

## Содержание

<b>1. Основы теории гомологий</b>	<b>1</b>
1.1 Симплициальные гомологии	1
1.2 Сигнулярные гомологии	3
1.3 Немного гомологической алгебры	5
1.4 Гомотопическая инвариантность гомологий	6
1.5 Относительные гомологии и гомологически точная последовательность пары	7
1.6 Пары Боруска	9
1.7 Относительные гомологии как абсолютные (факторизация)	10
1.8 Вырезание	13
1.9 Точная последовательность Майера-Вьеториса	14
1.10 Гомологии сфер	14
1.11 Гомологии букета и надстройки	15
1.12 Гомологии с коэффициентами	16
1.13 Приложения теории гомологий	16
1.14 Симплициальные комплексы	17
1.15 Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий	17
1.16 Степень отображения	19
1.17 Клеточные гомологии	20
1.18 Гомологии поверхностей	23
1.19 Пространства Мура	24
1.20 Теорема о вложении дисков и сфер	24
1.21 Когомологии	25
1.22 Формула универсальных коэффициентов для когомологий	26
1.23 Умножение в когомологиях	28
<b>2. Комплексные многообразия</b>	<b>30</b>
2.1 Комплексные многообразия	30
2.2 Подмногообразия и аналитические подмножества	32
2.3 Когомологии де Рама и Дольбо	33

## 1. Основы теории гомологий

### 1.1 Симплициальные гомологии

**Определение 1.** Цепным комплексом абелевых групп  $(C_\bullet, \partial)$  называется последовательность абелевых групп и морфизмов вида

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} \dots, \quad \text{где } C_i \text{ — абелевы группы}$$

при условии  $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ . Если комплекс обрывается с одной из сторон, то мы считаем, что он дополнен нулями.

Элементы группы  $C_q$  называют  $q$ -мерными цепями, а отображение  $\partial$  называют (граничным) дифференциалом.

*Замечание.* Ясно, что условие  $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$  равносильно тому, что  $\text{Ker } \partial_q \supset \text{Im } \partial_{q+1}$ .

*Замечание.* Когда комплекс снабжают отображением  $C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ , это отображение называют *аугументацией*.

**Определение 2.** Гомологиями комплекса  $(C_\bullet, \partial)$  называют абелевы группы

$$H_q(C_\bullet, \partial) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \partial_q / \text{Im } \partial_{q+1}.$$

Если комплекс снабжен аугументацией и обрывается на нулевом члене, то у него также есть *приведённые гомологии*

$$H_0(C_\bullet, \partial) = C_0 / \text{Im } \partial_1, \quad \widetilde{H}_0(C_\bullet, \partial) = \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1, \quad \widetilde{H}_q = H_q \quad \forall q > 0,$$

которые отличаются от обычных только в нулевом члене.

Перед тем как что-то строго определять, посмотрим нестрого на какие-то мотивирующие примеры вычислений. Для этого лучше всего подойдут *симплициальные гомологии*. Неформально, идея состоит в том, что мы разбиваем топологическое пространство  $X$  на симплексы всех размерностей и говорим, что  $C_q(X, \mathbb{Z})$  — свободная абелева группа, порожденная всеми  $q$ -мерными симплексами (то есть, мы рассматриваем целочисленные формальные линейные комбинации симплексов). Дифференциалом  $\partial$  будет оператор взятия границы (топологической).

**Пример 1** (Симплициальные гомологии отрезка (нестрого)). Пусть  $X$  — отрезок  $[a, b]$  с ориентацией из  $b$  в  $a$ . В нём две нульмерные клетки, значит  $C_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ , одномерная клетка одна — ребро  $e$ , то есть  $C_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  и комплекс устроен следующим образом:

$$\dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z},$$

так как мы можем определить аугументацию следующим образом:  $x \in C_0 \Rightarrow x = k_1 a + k_2 b$ , положим  $\varepsilon(x) = k_1 + k_2$ . То есть, на самом деле комплекс выглядит вот так:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[e \rightarrow \partial e = a - b]{} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow[a \rightarrow 1, b \rightarrow 1]{} \mathbb{Z}.$$

Заметим, что  $\varepsilon \circ \partial = 0$ .

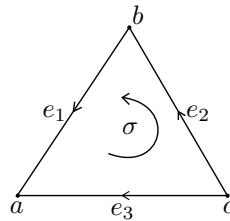
Гомологиями топологического пространства называют гомологии построенного по нему комплекса. В нашем случае

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = 0/0 = 0.$$

$$\widetilde{H}_0(X, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \varepsilon / \text{Im } \partial_1 = \langle a - b \rangle / \langle a - b \rangle = 0.$$

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) / \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle / \langle a - b \rangle = \langle a \rangle = \mathbb{Z}$$

**Пример 2** (Симплициальные гомологии треугольника). Рассмотрим треугольник  $(abc)$  с внутренностью  $\sigma$ , ориентированной против часовой стрелки, и рёбрами  $b \xrightarrow{e_1} a$ ,  $c \xrightarrow{e_3} a$ ,  $c \xrightarrow{e_2} b$ .



Тогда цепной комплекс, построенный по треугольнику будет устроен следующим образом:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[\sigma \rightarrow e_1 + e_2 - e_3]{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Из ориентации  $\sigma$  ясно, что  $\partial \sigma = e_1 + e_2 - e_3$ ,  $\partial e_1 = b - c$ ,  $\partial e_2 = a - b$ ,  $\partial e_3 = a - c$ . Ясно, что вторые гомологии нулевые:

$$H_2(X, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_2 / 0 = 0$$

Посчитаем теперь первые.

$$\begin{aligned} \partial(k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3) &= k_1(b - c) + k_2(a - b) + k_3(a - c) = a(k_2 + k_3) + b(k_1 - k_2) + c(-k_1 - k_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Ker } \partial_1 = \langle (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid k_1 = k_2 = -k_3 \rangle \end{aligned}$$

С другой стороны,  $\text{Im } \partial_2 = k(e_1 + e_2 - e_3)$ . Тем самым,  $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ . Аналогичным вычислением мы получаем, что  $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

**Пример 3** (Спмилициальные гомологии треугольника без внутренности). Пусть теперь всё также, как в примере 2, но у треугольника нет внутренности. Тогда цепной комплекс будет иметь вид

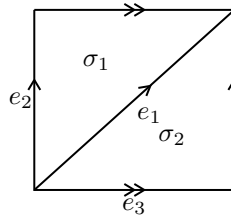
$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$$

Из того, как поменялись отображения, ясно, что поменялись только первые гомологии. Теперь  $H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$ , а образующая — это цикл  $e_1 + e_2 - e_3$ . С другой стороны,  $\pi_1(\Delta) = \mathbb{Z}$ .

*Замечание.* Когда-нибудь позже мы докажем, что для любого симплициального пространства  $X$  есть отображение

$$\pi_1(X) \rightarrow H_1(X) = \pi_1(X)^{ab} = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

**Пример 4** (Симплициальные гомологии тора  $\mathbb{T}^2$ ). Рассмотрим двумерный тор  $\mathbb{T}^2$ , разбитый на симплексы следующим образом:



Из такой триангуляции ясно, что комплекс будет иметь вид:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Посчитаем дифференциал на двумерных клетках:  $\partial\sigma_1 = e_1 - e_3 - e_2$ ,  $\partial\sigma_2 = e_2 + e_3 - e_1$ . С другой стороны, ясно, что дифференциал зануляется на любой одномерной клетке,  $\partial e_i = a - a = 0$ .

$$H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_2 / 0 = \mathbb{Z}.$$

так как  $\partial\sigma_1 = -\partial\sigma_2 \Rightarrow \text{Ker } \partial_2 = \mathbb{Z}$ .

Также прямыми вычислениями можно убедиться, что  $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2)^{ab}$ . Образующими первых гомологий будут  $e_2$  и  $e_3$ .

**Упражнения.**

1. Посчитать по определению одномерные гомологии связного дерева.
2. Посчитать по определению все гомологии  $n$ -мерного симплекса  $T^n$

$$T^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (t_0, \dots, t_n) \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}.$$

3. Покажите, что барицентрическое подразбиение не меняет симплициальных гомологий.

Вообще говоря, далее нужно формально доказывать, что гомологии не зависят от симплициального разбиения пространства (и выяснять, у каких пространств это симплициальное разбиение вообще есть), но мы этим всем заниматься не будем, так как в нашем курсе основной будет другая теория.

## 1.2 Сигнулярные гомологии

**Определение 3.** Пусть  $X$  — топологическое пространство.

- Сигнулярным  $q$ -мерным симплексом мы будем называть непрерывное отображение  $f: T^q \rightarrow X$ .
- Его граница определяется, как формальная линейная комбинация

$$\partial f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^q (-1)^i \Gamma_i f,$$

где  $\Gamma_i f$  — сужение  $f$  на грань  $t_i = 0$  (сумма именно такая, так как у  $q$ -мерного симплекса  $q + 1$  грань).

- Сигнулярными  $q$ -мерными цепями  $C_q(X, \mathbb{Z})$  мы будем называть формальные целочисленные линейные комбинации конечного числа  $q$ -мерных сигнулярных симплексов (то есть порожденную ими свободную абелеву группу).
- Дифференциал комплекса<sup>1</sup>  $C_\bullet$  определяется, как продолжение по линейности оператора взятия границы  $q$ -мерного сигнулярного симплекса.
- Комплекс сигнулярных цепей может быть снабжен аугументацией  $\varepsilon: C_0 \rightarrow \mathbb{Z}, \sum k_i f_i \rightarrow \sum k_i$ .

*Замечание.* Формально говоря, мы пока не знаем, что комплекс из сигнулярных цепей — это комплекс. Для этого нам понадобится следующая техническая

**Лемма 1.** В контексте определения  $\partial^2 = 0$ .

*Доказательство.* Посчитаем  $\partial\partial f$ :

$$\partial\partial f = \partial \left( \sum_i (-1)^i \Gamma_i f \right) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \Gamma_j \Gamma_i f.$$

Ясно, что любую грань коразмерности 2 можно получить взятием границы двумя способами. Действительно, если  $j < i$ , то  $\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_j \Gamma_{i+1}$  ( $i$ -я из оставшихся после выкидывания  $j$ -й координаты —  $i+1$ -я изначально), а в сумме слагаемые  $\Gamma_i \Gamma_j$  и  $\Gamma_j \Gamma_{i+1}$  будут с разным знаком, значит  $\partial\partial f = 0$ .  $\square$

**Определение 4.** Сигнулярными гомологиями топологического пространства  $X$  называются гомологии комплекса сигнулярных цепей. Мы будем обозначать их, как  $H_k(X)$  или  $H_k^{\text{sing}}(X)$ .

В топологическом контексте группу  $Z_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \partial_q$  часто называют  $q$ -циклами<sup>2</sup>, а группу  $B_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im } \partial_{q+1}$  —  $q$ -границами. В этом смысле  $H_q(X)$  — циклы с точностью до границ.

*Замечание.* Из определения очевидно, что сигнулярные гомологии зависят только от класса гомеоморфизма пространства  $X$  (их основной плюс и состоит в том, что тут это очевидно).

Теперь попробем посчитать по определению сигнулярные гомологии для какого-нибудь пространства. Оказывается, что по определению сделать это возможно разве что для точки.

**Теорема 1** (Сигнулярные гомологии точки).

$$H_q^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0, H_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \tilde{H}_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Итак, как мы помним,  $C_q(*)$  — все линейные комбинации отображений  $f: T^q \rightarrow *$ . Так как отображений из  $T^n$  в точку всего одно,  $\forall n C_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , а значит, наш комплекс сигнулярных цепей  $(C_\bullet(*, \mathbb{Z}), \partial)$  будет иметь вид:

$$\dots \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}.$$

Теперь посчитаем дифференциалы комплекса.

Возьмем  $f \in C_1$ , это какая-то формальная линейная комбинация отображений из  $[a, b] \rightarrow \{*\}$ . Тогда  $\partial f$  — это  $f|_a - f|_b = 0$ . Впрочем, и сразу ясно, что в случае любого  $n$ , так как наше отображение действует в точку (оно постоянно), сужения на все грани будут совпадать и результат в сумме будет зависеть лишь от четности  $n$ , то есть дифференциалы комплекса будут иметь вид:

$$\dots \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \dots \xrightarrow{\cdot 1 = \text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Иными словами,  $\partial_n = 0$ , если  $n$  — нечетное и тождественно иначе. Теперь, как нетрудно заметить,

$$\forall q > 0 \quad \text{Ker } \partial_q = \text{Im } \partial_{q+1} \Rightarrow H_q^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0, H_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \tilde{H}_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Трудности, возникшие при подсчетах, намекают на то, что для отрезка, например, это будет сделать еще гораздо труднее. С другой стороны, если вдруг окажется, что гомологии гомотопически инвариантны, то мы будем знать, какие гомологии у всех стягиваемых пространств (так как для точки мы посчитали).

В дальнейшем, будем использовать для сигнулярных гомологий обозначение  $H_k$ .

<sup>1</sup>формально, мы пока еще не знаем, что это комплекс.

<sup>2</sup>позже мы увидим, какая в этом геометрическая интуиция

### 1.3 Немного гомологической алгебры

Рассмотрим категорию цепных комплексов  $\mathcal{Ch}$  (в нашем случае абелевых групп, но в принципе, всё что тут будет сказано справедливо и в случае  $R - \mathcal{Mod}$ ). Морфизмом цепных комплексов  $(C_\bullet, \partial)$  и  $(D_\bullet, \delta)$  называется набор отображений  $f = \{f_i\}$ , где  $f_i \in \text{Hom}(C_i, D_i)$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots \\ \downarrow & & \downarrow f_{q+1} & & \downarrow f_q & & \downarrow f_{q-1} \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{q+2}} & D_{q+1} & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\delta_q} & D_{q-1} \xrightarrow{\delta_{q-1}} \dots \end{array}$$

коммутативна, то есть  $\forall i \ f_i \circ \partial_{i+1} = \delta_{i+1} \circ f_{i+1}$ .

**Лемма 2.** Сопоставление цепному комплексу его  $k$ -й группы гомологий функториально, то есть отображение

$$(C_\bullet, \partial) \mapsto H_k(C_\bullet, \delta)$$

задаёт ковариантный функтор  $\mathcal{Ch} \rightarrow \mathcal{Ab}$ .

*Доказательство.* Всё, кроме того, что композиция переходит в композицию — совсем очевидно. Нам надо проверить, что отображение  $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta)$  индуцирует отображение  $H_k(C_\bullet) \rightarrow H_k(D_\bullet)$ , и кроме того,

$$(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta) \xrightarrow{g} (E_\bullet, d) \Rightarrow H_k(f \circ g) = H_k(f) \circ H_k(g).$$

Заметим, что так как  $f \in \text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$ ,  $f_q(\text{Ker } \partial_q) \subset \text{Ker } \delta_q$ . Действительно, если  $\partial_q(x) = 0$ , то  $0 = f_{q-1}(\partial_q(x)) = \delta_q(f_q(x)) \Rightarrow f_q(x) \in \text{Ker } \delta_q$ . Аналогично  $f_{q-1}(\text{Im } \partial_q) \subset \text{Im } \delta_q$ . Действительно, если  $x = \partial_q(y)$ , то

$$f_{q-1}(x) = f_{q-1} \circ \partial_q(y) = \delta_q(f_q(y)) \in \text{Im } \delta_q.$$

Тогда нужная нам стрелка получается просто из универсального свойства факторгруппы:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \partial_q & \xrightarrow{f_q} & \text{Ker } \delta_q & \xrightarrow{\pi} & H_q(D_\bullet) \\ & \searrow \rho & & \nearrow f_* & \\ & & H_q(C_\bullet) & & \end{array}$$

Действительно, чтоб она существовала, нам нужно, чтоб  $\text{Im } \partial_{q+1} \subset \text{Ker}(\pi \circ f_q)$ . Возьмем  $x \in \text{Im } \partial_{q+1}$ , тогда  $f_q(x) \in \text{Im } \delta_{q+1} \Rightarrow f_q(x) \in \text{Ker } \pi$ , то есть  $x \in \text{Ker}(\pi \circ f_q)$ .

Проверка того, что композиция переходит в композицию тривиальна.  $\square$

*Замечание.* Пусть  $X, Y \in \mathcal{Top}$ ,  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм цепных комплексов  $f: C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ . Действительно, пусть  $g \in C_k(X)$ , тогда  $g$  — это непрерывное отображение  $T_k \rightarrow X$  и тогда  $f \circ g$  — непрерывное отображение  $T_k \rightarrow Y$ , то есть элемент  $C_k(Y)$ . Остается проверить, что полученное отображение будет коммутировать с дифференциалом.

$$\partial g = \sum_{i=0}^k (-1)^i \Gamma_i g.$$

Тогда остается заметить, что взятие грани коммутирует с применением отображения:

$$f(\partial g) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \Gamma_i f(g) = \partial(fg).$$

Значит, если у нас есть непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$ , то есть и индуцированный морфизм гомологий  $f_*: H_\bullet(X) \rightarrow H_\bullet(Y)$ .

**Утверждение 1.** Если  $f: X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм, то  $f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$  — изоморфизм (для всех  $k$ ).

*Доказательство.* Действительно, если  $f$  — гомеоморфизм, то все индуцированные отображения между цепями — изоморфизмы, а значит и все индуцированные отображения в гомологиях будут изоморфизмами.  $\square$

*Замечание.* Это утверждение говорит нам о том, что сингулярные гомологии определены для топологических пространств без всякой дополнительной структуры.

**Определение 5.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Тогда, если группа  $H_k(X)$  конечнопорождена, то

$$H_k(X) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \text{Tor}(H^k(X)).$$

Тогда число  $n$  (то есть, ранг свободной части) называют  $k$ -м числом Бетти  $b_n$ . Иными словами,  $b_k(X) = \text{rank}(H_k(X))$ .

## 1.4 Гомотопическая инвариантность гомологий

**Определение 6.** Пусть  $(C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta) \in \mathfrak{Ch}$  — два цепных комплекса. Их морфизмы  $f, g \in \text{Hom}_{\mathfrak{Ch}}((C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta))$  называются *гомотопными* ( $f \sim g$ ), если существует диагональный морфизм  $h: C_\bullet \rightarrow D_{\bullet+1}$  такой, что

$$h_{q-1}\partial_q + \delta_{q+1}h_q = f_q - g_q.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & \cdots \\ & \searrow h_{q+1} & \downarrow g_{q+1} & \searrow h_q & \downarrow g_q & \searrow h_{q-1} & \downarrow g_{q-1} & \searrow h_{q-2} & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta_{q+2}} & D_{q+1} & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\delta_q} & D_{q-1} & \xrightarrow{\delta_{q-1}} & \cdots \end{array}$$

Кратко это обычно записывают, как  $h\partial + \delta h = f - g$ .

Если в категории цепных комплексов  $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$  отождествить гомотопные морфизмы, получится *гомотопическая категория комплексов*, которую обычно обозначают  $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$  (или просто  $\mathfrak{K}$ ).

**Теорема 2.** Если морфизмы цепных комплексов гомотопны, то есть  $f \sim g$ , то индуцированные гомоморфизмы когомологий  $f_* = g_*$ . Тем самым, функторы гомологий  $H_k$  пропускаются через гомотопическую категорию.

*Доказательство.* Если  $x \in \text{Ker } \partial_q$ , то

$$f_q(x) - g_q(x) = \delta_{q+1}h_q(x) + \underbrace{h_{q-1}\partial_q(x)}_{=0} \in \text{Im } \delta_{q+1},$$

а значит в  $H_q(X)$  эти элементы равны.  $\square$

*Замечание.* Гомотопность морфизмов  $f$  и  $g$  можно определять, как  $\delta h \pm h\partial = f - g$ , так как при переходе к гомологиям второе слагаемое всё равно обнуляется.

**Теорема 3.** Пусть  $f, g: X \rightarrow Y$ ,  $f \sim g$ . Тогда  $f_* = g_*$ .

*Доказательство.* У нас есть цепные комплексы сингулярных цепей  $(C_\bullet(X), \partial)$  и  $(C_\bullet(Y), \partial)$ . Так как  $f \sim g$ , существует непрерывное отображение  $H: X \times I \rightarrow Y$ , а тогда  $\forall p: T_q \rightarrow X$  определено непрерывное отображение  $H(p(\cdot), \cdot): T_q \times I \rightarrow Y$ , причем  $H(p, 0) = f(p)$  и  $H(p, 1) = g(p)$ . Положим

$$h(p) = \text{сумма симплексов в разбиении призмы } T_q \times I \in C_{q+1}(Y).$$

Взглянув на картинку теперь нетрудно заметить, что

$$f(p) - h(p) = \text{граница всей призмы} - \text{боковые стенки} = \partial h(p) - h\partial(p)$$

Таким образом, мы получили, что индуцированные морфизмы цепных комплексов гомотопны, а значит, по теореме 2, индуцированные гомоморфизмы в гомологиях совпадают.  $\square$

**Упражнение.** Разбить  $T_q \times I$  на  $q + 1$ -мерные симплексы формально. А именно, пусть  $T_q \times \{0\} = a_0 \dots a_q$ . Пусть вершины  $T_q \times \{1\}$  — это  $a'_0, \dots, a'_q$ . Тогда предлагается брать вершины  $a_0 \dots a_k a'_k \dots a'_q$ .

**Следствие 1.** Пусть  $X$  — стягиваемое. Тогда  $\tilde{H}_\bullet(X, \mathbb{Z}) = 0$ , или, иными словами,  $\forall k > 0 \ H_k(X, \mathbb{Z}) = 0$ ,  $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

**Упражнение.** Придумайте пример нестягиваемого  $X$  с нулевыми приведёнными гомологиями.

**Лемма 3.** Если  $X$  — линейно связно, то  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Выберем в нашем пространстве некоторую фиксированную точку  $a$ , тогда

$$\left( \sum k_i f_i \right) = \left( \sum k_i \right) a \pmod{\text{Im } \partial_1}, \text{ (то есть, в } H_0(X))$$

так как все  $f_i$  можно соединить путями (а это отображения  $T^1 = [0, 1] \rightarrow X$ ) с  $a$  и значит  $\text{Im } \partial_1$  будет содержать все разности  $f_i - a$ . Значит,  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Следствие 2.** Пусть у топологического пространства  $X$   $n$  компонент линейной связности. Тогда

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^n.$$

**Упражнение.** Држайте, что непрерывное отображение между линейно связными пространствами индуцирует изоморфизм нулевых гомологий.

## 1.5 Относительные гомологии и гомологически точная последовательность пары

Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A \subset X$ , тогда  $\forall q \ C_q(A) \subset C_q(X)$  (вложение индуцирует мономорфизм цепей) и мы имеем морфизм цепных комплексов  $(C_\bullet(X), \partial)$  и  $(C_\bullet(A), \partial)$ , то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_q(A) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow \text{in} & & \downarrow \text{in} & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Это так просто потому, что если у нас был симплекс  $f: T^q \rightarrow A$ , то его граница тоже целиком лежит в  $A$ , то есть  $\partial f: T^{q-1} \rightarrow A \in C_{q-1}(A)$ .

Глядя на это, возникает естественная идея дополнить до короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow C_q(A) \rightarrow C_q(X) \rightarrow C_q(X)/C_q(A) \rightarrow 0$$

в каждом столбце.

**Определение 7.** Факторгруппу  $C_q(X, A) \stackrel{\text{def}}{=} C_q(X)/C_q(A)$  называют *относительными цепями*.

Построим цепной комплекс для относительных цепей, для этого надо определить дифференциалы. Это делается стандартно, возьмем  $x \in C_q(A)$ , тогда  $\partial_q(x) \in C_{q-1}(A)$ , а значит композиция дифференциала и проекции пропустится через фактор:

$$\begin{array}{ccccc} C_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) & \xrightarrow{\pi_{q-1}} & C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A) \\ & \searrow \pi_q & & \swarrow \exists! \delta_q & \\ & & C_q(X)/C_q(A) & & \end{array}$$

Проверим теперь, что  $\delta^2 = 0$ . Действительно, из коммутативной диаграммы выше мы понимаем, что

$$\delta_q(\bar{x}) = \delta_q(\pi_q(x)) = \pi_{q-1}(\partial_q(x)) \Rightarrow \delta_{q-1}(\delta_q(\bar{x})) = \delta_{q-1}(\pi_{q-1}(\partial_q(x))) = \pi_{q-2}(\partial_{q-1}(\partial_q(x))) = 0.$$

Теперь мы построили цепной комплекс и можем определить относительные гомологии.

**Определение 8.** Пусть  $X \subset A$ , тогда относительными гомологиями мы будем называть гомологии комплекса относительных цепей, то есть

$$H_q(X, A) \stackrel{\text{def}}{=} \ker \delta_q / \text{Im } \delta_{q+1}.$$

Теперь, попробуем получить для гомологий аппарат, идеологически похожий на теорему Зейферта-Ван-Кампена.

Итак, мы имеем короткую точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow 0$$

В развёрнутом виде она представляет собой коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & C_{q+1}(A) & \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \longrightarrow & C_{q+1}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_q(A) & \longrightarrow & C_q(X) & \longrightarrow & C_q(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_{q-1}(A) & \longrightarrow & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & C_{q-1}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \end{array}$$

в которой строки точны, а столбцы — наши комплексы.

**Теорема 4** (Точная последовательность пары). Существует связывающий гомоморфизм  $\varphi: H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ , и соответственно, имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий:

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \xrightarrow{\varphi} H_{q-1}(A) \rightarrow H_{q-1}(X) \rightarrow \dots$$

*Доказательство.* На самом деле, это утверждение верно для любой точной последовательности комплексов. А именно, если последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$$

точна, то имеет место следующая длинная точность последовательность гомологий:

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(B) \rightarrow H_q(C) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow H_{q-1}(B) \rightarrow \dots$$

Это можно без труда вывести из леммы о змее, проверив точность строк<sup>3</sup>

□

**Упражнение.** Докажите, что для  $X \supset A \supset B$  имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий

$$\dots \rightarrow H_q(A, B) \rightarrow H_q(X, B) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

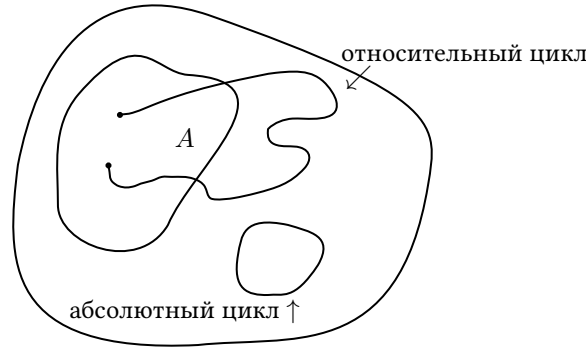
Посмотрим, что всё это означает геометрически. Относительные циклы — это элементы

$$\text{Ker}(C_q(X)/X_q(A) \rightarrow C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A)).$$

Мы взяли представителя в  $C_q(X)$ , взяли границу и после факторизации по  $C_{q-1}(A)$  получили 0, а значит граница нашего цикла полностью лежит в  $C_{q-1}(A)$ , то есть картинка имеет вид:

<sup>3</sup>а так как это делается в абсолютно любом курсе гомологической алгебры, мне лень это сюда писать.





С другой стороны, ясно, что  $x \in C_q(X)/C_q(A)$  — относительная граница, если  $x + a = \partial(\dots)$ .

*Замечание.* У связывающего гомоморфизма  $H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$  есть очень естественная интерпретация.

Элементы  $H_q(X, A)$  — относительные циклы с точностью до относительных границ. Так как это относительные  $q$ -мерные циклы, их граница лежит в  $A$ , а значит, при взятии границы, мы получим как раз элемент  $H_{q-1}(A)$ . То есть, связывающий гомоморфизм  $H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$  — взятие границы.

Рассмотрим также еще несколько важных следствий длинной точной последовательности пары.

**Следствие 3.** Для любого топологического пространства  $X$  и любой его точки  $x_0 \in X$  мы имеем

$$H_n(X, x_0) = \tilde{H}_n(X) \quad \forall n.$$

*Доказательство.* Запишем длинную точную последовательность приведенных гомологий пары  $(X, x_0)$

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(x_0) \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(x_0) \rightarrow \dots$$

Действительно, так как  $\tilde{H}_n(x_0) = 0 \quad \forall n$ , мы на самом деле имеем

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X, x_0) \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

и из точности следует  $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_q(X, x_0) = H_q(X, x_0)$ . □

**Следствие 4.** Группы  $H_q(X, A)$  измеряют различие между  $H_q(X)$  и  $H_q(A)$ , а именно,

$$H_q(X, A) = 0 \quad \forall q \Rightarrow H_q(A) = H_q(X) \quad \forall q.$$

*Доказательство.* Запишем длинную точную последовательность пары  $(X, A)$ :

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

В нашем случае она имеет вид:

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

и из точности следует, что  $H_q(A) \cong H_q(X)$ . □

**Упражнение.** Убедитесь, что верно и обратное утверждение.

## 1.6 Пары Боруска

**Определение 9.** Пусть  $X$  — топологическое пространство, а  $A \subset X$  с индуцированной топологией. Тогда говорят, что  $(X, A)$  — пара Борсука (или, корасслоение)<sup>4</sup>, если  $\forall f: X \rightarrow Y, \forall F: A \times I \rightarrow Y$  такой, что  $F|_{A \times 0} = f|_A$  существует  $G: X \times I \rightarrow Y$ , причем такое, что  $G|_{X \times 0} = f, G|_{A \times I} = F$ .

**Определение 10.** Пара  $(X, A)$  называется клеточной парой, если  $X$  — клеточное пространство,  $A$  — клеточное подпространство  $X$ .

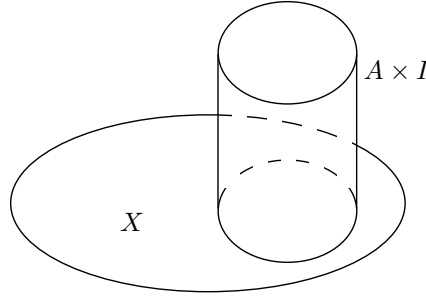
<sup>4</sup>Еще говорят «обладает свойством продолжения гомотопии», но это совсем уж длинно.

*Замечание.* Так как очевидно, что  $(D^n, \partial D^n)$  — пара Борсука, клеточная пара является парой Борсука.

Нам от пар Борсука понадобится несколько базовых утверждений.

**Теорема 5** (Характеризация пар Борсука). *Если  $(X, A)$  — пара Борсука, то деформационная ретракция  $X \times I$  на  $X \cup (A \times I)$ . Кроме того, если  $A$  — замкнуто, то верно и обратное.*

*Доказательство.* На картинке это выглядит следующим образом:



Положим  $Y = X \cup (A \times I)$ ,  $f: X \rightarrow Y$  — вложение. Рассмотрим теперь гомотопию  $F_t(A) = A \times t$ . Так как  $(X, A)$  — пара Борсука, существует  $G: X \times I \rightarrow Y: G|_{A \times I} = F$ .

Докажем теперь в другую сторону: пусть для  $f: X \rightarrow Y$  есть гомотопия  $F_t: A \rightarrow Y$ , то есть отображение  $F: X \cup (A \times I) \rightarrow Y$ . Тогда искомое продолжение гомотопии — композиция  $F$  и деформационной ретракции  $X \times I \rightarrow X \cup (A \times I)$ <sup>5</sup>.  $\square$

**Следствие 5.** *Пара  $(D^n, \text{Int}(D^n))$  — не пара Борсука.*

Вообще говоря, эта теорема показывает, что было бы хорошо, чтоб  $A$  было замкнутым.

*Замечание.* В нехаусдорфовом случае бывает, что и с незамкнутым  $A$  пара  $(X, A)$  будет парой Борсука.

**Упражнение.** Если  $(X, A)$  — пара Борсука и  $X$  — Хаусдорфово, то  $A$  замкнуто.

**Утверждение 2.** *Пусть  $(X, A)$  — пара Борсука. Тогда*

$$X \cup CA \sim (X \cup CA)/CA = X/A.$$

*Доказательство.* Рассмотрим вложение  $X \rightarrow X \cup CA$ . Прогомотопируем  $A$  в вершину конуса  $a$ . Так как  $(X, A)$  — пара Борсука, эта гомотопия продолжается до гомотопии на  $X$ . Тогда финальный элемент гомотопии отображает  $X \rightarrow X \cup CA$  так, что  $A \mapsto a$ , значит, это отображение пропускается через фактор  $X/A$ . С другой стороны ясно, как устроено обратное отображение  $X \cup CA \rightarrow X/A$  (стягиваем конус в точку). Нетрудно заметить, что два построенных отображения задают гомотопическую эквивалентность.  $\square$

**Следствие 6.** *Если  $(X, A)$  — пара Борсука и  $A$  — стягиваемо, то  $X \sim X/A$ .*

**Утверждение 3.** *Пара  $(CX, X)$  — всегда пара Борсука.*

## 1.7 Относительные гомологии как абсолютные (факторизация)

Итак, в этом параграфе нас будет интересовать следующее (весьма полезное в вычислениях утверждение):

**Теорема 6.** *В общем случае отображение  $X \rightarrow X \cup CA$  индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X, A) \rightarrow H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \tilde{H}_q(X \cup CA),$$

где  $a$  — вершина конуса.

Если  $(X, A)$  — пара Борсука, то отображение проекции  $p: X \rightarrow X/A$ ,  $A \mapsto a$  индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \tilde{H}_q(X/A).$$

<sup>5</sup>вот тут мы пользуемся замкнутостью  $A$ , так как нам нужно, чтоб покрытие было фундаментальным.

Вообще говоря, условие на  $A$  во второй части теоремы часто опускают и говорят, что это верно для «хороших пар». Мы доказываем для пар Борсука, можно доказывать для случая, когда  $A$  — *окрестностный деформационный ретракт*.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько важных (в общем контексте) лемм.

Сначала посмотрим на геометрическую конструкцию **барицентрического подразбиения**, чтоб иметь геометрическую интуицию в контексте сингулярных симплексов.

Рассмотрим симплекс  $[v_0, \dots, v_n]$ . его точки — линейные комбинации вида

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i, \quad \text{где } \sum_{i=0}^n t_i = 1, \quad t_i \geq 0.$$

**Определение 11.** *Барицентр (центр тяжести)* симплекса — это точка  $b \in [v_0, \dots, v_n]$ , у которой все барицентрические аординаты  $t_i$  равны, а именно,  $t_i = \frac{1}{n+1} \forall i$ .

*Барицентрическое подразбиение (подразделение)* симплекса  $[v_0, \dots, v_n]$  — это разбиение симплекса  $[v_0, \dots, v_n]$  на  $n$ -мерные симплексы  $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ , где по индукции  $[w_0, \dots, w_{n-1}]$  —  $(n-1)$ -мерный симплекс барицентрического подразбиения грани  $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ .

- Индукция начинается с  $n = 0$ , когда барицентрическое подразбиение точки  $[v_0]$  определяется просто, как сама точка  $[v_0]$ .
- В случае  $n = 1$  отрезок  $[v_0 v_1]$  бьется на два отрезка  $[v_0 b]$ ,  $[b v_1]$ , где  $b$  — середина отрезка  $[v_0, v_1]$ .
- В случае  $n = 2$  треугольник  $[v_0 v_1 v_2]$  бьется на 6 треугольников, образуемых его вершинами и точкой пересечения медиан  $b$ .

Из такого индуктивного определения следует, что вершины симплексов в барицентрическом подразбиении симплекса  $[v_0 \dots v_n]$  — в точности барицентры всех  $k$ -мерных граней  $[v_{i_0} \dots v_{i_k}]$  симплекса  $[v_0 \dots v_n]$  для  $0 \leq k \leq n$ .

При  $k = 0$  это даёт нам просто набор вершин  $v_i$ . Барицентр симплекса  $[v_{i_0} \dots v_{i_k}]$  имеет барицентрические координаты  $t_i = \frac{1}{k+1}$  при  $i = i_0, \dots, i_k$  и  $t_i = 0$  во всех остальных случаях.

*Замечание.* Далее нам это не потребуется, но симплексы барицентрического подразбиения задают на симплексе  $T$  структуру симплициального комплекса.

**Лемма 4** (О барицентрическом подразбиении). Пусть  $f: T^q \rightarrow X$  — сингулярный симплекс. Тогда его барицентрическое подразбиение — это

$$\beta: C_q(X) \rightarrow C_q(X), \quad \beta f = \sum_{\tau \in S_{q+1}} \text{sign}(\tau) f_\tau,$$

где  $f_\tau$  определяется следующим образом: исходный симплекс  $T^q$  мы можем барицентрически подразбить на симплексы  $T'_q = \{x \mid x_{\tau(0)} \leq x_{\tau(1)} \leq \dots \leq x_{\tau(q)}\}$ , в которых вершины нумеруются согласно размерностям граней. Тогда мы полагаем  $f_\tau \stackrel{\text{def}}{=} f|_{T'_q}$ .

Тогда  $\partial\beta = \beta\partial$  и  $\beta_*([\alpha]) = [\alpha] \forall [\alpha] \in H_q(X)$ . Иными словами, барицентрическое подразбиение не влияет на гомологический класс.

*Доказательство.* Для первого утверждения достаточно проверить, что в сумме все внутренние грани встречаются с противоположным знаком, это ясно из картинки. Первое утверждение даёт нам, что  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{CH}}(C_\bullet, C_\bullet)$ .

Для доказательства второго утверждения мы построим цепную гомотопию  $D: C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$  между  $\beta$  и постоянным отображением.

Пусть  $f: T^q \rightarrow X$ , тогда  $D(f)$  определяется следующим образом: барицентрически разобьём призму  $I \times T^q$  на симплексы и рассмотрим проекцию

$$p: I \times T^q \rightarrow T^q.$$

Тогда  $D(f)$  — это  $(q+1)$ -мерный сингулярный симплекс, являющийся суммой композиций  $f$  и проекции  $p$ , суженной на симплексы в разбиении  $I \times T^q$ .

можно нарисовать картинку для отрезка, в принципе.

Из того, как устроена нумерация в барицентрическом разбиении призмы, нетрудно видеть, что  $D$  — гомотопия между  $\beta$  и  $\text{id}$ , то есть

$$f - \beta(f) = D\partial(f) + \partial D(f).$$

Чтоб понять всё это, надо опять позалипать на эту картиночку с призмой, как в теореме 3.<sup>6</sup> □

Следующая лемма говорит нам, что для вычисления сингулярных гомологий достаточно рассматривать лишь *маленькие* сингулярные симплексы. В случае симплициальных гомологий это можно было бы формулировать в терминах диаметров, а в случае сингулярных мы будем говорить об этом в терминах покрытий.

**Лемма 5** (Об измельчении). Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  — конечное открытое покрытие  $X$ . Пусть  $C_q^\mathcal{U}(X)$  порождено сингулярными симплексами  $f \in C_q(X)$  такими, что  $\exists \alpha: f(T_q) \subset U_\alpha$ .

Тогда вложение  $i: C_q^\mathcal{U}(X) \xrightarrow{i} C_q(X)$  индуцирует изоморфизм групп гомологий  $H_\bullet(X) \cong H_\bullet^\mathcal{U}(X)$ .

*Доказательство.* Заметим, что для достаточно большого  $n$  по лемме Лебега  $c \in C_q(X) \Rightarrow \beta^n(c) \in C_q^\mathcal{U}(X)$ . Кроме того, по лемме 4  $c$  и  $\beta^n(c)$  гомологичны (то есть, представляют один и тот же класс гомологий). Это даёт нам, что любой гомологический класс из  $H_q(C_\bullet)$  имеет представителя в  $C_q^\mathcal{U}(X)$ , то есть, что отображение  $H_q^\mathcal{U}(X) \rightarrow H_q(X)$  сюръективно.

Кроме того, также по лемме 4, если  $c$  — цикл из  $C_q^\mathcal{U}$ , то  $c - \beta^n(c)$  — граница цепи из  $C_{q+1}^\mathcal{U}$ , так как

$$c - \beta^n(c) = \underbrace{D\partial c}_{=0, \text{ так как } c - \text{цикл}} - \partial Dc = \partial(-Dc) \in B_q(C_q^\mathcal{U}(X)).$$

С другой стороны, так как  $c$  и  $\beta^n(c)$  гомологичны, их разность — граница (элемент  $B_q(C_q(X))$ ). Таким образом, если цепь из  $C_q^\mathcal{U}$  лежит в  $B_q(C_q(X))$ , то она лежит и в  $B_q(C_q^\mathcal{U}(X))$ . Это даёт нам инъективность отображения  $H_q^\mathcal{U}(X) \rightarrow H_q(X)$ . □

*Замечание.* Заметим, что построенные в доказательстве отображения переводят цепи в  $A$  в цепи в  $A$ , а значит, выдерживают факторизацию по  $A$ . Этот факт даёт нам версию леммы об измельчении для относительных гомологий, которым мы и будем пользоваться.

Обозаведемся еще одним полезным фактом: Посмотрим на такой факт из гомологической алгебры:

**Лемма 6** (5-лемма). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

в которой строки точны,  $f_2, f_4$  — изоморфизмы,  $f_1$  — эпиморфизм,  $f_5$  — мономорфизм. Тогда  $f_3$  — изоморфизм.

*Доказательство.* Есть в любом курсе гомологической алгебры. □

Из неё немедленно следует следующий простой факт:

**Лемма 7.** Если пара  $(X, A)$  гомотопически эквивалентна паре  $(Y, B)$ , то  $H_\bullet(X, A) = H_\bullet(Y, B)$ .

*Доказательство.* Запишем длинную точную последовательность для обеих пар:

<sup>6</sup>Возможно, всё это место стоит строго формально переписать из Хачтера.

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\
\parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\
H_k(B) & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_k(Y, B) & \longrightarrow & H_{k-1}(B) & \longrightarrow & H_{k-1}(Y)
\end{array}$$

Тогда всё следует из 5-леммы 6 □

Наконец, мы можем доказать интересующую нас теорему:

**Теорема 7.** В общем случае отображение  $X \rightarrow X \cup CA$  индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \rightarrow H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \tilde{H}_q(X \cup CA),$$

где  $a$  — вершина конуса.

Если  $(X, A)$  — пара Борсука, то отображение проекции  $p: X \rightarrow X/A$ ,  $A \mapsto a$  индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \tilde{H}_q(X/A).$$

*Доказательство.* Рассмотрим открытое покрытие  $X \cup CA$  вида:

$$X \cup CA \subset ((X \cup CA) \setminus X) \cup (X \cup \overline{CA}), \quad \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{(X \cup CA) \setminus X, (X \cup \overline{CA})\}$$

где  $\overline{CA}$  — нижняя открытая половина конуса  $CA$ .

По лемме 5 об измельчении мы вместо  $H_q(X \cup CA, CA)$  можем рассматривать  $H_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA)$ .

А теперь, заметим, что по тому, как мы взяли покрытие,

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA) = C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA) = C_q(X \cup \overline{CA})/C_q(\overline{CA}) = C_q(X \cup \overline{CA}, \overline{CA}).$$

А значит, из гомотопической эквивалентности и леммы 7 мы имеем

$$H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup \overline{CA}, \overline{CA}) = H_q(X, A).$$

Вторая часть первого равенства из условия теоремы следует из следствия 3.

Пусть теперь  $(X, A)$  — пара Борсука. Тогда по утверждению 2  $X \cup CA \sim X/A$ , а значит,  $H_q(X, A) \cong \tilde{H}_q(X/A)$ . □

## 1.8 Вырезание

Рассмотрим тройку  $B \subset A \subset X$ . Тогда вложение индуцирует отображение

$$H_k(X - B, A - B) \rightarrow H_k(X, A).$$

Вообще говоря, вырезание даёт хорошую технику вычисления относительных гомологий:

**Теорема 8** (О вырезании). Пусть даны пространства  $Z \subset A \subset X$ , причем  $\text{Cl}(Z) \subset \text{Int}(A)$ . Тогда вложение  $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$  индуцирует изоморфизмы

$$H_n(X - Z, A - Z) \cong H_n(X, A)$$

для всех  $n$ . Или, что эквивалентно: для подпространств  $A, B \subset X$ , внутренности которых покрывают  $X$ , включение  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  индуцирует изоморфизмы

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A) \quad \forall n.$$

*Доказательство.* Докажем сначала эквивалентность формулировок. Положим  $B = X - Z$ ,  $Z = X - B$ . Тогда  $A \cap B = A - Z$ , а условие  $\text{Cl}(Z) \subset \text{Int}(A)$  эквивалентно тому, что  $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ , так как  $X - \text{Int}(B) = \text{Cl}(Z)$ . Теперь докажем вторую формулировку.

Пусть  $X = A \cup B$ , обозначим соответствующее покрытие  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . Для краткости будем обозначать группы  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ , как  $C_n(A + B)$ <sup>7</sup>.

Тогда, как мы помним из леммы об измельчении 5 включение

$$C_n(A + B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

индуцирует изоморфизм групп гомологий  $H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A)$ .

Теперь рассмотрим включение

$$C_n(B)/C_n(A \cap B) \hookrightarrow C_n(A + B, A).$$

Оно очевидно индуцирует изоморфизм гомологий, так как обе факторгруппы свободные, а их базис —  $n$ -мерные сингулярные симплексы в  $B$ , не лежащие в  $A$ . Значит, мы получили требуемый изоморфизм

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A).$$

□

## 1.9 Точная последовательность Майера-Вьеториса

Кроме длинной точной последовательности пары (теорема 4) для вычисления гомологий пары  $(X, A)$  есть и другая мощная техника для вычисления гомологий пространства  $X$ , тоже представляющая собой длинную точную последовательность.

**Теорема 9** (Точная последовательность Майера-Вьеториса, простая версия). Пусть  $X = A \cup B$ , где  $A, B$  — открытые и  $A \cap B = C \neq \emptyset$ . Тогда имеет место следующая точная последовательность:

$$\dots H_q(A \cap B) \rightarrow H_q(A) \oplus H_q(B) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow H_{q-1}(A) \oplus H_{q-1}(B) \rightarrow \dots$$

*Доказательство.* Рассмотрим короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \rightarrow C_{\bullet}(A \cap B) \xrightarrow[\varphi]{c \rightarrow (c, -c)} C_{\bullet}(A) \oplus C_{\bullet}(B) \xrightarrow[\psi]{(a, b) \rightarrow a + b} C_{\bullet}(A + B) \rightarrow 0$$

Во-первых, заметим, что  $\text{Ker } \varphi = 0$ , так как цепь в  $A \cap B$ , которая является нулевой в  $A$  (или в  $B$ ) должна быть нулевой цепью. Во-вторых, очевидно, что  $\psi \varphi = 0 \Rightarrow \text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \psi$ . Заметим, что для  $(x, y) \in C_n(A) \oplus C_n(B)$  имеем  $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ , а значит  $x \in C_n(A \cap B)$  и  $(x, y) \in \text{Im } \varphi$ . Это означает, что  $\text{Ker } \psi \subset \text{Im } \varphi$ . Точность в последнем члене следует просто из определения  $C_n(A + B)$ .

Тогда эта короткая точная последовательность комплексов даёт нам точную последовательность гомологий. Остается лишь заметить, что также, как и в теореме о вырезании,  $H_{\bullet}(A + B) = H_{\bullet}(A \cup B)$ . □

*Замечание.* Эта не самая хорошая версия точной последовательности Майера-Вьеториса, так как условие на открытое покрытие серьезно мешает.

## 1.10 Гомологии сфер

**Теорема 10.** Для  $n \neq 0$  гомологии сферы устроены следующим образом:

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \text{ или } i = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Или, иными словами,

$$\tilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

<sup>7</sup>что на самом деле логично, так как цепи оттуда состоят из суммы цепей из  $A$  и цепей из  $B$

*Доказательство.* Рассмотрим пару  $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$ , тогда  $X/A \cong S^n$ . Запишем для этой пары точную последовательность приведенных гомологий:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(D^n) \rightarrow \tilde{H}_q(D^n, S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(D^n) \rightarrow \dots$$

Так как  $D^n$  стягиваем,  $\tilde{H}_q(D^n) = 0$ , а значит,  $\tilde{H}_q(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^n)$ . С другой стороны, так как  $(D^n, \partial D^n) = (D^n, S^{n-1})$  — пара Борсука, по теореме о факторизации 7

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_q(D^n/S^{n-1}) \cong \tilde{H}_q(S^n).$$

Остается заметить, что мы знаем, что утверждение верно для  $S^0$ . Таким образом, мы доказали утверждение по индукции.  $\square$

**Следствие 7.** *Сферы разных размерностей негомеоморфны.*

### 1.11 Гомологии букета и надстройки

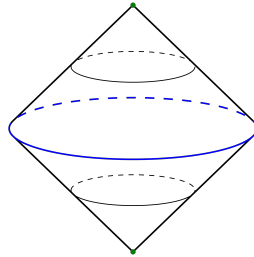
Из стягиваемости конуса сразу следует, что  $H_q(CX, X) \cong \tilde{H}_q(X)$  (достаточно написать точную последовательность для приведенных гомологий).

**Определение 12.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Тогда *надстройкой* над  $X$  называется пространство  $\Sigma X$ , определённое, как

$$\Sigma X \cong X \times I / \sim, \text{ где } (x, 0) \sim (y, 0) \forall x, y \in X \text{ и } (x, 1) \sim (y, 1) \forall x, y \in X.$$

Иными словами, мы взяли  $X \times I$  и стянули  $X \times 1$  и  $X \times 0$  в точку.

**Пример 5.** Надстройка над окружностью выглядит следующим образом:



Так как надстройка получается факторизацией конуса по нижнему основанию, из теоремы о факторизации 7 следует, что  $H_{q+1}(CX, X) \cong \tilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$ . Таким образом, мы получили такое утверждение:

**Теорема 11** (Гомологии надстройки). *Справедливо следующее равенство групп гомологий:*

$$\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$$

*Замечание.* Так как  $\Sigma S^n = S^{n+1}$ , мы таким образом получили другое доказательство теоремы 10.

**Теорема 12** (Гомологии букета). *Для букета пространств  $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$  включения  $i_{\alpha}: X_{\alpha} \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$  индуцируют изоморфизм гомологий*

$$\bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_q \cong \tilde{H}_q \left( \bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \right).$$

*при условии, что если в букете отождествляются точки  $\{x_{\alpha}\}$ , то пары  $(X_{\alpha}, x_{\alpha})$  — пары Борсука.*

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть пару

$$(X, A) = \left( \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}, \bigsqcup_{\alpha} x_{\alpha} \right),$$

тогда по тривиальным причинам

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(X_{\alpha})$$

и по теореме о факторизации

$$H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n\left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}\right).$$

□

## 1.12 Гомологии с коэффициентами

У рассматриваемой нами до сих пор теории гомологий есть простое обобщение, которое иногда даёт техническое преимущество.

Обобщение состоит в рассмотрении цепей  $\sum n_i f_i$ , где  $f_i$  — сингулярные симплексы, а коэффициенты  $n_i$  берутся в фиксированной абелевой группе  $G$ . Такие  $n$ -мерные цепи образуют абелеву группу  $C_n(X; G)$  и у неё также есть относительная версия  $C_n(X, A; G) \stackrel{\text{def}}{=} C_n(X; G)/C_n(A; G)$ .

Дифференциал  $\delta$  строится также, как и раньше:

$$\partial\left(\sum_i n_i f_i\right) = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \Gamma_j f_i.$$

Соответственно, группы  $C_n(X; G)$  и  $C_n(X, A; G)$  образуют цепные комплексы и их гомологии обозначают  $H_n(X; G)$  и  $H_n(X, A; G)$  и называют *гомологиями с коэффициентами в группе  $G$* .

Приведённые группы гомологий  $\tilde{H}(X; G)$  определяются аналогично, аугументация задаётся, как

$$\dots \rightarrow C_0(X; G) \xrightarrow{\varepsilon} G \rightarrow 0, \quad \varepsilon\left(\sum_i n_i f_i\right) = \sum_i n_i.$$

*Замечание.* Часто полезно рассматривать гомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , так как нужно считать суммы сингулярных симплексов с коэффициентами 0 и 1, поэтому, отбрасывая члены с коэффициентами 0, можно представлять себе цепи, как конечные «объединения» сингулярных симплексов.

Кроме того, можно больше не заботиться о знаках в формуле для границы, а так как знаки являются алгебраическим выражением ориентации, мы можем игнорировать и ориентации. Это означает, что гомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  — наиболее естественный инструмент для вычислений в неориентированном случае.

Отметим, что вся доказанная выше теория переносится на гомологии с коэффициентами в  $G$  без проблем и различия между  $H_n(X; G)$  и  $H_n(X)$  появляются только, когда начинаются вычисления.

**Пример 6.** Если  $X = *$  — точка, то нетрудно заметить, что

$$H_n(*; G) \cong \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Аналогично и в случае сфер  $S^k$  мы имеем

$$\tilde{H}_n(S^k; G) \cong \begin{cases} G, & n = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

## 1.13 Приложения теории гомологий

**Теорема 13 (Борсук).** *Не существует ретракции диска на граничную сферу.*



*Доказательство.* Предположим, что ретракция  $f: D^n \rightarrow S^{n-1}$ :  $f$  — непрерывное и  $f|_{S^{n-1}} = \text{id}$  существует. Рассмотрим отображение  $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ , тогда в гомологиях у нас есть отображение

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D^n) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

или, подставляя известные нам результаты:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}.$$

Так как  $f \circ i = \text{id}$ ,  $f_* \circ i_* = \text{id}_* = \text{id}$  и мы приходим к противоречию.  $\square$

**Теорема 14** (Брауэр, о неподвижной точке). Пусть  $f: D^n \rightarrow D^n$  — непрерывное отображение. Тогда у него существует неподвижная точка.

*Доказательство.* Предположим противное, пусть существует непрерывное  $f: D^n \rightarrow D^n$ , не имеющее неподвижных точек. Рассмотрим отображение  $g$ , которое переводит  $x \in D^n$  в точку пересечения  $[f(x), x]$  и  $\partial D^n$ . То есть,  $g: D^n \rightarrow \partial D^n$  и  $g|_{\partial D^n} = \text{id}$ . Тогда  $g$  — ретракция  $D^n$  на граничную сферу, а этого не бывает по теореме 13.  $\square$

**Теорема 15** (Брауэр, инвариантность размерности). Если непустые открытые  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  открытые и они гомеоморфны, то  $m = n$ .

*Доказательство.* Пусть  $h$  — гомеоморфизм  $U \rightarrow V$ , тогда

$$H_k(U, U - x) \cong H_k(V, V - h(x)).$$

По теореме о вырезании 8 для  $(X, A) = (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$  и  $Z = \mathbb{R}^m - U$ :

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(U, U - x).$$

Тогда мы имеем, что

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - h(x)).$$

Из точной последовательности пары для  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$  мы имеем:

$$\dots \rightarrow H_k(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \dots$$

$$\dots 0 \rightarrow H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

а значит,  $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(S^{m-1})$ , так как  $\mathbb{R}^m - x$  деформационно ретрагируется на  $S^{m-1}$ . Значит, мы получили

$$H_{k-1}(S^{m-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1}),$$

откуда ясно, что  $m = n$ .  $\square$

## 1.14 Симплициальные комплексы

Этот параграф надо написать из Хатчера.

## 1.15 Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий

**Образующая  $H_n(S^n)$ :**

В этом параграфе будем обозначать  $n$ -мерный симплекс, как  $\Delta^n$ . Заметим, что так как  $\Delta^n / \partial \Delta^n \cong S^n$ , по теореме о факторизации 7 мы имеем изоморфизм

$$H_n(S^n) \cong H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n).$$

Покажем, что образующая  $H^n(S^n)$  — это отображение  $\Delta^n \xrightarrow{\text{id}} \Delta^n$ . Нетрудно заметить, что  $\text{Im}(\partial f) \subset \partial \Delta^n$ , что дает нам, что  $\text{id}$  вообще представляет какой-то гомологический класс в  $H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n)$ .

Рассмотрим тройку  $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ , где  $\Lambda$  — это  $\partial\Delta^n$  без одной из граней (например, заполненный треугольник, граница треугольника и граница треугольника без стороны). Напишем точную последовательность тройки:

$$\dots \rightarrow H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_n(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow \dots$$

Заметим, что так как  $\Delta^n$  деформационно ретрагируется на  $\Lambda$ ,  $H_n(\Delta^n, \Lambda) \cong H_n(\Lambda, \Lambda) = 0$  и то же самое справедливо для  $(n-1)$ -х гомологий. То есть, наша последовательность на самом деле имеет вид

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Теперь заметим, что если грань, которую мы выкинули, мы обозначим за  $\Delta'$ , то  $H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$ .

Это ценно, так как далее мы можем рассуждать по индукции, ведь если образующая  $H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$  — вложение выкинутой нижней грани  $\Delta'$ , то её прообраз в  $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$  — нужное нам тождественное отображение (мы тут пользуемся тем, что мы знаем, что связывающий гомоморфизм в длинной точной последовательности пары/тройки — это просто взятие границы). А для  $S^0$  это утверждение очевидно.

Обозначим симплициальные гомологии пространства  $X$  за  $H_k^\Delta(X)$ .

**Теорема 16.** Пусть  $X$  — конечный симплициальный комплекс. Тогда

$$H_k^{\text{sing}}(X) \cong H_k^\Delta(X).$$

*Доказательство.* Пусть  $X^k$  — объединение всех симплексов в симплициальном комплексе до размерности  $k$  (обозначение аналогично обозначению для CW-комплексов). Напишем точную последовательность пары:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) \rightarrow \dots$$

и заметим, что  $H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) \cong H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) \cong H_{n+1}(\bigvee_\alpha S^k)$ . Действительно, ясно, что

$$H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) \cong H_{n+1}\left(\bigvee_\alpha S^k\right),$$

где  $\alpha$  пробегает  $k$ -мерные симплексы в  $X$ . Далее,

$$H_{n+1}\left(\bigvee_\alpha S^k\right) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } n+1 \neq k \\ \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}, & n+1 = k \end{cases}$$

С другой стороны, из определения симплициальных гомологий ясно, что при  $n+1 \neq k$  мы имеем  $H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) \cong 0$ , а при  $n+1 = k$  эта группа — свободная абелева группа, порожденная всеми  $k$ -мерными симплексами в  $X$ , то есть, как и в предыдущем случае

$$H_k^\Delta(X^k, X^{k-1}) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}.$$

Остается заметить, что по доказанному в начале параграфа, мы знаем, что у  $H_k(\bigvee_\alpha S^k)$  такой же набор порождающих.

Теперь будем вести индукцию по размерности симплициального комплекса. По индукционному предположению мы имеем  $H_n^\Delta(X^{k-1}) \cong H_n(X^{k-1})$  и тогда мы получаем диаграмму из 5-леммы:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) \end{array}$$

□

## 1.16 Степень отображения

**Определение 13.** Пусть  $f: S^n \rightarrow S^n$  — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм в гомологиях:

$$f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n).$$

Так как  $f_*$  — гомоморфизм бесконечной циклической группы в себя, он должен иметь вид

$$f_*(\alpha) = d \cdot \alpha$$

для некоторого фиксированного  $d \in \mathbb{Z}$ , зависящего только от  $f$ . Это число называют *степенью отображения*  $f$  и обозначают  $\deg f$ .

**Базовые свойства степени.**

1.  $\deg \text{id}_{S^n} = 1$ .
2. Если  $f$  — не сюръекция, то  $\deg f = 0$ , так как мы можем выбрать  $x \in S^n \setminus f(S^n)$  и представить  $f$  в виде композиции

$$S^n \rightarrow S^n \setminus \{x\} \hookrightarrow S^n,$$

а пространство  $S^n \setminus \{x\}$  — стягиваемо, значит  $H_n(S^n \setminus \{x\}) = 0$ , а значит и  $f_* = 0$ .

3. Если  $f \sim g$ , то  $\deg f = \deg g$ .
4.  $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$ .
5. Если  $f$  — гомотопическая эквивалентность, то существует  $g$  такое, что  $f \circ g \sim \text{id} \Rightarrow \deg f \deg g = 1 \Rightarrow \deg f = \pm 1$ .
6. Рассмотрим  $f$ , которое тождественно действует на первых  $n$  координатах и отправляет  $x_{n+1}$  в  $-x_{n+1}$ . Тогда  $\deg f = -1$ . Действительно, мы можем реализовать сферу, как склейку двух симплексов  $\Delta_1^n$  и  $\Delta_2^n$  по границе. Тогда  $n$ -мерная цепь  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$  являются образующей  $n$ -мерных гомологий, а отображение  $f$  переставляет местами  $\Delta_1^n$  и  $\Delta_2^n$ , то есть действует на образующую умножением на  $-1$ .
7. Степень антиподального отображения:  $\deg(x \mapsto -x) = (-1)^{n+1}$ .
8. Если  $f: S^n \rightarrow S^n$  не имеет неподвижных точек, то  $f \sim (x \mapsto -x)$  и соответственно  $\deg f = (-1)^{n+1}$ . Действительно, если  $f(x) \neq x$ , то отрезок с концами  $f(x)$  и  $-x$ , который задаётся, как

$$t \mapsto (1-t)f(x) - tx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

не проходит через начало координат и формула

$$H(t, x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$

определяет гомотопию  $f(x)$  в постоянное отображение.

**Теорема 17** (О причёсывании ежа).  $S^n$  допускает непрерывное ненулевое (касательное) векторное поле тогда и только тогда, когда  $n$  — нечетно.

*Доказательство.* Предположим, что  $x \mapsto V(x)$  — непрерывное поле касательных векторов к сфере. Тогда, если рассматривать вектор  $V(x)$ , как вектор в начале координат, а не в точке касания, то условие касания означает просто, что  $x \perp V(x)$ . Если  $V(x) \neq 0$ , то мы можем нормализовать векторное поле так, что  $\|V(x)\| = 1 \forall x$ , тогда векторы

$$(\cos t)x + (\sin t)V(x)$$

лежат на единичной окружности в  $\text{span}(x, V(x))$ . Соответственно, при  $t \in [0, \pi]$  мы получаем гомотопию тождественного отображения  $\text{id}_{S^n}$  в антиподальное отображение:

$$H(t, x) = (\cos t)x + (\sin t)V(x).$$

Отсюда следует, что  $(-1)^{n+1} = 1$ , а значит,  $n$  должно быть нечетно. С другой стороны, когда  $n = 2k - 1$ , мы можем положить

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k+1})$$

и это даст нам искомое векторное поле. □

Опишем теперь метод вычисления, который чаще всего применим на практике. Пусть  $f: S^n \rightarrow S^n$  и существует  $y \in S^n$  такое, что  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $U_1, \dots, U_k$  — непересекающиеся окрестности этих точек, которые  $f$  переводит в окрестность  $V$  точки  $y$ . Тогда  $f(U_i \setminus x_i) \subset V \setminus y$  и мы имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus \{y\}) \\
 & \nearrow & \downarrow k_i & & \parallel \\
 H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\}) & \xleftarrow{p_i} & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n \setminus \{y\}) \\
 & \searrow & \uparrow j & & \parallel \\
 & & H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n)
 \end{array}$$

Все отображения на ней индуцируются включениями. Два изоморфизма в верхней части диаграммы получаются из теоремы о вырезании 8, а два в нижней — из точной последовательности пары 4.

Посредством этих четырех гомоморфизмов две верхние группы можно отождествить с  $\mathbb{Z}$ , тогда верхний гомоморфизм  $f_*$  становится умножением на число и это число мы будем называть *локальной степенью* отображения  $f$  и обозначать  $\deg f|_{x_i}$ .

**Теорема 18** (Локальность степени). Пусть  $f: S^n \rightarrow S^n$  и  $y \in S^n$  таково, что  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Тогда

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

*Доказательство.* По теореме о выражении 8, группа  $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$  — прямая сумма групп  $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$ , причем  $k_i$  — отображение включения  $i$ -го слагаемого, а  $p_i$  — проекция на  $i$ -е слагаемое. Из коммутативности нижнего треугольника мы получаем, что

$$p_i \circ j(1) = 1,$$

а значит,  $j(1) = (1, \dots, 1) = \sum_i k_i(1)$ . Коммутативность верхнего квадрата говорит, что  $f_*$  отображает  $k_i(1)$  в  $\deg f|_{x_i}$ , а коммутативность нижнего квадрата уже дает нам формулу

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

□

## 1.17 Клеточные гомологии

**Лемма 8.** Пусть  $X$  — конечный CW-комплекс. Тогда:

- а)  $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$ , если  $k \neq n$  и изоморфно мвободной абелевой группе, если  $k = n$ . Образующие этой группы — клетки размерности  $n$ .
- б)  $H_k(X^n) = 0$ , если  $k > n$ . В частности, если комплекс конечномерен, то  $H_k(X) = 0 \forall k > \dim X$ .
- с) Вложение  $i: X^n \hookrightarrow X$  индуцирует изоморфизм  $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$  при  $k < n$  и эпиморфизм при  $k = n$ .

*Доказательство.* Во-первых, мы знаем, что  $(X^n, X^{n-1})$  — пара Борсука. Кроме того,  $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_{\alpha} S^n$ , где  $\alpha$  пробегает все  $n$ -мерные клетки. Тогда факт а) следует из теоремы о факторизации 7 и теоремы 12.

Теперь рассмотрим длинную точную последовательность пары

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \dots$$

Если  $k \neq n$  или  $n - 1$ , то обе внешние группы равны нулю, как группы гомологий букета  $n$ -мерных сфер, поэтому мы получаем изоморфизм

$$H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n), \quad k \neq n, n - 1.$$

Тогда, если  $k > n$ , то

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong \dots \cong H_k(X^0) = 0,$$

что доказывает пункт б). Если же  $k < m$ , то тогда

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong \dots \cong H_k(X^{n+m}) \quad \forall m \geq 0,$$

что доказывает с) в случае конечномерного комплекса.  $\square$

*Замечание.* Утверждение с) верно и для бесконечномерных CW-комплексов (идея состоит в том, что каждая сингулярная цепь имеет компактный образ, а значит пересекается лишь с конечным числом клеток). (Доказательство можно посмотреть в Хатчере).

Теперь мы определим клеточные гомологи — более продвинутый способ вычислять гомологии клеточных пространств. Начнем с такой коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X) & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \\
 0 & & & & H_n(X^n) & & \\
 & \searrow & \nearrow & \downarrow j_n & & & \\
 & \partial_{n+1} & & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \dots \\
 & & & & \downarrow \partial_n & \nearrow j_{n-1} & \\
 & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) & & \\
 & \nearrow & & & \nearrow & & \\
 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Её мы получили из точных последовательностей для пар  $(X^{n+1}, X^n)$ ,  $(X^n, X^{n-1})$ ,  $(X^{n-1}, X^{n-2})$ . Морфизмы в нижней строчке определяются, как  $d_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} j_n \circ \partial_{n+1}$ . Нетрудно заметить, что из точности мы получаем  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ . Таким образом, средняя строчка диаграммы является цепным комплексом (его называют *клеточным цепным комплексом для  $X$* ). Как мы уже замечали в доказательстве леммы выше, группа  $H_n(X^n, X^{n-1})$  — свободная абелева группа с базисом из  $n$ -мерных клеток в  $X$ .

**Определение 14.** Рассмотрим построенный выше цепной комплекс с группой  $k$ -мерных цепей  $C_k^{\text{CW}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} H_k(X^k, X^{k-1})$ . Гомологии этого комплекса называют *клеточными гомологиями пространства  $X$*  и обозначают  $H_n^{\text{CW}}(X)$ .

*Замечание.* В самом деле, всё происходящее вполне логично — в случае симплициальных гомологий мы рассматриваем свободные абелевы группы, порожденные симплексами всех размерностей, а тут — клетками всех размерностей.

**Теорема 19.** Пусть  $X$  — CW-комплекс. Тогда имеет место изоморфизм  $H_n^{\text{CW}}(X) \cong H_n(X)$ .

*Доказательство.* Из точности и теоремы о гомоморфизме мы имеем изоморфизм

$$H_n(X) \cong H_n(X^n) / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

Так как  $j_n$  — инъекция,  $\text{Im } \partial_{n+1} \cong \text{Im } j_n \circ \partial_{n+1} = \text{Im } d_{n+1}$ . С другой стороны,  $\text{Im } j_n \cong \text{Ker } \partial_n$ . Из инъективности  $j_{n-1}$  мы имеем  $\text{Ker } \partial_n \cong \text{Ker } d_n$ . Значит,  $j_n$  индуцирует изоморфизм факторгруппы:

$$H_n(X) \cong H_n(X^n) / \text{Im } \partial_{n+1} \cong \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}.$$

$\square$

**Следствие 8.** Пусть  $X$  — CW-комплекс, тогда:

1.  $H_n(X) \cong 0$ , если в  $X$  нет  $n$ -мерных клеток.
2. Если  $X$  — CW-комплекс с  $k$  клетками размерности  $n$ , то группа  $H_n(X)$  порождена не более чем  $k$  элементами. В самом деле, так как  $H_n(X^n, X^{n-1})$  — группа с  $k$  образующими, у подгруппы  $\text{Ker } d_n$  никак не может быть больше образующих, а значит и в факторгруппе  $\text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$  тоже.
3. Если  $X$  — CW-комплекс, у которого нет пар клеток в соседних размерностях, то  $H_n(X)$  — свободная абелева группа с базисом из  $n$ -мерных клеток.

**Пример 7.** Последний пункт следствия 8 применим, например, к  $\mathbb{C}P^n$ , так как клеточная структура для  $\mathbb{C}P^n$  имеет по одной клетке каждой четной размерности до  $2n$  (действительно, это заметно из того, что  $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}P^{n-1}$ ). Значит, клеточный цепной комплекс для  $\mathbb{C}P^n$  имеет вид:

$$\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Также при помощи этого же факта можно посчитать гомологии  $S^n \times S^n$ .

Рассмотрим теперь подробнее клеточный оператор границы  $d_n$ . При  $n = 1$  это легко, так как

$$d_1: H_1(X^1, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$$

и это просто обычное граничное отображение.

В случае, когда комплекс  $X$  связан и имеет лишь одну нульмерную клетку,  $d_1 = 0$ , так как иначе  $H_0(X) \neq \mathbb{Z}$ . В общем случае формула для клеточного оператора границы имеет следующий вид:

**Утверждение 4.** Имеет место равенство:

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

где  $d_{\alpha\beta}$  — степень отображения  $S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow S_\beta^{n-1}$ , которое является композицией отображения приклеивания клетки  $e_\alpha^n$  по границе и отображения факторизации, стягивающего  $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$  в точку.

**Доказательство.** Для получения этой формулы рассмотрим такую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta}} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ \downarrow \Phi_{\alpha*} & & \downarrow \varphi_{\alpha*} & & \downarrow q_{\beta*} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \cong \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(X^{n-2}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}) \end{array}$$

Проясним, что за стрелки на ней:

- $\Phi_\alpha$  — характеристическое отображение клетки  $e_\alpha^n$ ,  $\varphi_\alpha$  — её отображение приклеивания.
- $q: X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$  — отображение факторизации.
- $q_\beta: X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow S_\beta^{n-2}$  — стягивание дополнения клетки  $e_\beta^{n-1}$  в точку и отождествление полученной сферы с  $S_\beta^{n-1} = D_\beta^{n-1}/\partial D_\beta^{n-1}$ .
- $\Delta_{\alpha\beta} = q_\beta q \varphi_\alpha$ .

Отображение  $\Phi_{\alpha*}$  переводит образующую  $[D_\alpha^n] \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n)$  в образующую слагаемого  $\mathbb{Z}$  группы  $H_n(X^n, X^{n-1})$ , соответствующего клетке  $e_\alpha^n$  (действительно, такие клетки образуют базис  $H_n(X^n, X^{n-1})$ ). Коммутативность левой половины диаграммы даёт нам, что

$$d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1} \varphi_{\alpha*} \partial[D_\alpha^n].$$

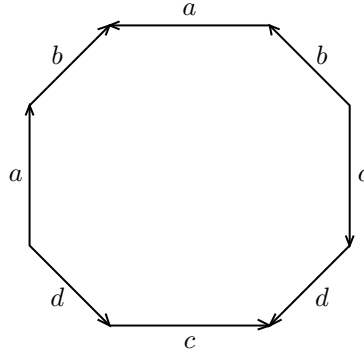
Базис группы  $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$  состоит из  $(n-1)$ -мерных клеток, а отображение  $q_{\beta*}$  — это проекция группы  $\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$  (которая, как группа гомологий букета окружностей суть прямая сумма  $\mathbb{Z}$ , где каждое слагаемое соответствует  $(n-1)$ -мерной клетке) на её слагаемое  $\mathbb{Z}$ , соответствующее  $e_\beta^{n-1}$ .

Теперь формула следует непосредственно из коммутативности правой верхней части диаграммы  $\square$

### 1.18 Гомологии поверхностей

В данном параграфе, пользуясь клеточными гомологиями, мы вычислим гомологии поверхностей.

Пусть  $M_g$  — компактная ориентируемая поверхность с  $g$  ручками. Реализуем её, как склейку  $4g$ -угольника:



Тогда в её клеточном разбиении:

- 1 двумерная клетка, приклеенная по произведению коммутаторов  $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ .
- $2g$  одномерных клеток.
- 1 нульмерная клетка.

Значит, цепной клеточный комплекс для  $M_g$  будет иметь вид:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Так как комплекс связан и имеет лишь одну нульмерную клетку,  $d_1 = 0$ . Кроме того, каждое ребро  $[a_1, a_2]$ ,  $[a_g, b_g]$  появляется в произведении коммутаторов вместе со своим обратным, а значит,  $\Delta_{\alpha\beta}$  гомотопны постоянным отображениям, из чего следует, что  $d_2 = 0$ .

Таким образом, мы имеем

$$H_k(M_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \text{ или } k = 2, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & k = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь вычислим гомологии неориентируемой замкнутой поверхности рода  $g$ . Она имеет такую клеточную структуру:

- Одна нульмерная клетка.
- $g$  одномерных клеток.
- Одна двумерная клетка, приклеенная по слову  $a_1^2 \dots a_g^2$ .

Тогда клеточный цепной комплекс имеет вид:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^g \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Аналогично предыдущему разу,  $d_1 = 0$ , а вот  $d_2$  задаётся уравнением

$$d_2(1) = (2, \dots, 2),$$

так как каждое ребро  $a_i$  появляется в слове приклеивания двумерной клетки со степенью 2, а это значит, что каждое отображение  $\Delta_{\alpha\beta}$  гомотопно отображению степени 2. Значит,  $d_2$  инъективно и

$$H_2(N_g) = 0.$$

Выберем в  $\mathbb{Z}^g$  такой базис:  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, 0), (1, 1, \dots, 1)$ . Тогда нетрудно заметить, что

$$H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

## 1.19 Пространства Мура

Допишу позже вместе с пространствами Эйленберга-Маклейна.

## 1.20 Теорема о вложении дисков и сфер

Напомним, что топологическое вложение — гомеоморфизм на образ.

**Теорема 20.** Пусть  $h: D^k \rightarrow S^n$  — вложение. Тогда

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(D^k)) = 0 \quad \forall i.$$

Кроме того, если  $h: S^k \rightarrow S^n$  — вложение (и  $k < n$ ), то

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) = \mathbb{Z}, \quad i = n - k - 1 \text{ и } 0 \text{ иначе.}$$

*Доказательство.* Проведём индукцию по  $k$ . Случай  $k = 0$  тривиален:

$$S^n \setminus h(D^0) = \mathbb{R}^n.$$

Теперь докажем индукционный переход от противного. Рассмотрим покрытие нашего пространства двумя множествами:

$$A = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad B = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Заметим, что  $A \cup B = S^n \setminus (h(I^k \times [0, \frac{1}{2}]) \cap h(I^k \times [\frac{1}{2}, 1])) = S^n \setminus h(I^k \times \frac{1}{2})$  и

$$\tilde{H}_i(A \cup B) \cong \tilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right) = 0,$$

по индукционному предположению. Напишем теперь точную последовательность Майера-Вьеториса (9):

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H_n\left(S^n \setminus h\left(I^{k+1}\right)\right) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow \underbrace{H_n\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right)}_{\cong 0} \rightarrow H_{n-1}\left(S^n \setminus h\left(I^{k+1}\right)\right) \rightarrow \dots$$

значит если в  $\tilde{H}_i(A \cap B) = \tilde{H}_i(S^n \setminus (I^k \times I))$  есть ненулевой класс  $a$ , его образ  $(a, -a)$  в  $\tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B)$  будет ненулевым, а значит, в  $\tilde{H}_i(A)$  или  $\tilde{H}_i(B)$  тоже будет ненулевым. Далее мы можем также разбить на две части интервал в  $A$  или в  $B$  (в зависимости от того, где не ноль) и проделать всё полностью аналогично. Таким образом мы получим последовательность вложенных интервалов  $I_n$  таких, что

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k \times I_n)) \neq 0, \quad a \in \tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k \times I_n)).$$

Тогда, если  $p = \bigcap I_n$ , то по индукционному предположению

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k \times p)),$$

то есть  $a$  представляет ноль в этих гомологиях. Но это означает, что он является чьей-то границей, но тогда он является границей и в допредельном случае, что даёт нам противоречие.

Докажем теперь второй пункт. Представим сферу в виде объединения двух дисков (полусфер):

$$S^k = D_+^k \cup D_-^k, \quad D_+^k \cap D_-^k = S^{k-1}.$$

тогда  $S^n \setminus h(S^k) = S^n \setminus h(D_+^k \cup D_-^k) = S^n \setminus (h(D_-^k) \cap h(D_+^k))$ . Запишем опять точную последовательность Майера-Вьеториса 9, полагая

$$A = S^n \setminus h(D_+^k), \quad B = S^n \setminus h(D_-^k).$$

:

$$\dots \rightarrow H_i(S^n \setminus h(S^k)) \rightarrow \underbrace{H_i(S^n \setminus h(D_-^k))}_{=0} \oplus \underbrace{H_i(S^n \setminus h(D_+^k))}_{=0} \rightarrow H_i(S^n \setminus h(S^{k-1})) \rightarrow \dots$$

Нулевые элементы в точной последовательности у нас их первого утверждения теоремы. Теперь видно, что мы можем вести индукцию по  $k$ . □



## 1.21 Когомологии

Итак, рассмотрим цепной комплекс абелевых групп  $(C_\bullet, \partial)$

$$\dots \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow C_{k-2} \rightarrow \dots$$

Тогда мы можем рассмотреть группы  $C^k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(C_k, G)$ , где  $G$  — фиксированная абелева группа.<sup>8</sup> Тогда мы получаем цепной комплекс

$$\dots \leftarrow C^{k+1} \xleftarrow{\delta} C^k \xleftarrow{\delta} C^{k-1} \xleftarrow{\delta} \dots$$

Естественно, стрелки развернулись, так как мы действовали на комплекс контравариантным функтором  $\text{Hom}(\_, G)$ . Действие оператора  $\delta$  определяется естественным образом:

$$\varphi \in C^k, \delta\varphi: C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\varphi} G, \delta\varphi = \varphi \circ \partial.$$

*Замечание.* Сразу же нетрудно заметить, что  $\delta^2 = 0$ , то есть построенный комплекс действительно будет комплексом. Действительно,

$$\delta_k \circ \delta_{k-1}(\varphi(c)) = \delta_k(\varphi(\partial_{k-1}c)) = \varphi(\partial_k \partial_{k-1}c) = 0.$$

**Определение 15.** Группы гомологий коцепного комплекса  $(C^\bullet, \delta) = (\text{Hom}(C_\bullet, G), \delta)$  называют *группами когомологий* комплекса  $(C_\bullet, \partial)$  с коэффициентами в группе  $G$  и обозначаются  $H^k(C_\bullet; G)$ . Как и в случае с гомологиями,  $\text{Im } \delta_k$  называют  $k$ -мерными кограницами,  $\text{Ker } \delta_k$  —  $k$ -мерными коциклами, а  $C^k$  —  $k$ -мерными коцепями.

Таким образом, мы определили и *сингулярные когомологии* пространства  $X$  (так как они строятся по сингулярным гомологиям). Заметим, что так как функтор  $\text{Hom}$  контравариантен, логично ожидать, что и когомологии будут контравариантным функтором. Действительно, если  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение, то у нас есть индуцированный морфизм

$$f_*: C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$$

и действием функтора  $\text{Hom}$  мы получаем индуцированный морфизм  $f^*: C^k(Y) \rightarrow C^k(X)$ :

$$\varphi \in C^k(Y), \varphi: C^k(Y) \rightarrow G, f^*(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ f: C^k(X) \rightarrow G, f^*(\varphi) \in C^k(X).$$

Покажем теперь, что у нас будет и индуцированный морфизм в когомологиях:

$$f^*: H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$$

Для этого надо проверить, что отображение уважает добавление кограницы, то есть, если мы выберем другого представителя того же когомологического класса, мы получим тот же образ, что и до этого. Действительно,

$$f^*(c_k + \delta c_{k-1}) = f^*(c_k) + \delta f^*(c_{k-1})$$

*Замечание.* Формально, как и в гомологиях, нам надо проверить, что  $f^*\delta = \delta f^*$ . Действительно, пусть  $\varphi \in C^k(X)$ , тогда

$$f^*(\delta\varphi) = f^*(\varphi\partial) = \varphi\partial f = \varphi f\partial = \delta f^*(\varphi).$$

В третьем равенстве мы пользуемся тем, что в начале курса мы уже проверяли, что граничный оператор коммутирует с непрерывными отображениями.

<sup>8</sup>В нашем, топологическом контексте, это группа коэффициентов.

## 1.22 Формула универсальных коэффициентов для когомологий

**Пример 8.** Рассмотрим следующий комплекс:

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_3} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_2} \xrightarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_1} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_0} \rightarrow 0$$

После применения функтора  $\text{Hom}(\_, \mathbb{Z})$  мы получим такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Посмотрим, какие в новом комплексе отображения. Действительно, пусть  $\varphi: C_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\psi: C_2 \rightarrow C_1$ ,  $\psi(x) = 2x$ , тогда  $\varphi\psi: C_2 \rightarrow \mathbb{Z} \in C^2$ . Нетрудно заметить, что  $\varphi(\psi(x)) = \varphi(2x) = 2\varphi(x)$ . Значит, мы получили вот такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \xleftarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Вычислим сначала гомологии:

$$H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}, H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_2(C_\bullet) = 0, H_3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

Теперь вычислим когомологии:

$$H^0(C_\bullet) = \mathbb{Z}, H^1(C_\bullet) = 0, H^2(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H^3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

То есть, сами группы не изменились, но изменилась градуировка.

Это вполне естественно, так как, на самом деле, любой цепной комплекс конечно-порожденных свободных абелевых групп является прямой суммой комплексов

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ и } 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

и в силу того, что функтор  $\text{Hom}$  аддитивен на конечных копроизведениях, применяя  $\text{Hom}(\_, \mathbb{Z})$  к исходному комплексу, мы получаем прямую сумму комплексов

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \text{ и } 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

Таким образом, мораль всего этого дела в том, что группы когомологий — тоже самое, что группы гомологий, за исключением того, что кручение смещается на одну размерность.

**Утверждение 5.** Пусть  $(C_\bullet, \partial)$  — цепной комплекс. Тогда существует гомоморфизм

$$h: H^n(C; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C), G).$$

*Доказательство.* Рассмотрим когомологический класс  $[\varphi] \in H^n(C_\bullet; G)$ ,  $\varphi: C_n \rightarrow G$ ,  $\delta\varphi = 0$ .

$$\delta\varphi = \varphi\partial \Leftrightarrow \varphi|_{\text{Im } \partial_{n+1}} = 0$$

Ограничение  $\varphi_0 = \varphi|_{\text{Ker } \partial_n}: \text{Ker } \partial_n \rightarrow G$  индуцирует гомоморфизм факторизации

$$\overline{\varphi}_0: \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} \rightarrow G, \quad \overline{\varphi}_0 \in \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G).$$

Таким образом, полагая  $h(\varphi) = \overline{\varphi}_0$ , мы получаем нужное. □

**Упражнение.**  $h$  — эпиморфизм.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow Z_{n+1} \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} B_n \rightarrow 0$$

Применяя функтор  $\text{Hom}(-, G)$  мы получаем точную последовательность

$$0 \leftarrow Z^{n+1} \leftarrow C^{n+1} \leftarrow B^{n+1} \leftarrow 0$$

На самом деле, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longleftarrow & Z^{n+1} & \longleftarrow & C^{n+1} & \longleftarrow & B^n \longleftarrow 0 \\
& & \uparrow 0 & & \uparrow \delta & & \uparrow 0 \\
0 & \longleftarrow & Z^n & \longleftarrow & C^n & \longleftarrow & B^{n-1} \longleftarrow 0
\end{array}$$

Видно, что эта диаграмма — часть короткой точной последовательности комплексов. Она даёт нам длинную точную последовательность:

$$\dots \leftarrow B^n \leftarrow Z^n \leftarrow H^n(C_\bullet, G) \leftarrow B^{n-1} \leftarrow Z^{n-1} \leftarrow \dots$$

Разбивая длинную точную последовательность на короткие точные последовательности мы получаем:

$$0 \leftarrow \text{Ker}(Z^n \rightarrow B^n) \xleftarrow{h} H^n(C_\bullet; G) \leftarrow \text{Coker}(Z^{n-1} \rightarrow B^{n-1}) \leftarrow 0$$

А теперь заметим, что  $\text{Ker}(Z^n \rightarrow B^n) = \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$ . Таким образом, мы получаем расщепимую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \text{Coker}(Z^{n-1} \rightarrow B^{n-1}) \rightarrow H^n(C_\bullet; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \rightarrow 0.$$

**Определение 16.** Пусть  $H$  — абелева группа. Тогда её *свободная резольвента* — это точная последовательность

$$\dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0,$$

в которой каждая группа  $F_n$  свободная.

Применяя к этой точной последовательности функтор  $\text{Hom}(-, G)$  мы можем потерять точность, но во всяком случае, получим цепной комплекс:

$$\leftarrow F_2^* \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Будем обозначать группы когомологий свободной резольвенты, как  $H^n(F, G)$ . Нам понадобится следующее утверждение из гомологической алгебры:

**Лемма 9.** Пусть даны свободные резольвенты  $F$  и  $F'$  абелевых групп  $H$  и  $H'$ . Тогда любой гомоморфизм  $\alpha: H \rightarrow H'$  можно продолжить до цепного отображения  $F \rightarrow F'$ . Кроме того, любые два таких цепных отображения, продолжающие гомоморфизм  $\alpha$ , цепно гомотопны.

Для любых двух свободных резольвент  $F$  и  $F'$  группы  $H$  существуют канонические изоморфизмы

$$H^n(F; G) \cong H^n(F'; G).$$

У любой абелевой группы  $H$  есть свободная резольвента вида

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow H \rightarrow 0$$

с  $F_i = 0$  при  $i > 1$ , которую мы сейчас построим.

Выберем в  $H$  набор образующих и пусть  $F_0$  — группа, свободно порожденная этими образующими. Тогда у нас есть сюръективный гомоморфизм  $f_0: F_0 \rightarrow H$ , переводящий элементы базиса в образующие  $H$ . Его ядро будет свободно, как подгруппа свободной группы, поэтому мы можем положить  $F_1 = \text{Ker } f_0$ , а в качестве  $f_1$  взять включение  $\text{Ker } f_0 \hookrightarrow F_0$ .

Для этой свободной резольвенты мы имеем  $H^n(F; G) = 0 \ \forall n > 1$ , поэтому, из леммы 9 мы получаем, что это должно быть верно для всех свободных резольвент.

Таким образом, единственная интересная группа из  $H^n(F; G)$  — это  $H^1(F; G)$ . Эта группа зависит лишь от  $H$  и  $G$ , поэтому обычно её обозначают  $\text{Ext}(H, G)$ <sup>9</sup>.

<sup>9</sup>Вообще говоря, в гомологической алгебре функтор  $\text{Ext}$  обычно интерпретируют, как множество классов эквивалентности расширений  $G$  посредством  $H$ , но в алгебраической топологии такая интерпретация редко нужна.

Так вот, из построения свободной резольвенты для группы  $H$  и определения когомологий мы теперь наконец можем заметить, что

$$\text{Coker}(Z^{n-1} \rightarrow B^{n-1}) = \text{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G).$$

Теперь мы наконец можем заключить, что мы доказали формулу универсальных коэффициентов для когомологий:

**Теорема 21** (Об универсальных коэффициентах для когомологий). Пусть  $C_\bullet$  — цепной комплекс. Тогда его группы когомологий определяются расщепимыми короткими точными последовательностями

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G) \rightarrow H^n(C; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C), G) \rightarrow 0$$

Вообще говоря, это утверждение достаточно полезно, потому что на конечнопорожденных абелевых группах функтор  $\text{Ext}$  несложно посчитать:

- $\text{Ext}(H \oplus H', G) \cong \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$ .
- $\text{Ext}(H, G) = 0$ , если  $H$  — свободна.
- $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$ .
- Если  $H$  конечно порождена, то имеет место изоморфизм

$$\text{Ext}(H, \mathbb{Z}) \cong \text{Tor}(H).$$

Кроме того, теорема об универсальных коэффициентах позволяет вычислять когомологии, зная только гомологии.

**Следствие 9.** Если группы гомологий  $H_n(C)$  и  $H_{n-1}(C)$  комплекса  $C$ , состоящего из свободных абелевых групп, конечно порождены и  $T_n \subset H_n$  и  $T_{n-1} \subset H_{n-1}$  — подгруппы кручения, то

$$H^n(C; \mathbb{Z}) \cong (H_{n-1}(C)/T_n) \oplus T_{n-1}.$$

Это следствие даёт нам обобщение и формализацию примера 8.

Кроме того, из всего этого дела есть еще одно замечательное следствие:

**Следствие 10.** Если  $f: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$  индуцирует изоморфизм всех групп гомологий  $H_k(C_\bullet) \cong H_k(C'_\bullet)$ . Тогда отображения  $f^*: H^k(C_\bullet; G) \cong H^k(C'_\bullet; G)$ .

*Доказательство.* Действительно, достаточно заметить, что из свойств свободной резольвенты мы знаем, что отображение цепных комплексов индуцирует такую вот диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) & \longrightarrow & H^n(C; G) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(C'), G) & \longrightarrow & H^n(C'; G) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_{n-1}(C'), G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Применяя 5-лемму и индукцию, мы получаем нужное. □

## 1.23 Умножение в когомологиях

Пусть  $R$  — коммутативное и ассоциативное кольцо.

Пусть  $\varphi \in C^k(X; R)$ ,  $\psi \in C^\ell(X; R)$ . Тогда их произведением определяется таким образом:

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+\ell}, \quad (\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots v_k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_{k+\ell} \dots v_{k+\ell}]}),$$

где  $\sigma: \Delta^{k+\ell} \rightarrow X$  — сингулярный симплекс.

**Лемма 10.** Для кограницы  $\smile$ -произведения справедлива следующая формула:

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi.$$

*Доказательство.* Пусть  $\sigma: \Delta^{k+\ell} \rightarrow X$  — сингулярный симплекс. Тогда

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]}) \psi(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell+1}]}).$$

Распишем теперь второй кусок:

$$(-1)^k (\varphi \smile \delta\psi) = \sum_{i=k}^{k+\ell+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+\ell+1}]}).$$

Когда мы сложим эти две суммы, последнее слагаемое первой суммы сократится с первым слагаемым второй, а всё, что останется — как раз  $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$ .  $\square$

*Замечание.* Таким образом,  $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi \pm \delta\psi \smile \varphi$ . Из этого следует, что произведение коциклов — коцикл. Также это сразу даёт нам, что произведение коцикла и кограницы (в любом порядке) — кограница:

$$\varphi \smile \delta\psi = \pm \delta(\varphi \smile \psi)$$

Это даёт нам ассоциативное дистрибутивное умножение

$$\smile: H^k(X; R) \times H^\ell \rightarrow H^{k+\ell}(X; R).$$

Таким образом, при помощи  $\smile$ -произведения, мы наделили

$$H^*(X; R) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X; R)$$

структурой кольца (а на самом деле, градуированной алгебры).

Если в кольце  $R$  есть единица, то единицей относительно  $\smile$ -произведения будет нульмерный коцикл  $1 \in H^0(X; R)$ , принимающий значение 1 на любом нульмерном сингулярном симплексе.

*Замечание.* Это показывает нам отдельную пользу когомологий: например, у  $\mathbb{CP}^2$  и  $S^4 \vee S^2$  все группы гомологий и группы когомлогий совпадают, а кольца когомологий отличаются.

## 2. Комплексные многообразия

### 2.1 Комплексные многообразия

**Определение 17.** Комплексным многообразием  $M$  называется гладкое многообразие, допускающее такое открытое покрытие  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  и такие координатные отображения  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ , что все функции перехода  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  голоморфны на  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

Функция  $f$  на открытом подмножестве  $U \subset M$  называется *голоморфной*, если  $\forall \alpha \in I$  функция  $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  голоморфна в  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$ .

Набор  $z = (z_1, \dots, z_n)$  функций на  $U \subset M$  называется *голоморфной системой координат*, если  $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$  и  $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$  голоморфны на  $z(U \cap U_\alpha)$  и  $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$  для всех  $\alpha$ .

Отображение  $f: M \rightarrow N$ , где  $M$  и  $N$  — комплексные многообразия, называется *голоморфным*, если в голоморфных локальных координатах оно задаётся голоморфными функциями.

**Пример 9** (Примеры комплексных многообразий). Приведём какие-нибудь примеры комплексных многообразий:

1. Одномерное комплексное многообразие называют **римановой поверхностью**.
2.  $P\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\{z \sim \lambda z\} = \mathbb{P}^n$  — комплексное проективное пространство. Это пространство компактно, так как есть непрерывное сюръективное отображение  $S^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$ .
3. Пусть  $\Lambda = \mathbb{Z}^k \subset \mathbb{C}^n$  — дискретная решётка. Факторгруппа  $\mathbb{C}^n/\Lambda$  обладает структурой комплексного многообразия, которую индуцирует проекция  $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n/\Lambda$ . Это многообразие компактно тогда и только тогда, когда  $k = 2n$  и в этом случае  $\mathbb{C}^n/\Lambda$  называется **комплексным тором**.
4. Тут был еще пример, что при неразветвлённом накрытии структура комплексного многообразия наследуется, но я хз, что такое разветвлённое накрытие.

#### Касательное пространство к комплексному многообразию.

Пусть  $M$  — комплексное многообразие,  $p \in M$ , а  $z = (z_1, \dots, z_n)$  — система голоморфных координат в окрестности  $p$ . В случае комплексного многообразия имеются три различных понятия *касательного пространства* к  $M$  в точке  $p \in M$ .

1. Рассмотрим  $M$ , как вещественное  $2n$ -многообразие. Тогда  $T_{\mathbb{R},p}M$  — пространство  $\mathbb{R}$ -линейных дифференцирований кольца  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  (с носителем в окрестности  $p$ ). Если мы представим голоморфные координаты в виде  $z_j = x_j + iy_j$ , то  $T_{\mathbb{R},p}M$  будет иметь базис  $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$ , как векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .
2. Пространство  $T_{\mathbb{R},p}M$  можно комплексифицировать при помощи расширения скаляров, то есть рассмотреть

$$T_{\mathbb{C},p}M \stackrel{\text{def}}{=} T_{\mathbb{R},p}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

$T_{\mathbb{C},p}M$  называют *комплексифицированным касательным пространством* к  $M$  в точке  $p$ . Его можно реализовать, как пространство  $\mathbb{C}$ -линейных дифференцирований кольца  $C^\infty(M, \mathbb{C})$  (опять же, функции с носителем в окрестности  $p$ ). Соответственно, там можно выбрать базис  $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$ , а при замене базиса на комплексные обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

«более стандартный» базис  $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\}$ .

3. Подпространство  $T'_pM = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial z_j}\} \leq T_{\mathbb{C},p}M$  называется *голоморфным касательным пространством* к  $M$  в точке  $p$ . Оно может быть реализовано, как подпространство в  $T_{\mathbb{C},p}M$ , состоящее из дифференцирований, обращающихся в ноль на антиголоморфных функциях (таких  $f$ , что  $\bar{f}$  — голоморфна). Соответственно, подпространство  $T''_pM = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\}$  называется *антиголоморфным касательным пространством* к  $M$  в точке  $p$ . Ясно, что

$$T_{\mathbb{C},p}M = T'_pM \oplus T''_pM.$$

Заметим, что для комплексных многообразий  $M, N$  любое  $f \in C^\infty(M, N)$  индуцирует линейное отображение

$$f_*: T_{\mathbb{R},p}M \rightarrow T_{\mathbb{R},f(p)}N$$

а значит и линейное отображение

$$f_*: T_{\mathbb{C},p}M \rightarrow T_{\mathbb{C},f(p)}N,$$

но не отображение  $T'_pM \rightarrow T'_{f(p)}N$  для всех  $p \in M$ .

На самом деле, отображение  $f: M \rightarrow N$  голоморфно тогда и только тогда, когда

$$f_*(T'_pM) \subset T'_{f(p)}N \quad \forall p \in M.$$

То есть, когда голоморфное касательное пространство отображается в голоморфное.

Заметим, что также, поскольку  $T_{\mathbb{C},p}M = T_{\mathbb{R},p}M \otimes \mathbb{C}$ , операция сопряжения, переводящая

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

корректно определена на  $T_{\mathbb{C},p}M$  и, как нетрудно заметить,  $T''_pM = \overline{T'_pM}$ . Отсюда следует, что проекция

$$T_{\mathbb{R},p}M \rightarrow T_{\mathbb{C},p}M \rightarrow T'_pM$$

есть  $\mathbb{R}$ -линейный изоморфизм.

Это обстоятельство позволяет заниматься геометрией исключительно в голоморфном касательном пространстве.

**Пример 10.** Пусть  $z(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  — гладкая кривая. Тогда  $z(t) = x(t) + iy(t)$  и в качестве касательной мы можем взять

$$x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y} \text{ в } T_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \text{ либо } z'(t)\frac{\partial}{\partial z} \text{ в } T'\mathbb{C}.$$

**Определение 18.** Пусть теперь  $M, N$  — комплексные многообразия,  $z = (z_1, \dots, z_n)$  — голоморфные координаты в окрестности точки  $p \in M$ , а  $(w_1, \dots, w_n)$  — голоморфные координаты в окрестности точки  $q = f(p)$ , где  $f: M \rightarrow N$  — голоморфное отображение. В связи с различными понятиями касательных пространств, мы имеем и различные понятия якобиана  $f$ .

1. Пусть  $z_j = x_j + iy_j$ ,  $w_k = u_k + iv_k$ . Тогда в базисах  $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$  и  $\{\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial v_k}\}$  пространств  $T_{\mathbb{R},p}M$  и  $T_{\mathbb{R},q}N$  линейное отображение  $f_*$  задаётся  $2m \times 2n$ -матрицей

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} & \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j} & \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$

В базисах  $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\}$  и  $\{\frac{\partial}{\partial w_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k}\}$  пространств  $T_{\mathbb{C},p}M$  и  $T_{\mathbb{C},q}N$  отображение  $f_*$  задаётся матрицей

$$\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(f) & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{J}(f)} \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}(f) = \left( \frac{\partial w_k}{\partial z_j} \right)_{k,j}.$$

*Замечание.* В частности, отметим, что  $\text{rank } \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = 2 \text{rank } \mathcal{J}(f)$  и в случае  $m = n$

$$\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \det \mathcal{J}(f) \det \overline{\mathcal{J}(f)} = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \geq 0,$$

то есть голоморфные отображения **сохраняют ориентацию**.

Мы будем считать, что пространство  $\mathbb{C}^n$  естественно ориентированно  $2n$ -формой

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge (dz_2 \wedge d\bar{z}_2) \wedge \dots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n) = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n.$$

Ясно, что если  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$  и  $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^n$  — голоморфные координатные отображения на комплексном многообразии  $M$ , то прообразы при  $\varphi_\alpha$  и  $\varphi_\beta$  естественной ориентации на  $\mathbb{C}^n$  согласованы на  $U_\alpha \cap U_\beta$ .

Соответственно, любое комплексное многообразие **имеет естественную ориентацию**, которая сохраняется при голоморфных отображениях.

## 2.2 Подмногообразия и аналитические подмножества

Докажем теперь несколько классических теорем для случая комплексных многообразий.

**Теорема 22** (Об обратном отображении). Пусть  $U, V$  — открытые подмножества в  $\mathbb{C}^n$ ,  $0 \in U$  и  $f: U \rightarrow V$  — такое голоморфное отображение, что матрица  $\mathcal{J}(f) = (\partial f_i / \partial z_j)$  невырождена в 0.

Тогда отображение  $f$  взаимно однозначно в окрестности точки 0 и обратное отображение  $f^{-1}$  голоморфно в некоторой окрестности  $f(0)$ .

*Доказательство.* Как мы уже отмечали в 2.1,  $|\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f)| = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \neq 0$  в точке 0, а значит, по обычной теореме об обратном отображении, функция  $f$  имеет в окрестности точки 0 обратную  $C^\infty(U, V)$  функцию  $f^{-1}$ . Заметим, что  $f^{-1}(f(z)) = z$ , так что, дифференцируя это равенство в нуле мы имеем

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f^{-1}(f(z)))_j = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial z_k} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_i} + \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \bar{z}_k} \left( \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \right) = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \bar{z}_k} \left( \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \right) \quad \forall i, j.$$

Так как матрица  $(\partial f_k / \partial z_j)$  была невырождена, отсюда следует, что  $\partial f_j^{-1} / \partial \bar{z}_k = 0 \quad \forall j, k$ , что и означает голоморфность функции  $f$ .  $\square$

**Теорема 23** (О неявной функции). Пусть заданы функции  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_n$ , удовлетворяющие условию

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0.$$

Тогда существуют такие функции  $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{O}_{n-k}$ , что в окрестности точки  $0 \in \mathbb{C}^n$

$$f_1(z) = \dots f_k(z) = 0 \Leftrightarrow z_i = w_i(z_{k+1}, \dots, z_n), \quad 1 \leq i \leq k.$$

*Доказательство.* Как обычно, по обычной теореме о неявной функции в случае  $C^\infty$  существуют функции  $\omega_1, \dots, \omega_k$  с нужным свойством. Остается показать голоморфность. Это делается непосредственно вот таким стандартным вычислением:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} (f_j(\omega(z), z)) = \dots = \sum \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial f_j}{\partial \omega_\ell} \Rightarrow \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0 \quad \forall \alpha, \ell,$$

$\square$

*Замечание.* Видимо почти всегда, когда мы хотим показать голоморфность, мы тупо считаем в локальных производных антиголоморфную производную.

Теперь мы увидим, что комплексные многообразия в смысле их морфизмов таки имеют свою, отличную от вещественной, специфику:

**Утверждение 6.** Если  $f: U \rightarrow V$  — взаимно однозначное голоморфное отображение открытых множеств в  $\mathbb{C}^n$ , то  $\det \mathcal{J}(f) \neq 0$ , то есть  $f^{-1}$  голоморфно.

*Замечание.* Мы видели этот факт в обычном комплексном анализе (доказывали, что производная однолистной функции не обнуляется).

**Определение 19.** Комплексным подмногообразием  $S$  комплексного многообразия  $M$  называется подмножество  $S \subset M$ , которое локально задается либо как множество нулей совокупности голоморфных функций  $f_1, \dots, f_k$  с условием  $\text{rank } \mathcal{J}(f) = k$ , либо как образ открытого подмножества  $U \subset \mathbb{C}^{n-k}$  при отображении  $f: U \rightarrow M$  с условием  $\text{rank } \mathcal{J}(f) = n - k$ .

Эквивалентность этих определений следует из теоремы о неявной функции 23.



**Определение 20.** Аналитическим подмножеством  $V$  комплексного многообразия  $M$  называется подмножество, являющееся локально множеством нулей конечного набора голоморфных функций.

Точка  $p \in V$  называется *гладкой*<sup>10</sup> точкой  $V$ , если  $V$  в некоторой её окрестности задаётся набором голоморфных функций  $f_1, \dots, f_k$ , причем таким, что  $\text{rank } \mathcal{J}(f) = k$ .

Множество гладких точек  $V$  обозначается  $V^*$ , а все точки из  $V \setminus V^*$  называются *особыми*. Они формируют множество особенностей аналитического подмножества  $V$ , которое мы будем обозначать, как  $V_s$ .

В частности, если  $p$  — точка аналитической гиперповерхности  $V \subset M$ , задаваемой в локальных координатах  $z$  функцией  $f$ , определим *кратность*  $\text{mult}_p(V)$ , как порядок обращения  $f$  в нуль в точке  $p$ , то есть наибольшее такое  $m$ , что

$$\frac{\partial^k f}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = 0 \quad \forall k \leq m - 1.$$

**Утверждение 7.** Множество  $V_s$  содержится в аналитическом подмножестве многообразия  $M$ , не совпадающем с  $V$ .

*Замечание.* А на самом деле, при аккуратном выборе функций, несложно показать, что  $V_s$  — аналитическое подмножество в  $M$ .

Запомним также полезный нам в будущем факт:

**Утверждение 8.** Аналитическое множество  $V$  неприводимо тогда и только тогда, когда  $V^*$  связно.

Тут было еще что-то про касательные конусы, пока что забудем на это, лень читать.

### 2.3 Когомологии де Рама и Дольбо

Пусть  $M$  — гладкое многообразие. Обозначим за  $A^p(M; \mathbb{R})$  пространство дифференциальных форм степени  $p$  на  $M$ , а через  $Z^p(M; \mathbb{R})$  подпространство замкнутых  $p$ -форм.

Так как  $d^2 = 0$ , у нас есть (ко)цепной комплекс

$$A^0(M; \mathbb{R}) \rightarrow \dots \rightarrow A^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow A^{p+1}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \dots$$

а его группы когомологий называются группами *когомологий де Рама* многообразия  $M$ .

Иными словами, группы когомологий де Рама — это факторгруппы замкнутых форм по модулю точных

$$H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) = Z^p(M; \mathbb{R}) / dA^{p-1}(M).$$

Совершенно также мы можем рассматривать комплекснозначные формы и давать все соответствующие определения (используя обозначения  $A^p(M)$  и аналогичные, то есть без коэффициентов):

$$H_{\text{DR}}^p(M) = Z^p(M) / dA^{p-1}(M)$$

*Замечание.* Нетрудно заметить, что как и всегда с коэффициентами,

$$H_{\text{DR}}^p(M) = H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}.$$

Как мы заметили в самом первом параграфе, комплексифицированное кокасательное пространство раскладывается в голоморфную и антиголоморфную часть:

$$T_{\mathbb{C},z}^* M = T_z^{*'} M \oplus T_z^{*''} M,$$

что дает нам разложение

$$\Lambda^n T_{\mathbb{C},z}^* M = \bigoplus_{p+q=n} \left( \Lambda^p T_z^{*'}(M) \otimes \Lambda^q T_z^{*''}(M) \right),$$

а это (по определению внешних форм) даёт нам

$$A^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M), \text{ где}$$

<sup>10</sup>возможно, корректнее использовать слово регулярная?

$$A^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^n(M) \mid \varphi(z) \in \Lambda^p T_z^{*'}(M) \otimes \Lambda^q T_z^{*''}(M) \forall z \in M\}.$$

Соответственно, форму  $\varphi \in A^{p,q}$  называют формой типа  $(p, q)$ . Обозначим за  $\pi^{(p,q)}$  проекцию

$$A^*(M) \rightarrow A^{p,q}(M),$$

так что для  $\varphi \in A^*(M)$  имеем  $\varphi = \sum \pi^{(p,q)} \varphi$ .

Если  $\varphi \in A^{p,q}(M)$ , то для любого  $z \in M$

$$d\varphi(z) \in \left( \Lambda^p T_z^{*'} M \otimes \Lambda^q T_z^{*''} M \right) \wedge T_{\mathbb{C},z}^* M,$$

$$d\varphi \in A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M).$$

Определим теперь для этих замечательных дифференциальных форм операторы

$$\bar{\partial}: A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p,q+1}, \quad \partial: A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p+1,q}(M)$$

$$\bar{\partial} = \pi^{(p,q+1)} \circ d, \quad \partial = \pi^{(p+1,q)} \circ d, \quad \text{то есть } d = \partial + \bar{\partial}.$$

В локальных координатах  $z = (z_1, \dots, z_n)$  форма  $\varphi \in A^n(M)$  имеет тип  $(p, q)$ , если она имеет представление в виде

$$\varphi(z) = \sum_{I,J} \varphi_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

*Замечание.* Короче говоря, вся эта страшная белиберда была, чтоб сказать, что бывают не только голоморфные дифференциальные формы, но и такие, где один кусок голоморфный, а другой антиголоморфный.

Дифференцировать эти формы можно так:

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \sum_{I,J,j} -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \varphi_{IJ}$$