простых единственным образом.

Теорема 3 (О разложении идеалов в произведение простых). *Пусть $0 \neq I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда I однозначно (с точностью до перестановки сомножителей) раскладывается в произведение простых идеалов.*

Доказательство. Как обычно, проходит в два этапа.
Существование: Предположим, что существуют идеалы, не раскладывающиеся в произведение простых. Среди таких идеалов возьмём максимальный, обозанчим его I (мы можем так сделать, потому что $\mathcal{O}_K$ — нётерово кольцо). Он содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{p} \in \operatorname{Specm} \mathcal{O}_K$. Тогда $I\mathfrak{p}^{-1} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}_K$ — идеал. Значит, нам остаётся показать, что $I\mathfrak{p}^{-1} \neq I$. Покажем, что $II^{-1} = \mathcal{O}_K$, тогда мы сможем просто домножить и всё получистя.

Лемма 7. Для любого идеала $I \subset \mathcal{O}_K$ мы имеем $II^{-1} = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Пусть это не так, тогда $II^{-1} \subset \mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q}$ — максимальный идеал. Тогда $II^{-1}\mathfrak{q}^{-1} \subset \mathfrak{q}\mathfrak{q}^{-1} = \mathcal{O}_K \implies I^{-1}\mathfrak{q}^{-1} \subset I^{-1}$. Так как $\mathfrak{q}^{-1}$ не совпадает с $\mathcal{O}_K$, мы можем выбрать $\alpha \in \mathfrak{q}^{-1} \setminus \mathcal{O}_K$. Проделывая рассуждение, аналогичное лемме 6 мы получаем, что $\alpha \in \mathcal{O}_K$, что даёт нам противоречие. $\square$

Итак, если $I\mathfrak{p}^{-1} = I$, то $\mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}_K$, что противоречит лемме 5. Значит, $I \subset I\mathfrak{p}^{-1}$, следовательно мы можем разложить $I\mathfrak{p}^{-1}$ в произведение простых:

$$I\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \implies I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \cdot \mathfrak{p},$$

что и требовалось.
Единственность: Пусть $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n$, тогда $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_m \subset \mathfrak{q}_1 \implies \exists i \colon \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}_i$, а так как они максимальны, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_1$, что даёт нам противоречие. $\square$

Определение 10. Пусть $I \subset K$. I называется *дробным идеалом*, если $\exists x \neq 0 \colon xI \subset \mathcal{O}_K$ — идеал.

Пример 2. I^{-1} — дробный идеал.

Утверждение 1. *Ненулевые дробные идеалы образуют группу по умножению.*

Доказательство. Легко заметить, что произведение дробных идеалов — дробный идеал. Обратный определяется как и раньше:
$$I^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{x \in K \mid xI \subset \mathcal{O}_K\}.$$
Нетрудно убедиться в том, что $II^{-1} = \mathcal{O}_K$. $\square$

Из теоремы 3 следует, что любой дробный идеал раскладывается в произведение простых идеалов (возможно, с отрицательными степенями). Действительно, пусть J — дробный идеал, тогда для некоторого $x \in K$ $xJ = I$ — идеал в $\mathcal{O}_K$, тогда

$$J = (x)^{-1}I = \mathfrak{p}_1^{-1} \dots \mathfrak{p}_k^{-1}\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_m.$$

Значит, группа дробных идеалов — свободная абелева группа, образующие которой — элементы $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

Пример 3. Для кольца $\mathbb{Z}$ дробные идеалы соотвествуют рациональным числам.

Домашнее задание 1. Задачи:

1. Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_K$ факториально тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_K$ — кольцо главных идеалов.
2. Разложите число $33 + 11\sqrt{-7}$ на неприводимые в кольце $\mathcal{O}_K$, где $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$.
3. Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Specm} \mathcal{O}_K$. Введём на группе дробных идеалов *нормирование* следующим образом: $\upsilon_\mathfrak{p}(I) =$ степень, с которой $\mathfrak{p}$ входит в разложение дробного идеала I. Иными словами,
$$I = \mathfrak{p}^{\upsilon_\mathfrak{p}(I)} \cdot \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m.$$
Для $a \in K^*$ определим $\upsilon_\mathfrak{p}(a) \overset{\text{def}}{=} \upsilon_\mathfrak{p}((a))$. Так вот, докажите, что:
   - $\upsilon_\mathfrak{p}(I + J) = \min(\upsilon_p(I), \upsilon_\mathfrak{p}(J))$.
   - $\upsilon_\mathfrak{p}(I \cap J) = \max(\upsilon_p(I), \upsilon_\mathfrak{p}(J))$.
   - $\upsilon_\mathfrak{p}(a + b) \geq \min(\upsilon_\mathfrak{p}(a), \upsilon_\mathfrak{p}(b))$ и равенство достигается в случае $\upsilon_\mathfrak{p}(a) \neq \upsilon_\mathfrak{p}(b)$.
   - $\upsilon_\mathfrak{p}(IJ) = \upsilon_\mathfrak{p}(I) + \upsilon_\mathfrak{p}(J)$.
   - $\upsilon_\mathfrak{p}(ab) = \upsilon_\mathfrak{p}(a) + \upsilon_\mathfrak{p}(b)$.

   Таким образом, $\upsilon_\mathfrak{p}$ — гомоморфизм $K^* \to \mathbb{Z}$. Этот гомоморфизм называют *дисретным нормированием, соотвествующим идеалу* $\mathfrak{p}$.

2.2 Дискриминант

Определение 11. Пусть K/F — конечное сепарабельное расширение, $[K : F] = n$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда *дискриминант* набора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — это

$$\operatorname{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\text{def}}{=} \det\bigl(\operatorname{Tr}_{K/F}(\alpha_i\alpha_j)\bigr).$$

Так как расширение K/F сепарабельно, у нас есть ровно $n = [K : F]$ вложений $\sigma_1, \dots, \sigma_n \colon K \to \mathbb{C}$ (на самом деле, мы знаем, что в $\mathbb{Q}^{alg}$).

Утверждение 2. $\operatorname{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\det(\sigma_i(\alpha_j))^2$.

Доказательство. Положим $\sigma_i(\alpha_j) = A$ и рассмотрим A^tA, тогда

$$(A^tA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma(\alpha_i)\sigma_k(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\alpha_i\alpha_j) = \operatorname{Tr}_{K/F}(\alpha_i\alpha_j).$$

$\square$

Посмотрим теперь, как след меняется при линейном преобразовании. Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)M,\ M \in M_n(F)$.

Утверждение 3. $\operatorname{disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \operatorname{disc}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \cdot (\det M)^2$.

Доказательство. Действительно, это напрямую следует из предложения 2:

$$\operatorname{disc}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \det(\sigma_i(\alpha_j))^2 = \det\left(\sigma_i(\alpha_j)\right)M^2 = \operatorname{disc}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \cdot (\det M)^2.$$

□

Утверждение 4. $\operatorname{disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *— линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно зависимы, $e_1, \ldots, e_n$ — базис K/F.

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (e_1, \ldots, e_n)M, \quad \det M = 0.$$

Значит, по предложению 3 мы имеем $\operatorname{disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Теперь докажем в обратную сторону. Предположим, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно независимы, но $\operatorname{disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det\bigl(\operatorname{Tr}_{K/F}(\alpha_i\alpha_j)\bigr) = 0$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\operatorname{Tr}_{K/F}((x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n)\alpha_j) = 0, \ldots 1 \le j \le n.$$

Так как матрица коэффициентов этой системы — $\operatorname{Tr}_{K/F}(\alpha_i\alpha_j)$, а она вырождена, система имеет нетривиальное решение $(x_1, \ldots, x_n)$. Так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно независимы,

$$y = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \neq 0.$$

С другой стороны, $\operatorname{Tr}_{K/F}(y\alpha_j) = 0\,\forall j$. Так как α_i образуют базис K/F, по линейности мы получаем, что $\operatorname{Tr}_{K/F}(yu) = 0\ \forall u \in K$. Но, так как расширение K/F сепарабельно, $\operatorname{Tr}_{K/F}$ должен быть невырожденной формой[2].

□

Лемма 8. Пусть $B \subset A$ — свободные абелевы группы ранга n. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — базис A, а $\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j\right\}$ — базис B, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда $|A/B| = |\det(a_{ij})|$.

Доказательство. Приведём матрицу (a_{ij}) нормальной форме Смита. Перечислим теперь элементы A/B: это в точности элементы $x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n,\ 0 \le x_i \le a_{ii} - 1$. Если мы докажем, что это в точности все попарно-различные элементы группы A/B, то утверждение будет ясно.

Пусть $\sum_{i=1}^n x_i\omega_i = \sum_{i=1}^n y_i\omega_i$, тогда $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)\omega_i \in B$. Посмотрим на коэффициент при ω_{11}, он может получаться только из первой строки матрицы (так как матрица верхнетреугольная), тогда $\ell a_{11} = x_1 - y_1$, но это равенство возможно только в случае, когда $x_1 = y_1$ (так как есть ограничения на x_i и y_i). Далее мы проделаем аналогичное рассуждение $\sum_{i=2}^n (x_i - y_i)\omega_i \in B$ и в итоге получим, что все такие элементы разлчины.

Теперь рассмотрим $a = x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n,\ x_i \in \mathbb{Z}$. Поделим с остатком: $x_1 = a_{11}q + r,\ 0 \le r < a_{11}$, и рассмотрим $x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n - q(a_{11}\omega_1 + \ldots + a_{1n}\omega_n) = r\omega_1 + x_2'\omega_2 + \ldots$. Так как мы вычли из a элемент из B, класс $\overline{a} \in A/B$ не изменился, а старшим коэффициентом стал r, лежащий в нужном диапазоне. Продолжая в том же духе, мы полчми, что все коэффициенты лежат в нужном диапазоне. □

Как мы помним, $\mathcal{O}_K$ — свободная абелева группа ранга $n = [K : \mathbb{Q}]$ и $\mathcal{O}_K = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i$, а базис $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ мы называем *целым базисом.*

Определение 12. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — расширение степени n, $\mathcal{O}_K = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i$. Тогда

$$\operatorname{disc}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{disc}(\omega_1, \ldots, \omega_k).$$

[2] Этим утверждением из теорией полей мы пользуемся без доказательств. Доказательство этого утверждения можно прочитать в S. Lang “Algebra”.

Замечание. Дискриминант поля не зависит от выбора целого базиса. Действительно, если у нас есть какой-то другой целый базис $(u_1, \dots, u_n)$, то

$$(\omega_1, \dots, \omega_n)M = (u_1, \dots, u_n), \quad M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}).$$
$$(u_1, \dots, u_n)M^{-1} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$$
$$\mathrm{disc}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{disc}(\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot \underbrace{(\det M)^2}_{=1}$$

Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$, положим $\mathrm{ind}(\theta) = [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]] = |\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}[\theta]|$.

Утверждение 5. *В описанной выше сиутации* $\mathrm{disc}(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = \mathrm{ind}(\theta)^2 \cdot \mathrm{disc}(K)$.

Доказательство. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — целый базис. Тогда

$$(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = (\omega_1, \dots, \omega_n)M \implies \mathrm{disc}(1, \dots, \theta^{n-1}) = \mathrm{disc}(K)(\det M)^2.$$

Нетрудно заметить, что по лемме 8 мы имеем $|\det M| = \mathrm{ind}(\theta)$.

□

Пример 4. Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^3 - \theta - 1 = 0$. Как мы помним из домашнего задания, $\mathrm{disc}(1, \theta, \theta^2) = -23$. Пользуясь предложением 5 мы получаем, что $-23 = (\mathrm{ind}(\theta))^2 \cdot \mathrm{disc}\, K \implies \mathrm{ind}\, \theta = 1$, из чего следует, что $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

Пример 5. Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^3 - \theta - 4 = 0$. Как мы помним, $\mathrm{disc}(1, \theta, \theta^2) = -4 \cdot 107 = (\mathrm{ind}\, \theta)^2 \cdot \mathrm{disc}\, K$, Тогда $\mathrm{ind}\, \theta = 1$ или $\mathrm{ind}\, \theta = 2$. С другой стороны, так как $\frac{\theta + \theta^2}{2} \in \mathcal{O}_K, \notin \mathbb{Z}[\theta]$, $\mathrm{ind}(\theta) \neq 1$. Значит, $\mathrm{ind}\, \theta = 2$, из чего мы имеем разложение

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta \oplus \mathbb{Z}\frac{\theta + \theta^2}{2}.$$

Домашнее задание 2. Задачи:

1. Предположим, что K/F — расширение Галуа, $[K : F]$ — нечётна. Докажите, что тогда для любого базиса $e_1, \dots, e_n$ расширения K/F будет выполнено $\mathrm{disc}(e_1, \dots, e_n) \in {F^*}^2$.
2. Рассмотрим $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$. Тогда $\zeta, \zeta^2, \dots \zeta^{p-1}$ образуют базис $K/\mathbb{Q}$. Докажите, что $|\,\mathrm{disc}(\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-1})| = p^{p-2}$. *Hint:* тут можно действовать строго согласно определению 11.
3. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — расширение степени n, $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ и пусть p — такое простое число, что $v_p(a_0) = 1$ и $v_p(a_i) \geq 1$. Докажите, что тогда $p \nmid \mathrm{ind}(\theta)$.
4. Докажите, что если $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$, где p — простое, то $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$, где $\zeta^p = 1$.
5. Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ — максимальные идеалы кольца $\mathcal{O}_K$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует $\alpha \in K^* \colon v_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = n_i \; \forall 1 \leq i \leq n_k$.
6. Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал, J — дробный идеал. Докажите, что $\exists x \in K^* \colon xJ + I = \mathcal{O}_K$.
7. Докажите, что любой дробный идеалпорождается двумя элементами.

Приведём сейчас другое, конструктивное доказательство того, что $\mathcal{O}_K$ — конечнопорожденная абелева группа.

Возьмем $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \mathcal{O}_K$, где $\omega_1, \dots, \omega_n$ — базис K на $\mathbb{Q}$. Тогда $\mathrm{disc}(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{Z}$, возьмем набор $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ с минимальным модулем дискриминанта. Докажем, что тогда он и будет целым базисом.

Возьмем $x \in \mathcal{O}_K$, $x = \sum a_i\omega_i$, $a_i \in \mathbb{Q}$ и покажем, что $a_i \in \mathbb{Z}$. Предположим противное, не умаляя общности $a_1 \notin \mathbb{Z}$.

$$x \in \mathcal{O}_K \implies \sum \{a_i\}\omega_i = x - \sum [a_i]\omega_i \in \mathcal{O}_K.$$

Перейдём к набору $(\sum \{a_i\}\omega_i, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Покажем, что модуль его дискриминанта уменьшился. Действительно,

$$(\sum \{a_i\}\omega_i, \omega_2, \dots, \omega_n) = (\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot \begin{pmatrix} \{a_1\} & \dots & \dots & \dots \\ \{a_2\} & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{a_n\} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

а определитель матрицы, написаной справа равен $\{a_1\} \leq 1$.

Напоминание про нормальную форму Смитта:
Пусть $B \subset A$ — свободные абелевы группы ранга n, причем $A = \bigoplus \mathbb{Z}x_i$, $B = \langle \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ 1 \leq i \leq n\rangle$. Тогда мы можем явно вычислить задание факторгруппы A/B образующими и соотношениями.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим автоморфизм группы A, который переводит x_1 в $x_1 + cx_2,\ c \in \mathbb{Z}$, а остальные образующие переводит в себя. Что произойдет с матрцией в результате этого изоморфизма? Ко второму столбцу прибавится первый, умноженный на c. Аналогично мы можем делать для любых столбцов. Кроме того, мы можем менять их местами посредством изоморфизмов вида $x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto x_1$. При таких преобразованиях факторгруппа B/A будет оставаться такой же, так как: $A/B \cong A/f(B)$. Соотвественно, с помощью таких операций матрицу мы можем диагонализовать. В итоге мы получим диагональную матрциу

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

2.3 Норма идеала

Определение 13. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, $0 \neq I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда, как мы знаем, $|\mathcal{O}_K/I| < \infty$. *Нормой идеала I* мы будем называть целое число

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(I) \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\mathcal{O}_K/I|$$

Замечание. Вообще говоря, норма идеала определяется для любого дедекиндова кольца, соответствующего некоторому расширению и обычно является идеалом. В нашем случае мы рассматриваем кольцо целых, где для любого идеала можно выбрать наименьшую по модулю неотрицательную порождающую, поэтому у нас норма — число.

Хотелось бы, чтоб норма главного идеала была равна норме порождающего его элемента (в смысле нормы для расширения полей).

Утверждение 6. *Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — целый базис $\mathcal{O}_K$. Тогда* $\mathrm{N}((a)) = \left|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a)\right|$.

Доказательство. Пусть $a\omega_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\omega_j,\ b_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда $\mathrm{N}(a) = \det(b_{ij})$. С другой стороны, мы доказали, что $|\det(b_{ij})| = |\mathcal{O}_K/a\mathcal{O}_K|$. ☐

Заметим, что тогда мы получаем и мультипликативность для главных идеалов:

$$\mathrm{N}((a))\,\mathrm{N}((b)) = |\,\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a)||\,\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(b)| = |\,\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(ab)| = \mathrm{N}((ab)).$$

Хотелось бы теперь обобщить это на произвольные идеалы. Для этого нам понадобятся задачи из ДЗ 2.

Лемма 9 (Задача 5 из ДЗ 2)**.** Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ — максимальные идеалы кольца $\mathcal{O}_K$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует $\alpha \in K^*\colon v_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = n_i\ \forall 1 \leq i \leq n_k$.

Доказательство. Заметим, что идеалы $\mathfrak{p}_i^{n_i}$ попарно взаимнопросты. Выберем $x_i \in \mathfrak{p}_i^{n_i} \setminus \mathfrak{p}_i^{n_i+1}$. Тогда по КТО существует $x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{n_i+1}}$. Тогда

$$v_{\mathfrak{p}_i}(x) = v_{\mathfrak{p}_i}((x - x_i) + x_i) = n_i.$$

☐

Лемма 10 (Задача 6 из ДЗ 2)**.** Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал, J — дробный идеал. Докажите, что $\exists x \in K^*\colon xJ + I = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Во-первых, J сразу можно полагать целым, так как мы можем сначала домножить его на элемент, превращающий его в целый, а потом уже что-то с ним делать. Разложим I в произведение простых:

$$I = \mathfrak{p}_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_m^{k_m}.$$

Соотвественно, легко найти $y \in K^*\colon v_{\mathfrak{p}_i}(yJ) = 0$. Проблема в том, что yJ может оказаться не целым идеалом. Предположим, что это так.

$$yJ = \prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{q}_i^{-r_i} \cdot \prod_{j=1}^{r} \mathfrak{r}_j^{\ell_i}, \text{ где } \ell_i \geq 0,\ r_i \geq 0.$$

Выберем $\widetilde{y} \in \mathcal{O}_K\colon v_{\mathfrak{q}_i}(\widetilde{y}) = r_i,\ v_{\mathfrak{p}_i}(\widetilde{y}) = 0$, тогда ясно, что $y\widetilde{y}J$ — целый идеал, который не делится на $\mathfrak{p}_i$, следовательно он взаимнопрост с I, что и требовалось. □

Теорема 4 (Задача 7 из ДЗ 2)**.** *Любой дробный идеал I порождается двумя элементами.*

Доказательство. Возьмем $x \in \mathcal{O}_K$ такой, что $xI^{-1} \subset \mathcal{O}_K$ — целый идеал. Тогда по лемме 10 (тут у нас xI^{-1} — целый идеал, I^{-1} — дробный) найдётся $y \in K^*$ такой, что

$$xI^{-1} + yI^{-1} = \mathcal{O}_K \implies xI^{-1}I + yI^{-1}I = I \implies I = (x) + (y) = (x, y).$$

□

Домашнее задание 3 (Осторожно, открытая задача)**.** Существует ли кольцо, в котором каждый идеал порождается тремя элементами, причём, есть идеал, который не порождается двумя элементами.

Теорема 5 (Мультипликативность нормы идеала)**.** *Если I, J — два ненулевых идеала в $\mathcal{O}_K$, то для их норм верно равенство* $\mathrm{N}(IJ) = \mathrm{N}(I)\,\mathrm{N}(J)$.

Доказательство. Сравним индексы: $|\mathcal{O}_K/IJ| = |\mathcal{O}_K/I| \cdot |I/IJ|$. Значит, остаётся показать, что $|\mathcal{O}_K/J| = |I/IJ|$. По лемме 10 найдём $x \in K^*\colon xI + J = \mathcal{O}_K$. Тогда воспользуемся теоремой о гомоморфизме и взаимной простотой:

$$|\mathcal{O}_K/J| = |(xI + J)/J| = |xI/xI \cap J| = |xI/xIJ| = |I/IJ|\,.$$

□

2.4 Индекс ветвления и степень инерции

Возьмем простое число $p \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим главный идеал $(p) = p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Этот же идеал мы можем рассматривать, как главный идеал в коьлце $\mathcal{O}_K$. Там он уже не обязательно будет простым, но будет раскладываться в произведение простых:

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k},$$

причем набор идеалов $\mathfrak{p}_i$ будет своим для каждого простого числа p (т.е. для различных простых чисел эти наборы не будут пересекаться). Кроме того, если $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ — простой идеал, то $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ будет идеалом в $\mathbb{Z}$, причем простым, значит для некоторого простого p мы получим $(p) \subset \mathfrak{p}$. Тогда $(p)\mathfrak{p}^{-1} \subset \mathcal{O}_K$, следовательно мы можем разложить его на простые:

$$(p) = \mathfrak{p} \cdot \ldots .$$

Таким образом, простые идеалы в $\mathcal{O}_K$ находятся в соотвествии с простыми числами.

Иными словами, над каждым простым числом $p, q, \ldots \in \mathbb{Z}$ находится сколько то идеалов $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_2, \ldots, \}$, $\{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\}$. Эти наборы не будут пересекаться и, кроме того, будут покрывать все простые идеалы в $\mathcal{O}_K$.

Определение 14. Степень e_i называется *индексом ветвления* идеала $\mathfrak{p}_i$.

Определение 15. Как известно, для $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ факторкольцо $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ будет полем. Это поле — конечное расширение $\mathbb{F}_p$ так как у нас есть естественное вложение $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Значит, $|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}| = p^f$. Число f называется *степенью инерции* идеала $\mathfrak{p}$. Иными словами, *степень инерции* — это $[\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} : \mathbb{F}_p]$.

Заметим, что $|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}| = \mathrm{N}(\mathfrak{p})$. Возьмем простое число p и рассмотрим главный идеал $p\mathcal{O}_K$. Тогда если $n = [K : \mathbb{Q}]$, то

$$p^n = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(p) = \mathrm{N}(p\mathcal{O}_K) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{N}(\mathfrak{p}_i)^{e_i} = \prod_{i=1}^{k} \left(p^{f_i}\right)^{e_i}.$$

Тогда, приравнивая степени, мы получаем формулу, устанавливающую соотношение между *индексом ветвления*, *степенью инерции* и степенью расширения:

$$\sum_{i=1}^{k} e_i f_i = n. \tag{1}$$

Нетрудно заметить, что случае квадратичного расширения индекс ветвления, как и степень инерции, будут равны единице. Таакэе ясно, что $1 \le e_i f_i \le n$, то есть, эти числа не могут быть произвольными.

Ветвление при расширении Галуа:

Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение. Тогда группа Галуа $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ действует и на идеалах кольца $\mathcal{O}_K$. Кроме того, она оставляет на месте $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, так как $\forall \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \cong \sigma\mathcal{O}_K/\sigma\mathfrak{p} \cong \mathcal{O}_K/\sigma\mathfrak{p}$.

Теорема 6. *Действие* $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ *на множестве простых идеалов, висящих над простым числом* p.

Доказательство. Предположим, что есть два простых идеала $\mathfrak{p}, \widetilde{\mathfrak{p}}$: $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p) = \widetilde{\mathfrak{p}} \cap \mathbb{Z}$, для которых утверждение теоремы не верно. Тогда

$$\{\sigma\mathfrak{p} \mid \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})\} \cap \{\sigma\widetilde{\mathfrak{p}} \mid \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})\} = \varnothing.$$

По КТО мы можем выбрать такой элемент $x \in \mathcal{O}_K$, что

$$x \equiv 0 \pmod{\sigma\mathfrak{p}} \quad x \equiv 1 \pmod{\sigma\widetilde{\mathfrak{p}}} \quad \forall \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

Применим теперь норму:

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x) = \prod_{\tau \in \operatorname{Gal}(K/Q)} \tau x \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z} = \widetilde{p} \cap \mathbb{Z} \implies \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x) \in \widetilde{\mathfrak{p}}.$$

Значит, так как $\widetilde{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $\exists \tau \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$: $\tau x \in \widetilde{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow x \in \tau^{-1}\widetilde{\mathfrak{p}}$. Но, с дугой стороны, ранее мы отметили, что $\forall \tau \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ $\tau x \equiv 1 \pmod{\widetilde{\mathfrak{p}}}$. □

Так как действие транзитивно, $\exists \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$: $\sigma\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \mathfrak{p}_k^{e_k} = \sigma(\mathfrak{p}\mathcal{O}_K) = \sigma(\mathfrak{p}_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot \sigma(\mathfrak{p}_k)^{e_k} = \mathfrak{p}_2^{e_1} \cdot \ldots .$$

Значит, в силу единственности разложения, мы получаем $e_1 = e_2$. В силу транзитивности, мы можем сделать так для любой пары индексов, из чего следует нужное нам. Тогда в случае расширения галуа все индексы ветвления равны. Аналогично мы можем сделать и для степеней инерции. Тогда равенство (1) примет весьма простой вид: $efk = n$.

Ветвление при квадратичном расширении:

Пусть $p \neq 2$ — простое число, рассмотрим расширение $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)/\mathbb{Q}$, где d — целое и свободно от квадратов. Тогда в силу формулы $\sum e_i f_i = 2$ мы получаем, что возможны такие варианты разложения:

$$(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2, \quad (p) = \mathfrak{p}, \quad (p) = \mathfrak{p}^2.$$

Пусть $p \mid d$, тогда $(p) = (p, \sqrt{d})^2$. Действительно, нам надо проверить

$$(p) = (p^2, p\sqrt{d}, d) \Leftrightarrow (1) = \left(p, \sqrt{d}, \frac{d}{p}\right),$$

а это так, потому что $(p, \frac{d}{p}) = 1$. Кроме того, заметим, что отсюда в частности следует, что идеал $(p, \sqrt{d})^2$ — простой.

Теперь рассмотрим случай, когда $p \not| d$. Начнём со случая, когда $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$. Тогда $x^2 - d = pm$. Тогда

$$(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \text{ где } \mathfrak{p}_1 = (p, x + \sqrt{d}),\ \mathfrak{p}_2 = (p, x - \sqrt{d}).$$

Действительно, перемножим эти идеалы:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = (p^2, p(x - \sqrt{d}), p(x + \sqrt{d}), pm) = (p) \Leftrightarrow (p, x - \sqrt{d}, x + \sqrt{d}, m) = (1).$$

Идеал слева не будет единичным тогда и только тогда все образующие делятся на p. На m здесь вообще можно не смотреть. Но, $p \not| x \implies (p, 2x) = (1)$.

Остаётся случай, когда $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$. Предположим, что $d \not\equiv 1 \pmod 4$. Тогда

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - d) \implies \mathcal{O}_K/(p) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 - d, p) = \mathbb{F}_p[x]/(x^2 - d) \text{ — поле}$$

откуда следует, что идеал (p) максимален. Тепеь, если $d \equiv 1 \pmod 4$,

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] \implies \mathcal{O}_K \Big/ (p) \cong \mathbb{Z}[x] \Big/ \left(x^2 - x + \frac{1-d}{4}, p\right) \cong \mathbb{F}_p \Big/ \left(x^2 - x + \frac{1-d}{4}\right) \text{ — поле,}$$

так как дискриминант многочлена $x^2 - x + \frac{1-d}{4}$ равен d, а d — невычет по модулю p.

Домашнее задание 4. Задачи:

1. Разобрать случай $p = 2$ в выкладках выше.
2. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — расширение степени n, $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ и пусть p — такое простое число, что $v_p(a_0) = 1$ и $v_p(a_i) \geq 1$. Докажите, что тогда $p \not| \operatorname{ind}(\theta)$. *Hint 1:* рассмотрите $x \in \mathcal{O}_K \colon px \in \mathbb{Z}[\theta]$. Покажите, что достаточно доказать, что в этом случае $x \in \mathbb{Z}[\theta]$. *Hint 2:* докажите, что если $\mathfrak{p} \mid (p)$, то $v_{\mathfrak{p}}(\theta) = 1$ и индекс ветвления числа p равен n. *Hint 3:* $px = b_0 + b_1\theta + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}$. Предположите, что не все b_i делятся на p и прийдите к противоречию.
3. Исследуйте разложение идеала $2\mathcal{O}_K$, где $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$.
4. Пусть K/F — конечное сепарабельное расширение, $K = F(\theta)$, $[K : F] = n$. Докажите, что

$$\operatorname{disc}(1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}) = \prod_{i \neq j}(\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)) = \mathrm{N}_{K/F}(f'(\theta)), \text{ где}$$

   f — минимальный многочлен θ.
5. Докажите, что для $\zeta = \sqrt[p^n]{1}$ и $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ будет справедлив результат, аналогичный 2, то есть $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$.
6. Пусть $f, g \in \mathcal{O}_K[x]$, то $\operatorname{cont}(fg) = \operatorname{cont}(f) \cdot \operatorname{cont}(g)$. *Hint:* применить локальный принцип.

2.5 Группа классов идеалов и её элементарное вычисление

Понятие нормы легко распространить на дробнгые идеалы: если $I, J \subset \mathcal{O}_K$ — целые идеалы, то мы можем положить

$$\mathrm{N}(IJ^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{N}(I)}{\mathrm{N}(J)}$$

Проверим, что это определение корректно. Действительно, пусть $I_1J_1^{-1} = I_2J_2^{-1}$, тогда $I_1J_2 = I_2J_1$, что означает, что

$$\mathrm{N}(I_1)\,\mathrm{N}(J_2) = \mathrm{N}(I_2)\,\mathrm{N}(J_1) \implies \mathrm{N}(I_1)\,\mathrm{N}(J_1)^{-1} = \mathrm{N}(I_2)\,\mathrm{N}(J_2)^{-1}.$$

Как мы помним, у нас есть понятие группы дробных идеалов $\mathrm{I}(K)$ — свободная абелева группа, порожденная $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$.В ней есть подгруппа из *главных дробных идеалов* $a\mathcal{O}_K,\ a \in K^*$. Эту подгруппу мы будем обозначать, как $\mathrm{PI}(K)$. Факторгруппу $\mathrm{I}(K)/\mathrm{PI}(K)$ называют *группой классов идеалов* и обозначают

$$\mathcal{C}\mathrm{l}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{I}(K)/\mathrm{PI}(K).$$

Теорема 7. *Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение. Тогда группа $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$ конечна.*

Доказательство. Итак, пусть $n = [K : \mathbb{Q}], \omega_1, \ldots, \omega_n$ — целый базис. Пусть $\sigma_i \colon K \to \mathbb{C}$ — все вложения K в $\mathbb{C}$, а $C = \max|\sigma_i(\omega_j)| > 0$. Возьмём произвольный элемент $\alpha \in \mathcal{C}\mathrm{l}(K)$, тогда

$$\alpha^{-1} = [J],\ J \text{ — целый идеал в кольце } \mathcal{O}_K.$$

Тогда $\alpha = [J^{-1}]$. Рассмотрим множество

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i\omega_i \;\middle|\; 0 \le x_i \le \left[\mathrm{N}(J)^{\frac{1}{n}}\right] \right\}, \quad |S| > \mathrm{N}(J) = |\mathcal{O}_K/J|.$$

Из оценки на порядок следует, что найдутся $\sum_{i=1}^n x_i\omega_i,\ \sum_{j=1}^n y_i\omega_i \in S$ такие, что

$$z = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)\omega_i \in J.$$

Рассмотрим идеал $I = zJ^{-1}$, это целый идеал кольца $\mathcal{O}_K$, $[I] = [J^{-1}]$, так как они отличаются на главный идеал. Рассмотрим $[I]\cdot[J] = (z) = z\mathcal{O}_K$ и оценим норму этого главного идеала:

$$\mathrm{N}(I)\,\mathrm{N}(J) = \mathrm{N}(IJ) = \mathrm{N}((z)) = |\mathrm{N}(z)| = \prod_{j=1}^n \left|\sigma_j\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)\omega_i\right)\right| \le \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)\,|\sigma_j(\omega_i)|\right) \le$$
$$\le \prod_{j=1}^n \Big(n\cdot \mathrm{N}(J)^{\frac{1}{n}}\cdot C\Big) = n^nC^n\,\mathrm{N}(J) \implies \mathrm{N}(I) \le n^n\cdot C^n.$$

Таким образом мы показали, что для любого класса из $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$ мы можем выбрать представителя с ограниченной нормой. Кроме того, I — целый идеал, а есть лишь конечное число целых идеалов, нормы которых ограничены некоторой фиксированной константой, так как любой идеал раскладывается в произведение простых, а значит,

$$I = \mathfrak{p}_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_m^{k_m} \implies \mathrm{N}(I) = \prod_{i=1}^m \mathrm{N}(\mathfrak{p}_k)^{k_i} \le n^nC^n.$$

Тогда для выполнения неравенства возможностей подобрать $\mathfrak{p}_i$ лишь конечное число, так как $\mathrm{N}(\mathfrak{p}_i) = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i| \ge p$ (так как это векторное пространство над $\mathbb{F}_p$, где $p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\cap\mathfrak{p}_i$). Это даёт нам, что у нас конечное число классов идеалов.

□

Пример 6. Вычислим группу классов идеалов для поля $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt{-14}\big)$.

Основной факт состоит в том, что произвольный $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ выражается через максимальные идеалы, висящие над (2) и (3). Пока что поверим в этом и посчитаем при помощи этого факта группу $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$2\mathcal{O}_K = (2) = (2, \sqrt{-14})^2 = \mathfrak{p}_2^2, \quad \mathrm{N}(\mathfrak{p}_2) = 2.$$

Так как $\left(\frac{-14}{3}\right) = 1$, $3\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_3'$. Как мы знаем, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$, а в этом кольце

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a + b\sqrt{-14}) = a^2 + 14b^2 \ne 2 \implies \mathfrak{p}_2 \text{ — не может быть главным идеалом,}$$

из чего следует, что образ $\mathfrak{p}_2$ нетривиален в группе $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$. Кроме того, так как $\mathrm{N}((3)) = 9, \mathrm{N}(\mathfrak{p}^3) = \mathrm{N}(\mathfrak{p}_3') = 3$, что даёт нам то же самое. Заметим, что $\mathfrak{p}_3^2$ не является глаынм идеалом, но $[\mathfrak{p}_3^2] = [\mathfrak{p}_2]$. Действительно, возьмем $(2+\sqrt{-14}),\ \mathrm{N}((2+\sqrt{-14}) = 18$, но идеал $(2+\sqrt{-14})$ раскладывается в произведение максимальных, лежащих либо над (2), либо над (3), так $\mathrm{N}(2+\sqrt{-14}) = 18 = 2\cdot 3^2$. Это даёт нам, что

$$(2+\sqrt{-14}) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3^{(?)}\mathfrak{p}_3^{(?)}.$$

Так как $(1+\sqrt{-14})(1-\sqrt{-14}) = 15$, мы можем положить $\mathfrak{p}_3 = (3, 1+\sqrt{-14})$, а $\mathfrak{p}_3' = (3, 1-\sqrt{-14})$. Так как $(2+\sqrt{-14}) \in (3, 1-\sqrt{-14})$, мы можем заключить, что $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3^{(?)}\mathfrak{p}_3^{(?)} \subset \mathfrak{p}_3'$, что даёт нам

$$[\mathfrak{p}_2][\mathfrak{p}_3']^2 = [1], \quad [\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}_3]^2$$

Теперь докажем озвученное в начале примера утверждение индукцией по $p\colon p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\cap\mathfrak{p}$.

$$\mathfrak{p}_2^2 = (2), \quad \mathfrak{p}_7^2 = (7), \quad \mathfrak{p}_2^2\mathfrak{p}_7^2 = (14) = (\sqrt{-14})^2 \implies \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7 = (\sqrt{-14}) \implies [\mathfrak{p}_2]^{-1} = [\mathfrak{p}_7] \implies [\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}_2]^{-1} = [\mathfrak{p}_7].$$

Теперь рассмотрим остальыне простые числа. Все они делятся на две группы: по модулю которых -14 — квадратичный вычет или невычет.

Пусть сначала -14 — невычет по модулю p. Тогда идеал $p\mathbb{Z}$ остаётся простым в $\mathcal{O}_K$, таким образом, мы имеем единственный простой идеал, сидящий над p и этот идеал главный, что даёт нам что $[\mathfrak{p}]$ тривиален в $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$.

Теперь пусть -14 — квадратичный вычет по модулю p. Тогда $\exists x\in\mathbb{Z}\colon p \mid x^2+14$. Можно считать, что $0 \le x \le \frac{p-1}{2}$. Тогда мы имеем, что $x^2+14 = pm \le \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + 14$. Кроме того, в этом случае

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \quad \mathrm{N}(\mathfrak{p}_1) = \mathrm{N}(\mathfrak{p}_2) = p, \quad \mathfrak{p}_1' = (p, x+\sqrt{-14}),\ \mathfrak{p}_2' = (p, x-\sqrt{-14}).$$

Если $p \ge 5$, то $m < p$, так как будут справделивы такие неравенства:

$$m < \frac{\frac{p^2}{4}+14}{p} < p.$$

Кроме того, $(x+\sqrt{-14}) \subset \mathfrak{p}_1' \implies (x+\sqrt{-14}) \subset \mathfrak{p}_1' I$. Заметим, что $pm = \mathrm{N}(x+\sqrt{-14}) = \mathbb{N}(\mathfrak{p}_1')\,\mathrm{N}(I)$, а $\mathrm{N}(\mathfrak{p}_1') = p$, то есть $\mathrm{N}(I) = m < p$. Это даёьт нам, что в разложении I на максимальные лежат только идеалы, лежащие над меньшими простыми числами. Иными словами, если

$$I = \mathfrak{q}_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_s^{k_s},\ \mathfrak{q}_i\cap\mathbb{Z} = q_i\mathbb{Z},\ q_i \le p, q_i - \text{простое.}$$

Это даёт нам возможность применить индукционное предположение: $[\mathfrak{q}_i]$ выражаются только через $\mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{p}_3$. Теперь заметим, что $[\mathfrak{p}_1'] = [I^{-1}]$, из чего следует, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2'$ тоже выражается через $\mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{p}_3$, что и требовалось.

Группа классов идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$

1. Если $d = -1, -2, -3, -7$, то $\mathcal{O}_K$ — еклидово, а значит, кольцо главных идеалов, то есть $\mathcal{C}\mathrm{l}(K) = e$.
2. Если $d = -11, -19$, то справедлив аналогичный результат. Кольцо $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-11}\right]$ также евклидово, но установить это сложнее. Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$ уже не является евклиовым, но является кольцом главных идеалов. Аналогичное верно и для $d = -43, -67, -163$.
3. Невероятно, но выполняется следующий факт:

$$\frac{\log\left|\mathcal{C}\mathrm{l}(\mathbb{Q}\sqrt{-d})\right|}{\log\sqrt{\operatorname{disc} K}} \xrightarrow{d\to\infty} 1.$$

4. Табличку с группами классов идеалов мнимых квадратичных полей можно найти в конце книжки Боревич-Шафаревич.

Следствия из теоремы о конечности групп классов идеалов:

1. Если $h = |\mathcal{C}\mathrm{l}(K)|$, то для любого дробного идеала I: I^h является главным.

2. Если $(\ell, h) = (1)$ и I^ℓ главный, то I — главный. Действительно,

$$a\ell + bh = 1 \implies I = I^{a\ell+bh} = \left(I^\ell\right)^a \left(I^h\right)^b.$$

3. Существует такое конечное расщирение L/K, что любой дробный идеал I кольца $\mathcal{O}_K$ идеал $I\mathcal{O}_L$ будет главным. (см. *проблема башни полей классов*).

Доказательство. Итак, пусть $I_1, \ldots, I_m$ — представители группы классов идеалов. Пусть $I_i^h = (x_i)$. В качестве поля L мы возьмём:

$$L = K(\sqrt[h]{x_1}, \ldots, \sqrt[h]{x_m}).$$

$$I_j^h \mathcal{O}_L = \left(\sqrt[h]{x_j}\right)^h \mathcal{O}_L \implies I_j \mathcal{O}_L = (\sqrt[h]{x_j})\mathcal{O}_L.$$

Кроме того, $\exists j: II_j^{-1}$ — главный. Тогда $I\mathcal{O}_L(I_j\mathcal{O}_L)^{-1}$ — главный, из чего следует, что $I\mathcal{O}_L$ — главный. □

Домашнее задание 5. Задачи:

1. Вычислите группу классов идеалов для $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{-6}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{10}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$.
2. Положим $\mathcal{O}_K^* = \{x \in K \mid \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(xy) \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathcal{O}_K\}$.
   (a) Доказать, что $\mathcal{O}_K^*$ — дробный идеал и $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K^*$.
   (b) Доказать, что $|\mathrm{disc}(K)| = |\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K|$.
   (c) Доказать, что $|\mathrm{disc}(K)|$ есть норма некоторого идеала в $\mathcal{O}_K$.
3. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F, $A \in \mathrm{End}(V)$, причём A — нильпотентный. Докажите, что тогда $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
4. Пусть I — дробный идеал. Докажите, что как абелева группа $(\mathrm{N}(I))$ (дробный идеал в $\mathbb{Z}$) порождается элементами $\mathrm{N}(x), x \in I$.

2.6 Дифферента и ветвление

Определение 16. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение. Простое число p называется *неразветвлённым* в числовом поле K, если

$$p\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j \text{ — максимальные.}$$

Кроме того, пусть

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots$$

Если $e_1 > 1$, то идеал $\mathfrak{p}_1$ называется *разветвлённым.*

Этот микрокусок надо переписать!!!

Как мы помним из домашней задачи, $\mathcal{O}_K^* = \{x \in K \mid \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(xy) \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathcal{O}_K\}$ — дробный идеал. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — целый базис, а $\omega_1^*, \ldots, \omega_n^*$ — взаимный базис. Тогда

$$\mathrm{Tr}(\omega_i \omega_j^*) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Разложим $x \in \mathcal{O}_K^*$ по взаимному базису:

$$x = a_1\omega_1^* + \ldots + a_n\omega_n^*,\ a_i \in \mathbb{Q}.$$

Тогда $\mathrm{Tr}(x\omega_i) = a_i \in \mathbb{Z}$ по определению $\mathcal{O}_K^*$. По линейности мы получаем, что $\forall y \in \mathcal{O}_K\ \ \mathrm{Tr}(xy) \in \mathbb{Z}$ из чего следует, что $x \in \mathcal{O}_K^*$.

Таким образом, $\mathcal{O}_K^*$ — просто свободная абелева группа, порожденная взаимным базисом.

Определение 17. *Дифферентой* числового поля K называют идеал $\mathcal{D} = \mathcal{O}_K^{*^{-1}}$.

Как мы помним, дискриминант числового поля K — это

$$\operatorname{disc}(K) = \operatorname{disc}(\mathcal{O}_K) = \det(\operatorname{Tr}(\omega_i\omega_j)),\ \text{где } \{\omega_i\} - \text{ целый базис.}$$

Утверждение 7. $\mathrm{N}(\mathcal{D}) = |\operatorname{disc}(K)|$.

Доказательство. Будем действовать строго по определению:

$$\mathrm{N}(\mathcal{D}) = |\mathcal{O}_K/\mathcal{D}| = \left|\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_K^{*^{-1}}\right| = |\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K|$$

$\mathcal{O}_K = \bigoplus \omega_i\mathbb{Z} \subset \bigoplus \mathbb{Z}\omega_i^* = \mathcal{O}_K^*$. Разложим элемент целого базиса по взаимному базису:

$$\omega_i = \sum_j a_{ij}\omega_j^*,$$

домножая это равенство и применяя след, мы получаем, что $a_{ij} = \operatorname{Tr}(\omega_i\omega_j)$, а значит, применяя лемму о вычислении индекса подгруппы, мы получаем, что

$$|\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K| = |\operatorname{disc}(K)|\,.$$

□

Теорема 8. *Максимальный идеал $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ разветвлён тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} \subset \mathfrak{p}$.*

Доказательство. В процессе доказательства нам понадобиться несколько лемм. Докажем сначала импликацию ($\Rightarrow$):

Лемма 11 (Задача 3 ДЗ 5)**.** Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F, $A \in \operatorname{End}(V)$, причём A — нильпотентный. Докажите, что тогда $\operatorname{Tr}(A) = 0$.

Доказательство леммы. Приведём, например, доказательство без Жордановой формы. Ясно, что достаточно показать, что характеристический многочлен является чистой степенью переменной t.

$$t^mE - A^m = (tE - A)((tE)^{m-1} + (tE)^{m-2}A + \ldots) = (tE - A)\cdot B.$$

Применим к этом равенству $\det$:

$$t^{mn} = \det\left(t^mE - A^m\right) = \det(tE - A)\det(B) \implies \det(tE - A) = t^n.$$

Пусть p — простое число. Факторгруппа $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ — векторное пространство над $\mathbb{F}_p$. Возьмем $x \in \mathcal{O}_K$, рассмотрим его образ $\overline{x}$ в факторгруппе и рассмотрим линейный оператор умножения на него:

$$\mathcal{O}_K/p \xrightarrow{\cdot x} \mathcal{O}_L,\ y \mapsto xy.$$

След этого оператора — элемент $\mathbb{F}_p$. С другой стороны, мы можем рассмотреть $\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x)$, который является целым числом. Нетрудно заметить, что $\overline{\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}}(x) = \operatorname{Tr}(\overline{x})$.

Предположим, что элемент x делится на какую-то степень p, т.е. лежит в $p\mathcal{O}_K$. Тогда мы получаем такое следствие из леммы:

Следствие 1. *Пусть $x \in \mathcal{O}_K$, $x^m \in p\mathcal{O}_K$. Тогда $\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x) \in p\mathbb{Z}$.*

□

Перейдём теперь к доказательству теоремы. Пусть $\mathfrak{p}$ разветвлён, то есть

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1}\cdot\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_k^{e_k}, e_1 > 1.$$

Докажем, что $\forall x \in \mathfrak{p}_1^{-1}$ выполнено $\operatorname{Tr}(x) \in \mathbb{Z}$. Если мы покажем это, то всё будет доказано. Действительно, это так, потому что

$$y \in \mathcal{O}_K \implies xy \in \mathfrak{p}_1^{-1} \implies \operatorname{Tr}(xy) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathcal{O}_K^* \implies \mathfrak{p}_1^{-1} \subset \mathcal{O}_K^* = \mathcal{D}^{-1}.$$

Докажем теперь само утверждение. Заметим, что $px \in \mathfrak{p}_1^{e_1-1}\mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k}$. Тогда

$$(px)^2 \in \mathfrak{p}_1^{2(e_1-1)}\mathfrak{p}_2^{2e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{2e_k}$$

Так как $2(e_1 - 1) \geq e_1$, мы получаем, что

$$(px)^2 \in \mathfrak{p}_1^{2(e_1-1)}\mathfrak{p}_2^{2e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{2e_k} \subset p\mathcal{O}_K.$$

Тогда, по следствию 1 мы получаем, что $\mathrm{Tr}(px) \in p\mathbb{Z} \implies \mathrm{Tr}(x) \in \mathbb{Z}$.

Докажем теперь импликацию ($\Leftarrow$). Вспомним для начала такое утверждение:

Утверждение 8. *Если F — конечное поле, а L/F — конечное расширение, то $\mathrm{Tr}_{L/F} \neq 0$.*

Замечание. В случае характеристики 0 это утверждение очевидно, так как можно рассматривать след единицы.

Доказательство утверждения 8. Если $|F| = q$, то $\mathrm{Gal}(L/F) = \langle\sigma\rangle$ — циклическая и она порождена автоморфизмом Фробениуса $\sigma(x) = x^q$ (множество неподвижных элементов — как раз поле). Предположим, что $[L\colon F] = m$. Тогда Группа Галуа будет иметь вид

$$\mathrm{Gal}(L/F) = \langle \mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{m-1}\rangle,$$

а значит, след будет иметь вид

$$\mathrm{Tr}(x) = x + \sigma x + \sigma^2 x = \ldots + \sigma^{m-1}x = x + x^q + x^{q^2} + \ldots + x^{q^{m-1}}.$$

Заметим, что многочлен выше не может быть тождественно нулём. Действительно, он имеет не больше, чем q^{m-1} корней, а $|L| = q^m > q^{m-1}$. □

Итак, вернёмся к доказательству теоремы.

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k}.$$

По китайской теореме об остатках:

$$\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \cong \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_1 \oplus \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_2^{e_2} \oplus \cdot \ldots \cdot \oplus \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_k^{e_k}.$$

Пусть $x \in \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \mathfrak{p}_3^{e_3} \cdot \ldots \mathfrak{p}_k^{e_k} \setminus \mathfrak{p}_2$. Тогда в разложении в прямую сумму такой x будет иметь лишь одну ненулевую координату (первую). Значит, достаточно посчитать след в первом прямом слагаемом, которое является полем (так как мы факторизуем по максимальному в первой степени), причём, конечным расширением конечного поля. По утверждению 8 мы можем выбрать x так, что $\mathrm{Tr}(\overline{x}) \neq 0 \in \mathbb{F}_p \implies \mathrm{Tr}(x) \notin p\mathbb{Z}$. Тогда $\mathrm{Tr}(\frac{x}{p}) \notin \mathbb{Z}$, но

$$\frac{x}{p} \in \mathfrak{p}_1^{-1},\ \mathrm{Tr}\left(\frac{x}{p}\right) \notin \mathbb{Z} \implies \frac{x}{p} \notin \mathcal{O}_K^* \implies \mathfrak{p}_1^{-1} \not\subset \mathcal{O}_K^* \implies \mathcal{D} \not\subset \mathfrak{p}_1,$$

что мы и хотели доказать. □

Теорема 9. *Простое число p разветвлено тогда и только тогда, когда $p \mid \mathrm{disc}(K)$.*

Доказательство. Так как p разветвлено, по определению

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k}, e_1 > 1.$$

Тогда $\mathcal{D} \subset \mathfrak{p}_1 \implies (\mathrm{N}(\mathcal{D})) = (\mathrm{disc}(K)) \subset (\mathrm{N}(\mathfrak{p}_1)) = (p^{f_1}) \subset (p)$, где f_1 — степень инерции.

Теперь пусть p неравзеветвлено, то есть

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k,\ \mathcal{D} \not\subset \mathfrak{p}_1.$$

В то же время, дифферента то же раскладывается в произведение простых

$$\mathcal{D} = \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_m,\ p \notin \mathfrak{q}_i$$

Тогда, применим норму мы получим, что

$$|\mathrm{disc}(K)| = \mathrm{N}(\mathcal{D}) = \mathrm{N}(\mathfrak{q}_1) \cdot \mathrm{N}(\mathfrak{q}_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{N}(\mathfrak{q}_m) = p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{f_m},\ p_i \neq p \text{ — простые.}$$

□

Отсюда ясно, что для каджого расщирение разветвлённых простых чисел только конечное число — простые делители дискриминанта.

2.7 Кольцо целых композита расширений

В общем случае о вычислении кольца целых композита расширений сказать что-то сложно. Мы будем рассматривать один из частых случаев, который также весьма полезен при вычислении колец целых числовых полей.

А именно, рассмотрим композит расщирений $K_1/\mathbb{Q}$ степени m и $K_2/\mathbb{Q}$ степени n, причем таких, что $[K_1K_2 \colon \mathbb{Q}] = mn$, а также $(\mathrm{disc}(K_1), \mathrm{disc}(K_2)) = 1$.

Пусть $\{u_i\}$ — целый базис $\mathcal{O}_{K_1}$, а $\{v_i\}$ — целый базис $\mathcal{O}_{K_2}$.

$$\begin{tikzcd}
 & K_1K_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & \\
K_1 \arrow[dr, dash, "m"'] & & K_2 \arrow[dl, dash, "n"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Как мы помним из курса теории полей, в этом случае

$$K_1 \otimes_{\mathbb{Q}} K_2 \cong K_1K_2$$

Пусть $\tau_i,\ 1 \le i \le m$ — вложения K_1 в $\mathbb{Q}^{alg}$, а $\sigma_i,\ 1 \le i \le n$ — вложения K_2 в $\mathbb{Q}^{alg}$. Во-первых, заметим, что $\{u_iv_j\}$ — базис композита K_1K_2 над $\mathbb{Q}$. Тогда элементы

$$\tau_i \otimes \sigma_j(u_kv_\ell) = \sigma_j(u_k)\tau_i(v_\ell)$$

будут попапрно различными, а $\tau_i \otimes \sigma_j$ будут давать все вложения $K_1K_2 \to \mathbb{Q}^{alg}$. Рассмотрим $\alpha \in \mathcal{O}_{K_1K_2}$, разложим его по базису:

$$\alpha = \sum a_{ij}u_iv_j \in \mathcal{O}_{K_1K_2},\ a_{ij} \in \mathbb{Q}.$$

Рассмотрим $\beta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_j$. Тогда выполняется следующее матричное тождество (которое мы преобразовываем далее, домножая на транспонированную, а после на взаимную к A^tA):

$$\underbrace{(\sigma_iv_j)}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \otimes \sigma_1)(\alpha) \\ (1 \otimes \sigma_2)(\alpha) \\ \vdots \\ (1 \otimes \sigma_n)(\alpha) \end{pmatrix} \implies A^tA \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} (1 \otimes \sigma_1)(\alpha) \\ (1 \otimes \sigma_2)(\alpha) \\ \vdots \\ (1 \otimes \sigma_n)(\alpha) \end{pmatrix} \implies \mathrm{disc}(K_2) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

где $\gamma_i \in \mathcal{O}_{K_1}$. Тогда $\mathrm{disc}(K_1) \cdot a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Заметим, что такое же рассуждение мы могли проделать, заменив u_i на v_j в определении β_j, и получить, что $\mathrm{disc}(K_1)a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда, так как $(\mathrm{disc}(K_1), \mathrm{disc}(K_2)) = 1$, мы имеем $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, мы только что доказали такое утверждение:

Утверждение 9. *А именно, рассмотрим композит расщирений $K_1/\mathbb{Q}$ степени m и $K_2/\mathbb{Q}$ степени n, причем таких, что $[K_1K_2 \colon \mathbb{Q}] = mn$, а также $(\operatorname{disc}(K_1), \operatorname{disc}(K_2)) = 1$.*

Пусть $\{u_i\}$ — целый базис $\mathcal{O}_{K_1}$, а $\{v_i\}$ — целый базис $\mathcal{O}_{K_2}$. Тогда $\{u_iv_j\}$ — целый базис для $\mathcal{O}_{K_1K_2}$.

Домашнее задание 6. Задачи:

1. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — расширение степени n, $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ и пусть p — такое простое число, что $v_p(a_0) = 1$ и $v_p(a_i) \geq 1$. Докажите, что тогда $p \not| \operatorname{ind}(\theta)$. *Hint 1:* рассмотрите $x \in \mathcal{O}_K \colon px \in \mathbb{Z}[\theta]$. Покажите, что достаточно доказать, что в этом случае $x \in \mathbb{Z}[\theta]$. *Hint 2:* докажите, что если $\mathfrak{p} \mid (p)$, то $v_{\mathfrak{p}}(\theta) = 1$ и индекс ветвления числа p равен n. *Hint 3:* $px = b_0 + b_1\theta + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}$. Предположите, что не все b_i делятся на p и прийдите к противоречию.

3. Основы теории гомологий

3.1 Симплициальные гомологии

Определение 18. *Цепным комплексом* абелевых групп $(C_\bullet, \partial)$ называется последоватекльность абелевых групп и морфизмов вида

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} \ldots, \qquad \text{где } C_i - \text{абелевы группы}$$

при условии $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Если комплекс обрывается с одной из сторон, то мы считаем, что он дополнен нулями.

Элементы группы C_q называют q-мерными цепями, а отображение ∂ называют (граничным) дифференциалом.

Замечание. Ясно, что условие $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ равносильно тому, что $\operatorname{Ker} \partial_q \supset \operatorname{Im} \partial_{q+1}$.

Замечание. Когда комплекс снабжают отображением $C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$, это отображение называют *аугументацией*.

Определение 19. *Гомологиями* комплекса $(C_\bullet, \partial)$ называют абелевы группы

$$H_q(C_\bullet, \partial) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial_q / \operatorname{Im} \partial_{q+1}.$$

Если коплекс снабжен аугументацией и обрывается на нулевом члене, то у него также есть *приведённые гомологии*

$$H_0(C_\bullet, \partial) = C_0 / \operatorname{Im} \partial_1, \quad \widetilde{H_0}(C_\bullet, \partial) = \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1, \quad \widetilde{H}_q = H_q \ \forall q > 0,$$

которые отличаются от обычных только в нулевом члене.

Перед тем как что-то строго определять, посмотрим нестрого на какие-то мотивирующие примеры вычислений. Для этого лучше всего подойдут *симплициальные гомологии*. Неформально, идея состоит в том, что мы разбиваем топологическое пространство X на симплексы всех размерностей и говорим, что $C_q(X, \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа, порожденная всеми q-мерными симплексами (то есть, мы рассматриваем целочисленные формальные линейные комбинации симплексов). Дифференциалом ∂ будет оператор взятия границы (топологической).

Пример 7 (Симплицаильные гомологии отрезка (нестрого))**.** Пусть X — отрезок $[a, b]$ с ориентацией из b в a. В нём две нульмерные клетки, значит $C_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$, одномерная клетка одна — ребро e, то есть $C_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и комплекс устроен следующим образом:

$$\ldots 0 \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z},$$

так как мы можем определить аугументацию следующим образом: $x \in C_0 \Rightarrow x = k_1 a + k_2 b$, положим $\varepsilon(x) = k_1 + k_2$. То есть, на самом деле комплекс выглядит вот так:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow[e \to \partial e = a - b]{} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow[a \to 1,\ b \to 1]{} \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $\varepsilon \circ \partial = 0$.

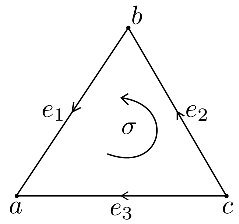
Гомологиями топологического пространства называют гомологии построенного по нему комплекса. В нашем случае

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = 0/0 = 0.$$

$$\widetilde{H_0}(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} \varepsilon / \operatorname{Im}_{\partial_1} = \langle a - b \rangle / \langle a - b \rangle = 0.$$

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) / \operatorname{Im}_{\partial_1} = \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle / \langle a - b \rangle = \langle a \rangle = \mathbb{Z}$$

Пример 8 (Симплицальные гомологии треугольника)**.** Рассмотрим треугольник (abc) с внутренностью σ, ориентированной против часовой стрелки, и рёбрами $b \xrightarrow{e_1} a$, $c \xrightarrow{e_3} a$, $c \xrightarrow{e_2} b$.



Тогда цепной комплекс, построенный по треугольнику будет устроен следующим образом:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow[\sigma \to e_1+e_2-e_3]{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Из ориентации σ ясно, что $\partial\sigma = e_1 + e_2 - e_3,\ \partial e_1 = b - c,\ \partial e_2 = a - b, \partial e_3 = a - c$. Ясно, что вторые гомологии нулевые:

$$H_2(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} \partial_2 / 0 = 0$$

Посчитаем теперь первые.

$$\partial(k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3) = k_1(b - c) + k_2(a - b) + k_3(a - c) = a(k_2 + k_3) + b(k_1 - k_2) + c(-k_1 - k_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{Ker} \partial_1 = \langle (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid k_1 = k_2 = -k_3 \rangle$$

С другой стороны, $\operatorname{Im} \partial_2 = k(e_1 + e_2 - e_3)$. Тем самым, $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$. Аналогичным вычислением мы получаем, что $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Пример 9 (Спмилициальные гомологии треугольника без внутренности)**.** Пусть теперь всё также, как в примере 8, но у треугольнка нет внутренности. Тогда цепной комплекс будет иметь вид

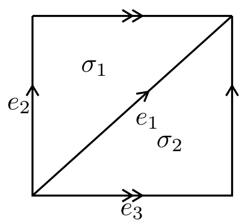
$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$$

Из того, как поменялись отображения, ясно, что поменялись только первые гомологии. Теперь $H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$, а образующая — это цикл $e_1 + e_2 - e_3$. С другой стороны, $\pi_1(\Delta) = \mathbb{Z}$.

Замечание. Когда-нибудь позже мы докажем, что для любого симплициального пространства X есть отображение

$$\pi_1(X) \to H_1(X) = \pi_1(X)^{ab} = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Пример 10 (Симплициальные гомологии тора $\mathbb{T}^2$)**.** Рассмотрим двумерный тор $\mathbb{T}^2$, разбитый на симплексы следующим образом:



Из такой триангуляции ясно, что комплекс будет иметь вид:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Посчитаем дифференциал на двумерных клетках: $\partial\sigma_1 = e_1 - e_3 - e_2,\ \partial\sigma_2 = e_2 + e_3 - e_1$. С другой стороны, ясно, что дифференциал зануляется на любой одномерной клетке, $\partial e_i = a - a = 0$.

$$H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} \partial_2 / 0 = \mathbb{Z}.$$

так как $\partial\sigma_1 = -\partial\sigma_2 \Rightarrow \operatorname{Ker} \partial_2 = \mathbb{Z}$.

Также прямыми вычислениями можно убедиться, что $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2)^{ab}$. Образующими первых гомологий будут e_2 и e_3.

Упражнения.

1. Посчиать по определению одномерные гомологии связного дерева.
2. Посчитать по определению все гомологии n-мерного симплекса T^n

$$T^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(t_0, \ldots, t_n) \mid t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\right\}.$$

3. Покажите, что барицентрическое подразбиение не меняет симплициальных гомологий.

Вообще говоря, далее нужно формально доказывать, что гомологии не зависят от симплициального разбиения пространства (и выяснять, у каких пространств это симплициальное разбиение вообще есть), но мы этим всем заниматься не будем, так как в нашем курсе основной будет другая теория.

3.2 Сигнулярные гомологии

Определение 20. Пусть X — топологическое пространство.

- *Сингулярным q-мерным симплексом* мы будем называть непрерывное отображение $f\colon T^q \to X$.
- Его граница определяется, как формальная линейная комбинация

$$\partial f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \Gamma_i f,$$

  где $\Gamma_i f$ — сужение f на грань $t_i = 0$ (сумма именно такая, так как у q-мерного симплекса $q+1$ грань).
- *Сингулярными q-мерными цепями* $C_q(X, \mathbb{Z})$ мы будем называть формальные целочисленные линейные комбинации конечного числа q-мерных сингулярных симплексов (то есть порожденную ими свободную абелеву группу).
- Дифферецниал комплекса[3] $C_\bullet$ определяется, как продолжение по линейности оператора взятия границы q-мерного сингулярного симплекса.
- Комплекс сингулярных цепей может быть снабжен аугументацией $\varepsilon\colon C_0 \to \mathbb{Z},\ \sum k_i f_i \to \sum k_i$.

Замечание. Формально говоря, мы пока не знаем, что комплекс из сингулярных цепей — это комплекс. Для этого нам понадобится следующая техническая

Лемма 12. В контексте определения 20 $\partial^2 = 0$.

Доказательство. Посчитаем $\partial\partial f$:

$$\partial\partial f = \partial\left(\sum_i (-1)^i \Gamma_i f\right) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \Gamma_j \Gamma_i f.$$

Ясно, что любую грань коразмерности 2 можно получить взятием границы двумя способами. Действительно, если $j < i$, то $\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_j \Gamma_{i+1}$ (i-я из оставщихся после выкидывания j-й координаты — $i+1$-я изначально), а в сумме слагаемые $\Gamma_i \Gamma_j$ и $\Gamma_j \Gamma_{i+1}$ будут с разным знаком, значит $\partial\partial f = 0$. □

Определение 21. *Сингулярными гомологиями* топологического пространства X называются гомологии комплекса сингулярных цепей. Мы будем обозначать их, как $H_k(X)$ или $H_{\mathrm{k}}^{\mathrm{sing}}(X)$.

В топологическом контексте группу $Z_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial_q$ часто называют *q-циклами*[4], а группу $B_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im} \partial_{q+1}$ — *q-границами.* В этом смысле $H_q(X)$ — циклы с точностью до границ.

Замечание. Из определения очевидно, что сингулярные гомологии зависят только от класса гомеоморфизма пространства X (их основной плюс и состоит в том, что тут это очевидно).

Теперь попробем посчитать по определению сингулярные гомологии для какого-нибудь пространства. Оказывается, что по определению сделать это возможно разве что для точки.

[3] формально, мы пока еще не знаем, что это комплекс.
[4] позже мы увидим, какая в этом геометрическая интуиция

Теорема 10 (Сингулярные гомологии точки)**.**

$$H_q^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0,\ H_0^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \widetilde{H}_0^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Итак, как мы помним, $C_q(*)$ — все линейные комбинации отображений $f\colon T^q \to *$. Так как отображений из T^n в точку всего одно, $\forall n\ C_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, а значит, наш комплекс сингулярных цепей $(C_\bullet(*, \mathbb{Z}), \partial)$ будет иметь вид:

$$\ldots \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}.$$

Теперь посчитаем дифференциалы комплекса.

Возьмем $f \in C_1$, это какая-то формальная линейная комбинация отображений из $[a, b] \to \{*\}$ Тогда ∂f — это $f|_a - f|_b = 0$. Впрочем, и сразу ясно, что в случае любого n, так как наше отображение действует в точку (оно постоянно), сужения на все грани будут совпадать и результат в сумме будет зависеть лишь от четности n, то есть дифференциалы комплекса будут иметь вид:

$$\ldots \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \ldots \xrightarrow{\cdot 1 = \mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Иными словами, $\partial_n = 0$, если n — нечетное и тождественно иначе. Теперь, как нетрудно заметить,

$$\forall q > 0 \quad \operatorname{Ker} \partial_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1} \Rightarrow H_q^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0,\ H_0^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \widetilde{H}_0^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Трудности, возникшие при подсчетах, намекают на то, что для отрезка, например, это будет сделать еще гораздо труднее. С другой стороны, если вдруг окажется, что гомологии гомотопически инвариантны, то мы будем знать, какие гомологии у всех стягиваемых пространств (так как для точки мы посчитали).

В дальнейшем, будем использовать для сингулярных гомологий обозначение H_k.

3.3 Немного гомологической алгеры

Рассмотрим категорию цепных комплексов $\mathfrak{Ch}$ (в нашем случае абелевых групп, но в принципе, всё что тут будет сказано справедливо и в случае $R - \mathfrak{Mod}$). Морфизмом цепных комплексов $(C_\bullet, \partial)$ и $(D_\bullet, \delta)$ называется набор отображений $f = \{f_i\}$, где $f_i \in \operatorname{Hom}(C_i, D_i)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] \arrow[d] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \ldots \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r, "\delta_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\delta_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\delta_{q-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\forall i\ f_i \circ \partial_{i+1} = \delta_{i+1} \circ f_{i+1}$.

Лемма 13. Сопоставление цепному комплексу его k-й группы гомологий функториально, то есть отображение

$$(C_\bullet, \partial) \mapsto H_k(C_\bullet, \delta)$$

задаёт ковариантный функтор $\mathfrak{Ch} \to \mathfrak{Ab}$.

Доказательство. Всё, кроме того, что композиция переходит в композицию — совсем очевидно. Нам надо проверить, что отображение $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta)$ индуцирует отображение $H_k(C_\bullet) \to H_k(D_\bullet)$, и кроме того,

$$(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta) \xrightarrow{g} (E_\bullet, d) \Rightarrow H_k(f \circ g) = H_k(f) \circ H_k(g).$$

Заметим, что так как $f \in \operatorname{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$, $f_q(\operatorname{Ker} \partial_q) \subset \operatorname{Ker} \delta_q$. Действительно, если $\partial_q(x) = 0$, то $0 = f_{q-1}(\partial_q(x)) = \delta_q(f_q(x)) \Rightarrow f_q(x) \in \operatorname{Ker} \delta_q$. Аналогично $f_{q-1}(\operatorname{Im} \partial_q) \subset \operatorname{Im} \delta_q$. Действительно, если $x = \partial_q(y)$, то

$$f_{q-1}(x) = f_{q-1} \circ \delta_q(x) = \delta_q(f_q(y)) \in \operatorname{Im} \delta_q.$$

Тогда нужная нам стрелка получается просто из универсального свойства факторгруппы:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[dr, "\rho"'] & \operatorname{Ker}\delta_q \arrow[r, "\pi"] & H_q(D_\bullet) \\
& H_q(C_\bullet) \arrow[ur, dashed, "f_*"] &
\end{tikzcd}$$

Действительно, чтоб она существовала, нам нужно, чтоб $\operatorname{Im}\partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker}(\pi \circ f_q)$. Возьмем $x \in \operatorname{Im}\partial_{q+1}$, тогда $f_q(x) \in \operatorname{Im}_{\delta_{q+1}} \Rightarrow f_q(x) \in \operatorname{Ker}\pi$, то есть $x \in \operatorname{Ker}(\pi \circ f_q)$.

Проверка того, что композиция переходит в композицию тривиальна. □

Замечание. Пусть $X, Y \in \mathfrak{Top}$, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм цепных комплексов $f\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$. Действительно, пусть $g \in C_k(X)$, тогда g — это непрерывное отображение $T_k \to X$ и тогда $f \circ g$ — непрерывное отображение $T_k \to Y$, то есть элемент $C_k(Y)$. Остается проверить, что полученное отоюражение будет коммутировать с дифференциалом.

$$\partial g = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Gamma_i g.$$

Тогда остается заметить, что взятие грани коммутирует с применением отображения:

$$f(\partial g) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Gamma_i f(g) = \partial(fg).$$

Значит, если у нас есть непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, то есть и индуцированный морфизм гомологий $f_*\colon H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$.

Утверждение 10. *Если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то $f_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ — изоморфизм (для всех k).*

Доказательство. Действительно, если f — гомеоморфизм, то все индуцированные отображения между цепями — изоморфизмы, а значит и все индуцированные отображения в гомологиях будут изоморфизмами. □

Замечание. Это утверждение говорит нам о том, что сингулярные гомологии определены для топологических пространств без всякой дополнительной структуры.

Определение 22. Пусть X — топологическое пространство. Тогда, если группа $H_k(X)$ конечнопорождена, то

$$H_k(X) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor}(H^k(X)).$$

Тогда число n (то есть, ранг свободной части) называют k-м числом Бетти b_n. Иными словами, $b_k(X) = \operatorname{rank}(H_k(X))$.

3.4 Гомотопическая инвариантность гомологий

Определение 23. Пусть $(C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta) \in \mathfrak{Ch}$ — два цепных комплекса. Их морфизмы $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ch}}((C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta))$ называются *гомотопными* ($f \sim g$), если сущесвует диагональный морфизм $h\colon C_\bullet \to D_{\bullet+1}$ такой, что

$$h_{q-1}\partial_q + \delta_{q+1}h_q = f_q - g_q.$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] \arrow[d] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[dl, "h_{q+1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{q+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dl, "h_q"'] \arrow[d, shift right, "g_q"'] \arrow[d, shift left, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[dl, "h_{q-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{q-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{q-1}"] & \dots \arrow[dl, "h_{q+2}"'] \arrow[d] \\
\dots \arrow[r, "\delta_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\delta_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\delta_{q-1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Кратко это обычно записывают, как $h\partial + \delta h = f - g$.

Если в категории цепных комплексов $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ab})$ отождествить гомотопные морфизмы, получится *гомотопическая категория комплексов*, которую обычно обозначают $\mathfrak{K}(\mathfrak{AB})$ (или просто $\mathfrak{K}$).

Теорема 11. *Если морфизмы цепных комплексов гомотопны, то есть $f \sim g$, то индуцированные гомоморфизмы когомологий $f_* = g_*$. Тем самым, функторы гомологий H_k пропускаются через гомотопическую категорию.*

Доказательство. Если $x \in \operatorname{Ker} \partial_q$, то

$$f_q(x) - g_q(x) = \delta_{q+1} h_q(x) + \underbrace{h_{q-1}\partial_q(x)}_{=0} \in \operatorname{Im} \delta_{q+1},$$

а значит в $H_q(X)$ эти элементы равны. □

Замечание. Гомотопность морфизмов f и g можно определять, как $\delta h \pm h\partial = f - g$, так как при переходе к гомологиям второе слагаемое всё равно обнуляется.

Теорема 12. *Пусть $f, g\colon X \to Y$, $f \sim g$. Тогда $f_* = g_*$.*

Доказательство. У нас есть цепные комплексы сингулярных цепей $(C_\bullet(X), \partial)$ и $(C_\bullet(Y), \partial)$. Так как $f \sim g$, существует непрерывное отображение $H\colon X \times I \to Y$, а тогда $\forall p\colon T_q \to X$ определено непрерывное отображение $H(p(\_),\_)\colon T_q \times I \to Y$, причем $H(p, 0) = f(p)$ и $H(p, 1) = g(p)$. Положим

$$h(p) = \text{сумма симплексов в разбиении призмы } T_q \times I \in C_{q+1}(Y).$$

Взглянув на картинку теперь нетрудно заметить, что

$$f(p) - h(p) = \text{граница всей призмы} - \text{боковые стенки} = \partial h(p) - h\partial(p)$$

Таким образом, мы получили, что индуцированные морфизмы цепных комплексов гомотопны, а значит, по теореме 11, индуцированные гомоморфизмы в гомологиях совпадают. □

Упражнение. Разбить $T_q \times I$ на $q+1$-мерные симплексы формально. А именно, пусть $T_q \times \{0\} = a_0 \ldots a_q$. Пусть вершины $T_q \times \{1\}$ — это $a'_0, \ldots, a'_q$. Тогда предлагается брать вершины $a_0 \ldots a_k a'_k \ldots a'_q$.

Следствие 2. *Пусть X — стягиваемое. Тогда $\widetilde{H}_\bullet(X, \mathbb{Z}) = 0$, или, иными словами, $\forall k > 0$ $H_k(X, \mathbb{Z}) = 0$, $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Упражнение. Придумайте пример нестягиваемого X с нулевыми приведёнными гомологиями.

Лемма 14. Если X — линейно связно, то $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Выберем в нашем пространстве некоторую фиксированную точку a, тогда

$$\left(\sum k_i f_i\right) = \left(\sum k_i\right) a \pmod{\operatorname{Im} \partial_1}, \text{ (то есть, в } H_0(X))$$

так как все f_i можно соединить путями (а это отображения $T^1 = [0, 1] \to X$) с a и значит $\operatorname{Im} \partial_1$ будет содержать все разности $f_i - a$. Значит, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. □

Следствие 3. *Пусть у топологического пространства X n компонент линейной связности. Тогда*

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Упражнение. Дркажите, что непрерывное отображение между линейно связными пространствами индуцирует изоморфизм нулевых гомологий.

3.5 Относительные гомологии и гомологически точная последовательность пары

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, тогда $\forall q\ C_q(A) \subset C_q(X)$ (вложение индуцирует мономорфизм цепей) и мы имеем морфизм цепных комплексов $(C_\bullet(X), \partial)$ и $(C_\bullet(A), \partial)$, то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] \arrow[d] & C_q(A) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "\mathrm{in}"] & C_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{in}"] & \ldots \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r] & C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] & C_{q-1}(A) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Это так просто потому, что если у нас был симплекс $f\colon T^q \to A$, то его граница тоже целиком лежит в A, то есть $\partial f\colon T^{q-1} \to A \in C_{q-1}(A)$.

Глядя на это, возникает естественная идея дополнить до короткой точной последовательности

$$0 \to C_q(A) \to C_q(X) \to C_q(X)/C_q(A) \to 0$$

в каждом столбце.

Определение 24. Факторгруппу $C_q(X, A) \stackrel{\text{def}}{=} C_q(X)/C_q(A)$ называют *относительными цепями.*

Построим цепной комплекс для относительных цепей, для этого надо определить дифференциалы. Это делается стандартно, возьмем $x \in C_q(A)$, тогда $\partial_q(x) \in C_{q-1}(A)$, а значит композиция дифференциала и проекции пропустится через фактор:

$$\begin{tikzcd}
C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dr, "\pi_q"'] & C_{q-1}(X) \arrow[r, "\pi_{q-1}"] & C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A) \\
& C_q(X)/C_q(A) \arrow[ur, dashed, "\exists! \delta_q"'] &
\end{tikzcd}$$

Проверим теперь, что $\delta^2 = 0$. Действительно, из коммутаивной диаграммы выше мы понимаем, что

$$\delta_q(\overline{x}) = \delta_q(\pi_q(x)) = \pi_{q-1}(\partial_q(x)) \Rightarrow \delta_{q-1}(\delta_q(\overline{x})) = \delta_{q-1}(\pi_{q-1}(\partial_q(x))) = \pi_{q-2}(\partial_{q-1}(\partial_q(x))) = 0.$$

Теперь мы построили цепной комплекс и можем определить относительные гомологии.

Определение 25. Пусть $X \subset A$, тогда относительными гомологиями мы будем называть гомологии комплекса относительных цепей, то есть

$$H_q(X, A) \stackrel{\text{def}}{=} \ker \delta_q / \operatorname{Im} \delta_{q+1}.$$

Теперь, попробуем получить для гомологий аппарат, идеологически похожий на теорему Зейферта-Ван-Кампена.

Итак, мы имеем *короткую точную последовательность комплексов*

$$0 \to C_\bullet(A) \to C_\bullet(X) \to C_\bullet(X, A) \to 0$$

В развёрнутом виде она представляет собой коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{q+1}(A) & \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \longrightarrow & C_{q+1}(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{q}(A) & \longrightarrow & C_{q}(X) & \longrightarrow & C_{q}(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{q-1}(A) & \longrightarrow & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & C_{q-1}(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & &
\end{array}$$

в которой строки точны, а стлобцы — наши комплексы.

Теорема 13 (Точная последовательность пары)**.** *Существует* связывающий гомоморфизм $\varphi\colon H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$*, и соответственно, имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий:*

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \xrightarrow{\varphi} H_{q-1}(A) \to H_{q-1}(X) \to \ldots$$

Доказательство. На самом деле, это утверждение верно для любой точной последовательности комплексов. А именно, если последовательность цепных комплексов

$$0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$$

точна, то имеет место следующая длинная точность последовательность гомологий:

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(B) \to H_q(C) \to H_{q-1}(A) \to H_{q-1}(B) \to \ldots$$

Это можно без труда вывести из леммы о змее, проверив точность строк[5] □

Упражнение. Докажите, что для $X \supset A \supset B$ имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий

$$\ldots \to H_q(A,B) \to H_q(X,B) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A,B) \to \ldots$$

Посмотрим, что всё это означает геометрически. Относительные циклы — это элементы

$$\mathrm{Ker}(C_q(X)/X_q(A) \to C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A)).$$

Мы взяли представителя в $C_q(X)$, взяли границу и после факторизации по $C_{q-1}(A)$ получили 0, а значит граница нашего цикла полностью лежит в $C_{q-1}(A)$, то есть картинка имеет вид:

С другой стороны, ясно, что $x \in C_q(X)/C_q(A)$ — относительная граница, если $x + a = \partial(\ldots)$.

[5] а так как это делается в абсолютно любом курсе гомологической алгебры, мне лень это сюда писать.

Замечание. У связывающего гомоморфизма $H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ есть очень естественная интерпретация.

Элементы $H_q(X, A)$ — относительные циклы с точностью до относительных границ. Так как это оносительные q-мерные циклы, их граница лежит в A, а значит, при взятии границы, мы получим как раз элемент $H_{q-1}(A)$. То есть, связывающий гомоморфизм $H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ — взятие границы.

Рассмотрим также еще несколько важных следствий длинной точной последовательности пары.

Следствие 4. *Для любого топологического пространства x и любой его точки $x_0 \in X$ мы имеем*

$$H_n(X, x_0) = \widetilde{H}_n(X) \; \forall n.$$

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность приведенных гомологий пары (X, x_0)

$$\ldots \to \widetilde{H}_q(x_0) \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(X, x_0) \to \widetilde{H}_{q-1}(x_0) \to \ldots$$

Действительно, так как $\widetilde{H}_n(x_0) = 0 \; \forall n$, мы на самом деле имеем

$$\ldots \to 0 \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(X, x_0) \to 0 \to \ldots,$$

и из точности следует $\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_q(X, x_0) = H_q(X, x_0)$. □

Следствие 5. *Группы $H_q(X, A)$ измеряют различие между $H_q(X)$ и $H_q(A)$, а именно,*

$$H_q(X, A) = 0 \quad \forall q \Rightarrow H_q(A) = H_q(X) \quad \forall q.$$

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность пары (X, A) :

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X, A) \to H_{q-1}(A) \to \ldots$$

В нашем случае она имеет вид:

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X, A) \to H_{q-1}(A) \to \ldots$$

и из точности следует, что $H_q(A) \cong H_q(X)$. □

Упражнение. Убедитесь, что верно и обратное утверждение.

3.6 Пары Боруска

Определение 26. Пусть X – топологическое пространство, а $A \subset X$ с индуцированной топологией. Тогда говорят, что (X, A) – *пара Борсука* (или, *корасслоение*)[6], если $\forall f\colon X \to Y$, $\forall F\colon A \times I \to Y$ такой, что $F|_{A\times 0} = f|_A$ существует $G\colon X \times I \to Y$, причем такое, что $G|_{X\times 0} = f,\ G|_{A\times I} = F$.

Определение 27. Пара (X, A) называется *клеточной парой*, если X — клеточное пространство, A — клеточное подпространство X.

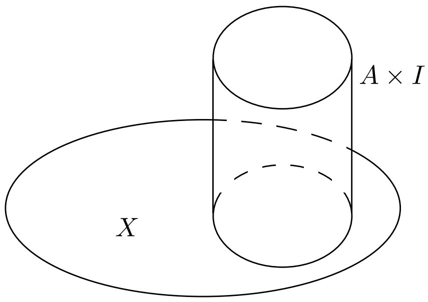
Замечание. Так как очевидно, что $(D^n, \partial D^n)$ — пара Борсука, клеточная пара является парой Борсука.

Нам от пар Борсука понадобится несколько базовых утверждений.

Теорема 14 (Характеризация пар Борсука)**.** *Если (X, A) — пара Борсука, то деформационная ретракция $X \times I$ на $X \cup (A \times I)$. Кроме того, если A — замкнуто, то верно и обратное.*

Доказательство. На картинке это выглядит следующим образом:

[6]Еще говорят «обладает свойством продолжения гомотопии», но это совсем уж длинно.



Положим $Y = X \cup (A \times I)$, $f\colon X \to Y$ — вложение. Рассмотрим теперь гомотопию $F_t(A) = A \times t$. Так как (X, A) — пара Борсука, существует $G\colon X \times I \to Y : G|_{A\times I} = F$.

Докажем теперь в другую сторону: пусть для $f\colon X \to Y$ есть гомотопия $F_t\colon A \to Y$, то есть отображение $F\colon X \cup (A \times I) \to Y$. Тогда искомое продолжение гомотопии — композиция F и деформационной ретракции $X \times I \to X \cup (A \times I)$[7]. □

Следствие 6. *Пара $(D^n, \mathrm{Int}(D^n))$ — не пара Борсука.*

Вообще говоря, эта теорема показывает, что было бы хорошо, чтоб A было замкнутым.

Замечание. В нехаусдорфовом случае бывает, что и с незамкнутым A пара (X, A) будет парой Борсука.

Упражнение. Если (X, A) — пара Борсука и X — Хаусдорфово, то A замкнуто.

Утверждение 11. *Пусть (X, A) — пара Борсука. Тогда*

$$X \cup CA \sim (X \cup CA)/CA = X/A.$$

Доказательство. Рассмотрим вложение $X \to X \cup CA$. Прогомотопируем A в вершину конуса a. Так как (X, A) — пара Борсука, эта гомотопия продолжается до гомотопии на X. Тогда финальный элемент гомотопии отображает $X \to X \cup CA$ так, что $A \mapsto a$, значит, это отображение пропускается через фактор X/A. С другой стороны ясно, как устроено обратное отображение $X \cup CA \to X/A$ (стягиваем конус в точку). Нетрудно заметить, что два построенных отображения задают гомотопическую эквивалентность. □

Следствие 7. *Если (X, A) — пара Боруска и A — стягиваемо, то $X \sim X/A$.*

Утверждение 12. *Пара (CX, X) — всегда пара Борсука.*

3.7 Относительные гомологии как абсолютные (факторизация)

Итак, в этом параграфе нас будет интересовать следующее (весьма полезное в вычислениях утверждение):

Теорема 15. *В общем случае отображение $X \to X \cup CA$ индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X, A) \to H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \widetilde{H}_q(X \cup CA),$$

где a — вершина конуса.

Если (X, A) — пара Борсука, то отображение проекции $p\colon X \to X/A,\ A \mapsto a$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \widetilde{H}_q(X/A).$$

Вообще говоря, условие на A во второй части теоремы часто опускают и говорят, что это верно для «хороших пар». Мы доказываем для пар Борсука, можно доказывать для случая, когда A — *окрестностный деформационынй ретракт.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько важных (в общем контексте) лемм.

Сначала посмотрим на геометрическую конструкцию **барицентрического подразбиения**, чтоб иметь геометрическую интуицию в контексте сингулярных симплексов.

Рассмотрим симплекс $[v_0, \dots, v_n]$. его точки — линейные комбинации вида

$$\sum_{i=0}^{n} t_i v_i, \quad \text{где} \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0.$$

[7] вот тут мы пользуемся замкнутостью A, так как нам нужно, чтоб покрытие было фундаментальным.

Определение 28. *Барицентр (центр тяжести)* симплекса — это точка $b \in [v_0, \dots, v_n]$, у которой все барицентрические аординаты t_i равны, а именно, $t_i = \frac{1}{n+1}\ \forall i$.

Барицентрическое подразбиение (подразделение) симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ — это разбиение симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ на n-мерные симплексы $[b, w_0, \dots, wn-1]$, где по индукции $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ — $(n-1)$-мерный симплекс барицентрического подразбиения грани $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$.

- Индукция начинается с $n = 0$, когда барицентрическое подразбиение точки $[v_0]$ определяется просто, как сама точка $[v_0]$.
- В случае $n = 1$ отрезок $[v_0 v_1]$ бьется на два отрезка $[v_0 b]$, $[b v_1]$, где b — середина отрезка $[v_0, v_1]$.
- В случае $n = 2$ треугольник $[v_0 v_1 v_2]$ бьется на 6 труегольников, образуемых его вершинами и точкой пересечения медиан b.

Из такого индуктивного определения следует, что вершины симплексов в барицентрическом подразбиении симплекса $[v_0 \dots v_n]$ — в точности барицентры всех k-мерных граней $[v_{i_0} \dots v_{i_k}]$ симплекса $[v_0 \dots v_n]$ для $0 \le k \le n$.

При $k = 0$ это даёт нам просто набор вершин v_i. Барицентр симплекса $[v_{i_0} \dots v_{i_k}]$ имеет барицентрические координаты $t_i = \frac{1}{k+1}$ при $i = i_0, \dots, i_k$ и $t_i = 0$ во всех остальных случаях.

Замечание. Далее нам это не потребуется, но симплексы барицентрического подразбиения задают на симплексе T структуру симплициального комплекса.

Лемма 15 (О барицентрическом подразбиении)**.** Пусть $f\colon T^q \to X$ — сингулярный симплекс. Тогда его барицентрическое поразбиение — это

$$\beta\colon C_q(X) \to C_q(X), \quad \beta f = \sum_{\tau \in S_{q+1}} \operatorname{sign}(\tau) f_\tau,$$

где f_τ определяется следующим образом: исходный симплекс T^q мы можем барицентрически подразбить на симплексы $T'_q = \{x \mid x_{\tau(0)} \le x_{\tau(1)} \le \dots \le x_{\tau(q)}\}$, в которых вершины нумеруются согласно размерностям граней. Тогда мы полагаем $f_\tau \overset{\text{def}}{=} f|_{T'_q}$.

Тогда $\partial\beta = \beta\partial$ и $\beta_*([\alpha]) = [\alpha]\ \forall [\alpha] \in H_q(X)$. Иными словами, барицентрическое подразбиение не влияет на гомологический класс.

Доказательство. Для первого утверждения достаточно проверить, что в сумме все внутренние грани встречаются с противоположным знаком, это ясно из картинки. Первое утверждение даёт нам, что $\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ch}}(C_\bullet, C_\bullet)$.

Для доказательства второго утверждения мы построим цепную гомотопию $D\colon C_q(X) \to C_{q+1}(X)$ между β и постоянным отображением.

Пусть $f\colon T^q \to X$, тогда $D(f)$ определяется следующим образом: барицентрически разобьем призму $I \times T^q$ на симплексы и рассмотрим проекцию

$$p\colon I \times T^q \to T^q.$$

Тогда $D(f)$ — это $(q+1)$-мерный сингулярный симплекс, являющийся суммой композиций f и проекции p, суженной на симплексы в разбиении $I \times T^q$.

можно нарисовать картинку для отрезка, в принципе.

Из того, как устроена нумерация в барицентрическом разбиении призмы, нетрудно видеть, что D — гомотопия между β и id, то есть

$$f - \beta(f) = D\partial(f) + \partial D(f).$$

Чтоб понять всё это, надо опять позалипать на эту картиночку с призмой, как в теореме 12.[8] □

[8]Возможно, всё это место стоит строго формально переписать из Хачтера.

Следующая лемма говорит нам, что для вычисления сингулярных гомологий достаточно рассматривать лишь *маленькие* сингулярные симплексы. В случае симплициальных гомологий это можно было бы формулировать в терминах диаметров, а в случае сингулярных мы будем говорить об этом в терминах покрытий.

Лемма 16 (Об измельчении)**.** Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие X. Пусть $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ порождено сингулярными симплексами $f \in C_q(X)$ такими, что $\exists\alpha\colon f(T_q) \subset U_\alpha$.

Тогда вложение $i\colon C_q^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} C_q(X)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_\bullet(X) \cong H_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$.

Доказательство. Заметим, что для достаточно большого n по лемме Лебега $c \in C_q(X) \Rightarrow \beta^n(c) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$. Кроме того, по лемме 15 c и $\beta^n(c)$ гомологичны (то есть, представляют один м тот же класс гомологий). Это даёт нам, что любой гомологический класс мз $H_q(C_\bullet)$ имеет представителя в $C_q^{\mathcal{U}}(X)$, то есть, что отображение $H_q^{\mathcal{U}}(X) \to H_q(X)$ сюръективно.

Кроме того, также по лемме 15, если c — цикл из $C_q^{\mathcal{U}}$, то $c - \beta^n(c)$ — граница цепи из C_{q+1}^{U}, так как

$$c - \beta^n(c) = \underbrace{D\partial c}_{=0,\text{ так как } c \text{ — цикл}} - \partial Dc = \partial(-Dc) \in B_q\big(C_q^{\mathcal{U}}(X)\big).$$

С другой стороны, так как c и $\beta^n(c)$ гомологичны, их разность — граница (элемент $B_q(C_q(X))$). Таким образом, если цепь из $C_q^{\mathcal{U}}$ лежит в $B_q(C_q(X))$, то она лежит и в $B_q\big(C_q^{\mathcal{U}}(X)\big)$. Это даёт нам инъективность отображения $H_q^{\mathcal{U}}(X) \to H_q(X)$. □

Замечание. Заметим, что построенные в доказательстве отображения переводят цепи в A в цепи в A, а значит, выдерживают факторизацию по A. Этот факт даёт нам версию леммы об измельчении для относительных гомологий, которым мы и будем пользоваться.

Обзаведемся еще одним полезным фактом: Посмотрим на такой факт из гомологической алгебры:

Лемма 17 (5-лемма)**.** Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & B \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & D \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & E \arrow[d, "f_5"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

в которой строки точны, f_2, f_4 — изоморфизмы, f_1 — эпиморфизм, f_5 — мономорфизм. Тогда f_3 — изоморфизм.

Доказательство. Есть в любом курсе гомологической алгебры. □

Из неё немедленно следует следующий простой факт:

Лемма 18. Если пара (X, A) гомотопически эквивалентна паре (Y, B), то $H_\bullet(X, A) = H_\bullet(Y, B)$.

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность для обоих пар:

$$\begin{tikzcd}
H_k(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{k-1}(X) \arrow[d, equal] \\
H_k(B) \arrow[r] & H_k(Y) \arrow[r] & H_k(Y, B) \arrow[r] & H_{k-1}(B) \arrow[r] & H_{k-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

Тогда всё следует из 5-леммы 17 □

Наконец, мы можем доказать интересующую нас теорему:

Теорема 16. *В общем случае отображение $X \to X \cup CA$ индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X, A) \to H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \widetilde{H}_q(X \cup CA),$$

где a — вершина конуса.

Если (X, A) — пара Борсука, то отображение проекции $p\colon X \to X/A,\ A \mapsto a$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \widetilde{H}_q(X/A).$$

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $X \cup CA$ вида:

$$X \cup CA \subset ((X \cup CA) \setminus X) \cup (X \cup \overline{C}A), \quad \mathcal{U} \overset{\text{def}}{=} \{(X \cup CA) \setminus X, (X \cup \overline{C}A)\}$$

где $\overline{C}A$ — нижняя открытая половина конуса CA.

По лемме 16 об измельчении мы вместо $H_q(X \cup CA, CA)$ можем рассматривать $H_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA)$.

А теперь, заметим, что по тому, как мы взяли покрытие,

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA) = C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA) = C_q\big(X \cup \overline{C}A\big)/C_q\big(\overline{C}A\big) = C_q\big(X \cup \overline{C}A, \overline{C}A\big).$$

А значит, из гомотопической эквивалентности и леммы 18 мы имеем

$$H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup \overline{C}A, \overline{C}A) = H_q(X, A).$$

Вторая часть первого равенства из условия теоремы следует из следствия 4.

Пусть теперь (X, A) — пара Борсука. Тогда по утверждению 11 $X \cup CA \sim X/A$, а значит, $H_q(X, A) \cong \widetilde{H}_q(X/A)$. □

3.8 Вырезание

Рассмотрим тройку $B \subset A \subset X$. Тогда вложение индуцирует отображение

$$H_k(X - B, A - B) \to H_k(X, A).$$

Вообще говоря, вырезание даёт хорошую технику вычисления относительных гомологий:

Теорема 17 (О вырезании)**.** *Пусть даны пространства $Z \subset A \subset X$, причем $\mathrm{Cl}(Z) \subset \mathrm{Int}(A)$. Тогда вложение $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(X - Z, A - Z) \cong H_n(X, A)$$

для всех n. Или, что эквивалентно: для подпространств $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X, включение $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A) \quad \forall n.$$

Доказательство. Докажем сначала эквивалентность формулировок. Положим $B = X - Z,\ Z = X - B$. Тогда $A \cap B = A - Z$, а условие $\mathrm{Cl}(Z) \subset \mathrm{Int}(A)$ эквивалентно тому, что $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$, так как $X - \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Cl}(Z)$. Теперь докажем вторую формулировку.

Пусть $X = A \cup B$, обозначим соотвествующее покрытие $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Для краткости будем обозначать группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, как $C_n(A + B)$[9].

Тогда, как мы помним из леммы об измельчении 16 включение

$$C_n(A + B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A)$.

Теперь рассмотрим включение

$$C_n(B)/C_n(A \cap B) \hookrightarrow C_n(A + B, A).$$

Оно очевидно индуцирует изоморфизм гомологий, так как обе факторгруппы свободные, а их базис — n-мерные сингулярные симплексы в B, не лежащие в A. Значит, мы получили требуемый изоморфизм

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A).$$

□

[9]что на самом деле логично, так как цепи оттуда состоят из суммы цепей из A и цепей из B

3.9 Точная последовательность Майера-Вьеториса

Кроме длинной точной последовательности пары (теорема 13) для вычисления гомологий пары (X, A) есть и другая мощная техника для вычисления гомологий пространства X, тоже представляющая собой длинную точную последовательность.

Теорема 18 (Точная последовательность Майера-Вьеториса, простая версия). *Пусть $X = A \cup B$, где A, B — открытые и $A \cap B = C \neq \varnothing$. Тогда имеет место следующая точная последовательность:*

$$\dots H_q(A \cap B) \to H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X) \to H_{q-1}(A \cap B) \to H_{q-1}(A) \oplus H_{q-1}(B) \to \dots$$

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \to C_\bullet(A \cap B) \xrightarrow[\varphi]{c \to (c,-c)} C_\bullet(A) \oplus C_\bullet(B) \xrightarrow[\psi]{(a,b) \to a+b} C_\bullet(A+B) \to 0$$

Во-первых, заметим, что $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, так как цепь в $A \cap B$, которая является нулевой в A (или в B) должна быть нулевой цепью. Во-вторых, очевидно, что $\psi\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$. Заметим, что для $(x, y) \in C_n(A) \oplus C_n(B)$ имеем $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$, а значит $x \in C_n(A \cap B)$ и $(x, y) \in \operatorname{Im}\varphi$. Это означает, что $\operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Im}\varphi$. Точность в последнем члене следует просто из определения $C_n(A + B)$.

Тогда эта короткая точная последовательность комплексов даёт нам точную последовательность гомологий. Остается лишь заметить, что также, как и в теореме о вырезании, $H_\bullet(A + B) = H_\bullet(A \cup B)$. □

Замечание. Эта не самая хорошая версия точной последовательности Майера-Вьеториса, так как условие на открытое покрытие серьезно мешает.

3.10 Гомологии сфер

Теорема 19. *Для $n \neq 0$ гомологии сферы устроены следующим образом:*

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \text{ или } i = n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Или, иными словами,

$$\widetilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим пару $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, тогда $X/A \cong S^n$. Запишем для этой пары точную послеоватнльность приведенных гомологий:

$$\dots \to \widetilde{H}_q(D^n) \to \widetilde{H}_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \to \widetilde{H}_{q-1}\big(S^{n-1}\big) \to \widetilde{H}_{q-1}(D^n) \to \dots$$

Так как D^n стягиваем, $\widetilde{H}_q(D^n) = 0$, а значит, $H_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \cong H_{q-1}(S^n)$. С другой строны, так как $(D^n, \partial D^n) = (D^n, S^{n-1})$ — пара Борсука, по теореме о факторизации 16

$$H_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \cong \widetilde{H}_q\big(D^n/S^{n-1}\big) \cong \widetilde{H}_q(S^n).$$

Остается замеить, что мы знаем, что утверждение верно для S^0. Таким образом, мы доказали утверждение по индукции. □

Следствие 8. *Сферы разных размерностей негомеоморфны.*

3.11 Гомологии букета и надстройки

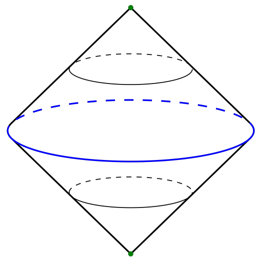
Из стягиваемости конуса сразу следует, что $H_q(CX, X) \cong \widetilde{H}_q(X)$ (достаточно написать точную последовательность для приведенных гомологий).

Определение 29. Пусть X — топологическое пространство. Тогда *надстройкой* над X называется пространство ΣX, определённое, как

$$\Sigma X \cong X \times I/\sim, \text{ где } (x,0) \sim (y,0)\ \forall x, y \in X \text{ и } (x,1) \sim (y,1)\ \forall x, y \in X.$$

Иными словами, мы взяли $X \times I$ и стянули $X \times 1$ и $X \times 0$ в точку.

Пример 11. Надстройка над окружностью выглядит следующим образом:



Так как надстройка получается факторизацией конуса по нижнему основанию, из теоремы о факторизации 16 следует, что $H_{q+1}(CX, X) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$. Таким образом, мы получили такое утверждение:

Теорема 20 (Гомологии надстройки)**.** *Справедливо следующее равенство групп гомологий:*

$$\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$$

Замечание. Так как $\Sigma S^n = S^{n+1}$, мы таким образом получили другое доказательство теоремы 19.

Теорема 21 (Гомологии букета)**.** *Для букета пространств $\bigvee_\alpha X_\alpha$ включения $i_\alpha \colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ индуцируют изоморфизм гомологий*

$$\bigoplus_\alpha \widetilde{H}_q \cong \widetilde{H}_q\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right).$$

при условии, что если в букете отождествляются точки $\{x_\alpha\}$, то пары (X_α, x_α) — пары Борсука.

Доказательство. Достаточно рассмотреть пару

$$(X, A) = \left(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha x_\alpha\right),$$

тогда по тривиальным причинам

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(X_\alpha)$$

и по теореме о факторизации

$$H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right).$$

□

3.12 Гомологии с коэффициентами

У рассматриваемой нами до сих пор теории гомологий есть простое обобщение, котрое иногда даёт техническое преимущество.

Обобщение состоит в рассмотрении цепей $\sum n_i f_i$, где f_i — сингулярные симплексы, а коэффициенты n_i берутся в фиксированной абелевой группе G. Такие n-мерные цепи образуют абелеву группу $C_n(X;G)$ и у неё также есть относительная версия $C_n(X,A;G) \overset{\text{def}}{=} C_n(X;G)/C_n(A;G)$.

Дифференциал δ строится также, как и раньше:

$$\partial\left(\sum_i n_i f_i\right) = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \Gamma_j f_i.$$

Соотвественно, группы $C_n(X;G)$ и $C_n(X,A;G)$ образуют цепные комплексы и их гомологии обозначают $H_n(X;G)$ и $H_n(X,A;G)$ и называют *гомологиями с коэффициентами в группе G*.

Приведённые группы гомологий $\widetilde{H}(X;G)$ определяются аналогично, аугументация задаётся, как

$$\ldots \to C_0(X;G) \xrightarrow{\varepsilon} G \to 0, \quad \varepsilon\left(\sum_i n_i f_i\right) = \sum_i n_i.$$

Замечание. Часто полезно рассматривать гоиологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, так как нужно считать суммы сингулярных симплексов с коэффициентами 0 и 1, поэтому, отбрасывая члены с коэффициентами 0, можно представлять себе цепи, как конечные «объединения» сингулярных симплексов.

Кроме того, можно больше не заботиться о знаках в формуле для границы, а так как знаки являются алгебраическим выражением ориентации, мы можем игнорировать и ориентации. Это означает, что гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — наиболее естественный инструмент для вычислений в неориентируемом случае.

Отметим, что вся доказанная выше теория переносится на гомологии с коэффициентами в G без проблем и различия между $H_n(X;G)$ и $H_n(X)$ появляются только, когда начинаются вычисления.

Пример 12. Если $X = *$ — точка, то нетрудно заметить, что

$$H_n(*;G) \cong \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Аналогично и в случае сфер S^k мы имеем

$$\widetilde{H}_n(S^k;G) \cong \begin{cases} G, & n = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

3.13 Приложения теории гомологий

Теорема 22 (Борсук)**.** *Не существует ретракции диска на граничную сферу.*

Доказательство. Предположим, что ретракция $f\colon D^n \to S^{n-1}\colon f$ — непрерывное и $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ существет. Рассмотрим отображение $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$, тогда в гомологиях у нас есть отображение

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D^n) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

или, подставляя известные нам результаты:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}.$$

Так как $f \circ i = \mathrm{id}$, $f_* \circ i_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ и мы приходим к противоречию. □

Теорема 23 (Брауэр, о неподвижной точке)**.** *Пусть $f\colon D^n \to D^n$ — непрерывное отображение. Тогда у него существует неподвижная точка.*

Доказательство. Предположим противное, пусть существует непрерывное $f\colon D^n \to D^n$, не имеющее неподвижных точек. Рассмотрим отображение g, которое переводит $x \in D^n$ в точку пересечения $[f(x), x)$ и ∂D^n. То есть, $g\colon D^n \to \partial D^n$ и $g|_{\partial D^n} = \mathrm{id}$. Тогда g — ретракция D^n на граничную сферу, а этого не бывает по теореме 22. □

Теорема 24 (Брауэр, инвариантность размерности)**.** *Если непустые открытые $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ открытые и они гомеоморфны, то $m = n$.*

Доказательство. Пусть h — гомеоморфизм $U \to V$, тогда

$$H_k(U, U - x) \cong H_k(V, V - h(x)).$$

По теореме о вырезании 17 для $(X, A) = (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$ и $Z = \mathbb{R}^m - U$:

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(U, U - x).$$

Тогда мы имеем, что

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - h(x)).$$

Из точной последовательности пары для $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$ мы имеем:

$$\ldots \to H_k(\mathbb{R}^m) \to H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m) \to \ldots$$

$$\ldots 0 \to H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \to 0 \to \ldots,$$

а значит, $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(S^{m-1})$, так как $\mathbb{R}^m - x$ деформационно ретрагируется на S^{m-1}. Значит, мы получили

$$H_{k-1}(S^{m-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1}),$$

откуда ясно, что $m = n$. □

3.14 Симплициальные комплексы

Этот парагарф надо написать из Хатчера.

3.15 Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий

Образующая $H_n(S^n)$:

В этом параграфе будем обозначать n-мерный симплекс, как Δ^n. Заметим, что так как $\Delta^n/\partial\Delta^n \cong S^n$, по теореме о факторизации 16 мы имеем изоморфизм

$$H_n(S^n) \cong H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n).$$

Покажем, что образующая $H^n(S^n)$ — это отображение $\Delta^n \xrightarrow{\mathrm{id}} \Delta^n$. Нетрудно заметить, что $\mathrm{Im}(\partial f) \subset \partial\Delta^n$, что дает нам, что id вообще представляет какой-то гомологический класс в $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Рассмотрим тройку $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$, где Λ — это $\partial\Delta^n$ без одной из граней (например, запоолненный треугольник, граница треугольника и граница треугольника без стороны). Напишем точную последовательность тройки:

$$\ldots \to H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \to H_n(\Delta^n, \Lambda) \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \to H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \to \ldots$$

Заметим, что так как Δ^n деформационно ретрагируется на Λ, $H_n(\Delta^n, \Lambda) \cong H_n(\Lambda, \Lambda) = 0$ и то же самое справедливо для $(n-1)$-х гомологий. То есть, наша последовательность на самом деле имеет вид

$$\ldots \to 0 \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \to 0 \to \ldots$$

Теперь заметим, что если грань, которую мы выкинули, мы обозначим за Δ', то $H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$.

Это ценно, так как далее мы можем рассуждать по индукции, ведь если образующая $H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$ — вложение выкинутой нижней грани Δ', то её прообраз в $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ —- нужное нам тождественное отображение (мы тут пользуемся тем, что мы знаем, что связывающий гомоморфизм в длинной точной последовательности пары/тройки – это просто взятие границы). А для S^0 это утверждение очевидно.

Обозначим симплиаицльные гомологии пространства X за $H_k^\Delta(X)$.

Теорема 25. *Пусть X — конечный симплициальный комплекс. Тогда*

$$H_k^{\mathrm{sing}}(X) \cong H_k^\Delta(X).$$

Доказательство. Пусть X^k — объединение всех симплексов в симплициальном комплексе до размерности k (обозначение аналогично обозначению для CW-комплексов). Напишем точную последовательность пары:

$$\ldots \to H_{n+1}^\Delta\Big(X^k, X^{k-1}\Big) \to H_n^\Delta\Big(X^k\Big) \to H_n^\Delta\Big(X^k\Big) \to H_n^\Delta\Big(X^k, X^{k-1}\Big) \to \ldots$$

и заметим, что $H_{n+1}^\Delta\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong H_{n+1}\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong H_{n+1}\big(\bigvee S^k\big)$. Действительно, ясно, что

$$H_{n+1}\Big(X^k, X^{k-1}\Big) \cong H_{n+1}\left(\bigvee_\alpha S^k\right),$$

где α пробегает k-мерные симплексы в X. Далее,

$$H_{n+1}\left(\bigvee_\alpha S^k\right) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } n+1 \neq k \\ \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}, & n+1 = k \end{cases}$$

С другой стороны, из определения симплициальных гомологий ясно, что при $n+1 \neq k$ мы имеем $H_{n+1}^\Delta\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong 0$, а при $n+1 = k$ эта группа — свободная абелева группа, порожденная всеми k-мерными симплексами в X, то есть, как и в предыдущем случае

$$H_k^\Delta\Big(X^k, X^{k-1}\Big) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}.$$

Остается заметить, что по доказанному в начале параграфа, мы знаем, что у $H_k\big(\bigvee_\alpha S^k\big)$ такой же набор порождающих.

Теперь будем вести индукцию по размерности симплициального комплекса. По индукционному предположению мы имеем $H_n^\Delta(X^{k-1}) \cong H_n(X^{k-1})$ и тогда мы получаем диаграмму из 5-леммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}^\Delta\left(X^k, X^{k-1}\right) & \longrightarrow & H_n^\Delta\left(X^{k-1}\right) & \longrightarrow & H_n^\Delta\left(X^k\right) & \longrightarrow & H_n\left(X^k, X^{k-1}\right) \\
\| & & \| & & \downarrow & & \| \\
H_{n+1}\left(X^k, X^{k-1}\right) & \longrightarrow & H_n\left(X^{k-1}\right) & \longrightarrow & H_n\left(X^k\right) & \longrightarrow & H_n\left(X^k, X^{k-1}\right)
\end{array}$$

□

3.16 Степень отображения

Определение 30. Пусть $f\colon S^n \to S^n$ — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм в гомологиях:

$$f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n).$$

Так как f_* — гомоморфизм бесконечной циклической группы в себя, он должен иметь вид

$$f_*(\alpha) = d \cdot \alpha$$

для некоторого фиксированного $d \in \mathbb{Z}$, зависящего только от f. Это число называют *степенью отображения* f и обозначают $\deg f$.

Базовые свойства степени.

1. $\deg \mathrm{id}_{S^n} = 1$.
2. Если f — не сюръекция, то $\deg f = 0$, так как мы можем выбрать $x \in S^n \setminus f(S^n)$ и представить f в виде композиции
$$S^n \to S^n \setminus \{x\} \hookrightarrow S^n,$$
а пространство $S^n \setminus \{x\}$ — стягиваемо, значит $H_n(S^n \setminus \{x\}) = 0$, а значит и $f_* = 0$.
3. Если $f \sim g$, то $\deg f = \deg g$.
4. $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$.
5. Если f — гомотопическая эквивалентность, то существует g такое, что $f \circ g \sim \mathrm{id} \Rightarrow \deg f \deg g = 1 \Rightarrow \deg f = \pm 1$.
6. Рассмотрим f, которое тождественно действует на первых n координатах и отправляет x_{n+1} в $-x_{n+1}$. Тогда $\deg f = -1$. Действительно, мы модем реализовать сферу, как склейку двух симплексов Δ_1^n и Δ_2^n по границе. Тогда n-мерная цепь $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ являются образующей n-мерных гомологий, а отображение f переставляет местами Δ_1^n и Δ_2^n, то есть действует на образующую умножением на -1.
7. Степень антиподального отображения: $\deg(x \mapsto -x) = (-1)^{n+1}$
8. Если $f\colon S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, то $f \sim (x \mapsto -x)$ и соответственно $\deg f = (-1)^{n+1}$. Действительно, если $f(x) \neq x$, то отрезок с концами $f(x)$ и $-x$, который задаётся, как
$$t \mapsto (1-t)f(x) - tx,\ 0 \leq t \leq 1,$$
не проходит через начало координат и формула
$$H(t,x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$
определяет гомотопию $f(x)$ в постоянное отображение.

Теорема 26 (О причёсывании ежа). *S^n допускает непрерывное ненулевое (касательное) векторное поле тогда и только тогда, когда n — нечетно.*

Доказательство. Предположим, что $x \mapsto V(x)$ — непрерывное поле касательных векторов к сфере. Тогда, если рассматривать вектор $V(x)$, как вектор в начале координат, а не в точке касания, то условие касания означает просто, что $x \perp V(x)$. Если $V(x) \neq 0$, то мы можем нормализовать веторное поле так, что $\|V(X)\| = 1\ \forall x$, тогда векторы
$$(\cos t)x + (\sin t)V(x)$$
лежат на единичной окружности в $\mathrm{span}(x, V(x))$. Соотвественно, при $t \in [0,\pi]$ мы получаем гомотопию тождественного отображения id_{S^n} в антиподальное отображение:
$$H(t,x) = (\cos t)x + (\sin t)V(x).$$
Отсюда следует, что $(-1)^{n+1} = 1$, а значит, n должно быть нечетно. С другой стороны, когда $n = 2k-1$, мы можем положить
$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, 2k) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k+1})$$
и это даст нам искомое векторное поле. □

Опишем теперь метод вычисления, который чаще всего применим на практике. Пусть $f\colon S^n \to S^n$ и существует $y \in S^n$ такое, что $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $U_1, \ldots, U_k$ — непересекающиеся окрестности этих точек, которые f переводит в окрестность V точки y. Тогда $f(U_i \setminus x_i) \subset V \setminus y$ и мы имеем коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
& H_n\left(U_i, U_i \setminus \{x_i\}\right) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "k_i"] \arrow[dl, equal] & H_n(V, V \setminus \{y\}) \arrow[d, equal] \\
H_n\left(S^n, S^n \setminus \{x_i\}\right) & H_n\left(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)\right) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n\left(S^n, S^n \setminus \{y\}\right) \\
& H_n\left(S^n\right) \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f_*"] \arrow[ul, equal] & H_n\left(S^n\right) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
$$

Все отображения на ней индуцируются включениями. Два ихоморфизма в верхней части диаграммы получаются из теоремы о вырезании 17, а два в нижней — из точной последовательности пары 13.

Посредством этих четырех гомоморфизмов две верхние группы можно отождествить с $\mathbb{Z}$, тогда верхний гомоморфизм f_* становится умножением на число и это число мы будем называть *локальной степенью* отображения f и обозначать $\deg f|_{x_i}$.

Теорема 27 (Локальность степени). *Пусть $f\colon S^n \to S^n$ и $y \in S^n$ таково, что $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда*

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

Доказательство. По теореме о выразении 17, группа $H_n\big(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)\big)$ — прямая сумма групп $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$, причем k_i — отображение включения i-го слагаемого, а p_i — проекция на i-е слагаемое. Из коммутативности нижнего треугольника мы получаем, что

$$p_i \circ j(1) = 1,$$

а значит, $j(1) = (1, \ldots, 1) = \sum_i k_i(1)$. Коммутативность верхнего квадрата говорит, что f_* отображает $k_i(1)$ в $\deg f|_{x_i}$, а коммутативность нижнего квадрата уже дает нам формулу

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

$\square$

3.17 Клеточные гомологии

Лемма 19. Пусть X — конечный CW-комплекс. Тогда:

a) $H_k\big(X^n, X^{n-1}\big) = 0$, если $k \neq n$ и изоморфно мвободной абелевой группе, если $k = n$. Образующие этой группы — клетки размерности n.
b) $H_k(X^n) = 0$, если $k > n$. В частности, если комплекс конечномерен, то $H_k(X) = 0\ \forall k > \dim X$.
c) Вложение $i\colon X^n \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм $i_*\colon H_k(X^n) \to H_k(X)$ при $k < n$ и эпиморфизм при $k = n$.

Доказательство. Во-первых, мы знаем, что $\big(X^n, X^{n-1}\big)$ — пара Борсука. Кроме того, $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_\alpha S^n$, где α пробегает все n-мерные клетки. Тогда факт a) следует из теоремы о факторизации 16 и теоремы 21.

Теперь рассмотрим длинную точную последовательность пары

$$\ldots \to H_{k+1}\big(X^n, X^{n-1}\big) \to H_k\big(X^{n-1}\big) \to H_k(X^n) \to H_k\big(X^n, X^{n-1}\big) \to \ldots.$$

Если $k \neq n$ или $n-1$, то обе внешние группы равны нулю, как группы гомологий букета n-мерных сфер, поэтому мы получаем изоморфизм

$$H_k\big(X^{n-1}\big) \cong H_k(X^n), \quad k \neq n, n-1.$$

Тогда, если $k > n$, то

$$H_k(X^n) \cong H_k\big(X^{n-1}\big) \cong \ldots H_k\big(X^0\big) = 0,$$

что доказывает пункт b). Если же $k < m$, то тогда

$$H_k(X^n) \cong H_k\big(X^{n+1}\big) \cong \ldots \cong H_k\big(X^{n+m}\big)\ \forall m \geq 0,$$

что доказывает c) в случае конечномерного комплекса. $\square$

Замечание. Утверждение c) верно и для бесконечномерных CW-комплкесов (идея состоит в том, что каждая сингулярная цепь имеет компактный образ, а значит пересекается лишь с конечным числом клеток). (Доказательство можно посмотреть в Хатчере).

Теперь мы определим клеточные гомологи — более продвинутый способ вычислять гомологии клеточных пространств. Начнем с такой коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \\
 & 0 \arrow[dr] & & H_n\left(X^{n+1}\right) \cong H_n(X) \arrow[ur] & \\
 & & H_n\left(X^n\right) \arrow[ur] \arrow[d, "j_n"] & & \\
\ldots \arrow[r] & H_{n+1}\left(X^{n+1}, X^n\right) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] & H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \arrow[r] & \ldots \\
 & & H_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \arrow[ur, "j_{n-1}"] & & \\
 & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Её мы получили из точных последовательностей для пар $\left(X^{n+1}, X^n\right)$, $\left(X^n, X^{n-1}\right)$, $\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right)$. Морфизмы в нижней строчке определяются, как $d_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} j_n \circ \partial_{n+1}$. Нетрудно заметить, что из точности мы получаем $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Таким образом, средняя строчка диаграммы является цепным комплексом (его называют *клеточным цепным комплексом для* X). Как мы уже замечали в доказательстве леммы выше, группа $H_n\left(X^n, X^{n-1}\right)$ — свободная абелева группа с базисом из n-мерных клеток в X.

Определение 31. Рассмотрим построенный выше цепной комлекс с группой k-мерных цепей $C_k^{\mathrm{CW}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} H_k\left(X^k, X^{k-1}\right)$. Гомологии этого комплекса называют *клеточным гомологиями пространства* X и обозначают $H_n^{\mathrm{CW}}(X)$.

Замечание. В самом деле, всё происходящее вполне логично — в случае симплициальных гомологий мы рассматриваем свободные абелевы группы, порожденные симплексами всех размерностей, а тут — клетками всех размерностей.

Теорема 28. *Пусть* X — CW*-комплекс. Тогда имеет место изоморфизм* $H_n^{\mathrm{CW}}(X) \cong H_n(X)$.

Доказательство. Из точности и теоремы о гомоморфимзе мы имеем изоморфизм

$$H_n(X) \cong H_n(X^n) / \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

Так как j_n — инъекция, $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \cong \operatorname{Im} j_n \circ \partial_{n+1} = \operatorname{Im} d_{n+1}$. С другой стороны, $\operatorname{Im} j_n \cong \operatorname{Ker} \partial_n$. Из инъективности j_{n-1} мы имеем $\operatorname{Ker} \partial_n \cong \operatorname{Ker} d_n$. Значит, j_n индуцирует изоморфизм факторгруппы:

$$H_n(X) \cong H_n(X^n) / \operatorname{Im} \partial_{n+1} \cong \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}.$$

□

Следствие 9. *Пусть* X — CW*-комплекс, тогда:*

1. $H_n(X) \cong 0$, *если в* X *нет* n*-мерных клеток.*
2. *Если* X — CW*-комплекс с* k *клетками размерности* n*, то группа* $H_n(X)$ *порождена не более чем* k *элементами. В самом деле, так как* $H_n\left(X^n, X^{n-1}\right)$ — *группа с* k *образующими, у подгруппы* $\operatorname{Ker} d_n$ *никак не может быть больше образующих, а значит и в факторгруппе* $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$ *тоже.*

3. *Если X — CW-комплекс, у которого нет пар клеток в соседних размерностях, то $H_n(X)$ — свободная абелева группа с базисом из n-мерных клеток.*

Пример 13. Последний пункт следствия 9 применим, например, к $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, так как клеточная структура для $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ имеет по одной клетке каждой четной размерности до $2n$ (действительно, это заметно из того, что $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$). Значит, клеточный цепной комплекс для $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ имеет вид:

$$\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

Также при помощи этого же факта можно посчитать гомологии $S^n \times S^n$.

Рассмотрим теперь подробнее клеточный оператор границы d_n. При $n = 1$ это легко, так как

$$d_1 \colon H_1\big(X^1, X^0\big) \to H_0\big(X^0\big)$$

и это просто обычное граничное отображение.

В случае, когда комплекс X связен и имеет лишь одну нульмерную клетку, $d_1 = 0$, так как иначе $H_0(X) \neq \mathbb{Z}$. В общем случае формула для клеточного оператора границы имеет следующий вид:

Утверждение 13. *Имеет место равенство:*

$$d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta,$$

где $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения $S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$, которое является композицией отображения приклеивания клетки e^n_α по границе и отображения фаткоризации, стягивающего $X^{n-1} \setminus e^{n-1}_\beta$ в точку.

Доказательство. Для получения этой формулы рассмотрим такую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_n\left(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha\right) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Phi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(\partial D^n_\alpha\right) \arrow[r, "\Delta_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(S^{n-1}_\beta\right) \arrow[d, "q_{\beta*}"] \\
H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(X^{n-1}/X^{n-2}\right) \arrow[d, "\cong"] \\
& H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \arrow[r, "\cong"] & H_{n-1}\left(X^{n-2}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}\right)
\end{tikzcd}$$

Проясним, что за стрелки на ней:

- Φ_α — характеристическое отображение клетки e^n_α, φ_α — её отображение приклеивания.
- $q \colon X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2}$ — отображение факторизации.
- $q_\beta \colon X^{n-1}/X^{n-2} \to S^{n-2}_\beta$ — стягивание дополнения клетки e^{n-1}_β в точку и отождествление получившейся сферы с $S^{n-1}_\beta = D^{n-1}_\beta / \partial D^{n-1}_\beta$.
- $\Delta_{\alpha\beta} = q_\beta q \varphi_\alpha$.

Отображение $\Phi_{\alpha*}$ переводит образующую $[D^n_\alpha] \in H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$ в образующую слагаемого $\mathbb{Z}$ группы $H_n\big(X^n, X^{n-1}\big)$, соответствующего клетке e^n_α (действительно, такие клетки образуют базис $H_n\big(X^n, X^{n-1}\big)$). Коммутативность левой половины диаграммы даёт нам, что

$$d_n(e^n_\alpha) = j_{n-1} \varphi_{\alpha*} \partial [D^n_\alpha].$$

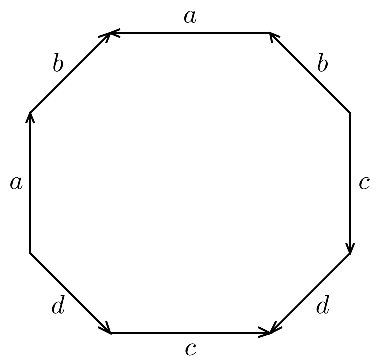
Базис группы $H_{n-1}\big(X^{n-1}, X^{n-2}\big)$ состоит из $(n-1)$-мерных клеток, а отображение $q_{\beta*}$ — это проекция группы $\widetilde{H}_{n-1}\big(X^{n-1}/X^{n-2}\big)$ (которая, как группа гомологий букета окружностей суть прямая сумма $\mathbb{Z}$, где каждое слагаемое соотвествует $(n-1)$-мерной клетке) на её слагаемое $\mathbb{Z}$, соответсвующее e^{n-1}_β.

Теперь формула следует непосредственно из коммутативности правой верхней части диаграммы7 □

3.18 Гомологии поверхностей

В данном параграфе, пользуясь клеточными гомологиями, мы вычислим гомологии поверхностей.

Пусть M_g — компактная ориентируемая поверхность с g ручками. Реализуем её, как склейку $4g$-угольника:



Тогда в её клеточном разбиении:

- 1 двумерная клетка, приклеенная по произведению коммутаторов $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$.
- $2g$ одномерных клеток.
- 1 нульмерная клетка.

Значит, цепной клеточный комплекс для M_g будет иметь вид:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

Так как комплекс связен и имеет лишь одну нульмерную клетку, $d_1 = 0$. Кроме того, каждое ребро $[a_1, a_2]$, $[a_g, b_g]$ появляется в произведении коммутаторов вместе со своим обратным, а значит, $\Delta_{\alpha\beta}$ гомотопны постоянным отображениям, из чего следует, что $d_2 = 0$.

Таким образом, мы имеем

$$H_k(M_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \text{ или } k = 2, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & k = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь вычислим гомологии неориентируемой замкнутой поверхности рода g. Она имеет такую клеточную структуру:

- Одна нульмерная клетка.
- g одномерных клеток.
- Одна двумерная клетка, приклеенная по слову $a_1^2 \dots a_g^2$.

Тогда клеточный цепной комплекс имеет вид:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

Аналогично предыдущему разу, $d_1 = 0$, а вот d_2 задаётся уравнением

$$d_2(1) = (2, \dots, 2),$$

так как каждое ребро a_i появляется в слове приклеивания двумерной клетки со степенью 2, а это значит, что каждое отображение $\Delta_{\alpha\beta}$ гомотопно отображению степени 2. Значит, d_2 инъективно и

$$H_2(N_g) = 0.$$

Выберем в $\mathbb{Z}^g$ такой базис: $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, 0), (1, 1, \dots 1)$. Тогда нетрудно заметить, что

$$H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3.19 Пространства Мура

Допишу позже вместе с пространствами Эйленберга-Маклейна.

3.20 Теорема о вложении дисков и сфер

Напомним, что топологическое вложение — гомеоморфизм на образ.

Теорема 29. *Пусть $h\colon D^k \to S^n$ — вложение. Тогда*

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(D^k\Big)\Big) = 0 \; \forall i.$$

Кроме того, если $h\colon S^k \to S^n$ — вложение (и $k < n$), то

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(S^k\Big)\Big) = \mathbb{Z},\; i = n-k-1 \text{ и } 0 \text{ иначе.}$$

Доказательство. Проведём индукцию по k. Случай $k = 0$ тривиален:

$$S^n \setminus h\big(D^0\big) = \mathbb{R}^n.$$

Теперь докажем индукционный переход от противного. Рассмотрим покрытие нашего пространства двумя множествами:

$$A = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad B = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Заметим, что $A \cup B = S^n \setminus \big(h\big(I^k \times \big[0, \frac{1}{2}\big]\big) \cap h\big(I^k \times \big[\frac{1}{2}, 1\big]\big)\big) = S^n \setminus h\big(I^k \times \frac{1}{2}\big)$ и

$$\widetilde{H}_i(A \cup B) \cong \widetilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right) = 0,$$

по индукционному предположению. Напишем теперь точную последовательность Майера-Вьеториса (18):

$$\ldots \to H_n(A \cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \ldots$$

$$\ldots \to H_n\Big(S^n \setminus h\Big(I^{k+1}\Big)\Big) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to \underbrace{H_n\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right)}_{\cong 0} \to H_{n-1}\Big(S^n \setminus h\Big(I^{k+1}\Big)\Big) \to \ldots$$

значит если в $\widetilde{H}_i(A \cap B) = \widetilde{H}_i\big(S^n \setminus \big(I^k \times I\big)\big)$ есть ненулевой класс a, его образ $(a, -a)$ в $\widetilde{H}_n(A) \oplus \widetilde{H}_n(B)$ будет ненулевым, а значит, в $\widetilde{H}_i(A)$ или $\widetilde{H}_i(B)$ тоже будет ненулевым. Далее мы можем также разбить на две части интервал в A или в B (в зависимости от того, где не ноль) и проделать всё полностью аналогично. Таким образом мы получим последовательность вложенных интервалов I_n таких, что

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(I^k \times I_n\Big)\Big) \neq 0,\; a \in \widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(I^k \times I_n\Big)\Big).$$

Тогда, если $p = \bigcap I_n$, то по индукционному предположению

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(I^k \times p\Big)\Big),$$

то есть a представляет ноль в этих гомологиях. Но это означает, что он является чьей-то границей, но тогда он является границей и в допредельном случае, что даёт нам противоречие.

Докажем теперь второй пункт. Представим сферу ввиде объединения двух дисков (полусфер):

$$S^k = D^k_+ \cup D^k_-, \quad D^k_- \cap D^k_+ = S^{k-1}.$$

тогда $S^n \setminus h(S^k) = S^n \setminus h(D^k_+ \cup D^k_-) = S^n \setminus h(D^k_-) \cap S^n \setminus h(D^k_+)$. Запишем опять точную последовательность Майера-Вьеториса 18, полагая

$$A = S^n \setminus h\Big(D^k_+\Big), \quad B = S^n \setminus h\Big(D^k_+\Big).$$

:

$$\ldots \to H_i\Big(S^n \setminus h\Big(S^k\Big)\Big) \to \underbrace{H_i\Big(S^n \setminus h\Big(D^k_-\Big)\Big)}_{=0} \oplus \underbrace{H_i\Big(S^n \setminus h\Big(D^k_+\Big)\Big)}_{=0} \to H_i\Big(S^n \setminus h\Big(S^{k-1}\Big)\Big) \to \ldots$$

Нулевые элементы в точной последовательности у нас их первого утверждения теоремы. Теперь видно, что мы можем вести индукцию по k. □

3.21 Когомологии

Итак, рассмотрим цепной комплекс абелевых групп $(C_\bullet, \partial)$

$$\ldots \to C_k \to C_{k-1} \to C_{k-2} \to \ldots$$

Тогда мы можем рассмотреть группы $C^k \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(C_k, G)$, где G — фиксированная абелева группа.[10] Тогда мы получаем цепной комплекс

$$\ldots \leftarrow C^{k+1} \overset{\delta}{\leftarrow} C^k \overset{\delta}{\leftarrow} C^{k-1} \overset{\delta}{\leftarrow} \ldots$$

Естественно, стрелки развернулись, так как мы подействовали на комплекс контравариантным функтором $\operatorname{Hom}(\_, G)$. Действие оператора δ определяется естественным образом:

$$\varphi \in C^k,\ \delta\varphi\colon C_{k+1} \overset{\partial}{\to} C_k \overset{\varphi}{\to} G,\ \delta\varphi = \varphi \circ \partial.$$

Замечание. Сразу же нетрудно заметить, что $\delta^2 = 0$, то есть построенный комплекс действительно будет комплексом. Действительно,

$$\delta_k \circ \delta_{k-1}(\varphi(c)) = \delta_k(\varphi(\partial_{k-1}c)) = \varphi(\partial_k \partial_{k-1} c) = 0.$$

Определение 32. Группы гомологий коцепного комплекса $(C^\bullet, \delta) = (\operatorname{Hom}(C_\bullet), G), \delta)$ называют *группами когомологий* комплекса $(C_\bullet, \partial)$ с коэффициентами в группе G и обозначаются $H^k(C_\bullet; G)$. Как и в случае с гомологиями, $\operatorname{Im} \delta_k$ называют k-мерными кограницами, $\operatorname{Ker} \delta_k$ — k-мерными коциклами, а C^k — k-мерными коцепями.

Таким образом, мы определили и *сингулярные когомологии* пространства X (так как они строятся по сингулярным гомологиям). Заметим, что так как функтор Hom контравариантен, логично ожидать, что и когомологии будут контраваринатным функтором. Действительно, если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то у нас есть индуцированный морфизм

$$f_*\colon C_k(X) \to C_k(Y)$$

и действием функтора Hom мы получаем индуцированный морфизм $f^*\colon C^k(Y) \to C^k(X)$:

$$\varphi \in C^k(Y),\ \varphi\colon C^k(Y) \to G,\ f^*(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \varphi \circ f\colon C^k(X) \to G,\ f^*(\varphi) \in C^k(X).$$

Покажем теперь, что у нас будет и индуцированный морфизм в когомологиях:

$$f^*\colon H^k(Y) \to H^k(X)$$

Для этого надо проверить, что отображение уважает добавление кограницы, то есть, если мы выберем другого представителя того же когомологического класса, мы полужем тот же образ, что и до этого. Действительно,

$$f^*(c_k + \delta c_{k-1}) = f^*(c_k) + \delta f^*(c_{k-1})$$

Замечание. Формально, как и в гомологиях, нам надо проверить, что $f^*\delta = \delta f^*$. Действительно, пусть $\varphi \in C^k(X)$, тогда

$$f^*(\delta\varphi) = f^*(\varphi\partial) = \varphi\partial f = \varphi f \partial = \delta f^*(\varphi).$$

В третьем равенстве мы пользуемся тем, что в начале курса мы уже проверяли, что граничный оператор коммутирует с непрерывными отображениями.

[10]В нашем, топологическом контексте, это группа коэффициентов.

3.22 Формула универсальных коэффициентов для когомологий

Пример 14. Рассмотрим следующий комплекс:

$$0 \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_3} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_2} \xrightarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_1} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_0} \to 0$$

После применения функтора $\mathrm{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ мы получим такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Посмотрим, какие в новом комплексе отображения. Действительно, пусть $\varphi\colon C_1 \to \mathbb{Z}$, $\psi\colon C_2 \to C_1, \psi(x) = 2x$, тогда $\varphi\psi\colon C_2 \to \mathbb{Z} \in C^2$. Нетрудно заметить, что $\varphi(\psi(x)) = \varphi(2x) = 2\varphi(x)$. Значит, мы получили вот такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \xleftarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Вычислим сначала гомологии:

$$H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z},\ H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ H_2(C_\bullet) = 0,\ H_3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

Теперь вычислим когомологии:

$$H^0(C_\bullet) = \mathbb{Z},\ H^1(C_\bullet) = 0, H_2(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

То есть, сами группы не изменились, но изменилась градуировка.

Это вполне естественно, так как, на самом деле, любой цепной комплекс конечно-порожденных свободных абелевых групп является прямой суммой комплексов

$$0 \to \mathbb{Z} \to 0 \text{ и } 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to 0$$

и в силу того, что функтор Hom аддитивен на конечных копроизведениях, применяя $\mathrm{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ к исходному комплексу, мы получаем прямую сумму комплексов

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \text{ и } 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

Таким образом, мораль всего этого дела в том, что группы когомологий — тоже самое, что группы гомологий, за исключением того, что кручение смещается на олну размерность.

Утверждение 14. *Пусть $(C_\bullet, \partial)$ — цепной комплекс. Тогда существует гомоморфизм*

$$h\colon H^n(C; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(C), G).$$

Доказательство. Рассмотрим когомологический класс $[\varphi] \in H^n(C_\bullet; G)$, $\varphi\colon C_n \to G$, $\delta\varphi = 0$.

$$\delta\varphi = \varphi\partial \Leftrightarrow \varphi|_{\mathrm{Im}\,\partial_{n+1}} = 0$$

Ограничение $\varphi_0 = \varphi|_{\mathrm{Ker}\,\partial_n}\colon\ \mathrm{Ker}\,\partial_n \to G$ индуцирует гомоморфизм факторизации

$$\overline{\varphi_0}\colon\ \mathrm{Ker}\,\partial_n / \mathrm{Im}\,\partial_{n+1} \to G, \quad \overline{\varphi_0} \in \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G).$$

Таким образом, полагая $h(\varphi) = \overline{\varphi}_0$, мы получаем нужное. □

Упражнение. h — эпиморфизм.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$0 \to Z_{n+1} \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial} B_n \to 0$$

Применяя функтор $\mathrm{Hom}(-, G)$ мы получаем точную последовательность

$$0 \leftarrow Z^{n+1} \leftarrow C^{n+1} \leftarrow B^{n+1} \leftarrow 0$$

На самом деле, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & Z^{n+1} & \longleftarrow & C^{n+1} & \longleftarrow & B^n & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle 0}\big\uparrow & & {\scriptstyle \delta}\big\uparrow & & {\scriptstyle 0}\big\uparrow & & \\
0 & \longleftarrow & Z^n & \longleftarrow & C^n & \longleftarrow & B^{n-1} & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Видно, что эта диаграмма — часть короткой точной последовательности комплексов. Она даёт нам длинную точную последовательность:

$$\ldots \leftarrow B^n \leftarrow Z^n \leftarrow H^n(C_\bullet, G) \leftarrow B^{n-1} \leftarrow Z^{n-1} \leftarrow \ldots$$

Разбивая длинную точную последовательность на короткие точные последовательности мы получаем:

$$0 \leftarrow \mathrm{Ker}(Z^n \to B^n) \xleftarrow{h} H^n(C_\bullet; G) \leftarrow \mathrm{Coker}\big(Z^{n-1} \to B^{n-1}\big) \leftarrow 0$$

А теперь заметим, что $\mathrm{Ker}(Z^n \to B^n) = \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$. Таким образом, мы получаем расщепимую точную последовательность:

$$0 \to \mathrm{Coker}\big(Z^{n-1} \to B^{n-1}\big) \to H^n(C_\bullet; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \to 0.$$

Определение 33. Пусть H — абелева группа. Тогда её *свободная резольвента* — это точная последовательность

$$\ldots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0,$$

в которой каждая группа F_n свободная.

Применяя к этой точной последовательности функтор $\mathrm{Hom}(-, G)$ мы можем потерять точность, но во всяком случае, получим цепной комплекс:

$$\leftarrow F_2^* \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Будем обозначать группы когомологий свободной резольвенты, как $H^n(F, G)$. Нам понадобится следующее утверждение из гомологической алгебры:

Лемма 20. Пусть даны свободные резольвенты F и F' абелевых групп H и H'. Тогда любой гомоморфизм $\alpha\colon H \to H'$ можно продолжить до цепного отображения $F \to F'$. Кроме того, любые два таких цепных отображения, продолжающие гомоморфизм α, цепно гомотопны.

Для любых двух свободных резольвент F и F' группы H существуют канонические изоморфизмы

$$H^n(F; G) \cong H^n(F'; G).$$

У любой абелевой группы H есть свободная резольвента вида

$$0 \to F_1 \to F_0 \to H \to 0$$

с $F_i = 0$ при $i > 1$, которую мы сейчас построим.

Выберем в H набор образующих и пусть F_0 — группа, свободно порожденная этими образующими. Тогда у нас есть сюръективный гомоморфизм $f_0\colon F_0 \to H$, переводящий элементы базиса в образующие H. Его ядро будет свободно, как подгруппа свободной группы, поэтому мы можем положить $F_1 = \mathrm{Ker}\, f_0$, а в качестве f_1 взять включение $\mathrm{Ker}\, f_0 \hookrightarrow F_0$.

Для этой свободной резольвенты мы имеем $H^n(F; G) = 0\ \forall n > 1$, поэтому, из леммы 20 мы получаем, что это должно быть верно для всех свободных резольвент.

Таким образом, единственная интересная группа из $H^n(F; G)$ — это $H^1(F; G)$. Эта группа зависит лишь от H и G, поэтому обычно её обозначают $\mathrm{Ext}(H, G)$[11].

[11] Вообще говоря, в гомологической алгебре функтор Ext обычно интерпретируют, как множество классов эквивалентности расширений G посредством H, но в алгебраической топологии такая интерпретация редко нужна.

Так вот, из построения свободной резольвенты для группы H и определения когомологий мы теперь наконец можем заметить, что

$$\operatorname{Coker}\big(Z^{n-1} \to B^{n-1}\big) = \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G).$$

Теперь мы наконец можем заключить, что мы доказали формулу универсальных коэффициентов для когомологий:

Теорема 30 (Об универсальных коээфициентах для когомологий)**.** *Пусть $C_\bullet$ — цепной комплекс. Тогда его группы когомологий определяются расщепимыми короткими точными последовательностями*

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G) \to H^n(C; G) \to \operatorname{Hom}(H_n(C), G) \to 0$$

Вообще говоря, это утверждение достаточно полезно, потому что на конечнопорожденных абелевых группах функтор Ext несложно посчитать:

- $\operatorname{Ext}(H \oplus H', G) \cong \operatorname{Ext}(H, G) \oplus \operatorname{Ext}(H', G)$.
- $\operatorname{Ext}(H, G) = 0$, если H — свободна.
- $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$.
- Если H конечно порождена, то имеет место изоморфизм

$$\operatorname{Ext}(H, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Tor}(H).$$

Кроме того, теорема об универсальных коэффициентов позволяет вычислять когомологии, зная только гомологии.

Следствие 10. *Если группы гомологий $H_n(C)$ и $H_{n-1}(C)$ комплекса C, состоящего из свободных абелевых групп, конечно порождены и $T_n \subset H_n$ и $T_{n-1} \subset H_{n-1}$ — подгруппы кручения, то*

$$H^n(C; \mathbb{Z}) \cong (H_{n-1}(C)/T_n) \oplus T_{n-1}.$$

Это следствие даёт нам обобщение и формализацию примера 14.

Кроме того, из всего этого дела есть еще одно замечательное следствие:

Следствие 11. *Если $f\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ индуцирует изоморфизм всех групп гомологий $H_k(C_\bullet) \cong H_k(C'_\bullet)$. Тогда отображения $f^*\colon H^k(C_\bullet; G) \cong H^k(C'_\bullet; G)$.*

Доказательство. Действительно, достаточно заметить, что из свойств свободной резольвенты мы знаем, что отобрежение цепных комплексов индуцирует такую вот диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}\left(H_{n-1}(C), G\right) \arrow[r] & H^n\left(C; G\right) \arrow[r, "h"] & \operatorname{Hom}\left(H_{n-1}(C), G\right) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}\left(H_{n-1}(C'), G\right) \arrow[r] \arrow[u] & H^n\left(C'; G\right) \arrow[r, "h"] \arrow[u] & \operatorname{Hom}\left(H_{n-1}(C'), G\right) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Применяя 5-лемму и индукцию, мы получаем нужное. □

3.23 Умножение в когомологиях

Пусть R — коммутативное и ассоциативное кольцо.

Пусть $\varphi \in C^k(X; R),\ \psi \in C^\ell(X; R)$. Тогда их произведением определяется таким образом:

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+\ell}, \quad (\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0 \ldots v_k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_k \ldots v_{k+\ell}]}),$$

где $\sigma\colon \Delta^{k+\ell} \to X$ — сингулярный симплекс.

Лемма 21. Для кограницы $\smile$-произвения справедлива следующая формула:

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi.$$

Доказательство. Пусть $\sigma\colon \Delta^{k+\ell} \to X$ — сингулярный симплекс. Тогда

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_{k+1}]})\psi(\sigma|_{[v_{k+1}\dots v_{k+\ell+1}]})$$

Распишем теперь второй кусок:

$$(-1)^k(\varphi \smile \delta\psi) = \sum_{i=k}^{k+\ell+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0\dots v_k]})\psi(\sigma|_{[v_k,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_{k+\ell+1}]})$$

Когда мы сложим эти две суммы, последнее слагаемое первой суммы сократится с первым слагаемым второй, а всё, что останется — как раз $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$. □

Замечание. Таким образом, $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi \pm \delta\psi \smile \varphi$. Из этого следует, что произведение коциклов — коцикл. Также это сразу даёт нам, что произведение коцикла и кограницы (в любом порядке) — кограница:

$$\varphi \smile \delta\psi = \pm\delta(\varphi \smile \psi)$$

Это даёт нам ассоциативное дистрибутивное умножение

$$\smile\colon H^k(X;R) \times H^\ell \to H^{k+\ell}(X;R).$$

Таким образом, при помощи $\smile$-произведения, мы наделили

$$H^*(X;R) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X;R)$$

структурой кольца (а на самом деле, градуированной алгебры).

Если в кольце R есть единица, то единицей относительно $\smile$-произведения будет нольмерный коцикл $1 \in H^0(X;R)$, принимающий значение 1 на любом нульмерном сингулярном симплексе.

Замечание. Это показывает нам отдельную пользу когомологий: например, у $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ и $S^4 \vee S^2$ все группы гомологий и группы когомлогий совпадают, а кольца когомологий отличаются.

4. Комплексная алгебраическая геометрия

4.1 Комплексные многообразия

Определение 34. *Комплексным многообразием M* называется гладкое многообразие, допускающее такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и такие координатные отображения $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, что все функции перехода $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ голоморфны на $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Функция f на открытом подмножестве $U \subset M$ называется *голоморфной*, если $\forall \alpha \in I$ функция $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфна в $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$.

Набор $z = (z_1, \dots, z_n)$ функций на $U \subset M$ называется *голоморфной системой координат*, если $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$ и $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфны на $z(U \cap U_\alpha)$ и $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ для всех α.

Отображение $f\colon M \to N$, где M и N — комплексные многообразия, называется *голоморфным*, если в голоморфных локальных координатах оно задаётся голоморфными функциями.

Пример 15 (Примеры комплексных многообразий)**.** Приведём какие-нибудь примеры комплексных многообразий:

1. Одномерное комплексное многообразие называют **римановой поверхностью**.
2. $P\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\{z \sim \lambda z\} = \mathbb{P}^n$ — комплексное проективное пространство. Это пространство компактно, так как есть непрерывное сюръективное отображение $S^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n$.
3. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^k \subset \mathbb{C}^n$ — дискретная решётка. Факторгруппа $\mathbb{C}^n/\Lambda$ обладает структурой комплексного многообразия, которую индуцирует проекция $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda$. Это многообразие компактно тогда и только тогда, когда $k = 2n$ и в этом случае $\mathbb{C}^n/\Lambda$ называется **комплексным тором**.
4. Тут был еще пример, что при неразветвлённом накрытии структура комплексного многообразия наследуется, но я хз, что такое разветвлённое накрытие.

Касательное пространство к комплексному многообразию.

Пусть M — комплексное многообразие, $p \in M$, а $z = (z_1, \dots, z_n)$ — система голоморфных координат в окрестности p. В случае комплексного многообразия имеются три различных понятия *касательного пространства* к M в точке $p \in M$.

1. Рассмотрим M, как вещественное $2n$-многообразие. Тогда $T_{\mathbb{R},p}M$ — пространство $\mathbb{R}$-линейных дифференцирований кольца $C^\infty(M, \mathbb{R})$ (с носителем в окрестности p). Если мы представим голоморфные координаты в виде $z_j = x_j + iy_j$, то $T_{\mathbb{R},p}M$ будет иметь базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$, как векторное пространство над $\mathbb{R}$.
2. Пространство $T_{\mathbb{R},p}M$ можно комплексифицировать при помощи расширения скаляров, то есть рассмотреть
$$T_{\mathbb{C},p}M \stackrel{\text{def}}{=} T_{\mathbb{R},p}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$
$T_{\mathbb{C},p}M$ называют *комплексифицированным касательным пространством* к M в точке p. Его можно реализовать, как пространство $\mathbb{C}$-линейных дифференцирований кольца $C^\infty(M, \mathbb{C})$ (опять же, функции с носителем в окрестности p). Соотвественно, там можно выбрать базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$, а при замене базиса на комлпексные обозначения
$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\ \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$
«более стандартный» базис $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$.
3. Подпространство $T'_pM = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial z_j}\} \leq T_{\mathbb{C},p}M$ называется *голоморфным касательным пространством* к M в точке p. Оно может быть реализовано, как подпространство в $T_{\mathbb{C},p}M$, состоящее из дифференцирований, обращающихся в ноль на антиголоморфных функциях (таких f, что $\overline{f}$ — голоморфна). Соответственно, подпространство $T''_pM = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$ называется *антиголоморфным касательным пространством* к M в точке p. Ясно, что
$$T_{\mathbb{C},p}M = T'_pM \oplus T''_pM.$$

Заметим, что для комплексных многообразий M, N любое $f \in C^\infty(M, N)$ индуцирует линейное отображение
$$f_*\colon T_{\mathbb{R},p}M \to T_{\mathbb{R},f(p)}N$$
а значит и линейное отображение
$$f_*\colon T_{\mathbb{C},p}M \to T_{\mathbb{C},f(p)}N,$$
но не отображение $T'_pM \to T'_{f'(p)}N$ для всех $p \in M$.

На самом деле, отображение $f\colon M \to N$ голоморфно тогда и только тогда, когда
$$f_*(T'_pM) \subset T'_{f(p)}N \quad \forall p \in M.$$
То есть, когда голоморфное касательное пространство отображается в голоморфное.

Заметим, что также, поскольку $T_{\mathbb{C},p}M = T_{\mathbb{R},p}M \otimes \mathbb{C}$, операция сопряжения, переводящая
$$\frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$$
корректно определена на $T_{\mathbb{C},p}M$ и, как нетрудно заметить, $T''_pM = \overline{T'_pM}$. Отсюда следует, что проекция
$$T_{\mathbb{R},p}M \to T_{\mathbb{C},p}M \to T'_pM$$
есть $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм.

Это обстоятельство позволяет заниматься геометрией исключительно в голоморфном касательном пространстве.

Пример 16. Пусть $z(t)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ — гладкая кривая. Тогда $z(t) = x(t) + iy(t)$ и в качестве касательной мы можем взять
$$x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y} \text{ в } T_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \text{ либо } z'(t)\frac{\partial}{\partial z} \text{ в } T'\mathbb{C}.$$

Определение 35. Пусть теперь M, N — комплексные многообразия, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — голомрфные координаты в окрестности точки $p \in M$, а $(w_1, \ldots, w_n)$ — голоморфные координаты в окрестности точки $q = f(p)$, где $f\colon M \to N$ — голоморфное отображение. В связи с различными понятиями касательных пространств, мы имеем и различные понятия *якобиана* f.

1. Пусть $z_j = x_j + iy_j,\ w_k = u_k + iv_k$. Тогда в базисах $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial v_k}\}$ пространств $T_{\mathbb{R},p}M$ и $T_{\mathbb{R},q}N$ линейное отображение f_* задаётся $2m \times 2n$-матрицей
$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} & \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j} & \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$
В базисах $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial w_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\}$ пространств $T_{\mathbb{C},p}M$ и $T_{\mathbb{C},q}N$ отображение f_* задаётся матрицей
$$\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(f) & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{J}(f)} \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}(f) = \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_j}\right)_{k,j}.$$

Замечание. В частности, отметим, что $\operatorname{rank} \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = 2 \operatorname{rank} \mathcal{J}(f)$ и в случае $m = n$
$$\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \det \mathcal{J}(f) \det \overline{\mathcal{J}(f)} = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \geq 0,$$
то есть голоморфные отображения **сохраняют ориентацию**.

Мы будем считать, что пространство $\mathbb{C}^n$ естественно ориентированно $2n$-формой
$$\left(\frac{i}{2}\right)^n (\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1}) \wedge (\mathrm{d}z_2 \wedge \mathrm{d}\overline{z_2}) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z_n}) = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}y_n.$$

Ясно, что если $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ и $\varphi_\beta\colon U_\beta \to \mathbb{C}^n$ — голоморфные координатные отображения на комплексном многообразии M, то прообразы при φ_α и φ_β естественной ориентации на $\mathbb{C}^n$ согласованы на $U_\alpha \cap U_\beta$.

Соотвественно, любое комплексное многообразие **имеет естественную ориентацию**, которая сохраняется при голоморфных отображениях.

4.2 Векторные рассоления

Определение 36. Пусть M — гладкое многообразие. Комплексным C^∞-расслоением на M называется семейство $\{E_X\}_{x\in M}$ комплексных векторных пространств E_x, параметризованных точками многообразия M, со структурой C^∞ многообразия на

$$E = \bigcup_{x\in M} E_x$$

такой, что выполняются следующие условия:

1. отображение проектирования $\pi\colon E \to M$, переводящее E_x в x принадлежит классу C^∞.
2. $\forall x_0 \in M$ найдутся открытое множество $U \subset M : U \ni x_0$ и диффеоморфизм

$$\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k,$$

   который отображает вектоорное пространство E_x изоморфно на $\{x\} \times \mathbb{C}^k$ для всех $x \in U$. Такое отображение φ_U называется *тривиализацей.*

Размерность слоёв E_x расслоения E называется *рангом* E. Расслоение ранга 1 называется *линейным.*

Замечание. Для любой пары тривиализаций φ_U, φ_V *отображение* перехода $g_{uv}(x) = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})|_{\{x\}\times\mathbb{C}^k\}}\colon U \cap V \to \mathrm{GL}(k)$ принадлежит классу C^∞. Кроме того, они удовлетворяют тождествам:

$$g_{UV}(x) \cdot g_{VU}(x) = I \quad \forall x \in U \cap V$$

$$g_{UV}(x) g_{VW}(X) \cdot g_{WU}(x) = I \quad \forall x \in U \cap V \cap W$$

Обратно, если задано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ многообразия M и C^∞ отображения $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k)$, удовлетворяющие тождествам выше, то найдётся единснвтенное комплексное векторное расслоение $E \to M$ с такими функциями перехода.

Действительно, мы можем положить $E = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times C^k)$, в котором мы отождествляем точки $(x, \lambda) \in U_\beta \times \mathbb{C}^k$ и $(x, \lambda g_{\alpha\beta}(x))$, а структура многообразия на E определяется вложениями $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \to E$.

Обычно операции над векторными пространствами переносятся и на векторные расслоения:

- Если $E \to M$ — векторное расслоение, то можно определить двойственное раслоение $E^* \to M$, взяв в качесвте слоёв $E_x^* \overset{\mathrm{def}}{=} (E_x)^*$. Тривиализации $\varphi_u\colon E_U \to U \times \mathbb{C}^k$ (где $E_u = \pi^{-1}(U)$) индуцируют отображения

$$\varphi_U^*\colon E_U^* \to U \times (\mathbb{C}^k)^* \cong U \times \mathbb{C}^k,$$

  которые наделяют E^* структурой многообразия. Эту конструкцию проще получить при помощи функций перехода: $E^* \to M$ будет векторным расслоением с функциями перехода $j_{\alpha\beta}(x) =^i g_{\alpha\beta}(x)^{-1}$.
- Пусть $E \to M$ и $F \to M$ — комплексные векторные расслоения рангов k и ℓ с функциями перехода $\{g_{\alpha\beta}\}$ и $\{h_{\alpha\beta}\}$. Тогда мы можем определить $E \oplus F$, как векторное расслоение, заданное функциями перехода

$$j_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^\ell).$$

- Также мы можем определить расслоение $E \otimes F$, как расслоение, заданное функциями перехода

$$j_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{GL}\Big(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^\ell\Big).$$

- Аналогично, $\Lambda^r E$ — векторное расслоение, заданное формулами

$$j_{\alpha\beta} = \Lambda^r(g_{\alpha\beta}(x)) \in \mathrm{GL}\Big(\Lambda^r \mathbb{C}^k\Big).$$

  В частности, $\Lambda^k E$ будет линейным расслоением с функциями перехода

$$j_{\alpha\beta}(x) = \det g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*.$$

Для векторных расслоений можно также определить подрасслоения и прообразы.[12]

Определение 37. Веторные расслоения $E \to M$ и $F \to M$ *изоморфны*, если существует отображение $f\colon E \to F$ такое, что $f_x\colon E_x \to F_x$ — изоморфизмы $\forall x \in M$.

Векторное расслоение $E \to M$ называется *тривиальным*, если оно изоморфно $M \times \mathbb{C}^k$.

Сечением σ векторного расслоения $E \xrightarrow{\pi} M$ над $U \subset M$ называется C^∞ отображение

$$\sigma\colon U \to E\colon \sigma(x) \in E_x \ \forall x \in U.$$

Репером для E над $U \subset M$ называется набор $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ сечений E над U таких, что $(\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x))$ является базисом пространства $E_x \ \forall x \in U$.

Репер для E над U, по существу, то же самое, что тривиализация расслоения E над U: при заданной тривиализации $\varphi_U\colon E_U \to U \times \mathbb{C}^k$, то сечения $\sigma_i(x) = \varphi_U^{-1}(x, e_i)$ образуют базис. И обратно, если задан репер $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, то можно определить тривиализацию $\varphi_U(\lambda) = (x, (\lambda_1, \dots, \lambda_k))$ для $\lambda = \sum \lambda_i \sigma_i(x)$ в E_x.

Заметим, что при заданной тривиализации φ_U расслоения E над U любое его сечение σ можно единственным образом представить, как векторзначную C^∞-функцию $f = (f_1, \dots, f_k)$, раскладывая $\sigma(x)$ по базису:

$$\sigma(x) = \sum f_i(x) \sigma_U^{-1}(x, e_i).$$

Если же φ_V — тривиализация расслоения E над V и $f' = (f_1', \dots, f_k')$ — соотвествуующие представления $\sigma|_{U \cap V}$, то

$$\sum f_i(x) \varphi_U^{-1}(x, e_i) = \sum f_i'(x) \varphi_V^{-1}(x, e_i),$$

так что

$$\sum f_i(x) e_i = \sum f_i'(x) \varphi_U \varphi_V^{-1}(x, e_i) \implies f = g_{UV} f'.$$

Таким образом, при заданных тривиализациях

$$\{\varphi_\alpha\colon E_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$$

сечения расслоения E над $\bigcup U_\alpha$ в точности соотвествуют наборам

$$\{f_\alpha = (f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_k})\}_\alpha$$

векторзначных C^∞ функций, удовлетворяющих $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$.

Пример 17 (Векторные расслоения)**.** Рассмотрим некоторые базовые примеры векторных расслоений:

1. **Касательные и кокасательные расслоения:**
   Комплексным касательным расслоением к комплексному многообразию M мы будем называть

   $$TM = \bigsqcup_{z \in M} T_Z M, \text{ где}$$

   $T_z M$ — комплексное касательное пространство к M в точке x. В расслоении TM есть подрасслоения $T'M$ и $T''M$ определяющиеся естественным образом.
2. **Дифференциальные формы:**

   Определение 38. *Дифференциальной формой* степени k называется сечение расслоения $\Lambda^k(TM)^*$. Расслоение комплексных дифференциальных форма степени k мы будет обозначать $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M)$ или $\Omega^k_{\mathbb{C},M}$.
   Пусть M — вещественное многообразие. Тогда легко видеть, что если $f \in C^{k-1}(M)$, то $\mathrm{d}f$ — C^{k-1}-гладкое сечение расслоения $\Omega^1_{\mathbb{R}}(M)$. Кроме того, нетрудно видеть, что если $x_1, \dots, x_n$ — локальные координаты в карте $U \subset M$, то k-формы $\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, $1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n$ образуют базис слоя $\Omega^k_{\mathbb{R}}(X)$ в каждой точке отркытого множества U. В самом деле, локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ задают локальную тривиализацию каательного расслоения TM: соотвествующий локальный базис в слое задаётся в каждой точке дифференцированиями $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$. Тогда 1-формы $\mathrm{d}x_i$ образуют двойственный базис в расслоении $\Omega^1_{\mathbb{R}}(X)$.

[12] но делать этого мы пока что не будем.

4.3 Подмногообразия и аналитические подмножества

Докажем теперь несколько классических теорем для случая комплексных многообразий.

Теорема 31 (Об обратном отображении). *Пусть U, V — открытые подмножества в $\mathbb{C}^n$, $0 \in U$ и $f\colon U \to V$ — такое голоморфное отображение, что матрица $\mathcal{J}(f) = (\partial f_i/\partial z_j)$ невырождена в 0.*

Тогда отображение f взаимно однозначно в окрестности точки 0 и обратное отображение f^{-1} голоморфно в некоторой окрестности $f(0)$.

Доказательство. Как мы уже отмечали в 4.1, $|\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f)| = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \neq 0$ в точке 0, а значит, по обычной теореме об обратном отображении, функция f имеет в окрестности точки 0 обратную $C^\infty(U, V)$ функцию f^{-1}. Заметим, что $f^{-1}(f(z)) = z$, так что, дифференцируя это равенство в нуле мы имеем

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(f^{-1}(f(z)))_j = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial z_k}\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z_i}} + \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \overline{z_k}}\left(\frac{\partial \overline{f_k}}{\partial \overline{z_i}}\right) = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \overline{z_k}}\left(\frac{\partial \overline{f_k}}{\partial z_i}\right) \quad \forall i, j.$$

Так как матрица $(\partial f_k/\partial z_j)$ была невырождена, отсюда следует, что $\partial f_j^{-1}/\partial \overline{z_k} = 0\ \forall j, k$, что и означает голоморфность функции f. □

Теорема 32 (О неявной функции). *Пусть заданы функции $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}_n$, удовлетворяющие условию*

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)_{1\le i,\, j\le k} \neq 0.$$

Тогда существуют такие функции $w_1, \ldots, w_k \in \mathcal{O}_{n-k}$, что в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$

$$f_1(z) = \ldots f_k(z) = 0 \Leftrightarrow z_i = w_i(z_{k+1}, \ldots, z_n),\ 1 \le i \le k.$$

Доказательство. Как обычно, по обычной теореме о неявной функции в случае C^∞ существуют функции $\omega_1, \ldots, \omega_k$ с нужным свойством. Остается показать голоморфность. Это делается непосредственно вот таким стандартным вычислением вычислением:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z_\alpha}}(f_j(\omega(z), z)) = \ldots = \sum \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \overline{z_\alpha}}\frac{\partial f_j}{\partial \omega_\ell} \Rightarrow \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \overline{z_\alpha}} = 0\ \forall \alpha, \ell,$$

□

Замечание. Видимо почти всегда, когда мы хотим показать голоморфность, мы тупо считаем в локальных производных антиголоморфную производную.

Теперь мы увидим, что комлексные многообразия в смысле их морфизмов таки имеют свою, отличную от вещественной, специфику:

Утверждение 15. *Если $f\colon U \to V$ — взаимно однозначное голоморфное отображение открытых множеств в $\mathbb{C}^n$, то $\det \mathcal{J}(f) \neq 0$, то есть f^{-1} голоморфно.*

Замечание. Мы видели этот факт в обычном комплексном анализе (доказывали, что производная однолистной функции не обнуляется).

Определение 39. *Комплексным подмногообразием* S комплексного многообразия M называется подмножество $S \subset M$, которое локально задается либо как множество нулей совокупности голоморфных функций $f_1, \ldots f_k$ с условием $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = k$, либо как образ открытого подмножества $U \subset \mathbb{C}^{n-k}$ при отображении $f\colon U \to M$ с условием $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = n - k$.

Эквивалентность этих определений следует из теоремы о неявной функции 32.

Определение 40. Аналитическим подмножеством V комплексного многообразия M называется подмножество, являющееся локально множеством нулей конечного набора голоморфных функций.

Точка $p \in V$ называется *гладкой*[13] точкой V, если V в некоторой её окрестности задаётся набором голоморфных функций $f_1, \dots, f_k$, причем таким, что $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = k$.

Множество гладких точек V обозначается V^*, а все точки из $V \setminus V^*$ называются *особыми.* Они формируют *множество особенностей* аналитического подмножества V, которое мы будем обозначать, как V_s.

В частности, если p — точка аналитической гиперповерхности $V \subset M$, задаваемой в локальных координатах z функцией f, определим *кратность* $\operatorname{mult}_p(V)$, как порядок обращения f в нуль в точке p, то есть наибольшее такое m, что

$$\frac{\partial^k f}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = 0 \; \forall k \leq m-1.$$

Утверждение 16. *Множество V_s содержится в аналитическом подмножестве многообразия M, не совпадающем с V.*

Замечание. А на самом деле, при аккуратном выборе функций, несложно показать, что V_s — аналитическое подмножество в M.

Запомним также полезный нам в будущем факт:

Утверждение 17. *Аналитическое множество V неприводимо тогда и только тогда, когда V^* связно.*

Тут было еще что-то про касательные конусы, пока что забьем на это, лень читать.

4.4 Когомологии де Рама и Дольбо

Пусть M — гладкое многообразие. Обозначим за $A^p(M;\mathbb{R})$ пространство дифференциальных форм степени p на M, а через $Z^p(M;\mathbb{R})$ подпространство замкнутых p-форм.

Так как $d^2 = 0$, у нас есть (ко)цепной комплекс

$$A^0(M;\mathbb{R}) \to \dots \to A^p(M;\mathbb{R}) \to A^{p+1}(M;\mathbb{R}) \to \dots$$

а его группы когомологий называются группами *когомологий де Рама* многообразия M.

Иными словами, группы когомологий де Рама — это факторгруппы замкнутых форм по модулю точных

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M;\mathbb{R}) = Z^p(M;\mathbb{R})/dA^{p-1}(M).$$

Совершенно также мы можем рассматривать комплекснозначные формы и давать все соотвествующие определения (используя обозначения $A^p(M)$ и аналогичные, то есть без коэффициентов):

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) = Z^p(M)/dA^{p-1}(M)$$

Замечание. Нетрудно заметить, что как и всегда с коэффициентами,

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) = H^p_{\mathrm{DR}}(M;\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}.$$

Как мы заметили в самом первом параграфе, комплексифицированное кокасательное пространство раскладывается в голоморфную и антиголоморфную часть:

$$T^*_{\mathbb{C},z}M = T^{*'}_z M \oplus T^{*''}_z M,$$

что дает нам разложение

$$\Lambda^n T^*_{\mathbb{C},z}M = \bigoplus_{p+q=n} \left(\Lambda^p T^{*'}_z(M) \otimes \Lambda^q T^{*''}_z(M)\right),$$

а это (по определению внешних форм) даёт нам

$$A^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M), \text{ где}$$

[13] возможно, корректнее использовать слово регулярная?

$$A^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^n(M) \mid \varphi(z) \in \Lambda^p T_z^{*\prime}(M) \otimes \Lambda^q T_z^{*\prime\prime}(M)\ \forall z \in M\}.$$

Соотвественно, форму $\varphi \in A^{p,q}$ называют формой типа (p,q). Обозначим за $\pi^{(p,q)}$ проекцию

$$A^*(M) \to A^{p,q}(M),$$

так что для $\varphi \in A^*(M)$ имеем $\varphi = \sum \pi^{(p,q)}\varphi$.

Если $\varphi A^{p,q}(M)$, то для любого $z \in M$

$$\mathrm{d}\varphi(z) \in \left(\Lambda^p T_z^{*\prime} M \otimes \Lambda^q T_z^{*\prime\prime} M\right) \wedge T^*_{\mathbb{C},z} M,$$

$$\mathrm{d}\varphi \in A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M).$$

Определоим теперь для этих замечательных дифференциальных форма операторы

$$\overline{\partial}\colon A^{p,q}(M) \to A^{p,q+1}, \quad \partial\colon A^{p,q}(M) \to A^{p+1,q}(M)$$

$$\overline{\partial} = \pi^{(p,q+1)} \circ \mathrm{d}, \quad \partial = \pi^{(p+1,q)} \circ \mathrm{d}, \text{ то есть } d = \partial + \overline{\partial}.$$

В локальных координатах $z = (z_1, \ldots, z_n)$ форма $\varphi \in A^n(M)$ имеет тип (p,q), если она имеет представление в виде

$$\varphi(z) = \sum_{I,J} \varphi_{I,J}(z) \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$$

Замечание. Короче говоря, вся эта страшная белиберда была, чтоб сказать, что бывают не только голоморфные дифференциальные формы, но и такие, где один кусок голоморфный, а другой антиголоморфный.

Дифференцировать эти формы можно вполне естественным образом:

$$\overline{\partial}\varphi(z) = \sum_{I,J,j} \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \varphi_{IJ}(z) \mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J, \quad \partial\varphi(z) = \sum_{I,J,i} \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \varphi_{IJ}(z) \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J.$$

В частности, форма типа $(q,0)$ называется *голоморфной*, если $\overline{\partial}\varphi = 0$. Ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\varphi(z) = \sum_{I\colon |I|=q} \varphi_I(z) \mathrm{d}z_I, \text{ где}$$

функции $\varphi_I(z)$ голоморфны.

Отметим, что поскольку разложение $T^*_{\mathbb{C},z} = T_z^{*\prime} \oplus T_z^{*\prime\prime}$ сохраняется при голоморфных отображениях, тоже самое будет верно и для $A^\bullet = \bigoplus_{(p,q)} A^{(p,q)}$. Действительно, если $f\colon M \to N$ — голоморфное отображение комплексных многообразий, то $f^*(A^{p,q}(N)) \subset A^{p,q}(M)$ и $\overline{\partial} \circ f^* = f^* \circ \overline{\partial}$.

Пусть $Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$ — пространство ∂-замкнутых форм типа (p,q). Тогда, так как

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z_i} \partial \overline{z_j}} = \frac{\partial^2}{\partial \overline{z_j} \partial \overline{z_i}}$$

мы будем иметь $\overline{\partial}^2 = 0$ на $A^{(p,q)}$, откуда мы получим

$$\overline{\partial}(A^{p,q}(M)) \subset Z^{p,q+1}_{\overline{\partial}}(M),$$

что позволяет определить *группы когомологий Дольбо* как

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) = Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) / \overline{\partial}\big(A^{p,q-1}(M)\big)$$

Теорема 33 ($\overline{\partial}$-лемма Пуанкаре)**.** *Для полидиска $\Delta = \Delta(r) \subset \mathbb{C}^n$ имеет место равенство*

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\Delta) = 0, q \geq 1.$$

Доказательство. Какое-то очень уж неприятное. Лучше сначала узнать, как обычная лемма Пуанкаре про то, что в односвязной области замкнутая форма точна, доказыватся. ☐

4.5 Пучки и когомологии

Определение 41. Пусть X — топологическое пространство. *Пучок* $\mathcal{F}$ на X сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ группу (или кольцо) $\mathcal{F}(U)$ (которое мы будем называть группой *сечений* $\mathcal{F}$ над U) и каждой паре $U \subset V$ открытых подмножеств X гомоморфизм $r_{VU} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$[14], называемый *гомоморфизмом ограничения*, причём так, что

1. Для любой тройки $U \subset V \subset W$ открытых множеств выполняется
$$r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}.$$
В силу этого соотношения по аналогии с ограничениями функций принято писать $r_{WU}(\sigma) = \sigma|_U$ (в общем r_{WU} — гомомрфизм сужения с V на U).
2. $r_{UU} = \mathrm{id},\ \mathcal{F}(\varnothing) = 0$.
3. Для любой пары открытых множеств $U, V \subset M$ и сечений $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, $\tau \in \mathcal{F}(V)$, таких что $\sigma|_{U\cap V} = \tau|_{U\cap V}$ найдётся такое сечение $\rho \in \mathcal{F}(U \cup V)$, что
$$\rho|_U = \sigma, \quad \rho|_V = \tau.$$
4. Если $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$ и $\sigma|_U = \sigma|_V = 0$, то $\sigma = 0$.

Очень хорошие пучки, которые мы будем часто встречать:

1.

[14] тут буква r от слова *restriction*.