И. Р. ШАФАРЕВИЧ

ОСНОВЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Том 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава **I. Основные понятия** 5

§ 1. Плоские алгебраические кривые 5

1. Плоские кривые (5). 2. Рациональные кривые (9). 3. Связь с теорией полей (13). 4. Рациональные отображения (16). 5. Особые и простые точки (19). 6. Проективная плоскость (23). Задачи (30).

§ 2. Замкнутые подмножества аффинных пространств . . 31

1. Определение замкнутых подмножеств (31). 2. Регулярные функции на замкнутом множестве (33). 3. Регулярные отображения (36). Задачи (43).

§ 3. Рациональные функции 45

1. Неприводимые множества (45). 2. Рациональные функции (47). 3. Рациональные отображения (49). Задачи (53).

§ 4. Квазипроективные многообразия 54

1. Замкнутые подмножества проективного пространства (54). 2. Регулярные функции (61). 3. Рациональные функции (67). 4. Примеры регулярных отображений (69). Задачи (71).

§ 5. Произведения и отображения квазипроективных многообразий 72

1. Произведения (72). 2. Замкнутость образа проективного многообразия (76). 3. Конечные отображения (80). 4. Нормализационные теоремы (85). Задачи (86).

§ 6. Размерность 86

1. Определение размерности (86). 2. Размерность пересечения с гиперповерхностью (90). 3. Теорема о размерности слоев (97). 4. Прямые на поверхностях (99). Задачи (103).

Глава **II. Локальные свойства** 105

§ 1. Простые и особые точки 105

1. Локальное кольцо точки (105). 2. Касательное пространство (107). 3. Инвариантность касательного пространства (109). 4. Особые точки (116). 5. Касательный конус (119). Задачи (120).

§ 2. Разложение в степенные ряды 122

1. Локальные параметры в точке (122). 2. Разложение в степенные ряды (125). 3. Многообразия над полем действительных и полем комплексных чисел (130). Задачи (132).

§ 3. Свойства простых точек 133

1. Подмногообразия коразмерности 1 (133). 2. Гладкие подмногообразия (137). Задачи (139).

§ 4. Строение бирациональных изоморфизмов 140

1. σ-процесс в проективном пространстве (140). 2. Локальный σ-процесс (143). 3. Поведение подмногообразий при σ-процессе (145). 4. Исключительные подмногообразия (147). 5. Изоморфизм и бирациональный изоморфизм (148). Задачи (153).

§ 5. Нормальные многообразия 154
1. Нормальность (154). 2. Нормализация аффинных многообразий (159). 3. Нормализация кривых (161). 4. Проективные вложения гладких многообразий (168). Задачи (170).
§ 6. Особенности отображений 171
1. Неприводимость (171). 2. Гладкость (173). 3. Ветвление (175). 4. Примеры (179). Задачи (182).

Глава III. **Дивизоры и дифференциальные формы** . . . 184

§ 1. Дивизоры 184
1. Дивизор функции (184). 2. Локально главные дивизоры (189). 3. Как сдвинуть носитель дивизора с точек (193). 4. Дивизоры и рациональные отображения (194). 5. Пространство, ассоциированное с дивизором (196). 6. Пучок коник над $\mathbf{P}^1$ (200). Задачи (203).
§ 2. Дивизоры на кривых 205
1. Степень дивизора на кривой (205). 2. Теорема Безу на кривой (209). 3. Размерность дивизора (211). Задачи (212).
§ 3. Плоская кубика 213
1. Группа классов (213). 2. Групповой закон (216). 3. Отображения (220). 4. Приложения (222). 5. Алгебраически незамкнутое поле (224). Задачи (227).
§ 4. Алгебраические группы 227
1. Алгебраические группы (228). 2. Факторгруппы. Теорема Шевалле (229). 3. Абелевы многообразия (230). 4. Многообразие Пикара (232). Задачи (234).
§ 5. Дифференциальные формы 234
1. Одномерные регулярные дифференциальные формы (234). 2. Алгебраическое описание модуля дифференциалов (239). 3. Дифференциальные формы высших степеней (240). 4. Рациональные дифференциальные формы (244). Задачи (246).
§ 6. Примеры и применения дифференциальных форм . . 247
1. Поведение при отображениях (247). 2. Инвариантные дифференциальные формы на группе (250). 3. Каяонический класс (252). 4. Гиперповерхности (254). 5. Гиперэллиптические кривые (258). 6. Теорема Римана — Роха на кривых (260). 7. Проективные погружения поверхностей (263). Задачи (265).

Глава IV. **Индексы пересечения** 267

§ 1. Определение и основные свойства 267
1. Определение индекса пересечения (267). 2. Аддитивность индекса пересечения (271). 3. Инвариантность относительно эквивалентности (273). 4. Общее определение индекса пересечения (278). Задачи (282).
§ 2. Приложения индексов пересечения 282
1. Теорема Безу в проективном пространстве и произведении проективных пространств (282). 2. Многообразие над полем действительных чисел (285). 3. Род гладкой кривой на поверхности (288). 4. Неравенство Римана — Роха на поверхности (293). 5. Гладкая кубическая поверхность (294). 6. Кольцо классов циклов (298). Задачи (300).
§ 3. Бирациональные изоморфизмы поверхностей . . . 300
1. σ-процессы поверхностей (301). 2. Некоторые индексы пересечения (302). 3. Разрешение точек нерегулярности (303). 4. Разложение на σ-процессы (305). 5. Замечания и примеры (308). Задачи (311).

§ 4. Особенности 312
1. Особые точки кривых (312). 2. Особые точки поверхностей (315). 3. Особенности Дю Валя (317). 4. Вырождения кривых (322). Задачи (325).

Алгебраическое приложение 327
1. Линейная алгебра (327). Многочлены (329). 3. Полулинейные преобразования (330). 4. Поля (331). 5. Инварианты (334). 6. Кольца (335). 7. Однозначность разложения на простые множители (338). 8. Целые элементы (339). 9. Длины модулей (340).

Список литературы 343
Предметный указатель 345

ББК 22.147
Ш30
УДК 512.7

Шафаревич И. Р. **Основы алгебраической геометрии: В 2-х т. Т. 1. Алгебраические многообразия в проективном пространстве.**— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 352 с.— ISBN 5-02-14412-6 (Т. 1)

Посвящена систематическому изложению основ алгебраической геометрии. Дает общее представление об этой области и основу для чтения более специальной литературы. Изложение иллюстрировано большим числом примеров и приложений.

Соответствует первой части первого издания книги (1972 г.). Внесены изменения, цель которых — отразить сдвиги в точках зрения на алгебраическую геометрию, наметившиеся за 15 лет, прошедших со времени выхода первого издания. В их числе — более подробная теория особенностей; изучение конкретных, важных для приложений, алгебраических многообразий; теоретико-числовые приложения.

Для математиков — студентов, аспирантов и научных работников.

Ил. 18. Библиогр. 31 назв.

Ш $\frac{1702040000-133}{053(02)-88}$ 49-88

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1988

ISBN 5-02-14412-6 (Т. 1)
ISBN 5-02-013729-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание этой книги появилось как раз в тот момент, когда аппарат алгебраической геометрии достиг уровня, который давал возможность прозрачно и сжато изложить основы этой науки. Автор не стоял больше перед мучительным выбором: жертвовать ли строгостью изложения или загромождать ясную геометрическую картину сложным алгебраическим аппаратом.

Действительно, за 15 лет, прошедших со времени первого издания, появилось много прекрасных книг, излагающих различные разделы алгебраической геометрии. Однако та цель, которую ставила себе эта книга: не заходя далеко в глубь различных теорий, дать общее представление о разнообразных аспектах алгебраической геометрии, не привлекла, насколько мне известно, других авторов. Это и дает некоторое основание для второго издания. При подготовке его я включил в книгу дополнительно довольно разнообразный материал и кое-что из нее исключил, хотя общий характер ее остался прежним.

Сейчас книга появляется в двух томах. Первый том соответствует главам I—IV первого издания. В него добавлено довольно много конкретно-геометрического материала: сильно расширен первый параграф, образующий мост между аналитической геометрией и теорией плоских алгебраических кривых. Больше места уделено конкретным алгебраическим многообразиям: грассманианам, плоской кубике, кубической поверхности. В первом издании особые точки играли в основном роль строгого определения тех ситуаций, которых мы хотим избегать. Теперь изложены различные вопросы, связанные с вырождениями слоев семейств: вырождения квадрик и эллиптических кривых, теоремы Бертини. Рассказано о понятии бесконечно-близких точек алгебраических кривых и о нормальных особенностях поверхностей. Наконец, добавлены некоторые теоретико-числовые приложения: дзета-функции алгебраических многообразий над конечным полем, аналог гипотезы Римана для эллиптических кривых.

Большей частью этот материал взят из моих старых лекций и семинаров, записки которых мне предоставили их участники. Некоторые улучшения доказательств я заимствовал из книг Мамфорда и Фултона. Ряд опечаток и неточностей в первом издании был сообщен мне его читателями, а также читателями английских изданий этой книги. Особенно полезны были советы А. Н. Тюрина и В. С. Куликова — последнему, в частности, принадлежит доказательство теоремы 3 в § 4 гл. IV. Всем им я приношу искреннюю благодарность.

Характер книги требовал ограничиться минимальным алгебраическим аппаратом. Кроме университетского курса алгебры предполагаются известными основы теории полей: трансцендентных и конечных расширений (но не теория Галуа) и теории колец: идеалы, факторкольца. В некоторых изолированных местах мы ссылаемся на алгебраическую литературу. Эти ссылки подобраны так, чтобы соответствующее место можно было понять независимо от предшествующих частей книги, в которой оно содержится. Несколько более специальных алгебраических вопросов собрано в «Алгебраическом приложении», помещенном в конце первого тома. При ссылках оно называется «Приложение». Предисловие ко второму тому содержит рекомендации для дальнейшего чтения в области алгебраической геометрии.

Список литературы в конце первого тома содержит работы, на которые есть ссылки в этом томе, а список, помещенный в конце второго тома, относится к обоим томам. Предметный указатель — отдельный для каждого тома: в нем приведены термины, определение которых содержится в этом томе.

Редактор второго издания книги В. Л. Попов внес в нее много существенных улучшений. Я очень благодарен ему за большую и вдумчивую работу.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Плоские алгебраические кривые

Первая глава будет посвящена ряду основных понятий алгебраической геометрии. В первом параграфе мы разберем некоторые примеры, которые подготовят введение этих понятий.

1. Плоские кривые. *Плоская алгебраическая кривая* состоит из точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$f(x,\ y)=0, \tag{1}$$

где f — непостоянный многочлен. Мы фиксируем некоторое поле k и будем предполагать, что координаты точек и коэффициенты многочлена принадлежат этому полю. Аффинную плоскость, состоящую из точек вида $(a,\ b)$, $a,\ b\in\mathrm{k}$, мы будем обозначать через $\mathbf{A}^2$. Плоскость $\mathbf{A}^2$ — не единственное объемлющее множество, в котором мы будем рассматривать алгебраические кривые — с другим вариантом мы скоро встретимся — ввиду этого определенные выше алгебраические кривые будут называться *аффинными.*

Степень уравнения (1) (т. е. многочлена $f(x,\ y)$) называется также степенью определяемой им кривой. Кривые степени 2 называются *кониками*, степени 3 — *кубиками.*

Как известно, в кольце многочленов $\mathrm{k}[X,\ Y]$ любой многочлен f однозначно (с точностью до постоянных множителей) разлагается на неприводимые множители $f=f_1^{k_1}\ldots f_r^{k_r}$, где неприводимые многочлены f_i не пропорциональны: $f_i\neq\alpha f_j$, $\alpha\in\mathrm{k}$, если $i\neq j$. Тогда алгебраическая кривая X с уравнением $f=0$ является объединением кривых X_i с уравнениями $f_i=0$. Кривая, уравнение которой — неприводимый многочлен, называется *неприводимой*. Полученное выше разложение $X=X_1\cup\ldots\cup X_r$ называется разложением на неприводимые компоненты.

Введенные понятия в некоторых случаях оказываются некорректно определенными или резко расходятся с

Большей частью этот материал взят из моих старых лекций и семинаров, записки которых мне предоставили их участники. Некоторые улучшения доказательств я заимствовал из книг Мамфорда и Фултона. Ряд опечаток и неточностей в первом издании был сообщен мне его читателями, а также читателями английских изданий этой книги. Особенно полезны были советы А. Н. Тюрина и В. С. Куликова — последнему, в частности, принадлежит доказательство теоремы 3 в § 4 гл. IV. Всем им я приношу искреннюю благодарность.

Характер книги требовал ограничиться минимальным алгебраическим аппаратом. Кроме университетского курса алгебры предполагаются известными основы теории полей: трансцендентных и конечных расширений (но не теория Галуа) и теории колец: идеалы, факторкольца. В некоторых изолированных местах мы ссылаемся на алгебраическую литературу. Эти ссылки подобраны так, чтобы соответствующее место можно было понять независимо от предшествующих частей книги, в которой оно содержится. Несколько более специальных алгебраических вопросов собрано в «Алгебраическом приложении», помещенном в конце первого тома. При ссылках оно называется «Приложение». Предисловие ко второму тому содержит рекомендации для дальнейшего чтения в области алгебраической геометрии.

Список литературы в конце первого тома содержит работы, на которые есть ссылки в этом томе, а список, помещенный в конце второго тома, относится к обоим томам. Предметный указатель — отдельный для каждого тома: в нем приведены термины, определение которых содержится в этом томе.

Редактор второго издания книги В. Л. Попов внес в нее много существенных улучшений. Я очень благодарен ему за большую и вдумчивую работу.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Плоские алгебраические кривые

Первая глава будет посвящена ряду основных понятий алгебраической геометрии. В первом параграфе мы разберем некоторые примеры, которые подготовят введение этих понятий.

1. Плоские кривые. *Плоская алгебраическая кривая* состоит из точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

где f — непостоянный многочлен. Мы фиксируем некоторое поле k и будем предполагать, что координаты точек и коэффициенты многочлена принадлежат этому полю. Аффинную плоскость, состоящую из точек вида (a, b), $a, b \in \mathrm{k}$, мы будем обозначать через $\mathbf{A}^2$. Плоскость $\mathbf{A}^2$ — не единственное объемлющее множество, в котором мы будем рассматривать алгебраические кривые — с другим вариантом мы скоро встретимся — ввиду этого определенные выше алгебраические кривые будут называться *аффинными*.

Степень уравнения (1) (т. е. многочлена $f(x, y)$) называется также степенью определяемой им кривой. Кривые степени 2 называются *кониками*, степени 3 — *кубиками*.

Как известно, в кольце многочленов $\mathrm{k}[X, Y]$ любой многочлен f однозначно (с точностью до постоянных множителей) разлагается на неприводимые множители $f = f_1^{k_1} \ldots f_r^{k_r}$, где неприводимые многочлены f_i не пропорциональны: $f_i \neq \alpha f_j$, $\alpha \in \mathrm{k}$, если $i \neq j$. Тогда алгебраическая кривая X с уравнением $f = 0$ является объединением кривых X_i с уравнениями $f_i = 0$. Кривая, уравнение которой — неприводимый многочлен, называется *неприводимой*. Полученное выше разложение $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ называется разложением на неприводимые компоненты.

Введенные понятия в некоторых случаях оказываются некорректно определенными или резко расходятся с нашей интуицией. Связано это со спецификой того поля k, которому принадлежат точки кривой. Например, если $k = \mathbf{R}$, то мы должны, следуя введенной терминологии, называть кривой точку (0, 0), так как она определяется уравнением $x^2 + y^2 = 0$. При этом степень этой «кривой» равна 2, но одновременно и любому другому четному числу, так как та же точка определяется уравнением $x^{2n} + y^{2n} = 0$. Кривая неприводима, если за ее уравнение взять $x^2 + y^2 = 0$, и приводима, если уравнение $-x^6 + y^6 = 0$.

Такие трудности не возникают, если поле k алгебраически замкнуто. В основе лежит следующий простой факт.

Лемма. *Пусть* k — *произвольное поле*, $f \in k[x, y]$ — *неприводимый, а* $g \in k[x, y]$ — *любой многочлен. Если* g *не делится на* f, *то система уравнений* $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ *имеет лишь конечное число решений.*

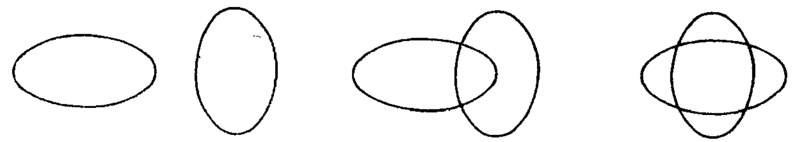
Пусть x входит в многочлен f в положительной степени. Рассмотрим f и g как элементы кольца $k(y)[x]$, т. е. как многочлены от одной переменной x, коэффициенты которых — рациональные функции от y. Легко проверить, что f остается неприводимым и в этом кольце: разложение его на множители после умножения на общий знаменатель $a(y) \in k[y]$ коэффициентов входящих в это разложение многочленов приводит к соотношению, противоречащему неприводимости f в $k[x, y]$. Точно так же g не делится на f и в новом кольце $k(y)[x]$. Поэтому существуют такие два многочлена $\tilde{u}, \tilde{v} \in k(y)[x]$, что $f\tilde{u} + g\tilde{v} = 1$. Умножая это равенство на общий знаменатель $a \in k[y]$ всех коэффициентов многочленов $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, мы получим, что $fu + gv = a$, $u = a\tilde{u}$, $v = a\tilde{v}$, $u, v \in k[x, y]$, $a \neq 0$. Отсюда следует, что если $f(\alpha, \beta) = g(\alpha, \beta) = 0$, то $a(\beta) = 0$, т. е. для второй координаты β имеется только конечное число возможностей. Для каждого такого значения первая координата является корнем многочлена $f(x, \beta)$. Многочлен $f(x, \beta)$ не равен тождественно нулю — иначе $f(x, y)$ делился бы на $y - \beta$ — и поэтому для α также имеется лишь конечное число возможностей. Лемма доказана.

Если поле k алгебраически замкнуто, то оно бесконечно. Поэтому из леммы следует, что кривая с уравнением $f(x, y) = 0$ имеет бесконечное число точек, если многочлен f отличен от постоянной. Ввиду этого неприводимый многочлен однозначно (с точностью до постоянного

множителя) определяется той кривой, уравнением которой он является. То же верно и для произвольного многочлена, в разложение которого на неприводимые множители не входят кратные множители. Мы всегда можем выбрать в качестве уравнения кривой такой многочлен. При таком выборе степень кривой и понятие неприводимости определены уже корректно.

Другая причина, по которой алгебраическая геометрия становится естественной лишь после привлечения алгебраически замкнутого поля, связана с вопросом о числе точек пересечения кривых. С этим явлением мы встречаемся уже в алгебре: теорема о том, что число корней многочлена равно его степени, верна лишь, если корни рассматриваются в алгебраически замкнутом поле. Обобщением этой теоремы является так называемая *теорема Безу*, согласно которой число точек пересечения двух различных неприводимых алгебраических кривых равно произведению их степеней. Доказанная выше лемма показывает, что число это, во всяком случае, конечно. Теорема о числе корней многочлена является ее частным случаем, когда уравнения кривых имеют вид $y - f(x) = 0$, $y = 0$.

Теорема Безу верна лишь после некоторых уточнений. Первое из них заключается в том, что мы должны рассматривать точки с координатами в алгебраически замкнутом поле. Так, на рис. 1 изображены три случая



а б в

Рис. 1

взаимного расположения двух кривых степени 2 (эллипсов) на вещественной плоскости. При этом в случае в) теорему Безу выполнена, а в случаях а) и б) — нет.

Дальше мы будем предполагать поле k алгебраически замкнутым: противное будет всегда оговариваться. Это не значит, что алгебраическая геометрия не может быть применена к изучению вопросов, связанных с алгебраически незамкнутым полем k_0. Однако, как правило, это связано с переходом к алгебраически замкнутому полю

$\mathrm{k} \supset \mathrm{k}_0$. В случае поля $\mathbf{R}$ мы переходим к полю комплексных чисел $\mathbf{C}$. Это часто дает возможность угадать или доказать чисто вещественные соотношения. Вот самый элементарный пример. Если точка P лежит вне окружности C, то через нее можно провести две касательные к этой окружности. Прямая L, соединяющая точки касания, называется *полярой* точки P относительно окружности C (рис. 2, *а*). Все эти операции могут быть выражены в виде алгебраических соотношений между координатами и уравнениями. Поэтому они применимы и к случаю, когда точка P лежит внутри окружности. Конечно, координаты точек касания теперь будут комплексными и на рисунке не видны. Но так как исходные данные

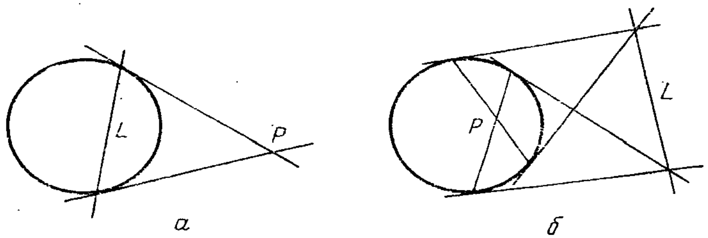


Рис. 2

были вещественны, то совокупность полученных точек (т. е. обе точки касания) должна быть инвариантна при замене всех чисел комплексно сопряженными, т. е. обе точки касания комплексно сопряжены. Поэтому проходящая через них прямая L вещественна. Она также называется полярой точки P относительно окружности C. Легко найти и ее чисто вещественное определение: это геометрическое место точек, лежащих вне окружности, поляры которых проходят через точку P (рис. 2, *б*).

Вот другие ситуации, в которых возникают вопросы, связанные с алгебраической геометрией над алгебраически незамкнутым полем (и при исследовании которых обычно приходится переходить к алгебраически замкнутому полю).

1) $\mathrm{k} = \mathbf{Q}$. Исследование точек алгебраической кривой с уравнением $f(x, y) = 0$, где $f \in \mathbf{Q}[x, y]$ и координаты точек содержатся в $\mathbf{Q}$,— это одна из основных задач теории чисел: теории неопределенных уравнений (например, теорема Ферма требует описания точек $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$ на кривой $x^n + y^n = 1$).

2) k — конечное поле $\mathbf{F}_p$ вычетов по модулю p. Изучение точек с координатами из k на алгебраической кривой с уравнением $f(x, y) = 0$ — это другой вопрос теории чисел: о решениях сравнения $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p}$.

3) $\mathrm{k} = \mathbf{C}(z)$. Рассмотрим алгебраическую поверхность в $\mathbf{A}^3$ с уравнением $F(x, y, z) = 0$, $F \in \mathbf{C}[x, y, z]$. Отнеся в этом уравнении переменную z к коэффициентам, мы можем рассмотреть нашу поверхность как кривую, определенную над полем $\mathbf{C}(z)$. Это очень плодотворный способ изучения алгебраических поверхностей.

2. Рациональные кривые. Как известно, кривая, задаваемая уравнением

$$y^2 = x^2 + x^3, \tag{1}$$

обладает тем свойством, что координаты ее точек могут быть выражены в виде рациональных функций одного параметра. Чтобы вывести это выражение, заметим, что проходящая через начало координат прямая $y = tx$ пересекает кривую (1), кроме начала координат, в одной единственной точке. Действительно, подставим уравнение $y = tx$ в (1). Мы получим, что $x^2(t^2 - x - 1) = 0$. Корень $x = 0$ соответствует точке $O = (0, 0)$. Кроме того, мы имеем еще один корень $x = t^2 - 1$. Из уравнения прямой мы получаем, что $y = t(t^2 - 1)$. Таким образом, имеем искомую параметризацию

$$x = t^2 - 1, \quad y = t(t^2 - 1), \tag{2}$$

причем мы выяснили и ее геометрический смысл: t есть угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (x, y) и O, а x и y, соответствующие t,— координаты отличной от O точки пересечения прямой $y = tx$ и кривой (1). Еще нагляднее можно представить себе эту параметризацию, если провести какую-либо прямую, не проходящую через точку O (например, задаваемую уравнением $x = 1$), и сопоставить точке P точку пересечения Q прямой OP с выбранной прямой (проектирование кривой из точки O) (рис. 3). При этом роль параметра t будет играть координата на выбранной прямой. Как из этого геометрического истолкования, так и из формул (2) видно, что параметр t однозначно определяется (при $x \neq 0$) точкой (x, y).

Дадим теперь общее определение плоских алгебраических кривых, для которых возможно такое представление.

Плоская неприводимая алгебраическая кривая X, определенная уравнением $f(x, y)=0$, называется *рациональной*, если существуют две такие рациональные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, хотя бы одна из которых непостоянна, что

$$f(\varphi(t), \psi(t))=0 \qquad (3)$$

тождественно относительно t. Очевидно, что если $t = t_0$ — значение параметра, отличное от конечного числа значений, обращающих в 0 знаменатели функций φ и ψ, то точка $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ принадлежит кривой X. Дальше мы покажем, что для надлежащим образом выбранной параметризации φ, ψ устанавливаемое таким образом соответствие между значениями параметра t и точками кривой будет взаимно однозначным, если исключить как из значений параметра, так и из точек кривой некоторые конечные множества. При этом параметр t может быть выражен как рациональная функция $\chi(x, y)$ от координат x и y. Если коэффициенты рациональных функций φ и ψ принадлежат некоторому подполю k_0 поля k и $t_0 \in k_0$, то координаты точки $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ принадлежат полю k_0. Последнее обстоятельство показывает на одно из возможных применений понятия рациональной кривой. Пусть многочлен $f(x, y)$ имеет рациональные коэффициенты. Если мы знаем, что кривая (1) п. 1 рациональна, а коэффициенты функций φ и ψ принадлежат полю рациональных чисел, то параметризация $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ дает нам все точки этой кривой,— кроме, быть может, конечного их числа,— когда t пробегает все рациональные значения. Например, все решения неопределенного уравнения (1) можно получить из формул (2), когда t пробегает все рациональные значения.

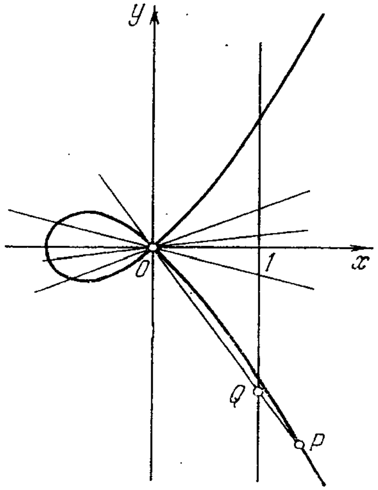


Рис. 3

Другое применение рациональных кривых связано с интегральным исчислением. Будем считать, что уравнение (1) п. 1 рациональной кривой определяет y как алгебраическую функцию от x. Тогда любая рациональная функция $g(x, y)$ является (сложной) функцией от x. Из рациональности кривой (1) п. 1 вытекает следующее важное обстоятельство: для любой рациональной функции $g(x, y)$ неопределенный интеграл

$$\int g(x, y)\,dx \qquad (4)$$

может быть выражен через элементарные функции. Действительно, ввиду рациональности кривой (1) п. 1 для нее возможна параметризация $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где φ и ψ — рациональные функции. Подставив эти выражения в интеграл (4), мы приведем его к виду $\int g(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, который является интегралом от рациональной функции. Такой интеграл, как известно, выражается через элементарные функции. Подставляя выражение $t=\chi(x, y)$ параметра через координаты, мы получим выражение интеграла (4) через элементарные функции координат.

Приведем теперь некоторые примеры рациональных кривых. Кривые 1-й степени, т. е. прямые, являются, очевидно, рациональными кривыми.

Докажем, что неприводимая коника рациональна. Выберем точку (x_0, y_0) на кривой X. Рассмотрим прямую, проходящую через точку (x_0, y_0) и имеющую угловой коэффициент t. Ее уравнение имеет вид

$$y - y_0 = t(x - x_0). \qquad (5)$$

Найдем точки пересечения кривой и этой прямой. Для этого достаточно подставить y, определенное из (5), в уравнение кривой X. Мы получим уравнение для x

$$f(x, y_0 + t(x - x_0)) = 0, \qquad (6)$$

которое, как легко видеть, имеет степень 2. Нам известен один корень квадратного уравнения: $x = x_0$, так как точка (x_0, y_0) по условию лежит на кривой. Обозначим через A коэффициент при x в уравнении, получающемся после деления уравнения (6) на коэффициент при x^2. Тогда для оставшегося корня получаем $x + x_0 = -A$, $x = -x_0 - A$. Так как в коэффициенты уравнения (6) входит t, то A будет рациональной функцией от t. Подставляя это выражение для x в (5), мы получим и для y выражение в виде рациональной функции от t. Эти выражения, как видно из хода рассуждения, удовлетворяют уравнению кривой и, значит, показывают, что кривая рациональна.

Приведенная параметризация имеет очевидный геометрический смысл — точке (x, y) сопоставляется угловой коэффициент прямой, соединяющей ее с точкой (x_0, y_0), а параметру t — точка пересечения прямой, проходящей через (x_0, y_0) и имеющей угловой коэффициент t, с кривой. Эта точка определяется однозначно именно потому, что мы имеем дело с неприводимой кривой 2-го порядка. Так же как мы это делали в связи с кривой (1), эту параметризацию можно интерпретировать как проектирование кривой X из точки (x_0, y_0) на некоторую прямую, не проходящую через эту точку (рис. 4).

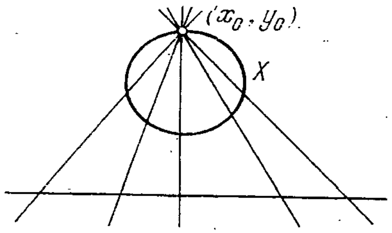


Рис. 4

Заметим, что при построении параметризации мы пользовались точкой (x_0, y_0) на кривой X. Если коэффициенты многочлена $f(x, y)$ и координаты x_0, y_0 этой точки принадлежат некоторому подполю k_0 поля k, то коэффициенты функций, дающих параметризацию, также принадлежат k_0. Например, мы можем найти общий вид решения в рациональных числах неопределенного уравнения 2-й степени, если нам известно хотя бы одно решение.

Вопрос о существовании хотя бы одного решения является довольно тонким. Он решается так называемой теоремой Лежандра (см., например, [6], гл. I, § 7, п. 2).

Рассмотрим другое применение найденной параметризации. Уравнение 2-й степени $y^2 = ax^2 + bx + c$, как мы видели, определяет рациональную кривую. Отсюда следует, что, какова бы ни была рациональная функция $g(x, y)$, интеграл $\int g\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ может быть выражен через элементарные функции. Выведенная нами параметризация дает и явную форму подстановки, сводящей этот интеграл к интегралу от рациональной функции. Легко убедиться, что таким образом мы приходим к известной подстановке Эйлера.

Рассмотренные примеры приводят нас к следующему общему вопросу: как узнать, рациональна ли произвольная плоская алгебраическая кривая? Этот вопрос, как мы увидим дальше, связан с довольно тонкими понятиями алгебраической геометрии.

3. Связь с теорией полей. Мы покажем сейчас, что вопрос, поставленный в конце предыдущего пункта, может быть сформулирован как вопрос теории полей. Для этого мы свяжем с каждой плоской неприводимой алгебраической кривой некоторое поле, аналогично тому, как с каждым неприводимым многочленом связывается поле — наименьшее расширение, в котором многочлен имеет корень.

Пусть неприводимая кривая X задана уравнением (1) п. 1. Рассмотрим такие рациональные функции $u(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ (p и q — многочлены с коэффициентами из k), что многочлен $q(x, y)$ не делится на $f(x, y)$. Такие функции мы будем называть определенными на кривой X. Две функции $\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ и $\frac{p_1(x, y)}{q_1(x, y)}$, определенные на X, называются равными на кривой X, если многочлен $p(x, y)q_1(x, y) - q(x, y)p_1(x, y)$ делится на $f(x, y)$. Легко проверить, что рациональные функции, рассматриваемые с точностью до равенства на кривой X, образуют поле. Это поле называется полем рациональных функций на X и обозначается через $k(X)$.

Рациональная функция $u(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ определена во всех точках кривой X, для которых $q(x, y) \neq 0$. Так как по условию q не делится на f, то согласно лемме из п. 1 таких точек, где $u(x, y)$ не определена, только конечное число. Поэтому можно рассматривать элементы поля $k(X)$ и как функции на X, но определенные всюду, кроме, может быть, конечного числа точек. Может оказаться, что для двух разных записей функции $u = \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ и некоторой точки (α, β) $q(\alpha, \beta) = 0$, но $q_1(\alpha, \beta) \neq 0$. Например, для функции $u = \frac{1-y}{x}$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$ и точки $(0, 1)$ существует другая запись $u = \frac{x}{1+y}$, для которой знаменатель в этой точке в 0 не обращается. Если для некоторой записи $u = \frac{p}{q}$, $q(P) \neq 0$, то функция u называется *регулярной в точке P*.

Очевидно, что все элементы поля $\mathrm{k}(X)$ выражаются в качестве рациональных функций от x и y. При этом x и y алгебраически зависимы — они связаны соотношением $f(x, y)=0$. Исходя из этого, легко проверить, что степень трансцендентности поля $\mathrm{k}(X)$ равна 1.

Если X — прямая, заданная, например, уравнением $y=0$, то всякая рациональная функция $\varphi(x, y)$ равна на X рациональной функции $\varphi(x, 0)$ от одного только x, и поэтому поле рациональных функций на прямой совпадает с полем рациональных функций от одной переменной x: $\mathrm{k}(X)=\mathrm{k}(x)$.

Предположим теперь, что кривая X рациональна и имеет параметризацию $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Сопоставим любой рациональной функции $u=\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ рациональную функцию от t, $u(\varphi(t), \psi(t))$, получаемую подстановкой φ и ψ вместо x и y. Прежде всего, убедимся, что эта подстановка имеет смысл, т. е. что знаменатель $q(\varphi(t), \psi(t))$ дает функцию от t, не равную тождественно нулю. Предположим, что $q(\varphi(t), \psi(t))=0$. Сравним это равенство с равенством (3) п. 2. Мы получим, придавая t различные значения в поле k, что уравнения $f(x, y)=0$, $q(x, y)=0$ имеют бесконечно много общих решений (надо помнить, что поле алгебраически замкнуто и, значит, бесконечно). Но это возможно ввиду леммы из п. 1, только если многочлены f и q имеют общий множитель.

Таким образом, наша подстановка дает определенный результат для любой функции $u(x, y)$, определенной на кривой X. Более того, так как φ и ψ удовлетворяют соотношению (3) п. 2, то функции u и u_1, равные на X, дают после подстановки одинаковые рациональные функции от t. Таким образом, любому элементу поля $\mathrm{k}(X)$ сопоставляется определенный элемент поля $\mathrm{k}(t)$. Это сопоставление является, очевидно, изоморфизмом поля $\mathrm{k}(X)$ и некоторого подполя поля $\mathrm{k}(t)$. При этом изоморфизме элементы поля k переходят сами в себя.

В этом месте мы воспользуемся одной теоремой о рациональных функциях. Это — так называемая теорема Люрота, которая утверждает, что подполе поля рациональных функций $\mathrm{k}(t)$, содержащее поле k, имеет вид $\mathrm{k}(g(t))$, где $g(t)$ — некоторая рациональная функция, т. е. это подполе состоит из всех рациональных функций от функции $g(t)$. Если функция $g(t)$ непостоянна, то сопоставление $f(u)\to f(g(t))$ определяет, очевидно, изоморфизм поля рациональных функций $\mathrm{k}(u)$ и поля $\mathrm{k}(g(t))$. Поэтому теореме Люрота можно придать следующую формулировку: подполе поля рациональных функций $\mathrm{k}(t)$, содержащее поле k и отличное от k, само изоморфно полю рациональных функций. Теорема Люрота может быть доказана, исходя из простых свойств расширений полей (см. [8], § 63). Применяя теорему Люрота к нашей ситуации, мы видим, что если кривая X рациональна, то поле $\mathrm{k}(X)$ изоморфно полю рациональных функций $\mathrm{k}(t)$. Предположим, что, наоборот, для некоторой кривой X, заданной уравнением (1) п. 1, поле $\mathrm{k}(X)$ изоморфно полю рациональных функций $\mathrm{k}(t)$. Пусть при этом изоморфизме x и y соответствуют функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Так как в $\mathrm{k}(X)$ выполнено соотношение $f(x, y)=0$, то оно сохраняется при изоморфизме и дает $f(\varphi(t), \psi(t))=0$, а это и значит, что кривая X рациональна.

Легко видеть, что любое поле $K\supset\mathrm{k}$, имеющее степень трансцендентности 1 над k и порожденное двумя элементами x и y, изоморфно полю $\mathrm{k}(X)$, где X — некоторая плоская алгебраическая неприводимая кривая. Действительно, так как степень трансцендентности поля K над k равна 1, то x и y должны быть связаны алгебраическим соотношением. Если $f(x, y)=0$ — связывающее их соотношение с неприводимым многочленом f, то за X, очевидно, может быть принята алгебраическая кривая, определенная этим уравнением. Отсюда следует, что сформулированный в конце п. 1 вопрос о рациональных кривых эквивалентен следующему вопросу теории полей: когда поле $K\supset\mathrm{k}$, степени трансцендентности 1 над k и порожденное над k двумя элементами, изоморфно полю рациональных функций от одной переменной $\mathrm{k}(t)$? Требование, чтобы поле K было порождено над k двумя элементами, с алгебраической точки зрения мало естественно. Естественнее было бы рассматривать расширения, порожденные любым конечным числом элементов. Однако мы докажем дальше, что при этом мы не получим более общего понятия.

В заключение заметим, что предшествующие рассуждения дают возможность решить вопрос об однозначности параметризации рациональной кривой. Пусть X — рациональная кривая. Согласно теореме Люрота поле $\mathrm{k}(X)$ изоморфно полю рациональных функций $\mathrm{k}(t)$. Пусть x и y в этом изоморфизме соответствуют функции

$\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Мы получаем тогда параметризацию кривой X: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Докажем, что эта параметризация обладает следующими свойствами:

1) любая точка $(x_0, y_0)\in X$, кроме, может быть, конечного их числа, представима в виде $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$ при некотором t_0;

2) для всех точек, кроме, может быть, конечного их числа, такое представление единственно.

Пусть при изоморфизме $\mathrm{k}(X)\to\mathrm{k}(t)$ в t переходит функция $\chi(x, y)$. Тогда обратный изоморфизм $\mathrm{k}(t)\to\mathrm{k}(X)$ задается формулой $u(t)\to u(\chi(x, y))$. Записывая то, что оба соответствия обратны друг другу, мы приходим к соотношениям

$$x=\varphi(\chi(x, y)),\quad y=\psi(\chi(x, y)), \tag{1}$$

$$t=\chi(\varphi(t), \psi(t)). \tag{2}$$

Первые соотношения дают утверждение 1). Действительно, если $\chi(x, y)=\dfrac{p(x, y)}{q(x, y)}$ и $q(x_0, y_0)\neq 0$ (таких точек $(x_0, y_0)\in X$, что $q(x_0, y_0)=0$, имеется конечное число ввиду того, что многочлены $q(x, y)$ и $f(x, y)$ взаимно просты), то мы можем рассмотреть значение $\chi(x_0, y_0)$. Пусть точка (x_0, y_0) такова, что $\chi(x_0, y_0)$ отлично от корней знаменателей функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ (точек (x_0, y_0), для которых это не так, по тем же соображениям только конечное число). Тогда формулы (1) дают для точки (x_0, y_0) искомое представление. Аналогично из (2) следует, что значение параметра t, если он существует, однозначно определяется точкой (x_0, y_0), кроме, может быть, конечного числа точек, для которых $q(x_0, y_0)=0$.

Заметим, что мы доказали свойства 1) и 2) не для любой параметризации рациональной кривой, а для некоторой специально построенной. Для произвольной параметризации свойство 2) может и не быть верным: например, кривая (1) п. 2 имеет наряду с параметризацией, задаваемой формулой (2) п. 2, и параметризацию $x=t^4-1$, $y=t^2(t^4-1)$, получающуюся из (2) п. 1 заменой t на t^2. Очевидно, что в ней значениям параметра t и $-t$ соответствует одна и та же точка кривой.

4. Рациональные отображения. Рациональная параметризация является частным случаем более общего понятия. Пусть X и Y — две неприводимые плоские алгебраические кривые, $u, v\in\mathrm{k}(X)$. Отображение $\varphi(P)=(u(P), v(P))$, определенное в точках P, где обе функции φ и ψ определены, называется рациональным отображением кривой X в кривую Y, если $\varphi(P)\in Y$ при $P\in X$. Если Y имеет уравнение $g=0$, то функция $g(u, v)\in\mathrm{k}(X)$ должна обращаться в 0 во всех точках кривой X, кроме конечного числа, и, значит, должна быть равной 0 в $\mathrm{k}(X)$.

Например, проектирование из точки P, рассмотренное в п. 2, является рациональным отображением кривой X на прямую. Рациональная параметризация рациональной кривой X — это рациональное отображение прямой на X.

Рациональное отображение φ: $X\to Y$ называется *бирациональным изоморфизмом* кривых X и Y, если оно имеет обратное, т. е. существует такое рациональное отображение ψ: $Y\to X$, что $\varphi\cdot\psi$ и $\psi\cdot\varphi$ являются тождественными (в точках, где они определены). Кривые X и Y называются *бирационально изоморфными.*

Бирациональный изоморфизм — не постоянное отображение, т. е. хотя бы одна из задающих его функций не является элементом поля k.

Действительно, постоянное отображение определено всюду и отображает кривую в одну точку $Q\in Y$. Взяв любую точку $Q'\neq Q$, в которой определено отображение, обратное отображению φ, мы получим противоречие с определением. Отсюда следует, что для любой точки $Q\in Y$ ее прообраз $\varphi^{-1}(Q)$, т. е. множество точек $P\in X$, для которых $\varphi(P)=Q$, конечен — это сразу вытекает из леммы в п. 1. Пусть S — конечное множество точек кривой X, в которых не определен бирациональный изоморфизм φ, U — его дополнение, а T и V имеют аналогичный смысл для ψ и Y. Из сказанного выше следует, что дополнения множества $\varphi^{-1}(V)\cap U$ до X и $\psi^{-1}(U)\cap V$ до Y конечны, а φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\varphi^{-1}(V)\cap U$ и $\psi^{-1}(U)\cap V$.

Бирациональный изоморфизм — основное отношение эквивалентности, с точностью до которого алгебраические кривые классифицируются в алгебраической геометрии. Мы видели, что рациональные кривые — это в точности кривые, бирационально изоморфные прямой.

Пусть уравнение неприводимой кривой степени n — многочлен, содержащий только члены степени $n-1$ и n относительно x и y. Тогда проектирование из начала координат определяет бирациональный изоморфизм нашей кривой и прямой: это доказывается непосредственным обобщением рассуждения по поводу кривой (1) в п. 2. Пусть теперь уравнение содержит члены степени $n-2$, $n-1$ и n, т. е. имеет вид $f=u_{n-2}+u_{n-1}+u_n$, где u_i — однородный многочлен степени i. Полагая опять $y=tx$ и сокращая уравнение на x^{n-2}, мы приведем его к виду $a(t)x^2+b(t)x+c(t)=0$, где $a(t)=u_n(1, t)$, $b(t)=u_{n-1}(1, t)$, $c(t)=u_{n-2}(1, t)$. Полагая $s=2ax+b$ (и предполагая, что характеристика поля k отлична от 2), мы видим, что наша кривая бирационально изоморфна кривой с уравнением $s^2=p(t)$, $p=b^2-4ac$. Кривые такого вида называются *гиперэллиптическими*.

Если многочлен $p(t)$ имеет четную степень $2n$, то, записав его в виде $p(t)=q(t)(t-\alpha)$ и разделив обе части уравнения кривой на $(t-\alpha)^{2n}$, мы получим, что кривая бирационально изоморфна кривой с уравнением $\eta^2=h(\xi)$, где $\xi=(t-\alpha)^{-1}$, $\eta=\frac{s}{(t-\alpha)^n}$, $h(\xi)=\frac{q(t)}{(t-\alpha)^{2n-1}}$, в котором многочлен h уже имеет степень, не большую $2n-1$. Эти рассуждения, в частности, применимы к любой кубике, если выбрать начало координат в любой ее точке. Мы видим, что неприводимая кубика бирационально изморфна кривой с уравнением $y^2=f(x)$, где f — многочлен степени $\leqslant 3$ (если характеристика поля k отлична от 2). Если многочлен имеет степень $\leqslant 2$, то кубика рациональна. Если его степень 3, то старший коэффициент можно считать равным 1. Тогда уравнение примет вид

$$y^2=x^3+ax^2+bx+c.$$

Оно называется *вейерштрассовой нормальной формой* уравнения кубики. Если характеристика поля k отлична от 3, то за счет сдвига $x\to x-\frac{a}{3}$ можно привести это уравнение к виду

$$y^2=x^3+px+q. \qquad (1)$$

Пусть X и Y — две бирационально изоморфные неприводимые плоские алгебраические кривые и пусть их отображения друг в друга задаются формулами

$(u, v)=(\varphi(x, y), \psi(x, y))$, $(x, y)=(\xi(u, v), \eta(u, v))$.

Как и при исследовании рациональных кривых, мы можем установить связь между полями рациональных функций $k(X)$ и $k(Y)$ на этих кривых. Для этого сопоставим любой рациональной функции $w(x, y)$, определенной на кривой X, функцию $w(\xi(u, v), \eta(u, v))$, рассматриваемую на кривой Y. Легко проверить, что таким образом мы получаем отображение поля $k(X)$ в поле $k(Y)$, которое является изоморфизмом этих полей. Наоборот, если поля $k(X)$ и $k(Y)$ изоморфны, то функциям x и $y\in k(X)$ должны соответствовать при этом изоморфизме функции $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)\in k(Y)$, а функциям u, $v\in k(Y)$ — функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)\in k(X)$, и опять тривиальная проверка показывает, что пары функций φ, ψ и ξ, η определяют бирациональный изоморфизм кривых X и Y. Таким образом, две кривые тогда и только тогда бирационально изоморфны, когда их поля рациональных функций изоморфны.

Мы видим, что задача о классификации алгебраических кривых с точностью до бирационального изоморфизма является геометрическим аспектом естественной алгебраической задачи классификации (с точностью до изоморфизма) расширений поля k, имеющих над ним степень трансцендентности 1 и порожденных конечным числом элементов.

В последней задаче естественно не ограничиваться полями степени трансцендентности 1, а рассмотреть поля произвольной конечной степени трансцендентности. Мы увидим дальше, что эта более широкая постановка вопроса имеет также геометрическую интерпретацию. Однако при этом мы должны выйти за пределы теории алгебраических кривых и рассмотреть алгебраические многообразия произвольного числа измерений.

5. Особые и простые точки. Мы заимствуем определение из аналитической геометрии: точка P называется *особой точкой* кривой с уравнением $f(x, y)=0$, если $f'_x(P)=f'_y(P)=0$. Сдвинув начало координат в точку P, мы можем сказать, что точка $(0, 0)$ является особой, если многочлен f не содержит постоянного и линейных членов. Точка, не являющаяся особой, называется *простой*. Кривая, все точки которой простые, называется *гладкой*. Если кривая неприводима, то $f'_x=0$ в конечном числе ее точек или f'_x делится на f. Но так как степень f'_x меньше степени f, то последнее возможно лишь, когда f'_x равно 0 тождественно. То же верно и для f'_y. Но если $f'_x=f'_y=0$, то $f\in k$, если характеристика поля k равна 0, и содержит x и y лишь в степенях, делящихся на p, если оно имеет характеристику $p>0$. В последнем случае

$f=\sum a_{ij}x^{pi}y^{pj}=(\sum a_{ij}^{1/p}x^iy^j)^p$, что противоречит неприводимости кривой. Мы видим, что неприводимая кривая имеет лишь конечное число особых точек.

Как известно, неприводимая коника — гладкая. Простейший пример особой точки дает кривая (1) в п. 2. Если $P=(0,\ 0)$ и уравнение кривой начинается с членов степени r, то P называется r-кратной точкой, а r — ее *кратностью*. Таким образом, простая точка имеет кратность 1. Если кратность точки $P=(0,\ 0)$ равна 2 и члены степени 2 в уравнении кривой имеют вид $ax^2+bxy+cy^2$, то возможны два случая: 1) многочлен $ax^2+bxy+cy^2$ разлагается на два разных линейных множителя и 2) он является полным квадратом. В первом случае особая точка называется узлом. Она изображена на рис. 3, а во втором — острием (рис. 5).

Рис. 5

Из определения следует, что кривая степени n не может иметь особой точки кратности $>n$. Если особая точка имеет кратность n, то уравнение кривой является однородным многочленом от x и y степени n и, значит, разлагается в произведение линейных, так что кривая приводима. В п. 4 мы доказали, что неприводимая кривая степени n, имеющая особую точку кратности $n-1$, рациональна, а имеющая точку кратности $n-2$ — гиперэллиптична. Кубика, записанная в вейерштрассовой нормальной форме (1) п. 4, является гладкой тогда и только тогда, когда кубический многочлен в правой части не имеет кратных корней, т. е. $4p^3+27q^2\neq 0$. В этом случае она называется *эллиптической* кривой.

Если $\mathrm{k}=\mathbf{R}$, P — простая точка кривой с уравнением $f(x,\ y)=0$ и, например, $f'_y(P)\neq 0$, то по теореме о неявных функциях мы можем в некоторой окрестности точки P выразить y как функцию от x. Подставляя это выражение, мы представим и любую рациональную функцию на кривой как функцию от x. В общем случае мы можем, хотя и в более скромном объеме, использовать функцию x для описания всех рациональных функций на кривой. Для простоты положим $P=(0,\ 0)$. Тогда $f=ax+by+g$, где g содержит лишь члены степени $\geqslant 2$ и $b\neq 0$. Выделим в f члены, содержащие только степени x: $f=x\varphi(x)+by+yh$, $h(0,\ 0)=0$. Отсюда на кривой $f=0$ мы имеем $y(b+h)=-x\varphi(x)$, т. е. $y=xv$, где

$v=-\dfrac{\varphi(x)}{b+h}$ — функция, регулярная в точке P (так как $b\neq 0$). Пусть u — любая рациональная функция на нашей кривой, регулярная в точке P и обращающаяся в ней в 0. Тогда $u=\dfrac{p}{q}$, где $p,\ q\in \mathrm{k}[x,\ y]$, $p(P)=0$, $q(P)\neq 0$. Подставляя сюда наше выражение для y, мы получим (так как p не имеет свободного члена), что $p(x,y)=p(x,\ v(x))=xr$, где r — регулярная функция на кривой и $u=x\dfrac{r}{q}=xu_1$. Если $u_1(P)=0$, то мы можем повторить рассуждение и получим, что $u=x^2u_2$. Покажем, что этот процесс оборвется, если функция u не равна тождественно 0 на кривой. Для этого вернемся к представлению $u=\dfrac{p}{q}$, в котором по условию p не делится на f. Поэтому существуют такие многочлены ξ и $\eta\in\mathrm{k}[x,\ y]$ и $a\in\mathrm{k}[x]$, $a\neq 0$, что $f\xi+p\eta=a$ (мы пользовались этим при доказательстве леммы в п. 1). Пусть $a=x^kb$, $b(0)\neq 0$. Тогда на нашей кривой $p\eta=a$ и представление $p=x^lw$ с $l>k$ приводило бы к противоречию: $x^k(x^{l-k}w-b)=0$ на кривой, т. е. $x^{l-k}w-b=0$. Если $w=\dfrac{c}{d}$, $c,\ d\in\mathrm{k}[x,\ y]$, $d(P)\neq 0$, то $x^{l-k}c-bd=0$ на кривой, т. е. $x^{l-k}c-bd$ делится на f. Но это невозможно, так как x^{l-k} обращается в 0 в точке P, а bd — нет. Так как любая рациональная функция есть отношение регулярных, то мы доказали следующий результат.

Теорема 1. *В любой простой точке P неприводимой алгебраической кривой существует такая регулярная и обращающаяся в 0 в этой точке функция t, что любая рациональная, не равная тождественно 0 функция u записывается в виде*

$$u=t^kv, \tag{1}$$

где v регулярна в точке P и $v(P)\neq 0$. Функция u регулярна в точке P тогда и только тогда, когда в записи (1) $k\geqslant 0$.

Такая функция t называется *локальным параметром* в точке P. Очевидно, что два локальных параметра связаны соотношением $t'=tv$, где v регулярна в точке P и $v(P)\neq 0$. Мы видели при доказательстве теоремы, что если $f'_y(P)\neq 0$, то за локальный параметр можно принять x.

Число k в представлении (1) называется *кратностью нуля* функции u в точке P. Оно не зависит от выбора локального параметра.

Пусть X и Y — алгебраические кривые с уравнениями $f=0$ и $g=0$, X неприводима, Y не содержит x, точка P принадлежит $X\cap Y$ и является простой на X. Тогда g определяет регулярную и не равную тождественно 0 на X функцию. Кратность ее нуля в точке P называется *кратностью пересечения* кривых X и Y в этой точке P. Введение этого понятия необходимо для точной формулировки теоремы Безу: ведь и теорема о том, что число корней многочлена равно его степени, неверна без учета кратности корней! Сейчас мы проанализируем понятие кратности пересечения для случая, когда кривая X является прямой.

Пусть $P=(\alpha, \beta)$, $P\in X$ и уравнение кривой X записано в виде $f(x, y)=a(x-\alpha)+b(y-\beta)+g$, где многочлен g, будучи разложен по степеням $x-\alpha$ и $y-\beta$, содержит только члены степени $\geqslant 2$. Запишем уравнение прямой L, проходящей через точку P, в виде

$$x=\alpha+\lambda t, \quad y=\beta+\mu t. \tag{2}$$

Функция t является локальным параметром на L в точке P. Многочлен f, будучи ограничен на L, принимает вид

$$f(\alpha+\lambda t,\ \beta+\mu t)=(a\lambda+b\mu)t+t^2\varphi(t).$$

Отсюда мы видим, что если точка P — особая, т. е. $a=b=0$, то любая прямая имеет кратность пересечения с X в точке P, большую 1. Если же точка — неособая, то такая прямая есть только одна: та, для которой $a\lambda+b\mu=0$. Ее уравнение имеет вид $a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$. Очевидно, что $a=f'_x(P)$, $b=f'_y(P)$, и поэтому то же уравнение записывается в виде

$$f'_x(P)(x-\alpha)+f'_y(P)(y-\beta)=0. \tag{3}$$

Прямая с этим уравнением называется *касательной* к кривой X в простой точке P.

Выясним теперь, когда прямая имеет кратность пересечения $\geqslant 3$ с кривой в простой точке $P=(\alpha, \beta)$. Для этого запишем уравнение кривой в виде

$$f(x, y)=a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(x-\alpha)^2+ \\ +d(x-\alpha)(y-\beta)+e(y-\beta)^2+h, \tag{4}$$

где h — многочлен, который, будучи записан по степеням $x-\alpha$ и $y-\beta$, содержит только члены степени $\geqslant 3$. Ограничивая многочлен f на кривую, заданную уравнением (2), мы получим, что $f=(a\lambda+\beta\mu)t+(c\lambda^2+d\lambda\mu+e\mu^2)t^2+t^3\psi(t)$. Поэтому кратность пересечения будет $\geqslant 3$ при выполнении двух условий: $a\lambda+b\mu=0$ и $c\lambda^2+d\lambda\mu+e\mu^2=0$. Первое из них, как мы видели, означает, что прямая L является касательной к кривой X в точке P, а второе означает, что многочлен $cu^2+duv+ev^2$ делится на $au+bv$. Вместе они показывают, что многочлен $q=au+bv+cu^2+duv+ev^2$ приводим: он делится на $au+bv$. Наоборот, если q приводим, $q=r\cdot s$, то r и s должны иметь степень 1 и один из них (пусть это будет r) должен обращаться в 0 при $u=v=0$, а другой — нет. Но тогда r пропорционален $au+bv$ и $cu^2+duv+ev^2$ делится на $au+bv$. Таким образом, приводимость коники $au+bv+cu^2+duv+ev^2=0$ — необходимое и достаточное условие того, что в точке P некоторая прямая имеет с кривой X пересечение кратности $\geqslant 3$. Такая точка называется *точкой перегиба* кривой X. Из аналитической геометрии известно условие приводимости коники. Вспомнив (предполагая характеристику поля k отличной от 2), что $a=f'_x(P)$, $b=f'_y(P)$, $c=\frac{1}{2}f''_{xx}(P)$, $d=f''_{xy}(P)$, $e=\frac{1}{2}f''_{yy}(P)$, мы можем записать это условие в виде

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix}(P)=0. \tag{5}$$

6. Проективная плоскость. Вернемся к теореме Безу, сформулированной в п. 1. Даже если рассматривать точки с координатами в алгебраически замкнутом поле и учитывать кратности точек пересечения, она нарушается в некоторых очень простых случаях и нуждается в дальнейших уточнениях. Это видно уже на примере двух прямых, которые, если они параллельны, не имеют точек пересечения. Однако на проективной плоскости параллельные прямые пересекаются — в точке бесконечно удаленной прямой. Точно так же, хотя окружности — кривые степени 2, они имеют не более двух точек пересечения, а не четыре, как предсказывает теорема Безу. Это следует из того, что квадратичные члены в уравнении любой окружности имеют один и тот же вид: x^2+y^2. Поэтому, вычитая уравнение одной окружности из уравнения другой, мы получаем линейное уравнение, так что точки пересечения двух окружностей совпадают с точками пересечения окружности и прямой. В то же время, если окружности не касаются, они имеют в точках пересечения кратности 1. Чтобы увидеть причину этого невыполнения теоремы Безу, запишем уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ в однородных координатах, положив $x=\frac{\xi}{\zeta}$, $y=\frac{\eta}{\zeta}$. Мы получим уравнение $(\xi-a\zeta)^2+(\eta-b\zeta)^2=r^2\zeta^2$, из которого видно, что бесконечно удаленная прямая $\zeta=0$ пересекает окружность в точках, для которых $\xi^2+\eta^2=0$, т. е. в двух точках $(1, \pm i, 0)$. Таким образом, все окружности имеют общими эти две бесконечно удаленные точки. Вместе с двумя конечными точками пересечения мы получаем у двух окружностей четыре общие точки в соответствии с теоремой Безу. Подобные явления оправдывают переход от аффинной плоскости к проективной.

Напомним, что точка проективной плоскости $\mathbf{P}^2$ определяется тремя элементами (ξ, η, ζ) поля k, не равными одновременно 0. Две тройки (ξ, η, ζ) и (ξ', η', ζ') определяют одну и ту же точку, если существует такое $\lambda\in$ k, $\lambda\neq 0$, что $\xi'=\lambda\xi$, $\eta'=\lambda\eta$, $\zeta'=\lambda\zeta$. Любые три элемента ξ, η и ζ, определяющие точку P, называются ее однородными координатами. Тогда пишут $P=(\xi:\eta:\zeta)$.

Мы имеем включение $\mathbf{A}^2\subset\mathbf{P}^2$, при котором точке $(x, y)\in\mathbf{A}^2$ сопоставляется точка $(x:y:1)$. Так получаются все точки с $\zeta\neq 0$: точка $(\xi:\eta:\zeta)\in\mathbf{P}^2$, $\zeta\neq 0$, соответствует точке $\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right)\in\mathbf{A}^2$. Точки дополнительного множества $\zeta=0$ называются *бесконечно удаленными*. Это понятие связано с выбором координаты ζ. Мы имеем в $\mathbf{P}^2$ три подмножества, сопоставляемые аффинной плоскости: $\mathbf{A}_1^2$ $(\xi\neq 0)$, $\mathbf{A}_2^2$ $(\eta\neq 0)$ и $\mathbf{A}_3^2$ $(\zeta\neq 0)$. Конечно, они пересекаются, и если в $\mathbf{A}_3^2$ точка P имеет координаты $x=\frac{\xi}{\zeta}$, $y=\frac{\eta}{\zeta}$ и притом $\eta\neq 0$, то в $\mathbf{A}_2^2$ ее координаты $x'=\frac{\xi}{\eta}$, $y'=\frac{\zeta}{\eta}$, так что $x'=\frac{x}{y}$, $y'=\frac{1}{y}$, а если $\xi\neq 0$, то в $\mathbf{A}_3^2$ точка имеет координаты $x''=\frac{\eta}{\xi}$, $y''=\frac{\zeta}{\xi}$, $x=\frac{y}{x}$, $y''=\frac{1}{x}$. Каждая точка $P\in\mathbf{P}^2$ лежит хоть в одном из множеств

$\mathbf{A}_1^2$, $\mathbf{A}_2^2$, $\mathbf{A}_3^2$ и может быть задана при помощи аффинных координат, в нем определенных.

Алгебраическая кривая в $\mathbf{P}^2$, или *плоская проективная алгебраическая кривая*, задается однородным уравнением в однородных координатах: $F(\xi, \eta, \zeta)=0$, где F — однородный многочлен. Тогда выполнение равенства $F(\xi, \eta, \zeta)=0$ не зависит от выбора однородных координат точки, т. е. сохраняется при замене $\xi'=\lambda\xi$, $\eta'=\lambda\eta$, $\zeta'=\lambda\zeta$, $\lambda\neq 0$. Однородные многочлены также называются *формами*. Аффинная алгебраическая кривая степени n с уравнением $f(x, y)=0$ определяет однородный многочлен $F(\xi, \eta, \zeta)=\zeta^n f\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right)$ и проективную кривую с уравнением $F(\xi, \eta, \zeta)=0$. Легко видеть, что эта кривая, пересеченная с аффинной плоскостью $\mathbf{A}_3^2$, дает нам прежнюю аффинную кривую, к которой, таким образом, присоединяются только бесконечно удаленные точки с $\zeta=0$. Если уравнение проективной кривой есть $F(\xi, \eta, \zeta)=0$, то уравнение соответствующей аффинной — $f(x, y)=0$, $f(x, y)=F(x, y, 1)$. Так как всякая точка $P\in\mathbf{P}^2$ содержится в некотором аффинном множестве, $\mathbf{A}_1^2$, $\mathbf{A}_2^2$ или $\mathbf{A}_3^2$, то, пользуясь этим переходом, мы можем переписать ее свойства, определенные выше для аффинных кривых, в однородных координатах. Мы сделаем это сейчас для понятия касательной, особой точки и точки перегиба алгебраической кривой. Мы всегда будем предполагать, что $P\in\mathbf{A}_3^2$.

Уравнение касательной в аффинных координатах имеет вид

$$f'_x(P)(x-\alpha)+f'_y(P)(y-\beta)=0.$$

По условию, $f(x, y)=F(x, y, 1)$, где $F(\xi, \eta, \zeta)=0$ — однородное уравнение нашей кривой. Поэтому $f'_x=F'_x$, $f'_y=F'_y$, а по теореме Эйлера об однородных функциях $\xi F'_\xi+\eta F'_\eta+\zeta F'_\zeta=nF$. Так как точка $P=(\alpha:\beta:1)$ принадлежит кривой, то $\alpha F'_\xi(P)+\beta F'_\eta(P)+F'_\zeta(P)=0$, и поэтому уравнение касательной имеет вид $xF'_\xi(P)+yF'_\eta(P)+F'_\zeta(P)=0$, или, в однородных координатах,

$$\xi F'_\xi(P)+\eta F'_\eta(P)+\zeta F'_\zeta(P)=0.$$

Особая точка задается в аффинных координатах условиями $f'_x = f'_y = f = 0$. Отсюда в однородных координатах $F'_\xi = F'_\eta = F = 0$, а из теоремы Эйлера (так как $\zeta = 1$) и $F'_\zeta = 0$. Если характеристика поля k равна 0, то достаточно требовать условий $F'_\xi(P) = F'_\eta(P) = F'_\zeta(P) = 0$ — тогда и $F(P) = 0$.

Условие, определяющее точку перегиба, дается соотношением (5) из п. 5. Здесь опять $f(x, y) = F(x, y, 1)$, $f'_x = F'_x$, $f'_y = F'_y$, $f''_{xx} = F''_{xx}$, $f''_{xy} = F''_{xy}$, $f''_{yy} = F''_{yy}$. В однородном многочлене F мы будем дальше x обозначать через ξ, а y — через η. Производя эти подстановки в определителе (5) п. 5, воспользуемся теоремой Эйлера:

$$\xi F''_{\xi\xi} + \eta F''_{\xi\eta} + F''_{\xi\zeta} = (n-1) F'_\xi,$$
$$\xi F''_{\xi\eta} + \eta F''_{\eta\eta} + F''_{\zeta\eta} = (n-1) F'_\eta$$

и

$$\xi F'_\xi + \eta F'_\eta + \zeta F'_\zeta = nF.$$

Умножим последний столбец нашего определителя на $n-1$ и вычтем из него первый столбец, умноженный на ξ, и второй, умноженный на η. Мы получим определитель

$$\begin{vmatrix} F''_{\xi\xi} & F''_{\xi\eta} & F''_{\xi\xi} \\ F''_{\eta\xi} & F''_{\eta\eta} & F''_{\eta\zeta} \\ F'_\xi & F'_\eta & F'_\zeta \end{vmatrix}(P)$$

(надо помнить, что $F(P) = 0$).

Теперь произведем такую же операцию со строками, и тогда условие того, что P — точка перегиба, приобретет вид

$$\begin{vmatrix} F''_{\xi\xi} & F''_{\xi\eta} & F''_{\xi\zeta} \\ F''_{\eta\xi} & F''_{\eta\eta} & F''_{\eta\zeta} \\ F''_{\zeta\xi} & F''_{\zeta\eta} & F''_{\zeta\zeta} \end{vmatrix}(P) = 0. \qquad (1)$$

Определитель в левой части этого равенства называется *гессианом* формы F и обозначается $H(F)$.

Перейдем теперь к рассмотрению рациональных функций. Рациональная функция $\dfrac{p(x, y)}{q(x, y)}$ после подстановки $x = \dfrac{\xi}{\zeta}$, $y = \dfrac{\eta}{\zeta}$ и сокращений записывается в виде $P(\xi, \eta, \zeta)/Q(\xi, \eta, \zeta)$, где P и Q — однородные многочлены одинаковой степени. Поэтому ее значение в точке $(\xi : \eta : \zeta)$ не зависит от умножения однородных координат на общий множитель.

Рациональное отображение $(x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$ мы сначала перепишем, согласно предшествующему, в виде $U(\xi, \eta, \zeta)/R(\xi, \eta, \zeta)$, $V(\xi, \eta, \zeta)/S(\xi, \eta, \zeta)$, где U, V, R, S — однородные многочлены, причем степень U равна степени R, а степень V — степени S, а потом, приведя обе дроби U/R и V/S к общему знаменателю,— в виде $\left(\dfrac{A}{C}, \dfrac{B}{C}\right)$, где степени однородных многочленов A, B и C равны. Наконец, вводя однородные координаты $\dfrac{\xi'}{\zeta'} = \dfrac{A}{C}$, $\dfrac{\eta'}{\zeta'} = \dfrac{B}{C}$, мы запишем отображение в виде $(\xi : \eta : \zeta) \to (A(\xi, \eta, \zeta) : B(\xi, \eta, \zeta) : C(\xi, \eta, \zeta))$, где A, B и C — однородные многочлены одинаковой степени. Отображение регулярно в точке P, если один из многочленов A, B, C в этой точке не обращается в 0. Изучая свойства, связанные с точками P, лежащими в аффинном множестве $\mathbf{A}^3_3$ (например), мы можем разделить все многочлены A, B и C на ζ^n, где n — их общая степень, и записать отображение в виде $(x, y) \to (u(x, y), v(x, y), w(x, y))$, где u, v, w — многочлены. Тогда его регулярность означает, что все три многочлена не обращаются одновременно в 0 в точке P.

В качестве первой иллюстрации докажем следующий важный результат.

Теорема 2. *Рациональное отображение плоской проективной кривой регулярно во всех простых точках.*

Пусть простая точка P содержится в аффинном множестве, в котором координаты обозначены x и y. Запишем наше отображение в виде $(x, y) \to (u_0 : u_1 : u_2)$, где u_0, u_1, u_2 — многочлены, и применим к этим функциям теорему 1. Мы сможем их записать в виде $u_i = t^{k_i} v_i$, где t — локальный параметр, $v_i(P) \neq 0$, $k_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, 2)$. Пусть, например, k_0 — наименьшее из чисел k_0, k_1, k_2. Тогда то же отображение можно записать в виде $(x, y) \to \to (v_0 : t^{k_1 - k_0} v_1 : t^{k_2 - k_0} v_2)$, $k_1 - k_0 \geqslant 0$, $k_2 - k_0 \geqslant 0$, $v_0(P) \neq 0$, откуда и следует, что оно регулярно в точке P.

Следствие. *Бирациональный изоморфизм гладких проективных кривых регулярен во всех точках и является взаимно однозначным соответствием.*

В качестве примера рассмотрим бирациональные автоморфизмы (т. е. изоморфизмы с собой) проективной прямой. Как и всякое рациональное отображение, автоморфизм записывается рациональной функцией: $x \to \frac{p(x)}{q(x)}$, $p, q \in k[x]$ (мы считаем, что x — координата на нашей прямой, заданной, например, уравнением $y=0$). В точку α переходят те точки, для которых $p(x)/q(x) = \alpha$, т. е. $p(x) - \alpha q(x) = 0$. Поэтому из взаимной однозначности автоморфизма следует, что p и q линейны, т. е. он имеет вид $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$. Как следствие получаем, что автоморфизм имеет на прямой не более двух неподвижных точек (корни уравнения $x(cx + d) = ax + b$).

Рассмотрим теперь эллиптическую кривую, заданную уравнением (1) п. 4. Все ее конечные точки — простые. Переходя к однородным координатам, мы запишем ее уравнение в виде $\eta^2\zeta = \xi^3 + p\xi\zeta^2 + q\zeta^3$. Поэтому она имеет единственную точку на бесконечно удаленной прямой $\zeta = 0$ — точку $O = (0:1:0)$. Деля на η^3, мы запишем уравнение кривой в виде $v = u^3 + puv^2 + qv^3$, $u = \frac{\xi}{\eta}$, $v = \frac{\zeta}{\eta}$. В координатах u, v точка $O = (0, 0)$ тоже является простой. Поэтому наша кривая — гладкая. Отображение $(x, y) \to (x, -y)$, очевидно, является бирациональным автоморфизмом кривой. Его неподвижные точки в конечной части плоскости — это точки с $y = 0$, $x^3 + px + q = 0$, т. е. этих точек три. Точка O — тоже неподвижная. Действительно, $u = x/y$, $v = 1/y$, и в координатах u и v автоморфизм записывается как $(u, v) \to (-u, -v)$. Мы построили на эллиптической кривой автоморфизм, имеющий четыре неподвижные точки. Отсюда следует, что *эллиптическая кривая бирационально не изоморфна прямой*, т. е. *не рациональна*. Это показывает, что проблема бирациональной классификации кривых решается нетривиально: не все кривые друг другу бирационально изоморфны.

Переход к проективным кривым — это последнее уточнение, которое нужно сделать, чтобы сформулировать теорему Безу. Один ее вариант таков:

Пусть X и Y — проективные кривые, X — гладкая и Y не содержит X. Тогда сумма кратностей пересечений X и Y во всех их общих точках равна произведению степеней кривых X и Y.

Эту теорему и множество ее обобщений мы докажем позже (п. 2 § 2 гл. III, п. 1 § 2 гл. IV). Сейчас мы проверим ее в двух простейших случаях — когда X — прямая и коника.

Пусть X — прямая. Ввиду леммы в п. 1 X и Y имеют конечное число точек пересечения. Выберем удобную систему координат: прямую $\zeta = 0$ так, чтобы она не проходила через эти точки пересечения и была отлична от X, а за прямую $\eta = 0$ возьмем прямую X. Тогда точки пересечения X и Y лежат в аффинной плоскости с координатами $x = \frac{\xi}{\zeta}$, $y = \frac{\eta}{\zeta}$ и уравнение кривой X имеет вид $y = 0$. Пусть $f(x, y) = 0$ — уравнение кривой Y и $f = f_0 + f_1(x, y) + \ldots + f_n(x, y)$ — запись в виде суммы однородных многочленов. Точка $(0:1:0)$ не лежит на Y по выбору системы координат, а это значит, что $f_n(1, 0) \neq 0$, т. е. в f входит член ax^n с $a \neq 0$. Поэтому ограничение f на X, т. е. $f(x, 0)$, имеет степень n. В точке $x = \alpha$ кривой X функция $x - \alpha$ является локальным параметром, и кратность пересечения X и Y в этой точке совпадает с кратностью корня $x = \alpha$ многочлена $f(x, 0)$. Значит, сумма этих кратностей равна n.

Пусть X — коника. Возьмем любую точку $P \in X$, $P \notin Y$ и выберем в качестве прямой $\zeta = 0$ касательную к X в этой точке, а в качестве прямой $\xi = 0$ — любую прямую, отличную от первой и проходящую через P.

Простая выкладка показывает, что в аффинной плоскости с координатами $x = \xi/\zeta$, $y = \eta/\zeta$ X — парабола (она касается бесконечно удаленной прямой) и ее уравнение имеет вид $y = px^2 + qx + r$, $p \neq 0$. Как и раньше, $f = f_0 + \ldots + f_n(x, y)$ и теперь $f_n(0, 1) \neq 0$, т. е. в $f(x, y)$ входит член ay^n, $a \neq 0$. Кривая X не имеет других точек пересечения с прямой $\zeta = 0$, кроме точки P, и, значит, все точки пересечения кривых X и Y лежат в конечной части плоскости. В любой точке с $x = \alpha$ функция $x - \alpha$ является локальным параметром на X, и кратность пересечения X и Y в этой точке равна кратности корня $x = \alpha$ многочлена $f(x, px^2 + qx + r)$. Так как в $f(x, y)$ есть член с ay^n, $a \neq 0$, то степень $f(x, px^2 + qx + r)$ равна $2n$, так что сумма кратностей всех точек пересечения равна $2n$.

Уже этот простой частный случай теоремы Безу имеет красивые геометрические применения. Одно из них — доказательство теоремы Паскаля, утверждающей, что у шестиугольника, вписанного в конику X, точки пересечения пар противоположных сторон лежат на одной прямой. (Это доказательство принадлежит Плюккеру.) Пусть l_1 и m_1, l_2 и m_2, l_3 и m_3 — линейные формы, являющиеся уравнениями противоположных сторон шестиугольника (рис. 6).

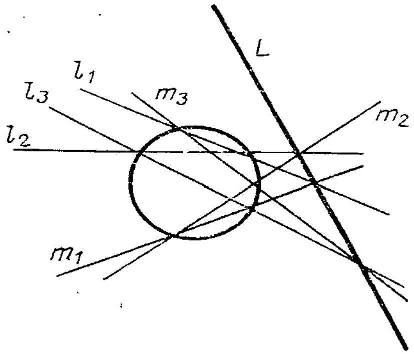


Рис. 6

Рассмотрим кубику с уравнением $f_\lambda = l_1 l_2 l_3 + \lambda m_1 m_2 m_3$, где λ — произвольный параметр. Она имеет с коникой X шесть точек пересечения — вершины шестиугольника. Кроме того, можно выбрать значение λ так, что $f_\lambda(P) = 0$ для любой наперед заданной точки $P \in X$, отличной от этих точек пересечения. Мы получаем кубику $f_\lambda = 0$, имеющую семь точек пересечения с коникой X, и по теореме Безу она должна распадаться на конику X и прямую L. На прямой L и лежат точки пересечения l_1 с m_1, l_2 с m_2, l_3 с m_3.

ЗАДАЧИ

1. Найти вещественную характеристику прямой, проходящей через точки пересечения двух окружностей, в случае, когда эти точки — комплексные. Доказать, что она совпадает с геометрическим местом точек, имеющих одинаковую степень относительно обеих окружностей. Степенью точки относительно окружности называется квадрат расстояния от точки до точки касания проходящей через нее касательной к окружности.

2. Какие рациональные функции $p(x)/q(x)$ регулярны в бесконечно удаленной точке прямой $\mathbf{P}^1$? Каков порядок нуля такой функции в этой точке?

3. Доказать, что неприводимая кубика имеет не более одной особой точки и кратность этой точки равна 2. Если эта точка — узел, то кубика проективно эквивалентна кривой (1) п. 2, а если острие — то кривой $y^2 = x^3$.

4. Какова максимальная возможная кратность пересечения двух неособых коник в некоторой общей точке?

5. Доказать, что все прямые, проходящие через начало координат, касаются кривой $y = x^{p+1}$, если характеристика основного поля равна p. Доказать, что над полем характеристики 0 через заданную точку проходит лишь конечное число касательных к заданной неприводимой кривой.

6. Доказать, что сумма кратностей двух особых точек неприводимой кривой степени n не превосходит n, а сумма кратностей пяти точек не превосходит $2n$.

7. Доказать, что для любых двух точек на неприводимой кривой существует рациональная функция, регулярная в них, равная 0 в одной и 1 в другой.

8. Доказать, что для любых простых точек $P_1, \ldots, P_r$ на неприводимой кривой и чисел $m_1, \ldots, m_r \geqslant 0$ существует рациональная функция, регулярная в этих точках и имеющая в точке P_i нуль кратности m_i.

9. При каких значениях m кубика $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + m x_1 x_2 x_0 = 0$ — гладкая? Найти ее точки перегиба.

10. Найти все автоморфизмы кривой (1) п. 2.

11. Доказать, что на проективной прямой и на конике в $\mathbf{P}^2$ рациональная функция, регулярная во всех точках, является константой.

12. Интерпретировать теорему Паскаля в случае, когда пары вершин шестиугольника сливаются, а соединяющие их прямые заменяются касательными.

§ 2. Замкнутые подмножества аффинных пространств

Всюду дальше мы будем иметь дело с одним и тем же алгебраически замкнутым полем k, которое будем называть основным полем.

1. Определение замкнутых подмножеств. На различных этапах развития алгебраической геометрии представление об ее основном объекте — «естественном понятии алгебраического многообразия» — менялось. Им считались проективные и квазипроективные многообразия, абстрактные алгебраические многообразия, схемы, алгебраические пространства.

В этой книге алгебраическая геометрия будет рассматриваться постепенно все в большей общности. В первых главах наиболее общим понятием, охватывающим все изучаемые в них алгебраические многообразия, является квазипроективное многообразие. В последних главах такую роль играют схемы. Сейчас мы определим один класс алгебраических многообразий, который будет играть основную роль во всех последующих определениях. Так как слово многообразие сохраняется для более общих понятий, мы воспользуемся другим термином.

Обозначим через $\mathbf{A}^n$ n-мерное аффинное пространство над полем k. Его точки имеют, следовательно, вид $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in$ k.

Определение. *Замкнутым подмножеством* в $\mathbf{A}^n$ называется подмножество $X \subset \mathbf{A}^n$, состоящее из всех совместных нулей конечного числа многочленов с коэффициентами из k. Иногда мы будем коротко говорить *о замкнутом множестве*.

Многочлен от n переменных $T_1, \ldots, T_n$ мы будем записывать дальше в виде $F(T)$, подразумевая под T набор переменных $T_1, \ldots, T_n$. Если замкнутое множество X состоит из всех совместных нулей многочленов $F_1(T), \ldots, F_m(T)$, то равенства $F_1(T) = \ldots = F_m(T) = 0$ мы будем называть *уравнениями множества* X.

Множество X, определяемое бесконечной системой уравнений $F_\alpha(T) = 0$, также будет замкнутым. Действительно, идеал $\mathfrak{A}$ кольца многочленов от $T_1, \ldots, T_n$, порожденный всеми многочленами $F_\alpha(T)$, имеет конечный базис: $\mathfrak{A} = (G_1, \ldots, G_m)$. Легко проверить, что X определяется системой уравнений $G_1 = \ldots = G_m = 0$.

Отсюда следует, что пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто. Действительно, если X_α замкнуты, то для того, чтобы получить систему уравнений, определяющих $X = \cap X_\alpha$, достаточно объединить вместе системы, определяющие все X_α.

Объединение конечного числа замкнутых множеств также замкнуто. Очевидно, что достаточно проверить это для случая двух множеств. Если $X = X_1 \cup X_2$, X_1 определяется системой уравнений $F_i(T) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, а X_2 — системой $G_j(T) = 0$ $(j = 1, \ldots, l)$, то X, как легко проверить, определяется системой $F_i(T)G_j(T) = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, l)$.

Пусть X — замкнутое подмножество аффинного пространства. Множество $U \subset X$ называется *открытым*, если его дополнение $X - U$ замкнуто. Любое открытое множество $U \ni x$ называется окрестностью точки x. Пересечение всех замкнутых подмножеств множества X, содержащих заданное подмножество $M \subset X$, замкнуто. Оно называется *замыканием* M и обозначается через $\overline{M}$. Подмножество M называется *плотным* в X, если $\overline{M} = X$. Это значит, что M не содержится ни в каком замкнутом подмножестве $Y \subset X$, $Y \neq X$.

Пример 1. Все аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ замкнуто — оно задается пустым множеством уравнений или уравнением $0 = 0$.

Пример 2. Подмножество $X \subset \mathbf{A}^1$, состоящее из всех точек $\mathbf{A}^1$, кроме точки 0, не замкнуто — всякий многочлен $F(T)$, обращающийся в 0 для всех $T \neq 0$, должен быть равен 0 тождественно.

Пример 3. Определим все замкнутые подмножества $X \subset \mathbf{A}^1$. Такое множество задается системой уравнений $F_1(T) = 0, \ldots, F_m(T) = 0$ от одного неизвестного T. Если все F_i тождественно равны 0, то $X = \mathbf{A}^1$. Если многочлены $F_i(T)$ взаимно просты, то они не имеют общих корней и X не содержит ни одной точки. Если же эти многочлены имеют общий наибольший делитель $D(T)$, то $D(T) = (T - \alpha_1)\ldots(T - \alpha_n)$ и X состоит из конечного числа точек $T = \alpha_1, \ldots, T = \alpha_n$.

Пример 4. Определим замкнутые подмножества $X \subset \mathbf{A}^2$. Они задаются системой уравнений

$$F_1(T) = 0, \ \ldots, \ F_m(T) = 0, \tag{1}$$

где теперь $T = (T_1, T_2)$. Если все F_i тождественно равны 0, то $X = \mathbf{A}^2$. Пусть это не так. Если многочлены $F_1, \ldots, F_m$ не имеют общего делителя, то, как следует из леммы в п. 1 § 1, система (1) имеет только конечное (может быть, пустое) множество решений. Пусть, наконец, все многочлены $F_i(T)$ имеют общий наибольший делитель $D(T)$. Тогда $F_i(T) = D(T)G_i(T)$, где теперь многочлены $G_i(T)$ не имеют общего делителя. Очевидно, что $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 задается системой уравнений $G_1 = \ldots = G_m = 0$, а X_2 — одним уравнением $D = 0$. Как мы видели, X_1 — конечное множество точек. Замкнутые множества, задаваемые в $\mathbf{A}^2$ одним уравнением, являются плоскими алгебраическими кривыми. Таким образом, замкнутое множество $X \subset \mathbf{A}^2$ или состоит из конечного (быть может, пустого) множества точек, или является объединением плоской алгебраической кривой и конечного множества точек, или совпадает с $\mathbf{A}^2$.

Пример 5. Сопоставим точке $\alpha \in \mathbf{A}^r$ с координатами $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ и точке $\beta \in \mathbf{A}^s$ с координатами $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ точку $(\alpha, \beta) \in \mathbf{A}^{r+s}$ с координатами $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s)$. Таким образом, $\mathbf{A}^{r+s}$ отождествляется с множеством пар (α, β), $\alpha \in \mathbf{A}^r$, $\beta \in \mathbf{A}^s$. Пусть $X \subset \mathbf{A}^r$ и $Y \subset \mathbf{A}^s$ — замкнутые множества. Множество пар $(x, y) \in \mathbf{A}^{r+s}$, $x \in X$, $y \in Y$, называется *произведением* X и Y и обозначается через $X \times Y$. Это — также замкнутое множество. Действительно, если X задается уравнениями $F_i(T) = 0$, а Y — уравнениями $G_j(U) = 0$, то $X \times Y$ задается в $\mathbf{A}^{r+s}$ уравнениями $F_i(T) = 0$, $G_j(U) = 0$.

Пример 6. Множество $X \subset \mathbf{A}^n$, заданное одним уравнением $F(T_1, \ldots, T_n) = 0$, называется *гиперповерхностью*.

2. Регулярные функции на замкнутом множестве. Пусть X — замкнутое множество в аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$, k — основное поле.

Определение. Функция f, заданная на X и принимающая значения в k, называется *регулярной*, если существует такой многочлен $F(T)$ с коэффициентами из k, что $f(x)=F(x)$ для всех точек $x\in X$.

При заданной функции f многочлен F определяется, вообще говоря, не однозначно: к нему можно прибавить, не изменив функции f, любой многочлен, входящий в систему уравнений множества X.

Совокупность регулярных функций на заданном замкнутом множестве X образует кольцо и алгебру над полем k, если определить действия сложения, умножения и умножения на элементы поля k так, как это делается в анализе — при помощи тех же действий над значениями в каждой точке $x\in X$. Полученное кольцо обозначается через $\mathrm{k}[X]$ и называется *координатным кольцом* замкнутого множества X.

Обозначим через $\mathrm{k}[T]$ кольцо многочленов с коэффициентами из k от переменных $T_1, \ldots, T_n$. Каждому многочлену $F\in\mathrm{k}[T]$, очевидно, можно сопоставить функцию $f\in\mathrm{k}[X]$, рассматривая F как функцию на множестве точек X. Таким образом, мы получим гомоморфизм кольца $\mathrm{k}[T]$ на кольцо $\mathrm{k}[X]$. Ядро этого гомоморфизма состоит из всех многочленов $F\in\mathrm{k}[T]$, обращающихся в 0 во всех точках $x\in X$. Как всякое ядро гомоморфизма, это множество является идеалом кольца $\mathrm{k}[T]$. Оно называется *идеалом замкнутого множества* X и обозначается через $\mathfrak{A}_X$. Очевидно, что

$$\mathrm{k}[X]=\mathrm{k}[T]/\mathfrak{A}_X.$$

Таким образом, кольцо $\mathrm{k}[X]$ определяется идеалом $\mathfrak{A}_X$.

Пример 1. Если X — это точка, то $\mathrm{k}[X]=\mathrm{k}$.

Пример 2. Если $X=\mathbf{A}^n$, то $\mathfrak{A}_X=0$, $\mathrm{k}[X]=\mathrm{k}[T]$.

Пример 3. Пусть $X\subset\mathbf{A}^2$ и задается уравнением $T_1T_2=1$. Тогда $\mathrm{k}[X]=\mathrm{k}[T_1, T_1^{-1}]$ и состоит из всех рациональных функций от T_1 вида $\dfrac{G(T_1)}{T_1^n}$, где $n\geqslant 0$, $G(T_1)$ — многочлен.

Пример 4. Докажем, что $\mathrm{k}[X\times Y]=\mathrm{k}[X]\otimes_{\mathrm{k}}\mathrm{k}[Y]$ для любых замкнутых множеств X и Y. Определим гомоморфизм φ: $\mathrm{k}[X]\otimes_{\mathrm{k}}\mathrm{k}[Y]\to\mathrm{k}[X\times Y]$ условием

$$\varphi\left(\sum_i f_i\otimes g_i\right)(x, y)=\sum_i f_i(x)\,g_i(y).$$

Очевидно, что так мы действительно получаем регулярные функции на множестве $X\times Y$. Ясно, что φ — эпиморфизм, так как функции α_i и β_j (в обозначениях примера 5 п. 1) принадлежат его образу, а они порождают все кольцо $\mathrm{k}[X\times Y]$. Для доказательства его мономорфности достаточно проверить, что если $\{f_i\}$ линейно независимы над k в $\mathrm{k}[X]$, а $\{g_j\}$ в $\mathrm{k}[Y]$, то $\varphi(f_i\otimes g_j)$ линейно независимы в $\mathrm{k}[X\times Y]$. Равенство

$$\sum_{i,j} c_{ij}f_i(x)\,g_j(y)=0$$

влечет за собой при любом фиксированном y соотношение $\sum_j c_{ij}g_j(y)=0$, а отсюда следует, что $c_{ij}=0$.

Так как кольцо $\mathrm{k}[X]$ является гомоморфным образом кольца многочленов $\mathrm{k}[T]$, то в нем имеет место теорема о конечности базиса идеалов. В нем верен также следующий аналог теоремы Гильберта о корнях (ср. предложение 1 п. 6 Приложения): если функция $f\in\mathrm{k}[X]$ обращается в 0 во всех точках $x\in X$, в которых обращаются в 0 функции $g_1, \ldots, g_m$, то $f^r\in(g_1, \ldots, g_m)$ при некотором $r>0$. Действительно, пусть f задается многочленом $F(T)$, g_i — многочленами $G_i(T)$ и пусть $F_j=0$ $(j=1, \ldots, l)$ — уравнения X. Тогда многочлен $F(T)$ обращается в 0 во всех точках $\alpha\in\mathbf{A}^n$, в которых обращаются в 0 многочлены $G_1, \ldots, G_m, F_1, \ldots, F_l$. Действительно, так как $F_j(\alpha)=0$, то $\alpha\in X$, а тогда $F(\alpha)=0$ по условию. Применяя теорему Гильберта к кольцу многочленов, мы получим, что $F^r\in(G_1, \ldots, G_m, F_1, \ldots, F_l)$ и, значит, $f^r\in(g_1, \ldots, g_m)$ в $\mathrm{k}[X]$.

Как связан идеал $\mathfrak{A}_X$ замкнутого множества X с системой уравнений $F_1=\ldots=F_m=0$ этого множества? По определению идеала $\mathfrak{A}_X$, $F_i\in\mathfrak{A}_X$, и поэтому $(F_1, \ldots, F_m)\subset\mathfrak{A}_X$. Однако не всегда $(F_1, \ldots, F_m)=\mathfrak{A}_X$. Например, если $X\subset\mathbf{A}^1$ и задается уравнением $T^2=0$, т. е. состоит из точки $T=0$, то $\mathfrak{A}_X$ состоит из многочленов без свободного члена. Таким образом, $\mathfrak{A}_X=(T)$, а $(F_1, \ldots, F_m)=(T^2)$. Можно, однако, всегда задать то же самое множество такой системой уравнений $G_1=\ldots=G_l=0$, что $(G_1, \ldots, G_l)=\mathfrak{A}_X$. Для этого достаточно вспомнить, что любой идеал в кольце $\mathrm{k}[T]$ имеет конечный базис. Пусть $G_1, \ldots, G_l$ — базис идеала $\mathfrak{A}_X$, т. е. $\mathfrak{A}_X=(G_1, \ldots, G_l)$. Тогда уравнения $G_1=\ldots=G_l=0$, очевидно, определяют то же самое множество X и обладают нужным свойством. Иногда удобно даже считать, что замкнутое множество определяется бесконечной системой уравнений $F=0$, где F —

3*

все многочлены идеала $\mathfrak{A}_X$. Действительно, если $(F_1, \ldots, F_m) = \mathfrak{A}_X$, то все эти уравнения являются следствиями уравнений $F_1 = \ldots = F_m = 0$.

Соотношения между замкнутыми множествами часто отражаются в их идеалах. Например, если X и Y — замкнутые множества в аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$, то $X \supset Y$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_X \subset \mathfrak{A}_Y$. Отсюда следует, что любому замкнутому множеству Y, содержащемуся в X, можно сопоставить идеал $\mathfrak{a}_Y$ кольца $k[X]$ — этот идеал состоит из образов многочленов $F \in \mathfrak{A}_Y$ при гомоморфизме $k[T] \to k[X]$. Наоборот, любой идеал $\mathfrak{a}$ кольца $k[X]$ определяет идеал $\mathfrak{A}$ в кольце $k[T]$: $\mathfrak{A}$ состоит из всех прообразов элементов $\mathfrak{a}$ при гомоморфизме $k[T] \to k[X]$. Очевидно, что $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_X$. Уравнения $F = 0$, где F — все многочлены из $\mathfrak{A}$, определяют замкнутое множество $Y \subset X$.

Из теоремы Гильберта о корнях следует, что Y пусто тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}_Y = k[X]$. Идеал $\mathfrak{a}_Y \subset k[X]$ иначе можно описать как совокупность всех функций $f \in k[X]$, которые равны 0 во всех точках подмногообразия Y.

В частности, каждая точка $x \in X$ является замкнутым подмножеством и, значит, определяет идеал $\mathfrak{m}_x \subset k[X]$. По определению этот идеал является ядром гомоморфизма $k[X] \to k$, сопоставляющего каждой функции $f \in k[X]$ ее значение в точке x. Так как $k[X]/\mathfrak{m}_x$ — поле, то идеал $\mathfrak{m}_x$ максимален. Наоборот, любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset k[X]$ соответствует некоторой точке $x \in X$. Действительно, он определяет замкнутое подмножество $Y \subset X$. Для любой точки $y \in Y$, $\mathfrak{m}_y \supset \mathfrak{m}$, а так как $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал, то $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}$. Если $u \in k[X]$, то множество точек $x \in X$, в которых $u(x) = 0$, замкнуто. Оно обозначается $V(u)$ и называется *гиперповерхностью* в X.

3. Регулярные отображения. Пусть $X \subset \mathbf{A}^n$ и $Y \subset \mathbf{A}^m$ — замкнутые множества.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *регулярным*, если существуют такие m регулярных функций $f_1, \ldots, f_m$ на X, что $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ для всех $x \in X$.

Таким образом, любое регулярное отображение $f: X \to \mathbf{A}^m$ задается m функциями $f_1, \ldots, f_m \in k[X]$. Чтобы проверить, что мы имеем дело с отображением $f: X \to Y$ (Y — замкнутое подмножество пространства $\mathbf{A}^m$), достаточно, очевидно, убедиться в том, что функции $f_1, \ldots, f_m$

как элементы кольца $k[X]$ удовлетворяют уравнениям множества Y.

Пример 1. Понятие регулярной функции на X совпадает с понятием регулярного отображения X в $\mathbf{A}^1$.

Пример 2. Линейное преобразование является регулярным отображением.

Пример 3. Проектирование $f(x, y) = x$ определяет регулярное отображение кривой, заданной уравнением $xy = 1$, в $\mathbf{A}^1$.

Пример 4. Предыдущий пример может быть обобщен так: пусть $X \subset \mathbf{A}^n$ — замкнутое множество и F — регулярная функция на X. Рассмотрим множество $X' \subset X \times \mathbf{A}^1$, заданное уравнением $T_{n+1}F(T_1, \ldots, T_n) = 1$. Проектирование $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$ определяет регулярное отображение $\varphi: X' \to X$.

Пример 5. Отображение $f(t) = (t^2, t^3)$ является регулярным отображением прямой $\mathbf{A}^1$ в кривую, заданную уравнением $x^3 = y^2$.

Пример 6. Приведем пример, очень важный для теории чисел. Предположим, что коэффициенты уравнений $F_i(T)$ замкнутого множества $X \subset \mathbf{A}^n$ принадлежат полю $\mathbf{F}_p$ из простого числа элементов p.

Как было сказано в п. 1 § 1, точки множества X, координаты которых лежат в $\mathbf{F}_p$, соответствуют решениям системы $F_i(T) \equiv 0 \pmod p$. Рассмотрим отображение φ пространства $\mathbf{A}^n$, определенное формулами

$$\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p).$$

Это, очевидно, регулярное отображение. Важно, что φ переводит X в себя. Действительно, если $\alpha \in X$, т. е. $F_i(\alpha) = 0$, то по свойству полей характеристики p и ввиду того, что $F_i(T) \in \mathbf{F}_p[T]$, $F_i(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p) = (F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))^p = 0$. Полученное отображение $\varphi: X \to X$ называется *отображением Фробениуса*. Его значение заключается в том, что точки множества X, координаты которых содержатся в $\mathbf{F}_p$, характеризуются среди всех точек X как неподвижные точки отображения φ. Действительно, уравнение $\alpha_i^p = \alpha_i$ имеет в качестве решений как раз все элементы поля $\mathbf{F}_p$.

Совершенно аналогично, элементы α из поля $\mathbf{F}_{p^r}$, состоящего из p^r элементов, характеризуются соотношением $\alpha^{p^r} = \alpha$, а поэтому $x \in X$ с координатами в поле $\mathbf{F}_{p^r}$ являются неподвижными точками отображения φ^r.

Обозначим число точек $x \in X$ с координатами в поле $\mathbf{F}_{p^r}$ через ν_r. Для того чтобы проще обозреть эту совокупность чисел, рассматривают их производящую функцию $P_X(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \nu_r t^r$. Глубокая общая теорема утверждает, что эта функция всегда *рациональна* (довольно элементарное доказательство см. в книге [22]). Функция $P_X(t)$ дает, таким образом, финитное выражение для бесконечной последовательности чисел ν_r.

Функция $P_X(t)$, связанная с замкнутым множеством X, обладает некоторыми чертами, аналогичными ζ-функции Римана. Чтобы их выявить, заметим, что если координаты точки $x \in X$ принадлежат полю $\mathbf{F}_{p^r}$ и порождают это поле, то множеству X принадлежат все точки $\varphi^i(x)$ $(i = 1, \ldots, r)$ и все они различные. Набор таких точек называется *циклом*, а число r точек в цикле ξ называется его *степенью* и обозначается через $\deg \xi$. Теперь можно сгруппировать все ν_r точек $x \in X$ с координатами в поле $\mathbf{F}_{p^r}$ по циклам. Координаты любой из этих точек порождают некоторое подполе $\mathbf{F}_{p^d} \subset \mathbf{F}_{p^r}$, причем, как известно (см., например, [8], с. 138), $d \mid r$. Мы получаем формулу

$$\nu_r = \sum_{d \mid r} d\mu_d,$$

где μ_d — число циклов степени d, откуда

$$P_X(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{d \mid r} d\mu_d t^r = \sum_{d=1}^{\infty} d\mu_d \sum_{m=1}^{\infty} t^{md} = \sum_{d=1}^{\infty} \mu_d \frac{dt^d}{1-t^d}. \qquad (1)$$

Введем функцию

$$Z_X(t) = \prod_{\xi} \frac{1}{1 - t^{\deg \xi}}, \qquad (2)$$

где произведение распространено на все циклы ξ. Тогда формула (1) перепишется, очевидно, так:

$$P_X(t) = \frac{Z'_X(t)}{Z_X(t)} t.$$

Выражение (2) аналогично эйлеровскому разложению для функции Римана. Чтобы подчеркнуть эту аналогию,

полагают $p^{\deg \xi} = N(\xi)$ и $t = p^{-s}$. Тогда (2) принимает вид

$$Z_X(t) = \zeta_X(s) = \prod_{\xi} \frac{1}{1 - N(\xi)^{-s}}.$$

Эта функция (как $Z_X(t)$, так и $\zeta_X(s)$) называется *дзета-функцией* замкнутого множества X.

Выясним, как действует регулярное отображение на кольцо регулярных функций на замкнутом множестве. Начнем с замечания, относящегося к произвольным множествам и отображениям. Если $f\colon X \to Y$ — отображение множества X в множество Y, то каждой функции u на Y (со значениями в произвольном множестве Z) можно следующим образом сопоставить функцию v на X: $v(x) = u(f(x))$. Очевидно, что отображение $v\colon X \to Z$, определяемое функцией v, является произведением отображений $u\colon Y \to Z$ и $f\colon X \to Y$. Мы обозначим функцию v через $f^*(u)$. Таким образом, f^* — это отображение функций на Y в функции на X. Пусть теперь f — регулярное отображение $X \to Y$. Отображение f^* переводит регулярные функции на Y в регулярные функции на X. Действительно, если u задается полиномом $F(T_1, \ldots, T_n)$, а отображение f — полиномами $F_1, \ldots, F_m$, то $v = f^*(u)$ получается просто подстановкой F_i в F вместо T_i, т. е. задается полиномом $F(F_1, \ldots, F_m)$. Больше того, регулярные отображения можно характеризовать как отображения, переводящие регулярные функции в регулярные. Действительно, предположим, что отображение замкнутых множеств $f\colon X \to Y$ таково, что для любой регулярной на Y функции u функция $f^*(u)$ тоже регулярна. Тогда, в частности, это относится и к функциям t_i, определяемым координатами T_i $(i = 1, \ldots, m)$ на Y. Следовательно, функции $f^*(t_i)$ регулярны на X. Но это и значит, что отображение f регулярно.

Мы видели, что если отображение f регулярно, то f^* является отображением $f^*\colon \mathrm{k}[Y] \to \mathrm{k}[X]$. Из определения этого отображения легко следует, что f^* является гомоморфизмом алгебры $\mathrm{k}[Y]$ в алгебру $\mathrm{k}[X]$. Покажем, что наоборот, любой гомоморфизм алгебр $\varphi\colon \mathrm{k}[Y] \to \mathrm{k}[X]$ имеет вид $\varphi = f^*$, где f — некоторое регулярное отображение X в Y. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — координаты в пространстве $\mathbf{A}^m$, в котором содержится Y, рассматриваемые как функции на Y. Очевидно, что $t_i \in \mathrm{k}[Y]$ и, значит, $\varphi(t_i) \in \mathrm{k}[X]$. Положим $\varphi(t_i) = s_i$ и рассмотрим отображение f, задаваемое формулами $f(x) = (s_1(x), \ldots$

$\ldots, s_m(x))$. Оно, конечно, регулярно. Докажем, что $f(x) \in Y$. Действительно, если $H \in \mathfrak{A}_Y$, то $H(t_1, \ldots, t_m) = 0$ в $k[Y]$, а значит, и $\varphi(H) = 0$ на X. Пусть $x \in X$. Тогда $H(f(x)) = \varphi(H)(x) = 0$, а это и значит, что $f(x) \in Y$.

Определение. Регулярное отображение $f\colon X \to Y$ замкнутых множеств называется *изоморфизмом*, если оно обладает обратным, т. е. если существует такое регулярное отображение $g\colon Y \to X$, что $f \cdot g = 1$, $g \cdot f = 1$.

Многообразия X и Y называются в этом случае изоморфными. Очевидно, что изоморфизм является взаимно однозначным отображением.

Из сказанного выше следует, что если f — изоморфизм, то f^* является изоморфизмом алгебр $k[X]$ и $k[Y]$. Легко убедиться, что верно и обратное, так что замкнутые множества изоморфны тогда и только тогда, когда их кольца регулярных функций изоморфны над k.

Доказанные только что факты показывают, что сопоставление $X \to k[X]$ определяет эквивалентность категории замкнутых подмножеств аффинных пространств (и их регулярных отображений) и некоторой подкатегории категории коммутативных алгебр над k (и их гомоморфизмов). Какова эта категория, т. е. какие алгебры имеют вид $k[X]$?

Теорема 1. *Алгебра A над полем k тогда и только тогда изоморфна кольцу $k[X]$, где X — замкнутое множество, когда A не имеет нильпотентных элементов (т. е. из $f \in A$, $f^m = 0$ следует $f = 0$) и порождена над k конечным числом элементов.*

Необходимость всех приведенных условий очевидна. Если алгебра A порождена конечным числом элементов $t_1, \ldots, t_n$, то $A \simeq k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — идеал кольца многочленов $k[T_1, \ldots, T_n]$. Пусть $\mathfrak{A} = (F_1, \ldots, F_m)$. Рассмотрим замкнутое множество $X \subset \mathbf{A}^n$, определенное уравнениями $F_1 = \ldots = F_m = 0$; мы докажем, что $\mathfrak{A}_X = \mathfrak{A}$, а тогда $k[X] \simeq k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{A}_X \simeq A$.

Если $F \in \mathfrak{A}_X$, то, по теореме Гильберта о корнях, $F^r \in \mathfrak{A}$ при некотором $r > 0$. Так как A не имеет нильпотентных элементов, то и $F \in \mathfrak{A}$. Поэтому $\mathfrak{A}_X \subset \mathfrak{A}$, а так как, очевидно, и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_X$, то $\mathfrak{A}_X = \mathfrak{A}$.

Пример 7. Парабола, заданная уравнением $y = x^k$, изоморфна прямой, и отображения $f(x, y) = x$, $g(t) = (t, t^k)$ определяют изоморфизм.

Пример 8. Проекция $f(x, y) = x$ гиперболы $xy = 1$ в ось x не является изоморфизмом, так как это отображение не взаимно однозначно — на гиперболе нет точки (x, y), для которой $f(x, y) = 0$. См. также задачу 7.

Пример 9. Отображение $f(t) = (t^2, t^3)$ прямой на кривую, заданную уравнением $x^3 = y^2$, как легко проверить, взаимно однозначно. Однако оно не является изоморфизмом, так как обратное отображение имеет вид $g(x, y) = \frac{y}{x}$, а функция $\frac{y}{x}$ нерегулярна в начале координат (см. задачу 5).

Пример 10. Пусть X и $Y \subset \mathbf{A}^r$ — замкнутые множества. Рассмотрим $X \times Y \subset \mathbf{A}^{2r}$ (пример 5 п. 1) и линейное подпространство $\Delta \subset \mathbf{A}^{2r}$, заданное уравнениями $t_1 = u_1, \ldots, t_r = u_r$ и называемое диагональю. Каждой точке $z \in X \cap Y$ сопоставим точку $\varphi(z) = (z, z) \in \mathbf{A}^{2r}$, которая, очевидно, принадлежит $(X \times Y) \cap \Delta$. Полученное отображение $\varphi\colon X \cap Y \to (X \times Y) \cap \Delta$ определяет, как легко проверить, изоморфизм $X \cap Y$ и $(X \times Y) \cap \Delta$. Используя его, можно всегда свести изучение пересечения двух замкнутых множеств к рассмотрению пересечения другого замкнутого множества с линейным подпространством.

Пример 11. Пусть X — замкнутое множество, G — конечная группа его автоморфизмов. Предположим, что характеристика поля k не делит порядок N группы G. Положим $A = k[X]$, и пусть A^G — подалгебра инвариантов, т. е. $A^G = \{f \in A,\ g^*f = f$, для всех $g \in G\}$. Согласно предложению 1 п. 5 Приложения алгебра A^G имеет конечное число образующих. Ввиду теоремы 1 отсюда следует, что существуют такое замкнутое множество Y, что $A^G \simeq k[Y]$, и такое регулярное отображение $\varphi\colon X \to Y$, что $\varphi^*(k[Y]) = A^G$. Это множество называется *фактором* (или фактормногообразием) X по группе G и обозначается X/G.

Для двух точек $x_1, x_2 \in X$ тогда и только тогда существует такое преобразование $g \in G$, что $x_2 = g(x_1)$, когда $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Действительно, если $x_2 = g(x_1)$, то $f(x_2) = f(x_1)$ для всех $f \in k[X]^G = k[Y]$ и, значит, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Если $x_2 \neq g(x_1)$, то надо взять такую функцию $f \in k[X]$, что $f(g(x_2)) = 1$, $f(g(x_1)) = 0$ для всех $g \in G$. Тогда $S(f)(x_2) = 1$, $S(f)(x_1) = 0$ (ср. п. 5 Приложения) и, значит, $\varphi(x_2) \neq \varphi(x_1)$. Таким образом,

X/G параметризует «орбиты» $\{g(x),\ g \in G\}$ группы G на X.

Дальше нас будут интересовать главным образом понятия и свойства замкнутых множеств, инвариантные относительно изоморфизма. Система уравнений, задающая множество, заведомо не является таким понятием — изоморфными могут быть множества, заданные в различных пространствах $\mathbf{A}^r$ различными системами уравнений. Поэтому естественно было бы попытаться дать инвариантное определение замкнутого множества, не зависящее от его реализации в некотором аффинном пространстве. Такое определение будет дано в гл. V в связи с понятием схемы.

Выясним теперь, когда гомоморфизм $f^*\colon k[Y] \to k[X]$, соответствующий регулярному отображению $f\colon X \to Y$, не имеет ядра, т. е. когда f^* определяет изоморфное вложение $k[Y]$ в $k[X]$. Посмотрим, когда для $u \in k[Y]$ $f^*(u) = 0$. Это значит, что $u(f(x)) = 0$ для всех точек $x \in X$. Иначе говоря, u обращается в 0 на всех точках образа $f(X)$ множества X при отображении f. Множество точек $y \in Y$, для которых $u(y) = 0$, очевидно, замкнуто, и поэтому если оно содержит $f(X)$, то содержит и его замыкание $\overline{f(X)}$. Повторяя то же рассуждение в обратном порядке, мы увидим, что $f^*(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ на $\overline{f(X)}$ или, что то же самое, $u \in \mathfrak{a}_{\overline{f(X)}}$. В частности, отсюда следует, что ядро гомоморфизма f^* равно 0 тогда и только тогда, когда $\overline{f(X)} = Y$, т. е. когда $f(X)$ плотно в Y.

Это заведомо так, если уже $f(X) = Y$, но возможен случай, когда $f(X) \neq Y$, но $\overline{f(X)} = Y$ (см. пример 3).

Дальше нас будут в основном интересовать алгебраические многообразия в проективном пространстве. Но и замкнутые подмножества аффинного пространства обладают своеобразной и часто не тривиальной геометрией. В качестве примера приведем теорему Абьянкара — Моо:

Кривая $X \subset \mathbf{A}^2$ тогда и только тогда изоморфна $\mathbf{A}^1$, когда она может быть переведена в прямую автоморфизмом плоскости $\mathbf{A}^2$.

(Автоморфизмом называется регулярное отображение $\mathbf{A}^2$ в себя, имеющее обратное.)

Группа $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^2$ автоморфизмов плоскости — очень интересный объект. Некоторые примеры автоморфизмов

строятся просто: это отображения вида

$$x' = \alpha x,$$
$$y' = \beta y + f(x), \qquad \alpha\beta \neq 0, \tag{3}$$

где f — многочлен, а также аффинные отображения. Известно, что вся группа $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^2$ такими автоморфизмами порождается.

Более того, представление элемента $g \in \operatorname{Aut} \mathbf{A}^2$ в виде слова, содержащего отображения (3) и аффинные отображения, почти однозначно: эти два вида отображений связаны в группе $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^2$ лишь соотношениями, выражающими, что у них есть общая часть — отображения (3) с линейным f. На языке теории групп группа $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^2$ является свободным произведением (или амальгаммой) двух ее подгрупп — отображений типа (3) и аффинных — с объединенной подгруппой. См. [23] и задачу 10.

С автоморфизмами плоскости $\mathbf{A}^2$ связана знаменитая гипотеза о якобиане. Она утверждает, что (в случае, если основное поле k имеет характеристику 0) отображение

$$x' = f(x, y),$$
$$y' = g(x, y), \qquad f, g \in k[x, y],$$

тогда и только тогда определяет автоморфизм, когда якобиан $\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$ является ненулевой константой. В настоящее время эта гипотеза доказана для не очень больших степеней (порядка 100) многочленов f и g. Аналогичная гипотеза существует и для пространства $\mathbf{A}^n$.

ЗАДАЧИ

1. Множество $X \subset \mathbf{A}^2$ определяется уравнениями $f\colon x^2 + y^2 = 1$ и $g\colon x = 1$. Найти идеал $\mathfrak{A}_X$. Будет ли $\mathfrak{A}_X = (f, g)$?

2. Пусть $X \subset \mathbf{A}^2$ — плоская алгебраическая кривая, определенная уравнением $y^2 = x^3$. Доказать, что все элементы кольца $k[X]$ однозначно записываются в виде $P(x) + Q(x)y$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

3. Пусть X — кривая задачи 2, $f(t) = (t^2, t^3)$ — регулярное отображение $\mathbf{A}^1 \to X$. Доказать, что f не является изоморфизмом.

Указание. Используя результат задачи 2, попытаться построить обратное регулярное отображение.

4. Пусть X — кривая, определенная уравнением $y^2 = x^2 + x^3$, f — отображение $\mathbf{A}^1 \to X$, определенное формулой $f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Доказать, что соответствующий гомоморфизм f^* изоморфно отображает кольцо $k[X]$ на подкольцо кольца многочленов $k[t]$, состоящее из многочленов $g(t)$, для которых $g(1) = g(-1)$.

5. Доказать, что гипербола, определенная уравнением $xy = 1$, и прямая $\mathbf{A}^1$ не изоморфны.

6. Для регулярного отображения $f\colon \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$, заданного формулой $f(x, y) = (x, xy)$, найти $f(\mathbf{A}^2)$. Будет ли это множество открыто в $\mathbf{A}^2$? Будет ли оно плотным? Замкнутым?

7. То же, что и в задаче 8, для отображения $f\colon \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$: $f(x, y, z) = (x, xy, xyz)$.

8. Изоморфизм $f\colon X \to X$ замкнутого множества X в него же называется автоморфизмом. Доказать, что все автоморфизмы прямой $\mathbf{A}^1$ имеют вид $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

9. Доказать, что отображение $f(x, y) = (\alpha x, \beta y + P(x))$, где $P(x)$ — любой многочлен от x, является автоморфизмом $\mathbf{A}^2$. Доказать, что эти автоморфизмы образуют группу.

10. Пусть A — группа аффинных преобразований плоскости $\mathbf{A}^2$, B — группа, описанная в задаче 9, и $C = A \cap B$. Выберем систему представителей $\bar{A}$ классов смежности $C \backslash A$ и $\bar{B}$ — классов $C \backslash B$, выбросив из них представитель самого C. Доказать, что произведение $a\bar{b}_1\bar{a}_1\bar{b}_2\bar{a}_2\bar{b}_3 \ldots \neq e$, если $a \in C$, $\bar{a}_i \in \bar{A}$, $\bar{b}_i \in \bar{B}$. [Указание. Положим $s_{2i-1} = a\bar{b}_1 \ldots \bar{b}_i$, $s_{2i} = a\bar{b}_1 \ldots \bar{b}_i\bar{a}_i$. Пусть s_j имеют вид $(x, y) \to (f_j(x, y), g_j(x, y))$. Проверить, что $\deg f_{2i} = \deg g_{2i} = \deg f_{2i+1} < \deg g_{2i+1}$, так что число $\max(\deg f_j, \deg g_j)$ или сохраняется, или увеличивается.] Вывести отсюда однозначность представления элемента $g \in \operatorname{Aut} \mathbf{A}^2$ в виде $a\bar{b}_1\bar{a}_1\bar{b}_2 \ldots$

11. Доказать, что если $f(x_1, \ldots, x_n) = (P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \ldots, P_n(x_1, \ldots, x_n))$ — автоморфизм $\mathbf{A}^n$, то якобиан $\left|\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j}\right| \in k$. Обозначив значение этого якобиана через $J(f)$, доказать, что соответствие $f \to J(f)$ определяет гомоморфизм группы всех автоморфизмов $\mathbf{A}^n$ в группу ненулевых элементов поля k.

12. Пусть X состоит из двух точек. Доказать, что кольцо $k[X]$ изоморфно прямой сумме двух экземпляров поля k.

13. Пусть $f\colon X \to Y$ — регулярное отображение. Подмножество $T \subset X \times Y$, состоящее из точек вида $(x, f(x))$, называется графиком f. Доказать: а) что T — замкнутое подмножество в $X \times Y$ и б) что T изоморфно X.

14. Отображение $p_Y\colon X \times Y \to Y$, определенное формулой $p_Y(x, y) = y$, называется проектированием. Доказать, что для $Z \subset X$ и регулярного отображения $f\colon X \to Y$ имеем $f(Z) = p_Y((Z \times Y) \cap T)$, где T — график f, а $Z \times Y$ состоит из всех точек (z, y), $z \in Z$, $y \in Y$.

15. Доказать, что для любого регулярного отображения $f\colon X \to Y$ существует регулярное отображение $g\colon X \to X \times Y$, являющееся изоморфизмом X с замкнутым подмножеством многообразия $X \times Y$, для которого $f = p_Y \cdot g$ (любое регулярное отображение разлагается на вложение и проектирование).

16. Доказать, что если $X = \bigcup U_\alpha$ — покрытие замкнутого множества X открытыми множествами, то существует такое конечное число множеств $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_r}$, что $X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_r}$.

17. Доказать, что отображение Фробениуса φ является взаимно однозначным. Будет ли оно изоморфизмом, если, например, $X = \mathbf{A}^1$?

18. Найти функцию $Z_X(t)$, если $X = \mathbf{A}^n$.

19. Найти функцию $Z_X(t)$, если X — неособая коника в $\mathbf{A}^2$.

§ 3. Рациональные функции

1. Неприводимые множества. В п. 1 § 1 мы встретились с понятием неприводимой плоской алгебраической кривой. Сформулируем аналогичное понятие в общем случае.

Определение. Замкнутое множество X называется *приводимым*, если существуют такие замкнутые подмножества $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$, $X_1 \neq X$, $X_2 \neq X$, что $X = X_1 \cup X_2$. В противном случае X называется *неприводимым*.

Теорема 1. *Любое замкнутое множество является объединением конечного числа неприводимых.*

Доказательство. Пусть для замкнутого множества X теорема неверна. Тогда X приводимо: $X = X_1 \cup X_1'$, причем или для X_1, или для X_1' теорема неверна. Если это X_1, то оно приводимо и опять одно из тех замкнутых множеств, объединением которых оно является, приводимо. Так мы построим бесконечную последовательность замкнутых множеств $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$, $X \neq X_1$, $X_1 \neq X_2$, ... Докажем, что такой последовательности быть не может. Действительно, для соответствующих идеалов мы имели бы $\mathfrak{A}_X \subset \mathfrak{A}_{X_1} \subset \mathfrak{A}_{X_2}, \ldots$, $\mathfrak{A}_X \neq \mathfrak{A}_{X_1}$, $\mathfrak{A}_{X_1} \neq \mathfrak{A}_{X_2}, \ldots$ Но такой последовательности не может существовать, так как в кольце многочленов каждый идеал имеет конечный базис, а значит, возрастающая последовательность идеалов обрывается. Теорема доказана.

Если в представлении $X = \bigcup X_i$ для некоторых индексов $i \neq j$ имеем $X_i \subset X_j$, то мы можем выкинуть из этого представления X_i. Проделав несколько раз эту операцию, мы придем к представлению $X = \bigcup X_i$, в котором при $i \neq j$ будет $X_i \not\subset X_j$. Такое представление называется *несократимым* разложением X на неприводимые замкнутые множества, а X_i называются *неприводимыми компонентами* X.

Теорема 2. *Несократимое представление замкнутого множества единственно.*

Пусть $X = \bigcup_i X_i = \bigcup_j Y_j$ — два несократимых представления. Тогда $X_i = X_i \cap X = X_i \cap (\bigcup Y_j) = \bigcup_j (X_i \cap Y_j)$. Так как X_i по условию неприводимо, то для некоторого j имеем $X_i \cap Y_j = X_i$, т. е. $X_i \subset Y_j$. Меняя местами первое и второе разложения, получим, что для j существует такое i', что $Y_j \subset X_{i'}$. Следовательно, $X_i \subset Y_j \subset X_{i'}$, а ввиду несократимости разложения $i' = i$ и $Y_j = X_i$. Теорема доказана.

Мы сформулируем теперь понятие неприводимости замкнутого множества X в терминах кольца $\mathrm{k}[X]$. Если X приводимо, $X = X_1 \cup X_2$, то, так как $X \supset X_1$, $X \neq X_1$ существует многочлен F_1, равный 0 на X_1, но не равный 0 на X, и аналогичный многочлен F_2 для X_2. Тогда $F_1 \cdot F_2$ равен 0 и на X_1, и на X_2, и, значит, на X. Соответствующие регулярные функции $f_1, f_2 \in \mathrm{k}[X]$ обладают тем свойством, что $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$, $f_1 \cdot f_2 = 0$. Иначе говоря, f_1 и f_2 являются делителями 0 в $\mathrm{k}[X]$. Наоборот, пусть в кольце $\mathrm{k}[X]$ есть делители 0: $f_1 \cdot f_2 = 0$, $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$. Обозначим через X_1 и X_2 замкнутые подмножества X, соответствующие идеалам (f_1) и (f_2) кольца $\mathrm{k}[X]$. Иначе говоря, X_i состоит из тех точек $x \in X$, для которых $f_i(x) = 0$ $(i = 1, 2)$. Очевидно, что $X_i \neq X$, так как $f_i \neq 0$ на X, и $X = X_1 \cup X_2$, так как $f_1 \cdot f_2 = 0$ на X и, значит, в каждой точке $x \in X$ или $f_1(x) = 0$, или $f_2(x) = 0$. Таким образом, замкнутое множество X неприводимо тогда и только тогда, когда кольцо $\mathrm{k}[X]$ не имеет делителей нуля. Это в свою очередь равносильно тому, что идеал $\mathfrak{A}_X$ простой.

Если замкнутое подмножество Y содержится в X, то очевидно, что и его неприводимые компоненты содержатся в X. В терминах кольца $\mathrm{k}[X]$ неприводимость подмножества $Y \subset X$ выражается как простота идеала $\mathfrak{a}_Y \subset \mathrm{k}[X]$.

Гиперповерхность $X \subset \mathbf{A}^n$ с уравнением $f = 0$ приводима тогда и только тогда, когда приводим многочлен f. Таким образом, наша терминология согласуется с принятой в § 1 для случая плоских кривых.

Теорема 3. *Произведение неприводимых замкнутых множеств неприводимо.*

Предположим, что X и Y неприводимы, но $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$, $Z_i \neq X \times Y$ $(i = 1, 2)$. Тогда для любой точки $x \in X$ замкнутое множество $x \times Y$, состоящее из точек (x, y), где y — любая точка Y, изоморфно Y и, значит, неприводимо. Так как $x \times Y = ((x \times Y) \cap Z_1) \cup ((x \times Y) \cap Z_2)$, то $x \times Y \subset Z_1$ или $x \times Y \subset Z_2$. Рассмотрим множество $X_1 \subset X$, состоящее из таких точек $x \in X$, что $x \times Y \subset Z_1$, и докажем, что это множество замкнуто. Действительно, для любой точки $y \in Y$ множество X_y тех точек $x \in X$, для которых $x \times y \in Z_1$, замкнуто: оно характеризуется тем, что $(X \times y) \cap Z_1 = X_y \times y$, а пересечение замкнутых множеств $X \times y$ и Z_1 замкнуто. Так как $X_1 = \bigcap_{y \in Y} X_y$, то и X_1 замкнуто. Аналогичное множество X_2, состоящее из точек $x \in X$, для которых $x \times Y \subset Z_2$, также замкнуто. Мы видим, что $X_1 \cup X_2 = X$, а ввиду неприводимости X отсюда следует, что $X_1 = X$ или $X_2 = X$. В первом случае $X \times Y = Z_1$, а во втором $X \times Y = Z_2$. Это противоречие доказывает теорему.

2. Рациональные функции. Как известно, любое кольцо без делителей нуля можно вложить в поле — его поле частных.

Определение. Если замкнутое множество X неприводимо, то поле частных кольца $\mathrm{k}[X]$ называется *полем рациональных функций* на X. Оно обозначается $\mathrm{k}(X)$.

Вспомнив определение поля частных, мы можем сказать, что поле $\mathrm{k}(X)$ состоит из таких рациональных функций $\frac{F(T)}{G(T)}$, что $G(T) \notin \mathfrak{A}_X$, причем считается, что $\frac{F}{G} = \frac{F_1}{G_1}$, если $FG_1 - F_1G \in \mathfrak{A}_X$. Это означает, что поле $\mathrm{k}(X)$ можно построить также следующим образом. Рассмотрим подкольцо $\mathcal{O}_X \subset \mathrm{k}(T_1, \ldots, T_n)$, состоящее из таких рациональных функций $f = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathrm{k}[T]$, что $Q \notin \mathfrak{A}_X$. Те функции f, для которых $P \in \mathfrak{A}_X$, образуют идеал M_X и $\mathrm{k}(X) = \mathcal{O}_X / M_X$.

В отличие от регулярной функции на замкнутом множестве, рациональной функции не всегда можно приписать определенное значение в точке этого множества, например функции $\frac{1}{x}$ в точке 0 или $\frac{x}{y}$ в точке $(0, 0)$. Выясним, когда это возможно.

Определение. Рациональная функция $\varphi \in \mathrm{k}(X)$ называется *регулярной в точке* $x \in X$, если она может быть записана в виде $\varphi = \frac{f}{g}$, $f, g \in \mathrm{k}[X]$, $g(x) \neq 0$.

В этом случае элемент $\frac{f(x)}{g(x)}$ поля k называется значением функции φ в точке x и обозначается через $\varphi(x)$.

Теорема 4. *Рациональная функция φ, регулярная во всех точках замкнутого множества, является регулярной функцией на этом множестве.*

Пусть $\varphi \in \mathrm{k}(X)$ и регулярна во всех точках $x \in X$. Это значит, что для любой точки x существуют такие элементы f_x, $g_x \in \mathrm{k}[X]$, $g_x(x) \neq 0$, что $\varphi = \frac{f_x}{g_x}$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{a}$, порожденный всеми функциями g_x, $x \in X$. Он имеет конечный базис, т. е. существует такое конечное число точек $x_1, \ldots, x_N$, что $\mathfrak{a} = (g_{x_1}, \ldots, g_{x_N})$. Функции g_{x_i} не могут иметь общий нуль $x \in X$ — тогда и все функции идеала $\mathfrak{a}$ обращались бы в точке x в 0, в то время как $g_x(x) \neq 0$. Из аналога теоремы Гильберта о корнях следует, что $\mathfrak{a} = 1$, т. е. существуют такие функции $u_1, \ldots, u_N \in \mathrm{k}[X]$, что $\sum_{i=1}^{N} u_i g_{x_i} = 1$. Умножим обе части этого равенства на φ и воспользуемся тем, что $\varphi = \frac{f_{x_i}}{g_{x_i}}$. Мы получим, что $\varphi = \sum_{i=1}^{N} u_i f_{x_i}$, т. е. $\varphi \in \mathrm{k}[X]$. Теорема доказана.

Множество точек, в которых рациональная функция φ на замкнутом множестве X регулярна, не пусто и открыто. Первое утверждение следует из того, что φ можно представить в виде $\varphi = \frac{f}{g}$, где f, $g \in \mathrm{k}[X]$, $g \neq 0$. Это значит, что существует такая точка $x \in X$, что $g(x) \neq 0$. Очевидно, что в этой точке φ регулярна. Для доказательства второго утверждения рассмотрим все возможные представления $\varphi = \frac{f_i}{g_i}$. Для любой регулярной функции g_i множество $Y_i \subset X$, состоящее из тех точек $x \in X$, для которых $g_i(x) = 0$, очевидно, замкнуто, а значит, $U_i = X - Y_i$ открыто. Множество точек U, в которых функция φ регулярна, по определению имеет вид $U = \bigcup U_i$ и, следовательно, открыто. Это открытое множество называется *областью определения* функции φ. Для любой конечной системы рациональных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ множество точек $x \in X$, в которых они все регулярны, также открыто и не пусто. Первое утверждение следует из того, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто, а второе — из следующего полезного свойства: пересечение конечного числа непустых открытых множеств неприводимого замкнутого множества не пусто. Действительно, пусть $U_i = X - Y_i$, $i = 1, \ldots, m$; $\bigcap U_i = \varnothing$. Тогда $Y_i \neq X$ и $\bigcup Y_i = X$. Но Y_i — замкнутые множества, и мы приходим к противоречию с неприводимостью множества X.

Таким образом, любое конечное множество рациональных функций можно сравнивать на некотором непустом открытом множестве. Это замечание полезно ввиду того, что рациональная функция $\varphi \in \mathrm{k}(X)$ однозначно определяется своим заданием на некотором непустом открытом подмножестве $U \subset X$. Действительно, если $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in U$ и $\varphi \neq 0$ на X, то, взяв какое-то одно представление $\varphi = \frac{f}{g}$, f, $g \in \mathrm{k}[X]$, мы получим, что X является объединением двух замкнутых множеств: $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 = X - U$, а X_2 определено уравнением $f = 0$. Это противоречит неприводимости X.

3. Рациональные отображения. Пусть $X \subset \mathbf{A}^n$ — неприводимое замкнутое множество. Рациональное отображение $X \to \mathbf{A}^m$ задается произвольным набором m функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathrm{k}(X)$. Определим теперь понятие рационального отображения φ: $X \to Y$, где Y — замкнутое подмножество пространства $\mathbf{A}^m$.

Определение. *Рациональным отображением* φ: $X \to Y \subset \mathbf{A}^m$ называется такой набор m функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathrm{k}(X)$, что для любой точки $x \in X$, в которой все функции φ_i регулярны, $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) \in Y$. Отображение φ называется *регулярным* в такой точке x, а точка $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ называется *образом* точки x и обозначается через $\varphi(x)$.

Множество точек вида $\varphi(x)$, где x — те точки X, в которых φ регулярно, называется *образом* X и обозначается через $\varphi(X)$. Таким образом, рациональное отображение не является отображением всего множества X в множество Y, но оно заведомо определяет отображение некоторого непустого открытого множества $U \subset X$ в Y.

Рассмотрение функций и отображений, которые определены не во всех точках, является существенным отличием алгебраической геометрии от других разделов геометрии, например топологии.

Как было доказано в конце предыдущего пункта, все функции φ_i, а значит, и рациональное отображение $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ определены на некотором непустом открытом множестве $U \subset X$. Поэтому рациональные отображения можно рассматривать как отображения открытых подмножеств, однако при этом надо иметь в виду, что разные отображения могут иметь разные области определения. То же относится, конечно, и к рациональным функциям. Чтобы убедиться, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ определяют рациональное отображение $\varphi\colon X \to Y$, надо проверить, что функции $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ как элементы поля $k(X)$ удовлетворяют уравнениям множества Y. Действительно, если это свойство выполнено, то для любого многочлена $u(T_1, \ldots, T_m) \in \mathfrak{A}_Y$ функция $u(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0$ на X. Тем самым в любой точке x, где все φ_i регулярны, $u(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) = 0$, т. е. $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) \in Y$. Если, наоборот, мы имеем отображение $\varphi\colon X \to Y$, то для любого $u \in \mathfrak{A}_Y$ функция $u(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in k(X)$ равна 0 на некотором непустом открытом множестве $U \subset X$, а значит, равна 0 на X. Отсюда следует, что и $u(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0$ в $k(X)$.

Выясним, как действует рациональное отображение на рациональные функции на замкнутом множестве. Предположим, что для рационального отображения $\varphi\colon X \to Y$ множество $\varphi(X)$ плотно в Y. Рассмотрим φ как отображение $U \to \varphi(X)$, где U — область определения φ, и построим соответствующее ему отображение функций. Для любой функции $f \in k[Y]$ функция $\varphi^*(f)$ является рациональной функцией на X. Действительно, если $Y \subset \mathbf{A}^m$ и f задается полиномом $u(T_1, \ldots, T_m)$, то $\varphi^*(f)$ задается рациональной функцией $u(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Таким образом, мы имеем отображение $\varphi^*\colon k[Y] \to k(X)$, которое является, очевидно, гомоморфизмом кольца $k[Y]$ в поле $k(X)$. Этот гомоморфизм является даже изоморфным вложением $k[Y]$ в $k(X)$. Действительно, если $\varphi^*(u) = 0$ для $u \in k[Y]$, то это значит, что $u = 0$ на $\varphi(X)$. Но если $u \neq 0$ на Y, то равенство $u = 0$ определяет замкнутое подмножество $V(u) \subset Y$, отличное от Y. Тогда $\varphi(X) \subset V(u)$, а это противоречит тому, что $\varphi(X)$ плотно в Y. Вложение φ^* кольца $k[Y]$ в поле $k(X)$ можно, очевидно, продолжить до изоморфного вложения поля частных $k(Y)$ кольца $k[Y]$ в $k(X)$. Таким образом, если $\varphi(X)$ плотно в Y, то рациональное отображение φ определяет изоморфное вложение φ^* поля $k(Y)$ в поле $k(X)$.

Если даны два отображения $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to Z$ и $\varphi(X)$ плотно в Y, то, как легко видеть, можно определить произведение $\psi \cdot \varphi\colon X \to Z$, причем если $\psi(Y)$ плотно в Z, то $(\psi \cdot \varphi)(X)$ также плотно в Z. Тогда для вложений полей имеет место соотношение $(\psi \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot \psi^*$.

Определение. Рациональное отображение $\varphi\colon X \to Y$ называется *бирациональным изоморфизмом*, если оно обладает обратным. Это значит, что существует такое рациональное отображение $\psi\colon Y \to X$, что $\varphi(X)$ плотно в Y, а $\psi(Y)$ — в X и $\psi\varphi = 1$, $\varphi\psi = 1$. В этом случае X и Y называются бирационально изоморфными.

Очевидно, что если рациональное отображение $\varphi\colon X \to Y$ является бирациональным изоморфизмом, то вложение $\varphi^*\colon k(Y) \to k(X)$ является изоморфизмом. Легко проверить, что верно и обратное (для плоских алгебраических кривых это сделано в § 1). Таким образом, замкнутые множества X и Y тогда и только тогда бирационально изоморфны, когда поля $k(X)$ и $k(Y)$ изоморфны над k.

Примеры. В § 1 мы разобрали ряд примеров бирационального изоморфизма между плоскими алгебраическими кривыми. Изоморфные замкнутые множества, очевидно, бирационально изоморфны. В примерах 8 и 9 п. 3 § 2 отображения, не являющиеся изоморфизмами, являются, однако, бирациональными изоморфизмами.

Замкнутые множества, бирационально изоморфные некоторому аффинному пространству, называются рациональными. В § 1 мы встретились с рациональными алгебраическими кривыми. Приведем несколько других примеров.

Пример 1. Неприводимая квадрика X, определенная в $\mathbf{A}^n$ уравнением 2-й степени $F(T_1, \ldots, T_n) = 0$, рациональна. Доказательство, приведенное в п. 1 § 1 для $n = 2$, годится и в общем случае. Соответствующее отображение опять можно интерпретировать как проектирование X из некоторой точки $x \in X$ на гиперплоскость $l \subset \mathbf{A}^n$, не проходящую через x. Надо только выбрать x так, чтобы она не была «вершиной» на X, т. е. чтобы $\frac{\partial F}{\partial T_i}(x) \neq 0$ хотя бы для одного $i = 1, \ldots, n$.

Пример 2. Рассмотрим гиперповерхность X в $\mathbf{A}^3$, определенную уравнением 3-й степени $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, и предположим, что характеристика основного поля отлична от 3. На X лежат несколько прямых, например прямые L_1 и L_2, заданные системами уравнений

$$L_1:\ \begin{array}{r} x + y = 0, \\ z = 1, \end{array} \qquad L_2:\ \begin{array}{r} x + \varepsilon y = 0, \\ z = \varepsilon, \end{array}$$

где ε — корень 3-й степени из 1, $\varepsilon \neq 1$. Прямые L_1 и L_2 скрещивающиеся.

Мы опишем рациональное отображение X на плоскость геометрически и предоставим читателю выписать формулы, а также проверить, что мы имеем дело с бирациональным изоморфизмом. Выберем некоторую плоскость E в $\mathbf{A}^3$, не содержащую L_1 и L_2. Для $x \in X - L_1 - L_2$ существует, как легко проверить, единственная прямая L, проходящая через x и пересекающая L_1 и L_2. Точку пересечения $L \cap E$ обозначим через $f(x)$. Это и есть искомое рациональное отображение $X \to E$.

Очевидно, что эти рассуждения применимы для любой кубики в $\mathbf{A}^3$, на которой лежат две скрещивающиеся прямые.

В алгебраической геометрии мы имеем дело с двумя отношениями эквивалентности — изоморфизмом и бирациональным изоморфизмом. Очевидно, что бирациональный изоморфизм — более грубое отношение, чем изоморфизм, т. е. неизоморфные замкнутые множества могут быть бирационально изоморфны. Поэтому часто классификация замкнутых множеств с точки зрения бирационального изоморфизма оказывается проще и обозримее, чем с точки зрения изоморфизма. Изоморфизм, будучи определен во всех точках, ближе к таким геометрическим понятиям, как гомеоморфизм или диффеоморфизм, и поэтому удобнее. Важным вопросом является выяснение связи между этими двумя отношениями эквивалентности. Речь идет о том, насколько грубее бирациональный изоморфизм, чем изоморфизм, т. е. как много различных с точки зрения изоморфизма замкнутых множеств принадлежит к одному типу с точки зрения бирационального изоморфизма. С этим вопросом мы дальше часто будем встречаться.

В заключение мы докажем один результат, иллюстрирующий понятие бирационального изоморфизма.

Теорема 5. *Любое неприводимое замкнутое множество X бирационально изоморфно гиперповерхности в некотором аффинном пространстве* $\mathbf{A}^m$.

Поле $k(X)$ порождено над k конечным числом элементов, например элементами $t_1, \ldots, t_n$ — координатами в $\mathbf{A}^n$, рассматриваемыми как функции на X.

Пусть d — максимальное число алгебраически независимых над k среди $t_1, \ldots, t_n$.

Согласно предложению 1 п. 4 Приложения поле $k(X)$ можно представить в виде $k(z_1, \ldots, z_{d+1})$, где $z_1, \ldots, z_d$ алгебраически независимы над k и

$$f(z_1, \ldots, z_d, z_{d+1}) = 0, \tag{1}$$

причем многочлен f неприводим над k и $f'_{T_{d+1}} \neq 0$. Очевидно, что поле рациональных функций $k(Y)$ на замкнутом множестве Y, определенном уравнением (1), изоморфно полю $k(X)$. Это и значит, что X и Y бирационально изоморфны. Теорема доказана.

Замечание 1. Согласно предложению 1 п. 4 Приложения элемент z_{d+1} был сепарабельным над полем $k(z_1, \ldots, z_d)$. Расширение $k(X)/k(z_1, \ldots, z_d)$ является, следовательно, конечным сепарабельным расширением.

Замечание 2. Из доказательства предложения 1 п. 4 Приложения и теоремы о примитивном элементе следует, что $z_1, \ldots, z_{d+1}$ можно выбрать в виде линейных комбинаций исходных координат $x_1, \ldots, x_n$: $z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j$ $(i = 1, \ldots, d+1)$. Отображение $(x_1, \ldots, x_n) \to (z_1, \ldots, z_{d+1})$, задаваемое этими формулами, является проектированием пространства $\mathbf{A}^n$ параллельно линейному подпространству, заданному уравнениями $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = 0$ $(i = 1, \ldots, d+1)$. Это указывает геометрический смысл бирационального отображения, существование которого устанавливает теорема 6.

ЗАДАЧИ

1. Пусть k есть поле характеристики $\neq 2$. Разложить замкнутое множество $X \subset \mathbf{A}^3$, определенное уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$, на неприводимые компоненты.
2. Доказать, что если X — замкнутое множество задачи 4 § 2, то элементы поля $k(X)$ однозначно представляются в виде $u(x) + v(x)y$, где $u(x)$ и $v(x)$ — любые рациональные функции.
3. Доказать, что отображения f задач 3, 4, 6 § 2 являются бирациональным изоморфизмом.
4. Разложить замкнутое множество X, определенное в $\mathbf{A}^3$ уравнениями $y^2 = xz$, $z^2 = y^3$, на неприводимые. Доказать, что все его неприводимые компоненты бирационально изоморфны $\mathbf{A}^1$.

5. Доказать, что если замкнутое множество X определено в $\mathbf{A}^n$ одним уравнением $f_{n-1}(T_1, \ldots, T_n) + f_n(T_1, \ldots, T_n) = 0$, где f_{n-1} и f_n — однородные многочлены степеней $n-1$ и n, и X неприводимо, то оно бирационально изоморфно $\mathbf{A}^{n-1}$. (Такое замкнутое множество называется моноидом.)

6. В каких точках окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, регулярна рациональная функция $\frac{1-y}{x}$?

7. В каких точках кривой X с уравнением $y^2 = x^2 + x^3$ будет регулярной функция $t = \frac{y}{x}$? Доказать, что $t \notin k[X]$.

§ 4. Квазипроективные многообразия

1. Замкнутые подмножества проективного пространства. Пусть V — векторное пространство размерности $n+1$ над полем k. Совокупность прямых (т. е. 1-мерных подпространств) пространства V называется *n-мерным проективным пространством* и обозначается через $\mathbf{P}(V)$ или $\mathbf{P}^n$. Если в V введены координаты $\xi_0, \ldots, \xi_n$, то точка $\xi \in \mathbf{P}^n$ задается $n+1$ элементами $(\xi_0 : \ldots : \xi_n)$ поля k, причем не все ξ_i равны 0. Точки $(\xi_0 : \ldots : \xi_n)$ и $(\eta_0 : \ldots : \eta_n)$ тогда и только тогда считаются одинаковыми, когда существует такое $\lambda \neq 0$, что $\eta_i = \lambda \xi_i$ $(i = 0, \ldots, n)$. Любой набор $(\xi_0 : \ldots : \xi_n)$, задающий точку ξ, будет называться однородными координатами этой точки.

Мы будем говорить, что многочлен $f(S) \in k[S_0, \ldots, S_n]$ обращается в 0 в точке $\xi \in \mathbf{P}^n$, если $f(\xi_0, \ldots, \xi_n) = 0$, как бы ни были выбраны координаты ξ_i точки ξ. Очевидно, что тогда $f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n) = 0$ для всех $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$. Запишем f в виде $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_r$, где f_i — сумма всех членов степени i в f. Тогда

$$f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n) = f_0(\xi_0, \ldots, \xi_n) + \\ + \lambda f_1(\xi_0, \ldots, \xi_n) + \ldots + \lambda^r f_r(\xi_0, \ldots, \xi_n).$$

Ввиду того, что поле k бесконечно, равенство $f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n) = 0$, имеющее место при всех $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$, влечет за собой равенства $f_i(\xi_0, \ldots, \xi_n) = 0$. Таким образом, если многочлен f обращается в 0 в некоторой точке ξ, то в той же точке обращаются в 0 и все его однородные составляющие.

Определение. Подмножество $X \subset \mathbf{P}^n$ называется *замкнутым*, если оно состоит из всех точек, в которых одновременно обращается в 0 конечное число многочленов с коэффициентами из k.

Замкнутое множество, определенное одним однородным уравнением $F = 0$, называется, как и в аффинном случае, *гиперповерхностью*. Степень многочлена называется *степенью* гиперповерхности. Гиперповерхности степени 2 называются *квадриками*.

Совокупность всех многочленов $f \in k[S_0, \ldots, S_n]$, обращающихся в 0 во всех точках $x \in X$, образует идеал кольца $k[S]$, называемый идеалом замкнутого множества X, и обозначается через $\mathfrak{A}_X$. Ввиду сказанного выше идеал $\mathfrak{A}_X$ обладает тем свойством, что если в нем содержится многочлен f, то в нем содержатся и все однородные составляющие этого многочлена. Идеалы, обладающие этим свойством, называются однородными. Таким образом, идеал замкнутого подмножества проективного пространства однородный. Из этого следует, что он имеет базис, состоящий из однородных многочленов: достаточно взять любой базис и рассмотреть систему всех однородных составляющих многочленов базиса. В частности, любое замкнутое подмножество проективного пространства может быть задано системой однородных уравнений.

Таким образом, каждому замкнутому подмножеству $X \subset \mathbf{P}^n$ соответствует однородный идеал $\mathfrak{A}_X \subset k[S_0, \ldots, S_n]$. Наоборот, любой однородный идеал $\mathfrak{A} \subset k[S]$ определяет замкнутое подмножество $X \subset \mathbf{P}^n$. Именно, если $F_1, \ldots, F_m$ — однородный базис $\mathfrak{A}$, то X определяется системой уравнений $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$. Если эта система не имеет других решений в поле, кроме нулевого, то естественно считать X пустым множеством.

Примеры замкнутых подмножеств проективного пространства. Пример 1. *Грассманово многообразие.* Проективное пространство $\mathbf{P}(V)$ параметризует одномерные линейные подпространства $L^1 \subset V$ векторного пространства V. Грассманово многообразие $G(r, V)$ играет ту же роль для r-мерных подпространств $L^r \subset V$. Для его определения рассмотрим внешнюю степень $\Lambda^r V$ пространства V и сопоставим базису $f_1, \ldots, f_r$ подпространства L элемент $f_1 \wedge \ldots \wedge f_r$ пространства $\Lambda^r V$. При переходе к другому базису того же подпространства этот элемент умножается на элемент $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$ (определитель матрицы перехода), поэтому соответствующая точка проективного пространства $\mathbf{P}(\Lambda^r V)$ определяется подпространством L однозначно. Эта точка обозначается $P(L)$. Легко видеть, что она однозначно определяет подпространство L. Если $\{e_i\}$ —

5. Доказать, что если замкнутое множество X определено в $\mathbf{A}^n$ одним уравнением $f_{n-1}(T_1, \ldots, T_n) + f_n(T_1, \ldots, T_n) = 0$, где f_{n-1} и f_n — однородные многочлены степеней $n-1$ и n, и X неприводимо, то оно бирационально изоморфно $\mathbf{A}^{n-1}$. (Такое замкнутое множество называется моноидом.)

6. В каких точках окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, регулярна рациональная функция $\frac{1-y}{x}$?

7. В каких точках кривой X с уравнением $y^2 = x^2 + x^3$ будет регулярной функция $t = \frac{y}{x}$? Доказать, что $t \notin k[X]$.

§ 4. Квазипроективные многообразия

1. Замкнутые подмножества проективного пространства. Пусть V — векторное пространство размерности $n+1$ над полем k. Совокупность прямых (т. е. 1-мерных подпространств) пространства V называется *n-мерным проективным пространством* и обозначается через $\mathbf{P}(V)$ или $\mathbf{P}^n$. Если в V введены координаты $\xi_0, \ldots, \xi_n$, то точка $\xi \in \mathbf{P}^n$ задается $n+1$ элементами $(\xi_0 : \ldots : \xi_n)$ поля k, причем не все ξ_i равны 0. Точки $(\xi_0 : \ldots : \xi_n)$ и $(\eta_0 : \ldots : \eta_n)$ тогда и только тогда считаются одинаковыми, когда существует такое $\lambda \neq 0$, что $\eta_i = \lambda \xi_i$ $(i = 0, \ldots, n)$. Любой набор $(\xi_0 : \ldots : \xi_n)$, задающий точку ξ, будет называться однородными координатами этой точки.

Мы будем говорить, что многочлен $f(S) \in k[S_0, \ldots, S_n]$ обращается в 0 в точке $\xi \in \mathbf{P}^n$, если $f(\xi_0, \ldots, \xi_n) = 0$, как бы ни были выбраны координаты ξ_i точки ξ. Очевидно, что тогда $f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n) = 0$ для всех $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$. Запишем f в виде $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_r$, где f_i — сумма всех членов степени i в f. Тогда

$$f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n) = f_0(\xi_0, \ldots, \xi_n) + \lambda f_1(\xi_0, \ldots, \xi_n) + \ldots + \lambda^r f_r(\xi_0, \ldots, \xi_n).$$

Ввиду того, что поле k бесконечно, равенство $f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n) = 0$, имеющее место при всех $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$, влечет за собой равенства $f_i(\xi_0, \ldots, \xi_n) = 0$. Таким образом, если многочлен f обращается в 0 в некоторой точке ξ, то в той же точке обращаются в 0 и все его однородные составляющие.

Определение. Подмножество $X \subset \mathbf{P}^n$ называется *замкнутым*, если оно состоит из всех точек, в которых одновременно обращается в 0 конечное число многочленов с коэффициентами из k.

Замкнутое множество, определенное одним однородным уравнением $F = 0$, называется, как и в аффинном случае, *гиперповерхностью*. Степень многочлена называется *степенью* гиперповерхности. Гиперповерхности степени 2 называются *квадриками*.

Совокупность всех многочленов $f \in k[S_0, \ldots, S_n]$, обращающихся в 0 во всех точках $x \in X$, образует идеал кольца $k[S]$, называемый идеалом замкнутого множества X, и обозначается через $\mathfrak{A}_X$. Ввиду сказанного выше идеал $\mathfrak{A}_X$ обладает тем свойством, что если в нем содержится многочлен f, то в нем содержатся и все однородные составляющие этого многочлена. Идеалы, обладающие этим свойством, называются однородными. Таким образом, идеал замкнутого подмножества проективного пространства однородный. Из этого следует, что он имеет базис, состоящий из однородных многочленов: достаточно взять любой базис и рассмотреть систему всех однородных составляющих многочленов базиса. В частности, любое замкнутое подмножество проективного пространства может быть задано системой однородных уравнений.

Таким образом, каждому замкнутому подмножеству $X \subset \mathbf{P}^n$ соответствует однородный идеал $\mathfrak{A}_X \subset k[S_0, \ldots, S_n]$. Наоборот, любой однородный идеал $\mathfrak{A} \subset k[S]$ определяет замкнутое подмножество $X \subset \mathbf{P}^n$. Именно, если $F_1, \ldots, F_n$ — однородный базис $\mathfrak{A}$, то X определяется системой уравнений $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$. Если эта система не имеет других решений в поле, кроме нулевого, то естественно считать X пустым множеством.

Примеры замкнутых подмножеств проективного пространства. Пример 1. *Грассманово многообразие.* Проективное пространство $\mathbf{P}(V)$ параметризует одномерные линейные подпространства $L^1 \subset V$ векторного пространства V. Грассманово многообразие $G(r, V)$ играет ту же роль для r-мерных подпространств $L^r \subset V$. Для его определения рассмотрим внешнюю степень $\Lambda^r V$ пространства V и сопоставим базису $f_1, \ldots, f_r$ подпространства L элемент $f_1 \wedge \ldots \wedge f_r$ пространства $\Lambda^r V$. При переходе к другому базису того же подпространства этот элемент умножается на элемент $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$ (определитель матрицы перехода), поэтому соответствующая точка проективного пространства $\mathbf{P}(\Lambda^r V)$ определяется подпространством L однозначно. Эта точка обозначается $P(L)$. Легко видеть, что она однозначно определяет подпространство L. Если $\{e_i\}$ —

базис V, $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}\}$ — базис $\Lambda^r V$ и $P(L) = \sum_{i_1<\ldots<i_r} p_{i_1\ldots i_r} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, то однородные координаты $p_{i_1\ldots i_r}$ точки $P(L)$ называются *плюккеровыми координатами* подпространства L.

За исключением тривиальных случаев, когда размерность или коразмерность подпространств равна 1, не всякая точка $P \in \mathbf{P}(\Lambda^r V)$ имеет вид $P(L)$ или, что то же самое, не любой элемент $x \in \Lambda^r V$ представим в виде $f_1 \wedge \ldots \wedge f_r$, $f_i \in V$. Необходимые и достаточные условия для этого используют понятие свертки. Пусть $u \in V^*$ — вектор сопряженного пространства. Для $x \in \Lambda^1 V = V$ свертка $u \lrcorner x$ принадлежит k и совпадает со скалярным произведением (u, x) или с $u(x)$. Для $x \in \Lambda^0 V = \mathrm{k}$ полагаем $u \lrcorner x = 0$. Для любых $x \in \Lambda^r V$ операция $u \lrcorner x$ продолжается однозначно с $x \in \Lambda^1 V$, если потребовать условия

$$u \lrcorner (x \wedge y) = (u \lrcorner x) \wedge y + (-1)^r (x \wedge (u \lrcorner y)), \qquad (1)$$

если $x \in \Lambda^r V$. При этом $u \lrcorner \Lambda^r V \in \Lambda^{r-1} V$. Элемент $u \lrcorner x$ при $u \in V^*$, $x \in \Lambda^r V$ называется *сверткой* u и x. Наконец, для $u_1, \ldots, u_s \in V^*$ элемент $u_1 \lrcorner (u_2 \lrcorner \ldots \ldots (u_s \lrcorner x) \ldots)$ зависит только от $y = u_1 \wedge \ldots \wedge u_s \in \Lambda^s V^*$ и обозначается $y \lrcorner x$. При этом $y \lrcorner x \in \Lambda^{r-s} V$ при $r \geqslant s$ и равен 0 при $r < s$.

Условия представимости элемента $x \in \Lambda^r V$ в виде $x = f_1 \wedge \ldots \wedge f_r$ имеют вид

$$(y \lrcorner x) \wedge x = 0 \qquad (2)$$

для всех $y \in \Lambda^{r-1} V^*$. Очевидно, что условия (2) достаточно проверить для $y = u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_{r-1}}$, если $\{u_i\}$ — некоторый базис V^*. В частности, взяв за $\{u_i\}$ базис, дуальный к базису $\{e_i\}$ пространства V, можно переписать условия (2) в координатах.

Они принимают вид

$$\sum_{t=1}^{r+1} (-1)^t p_{i_1\ldots i_{r-1} j_t} p_{j_1\ldots \hat{j}_t \ldots j_{r+1}} = 0 \qquad (3)$$

для всех последовательностей $i_1 \ldots i_{r-1}$ и $j_1 \ldots j_{r+1}$.

Многообразие, определенное соотношениями (2) или (3) в $\mathbf{P}(\Lambda^r V)$, называется *грассмановым многообразием* и обозначается $G(r, V)$ или $G(r, n)$, где $n = \dim V$.

Нам нужен будет явный способ реконструкции подпространства L по координатам $p_{i_1\ldots i_r}$, удовлетворяющим соотношениям (3). Пусть, например, $p_{1\ldots r} \neq 0$. Тогда, если $p = (p_{i_1\ldots i_r}) = P(L)$, то L обладает базисом вида $f_i = e_i + \sum_{k>r} a_{ik} e_k$ $(i = 1, \ldots, r)$. Отсюда, как легко видеть, $p_{1\ldots r} = 1$, $p_{1\ldots \hat{k} \ldots r_k} = a_{ik}(-1)^k$, откуда $a_{ik} = (-1)^k \frac{p_{1\ldots \hat{i} \ldots r_k}}{p_{1\ldots r}}$.

Таким образом, открытые аффинные множества $p_{i_1\ldots i_r} \neq 0$ многообразия $G(r, V)$ все изоморфны аффинным пространствам размерности $r(n-r)$ с координатами a_{ik} $(i = 1, \ldots, r;\ k = r+1, \ldots, n)$. Можно показать, что, например, в открытом множестве $p_{1\ldots r} \neq 0$ уравнения (3) явно разрешаются относительно координат вида $p_{1\ldots r}$ и $p_{1\ldots \hat{i} \ldots r_k}$. Именно, если хотя бы два из $i_1, \ldots, i_r$ больше, чем r, то

$$p_{i_1\ldots i_r} = \frac{F(\ldots, p_{1\ldots \hat{i} \ldots r_k} \ldots)}{p_{1\ldots r}^m},$$

где F — форма некоторой степени m от координат $p_{1\ldots r}$ и $p_{1\ldots \hat{i} \ldots r_k}$, $i \leqslant r$, $k > r$. Подробное изложение свойств грассмановых многообразий содержится, например, в обзоре [21].

Простейший нетривиальный случай этой теории — когда $r = 2$. Тогда, ввиду (1), $(u \lrcorner x) \wedge x = \frac{1}{2}(u \lrcorner (x \wedge x))$ для $u \in V^*$, $x \in \Lambda^2 V$. Поэтому (2) сводится к $u \lrcorner (x \wedge x) = 0$ для всех $u \in V^*$, т. е. просто к

$$x \wedge x = 0. \qquad (4)$$

Наконец, при $n = 4$, $\dim \Lambda^4 V = 1$, и поэтому (4) сводится к одному уравнению на плюккеровы координаты $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$:

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0. \qquad (5)$$

Плоскости $L \subset V$, $\dim V = 4$, соответствуют прямые $l \subset \mathbf{P}(V)$ в трехмерном проективном пространстве. В этой ситуации координаты в V обозначаются x_0, x_1, x_2, x_3, плюккеровы координаты — $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ и уравнение (5) приобретает вид

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0. \qquad (6)$$

Это — квадрика в пятимерном проективном пространстве $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$.

Пример 2. *Ассоциативные алгебры.* Ассоциативная алгебра A размерности n над полем k при выборе базиса $e_1, \ldots, e_n$ задается таблицей умножения:

$$e_i e_j = \sum c_{ij}^l e_l.$$

Условия ассоциативности умножения имеют вид

$$\sum_l c_{ij}^l c_{lk}^m = \sum_l c_{il}^m c_{jk}^l, \quad i, j, k, m = 1, \ldots, n. \qquad (7)$$

Это — опять система квадратных уравнений на константы c_{ij}^l. Умножение всех элементов базиса e_i на $\alpha^{-1} \in \mathrm{k}$, $\alpha \neq 0$, приводит к умножению всех c_{ij}^l на α. Поэтому, если отбросить алгебру с нулевым умножением, то все алгебры описываются точками замкнутого множества с уравнениями (7) в проективном пространстве $\mathbf{P}^{n^3-1}$.

Точнее говоря, точки этого множества соответствуют ассоциативным законам умножения, записанным в определенном базисе $e_1, \ldots, e_n$. Переход к другому базису задается невырожденной матрицей порядка n. Таким образом, множество ассоциативных n-мерных алгебр (с точностью до изоморфизма) параметризуется «фактором» множества (7) по группе невырожденных матриц. В какой мере этот фактор можно отождествить с алгебраическим многообразием — вопрос очень тонкий.

Пример 3. *Детерминантные многообразия.* Квадратичные формы от n переменных образуют векторное пространство V размерности $\frac{n(n+1)}{2}$. Квадрики в проективном пространстве размерности $n-1$ параметризуются точками проективного пространства $\mathbf{P}(V)$. Среди них вырожденные квадрики характеризуются условием $\det(f) = 0$, где f — соответствующая квадратичная форма. Это гиперповерхность X_1 в пространстве $\mathbf{P}(V)$. Квадрики, ранг которых не превосходит $n-k$, соответствуют точкам множества X_k, определенного приравниванием 0 миноров порядка $n-k$ матрицы квадратичной формы f. Множества такого типа называются *детерминантными.* Другой тип детерминантных многооб-

разий M_k определяется в пространстве $\mathbf{P}(V)$, где V — пространство прямоугольных матриц заданного типа (n, m), условием, что ранг соответствующей матрицы не превосходит k.

В случае замкнутых подмножеств аффинного пространства идеал $\mathfrak{A} \subset \mathrm{k}[T]$ определяет пустое множество, только если $\mathfrak{A} = (1)$,— это есть утверждение теоремы Гильберта о корнях. В случае замкнутых подмножеств проективного пространства это не так — например, пустое множество определяет, очевидно, и идеал $(S_0, \ldots, S_n)$. Обозначим через I_s идеал кольца $\mathrm{k}[S]$, состоящий из тех многочленов, в которые входят только члены степени $\geqslant s$. Очевидно, что идеал I_s определяет пустое множество — в нем содержатся, например, многочлены S_i^s, которые обращаются совместно в 0 только в нулевой точке.

Лемма. *Однородный идеал $\mathfrak{A} \subset \mathrm{k}[S]$ тогда и только тогда определяет пустое множество, когда он содержит идеал I_s для некоторого $s > 0$.*

Мы уже видели, что идеал I_s определяет пустое множество. Тем более это верно и для любого содержащего его идеала. Пусть однородный идеал $\mathfrak{A} \subset \mathrm{k}[S]$ определяет пустое множество. Пусть $F_1, \ldots, F_r$ — однородный базис идеала $\mathfrak{A}$ и $\deg F_i = m_i$. Тогда по условию многочлены $F_i(1, T_1, \ldots, T_n)$, где $T_j = \frac{S_j}{S_0}$, не имеют общих корней. Действительно, их общий корень $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ давал бы общий корень $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ многочленов $F_1, \ldots, F_m$. По теореме Гильберта должны существовать, следовательно, такие многочлены $G_i(T_1, \ldots, T_n)$, что $\sum_i F_i(1, T_1, \ldots, T_n) G_i(T_1, \ldots, T_n) = 1$. Подставляя в это равенство $T_j = \frac{S_j}{S_0}$ и умножая на общий знаменатель, который имеет вид $S_0^{m_0}$, мы получим, что $S_0^{m_0} \in \mathfrak{A}$. Аналогично для любого $i = 1, \ldots, n$ найдется такое число $m_i > 0$, что $S_i^{m_i} \in \mathfrak{A}$. Если теперь $m = \max(m_0, \ldots, m_n)$ и $s = (m-1)(n+1)+1$, то в любом члене $S_0^{a_0} \ldots S_n^{a_n}$ при $a_0 + \ldots + a_n \geqslant s$ хотя бы одно S_i должно содержаться с показателем $a_i \geqslant m \geqslant m_i$, а так как $S_i^{m_i} \in \mathfrak{A}$, то и этот член содержится в $\mathfrak{A}$. Это и показывает, что $I_s \subset \mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Дальше мы будем рассматривать одновременно замкнутые подмножества аффинных и проективных пространств. Мы будем называть их также аффинными и проективными замкнутыми множествами.

Для проективных замкнутых множеств применяется та же терминология, что и для аффинных, именно, если $Y \subset X$ — два замкнутых множества, то $X - Y$ называется *открытым* в X. По-прежнему объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств открыты, а объединение конечного числа и пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуты. Множество $\mathbf{A}_0^n$ точек $\xi = (\xi_0 : \ldots : \xi_n)$, для которых $\xi_0 \neq 0$, очевидно, открыто. Его точки можно взаимно однозначно сопоставить точкам n-мерного аффинного пространства, положив $\alpha_i = \dfrac{\xi_i}{\xi_0}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и сопоставив точке $\xi \in \mathbf{A}_0^n$ точку $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{A}^n$. Поэтому мы будем называть множество $\mathbf{A}_0^n$ *аффинным открытым подмножеством*. Аналогично множество $\mathbf{A}_i^n$ $(i = 0, \ldots, n)$ состоит из точек, для которых $\xi_i \neq 0$. Очевидно, что $\mathbf{P}^n = \bigcup \mathbf{A}_i^n$.

Для любого проективного замкнутого множества $X \subset \mathbf{P}^n$, множества $U_i = X \cap \mathbf{A}_i^n$ открыты в X. Как подмножества пространства $\mathbf{A}_i^n$ они замкнуты. Действительно, если X задается системой однородных уравнений $F_0 = \ldots = F_m = 0$ и $\deg F_i = n_i$, то, например, U_0 задается системой уравнений

$$S_0^{-n_j} F_j = F_j(1, T_1, \ldots, T_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$T_i = \frac{S_i}{S_0}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Мы будем называть U_i *аффинными открытыми подмножествами* множества X. Очевидно, что $X = \bigcup U_i$. Замкнутое подмножество $U \subset \mathbf{A}_0^n$ определяет замкнутое проективное множество $\overline{U}$, называемое его замыканием и являющееся пересечением всех проективных замкнутых множеств, содержащих U. Легко проверить, что однородные уравнения множества $\overline{U}$ получаются процессом, обратным только что описанному: если $F(T_1, \ldots, T_n)$ — любой многочлен идеала $\mathfrak{A}$ и $\deg F = k$, то уравнения $\overline{U}$ имеют вид $S_0^k F\left(\dfrac{S_1}{S_0}, \ldots, \dfrac{S_n}{S_0}\right) = 0$. Отсюда следует, что

$$U = \overline{U} \cap \mathbf{A}_0^n. \tag{8}$$

До сих пор мы рассматривали два объекта, которые могут претендовать на то, чтобы называться алгебраическими многообразиями,— аффинные и проективные замкнутые множества. Естественно попытаться ввести единое понятие, частными случаями которого были бы эти два типа многообразий. Наиболее полно это будет сделано в гл. V в связи с понятием схемы. Сейчас мы введем более частное понятие, объединяющее проективные и аффинные замкнутые множества.

Определение. *Квазипроективным многообразием* называется открытое подмножество замкнутого проективного множества.

Очевидно, что замкнутое проективное множество квазипроективно. Для аффинных замкнутых множеств это следует из (8).

Замкнутым подмножеством квазипроективного многообразия называется его пересечение с замкнутым множеством проективного пространства. Аналогично определяются открытое множество и окрестность точки. Понятие неприводимого многообразия и теорема о разложении многообразия на неприводимые дословно переносятся со случая аффинных замкнутых множеств.

Подмногообразием Y квазипроективного многообразия $X \subset \mathbf{P}^n$ мы будем теперь называть любое подмножество $Y \subset X$, которое само является квазипроективным многообразием в $\mathbf{P}^n$. Очевидно, это равносильно тому, что $Y = Z - Z_1$, где $Z \supset Z_1$, Z и Z_1 замкнуты в X.

2. Регулярные функции. Переходя к рассмотрению функций на квазипроективных многообразиях, начнем с проективного пространства $\mathbf{P}^n$. Здесь мы встречаемся с важным различием между функциями от однородных и неоднородных координат: рациональная функция от однородных координат

$$f(S_0, \ldots, S_n) = \frac{P(S_0, \ldots, S_n)}{Q(S_0, \ldots, S_n)} \tag{1}$$

не может рассматриваться как функция точки $x \in \mathbf{P}^n$, даже когда $Q(x) \neq 0$, так как значение $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ меняется при умножении всех однородных координат на общий множитель. Однако однородные функции нулевой степени, т. е. такие функции $f = \frac{P}{Q}$, что P и Q однородны одинаковой степени, уже можно рассматривать как функции точки.

Если X — квазипроективное многообразие, $X \subset \mathbf{P}^n$, $x \in X$, $f = \frac{P}{Q}$ — однородная функция нулевой степени и $Q(x) \neq 0$, то f определяет в некоторой окрестности точки x функцию со значением в k. Такая функция называется *регулярной* в окрестности точки x или просто в точке x. Функция, заданная на X и регулярная во всех точках $x \in X$, называется регулярной на X. Все функции, регулярные на X, образуют кольцо, обозначаемое через $k[X]$.

Докажем, что для замкнутого подмножества X аффинного пространства наше определение регулярной функции совпадает с тем, которое дано в § 2. Если X неприводимо, то это утверждается теоремой 4 § 3. В общем случае достаточно небольшого видоизменения рассуждения, которым эта теорема доказывается. В нем мы будем регулярность функции понимать в смысле определения, данного в § 2.

По условию каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью U_x, в которой $f = \frac{p_x}{q_x}$, где p_x и q_x — регулярные функции на X, $q_x \neq 0$ на U_x. Поэтому

$$q_x f = p_x \tag{2}$$

на U_x. Но можно считать, что (2) верно и на всем X. Для этого достаточно выбрать регулярную функцию, равную 0 на $X - U_x$ и не равную 0 в x, и умножить на нее как p_x, так и q_x. Тогда (2) будет выполняться и вне U_x, так как там обе части равенства равны 0. Как и в доказательстве теоремы 4 § 3, мы найдем точки $x_1, \ldots, x_N$ и такие регулярные функции $h_1, \ldots, h_N$, что $\sum_{i=1}^{N} q_{x_i} h_i = 1$. Умножая равенство (2) для $x = x_i$ на h_i и складывая, получим, что

$$f = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i} h_i,$$

т. е. f — регулярная функция.

В отличие от случая аффинных замкнутых множеств, кольцо $k[X]$ может состоять только из констант. Мы докажем в § 5, что так обстоит дело всегда, когда X — замкнутое проективное множество. Это легко проверить непосредственно, когда $X = \mathbf{P}^n$. Действительно, если $f = \frac{P}{Q}$, где P и Q — формы одинаковой степени, то мы можем считать P и Q взаимно простыми. Тогда в точках x, в которых $Q(x) = 0$, функция f нерегулярна. С другой стороны, кольцо $k[X]$ может оказаться и неожиданно большим. Именно, если X — аффинное замкнутое множество, то $k[X]$ имеет, как кольцо, конечное число образующих над k. Рисс и Нагата построили примеры квазипроективных многообразий, для которых это не так. Это показывает, что только для аффинных замкнутых множеств $k[X]$ является естественным инвариантом.

Переходим к отображениям. Любое отображение квазипроективного многообразия X в аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ задается n функциями на X со значениями в k. Если эти функции регулярны на X, то отображение называется регулярным.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение квазипроективных многообразий и $Y \subset \mathbf{P}^m$. Это отображение называется *регулярным*, если для любой точки $x \in X$ и открытого аффинного множества $\mathbf{A}_i^m$, содержащего точку $f(x)$, существует такая окрестность $U \ni x$, что $f(U) \subset \mathbf{A}_i^m$ и отображение $f\colon U \to \mathbf{A}_i^m$ регулярно.

Проверим, что свойство регулярности не зависит от того, каким из открытых аффинных множеств $\mathbf{A}_i^m$, содержащих точку $f(x)$, мы пользуемся. Если $f(x) = (y_0, \ldots, \underset{i}{\widehat{1}}, \ldots, y_m) \in \mathbf{A}_i^m$ содержится и в $\mathbf{A}_j^m$, то $y_j \neq 0$ и координаты этой точки в $\mathbf{A}_j^m$ имеют вид $(y_0/y_j, \ldots, \underset{i}{1/y_j}, \ldots, \underset{j}{\widehat{1}}, \ldots, y_m/y_j)$, где знак $\wedge$ означает, что элемент, на котором он стоит, выбрасывается. Поэтому, если отображение $f\colon U \to \mathbf{A}_i^m$ задается функциями $(f_0, \ldots, \underset{i}{\widehat{1}}, \ldots, f_m)$, то $f\colon U \to \mathbf{A}_j^m$ задается функциями $(f_0/f_j, \ldots, \underset{i}{1/f_j}, \ldots, \underset{j}{\widehat{1}}, \ldots, f_m/f_j)$. По условию $f_j(x) \neq 0$ и множество U' точек U, в которых $f_j \neq 0$, открыто. На U' функции $f_0/f_j, \ldots, 1/f_j, \ldots f_m/f_j$ регулярны и, значит, отображение $f\colon U' \to \mathbf{A}_j^m$ регулярно.

Как и для аффинных замкнутых множеств, регулярное отображение $f\colon X\to Y$ определяет отображение $f^*\colon \mathrm{k}[Y]\to \mathrm{k}[X]$.

Вопрос о том, как задать формулами регулярное отображение неприводимого многообразия, решается совершенно аналогично случаю $n=2$, разобранному в п. 6 § 1. Пусть, например, $f(x)\in \mathbf{A}_0^m$ и отображение $f\colon U\to \mathbf{A}_0^m$ задается регулярными функциями $f_1, \ldots, f_m$. По определению $f_i=\frac{P_i}{Q_i}$, где P_i, Q_i — формы одинаковой степени от однородных координат точки x и $Q_i(x)\ne 0$. Приведя эти дроби к общему знаменателю, мы получим, что $f_i=\frac{F_i}{F_0}$, где все $F_0, \ldots, F_m$ — формы одной степени и $F_0(x)\ne 0$. Иначе говоря, $f(x)=(F_0(x):\ldots:F_m(x))$, как точка в $\mathbf{P}^m$. При такой замене надо помнить, что представление регулярной функции в виде отношения двух форм неоднозначно. Поэтому две формулы

$$\begin{aligned} f(x)&=(F_0(x):\ldots:F_m(x)),\\ g(x)&=(G_0(x):\ldots:G_m(x)) \end{aligned} \tag{3}$$

могут задавать одно и то же отображение. Это будет тогда и только тогда, когда

$$F_iG_j=F_jG_i \text{ на } X, \qquad 0\leqslant i,\ j\leqslant m. \tag{4}$$

Мы приходим ко второй форме определения регулярного отображения.

Регулярное отображение неприводимого квазипроективного многообразия $f\colon X\to \mathbf{P}^m$ задается набором форм

$$(F_0:\ldots:F_m) \tag{5}$$

одинаковой степени от однородных координат точки $x\in \mathbf{P}^n$. Отображения (3) называются одинаковыми, если выполнены условия (4). Требуется, чтобы для любой точки $x\in X$ существовала такая запись (5) отображения f, что хоть для одного i имеет место $F_i(x)\ne 0$. Тогда точка $(F_0(x):\ldots:F_m(x))$ обозначается через $f(x)$.

После того как определено регулярное отображение квазипроективных многообразий, естественно определяется изоморфизм — это регулярное отображение, имеющее обратное регулярное отображение.

Квазипроективное многообразие X', изоморфное замкнутому подмножеству аффинного пространства, мы будем называть *аффинным многообразием*. При этом может оказаться, что $X\subset \mathbf{A}^n$, но не является там замкнутым. Например, квазипроективное, но не замкнутое в $\mathbf{A}^1$ множество $X=\mathbf{A}^1-0$ изоморфно гиперболе, замкнутой в $\mathbf{A}^2$ (пример 3 в п. 3 § 2). Таким образом, понятие замкнутого аффинного множества не инвариантно относительно изоморфизма, в то время как понятие аффинного многообразия по определению инвариантно.

Аналогично квазипроективное многообразие, изоморфное замкнутому проективному множеству, называется *проективным многообразием*. Мы докажем в § 5, что если $X\subset \mathbf{P}^n$ проективно, то оно замкнуто в $\mathbf{P}^n$, так что понятия замкнутого проективного множества и проективного многообразия совпадают и инвариантны относительно изоморфизма.

Существуют квазипроективные многообразия, которые ни аффинны, ни проективны (см. задачу 5 и задачи 4, 5, 6 к § 5).

Дальше мы будем встречаться с такими свойствами многообразия X, которые достаточно проверять для какой-нибудь окрестности U любой точки $x\in X$. Иначе говоря, если $x=\bigcup U_\alpha$, где U_α — любые открытые множества, то достаточно это свойство проверить для каждого из U_α. Такие свойства мы будем называть *локальными*. Приведем пример такого свойства.

Лемма 1. *Свойство подмножества $Y\subset X$ быть замкнутым в квазипроективном многообразии X является локальным.*

Это утверждение означает, что если $X=\bigcup U_\alpha$, U_α открыто и $Y\cap U_\alpha$ замкнуто в каждом U_α, то Y замкнуто. По определению открытых множеств $U_\alpha=X-Z_\alpha$, где Z_α замкнуто, а по определению замкнутых множеств $U_\alpha\cap Y=U_\alpha\cap T_\alpha$, где T_α замкнуты.

Проверим, что $Y=\bigcap(Z_\alpha\cup T_\alpha)$, откуда, конечно, следует, что Y замкнуто. Если $y\in Y$ и $y\in U_\alpha$, то $y\in U_\alpha\cap Y\subset T_\alpha$, а если $y\notin U_\alpha$, то $y\in X-U_\alpha=Z_\alpha$, так что $y\in Z_\alpha\cup T_\alpha$ при всех α. Наоборот, пусть $x\in Z_\alpha\cup T_\alpha$ при всех α. Из того, что $X=\bigcup U_\alpha$, следует, что $x\in U_\beta$ при некотором β. Тогда $x\notin Z_\beta$ и, значит, $x\in T_\beta$, $x\in T_\beta\cap U_\beta\subset Y$. Лемма доказана.

При изучении локальных свойств мы можем ограничиться рассмотрением аффинных многообразий.

Лемма 2. *Любая точка $x\in X$ имеет окрестность, изоморфную аффинному многообразию.*

По условию $X \subset \mathbf{P}^n$. Если $x \in \mathbf{A}_0^n$ (т. е. координата u_0 точки x не равна 0), то $x \in X \cap \mathbf{A}_0^n$ и по определению квазипроективного многообразия $X \cap \mathbf{A}_0^n = Y - Y_1$, где Y и $Y_1 \subset Y$ — замкнутые подмножества $\mathbf{A}_0^n$. Так как $x \in Y$, то существует такой многочлен F от координат в $\mathbf{A}_0^n$, что $F = 0$ на Y_1, $F(x) \neq 0$. Обозначим через (F) множество точек многообразия Y, где $F = 0$. Очевидно, что $D(F) = Y - (F)$ является окрестностью точки x. Мы докажем, что эта окрестность изоморфна аффинному многообразию. Пусть $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$ — уравнения Y в $\mathbf{A}_0^n$. Определим многообразие Z в $\mathbf{A}^{n+1}$ уравнениями

$$F_1(T_1, \ldots, T_n) = \ldots = F_m(T_1, \ldots, T_n) = 0, \qquad F(T_1, \ldots, T_n) \cdot T_{n+1} = 1. \tag{6}$$

Отображение φ: $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \to (x_1, \ldots, x_n)$ определяет, очевидно, регулярное отображение Z в $D(F)$, а ψ: $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, x_n)^{-1})$ — регулярное отображение $D(F)$ в Z, обратное φ. Это доказывает лемму.

Если $Y = \mathbf{A}^1$, $F = T$, то Z является гиперболой и построенный нами изоморфизм совпадает с отображением, рассмотренным в примере 3 п. 3 § 2.

Определение. Открытое множество $D(f) = X - V(f)$, состоящее из точек аффинного многообразия X, для которых $f(x) \neq 0$ $(f \in k[X])$, называется *главным открытым множеством.*

Значение этих множеств заключается в том, что они, как мы видели, аффинны и для них легко указать их кольцо $k[D(f)]$. Именно, по построению $f \neq 0$ на $D(f)$, так что $f^{-1} \in k[D(f)]$, а уравнения (6) показывают, что $k[D(f)] = k[X]\left[\frac{1}{f}\right]$.

Леммы 1 и 2 показывают, например, что при изоморфизме замкнутые подмножества переходят в замкнутые. Докажем даже, что при любом регулярном отображении f: $X \to Y$ прообраз $f^{-1}(Z)$ любого замкнутого множества $Z \subset Y$ замкнут в X.

По определению регулярного отображения любая точка $x \in X$ и точка $f(x) \in Y$ обладают такими окрестностями $U \ni x$, $V \ni f(x)$, что $f(U) \subset V \subset \mathbf{A}^m$ и отображение $f: U \to V$ регулярно. По лемме 2 мы можем считать U аффинным многообразием. По лемме 1 нам достаточно проверить, что $f^{-1}(Z) \cap U = f^{-1}(Z \cap V)$ замкнуто в U. Так как $Z \cap V$ замкнуто в V, то оно определяется уравнениями $g_1 = \ldots = g_m = 0$, где g_i — регулярные функции на V. Но тогда $f^{-1}(Z \cap V)$ определяется уравнениями $f^*(g_1) = \ldots = f^*(g_m) = 0$ и поэтому тоже замкнуто.

Из доказанного следует, что и прообраз открытого множества открыт.

Легко проверить, что регулярное отображение можно определить как такое отображение f: $X \to Y$, что прообраз любого открытого множества открыт («непрерывность») и для любой точки $x \in X$ и любой функции φ, регулярной в окрестности точки $f(x) \in Y$, функция $f^*(\varphi)$ регулярна в окрестности точки x.

3. Рациональные функции. При определении рациональных функций на квазипроективных многообразиях мы сталкиваемся с тем, что общий случай существенно отличается от случая аффинных многообразий. Именно, для аффинного многообразия X мы определяли рациональные функции на X как отношения функций, регулярных на всем X. В общем же случае, как мы видели, может оказаться, что на многообразии нет всюду регулярных функций, отличных от констант, а тогда нет и непостоянных рациональных функций. Поэтому мы определяем рациональные функции на квазипроективном многообразии $X \subset \mathbf{P}^n$ как функции, задаваемые на X однородными функциями на $\mathbf{P}^n$ (аналогично п. 6 § 1 при $n = 2$). Точнее говоря, рассмотрим неприводимое квазипроективное многообразие $X \subset \mathbf{P}^n$ и обозначим (по аналогии с п. 2 § 3) через $\mathcal{O}_X$ множество рациональных функций от однородных координат $S_0, \ldots, S_n$ вида $f = \frac{P}{Q}$, где P и Q — формы одинаковой степени и $Q \notin \mathfrak{A}_X$. Как и для аффинных многообразий, из неприводимости X следует, что $\mathcal{O}_X$ — кольцо. Обозначим через M_X множество функций $f \in \mathcal{O}_X$, для которых $P \in \mathfrak{A}_X$. Очевидно, что кольцо $\mathcal{O}_X/M_X$ является полем. Это поле называется *полем рациональных функций* на многообразии X и обозначается через $k(X)$. Так как форма равна 0 на неприводимом квазипроективном многообразии X тогда же, когда и на его открытом подмножестве U, то $k(X) = k(U)$. В частности, $k(X) = k(\bar{X})$, где $\bar{X}$ — замыкание X в проективном пространстве. Поэтому при рассмотрении поля рациональных функций мы можем ограничиться по желанию аффинными или проективными многообразиями.

Легко проверить, что если X — аффинное многообразие, то данное выше определение совпадает с тем, которое дано в § 3. Действительно, поделив в однородной функции нулевой степени $f=\frac{P}{Q}$, $\deg P=\deg Q=m$, числитель и знаменатель на S_0^m, мы запишем ее в виде рациональной функции от $T_i=\frac{S_i}{S_0}$ $(i=1,\ldots,n)$. Таким образом, устанавливается изоморфизм поля однородных рациональных функций нулевой степени от $S_0, \ldots, S_n$ и поля $k(T_1, \ldots, T_n)$. Очевидная проверка показывает, что кольцо и идеал поля $k(T_1, \ldots, T_n)$, обозначенные в п. 2 § 3 через $\mathcal{O}_X$ и M_X, соответствуют при этом объектам, которые мы обозначили теми же буквами в этом пункте.

В предшествующем пункте мы уже пользовались рациональными функциями на пространстве $\mathbf{P}^n$ для определения регулярных функций. Как и там, назовем функцию $f\in k(X)$ *регулярной* в точке $x\in X$, если ее можно представить в виде $f=\frac{F}{G}$, где F и G однородны, одинаковой степени и $G(x)\neq 0$. Тогда $f(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$ называется ее *значением* в точке x. Как в случае аффинных многообразий, множество точек, в которых заданная рациональная функция f регулярна, образует непустое открытое подмножество U многообразия X. Множество U называется *областью определения* функции f. Очевидно, что рациональные функции можно также определить как функции, регулярные на открытых множествах $U\subset X$.

Рациональное отображение $f\colon X\to\mathbf{P}^m$ определяется (аналогично второму определению регулярного отображения, данному в п. 2) заданием $m+1$ форм одинаковой степени $(F_0:\ldots:F_m)$ от $n+1$ однородных координат проективного пространства $\mathbf{P}^n$, содержащего X. При этом хоть одна из форм должна не обращаться в 0 на X. Два отображения $(F_0:\ldots:F_m)$ и $(G_0:\ldots:G_m)$ называются *равными*, если $F_iG_j=F_jG_i$ на X. Поделив все формы F_i на одну из них, отличную от 0, мы можем задать рациональное отображение $m+1$ рациональными функциями на X с таким же понятием равенства отображений. Если рациональное отображение f можно задать такими функциями $(f_0:\ldots:f_m)$, что все f_i регулярны в точке $x\in X$ и не все обращаются в ней в 0, то отображение регулярно в точке x. Оно определяет тогда регулярное отображение некоторой окрестности точки x в $\mathbf{P}^m$.

Множество точек, в которых рациональное отображение регулярно, открыто. Поэтому можно также определить рациональное отображение как регулярное отображение некоторого открытого множества $U\subset X$. Если $Y\subset\mathbf{P}^m$ — квазипроективное многообразие и $f\colon X\to\mathbf{P}^m$ — рациональное отображение, то мы говорим, что f отображает X в Y, если существует открытое множество $U\subset X$, в котором f регулярно и $f(U)\subset Y$. Объединение $\bar U$ всех таких открытых множеств называется областью регулярности f, а $f(\bar U)$ — образом X в Y.

Как и в случае аффинных многообразий, если образ рационального отображения $f\colon X\to Y$ плотен в Y, то определено вложение полей $f^*\colon k(Y)\to k(X)$. Если рациональное отображение $f\colon X\to Y$ обладает обратным рациональным отображением, то f называется бирациональным изоморфизмом, а X и Y — бирационально изоморфными. В этом случае вложение $f^*\colon k(Y)\to k(X)$ является изоморфизмом.

Теперь можно сделать более ясной связь между понятиями изоморфизма и бирационального изоморфизма.

Предложение. *Неприводимые многообразия X и Y тогда и только тогда бирационально изоморфны, когда в них содержатся изоморфные друг другу открытые множества $U\subset X$ и $V\subset Y$.*

Действительно, пусть $f\colon X\to Y$ — бирациональный изоморфизм, $g\colon Y\to X$, $g=f^{-1}$ — рациональное отображение, а $U_1\subset X$ и $V_1\subset Y$ — области регулярности f и g. Так как по условию $f(U_1)$ плотно в Y, то $f^{-1}(V_1)\cap U_1$ не пусто и, как было доказано в п. 2, открыто. Положим $U=f^{-1}(V_1)\cap U_1$, $V=g^{-1}(U_1)\cap V_1$. Простая проверка показывает, что $f(U)=V$, $g(V)=U$, $fg=1$, $gf=1$, т. е. U и V изоморфны.

4. Примеры регулярных отображений. 1° Проектирование. Пусть E — d-мерное подпространство проективного пространства $\mathbf{P}^n$, определенное $n-d$ линейно независимыми линейными уравнениями $L_1=L_2=\ldots=L_{n-d}=0$, где L_i — линейные формы. *Проектированием* с центром в E называется рациональное отображение $\pi(x)=(L_1(x):\ldots:L_{n-d}(x))$. Это отображение регулярно на $\mathbf{P}^n-E$, так как в точках этого множества формы L_i $(i=1, \ldots, n-d)$ не обращаются одновременно в 0. Поэтому $\pi(x)$ определяет регулярное отображение π: $X \to \mathbf{P}^{n-d-1}$, где X — любое замкнутое подмножество $\mathbf{P}^n$, не пересекающее E. Геометрический смысл проектирования следующий. Возьмем в качестве модели $\mathbf{P}^{n-d-1}$ любое $n-d-1$-мерное подпространство $H \subset \mathbf{P}^n$, не пересекающее E. Через любую точку $x \in \mathbf{P}^n - E$ и E проходит единственное $d+1$-мерное линейное подпространство E_x. Это подпространство пересекает H в единственной точке, которая и есть $\pi(x)$. Если X пересекает E, но в нем не содержится, то проектирование является рациональным отображением. Со случаем $d=0$, т. е. с проектированием из точки, мы уже не раз встречались.

2° Отображение Веронезе. Рассмотрим все однородные многочлены F степени m от переменных $S_0, \ldots, S_n$. Они образуют линейное пространство, размерность которого, как легко подсчитать, равна $\binom{n+m}{m}$.

Рассмотрим гиперповерхности степени m в пространстве $\mathbf{P}^n$. Так как пропорциональные многочлены определяют одну гиперповерхность, то гиперповерхности соответствуют точкам проективного пространства $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$ размерности $\nu_{n,m} = \binom{n+m}{m} - 1$. Обозначим однородные координаты в пространстве $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$ через $v_{i_0 \ldots i_n}$, где $i_0, \ldots, i_n$ — любые неотрицательные числа такие, что $i_0 + \ldots + i_n = m$. Рассмотрим отображение v_m пространства $\mathbf{P}^n$ в $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$, определенное формулами

$$v_{i_0 \ldots i_n} = u_0^{i_0} \ldots u_n^{i_n}, \quad i_0 + \ldots + i_n = m. \tag{1}$$

Оно, очевидно, регулярно, так как среди одночленов в правых частях (1) есть, в частности, и u_i^m, которые обращаются в 0, только если все $u_i = 0$. Отображение v_m называется *отображением Веронезе*, а $v_m(\mathbf{P}^n)$ — *многообразием Веронезе*. Из формул (1) следует, что на $v_m(\mathbf{P}^n)$ удовлетворяются соотношения

$$v_{i_0 \ldots i_n} v_{j_0 \ldots j_n} = v_{k_0 \ldots k_n} v_{l_0 \ldots l_n}, \tag{2}$$

если $i_0 + j_0 = k_0 + l_0, \ldots, i_n + j_n = k_n + l_n$. Наоборот, из соотношений (2) легко вывести, что хотя бы одна координата вида $v_{0 \ldots m \ldots 0}$ отлична от нуля и что, например, в открытом множестве $v_{m0 \ldots 0} \neq 0$ отображение

$$u_0 = v_{m0 \ldots 0}, \; u_1 = v_{m-1, 1, 0 \ldots 0}, \; \ldots, \; u_n = v_{m-1, 0 \ldots 1}$$

будет обратным к v_m. Поэтому $v_m(\mathbf{P}^n)$ определяется уравнениями (2) и v_m является изоморфным вложением $\mathbf{P}^n$ в $\mathbf{P}^{\nu_{n\,m}}$.

Значение отображения Веронезе заключается в том, что если $F = \sum a_{i_0 \ldots i_n} u_0^{i_0} \ldots u_n^{i_n}$ — форма степени m от однородных координат точки $x \in \mathbf{P}^n$ и H — гиперповерхность, определенная уравнением $F=0$ в $\mathbf{P}^n$, то $v_m(H)$ является пересечением $v_m(\mathbf{P}^n)$ и гиперплоскости с уравнением $\sum a_{i_0 \ldots i_n} v_{i_0 \ldots i_n} = 0$ в $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$. Поэтому отображение Веронезе дает возможность сводить изучение некоторых вопросов, связанных с гиперповерхностями, к случаю гиперплоскостей. Образ отображения Веронезе $v_m(\mathbf{P}^1)$ в $\mathbf{P}^{m+1}$ называется *кривой Веронезе*, или *нормкривой*.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что аффинное многообразие U неприводимо тогда же, когда и его замыкание $\bar{U}$ в проективном пространстве.

2. Сопоставим любому аффинному многообразию U, лежащему в $\mathbf{A}_0^n$, его замыкание $\bar{U}$ в проективном пространстве $\mathbf{P}^n$. Доказать, что таким образом получается взаимно однозначное соответствие между аффинными многообразиями в $\mathbf{A}_0^n$ и теми проективными многообразиями в $\mathbf{P}^n$, которые не имеют компонент, содержащихся в гиперплоскости $S_0 = 0$.

3. Доказать, что многообразие $X = \mathbf{A}^2 - x$, где $x = (0, 0)$, не изоморфно аффинному многообразию. Указание. Вычислить $k[X]$ и воспользоваться тем, что для аффинного многообразия любой собственный идеал $\mathfrak{A} \subset k[X]$ определяет непустое подмногообразие.

4. Доказать, что любое квазипроективное многообразие открыто в своем замыкании в проективном пространстве.

5. Доказать, что любое рациональное отображение φ: $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^n$ регулярно.

6. Доказать, что любое регулярное отображение φ: $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{A}^n$ отображает $\mathbf{P}^1$ в одну точку.

7. Определить бирациональный изоморфизм f неприводимой поверхности 2-го порядка X в $\mathbf{P}^3$ и плоскости $\mathbf{P}^2$ аналогично примеру 1 в п. 3 § 3 (стереографическая проекция). В каких точках отображение f не регулярно? В каких не регулярно f^{-1}?

8. В задаче 7 найти открытые множества $U \subset X$ и $V \subset \mathbf{P}^2$, которые изоморфны.

9. Доказать, что отображение $y_0 = x_1x_2$, $y_1 = x_0x_2$, $y_2 = x_0x_1$ определяет бирациональный изоморфизм плоскости $\mathbf{P}^2$ с собой. В каких точках f и в каких f^{-1} не регулярны? Изоморфизм каких открытых множеств определяет f?

10. Доказать, что многообразие $v_m(\mathbf{P}^n)$ не содержится ни в каком линейном подпространстве пространства $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$.

11. Доказать, что многообразие $\mathbf{P}^2 - X$, где X — кривая 2-го порядка, аффинно. Указание. Воспользоваться отображением Веронезе.

§ 5. Произведения и отображения квазипроективных многообразий

1. Произведения. Определение произведения аффинных многообразий (пример 5 п. 1 § 2) было так естественно, что не требовало никаких пояснений. Для любых квазипроективных многообразий дело обстоит несколько сложнее. Поэтому рассмотрим сначала квазипроективные подмногообразия аффинных пространств. Если $X \subset \mathbf{A}^n$, $Y \subset \mathbf{A}^m$ — такие многообразия, то множество $X \times Y = \{(x, y);\ x \in X,\ y \in Y\}$ является квазипроективным подмногообразием в $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}$. Действительно, если $X = X_1 - X_0$, $Y = Y_1 - Y_0$, где X_1, X_0 и Y_1, Y_0 — замкнутые подмногообразия пространств $\mathbf{A}^n$ и $\mathbf{A}^m$, то представление $X \times Y = X_1 \times Y_1 - (X_1 \times Y_0 \cup Y_1 \times X_0)$ показывает, что $X \times Y$ квазипроективно. Мы будем называть это квазипроективное многообразие *прямым произведением* X и Y. В этом месте необходимо убедиться, что если заменить X и Y изоморфными им многообразиями, то и $X \times Y$ заменится изоморфным многообразием. Это легко проверить. Пусть $\varphi\colon X \to X' \subset \mathbf{A}^p$ и $\psi\colon Y \to Y' \subset \mathbf{A}^q$ — изоморфизмы. Тогда $(\varphi \times \psi)\colon X \times Y \to X' \times Y'$, где $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ является регулярным отображением, а $(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ — ему обратным.

Вернемся теперь к квазипроективным многообразиям и выясним, чего мы хотим от понятия произведения. Пусть $X \subset \mathbf{P}^n$ и $Y \subset \mathbf{P}^m$ — два квазипроективных многообразия. Обозначим через $X \times Y$ множество пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$. Мы хотим рассмотреть это множество как квазипроективное многообразие, а для этого надо задать такое его вложение φ в проективное пространство $\mathbf{P}^N$, чтобы $\varphi(X \times Y)$ было квазипроективным подмногообразием в $\mathbf{P}^N$. При этом естественно требовать, чтобы полученное определение было локальным, т. е. чтобы у любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ существовали такие аффинные окрестности $X \supset U \ni x$ и $Y \supset V \ni y$, что $\varphi(U \times V)$ открыто в $\varphi(X \times Y)$ и φ определяет изоморфизм прямого произведения аффинных многообразий U и V (его определение уже известно) и многообразия $\varphi(U \times V) \subset \varphi(X \times Y)$. Легко видеть, что свойством локальности вложение φ, по существу, определяется однозначно, точнее, если $\psi\colon X \times Y \to \mathbf{P}^M$ — другое такое же вложение, то $\psi\varphi^{-1}$ определяет изоморфизм между $\varphi(X \times Y)$ и $\psi(X \times Y)$. Действительно, для этого достаточно доказать, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ существуют такие окрестности $\varphi(X \times Y) \supset W_1 \ni \varphi(x, y)$ и $\psi(X \times Y) \supset W_2 \ni \psi(x, y)$, что $\psi\varphi^{-1}$ определяет изоморфизм W_1 и W_2. Для этого рассмотрим аффинные окрестности $X \supset U \ni x$ и $Y \supset V \ni y$, существование которых гарантируется свойством локальности. При этом мы можем считать, что $U \times V$ изоморфно и $\varphi(U \times V)$ и $\psi(U \times V)$, перейдя, если надо, к меньшим аффинным окрестностям. Тогда $\varphi(U \times V) = W_1$ и $\psi(U \times V) = W_2$ — нужные нам аффинные окрестности, так как обе, согласно сделанному предположению, изоморфны прямому произведению $U \times V$ аффинных многообразий U и V.

Перейдем к конструкции вложения φ, обладающего нужными свойствами. При этом мы сразу можем ограничиться случаем, когда $X = \mathbf{P}^n$, $Y = \mathbf{P}^m$; если вложение $\varphi(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m) \to \mathbf{P}^N$ уже построено, то простая проверка показывает, что его ограничение на $X \times Y \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ обладает всеми нужными свойствами.

Для построения вложения φ рассмотрим пространство $\mathbf{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, в котором однородные координаты $w_{i,j}$ занумерованы двумя индексами i и j ($i = 0, \ldots, n$; $j = 0, \ldots, m$). Если $x = (u_0 : \ldots : u_n) \in \mathbf{P}^n$, $y = (v_0 : \ldots : v_m) \in \mathbf{P}^m$, то положим

$$\varphi(x \times y) = (w_{ij}), \quad w_{ij} = u_i v_j, \qquad i = 0, \ldots, n; \quad j = 0, \ldots, m. \tag{1}$$

Очевидно, что умножение однородных координат точки x (или y) на общий множитель не меняет точки $\varphi(x, y) \in \mathbf{P}^{(n+1)(m+1)-1}$. Чтобы показать, что $\varphi(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$ является замкнутым множеством в $\mathbf{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, мы выпишем его уравнения

$$w_{ij}w_{kl} = w_{kj}w_{il}, \quad i, k = 0, \ldots, n; \quad j, l = 0, \ldots, m. \tag{2}$$

Подстановка показывает, что w_{ij}, определенные из (1), удовлетворяют (2). Наоборот, если w_{ij} удовлетворяют

(2) и, например, $w_{00}\neq 0$, то, полагая в (2) $k=l=0$, получаем, что $(\ldots: w_{ij}:\ldots)=\varphi(x, y)$, где $x=(w_{00}:\ldots: w_{n0})$, $y=(w_{00}:\ldots: w_{0m})$. Это рассуждение заодно показывает, что $\varphi(x, y)$ однозначно определяет x и y, т. е. φ является вложением $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$ в $\mathbf{P}^{(n+1)(m+1)-1}$. Рассмотрим открытые множества $\mathbf{A}_0^n(u_0\neq 0)$ и $\mathbf{A}_0^m(v_0\neq 0)$ в $\mathbf{P}^n$ и $\mathbf{P}^m$. Очевидно, что $\varphi(\mathbf{A}_0^n\times\mathbf{A}_0^m)=W_{00}=\mathbf{A}_{00}^{(n+1)(m+1)-1}\cap\cap\varphi(\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m)$, где $\mathbf{A}_{00}^{(n+1)(m+1)-1}=\{w_{00}\neq 0\}$. Если $(w_{ij})=\varphi(x, y)\in W_{00}$ и $z_{ij}=\dfrac{w_{ij}}{w_{00}}$, $x_i=\dfrac{u_i}{u_0}$, $y_j=\dfrac{v_j}{v_0}$, — неоднородные координаты, то, как мы только что нашли, $z_{i0}=x_i$, $z_{0j}=y_j$, $z_{ij}=x_iy_j=z_{i0}z_{0j}$, если $i>0$, $j>0$. Отсюда следует, что W_{00} изоморфно аффинному пространству $\mathbf{A}^{n+m}$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и φ определяет изоморфизм $\mathbf{A}_0^n\times\mathbf{A}_0^m\to W_{00}=\varphi(\mathbf{A}_0^n\times\mathbf{A}_0^m)$. Это доказывает свойство локальности нашей конструкции.

Замечание 1. Точки (w_{ij}) можно интерпретировать как матрицы типа $(n+1, m+1)$, уравнения (2) записываются в виде $\begin{vmatrix} w_{ij} & w_{il} \\ w_{kj} & w_{kl}\end{vmatrix}=0$ и означают, что ранг матрицы (w_{ij}) равен 1, а уравнения (1) показывают, что такая матрица есть произведение столбца типа $(1, n+1)$ и строки типа $(m+1, 1)$. Таким образом, $\varphi(\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m)$ — детерминантное многообразие (пример 3 п. 1 § 4).

Замечание 2. Простейший случай $n=m=1$ имеет простой геометрический смысл. Мы имеем одно уравнение (2) $w_{11}w_{00}=w_{01}w_{10}$, так что $\varphi(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$ совпадает с невырожденной поверхностью 2-го порядка Q в $\mathbf{P}^3$. Множество $\varphi(\alpha\times\mathbf{P}^1)$, где $\alpha=(\alpha_0:\alpha_1)$ задается в $\mathbf{P}^3$ уравнениями $\alpha_1w_{00}=\alpha_0w_{10}$, $\alpha_1w_{01}=\alpha_0w_{11}$ и определяет прямую в $\mathbf{P}^3$. Аналогично и $\varphi(\mathbf{P}^1\times\beta)$, где $\beta\in\mathbf{P}^1$, является прямой. Когда α пробегает все $\mathbf{P}^1$, прямые первого типа дают все прямые одного семейства прямолинейных образующих поверхности Q. Прямые второго типа дают второе семейство.

После того как определение прямого произведения дано при помощи вложения φ множества $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$ в $\mathbf{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, удобно интерпретировать некоторые понятия, которые сначала определяются при помощи этого вложения, в терминах множества $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$. Выясним, например, какие подмножества в $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$ переходят при отображении φ в алгебраические многообразия. Подмногообразия $X\subset\mathbf{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ определяются уравнениями $F_i(w_{00}:\ldots: w_{nm})=0$, где F_i — однородные многочлены. В координатах u_i и v_j это запишется после подстановки (1) в виде $G_i(u_0:\ldots: u_n; v_0:\ldots: v_m)=0$, где G_i однородны как по $u_0, \ldots, u_n$, так и по $v_0, \ldots, v_m$ и степени однородности относительно обеих систем переменных совпадают. Наоборот, как легко проверить, многочлен с таким свойством однородности может быть всегда представлен как многочлен от произведений u_iv_j. Однако, если уравнения однородны как по u_i, так и по v_j, то они всегда определяют в $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$ алгебраическое подмногообразие, хотя бы степени однородности были разными. Если многочлен $G(u_0:\ldots: u_n; v_0:\ldots: v_m)$ имеет степень r по u_i и s по v_j и, например, $r>s$, то уравнение $G=0$ равносильно системе $v_i^{r-s}G=0$ $(i=0, \ldots, m)$, про которую нам уже известно, что она определяет алгебраическое многообразие.

Позже нам встретится аналогичный вопрос для произведения $\mathbf{P}^n\times\mathbf{A}^m$. Пусть $\mathbf{A}^m=\mathbf{A}_0^m\subset\mathbf{P}^m$ задается условием $v_0\neq 0$. Уравнения замкнутого множества имеют вид $G_i(u_0:\ldots: u_n; v_0:\ldots: v_m)=0$. Пусть степень однородности G_i по $v_0, \ldots, v_m$ равна r_i. Поделив уравнения на $v_0^{r_i}$ и положив $y_j=\dfrac{v_j}{v_0}$, мы получим уравнения $g_i(u_0:\ldots: u_n; y_1, \ldots, y_m)=0$, где g_i однородны по $u_0, \ldots, u_n$ и, вообще говоря, неоднородны по $y_1, \ldots, y_m$. Нами доказан следующий результат.

Теорема 1. *Подмножество $X\subset\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$ тогда и только тогда замкнуто, когда оно задается системой уравнений*

$$G_i(u_0:\ldots: u_n; v_0:\ldots: v_m)=0, \quad i=1, \ldots, t,$$

однородных по каждой системе переменных u_i и v_j в отдельности. Каждое замкнутое подмножество в $\mathbf{P}^n\times\mathbf{A}^m$ задается системой уравнений

$$g_i(u_0:\ldots: u_n; y_1, \ldots, y_m)=0, \quad i=1, \ldots, t, \tag{3}$$

однородных по переменным $u_0, \ldots, u_n$.

Конечно, аналогично обстоит дело с произведением любого числа пространств. Например, многообразие в $\mathbf{P}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{P}^{n_k}$ задается системой уравнений, однородных по каждой из k групп переменных.

2. Замкнутость образа проективного многообразия. Образ аффинного многообразия при регулярном отображении может не быть замкнутым множеством. Для отображения аффинного многообразия в аффинное это показывают примеры 3 и 4 п. 3 § 2. Для отображения аффинного многообразия в проективное это еще более очевидно — пример дает вложение $\mathbf{A}^n$ в $\mathbf{P}^n$ в качестве открытого множества $\mathbf{A}_0^n$. В этом отношении проективные многообразия коренным образом отличаются от аффинных.

Теорема 2. *Образ проективного многообразия при регулярном отображении замкнут.*

Доказательство использует одно понятие, которое будет дальше встречаться. Пусть $f\colon X\to Y$ — регулярное отображение произвольных квазипроективных многообразий. Подмножество Γ_f многообразия $X\times Y$, состоящее из точек вида $(x, f(x))$, называется графиком отображения f.

Лемма 1. *График регулярного отображения замкнут в $X\times Y$.*

Прежде всего, достаточно считать Y проективным пространством. Действительно, если $Y\subset \mathbf{P}^m$, то $X\times Y\subset X\times \mathbf{P}^m$, f определяет отображение $\bar f\colon X\to\mathbf{P}^m$ и $\Gamma_f = \Gamma_{\bar f}\cap(X\times Y)$. Положим поэтому $Y=\mathbf{P}^m$. Пусть i — тождественное отображение $\mathbf{P}^m$ в себя. Рассмотрим регулярное отображение $(f, i)\colon X\times\mathbf{P}^m\to\mathbf{P}^m\times\mathbf{P}^m$, $(f, i)\times(x, y)=(f(x), y)$. Очевидно, что Γ_f является прообразом Γ_i относительно регулярного отображения (f, i). Мы проверили в п. 2 § 4, что прообраз замкнутого множества при регулярном отображении замкнут. Поэтому все сводится к проверке замкнутости Γ_i в $\mathbf{P}^m\times\mathbf{P}^m$. Но Γ_i состоит из точек $(x, y)\in\mathbf{P}^m\times\mathbf{P}^m$, $x=(u_0:\ldots:u_m)$, $y=(v_0:\ldots:v_m)$, для которых $(u_0:\ldots:u_m)$ пропорциональны $(v_0:\ldots:v_m)$. Это можно записать в виде $u_iv_j=u_jv_i$, $w_{ij}=w_{ji}$ $(i, j=0, \ldots, m)$. Замкнутость Γ_i, а следовательно, и лемма доказаны.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть Γ_f — график отображения f, а $p\colon X\times Y\to Y$ — проекция, определенная условием $p(x, y)=y$. Очевидно, что $f(X)=p(\Gamma_f)$. Ввиду леммы 1 теорема 2 следует поэтому из более общего утверждения.

Теорема 3. *Если X — проективное, а Y — квазипроективное многообразие, то проекция $p\colon X\times Y\to Y$ переводит замкнутые множества в замкнутые.*

Доказательство теоремы может быть редуцировано к ее очень простому случаю. Прежде всего, если X — замкнутое подмножество $\mathbf{P}^n$, то, доказав теорему для $\mathbf{P}^n$, мы тем самым докажем ее для X ($X\times Y$ замкнуто в $\mathbf{P}^n\times Y$ и если Z замкнуто в $X\times Y$, то оно замкнуто в $\mathbf{P}^n\times Y$). Поэтому мы можем считать, что $X=\mathbf{P}^n$. Во-вторых, ввиду локальности понятия замкнутости мы можем покрыть Y аффинными открытыми множествами U_i и доказывать теорему для каждого из них. Поэтому можно считать Y аффинным многообразием. Наконец, если Y замкнуто в $\mathbf{A}^m$, то $\mathbf{P}^n\times Y$ замкнуто в $\mathbf{P}^n\times\mathbf{A}^m$, и поэтому нам достаточно доказать теорему для случая, когда $X=\mathbf{P}^n$, $Y=\mathbf{A}^m$. Посмотрим, что означает теорема в этом случае. Согласно теореме 1 любое замкнутое подмножество $Z\subset\mathbf{P}^n\times\mathbf{A}^m$ задается уравнениями (3) из п. 1, которые мы запишем в виде $g_i(u;\ y)=0$ $(i=1, \ldots, t)$. Очевидно, что если $y_0\in\mathbf{A}^m$, то $p^{-1}(y_0)$ состоит из всех ненулевых решений системы $g_i(u,\ y_0)=0$ и, значит, $y_0\in p(Z)$ тогда и только тогда, когда система уравнений $g_i(u,\ y_0)=0$ имеет ненулевое решение. Теорема 3 утверждает, таким образом, что для любой системы (3) п. 1 множество T тех $y_0\in\mathbf{A}^m$, для которых система $g_i(u,\ y_0)=0$ имеет ненулевое решение, замкнуто. Ввиду леммы 1 п. 1 § 4 система $g_i(u,\ y_0)=0$ $(i=1, \ldots, t)$ тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда $(g_1(u,\ y_0), \ldots, g_t(u,\ y_0))\not\supset I_s$ для всех $s=1, 2, \ldots$ Мы проверим сейчас, что для любого заданного $s\geqslant 1$ точки $y_0\in\mathbf{A}^m$, для которых $(g_1(u,\ y_0), \ldots, g_t(u,\ y_0))\not\supset I_s$, образуют замкнутое множество T_s. Тогда $T=\bigcap T_s$ и тоже замкнуто. Обозначим через k_i степень однородного многочлена $g_i(u,\ y)$ по переменным $u_0, \ldots, u_n$. Пусть $M^{(\alpha)}$ — перенумерованные каким-то образом одночлены степени s от переменных $u_0, \ldots, u_n$. Условие $(g_1(u,\ y_0), \ldots, g_t(u,\ y_0))\supset I_s$ означает, что все $M^{(\alpha)}$ представляются в виде

$$M^{(\alpha)}=\sum_{i=1}^{t} g^i(u,\ y_0)\,F_{i,\alpha}(u). \tag{1}$$

Сравнивая однородные составляющие степени s, мы видим, что должно иметь место аналогичное равенство, в котором $\deg F_{i,\alpha}=s-k_i$ (и $F_{i,\alpha}=0$, если $k_i>s$). Обозначим через $N_i^{(\beta)}$ одночлены степени $s-k_i$, каким-то образом перенумерованные. Мы видим, что соотношение

(1) равносильно тому, что все одночлены $M^{(\alpha)}$ являются линейными комбинациями многочленов $g_i(u, y_0)N_i^{(\beta)}$. Это, конечно, равносильно тому, что многочлены $g_i(u, y_0)N_i^{(\beta)}$ порождают все линейное векторное пространство S однородных многочленов степени s от $u_0, \ldots, u_n$. Наоборот, условие $(g_1(u, y_0), \ldots, g_t(u, y_0)) \not\supset I_s$ означает, что все многочлены $g_i(u, y_0)N_i^{(\beta)}$ не порождают пространства S. Чтобы записать эти условия, надо выписать коэффициенты многочленов $g_i(u, y_0)N_i^{(\beta)}$ в прямоугольную матрицу и приравнять нулю все миноры этой матрицы порядка $\sigma = \dim S$. Эти миноры, очевидно, являются многочленами от коэффициентов многочленов $g_i(u, y_0)$, а значит, многочленами от координат точки y_0. Они дают уравнения множества T_s. Теорема 3, а значит, и теорема 2 доказаны.

Замечание. Из доказательства видно, что теорема 2 обобщается на более широкий класс отображений $f\colon X \to Y$ квазипроективных многообразий: таких, что f можно разложить в композицию замкнутого вложения $i\colon X \to \mathbf{P}^N \times Y$ (т. е. изоморфизма с замкнутым подмножеством) и проекции $p\colon \mathbf{P}^N \times Y \to Y$. Такие отображения называются *собственными*. Например, если $f\colon X \to Y$ — регулярное отображение проективных многообразий, то ограничение $f\colon f^{-1}(U) \to U$, где $U \subset Y$ — открытое подмножество, собственно. Очевидно, что для собственного отображения $f\colon X \to Y$ прообразы точек $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, — проективные многобразия.

Следствие 1. *Если φ — функция, регулярная на неприводимом проективном многообразии, то $\varphi \in \mathrm{k}$, т. е. постоянна.*

Доказательство. Мы можем рассматривать функцию φ как отображение $f\colon X \to \mathbf{A}^1$, а значит, и как отображение $\bar{f}\colon X \to \mathbf{P}^1$. Регулярность φ означает регулярность отображения f. Тем более регулярно отображение $\bar{f}$ и, значит, по теореме 2 его образ замкнут. Но так как регулярно уже отображение f и $f(X) = \bar{f}(X)$, то, значит, множество $\bar{f}(X)$ замкнуто и содержится в $\mathbf{A}^1$, т. е. не содержит бесконечно удаленной точки $x_\infty \in \mathbf{P}^1$. Отсюда следует, что или $f(X) = \mathbf{A}^1$ или $f(X)$ совпадает с конечным множеством S (пример 3 п. 1 § 2). Первый случай невозможен, так как $f(X)$ должно быть замкнуто и в $\mathbf{P}^1$, а $\mathbf{A}^1$ в нем не замкнуто. Значит, $f(X) = S$. Если S состоит из точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, то $X = \cup f^{-1}(\alpha_i)$, и если $t > 1$, то это противоречит неприводимости X. Поэтому S состоит из одной точки, а это и значит, что φ постоянна.

Следствие 1 и теорема 4 § 3 являются примером того, что аффинные и проективные многообразия обладают диаметрально противоположными свойствами. На аффинном многообразии есть масса регулярных функций — они составляют все кольцо $\mathrm{k}[X]$, а на неприводимом проективном — одни константы. Вот второй пример «противоположности» аффинных и проективных многообразий.

Следствие 2. *Регулярное отображение $f\colon X \to Y$ проективного неприводимого многообразия X в аффинное многообразие Y отображает X в точку.*

Пусть $Y \subset \mathbf{A}^m$. Отображение f задается m функциями $f(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$. Каждая из функций $\varphi_i(x)$ постоянна ввиду следствия 1: $\varphi_i = \alpha_i \in \mathrm{k}$. Поэтому $f(X) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

Приведем еще один пример применения теоремы 2. Для этого мы воспользуемся изображением форм степени m от $n+1$ переменных точками пространства $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$ (п. 4 § 4).

Предложение. *Точки $\xi \in \mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$, которым соответствуют приводимые многочлены F, образуют замкнутое множество.*

Предложение утверждает, что условие приводимости однородного многочлена можно записать в виде алгебраических соотношений между его коэффициентами. Для кривых 2-го порядка, т. е. для случая $m = n = 2$, это соотношение известно из аналитической геометрии: если $F = \sum_{i=0}^{2} a_{ik}U_iU_k$, то F приводим тогда и только тогда, когда $|a_{ik}| = 0$.

Переходя к доказательству предложения, обозначим через X множество точек $\xi \in \mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$, которым соответствуют приводимые многочлены, а через X_k $(k = 1, \ldots, m-1)$ — множество тех точек, которым соответствуют многочлены F, разлагающиеся на множители степеней k и $m-k$. Очевидно, $X = \cup X_k$, и нам достаточно доказать замкнутость каждого X_k.

Рассмотрим проективные пространства $\mathbf{P}^{\nu_{n,k}}$ и $\mathbf{P}^{\nu_{n,m-k}}$. Перемножение двух многочленов степеней k и $m-k$ определяет отображение $f\colon \mathbf{P}^{\nu_{n,k}} \times \mathbf{P}^{\nu_{n,m-k}} \to \mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$, которое, как легко видеть, регулярно. Очевидно, $X_k = f(\mathbf{P}^{\nu_{n,k}} \times \mathbf{P}^{\nu_{n,m-k}})$. Так как произведение проективных пространств, как мы видели в п. 1, является проективным многообразием, то замкнутость X_k следует из теоремы 2.

3. Конечные отображения. Отображение проектирования, введенное в п. 4 § 4, обладает одним важным свойством, для формулировки которого мы напомним некоторые алгебраические понятия. Пусть B — кольцо, содержащее кольцо A. Элемент $b \in B$ называется целым над A, если он удовлетворяет уравнению $b^k + a_1 b^{k-1} + \ldots + a_k = 0$, $a_i \in A$. Кольцо B называется целым над A, если любой его элемент цел над A. Легко доказать (см., например, [3], гл. V), что кольцо B, имеющее как кольцо конечное число образующих над A, тогда и только тогда цело над A, когда оно является модулем конечного типа над A.

Пусть X и Y — аффинные многообразия и $f\colon X \to Y$ — такое регулярное отображение, что $f(X)$ плотно в Y. Тогда f^* определяет изоморфное вложение $k[Y]$ в $k[X]$. Пользуясь этим, будем считать $k[Y]$ подкольцом в $k[X]$.

Определение 1. Отображение f называется *конечным*, если $k[X]$ цело над $k[Y]$.

Из приведенного выше свойства целых колец следует, что композиция двух конечных отображений — конечное отображение. Типичный пример неконечного отображения — пример 3 п. 3 § 2.

Пример 1. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, G — конечная группа его автоморфизмов и $Y = X/G$ (ср. пример 11 п. 3 § 2). Отображение $\varphi\colon X \to Y$ конечно. Действительно, в п. 5 Приложения показано, что образующие u_i алгебры $k[X]$ целы над алгеброй $k[X]^G = k[Y]$. Отсюда следует, что и алгебра $k[X]$ цела над $k[Y]$.

Если f — конечное отображение, то любая точка $y \in Y$ имеет не более чем конечное число прообразов. Действительно, пусть $X \subset \mathbf{A}^n$ и $t_1, \ldots, t_n$ — координаты в $\mathbf{A}^n$ как функции на X. Нам достаточно доказать, что любая координата t_i принимает только конечное число значений на множестве $f^{-1}(y)$. По определению t_i удовлетворяет уравнению $t_i^k + b_1 t_i^{k-1} + \ldots + b_k = 0$, $b_i \in k[Y]$. Для $x \in f^{-1}(y)$, $y \in Y$, мы получаем уравнение

$$(t_i(x))^k + b_1(y)(t_i(x))^{k-1} + \ldots + b_k(y) = 0, \qquad (1)$$

которое имеет конечное число корней.

Смысл понятия конечности заключается в том, что когда y меняется на Y, ни один из корней уравнения (1) не стремится к бесконечности, так как коэффициент при старшем члене не обращается в 0. Поэтому при изменении y на Y точки $f^{-1}(y)$ могут сливаться, но не могут «исчезать». Уточнением этого замечания служит

Теорема 4. *Конечное отображение эпиморфно.*

Пусть $f\colon X \to Y$ — конечное отображение, X и Y — аффинные многообразия, $y \in Y$. Обозначим через $\mathfrak{m}_y$ идеал кольца $k[Y]$, состоящий из функций, обращающихся в 0 в точке y. Если $t_1, \ldots, t_n$ — координаты как функции на многообразии Y и $y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то $\mathfrak{m}_y = (t_1 - \alpha_1, \ldots, t_n - \alpha_n)$. Уравнения многообразия $f^{-1}(y)$ имеют вид $f^*(t_1) = \alpha_1, \ldots, f^*(t_n) = \alpha_n$, и множество $f^{-1}(y)$ пусто тогда и только тогда, когда $(f^*(t_1) - \alpha_1, \ldots, f^*(t_n) - \alpha_n) = k[X]$. Дальше мы не будем различать функции $u \in k[Y]$ и $f^*(u) \in k[X]$, считая $k[Y]$ подкольцом в $k[X]$. Тогда предшествующее условие запишется в виде $(t_1 - \alpha_1, \ldots, t_n - \alpha_n) = k[X]$, или $\mathfrak{m}_y k[X] = k[X]$. Из того, что $k[X]$ цело над $k[Y]$, следует, что $k[X]$ является модулем конечного типа над $k[Y]$. Ввиду этого теорема 4 вытекает из чисто алгебраического утверждения.

Если кольцо B является модулем конечного типа над подкольцом A (с единицей), то для любого собственного идеала $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{a}B \neq B$.

См. следствие 1 п. 6 Приложения.

Следствие. *Конечное отображение переводит замкнутые множества в замкнутые.*

Достаточно проверить это для неприводимого замкнутого множества $Z \subset X$. Надо применить теорему 4 к ограничению f отображения f на Z, т. е. $\bar{f}\colon Z \to \overline{f(Z)}$. Оно, очевидно, конечно, и, значит, $f(Z) = \overline{f(Z)}$, т. е. $f(Z)$ замкнуто.

Свойство конечности является локальным.

Теорема 5. *Если $f\colon X \to Y$ — регулярное отображение аффинных многообразий и любая точка $x \in Y$ имеет такую аффинную окрестность $U \ni x$, что $V = f^{-1}(U)$ аффинно и $f\colon V \to U$ конечно, то и f конечно.*

Положим $k[X] = B$, $k[Y] = A$. В п. 2 § 4 было дано определение главного открытого множества. Мы можем взять у любой точки окрестность U, являющуюся главным открытым множеством и удовлетворяющую условиям теоремы (см. задачу 11).

Пусть $D(g_\alpha)$ — система таких открытых множеств, число их можно считать конечным. Тогда $Y = \cup D(g_\alpha)$, т. е. идеал, порожденный всеми g_α, равен A. В нашем случае $V_\alpha = f^{-1}(D(g_\alpha)) = D(f^*(g_\alpha))$, $\mathrm{k}[D(g_\alpha)] = A\left[\frac{1}{g_\alpha}\right]$, $\mathrm{k}[V_\alpha] = B\left[\frac{1}{g_\alpha}\right]$. По условию $B\left[\frac{1}{g_\alpha}\right]$ имеет конечный базис $\omega_{i,\alpha}$ над $A\left[\frac{1}{g_\alpha}\right]$. При этом мы можем считать, что $\omega_{i,\alpha} \in B$; если бы базис состоял из элементов $\frac{\omega_{i,\alpha}}{g_\alpha^{m_i}}$, $\omega_{i,\alpha} \in B$, то и элементы $\omega_{i,\alpha}$ были бы базисом. Рассмотрим объединение всех базисов $\omega_{i,\alpha}$ и докажем, что они образуют базис B над A.

Любой элемент $b \in B$ обладает представлением

$$b = \sum_i \frac{a_{i,\alpha}}{g_\alpha^{n_\alpha}} \omega_{i,\alpha}$$

для каждого α. Так как элементы $g_\alpha^{n_\alpha}$ порождают единичный идеал в A, то существуют такие $h_\alpha \in A$, что $\sum_\alpha g_\alpha^{n_\alpha} h_\alpha = 1$. Поэтому

$$b = b \sum_\alpha g_\alpha^{n_\alpha} h_\alpha = \sum_i \sum_\alpha a_{i,\alpha} h_\alpha \omega_{i,\alpha},$$

что и доказывает теорему.

Определение 2. Регулярное отображение $f\colon X \to Y$ квазипроективных многообразий называется *конечным*, если любая точка $y \in Y$ имеет такую аффинную окрестность V, что множество $U = f^{-1}(V)$ аффинно и отображение аффинных многообразий $f\colon U \to V$ конечно.

Очевидно, что для любого конечного отображения f множество $f^{-1}(y)$ конечно для любого $y \in Y$.

Из теоремы 4 вытекает, что любое конечное отображение эпиморфно.

Это свойство приводит к важным следствиям, касающимся любых отображений.

Теорема 6. *Если $f\colon X \to Y$ — регулярное отображение и $f(X)$ плотно в Y, то $f(X)$ содержит открытое в Y множество.*

Утверждение теоремы сразу сводится к случаю, когда X и Y неприводимы и аффинны,— мы будем это дальше предполагать. Тогда $\mathrm{k}[Y] \subset \mathrm{k}[X]$. Обозначим степень трансцендентности расширения $\mathrm{k}(X)/\mathrm{k}(Y)$ через r и выберем r алгебраически независимых над $\mathrm{k}(Y)$ элементов $u_1, \ldots, u_r \in \mathrm{k}[X]$. Тогда $\mathrm{k}[X] \supset \mathrm{k}[Y][u_1, \ldots, u_r] \supset \mathrm{k}[Y]$ и $\mathrm{k}[Y][u_1, \ldots, u_r] = k[Y \times \mathbf{A}^r]$. Таким образом, отображение f представлено в виде композиции двух отображений: $f = g \cdot h$, $h\colon X \to Y \times \mathbf{A}^r$ и $g\colon Y \times \mathbf{A}^r \to Y$, причем g есть просто проектирование на первый сомножитель. Любой элемент $v \in \mathrm{k}[X]$ алгебраичен над $\mathrm{k}[Y \times \mathbf{A}^r]$ и, значит, для него существует такой элемент $a \in \mathrm{k}[Y \times \mathbf{A}^r]$, что $a \cdot v$ цел над $\mathrm{k}[Y \times \mathbf{A}^r]$. Выберем такие элементы $a_1, \ldots, a_m$ для некоторой системы образующих $v_1, \ldots, v_m$ кольца $\mathrm{k}[X]$ и положим $F = a_1 \ldots a_m$. Так как в открытом множестве $D(F) \subset Y \times \mathbf{A}^r$ функции a_i обратимы, то функции v в $D(h^*(F)) \subset X$ целые, т. е. ограничение

$$h\colon D(h^*(F)) \to D(F)$$

конечно. Ввиду теоремы 4 $D(F) \subset h(X)$. Нам остается доказать, что $g(D(F))$ содержит открытое множество в Y. Пусть

$$F(y, T) = \sum F_\alpha(y) T^{(\alpha)},$$

где $T^{(\alpha)}$ — одночлены от переменных $T_1, \ldots, T_r$ — координат в $\mathbf{A}^r$. Для точек $y \in Y$, для которых не все $F_\alpha(y) = 0$, существуют такие значения $T_i = \tau_i$, что $F(y, \tau) \neq 0$. Поэтому $g(D(F)) \supset \cup D(F_\alpha)$.

Теорема 6 показывает, насколько регулярные отображения алгебраических многообразий проще непрерывных или дифференцируемых отображений.

Знаменитая всюду плотная обмотка тора, т. е. отображение

$$f\colon \mathbf{R}^1 \to T, \quad T = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2, \quad f(x) = (x, \sqrt{2}x) \bmod \mathbf{Z}^2$$

как раз и дает пример ситуации, которая не может встретиться для алгебраических многообразий ввиду теоремы 6.

Теорема 7. *Если X замкнуто в $\mathbf{P}^n$ и $X \subset \mathbf{P}^n - E$, где E — d-мерное линейное подпространство, то проектирование $\pi\colon X \to \mathbf{P}^{n-d-1}$ с центром в E определяет конечное отображение $X \to \pi(X)$.*

Доказательство. Пусть $y_0, \ldots, y_{n-d-1}$ — однородные координаты в $\mathbf{P}^{n-d-1}$ и π задается формулами $y_j = L_j(x)$, $x \in X$ $(j = 0, \ldots, n-d-1)$. Очевидно, что $U_i = \pi^{-1}(\mathbf{A}_i^{n-d-1}) \cap X$ задается условием $L_i(x) \neq 0$ и является аффинным открытым подмножеством в X. Мы докажем, что π: $U_i \to \mathbf{A}_i^{n-d-1} \cap \pi(X)$ — конечное отображение. Любая функция $g \in \mathrm{k}[U_i]$ имеет вид $g = \frac{G_i(x_0, \ldots, x_n)}{L_i^m}$, где G_i — форма степени m. Рассмотрим отображение π_1: $X \to \mathbf{P}^{n-d}$, $z_j = L_j^m(x)$ $(j = 0, \ldots, n-d-1)$, $z_{n-d} = G_i(x)$, где $z_0, \ldots, z_{n-d}$ — однородные координаты в $\mathbf{P}^{n-d}$. Оно является регулярным отображением и образ его $\pi_1(X)$ замкнут в $\mathbf{P}^{n-d}$ по теореме 2. Пусть $F_1 = \ldots = F_s = 0$ — его уравнения. Так как $X \subset \mathbf{P}^n - E$, то формы L_i $(i = 0, \ldots, n-d-1)$ не имеют общих нулей на X. Это значит, что точка $0 = (0 : \ldots : 1)$ не содержится в $\pi_1(X)$, иными словами, что уравнения $z_0 = \ldots = z_{n-d-1} = F_1 = \ldots = F_s = 0$ не имеют решений в $\mathbf{P}^{n-d}$. Согласно лемме 1 п. 1 § 4 отсюда следует, что $(z_0, \ldots, z_{n-d-1}, F_1, \ldots, F_s) \supset I_k$ при некотором $k > 0$. В частности, $(z_0, \ldots, z_{n-d-1}, F_1, \ldots, F_s) \ni z_{n-d}^k$. Это значит, что

$$z_{n-d}^k = \sum_{j=0}^{n-d-1} z_j H_j + \sum_{j=1}^{s} F_j P_j,$$

где H_j и P_j — многочлены. Обозначая через $H^{(q)}$ однородную составляющую степени q многочлена H, мы получим отсюда

$$\Phi(z_0, \ldots, z_{n-d}) = z_{n-d}^k - \sum z_j H_j^{(k-1)} = 0 \quad \text{на} \quad \pi_1(X). \qquad (2)$$

Однородный многочлен Φ имеет степень k и как многочлен от z_{n-d} имеет коэффициент при старшем члене, равный 1:

$$\Phi = z_{n-d}^k - \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-j}(z_0, \ldots, z_{n-d-1})\, z_{n-d}^j. \qquad (3)$$

Подставляя в (2) формулы преобразования π_1, мы получим, что $\Phi\left(L_0^m, \ldots, L_{n-d-1}^m, G_i\right) = 0$ на X, причем Φ имеет вид (3). Деля это соотношение на L_i^m, мы получаем нужное соотношение

$$g^k - \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-j}\left(x_0^m, \ldots, 1, \ldots, x_{n-d-1}^m\right) g^j = 0,$$

где $x_r = \frac{y_r}{y_i}$ — координаты в $\mathbf{A}_0^{n-d-1}$. Теорема доказана.

Применение отображения Веронезе дает возможность существенно обобщить этот результат.

Теорема 8. *Пусть $F_0, \ldots, F_s$ — линейно независимые формы степени m на $\mathbf{P}^n$, не имеющие общих нулей на замкнутом многообразии $X \subset \mathbf{P}^n$. Тогда отображение $\varphi(x) = (F_0(x) : \ldots : F_s(x))$ определяет конечное отображение $X \to \varphi(X)$.*

Пусть v_m: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$ — отображение Веронезе и L_i — линейные формы на $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$, соответствующие формам F_i на $\mathbf{P}^n$. Очевидно, что тогда $\varphi = \pi \cdot v_m$, где π — проектирование, определенное формами $L_0, \ldots, L_s$. Так как v_m является изоморфизмом между X и $v_m(X)$, то теорема вытекает из теоремы 7.

4. Нормализационные теоремы. Рассмотрим неприводимое проективное многообразие $X \subset \mathbf{P}^n$, отличное от всего $\mathbf{P}^n$. Тогда существует точка $x \in \mathbf{P}^n$, $x \notin X$ и отображение φ проектирования X из точки x будет регулярным. Многообразие $\varphi(X) \subset \mathbf{P}^{n-1}$ проективно согласно теореме 2, а отображение φ: $X \to \varphi(X)$ конечно по теореме 7. Если $\varphi(X) \neq \mathbf{P}^{n-1}$, то мы можем применить к нему те же рассуждения. В конце концов, мы придем к отображению $X \to \mathbf{P}^m$, которое будет конечным как композиция конечных отображений. Доказанный нами результат называется нормализационной теоремой:

Теорема 9. *Для любого неприводимого проективного многообразия X существует конечное отображение φ: $X \to \mathbf{P}^m$ на проективное пространство.*

Аналогичный факт верен и для аффинных многообразий. Для доказательства рассмотрим аффинное многообразие $X \subset \mathbf{A}^n$. Предположим, что $\mathbf{A}^n$ открыто в $\mathbf{P}^n$, и обозначим через $\overline{X}$ замыкание X в $\mathbf{P}^n$. Пусть $X \neq \mathbf{A}^n$. Выберем точку $x \in \mathbf{P}^n - \mathbf{A}^n$, $x \notin \overline{X}$ и рассмотрим проектирование φ: $\overline{X} \to \mathbf{P}^{n-1}$ из этой точки. При этом X будет проектироваться в «конечные» точки $\mathbf{P}^{n-1}$, т. е. в точки аффинного пространства $\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{P}^{n-1} \cap \mathbf{A}^n$. Мы можем продолжить этот процесс до тех пор, пока $X \neq \mathbf{A}^n$, и в результате получим проектирование φ: $\overline{X} \to \mathbf{P}^m$, при котором $\varphi(X) = \mathbf{A}^m$. Этим доказана

Теорема 10. *Для любого неприводимого аффинного многообразия X существует конечное отображение φ: $X \to \mathbf{A}^m$ на аффинное пространство.*

Теоремы 9 и 10 дают возможность свести изучение некоторых (очень грубых) свойств проективных и аффинных многообразий к случаю проективного и аффинного пространств. При $m = 1$ — это точка зрения Римана, рассматривавшего алгебраические кривые как накрытия римановой сферы ($\mathbf{P}^1$ над полем комплексных чисел).

Теорема 10 означает, что кольцо A без делителей нуля с конечным числом образующих над полем k будет целым над кольцом, изоморфным кольцу многочленов. Этот результат легко доказать и непосредственно.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что многообразие $\varphi(\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s)$ не лежит ни в каком линейном подпространстве пространства $\mathbf{P}^{(r+1)(s+1)-1}$, отличном от всего $\mathbf{P}^{(r+1)(s+1)-1}$.

2. Рассмотрим отображения многообразия $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$: $p_1(x, y) = x$, $p_2(x, y) = y$. Доказать, что $p_1(X) = p_2(X) = \mathbf{P}^1$ для любого замкнутого неприводимого подмногообразия $X \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, если только X не принадлежит к одному из следующих типов: а) точка $(x_0, y_0) \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, б) множество $x_0 \times \mathbf{P}^1$, где x_0 — фиксированная точка из $\mathbf{P}^1$, в) множество $\mathbf{P}^1 \times y_0$.

3. Проверить непосредственно следствие 1 теоремы 2 для случая, когда $X = \mathbf{P}^n$.

4. Пусть $X = \mathbf{A}^2 - x$, где x — точка. Доказать, что X не изоморфно ни аффинному, ни проективному многообразию (ср. задачу 3 к § 4).

5. То же, что и в задаче 4, доказать для $\mathbf{P}^2 - x$.

6. То же, что и в задачах 4 и 5, для $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1$.

7. Будет ли конечным отображение $f: \mathbf{A}^1 \to X$, X задано уравнением $y^2 = x^3$, $f(t) = (t^2, t^3)$?

8. Пусть X — гиперповерхность в $\mathbf{P}^r$, L — прямая, проходящая через начало координат, и φ_L — отображение проектирования X параллельно L на некоторое $(r-1)$-мерное подпространство, не содержащее L. Обозначим через S множество всех таких прямых L, что φ_L не конечное. Доказать, что S — алгебраическое многообразие. Найти S, если $r = 2$ и X задается уравнением $xy = 1$.

9. Доказать, что пересечение аффинных открытых подмножеств аффинно. Указание. Использовать пример 10 п. 3 § 2.

10. Доказать, что формы степени $m = kl$ от $n+1$ переменных, являющиеся l-ми степенями форм, соответствуют точкам некоторого замкнутого подмножества в $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$.

11. Пусть $f: X \to Y$ — регулярное отображение аффинных многообразий. Доказать, что прообраз главного аффинного открытого множества является главным аффинным открытым множеством.

§ 6. Размерность

1. Определение размерности. В § 2 мы видели, что замкнутые алгебраические подмногообразия $X \subset \mathbf{A}^2$ — это конечные множества точек, плоские алгебраические кривые и само $\mathbf{A}^2$. Это разделение на три типа соответствует интуитивному понятию размерности — мы имеем многообразия размерностей 0, 1 и 2. Сейчас мы дадим

определение размерности произвольного алгебраического многообразия.

Как можно прийти к такому определению? Во-первых, размерность n-мерного проективного или аффинного пространства естественно считать равной n. Во-вторых, если существует конечное отображение $X \to Y$, то естественно считать, что X и Y имеют одинаковую размерность. Так как, согласно нормализационным теоремам (теоремы 9 и 10 § 5), любое проективное или аффинное многообразие X обладает конечным отображением на некоторое пространство $\mathbf{P}^m$ или $\mathbf{A}^m$, то естественно это m и взять за определение размерности многообразия. При этом возникает, однако, вопрос о корректности этого определения: не может ли существовать двух конечных отображений $f: X \to \mathbf{A}^n$ и $g: X \to \mathbf{A}^m$, $m \neq n$? Предположим, что X неприводимо. Тогда из конечности отображения $f: X \to \mathbf{A}^n$ следует, что поле рациональных функций $k(X)$ является конечным расширением поля $f^*k(\mathbf{A}^n)$, которое в свою очередь изоморфно полю $k(T_1, \ldots, T_n)$. Поэтому $k(X)$ имеет степень трансцендентности n, что и дает характеристику числа n, не зависящую от выбора конечного отображения $f: X \to \mathbf{A}^n$. Тем самым мы в некоторой степени мотивировали определение размерности.

Определение. *Размерностью* квазипроективного неприводимого многообразия X называется степень трансцендентности поля $k(X)$.

Размерностью приводимого многообразия называется максимум размерностей его неприводимых компонент.

Размерность многообразия X обозначается через $\dim X$.

Если Y — замкнутое подмногообразие в X, то число $\dim X - \dim Y$ называется *коразмерностью* Y в X и обозначается $\operatorname{codim} Y$ или $\operatorname{codim}_X Y$.

Заметим, что если X — неприводимое многообразие и U открыто в X, то $k(U) = k(X)$ и, значит, $\dim U = \dim X$.

Пример 1. $\dim \mathbf{A}^n = \dim \mathbf{P}^n = n$, так как поле $k(\mathbf{A}^n)$ совпадает с полем рациональных функций от n переменных. Так как по определению размерность инвариантна относительно бирационального изоморфизма, то мы видим, что $\mathbf{A}^n$ и $\mathbf{A}^m$ не изоморфны бирационально, если $n \neq m$.

Пример 2. Плоская неприводимая алгебраическая кривая имеет размерность 1, как мы видели в § 1.

Пример 3. Если X состоит из одной точки, то, очевидно, $\dim X=0$, а значит, то же верно и когда X является конечным множеством. Наоборот, если $\dim X = 0$, то X — конечное множество. Достаточно проверить это для неприводимого аффинного многообразия X. Пусть $X\subset \mathbf{A}^n$ и $t_1, \ldots, t_n$ — координаты в $\mathbf{A}^n$ как функции на X, т. е. как элементы из $k[X]$. По условию t_i алгебраично над k, а значит, может принимать только конечное число значений. Отсюда и следует, что X конечно.

Пример 4. Докажем, что если X и Y — неприводимые многообразия, то $\dim(X\times Y)=\dim X+\dim Y$.

Достаточно рассмотреть случай, когда X и Y — аффинные многообразия, $X\subset \mathbf{A}^N$, $Y\subset \mathbf{A}^M$. Пусть $\dim X=n$ и $\dim Y=m$, $t_1, \ldots, t_N$ и $u_1, \ldots, u_M$ — координаты в $\mathbf{A}^N$ и $\mathbf{A}^M$, рассмотренные как функции на X и Y соответственно, $t_1, \ldots, t_n$ алгебраически независимы в $k(X)$, а $u_1, \ldots, u_m$ — в $k(Y)$. По определению $k[X\times Y]$ порождается элементами $t_1, \ldots, t_N, u_1, \ldots, u_M$, и все эти элементы, в силу сделанных предположений, алгебраически зависят от $t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_m$. Нам достаточно доказать, что эти последние элементы независимы. Предположим, что между ними существует соотношение $F(T; U)=F(T_1, \ldots, T_n, U_1, \ldots, U_m)=0$ на $X\times Y$. Тогда для любой точки $x\in X$ имеем $F(x; U_1, \ldots, U_m)=0$ на Y. Так как $u_1, \ldots, u_m$ независимы на Y, то каждый коэффициент $a_i(x)$ многочлена $F(x, U)$ равен 0. Это значит, что соответствующий многочлен $a_i(T_1, \ldots, T_n)$ равен 0 на X. Теперь мы воспользуемся независимостью элементов $t_1, \ldots, t_n$ на X и отсюда получим, что все $a_i(T_i, \ldots, T_n)=0$, а значит, и $F(T, U)=0$ тождественно.

Пример 5. Грассманово многообразие (пример 1 п. 1 § 4) покрывается открытыми множествами $p_{i_1\ldots i_r}\neq 0$, изоморфными аффинному пространству $\mathbf{A}^{r(n-r)}$ ($n=\dim V$). Значит, $\dim G(r, n)=r(n-r)$. Отсюда следует также, что $G(r, V)$ рационально.

Одномерные алгебраические многообразия называются кривыми, двумерные — поверхностями.

Теорема 1. *Если $X\subset Y$, то $\dim X\leqslant \dim Y$. Если Y неприводимо, $X\subset Y$, $\dim X=\dim Y$ и X замкнуто в Y, то $X=Y$.*

Достаточно доказать утверждения теоремы для случая, когда X и Y аффинны и неприводимы.

Пусть $X\subset Y\subset \mathbf{A}^N$ и $\dim Y=n$. Тогда среди координат $t_1, \ldots, t_N$ любые $n+1$ алгебраически зависимы как элементы $k[Y]$, т. е. связаны соотношением $F(t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n+1}})=0$ на Y. Тем более оно выполняется на X. Это и значит, что степень трансцендентности поля $k(X)$ не больше n, т. е. $\dim X\leqslant \dim Y$.

Пусть $\dim X=\dim Y=n$. Тогда некоторые n из числа координат $t_1, \ldots, t_N$ независимы на X. Пусть это $t_1, \ldots, t_n$. Тем более они независимы на Y. Пусть $u\in k[Y]$, $u\neq 0$ на Y. Тогда u алгебраически зависим от $t_1, \ldots, t_n$ на Y, т. е. выполнено соотношение

$$a_0(t_1, \ldots, t_n)u^k+\ldots+a_k(t_1, \ldots, t_n)=0 \qquad (1)$$

на Y.

Мы можем выбрать многочлен в левой части (1) неприводимым, и тогда $a_k(t_1, \ldots, t_n)\neq 0$ на Y. Тем более соотношение (1) верно на X. Предположим, что $u=0$ на X. Тогда из (1) следует, что $a_k(t_1, \ldots, t_n)=0$ на X, а так как $t_1, \ldots, t_n$ по условию независимы на X, то $a_k(T_1, \ldots, T_n)=0$ на всем $\mathbf{A}^N$. Это противоречит тому, что $a_k(t_1, \ldots, t_n)\neq 0$ на Y. Таким образом, если $u=0$ на X, то $u=0$ на Y, а это и значит, что $X=Y$. Теорема доказана.

Как мы видели, неприводимая плоская алгебраическая кривая имеет размерность 1.

Обобщением этого факта является следующий результат.

Теорема 2. *Все неприводимые компоненты гиперповерхности в $\mathbf{A}^N$ или $\mathbf{P}^N$ имеют коразмерность 1.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай гиперповерхности в $\mathbf{A}^N$. Пусть многообразие $X\subset \mathbf{A}^N$ задано уравнением $F(T)=0$. Разложению $F=F_1\ldots F_k$ на неприводимые множители соответствует представление $X=X_1\cup\ldots\cup X_k$, где X_i определено уравнением $F_i=0$. Очевидно, что теорему достаточно доказать для многообразий X_i. Докажем, что они неприводимы. Если бы X_i было приводимо, что существовали бы такие многочлены G и H, что $GH=0$ на X_i, $G\neq 0$, $H\neq 0$ на X_i. Из теоремы Гильберта о корнях следует, что, при некотором $l>0$, $F_i\mid (GH)^l$. Ввиду неприводимости многочлена F_i отсюда вытекает, что $F_i\mid G$ или $F_i\mid H$, а это противоречит условию $G\neq 0$, $H\neq 0$ на X_i.

Предположим, что в многочлен $F_i(T)$ переменная T_N действительно входит, и докажем, что координаты $t_1, \ldots$

$\ldots, t_{N-1}$ алгебраически независимы на X_i. Действительно, из соотношения $G(t_1, \ldots, t_{N-1}) = 0$ на X_i следовало бы, что, при некотором $l > 0$, $F_i \mid G^l$, что невозможно, так как G не содержит T_N. Таким образом, $\dim X_i \geqslant N - 1$, а так как $X \neq \mathbf{A}^N$, то из теоремы 1 следует, что $\dim X_i = N - 1$.

Теорема 3. *Любое многообразие $X \subset \mathbf{A}^N$, все компоненты которого имеют коразмерность 1, является гиперповерхностью, и идеал $\mathfrak{A}_X$ — главный.*

Достаточно рассмотреть случай, когда X неприводимо. Так как $X \neq \mathbf{A}^N$ (ввиду того, что $\dim X = N - 1$), то существует ненулевой многочлен F, равный нулю на X. Ввиду неприводимости многообразия X некоторый неприводимый множитель H многочлена F также равен нулю на X. Тогда $\mathbf{A}^n_H \supset X$, а так как в доказательстве теоремы 2 мы видели, что $\mathbf{A}^n_H$ неприводимо, то по теореме 1 $X = \mathbf{A}^n_H$. Если $G \in \mathfrak{A}_X$, то по теореме Гильберта $H \mid G^k$, а, ввиду неприводимости H, $G \in (H)$, т. е. $\mathfrak{A}_X = (H)$.

Аналогично доказывается вариант теоремы 3.

Теорема 3′. *Любое подмногообразие $X \subset \mathbf{P}^{N_1} \times \ldots \times \mathbf{P}^{N_k}$, все компоненты которого имеют коразмерность 1, задается одним уравнением, однородным по каждой из k групп переменных.*

Надо только вместо однозначности разложения многочленов на неприводимые множители воспользоваться однозначностью разложения многочлена, однородного по каждой группе переменных, на такие же многочлены. Это получается из того, что если $F(x_0, \ldots, x_{N_1}, y_0, \ldots, y_{N_2}, \ldots, u_0, \ldots, u_{N_k})$ однороден по каждой из групп переменных $(x_0, \ldots, x_{N_1}), \ldots, (u_0, \ldots, u_{N_k})$ и $F = G \cdot H$, то G и H обладают тем же свойством.

2. Размерность пересечения с гиперповерхностью. Если мы попытаемся исследовать многообразия, определенные более чем одним уравнением, то сразу придем к вопросу о размерности пересечения многообразия с гиперповерхностью. Мы исследуем этот вопрос сначала для проективных многообразий. Если X замкнуто в $\mathbf{P}^N$ и форма $F \neq 0$ на X, то через X_F мы будем обозначать замкнутое подмножество X, определенное условием $F = 0$.

Для любого проективного многообразия $X \subset \mathbf{P}^N$ мы можем найти форму $G(U_0, \ldots, U_N)$ любой наперед заданной степени m, не обращающуюся в 0 ни на одной из компонент X_i. Для этого достаточно выбрать в каждой компоненте X_i многообразия X по точке $x_i \in X$ и найти линейную форму L, не обращающуюся в 0 ни в одной из этих точек. За G можно взять надлежащую степень L. Пусть X замкнуто в $\mathbf{P}^N$ и форма $F \neq 0$ ни на одной компоненте X. Ввиду теоремы 1 $\dim X_F < \dim X$. Положим $X_F = X^{(1)}$ и, применяя к нему то же рассуждение, найдем форму F_1, $\deg F_1 = \deg F$, не обращающуюся в 0 ни на одной компоненте $X^{(1)}$. Мы получим последовательность многообразий $X^{(i)}$ и форм F_i $(i = 0, \ldots)$ таких, что

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \ldots, \quad X^{(i+1)} = X^{(i)}_{F_i}, \quad F_0 = F. \tag{1}$$

Согласно теореме 1 $\dim X^{(i+1)} < \dim X^{(i)}$. Поэтому, если $\dim X = n$, то $X^{(n+1)}$ пусто. Иначе говоря, формы $F_0 = F, F_1, \ldots, F_n$ не имеют общих нулей на X.

Пусть теперь X — неприводимое многообразие. Рассмотрим отображение $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^n$:

$$\varphi(x) = (F_0(x) : \ldots : F_n(x)). \tag{2}$$

Это отображение удовлетворяет условиям теоремы 8 § 5, и ввиду этой теоремы отображение $X \to \varphi(x)$ конечно. Но если $X \to Y$ — конечное отображение, то, как мы видели, $\dim X = \dim Y$. Поэтому $\dim \varphi(X) = \dim X = n$, а так как $\varphi(X)$ замкнуто в $\mathbf{P}^n$ ввиду теоремы 2 § 5, то $\varphi(X) = \mathbf{P}^n$ ввиду теоремы 1 п. 1. Предположим теперь, $\dim X^{(1)} = \dim X_F < n - 1$. Тогда в последовательности (1) уже $X^{(n)}$ пусто. Иначе говоря, формы $F_0, \ldots, F_{n-1}$ не имеют общих нулей на X. Это значит, что точка $(0 : 0 : \ldots : 0 : 1)$ не содержится в $\varphi(X)$, а это противоречит тому, что $\varphi(X) = \mathbf{P}^n$. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 4. *Если форма F не равна 0 на неприводимом проективном многообразии X, то $\dim X_F = \dim X - 1$.*

Следствие 1. *На проективном многообразии X существуют подмногообразия любой размерности $s < \dim X$.*

Следствие 2 (индуктивное определение размерности). *Для неприводимого проективного многообразия X $\dim X = 1 + \sup \dim Y$, где Y пробегает все собственные подмногообразия X.*

Следствие 3. *Размерность проективного многообразия X может быть определена как наибольшее число n, для которого существует цепочка неприводимых подмногообразий $Y_0 \supset Y_1 \supset \ldots \supset Y_n$, $Y_i \neq Y_{i+1}$.*

Следствие 4. *Размерность n проективного многообразия X можно определить как $N-s-1$, где s — максимум размерностей линейных подпространств в $\mathbf{P}^N$, не пересекающих X.*

Пусть $E \subset \mathbf{P}^N$ — линейное подпространство и $\dim E = s$. Если $s \geqslant N-n$, то E можно задать не более чем n уравнениями, и последовательное применение теоремы 4 показывает, что $\dim(X \cap E) \geqslant 0$ и, значит, $X \cap E$ не пусто (размерность пустого множества равна -1!). Положив $m=1$ при конструкции последовательности (1), мы получим $n+1$ линейных форм $L_0, \ldots, L_n$, не имеющих общих нулей на X. Если E — определяемое ими подпространство, то $\dim E = N-n-1$ и $X \cap E$ пусто.

Следствие 5. *Множество нулей r форм $F_1, \ldots, F_r$ на n-мерном проективном многообразии имеет размерность не меньшую, чем $n-r$.*

Доказательство получается применением $r-1$ раз теоремы 4.

Следствие 5 дает довольно сильную теорему существования.

Предложение. *Если $r \leqslant n$, то r форм имеют общий нуль на n-мерном проективном многообразии. Например (при $X = \mathbf{P}^n$), n однородных уравнений от $n+1$ неизвестных имеют ненулевое решение.*

Из этой теоремы существования можно сделать ряд важных выводов.

Следствие 1. На $\mathbf{P}^2$ любые две кривые пересекаются (так как любая кривая задается одним однородным уравнением). На поверхности 2-го порядка $Q \subset \mathbf{P}^3$ есть непересекающиеся кривые, например прямые одного и того же семейства образующих. *Поэтому $\mathbf{P}^2$ и Q не изоморфны.* Так как они бирационально изоморфны (пример 1 п. 3 § 3), то мы получаем пример бирационально изоморфных, но не изоморфных проективных многообразий. Этот пример будет дальше встречаться.

Следствие 2. *Теорема 3 неверна уже для кривых на поверхности 2-го порядка Q: не любая кривая $C \subset Q$ определяется приравниванием нулю одной формы $\mathbf{P}^3$.* Действительно, предположив, что обе непересекающиеся кривые, которые мы выше нашли на Q, задаются уравнениями $F_1=0$ и $F_2=0$, мы приходим к противоречию со следствием 5, согласно которому система $F_1=0$, $F_2=0$, $G=0$ ($G=0$ есть уравнение Q) имеет решение.

Следствие 3. Мы видели в п. 6 § 1, что точки перегиба плоской алгебраической кривой с уравнением $F=0$ определяются условием $H(F)=0$, где $H(F)$ — гессиан формы F. Если степень F равна n, то степень $H(F)$ равна $3(n-2)$. Поэтому при $n>2$ система уравнений $F=0$, $H(F)=0$ имеет ненулевое решение, т. е. *любая кривая степени $\geqslant 3$ имеет точку перегиба.*

Простейший частный случай — когда $n=3$. Мы видим, что *любая кубика имеет точку перегиба.* Выберем систему координат (ξ_0, ξ_1, ξ_2) так, чтобы точка перегиба имела координаты $(0:0:1)$, а касательная в ней совпадала с $\xi_1=0$. Полагая $u=\dfrac{\xi_0}{\xi_2}$, $v=\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$, мы убедимся, что наше условие равносильно тому, что в уравнении $\varphi(u, v)=0$ отсутствуют свободный член и члены с v и v^2. Переходя к координатам $\dfrac{\xi_1}{\xi_0}=x$, $\dfrac{\xi_2}{\xi_0}=y$, в которых точка перегиба является бесконечно удаленной, мы видим, что в уравнении $f(x, y)=0$ нашей кубики отсутствуют члены с y^3, x^2y и y^2x, т. е. оно имеет вид $ay^2+(bx+c)y+g(x)=0$, где g — многочлен степени $\leqslant 3$. Если $a=0$, то наша точка перегиба является особой. Если $a\neq 0$, то можно считать $a=1$. Предполагая, что характеристика поля k отлична от 2, и полагая $y_1 = y + \frac{1}{2}(bx+c)$, мы приводим уравнение к виду $y_1^2 = g_1(x)$, где степень g_1 опять $\leqslant 3$, а если кубика неособа, то эта степень равна 3. Таким образом, *уравнение гладкой кубики имеет вейерштрассову нормальную форму в некоторой системе координат.* В п. 4 § 1 мы доказали лишь более слабое утверждение, что кубика *изоморфна* кривой с уравнением в вейерштрассовой нормальной форме.

Следствие 4 (теорема Тзена). *Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — форма степени $m<n$, коэффициенты которой — многочлены от t. Уравнение $F(x_1, \ldots, x_n)=0$ имеет решение в многочленах $x_i = p_i(t)$.*

Доказательство. Будем искать x_i в виде $x_i = \sum_{j=0}^{l} u_{ij}t^j$ с неопределенными коэффициентами u_{ij}. Подставляя эти выражения в уравнение $F(x_1, \ldots, x_n)=0$, мы получим многочлен от t, все коэффициенты которого надо приравнять 0. Если максимум степеней коэффициентов многочлена F равен k, то число уравнений не будет превышать $ml+k+1$. Число неизвестных равно $n(l+1)$. Так как по условию $n>m$, то при достаточно большом l число неизвестных будет больше числа уравнений и, значит, система будет иметь ненулевое решение.

Пример 1. Важный частный случай теоремы Тзена — когда $n=3$, а F — квадратичная форма. Ему можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Пусть в $\mathbf{P}^2\times\mathbf{A}^1$ поверхность X задана уравнением $\sum\limits_{i,j=0}^{2} a_{ij}(t)\,x_i\cdot x_j=0$, где $x_0:x_1:x_2$ — координаты в $\mathbf{P}^2$, t — в $\mathbf{A}^1$, $a_{ij}(t)\in k[t]$. Слои отображения $X\to\mathbf{A}^1$ — коники, а поверхность называется *пучком коник*. Теорема Тзена доказывает, что этот *пучок имеет сечение*, т. е. такое регулярное отображение $\varphi\colon \mathbf{A}^1\to X$, что $\varphi(a)$, $a\in\mathbf{A}^1$, лежит в слое над точкой a. Другая интерпретация этого результата такова. Рассмотрим нашу поверхность как кривую C (конику) в $\mathbf{P}^2$ с уравнением $\sum\limits_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j=0$ над алгебраически незамкнутым полем $K=k(t)$. Очевидно, $K(C)=k(X)$. Тогда на этой конике есть точка с координатами из поля K.

Будем предполагать, что кривая C неприводима, т. е. $\det(a_{ij}(t))$ не равен 0 тождественно (в этом случае пучок называется *невырожденным*). В п. 2 § 1 мы видели, что в этом случае коника рациональна и соответствующее отображение определено над полем K. Иными словами, поле $K(C)$ изоморфно полю $K(T)$, а так как $K(C)=k(X)$, то $K(X)$ изоморфно $K(T)=k(t,T)$. Мы доказали

Следствие 5. *Невырожденный пучок коник является рациональной поверхностью.*

Теорема 5. *В предположениях теоремы 4 все компоненты многообразия X_F имеют одинаковую размерность* $\dim X-1$.

Рассмотрим конечное отображение $\varphi\colon X\to\mathbf{P}^n$ $(n=\dim X)$, которое было построено при доказательстве теоремы 4. Пусть $\mathbf{A}^n_i$ — открытые аффинные множества, покрывающие $\mathbf{P}^n$, тогда $\varphi^{-1}(\mathbf{A}^n_i)=U_i$ — аффинные открытые множества в X, как легко увидеть, применив отображение Веронезе с $m=\deg F$. Очевидно, достаточно доказать, что все компоненты аффинного многообразия

$X_F\cap U_i$ имеют размерность $n-1$ для всех $i=1,\ldots,n$. Наше рассуждение будет относиться дальше к некоторому фиксированному U_i, которое мы обозначим через U. Очевидно, что $X_F\cap U=V(f)$, где $f=\frac{F}{F_i}$, т. е. совпадает на U со множеством нулей регулярной функции $f\in k[U]$. Мы построили конечное отображение $\varphi\colon U\to\mathbf{A}^n$, которое задается n регулярными функциями $f_1,\ldots,f_n$, причем $f_1=f$.

Чтобы доказать, что все компоненты $V(f)$ имеют размерность $n-1$, достаточно доказать, что их размерности не меньше $n-1$. Мы докажем, что функции $f_2,\ldots,f_n$ на каждой из этих компонент алгебраически независимы. Пусть $P\in k[T_2,\ldots,T_n]$. Чтобы доказать, что $R=P(f_2,\ldots,f_n)$ не обращается в 0 ни на одной из компонент множества $V(f)$, нам достаточно показать, что из соотношения $R\cdot Q=0$ на $V(f)$, $Q\in k[U]$, следует, что $Q=0$ на $V(f)$. Действительно, если $V(f)=U^{(1)}\cup\ldots\cup U^{(t)}$ — несократимое разложение на неприводимые компоненты и $R=0$ на $U^{(1)}$, то за Q можно взять любую функцию, равную нулю на $U^{(2)}\cup\ldots\cup U^{(t)}$, но не на $U^{(1)}$. Тогда $R\cdot Q=0$ на $V(f)$, но $Q\neq 0$ на $V(f)$. По теореме Гильберта о корнях наше утверждение можно переформулировать так: если $f\mid(R\cdot Q)^l$ при некотором $l>0$, то $f\mid Q^k$ при некотором $k>0$.

Таким образом, теорема 5 вытекает из следующего чисто алгебраического факта.

Лемма. *Пусть $B=k[T_1,\ldots,T_r]$, $A\supset B$,— кольцо без делителей 0, целое над B, $x=T_1$, $y=P(T_2,\ldots,T_r)\neq 0$, $u\in A$. Если $x\mid(yu)^l$ в A при некотором $l>0$, то $x\mid u^k$ при некотором $k>0$.*

Единственное свойство многочленов x и y, которое мы будем использовать,— это то, что они взаимно просты в кольце $k[T_1,\ldots,T_r]$. Заметим, что мы можем заменить y^l на z и u^l на v и нам достаточно доказать, что если x и z взаимно просты в $k[T_1,\ldots,T_r]$, то из $x\mid zv$ в A следует, что $x\mid v^k$ в A при некотором $k>0$. Таким образом, лемма утверждает, что в некотором смысле свойство взаимной простоты многочленов z и $x\in B$ сохраняется при переходе к целому над B кольцу A.

Обозначим через K поле частных кольца B. Если элемент $t\in A$ цел над B, то он тем самым алгебраичен над K. Обозначим через $F(T)\in K[T]$ многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1 такой, что

$F(t)=0$. Этот многочлен $F(T)$ называется минимальным многочленом элемента t. Деление с остатком показывает, что любой многочлен $G(T)\in K[T]$ и такой, что $G(t)=0$, делится на F в $K[T]$. Отсюда можно заключить, что элемент t тогда и только тогда цел над B, когда $F[T]\in\in B[T]$. Действительно, если t цел и $G(t)=0$, где $G\in\in B[T]$ и старший коэффициент G равен 1, то $G(T)==F(T)\cdot H(T)$ в $K[T]$. Но из того, что в B разложение на простые множители однозначно ($B=\mathrm{k}[T_1, \ldots, T_r]$!), следует, что тогда $F(T)\in B[T]$ и $H(T)\in B[T]$ — это простое следствие леммы Гаусса.

Теперь легко закончить доказательство леммы. Пусть $zv=xw$, v, $w\in A$ и $F(T)=T^k+b_1T^{k-1}+\ldots+b_k$ — минимальный многочлен элемента w. Так как w цел над B, то $b_i\in B$. Легко видеть, что минимальный многочлен $G(T)$ элемента v имеет вид $\frac{x^k}{z^k}F\left(\frac{z}{x}T\right)$. Поэтому

$$G(T)=T^k+\frac{xb_1}{z}T^{k-1}+\ldots+\frac{x^kb_k}{z^k},$$
$$v^k+\frac{xb_1}{z}v^{k-1}+\ldots+\frac{x^kb_k}{z^k}=0. \tag{3}$$

Так как v цело над B, то $\frac{x^ib_i}{z^i}\in B$, а ввиду того, что z и x взаимно просты, $z^i\mid b_i$. Из (3) тогда следует, что $x\mid v^k$. Лемма, а следовательно, и теорема 5 доказаны.

Следствие 1. *Если $X\subset\mathbf{P}^N$ — квазипроективное неприводимое многообразие, F — форма, не равная тождественно 0 на X и многообразие X_F не пусто, то любая его компонента имеет коразмерность* 1.

Доказательство. По определению X открыто в некотором замкнутом подмножестве $\overline{X}$ пространства $\mathbf{P}^N$. Так как X неприводимо, то и $\overline{X}$ неприводимо и, следовательно, $\dim\overline{X}=\dim X$. По теореме 5 $(\overline{X})_F=\cup Y_i$, $\dim Y_i=\dim X-1$. Но, как легко видеть, $X_F=(\overline{X})_F\cap X$; отсюда следует, что $X_F=\cup(Y_i\cap X)$, причем или $Y_i\cap X$ пусто или $Y_i\cap X$ открыто в Y_i, и поэтому $\dim(Y_i\cap X)==\dim X-1$.

Обычно встречается частный случай этого следствия, когда $X\subset\mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие. Если $\mathbf{A}^n\subset\mathbf{P}^n$, $\mathbf{A}^n=\mathbf{A}^n_0$, то $X_F=V(f)$, где $f=\frac{F}{u_0^m}$, $m=\deg F$. Таким образом, X_F совпадает с множеством нулей некоторой регулярной функции $f\in\mathrm{k}[X]$.

Следствие 2. *Если $X\subset\mathbf{P}^N$ — квазипроективное неприводимое n-мерное многообразие, Y совпадает с множеством нулей m форм на X и не пусто, то любая его компонента имеет размерность не меньшую, чем $n-m$.*

Очевидное доказательство индукцией по m. Опять в случае аффинного многообразия мы можем говорить о множестве нулей m регулярных функций на X.

Если X проективно и $m\leqslant n$, то мы можем утверждать, что Y не пусто.

Теорема 6. *Если X и $Y\subset\mathbf{P}^N$ — квазипроективные неприводимые многообразия, $\dim X=n$, $\dim Y=m$, $N<<n+m$, и $X\cap Y\neq\varnothing$, то для любой компоненты Z многообразия $X\cap Y$ $\dim Z\geqslant n+m-N$.*

Теорема носит, очевидно, локальный характер, и поэтому достаточно доказать ее для аффинных многообразий. Пусть X, $Y\subset\mathbf{A}^N$. Тогда $X\cap Y$ изоморфно $(X\times Y)\cap\cap\Delta\subset\mathbf{A}^{2N}$ (пример 10 п. 3 § 2). Теорема вытекает теперь из следствия 2 теоремы 5, так как Δ определено N уравнениями. Для проективных многообразий, как и раньше, множество $X\cap Y$ не пусто, если $N\leqslant n+m$. Теорему 6 можно сформулировать в более симметричном виде, в котором она сразу обобщается на произвольное число подмногообразий:

$$\operatorname{codim}_X\bigcap_{i=1}^r Y_i\leqslant\sum_{i=1}^r\operatorname{codim}_X Y_i. \tag{4}$$

3. Теорема о размерности слоев. Если задано регулярное отображение квазипроективных многообразий $f\colon X\to Y$, $y\in Y$, то множество $f^{-1}(y)$ называется *слоем* над точкой y. Слой, очевидно, является замкнутым подмногообразием.

Эта терминология оправдывается тем, что X расслаивается на непересекающиеся слои различных точек $y\in f(X)$.

Теорема 7. *Если $f\colon X\to Y$ — регулярное отображение неприводимых многообразий, $f(X)=Y$, $\dim X==n$, $\dim Y=m$, то $m\leqslant n$ и*

1) *для любой точки $y\in Y$ и для любой компоненты F слоя $f^{-1}(y)$ $\dim F\geqslant n-m$;*

2) *в Y существует такое непустое открытое множество U, что для $y\in U$ $\dim f^{-1}(y)=n-m$.*

Доказательство свойства 1). Очевидно, что это — локальное относительно y свойство — достаточно доказать его, приняв за Y любое открытое множество $U \subset Y$, $U \ni y$, а за X — многообразие $f^{-1}(U)$. Поэтому можно считать Y аффинным многообразием. Пусть $Y \subset \mathbf{A}^N$. В последовательности (1) п. 2 для многообразия Y мы получим в качестве $Y^{(m)}$ конечное множество: $Y^{(m)} = Y \cap Z$, где Z определено m уравнениями и $y \in Z$. Мы можем выбрать U так, что $Z \cap U \cap Y = y$, и будем поэтому считать, что $Z \cap Y = y$. Подпространство Z можно определить m уравнениями $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$. Таким образом, система уравнений $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$ определяет на Y точку y. Это значит, что на X система уравнений $f^*(g_1) = 0, \ldots, f^*(g_m) = 0$ определяет подмногообразие $f^{-1}(y)$. Теперь свойство 1) вытекает из следствия 2 теоремы 5 (аффинный случай).

Доказательство свойства 2). Мы можем заменить Y его открытым аффинным подмножеством W, а X — открытым аффинным множеством $V \subset f^{-1}(W)$. Так как V плотно в $f^{-1}(W)$, то $f(V)$ плотно в W. Поэтому f определяет вложение f^*: $k[W] \to k[V]$. Мы будем дальше считать, что $k[W] \subset k[V]$ и, значит, $k(W) \subset k(V)$. Пусть $k[W] = k[w_1, \ldots, w_M]$, $k[V] = k[v_1, \ldots, v_N]$. Так как $\dim W = m$, $\dim V = n$, то поле $k(V)$ имеет над $k(W)$ степень трансцендентности $n - m$. Предположим, что $v_1, \ldots, v_{n-m}$ алгебраически независимы над $k(W)$, а v_i $(i = n - m + 1, \ldots, N)$ связаны с ними соотношениями $F_i(v_i;\ v_1, \ldots, v_{n-m};\ w_1, \ldots, w_M) = 0$. Обозначим через $\bar{v}_i$ функции v_i, ограниченные на $f^{-1}(y) \cap V$. Тогда

$$k[f^{-1}(y) \cap V] = k[\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_N]. \qquad (1)$$

Рассмотрим F_i как многочлен от $v_i, v_1, \ldots, v_{n-m}$, относя $w_1, \ldots, w_M$ к коэффициентам, и обозначим через Y_i подмногообразие W, определенное обращением в 0 старшего коэффициента этого многочлена. Положим $Y_0 = \bigcup Y_i$, $U = W - Y_0$. Очевидно, что U открыто и не пусто. Если $y \in U$, ни один из многочленов $F_i(T_i;\ T_1, \ldots, T_{n-m},\ w_1(y), \ldots, w_M(y))$ не равен 0, т. е. все $\bar{v}_i$ алгебраически зависимы от $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-m}$. В сочетании с (1) это показывает, что $\dim f^{-1}(y) \leqslant n - m$, а ввиду свойства 1) отсюда вытекает свойство 2). Теорема доказана.

То, что свойство 2) может не выполняться для всех y, т. е. размерность слоя действительно может подскакивать, мы увидим уже в следующем пункте.

Следствие. *Множества* $Y_k = \{y \in Y,\ \dim f^{-1}(y) \geqslant k\}$ *замкнуты в* Y.

Согласно теореме 7, $Y_{n-m} = Y$ и существует такое замкнутое подмножество $Y' \subset Y$, $Y' \neq Y$, что $Y_k \subset Y'$, если $k > n - m$. Если Z_i — неприводимые компоненты Y', то $\dim Z_i < \dim Y$, и мы можем применить индукцию по $\dim Y$ к отображениям $f^{-1}(Z_i) \to Z_i$.

Из теоремы 7 вытекает критерий неприводимости многообразий, который часто полезен.

Теорема 8. *Если f: $X \to Y$ — регулярное отображение проективных многообразий, $f(X) = Y$, Y и все слои $f^{-1}(y)$ неприводимы и размерности всех слоев одинаковы, то X неприводимо.*

Положим $\dim f^{-1}(y) = n$. Предположим, что X приводимо и $X = \bigcup X_i$ — несократимое разложение на неприводимые компоненты. По теореме 2 § 5 все $f(X_i)$ замкнуты. Так как $Y = \bigcup f(X_i)$, а Y неприводимо, то $f(X_i) = Y$ для некоторых X_i. Выкинем из Y объединение тех замкнутых множеств $f(X_i)$, которые отличны от Y, и оставшееся открытое множество обозначим через Y'. Положим $f^{-1}(Y') = X'$ и $X' = \bigcup X'_j$, где X'_j — открытые подмножества в тех X_j, для которых $f(X_j) = Y$. Обозначим через f_j: $X'_j \to Y'$ ограничения отображения f, а через m_j — минимум чисел $\dim\limits_{y \in Y'} f_j^{-1}(y)$. Согласно теореме 7 этот минимум достигается на некотором открытом множестве $U \subset Y'$, а так как $\bigcup\limits_j f_j^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ неприводимо и имеет размерность n, то $\max m_j = n$ и, для некоторого значения $j = j_0$, $\dim f_{j_0}^{-1}(y) = n$ для $y \in U$, а значит, и для всех $y \in Y'$. Но тогда для любого $y \in Y'$, $f^{-1}(y) = \bigcup f_j^{-1}(y)$, $\dim f_j^{-1}(y) \leqslant n$, $\dim f_{j_0}^{-1}(y) = n$ и из неприводимости $f^{-1}(y)$ следует, что $f^{-1}(y) = f_{j_0}^{-1}(y)$. Это и значит, что $X'_{j_0} = X'$, откуда $X_{j_0} = X$.

Очень частным случаем теоремы 8 является неприводимость прямого произведения неприводимых проективных многообразий; см. § 3.

4. Прямые на поверхностях. После усилий, затраченных на доказательство теорем о размерности пересечений, естественно желание узнать и какие-то применения этих теорем. Мы сейчас сделаем это на примере простого вопроса о расположении прямых на поверхностях в $\mathbf{P}^3$.

Понятие размерности, как правило, оказывается полезным, если надо придать строгий смысл тому, что элемент некоторого множества зависит от заданного числа параметров. Для этого надо отождествить множество с некоторым алгебраическим многообразием и применить введенное понятие размерности.

Мы видели, например, что гиперповерхности в $\mathbf{P}^n$, задающиеся уравнением степени m, можно взаимно однозначно сопоставить точкам проективного пространства

$$\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}, \text{ где } \nu_{n,m} = \binom{n+m}{m} - 1 \text{ (см. п. 4 § 4).}$$

Перейдем к подмногообразиям, не являющимся гиперповерхностями, и к простейшим из них — прямым в $\mathbf{P}^3$.

В п. 1 § 4 мы видели (пример 1), что прямые $l \subset \mathbf{P}^3$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками гиперповерхности в $\mathbf{P}^5$, заданной уравнением $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$. Эту гиперповерхность мы обозначим через Π. Очевидно, $\dim \Pi = 4$.

Для исследования прямых, лежащих на поверхностях, важен следующий результат.

Лемма. *Условия того, что прямая l с плюккеровыми координатами p_{ij} принадлежит поверхности X, заданной уравнением $F = 0$, являются алгебраическими соотношениями между p_{ij} и коэффициентами многочлена F, однородными как относительно p_{ij}, так и относительно коэффициентов F.*

Мы можем написать параметрическое представление координат точек прямой l через ее плюккеровы координаты. Пусть x и y — базис плоскости $\mathscr{L} \subset V$, $\dim \mathscr{L} = 2$, $\dim V = 4$. Тогда множество векторов вида

$$xf(y) - yf(x) \tag{1}$$

совпадает, как легко проверить, с $\mathscr{L}$, когда f пробегает все линейные формы на V. Если координаты формы f имеют вид $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, т. е. $f(x) = \sum \alpha_i x_i$, то вектор (1) имеет координаты $z_i = \sum_j \alpha_j p_{ij}$, $p_{ij} = x_i y_j - y_i x_j$. Поэтому точки прямой l, имеющей плюккеровы координаты p_{ij}, имеют координаты $u_i = \sum_j \alpha_j p_{ij}$. Подставляя эти выражения в уравнение $F(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты при всех одночленах относительно α_i, мы получим условие того, что $l \subset X$, в виде алгебраических соотношений между коэффициентами F и координатами p_{ij}.

Перейдем теперь к интересующему нас вопросу о прямых на поверхностях в $\mathbf{P}^3$. Для заданного m рассмотрим пространство $\mathbf{P}^\nu$, $\nu = \nu_{3,m} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$, точки которого взаимно однозначно соответствуют поверхностям степени m (т. е. задаваемым однородным уравнением степени m) в $\mathbf{P}^3$. Обозначим через Γ_m подмножество таких пар $(\xi, \eta) \in \mathbf{P}^\nu \times \Pi$, что прямая l, соответствующая точке $\eta \in \Pi$, содержится в поверхности X, соответствующей точке $\xi \in \mathbf{P}^\nu$. Ввиду леммы Γ_m — проективное многообразие. Определим размерность Γ_m. Для этого рассмотрим отображения проектирования $\varphi(\mathbf{P}^\nu \times \Pi) \to \mathbf{P}^\nu$ и $\psi(\mathbf{P}^\nu \times \Pi) \to \Pi$: $\varphi(\xi, \eta) = \xi$, $\psi(\xi, \eta) = \eta$. Очевидно, что φ и ψ — регулярные отображения. Мы будем дальше рассматривать их только на Γ_m. Заметим, что $\psi(\Gamma_m) = \Pi$. Это значит просто, что через любую прямую проходит хоть одна поверхность степени m, хотя бы приводимая.

Определим размерности слоев $\psi^{-1}(\eta)$ отображения ψ. Сделав проективное преобразование, можно считать, что прямая, соответствующая η, определяется уравнениями $u_0 = 0$, $u_1 = 0$. Точкам $\xi \in \mathbf{P}^\nu$ таким, что $(\xi, \eta) \in \psi^{-1}(\eta) \subset \Gamma_m$, соответствуют поверхности степени m, проходящие через эту прямую. Их уравнение имеет вид $F = 0$, где $F = u_0 G + u_1 H$, а G и H — любые формы степени $m - 1$. Множество таких форм соответствует, конечно, линейному подпространству в $\mathbf{P}^\nu$, размерность которого легко подсчитать. Она равна

$$\mu = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} - 1. \tag{2}$$

Таким образом,

$$\dim \psi^{-1}(\eta) = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} - 1.$$

Из теоремы 8 следует, что Γ_m неприводимо. Применяя теорему 7, мы получаем, что

$$\dim \Gamma_m = \dim \psi(\Gamma_m) + \dim \psi^{-1}(\eta) = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь отображение $\varphi\colon \Gamma_m \to \mathbf{P}^\nu$. Его образ, согласно теореме 2 § 5, является замкнутым подмножеством $\mathbf{P}^\nu$. Очевидно, $\dim \varphi(\Gamma_m) \leqslant \dim \Gamma_m$. Поэтому, если $\dim \Gamma_m < \nu$, то $\varphi(\Gamma_m) \neq \mathbf{P}^\nu$, а это значит, что не на любой поверхности степени m лежит прямая. Неравенство $\dim \Gamma_m < \nu$ ввиду (3) означает $\frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3 < \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$. Оно выполняется, если $m > 3$. Мы получили следующий результат.

Теорема 9. *Для любого $m > 3$ существуют поверхности степени m, не содержащие ни одной прямой. Больше того, таким поверхностям соответствует в пространстве $\mathbf{P}^\nu$ открытое множество.*

Таким образом, существуют нетривиальные алгебраические соотношения между коэффициентами формы $F(u_0, u_1, u_2, u_3)$ степени $m > 3$, необходимые и достаточные для того, чтобы на поверхности, заданной уравнением $F = 0$, лежала хотя бы одна прямая.

Из оставшихся случаев $m = 1, 2, 3$ случай $m = 1$ тривиален. Рассмотрим случай $m = 2$, хотя ответ нам заранее известен из аналитической геометрии.

При $m = 2$, $\nu = 9$ $\dim \Gamma_m = 10$. Из теоремы 7 следует, что $\dim \varphi^{-1}(\xi) \geqslant 1$. Это — хорошо известный факт: на любой поверхности 2-й степени лежит бесконечно много прямых.

Заметим, не входя в детали доказательств, что здесь мы уже встречаемся с явлением подскакивания размерности слоев, о котором будет сказано в п. 5. Действительно, если поверхность 2-го порядка неприводима, то для соответствующей ей точки $\dim \varphi^{-1}(\xi) = 1$, а если она распадается на две плоскости, то, конечно, $\dim \varphi^{-1}(\xi) = 2$.

Рассмотрим теперь случай $m = 3$. В этом случае $\dim \Gamma_m = \nu = 19$. Легко построить кубическую поверхность $X \subset \mathbf{P}^3$, на которой лежит только конечное число прямых. Например, если X задается в неоднородных координатах уравнением

$$T_1 T_2 T_3 = 1, \tag{4}$$

то в $\mathbf{A}^3$ на X не лежит ни одной прямой. Действительно, записав уравнение прямой в параметрической форме $T_i = a_i t + b_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и подставив в (4), мы придем к противоречию. В пересечении же с бесконечно удаленной плоскостью X содержит три прямые. Таким образом, в $\mathbf{P}^{19}$ существуют точки ξ, для которых $\dim \varphi^{-1}(\xi) = 0$. Ввиду теоремы 7 п. 3 это возможно, только если $\dim \varphi(\Gamma_3) = 19$. Применяя теорему 1, мы видим, что $\varphi(\Gamma_3) = \mathbf{P}^{19}$.

Мы доказали следующий результат.

Теорема 10. *На каждой кубической поверхности лежит хотя бы одна прямая. В пространстве $\mathbf{P}^{19}$, точки которого соответствуют всем кубическим поверхностям, существует такое открытое подмножество, что на поверхностях, соответствующих его точкам, лежит конечное число прямых.*

Кубические поверхности, на которых лежит бесконечное число прямых, действительно существуют, например кубические конусы. Таким образом, и здесь размерности слоев могут подскакивать.

Позже мы увидим, однако, что на «большинстве» кубических поверхностей лежит лишь конечное число прямых, и найдем их число.

ЗАДАЧИ

1. Пусть L — $(n-1)$-мерное линейное подпространство в $\mathbf{P}^n$, $X \subset L$ — неприводимое замкнутое многообразие и $y \notin L$. Соединим y прямыми со всеми точками $x \in X$. Множество точек, лежащих на всех этих прямых, обозначим через Y. Доказать, что Y — неприводимое проективное многообразие и $\dim Y = \dim X + 1$.

2. Пусть $X \subset \mathbf{A}^3$ — приводимая кривая, компонентами которой являются три оси координат. Доказать, что идеал $\mathfrak{A}_X$ не может быть порожден двумя элементами.

3. Пусть $X \subset \mathbf{P}^2$ — приводимое нульмерное многообразие, компонентами которого являются три точки, не лежащие на одной прямой. Доказать, что идеал $\mathfrak{A}_X$ не может быть порожден двумя элементами.

4. Доказать, что любое конечное множество точек $S \subset \mathbf{A}^2$ может быть определено двумя уравнениями. Указание. Выбрать систему координат x, y в $\mathbf{A}^2$ так, чтобы точки множества S имели разные координаты x. После этого задать S уравнениями $y = f(x)$, $\prod (x - \alpha_i) = 0$, где $f(x)$ — многочлен.

5. Доказать, что любое конечное множество точек $S \subset \mathbf{P}^2$ можно задать двумя уравнениями.

6. Пусть $X \subset \mathbf{A}^3$ — алгебраическая кривая, x, y, z — координаты в $\mathbf{A}^3$. Доказать, что существует полином $f(x, y)$, отличный от 0 и обращающийся в 0 во всех точках X. Доказать, что все такие полиномы образуют главный идеал $(g(x, y))$, а кривая $g(x, y) = 0$ — замыкание проекции кривой X на плоскость (x, y) параллельно оси z.

7. Мы используем обозначения задачи 6. Пусть $h(x, y, z) = g_0(x, y) z^n + \ldots + g_n(x, y)$ — многочлен наименьшей положительной степени по z в идеале $\mathfrak{A}_X$. Доказать, что если $f \in \mathfrak{A}_X$, степень f по z равна m, то $f \cdot g_0^m = h \cdot U + v(x, y)$ и $v(x, y)$ делится

на $g(x, y)$. Вывести отсюда, что уравнения $h = 0$, $g = 0$ определяют приводимую кривую, состоящую из X и конечного числа прямых, параллельных оси z и определенных уравнениями $g_0(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$.

8. Используя задачи 6 и 7, доказать, что любая кривая $X \subset \mathbf{A}^3$ может быть определена тремя уравнениями.

9. По аналогии с задачами 6—8 доказать, что любая кривая $X \subset \mathbf{P}^3$ может быть определена тремя уравнениями.

10. Пусть $F_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_0, \ldots, x_n)$ — формы степеней $m_0, \ldots, m_n$. Обозначим через Γ подмножество в $\prod_i \mathbf{P}^{\nu_{n,m_i}} \times \mathbf{P}^n$, состоящее из таких наборов $(F_0, \ldots, F_n, x)$, что $F_0(x) = \ldots = F_n(x) = 0$. Доказать, рассматривая проекции $\varphi\colon \Gamma \to \prod \mathbf{P}^{\nu_{n,m_i}}$ и $\psi\colon \Gamma \to \mathbf{P}^n$, что $\dim \Gamma = \dim \varphi(\Gamma) = \sum_i \nu_{n,m_i} - 1$. Вывести из этого, что существует такой многочлен $R(F_0, \ldots, F_n)$ от коэффициентов форм $F_0, \ldots, F_n$, что равенство $R = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $F_0 = \ldots = F_n = 0$ имела ненулевое решение. Чему равен многочлен R, если формы $F_0 \ldots F_n$ линейны?

11. Доказать, что на гиперповерхности Плюккера Π лежат две системы двумерных линейных подпространств. Подпространство первой системы определяется точкой $\xi \in \mathbf{P}^3$ и состоит из всех точек Π, соответствующих прямым $L \subset \mathbf{P}^3$, проходящим через ξ. Подпространство другой системы определяется плоскостью $\Xi \subset \mathbf{P}^3$ и состоит из всех точек на Π, соответствующих прямым $L \subset \mathbf{P}^3$, лежащим в Ξ. Других двумерных линейных подпространств на Π нет.

12. Пусть $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — произвольная форма 4-й степени. Доказать, что существует такой многочлен Φ от коэффициентов формы F, что условие $\Phi = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы на поверхности, определенной уравнением $F = 0$, лежала прямая.

13. Пусть $X \subset \mathbf{P}^3$ — невырожденная поверхность 2-го порядка и $\Lambda_X \subset \Pi$ — множество точек на гиперповерхности Π, соответствующих прямым, лежащим на X. Доказать, что Λ_X состоит из двух непересекающихся прямых.

Глава II

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

§ 1. Простые и особые точки

1. Локальное кольцо точки. В этой главе мы исследуем локальные свойства точек алгебраических многообразий, т. е. свойства точек $x \in X$, которые сохраняются, если заменить X любой окрестностью точки x. Так как любая точка имеет аффинную окрестность, то при изучении локальных свойств точек можно ограничиться аффинными многообразиями.

Основным локальным инвариантом точки x многообразия X является локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ этой точки. Это кольцо состоит из всех функций, каждая из которых регулярна в какой-либо окрестности точки x. Однако, так как разные функции регулярны в разных окрестностях, то это определение требует некоторой осторожности.

Если многообразие X неприводимо, то $\mathcal{O}_x$ есть подкольцо поля $k(X)$, состоящее из всех функций $f \in k(X)$, регулярных в точке x. Вспомнив определение $k(X)$ как поля частных координатного кольца $k[X]$, мы видим, что кольцо $\mathcal{O}_x$ состоит из отношений f/g, $f, g \in k[X]$, $g(x) \neq 0$.

Эта конструкция станет более ясной, если обратить внимание на ее общий и чисто алгебраический характер. Она может быть применена к произвольному коммутативному кольцу A и его простому идеалу $\mathfrak{p}$. При этом возникает новая трудность, связанная с тем, что кольцо A может иметь делители 0.

Рассмотрим множество пар (f, g), $f, g \in A$, $g \notin \mathfrak{p}$, которые мы будем отождествлять по правилу

$$(f, g) = (f', g'),$$

если существует такой элемент $h \in A$, $h \notin \mathfrak{p}$, что

$$h(fg' - gf') = 0. \tag{1}$$

Действия в этом множестве определяются так:

$$(f, g) + (f', g') = (fg' + gf', gg'), \tag{2}$$

$$(f, g)(f', g') = (ff', gg'). \tag{3}$$

на $g(x, y)$. Вывести отсюда, что уравнения $h = 0$, $g = 0$ определяют приводимую кривую, состоящую из X и конечного числа прямых, параллельных оси z и определенных уравнениями $g_0(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$.

8. Используя задачи 6 и 7, доказать, что любая кривая $X \subset \mathbf{A}^3$ может быть определена тремя уравнениями.

9. По аналогии с задачами 6—8 доказать, что любая кривая $X \subset \mathbf{P}^3$ может быть определена тремя уравнениями.

10. Пусть $F_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_0, \ldots, x_n)$ — формы степеней $m_0, \ldots, m_n$. Обозначим через Γ подмножество в $\prod_i \mathbf{P}^{\nu_{n,m_i}} \times \mathbf{P}^n$, состоящее из таких наборов $(F_0, \ldots, F_n, x)$, что $F_0(x) = \ldots = F_n(x) = 0$. Доказать, рассматривая проекции $\varphi\colon \Gamma \to \prod \mathbf{P}^{\nu_{n,m_i}}$ и $\psi\colon \Gamma \to \mathbf{P}^n$, что $\dim \Gamma = \dim \varphi(\Gamma) = \sum_i \nu_{n,m_i} - 1$. Вывести из этого, что существует такой многочлен $R(F_0, \ldots, F_n)$ от коэффициентов форм $F_0, \ldots, F_n$, что равенство $R = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $F_0 = \ldots = F_n = 0$ имела ненулевое решение. Чему равен многочлен R, если формы $F_0 \ldots F_n$ линейны?

11. Доказать, что на гиперповерхности Плюккера Π лежат две системы двумерных линейных подпространств. Подпространство первой системы определяется точкой $\xi \in \mathbf{P}^3$ и состоит из всех точек Π, соответствующих прямым $L \subset \mathbf{P}^3$, проходящим через ξ. Подпространство другой системы определяется плоскостью $\Xi \subset \mathbf{P}^3$ и состоит из всех точек на Π, соответствующих прямым $L \subset \mathbf{P}^3$, лежащим в Ξ. Других двумерных линейных подпространств на Π нет.

12. Пусть $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — произвольная форма 4-й степени. Доказать, что существует такой многочлен Φ от коэффициентов формы F, что условие $\Phi = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы на поверхности, определенной уравнением $F = 0$, лежала прямая.

13. Пусть $X \subset \mathbf{P}^3$ — невырожденная поверхность 2-го порядка и $\Lambda_X \subset \Pi$ — множество точек на гиперповерхности Π, соответствующих прямым, лежащим на X. Доказать, что Λ_X состоит из двух непересекающихся прямых.

Глава II

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

§ 1. Простые и особые точки

1. Локальное кольцо точки. В этой главе мы исследуем локальные свойства точек алгебраических многообразий, т. е. свойства точек $x \in X$, которые сохраняются, если заменить X любой окрестностью точки x. Так как любая точка имеет аффинную окрестность, то при изучении локальных свойств точек можно ограничиться аффинными многообразиями.

Основным локальным инвариантом точки x многообразия X является локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ этой точки. Это кольцо состоит из всех функций, каждая из которых регулярна в какой-либо окрестности точки x. Однако, так как разные функции регулярны в разных окрестностях, то это определение требует некоторой осторожности.

Если многообразие X неприводимо, то $\mathcal{O}_x$ есть подкольцо поля $k(X)$, состоящее из всех функций $f \in k(X)$, регулярных в точке x. Вспомнив определение $k(X)$ как поля частных координатного кольца $k[X]$, мы видим, что кольцо $\mathcal{O}_x$ состоит из отношений f/g, $f, g \in k[X]$, $g(x) \neq 0$.

Эта конструкция станет более ясной, если обратить внимание на ее общий и чисто алгебраический характер. Она может быть применена к произвольному коммутативному кольцу A и его простому идеалу $\mathfrak{p}$. При этом возникает новая трудность, связанная с тем, что кольцо A может иметь делители 0.

Рассмотрим множество пар (f, g), $f, g \in A$, $g \notin \mathfrak{p}$, которые мы будем отождествлять по правилу

$$(f, g) = (f', g'),$$

если существует такой элемент $h \in A$, $h \notin \mathfrak{p}$, что

$$h(fg' - gf') = 0. \tag{1}$$

Действия в этом множестве определяются так:

$$(f, g) + (f', g') = (fg' + gf', gg'), \tag{2}$$

$$(f, g)(f', g') = (ff', gg'). \tag{3}$$

Легко проверить, что таким образом мы получаем кольцо. Оно называется *локальным кольцом* простого идеала $\mathfrak{p}$ и обозначается $A_\mathfrak{p}$.

Отображение $\varphi\colon A\to A_\mathfrak{p}$, $\varphi(h)=(h, 1)$, является гомоморфизмом. Элементы $\varphi(g)$, $g\notin\mathfrak{p}$, обратимы в $A_\mathfrak{p}$ и любой элемент $u\in A_\mathfrak{p}$ записывается в виде $u=\varphi(f)/\varphi(g)$, $g\notin\mathfrak{p}$. Иногда несколько неточно используют запись $u=f/g$. Элементы вида $\varphi(f)/\varphi(g)$, $f\in\mathfrak{p}$, $g\notin\mathfrak{p}$, образуют идеал $\mathfrak{m}\subset A_\mathfrak{p}$, причем любой элемент $u\in A$, $u\notin\mathfrak{m}$ имеет обратный. Поэтому $\mathfrak{m}$ содержит все другие идеалы кольца $A_\mathfrak{p}$.

Мы встречаемся здесь с одним из основных понятий коммутативной алгебры:

Кольцо $\mathcal{O}$ называется *локальным*, если оно обладает идеалом $\mathfrak{m}\subset\mathcal{O}$, $\mathfrak{m}\neq\mathcal{O}$, содержащим все остальные идеалы.

Лемма. *Если кольцо A нетерово, то любое локальное кольцо $A_\mathfrak{p}$ нетерово.*

Действительно, для идеала $\mathfrak{a}\subset A_\mathfrak{p}$ положим $\bar{\mathfrak{a}}=\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$. Это — идеал в A, который согласно предположению имеет конечный базис: $\bar{\mathfrak{a}}=(f_1, \ldots, f_r)$. Если $u\in\mathfrak{a}$, то $u=\varphi(f)/\varphi(g)$, $g\notin\mathfrak{p}$, f, $g\in A$. Отсюда следует, что $f\in\bar{\mathfrak{a}}$, а так как $1/\varphi(g)\in A_\mathfrak{p}$, то $u\in\varphi(\bar{\mathfrak{a}})A_\mathfrak{p}=(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_r))$. Поэтому $\mathfrak{a}=(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_r))$, т. е. имеет конечный базис. Лемма доказана.

Если $A=k[X]$, где X — аффинное многообразие, и $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_x$, $x\in X$, то кольцо $A_\mathfrak{p}$ называется *локальным кольцом точки* x и обозначается $\mathcal{O}_x$. Согласно лемме оно нетерово.

Для каждой пары (f, g), определяющей элемент кольца $\mathcal{O}_x$, функция f/g регулярна в окрестности $D(g)$ точки x. Правило (1) означает, что мы отождествляем в $\mathcal{O}_x$ функции, совпадающие в некоторой окрестности точки x (в данном случае $D(h)$). Таким образом, $\mathcal{O}_x$ можно определить и как кольцо, элементами которого являются регулярные функции на различных окрестностях точки x, с указанным правилом отождествления. Это определение уже не зависит от выбора какой-либо аффинной окрестности U точки x.

Выберем, в частности, многообразие U так, чтобы все его неприводимые компоненты проходили через точку x.

Тогда функция f, равная 0 на некоторой окрестности $V\subset U$ точки x, будет равна 0 на всем U. Поэтому гомоморфизм $\varphi\colon k[U]\to\mathcal{O}_x$ является вложением, и мы будем отождествлять $k[U]$ с подкольцом кольца $\mathcal{O}_x$. В этом случае можно отбросить множитель h в правиле отождествления (1). Иначе говоря, $\mathcal{O}_x$ состоит из функций на U без всяких отождествлений и все функции $\varphi\in\mathcal{O}_x$ имеют вид f/g, f, $g\in k[U]$, $g(x)\neq 0$.

Аналогичная конструкция применима к любому неприводимому подмногообразию Y аффинного многообразия X. Здесь надо положить $A=k[X]$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_Y$. Локальное кольцо $A_\mathfrak{p}=\mathcal{O}_Y$ называется в этом случае локальным кольцом неприводимого подмногообразия Y. В случае, если многообразие X неприводимо, $\mathcal{O}_Y\subset k(X)$ и состоит из рациональных функций, регулярных хоть в одной точке многообразия Y (и, значит, на целом его открытом подмножестве). Максимальный идеал $\mathfrak{m}_Y\subset\mathcal{O}_Y$ состоит из функций, обращающихся в 0 на Y, а поле $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_Y$ изоморфно $k(Y)$.

Переход к случаю неприводимого замкнутого подмногообразия Y произвольного квазипроективного многообразия X так же очевиден, как и в случае, когда Y — точка. Локальное кольцо $\mathcal{O}_Y$ определяется в этом случае как локальное кольцо подмногообразия $Y\cap U$ в U, где U — любое открытое аффинное множество такое, что $Y\cap U\neq\varnothing$. Это локальное кольцо не зависит от выбора U.

2. Касательное пространство. Мы определим касательное пространство в точке x аффинного многообразия X как совокупность прямых, проходящих через x и касающихся X. Чтобы определить касание прямой $L\subset\mathbf{A}^N$ многообразия $X\subset\mathbf{A}^N$, предположим, что система координат в $\mathbf{A}^N$ выбрана так, что $x=(0, \ldots, 0)=O$. Тогда $L=\{ta,\ t\in k\}$, где a — фиксированная точка $a\neq O$. Чтобы исследовать пересечение X с L, предположим, что X задано системой уравнений $F_1=\ldots=F_m=0$, причем $\mathfrak{A}_X=(F_1, \ldots, F_m)$.

Множество $X\cap L$ определится тогда уравнениями $F_1(ta)=\ldots=F_m(ta)=0$. Так как мы имеем теперь дело с многочленами от одного переменного t, то их общие корни являются корнями их наибольшего общего делителя. Пусть

$$f(t)=\text{НОД}\,(F_1(ta), \ldots, F_m(ta)),\qquad f(t)=c\prod(t-\alpha_i)^{k_i}. \tag{1}$$

Значения $t=\alpha_i$ соответствуют точкам пересечения прямой L с многообразием X. Заметим, что в (1) значения $t=\alpha_i$ снабжены кратностями k_i, которые естественно интерпретировать как кратности пересечения прямой L с X. В частности, так как $L\cap X\ni O$, то в (1) имеется корень $t=0$. Мы приходим к следующим определениям.

Определение 1. *Кратностью пересечения* в точке O прямой L и многообразия X называется кратность корня $t=0$ в многочлене $f(t)=\text{НОД}(F_1(ta), \ldots, F_m(ta))$.

Таким образом, эта кратность равна наибольшей степени t, на которую делятся все многочлены $F_i(ta)$. По определению она не меньше единицы.

Если многочлены $F_i(ta)$ тождественно равны 0, то кратность пересечения считается равной $+\infty$.

Очевидно, что $f(t)=\text{НОД}(F(ta),\ F\in\mathfrak{A}_X)$, и поэтому кратность не зависит от выбора образующих F_i в идеале $\mathfrak{A}_X$.

Определение 2. *Прямая L касается* многообразия X в точке O, если кратность их пересечения в этой точке больше единицы.

Запишем условия касания прямой L и X. Так как $X\ni O$, то свободные члены всех многочленов $F_i(T)$ равны 0. Обозначим через L_i их линейные части, так что $F_i=L_i+G_i$ $(i=1, \ldots, m)$, где G_i содержат только члены степени $\geqslant 2$. Тогда $F_i(at)=tL_i(a)+G_i(ta)$, причем $G_i(ta)$ делится на t^2. Поэтому $F_i(at)$ делится на t^2 тогда и только тогда, когда $L_i(a)=0$. Условие касания имеет вид

$$L_1(a)=\ldots=L_m(a)=0. \tag{2}$$

Определение 3. Геометрическое место точек прямых, касающихся X в точке x, называется *касательным пространством в точке x*. Оно обозначается через Θ_x или, если надо подчеркнуть, о каком многообразии X идет речь, через $\Theta_{x,X}$.

Уравнения (2), таким образом, являются уравнениями касательного пространства. Они показывают, что Θ_x — линейное подпространство.

Пример 1. Касательное пространство к пространству $\mathbf{A}^n$ в любой его точке совпадает с $\mathbf{A}^n$.

Пример 2. Пусть $X\subset\mathbf{A}^n$ является гиперповерхностью и $\mathfrak{A}_X=(F)$. Если $X\ni 0$ и $F=L+G$ (в принятых раньше обозначениях), то Θ_0 определяется одним уравнением $L(T_1, \ldots, T_n)=0$. Поэтому, если $L\neq 0$, то $\dim\Theta_0=n-1$, а если $L=0$, то $\Theta_0=\mathbf{A}^n$ и $\dim\Theta_0=n$.

Очевидно, что $L=\sum\frac{\partial F}{\partial x_i}(0)\,x_i$, так что при $n=2$ наше определение совпадает с тем, которым мы пользовались в п. 5 § 1.

Пример 3. Касательное пространство к кривой $y(y-x^2)=0$ в $\mathbf{A}^2$ в точке $(0, 0)$ совпадает с $\mathbf{A}^2$ (хотя обе ее компоненты имеют общую касательную $y=0$).

3. Инвариантность касательного пространства. Определение 3 п. 2 дано в терминах уравнений многообразия X. Поэтому не очевидно, что при изоморфизме $f\colon X\to Y$ касательные пространства точек x и $f(x)$ изоморфны (т. е. имеют одинаковую размерность). Мы покажем, что это так, и для этого переформулируем понятие касательного пространства так, чтобы оно зависело только от алгебры $k[X]$.

Напомним некоторые определения. Для полинома $F(T_1, \ldots, T_N)$ и точки $x=(x_1, \ldots, x_N)$ имеет место разложение Тейлора $F(T)=F(x)+F_1(T)+F_2(T)+\ldots+F_k(T)$, где F_i — однородные многочлены степени i от переменных T_j-x_j. Линейная форма F_1 называется *дифференциалом многочлена* F в точке x и обозначается dF или d_xF. При этом

$$d_xF=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial T_i}\right)(x)\,(T_i-x_i).$$

Из определения следует, что

$$\begin{aligned} d_x(F+G)&=d_xF+d_xG,\\ d_x(FG)&=F(x)\,d_xG+G(x)\,d_xF.\end{aligned} \tag{1}$$

Пользуясь этими обозначениями, мы можем записать уравнения (2) п. 2 касательного пространства в точке x многообразия X в виде

$$d_xF_1=\ldots=d_xF_m=0, \tag{2}$$

или

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_j}{\partial T_i}\right)(x)\,(T_i-x_i)=0,\quad j=1, \ldots, m, \tag{3}$$

где $\mathfrak{A}_X=(F_1, \ldots, F_m)$. Пусть $g\in k[X]$ и определяется некоторым многочленом G, ограниченным на X. Если бы мы положили $d_xg=d_xG$, то ответ зависел бы от выбора многочлена G и, точнее говоря, был бы определен только с точностью до слагаемого d_xF, $F \in \mathfrak{A}_X$. Так как $\mathfrak{A}_X = (F_1, \ldots, F_m)$, то $F = G_1F_1 + \ldots + G_mF_m$ и ввиду (1) и того, что $F_i(x) = 0$, мы получаем, что $d_xF = G_1(x)\,d_xF_1 + \ldots + G_m(x)\,d_xF_m$. Учитывая (2), мы видим, что все линейные формы d_xF, $F \in \mathfrak{A}_X$, равны 0 на Θ_x, и поэтому, если мы обозначим через d_xg ограничение линейной формы d_xG на пространстве Θ_x:

$$d_xg = d_xG\,|_{\Theta_x}, \tag{4}$$

то сопоставим любой функции $g \in \mathrm{k}[X]$ однозначно определенную линейную форму на Θ_x.

Определение. Линейная функция d_xg, определенная равенством (4), называется *дифференциалом функции g в точке x.*

Очевидно, что

$$d_x(f+g) = d_xf + d_xg, \quad d_x(fg) = f(x)\,d_xg + g(x)\,d_xf. \tag{5}$$

Таким образом, мы имеем гомоморфизм d_x: $\mathrm{k}[X] \to \Theta_x^*$, где Θ_x^* — пространство линейных форм на Θ_x. Так как $d_x\alpha = 0$ для $\alpha \in \mathrm{k}$, то мы можем заменить изучение этого гомоморфизма изучением d_x: $\mathfrak{m}_x \to \Theta_x^*$, где $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathrm{k}[X];\ f(x) = 0\}$. Очевидно, что $\mathfrak{m}_x$ является идеалом кольца $\mathrm{k}[X]$.

Теорема 1. *Гомоморфизм d_x определяет изоморфизм пространств $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и Θ_x^*.*

Нам надо доказать, что $\operatorname{Im} d_x = \Theta_x^*$, $\operatorname{Ker} d_x = \mathfrak{m}_x^2$. Первое очевидно: любая линейная форма φ на Θ_x индуцируется некоторой линейной функцией f на $\mathbf{A}^n$ и $d_xf = \varphi$. Для доказательства второго утверждения предположим, что $x = (0, \ldots, 0)$, $d_xg = 0$, $g \in \mathfrak{m}_x$. Пусть g индуцируется многочленом $G \in \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_N]$. По условию линейная форма d_xG равна 0 на Θ_x и, значит, является линейной комбинацией уравнений (2) этого подпространства:

$$d_xG = \lambda_1 d_xF_1 + \ldots + \lambda_m d_xF_m.$$

Положим $G_1 = G - \lambda_1F_1 - \ldots - \lambda_mF_m$. Мы видим, что G_1 не содержит членов 0-й и 1-й степеней относительно $T_1, \ldots, T_n$, и, значит, $G_1 \in (T_1, \ldots, T_n)^2$. Далее $G_1|_X = G|_X = g$ и, значит, $g \in (t_1, \ldots, t_N)^2$, где $t_i = T_i|_X$. Так как, очевидно, $\mathfrak{m}_x = (t_1, \ldots, t_N)$, то это и доказывает теорему.

Как известно, если L — линейное пространство и $M = L^*$ — пространство всех линейных функций на L, то L можно отождествить с пространством всех линейных функций на M, т. е. $L = M^*$. Применяя это к нашей ситуации, получаем

Следствие 1. *Касательное пространство в точке x изоморфно пространству линейных функций на $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.*

Пространство $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ называется *кокасательным пространством.*

Отсюда можно сделать вывод о поведении касательного пространства при регулярных отображениях многообразий. Пусть f: $X \to Y$ — такое отображение и $f(x) = y$. Оно определяет отображение f^*: $\mathrm{k}[Y] \to \mathrm{k}[X]$, причем, очевидно, $f^*(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$, $f^*(\mathfrak{m}_y^2) \subset \mathfrak{m}_x^2$, так что определено отображение f^*: $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Линейные функции, как и любые функции, отображаются в обратную сторону, а так как, согласно следствию 1, пространства $\Theta_{x,X}$ и $\Theta_{y,Y}$ изоморфны пространствам линейных функций на $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ соответственно, то мы приходим к отображению $\Theta_{x,X} \to \Theta_{y,Y}$. Это отображение называется дифференциалом отображения f и обозначается через d_xf.

Легко проверить, что если g: $Y \to Z$ — другое регулярное отображение и $z = g(y)$, то для отображения $d(g \cdot f)$: $\Theta_{x,X} \to \Theta_{z,Z}$ имеет место соотношение $d(g \cdot f) = dg \cdot df$. Если f — тождественное отображение $X \to X$, то для любой точки $x \in X$ и d_xf является тождественным отображением пространства Θ_x. Из этих замечаний вытекает

Следствие 2. *При изоморфизме многообразий касательные пространства соответствующих точек отображаются изоморфно. В частности, размерность касательного пространства инвариантна при изоморфизмах.*

Теорема 2. *Касательное пространство $\Theta_{x,X}$ является локальным инвариантом точки x многообразия X, а именно двойственно пространству $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_x$ точки x.*

Мы покажем, как определить Θ_x в терминах локального кольца $\mathcal{O}_x$ точки x. Напомним, что дифференциал рациональной функции $\frac{F}{G}$, $F, G \in \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n]$, определяется как

$$d_x\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{G(x)\,d_xF - F(x)\,d_xG}{G^2(x)}, \quad G(x) \neq 0.$$

Функцию $f \in \mathcal{O}_x$ можно рассматривать как ограничение на X рациональной функции $\frac{F}{G}$ и определить дифференциал как $d_x f = d_x\left(\frac{F}{G}\right)\Big|_{\Theta_x}$. Все рассуждения, предшествующие теореме 1, а также ее доказательство сохраняют силу, и мы получаем, что d_x определяет изоморфизм $d_x\colon \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to \Theta_x^*$, где теперь $\mathfrak{m}_x$ обозначает максимальный идеал кольца $\mathcal{O}_x$: $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{O}_x;\ f(x) = 0\}$. Это доказывает теорему 2.

Определим *касательное пространство* Θ_x *в точке* x любого квазипроективного многообразия X как $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$, где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_x$ точки x. Ввиду теоремы 2 оно будет также касательным пространством в точке x любой ее аффинной окрестности.

Таким образом, касательное пространство определено как «абстрактное» векторное пространство, не реализованное в виде подпространства в каком-либо большем пространстве. Однако если X аффинно и $X \subset \mathbf{A}^N$, то вложение i многообразия X в $\mathbf{A}^N$ определяет вложение di: $\Theta_{x,X}$ в $\Theta_{x,\mathbf{A}^N}$. Так как $\Theta_{x,\mathbf{A}^N}$ можно отождествить с $\mathbf{A}^N$, то мы можем считать $\Theta_{x,X}$ вложенным в $\mathbf{A}^N$ и возвращаемся к определению, данному в п. 2.

Если X проективно и $X \subset \mathbf{P}^N$, $x \in X$ и $x \in \mathbf{A}_i^N$, то $\Theta_{x,X}$ содержится в $\mathbf{A}_i^N$. Замыкание $\Theta_{x,X}$ в $\mathbf{P}^N$ не зависит от выбора открытого аффинного множества $\mathbf{A}_i^N$. Хотя при этом один и тот же термин относится к двум разным объектам, $\overline{\Theta}_{x,X} \subset \mathbf{P}^N$ тоже иногда называется касательным пространством к X в точке x.

Обычная проверка показывает, что уравнения пространства $\overline{\Theta}_{x,X}$ имеют вид

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \xi_i}(x)\,\xi_i = 0,$$

где $\{F_\alpha\}$ — однородный базис идеала многообразия X.

Инвариантность касательного пространства дает возможность ответить на некоторые вопросы о вложениях многообразий в аффинные пространства. Например, если точка $x \in X$ такова, что $\dim \Theta_x = N$, то X не изоморфно никакому подмногообразию аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ с $n < N$: изоморфизм $f\colon X \to Y \subset \mathbf{A}^n$ переводил бы Θ_x в изоморфное пространство $\Theta_{f(x)} \subset \mathbf{A}^n$. Исходя из этого, можно для любого $n > 1$ построить пример кривой $X \subset \mathbf{A}^n$, которая неизоморфна кривой $Y \subset \mathbf{A}^m$ с $m < n$. Именно X есть образ $\mathbf{A}^1$ при отображении

$$x_1 = t^n, \quad x_2 = t^{n+1}, \ \ldots, \ x_n = t^{2n-1}. \tag{6}$$

Достаточно доказать, что для $x = (0, \ldots, 0)$ $\Theta_{x,X} = \mathbf{A}^n$. Это означает, что все многочлены $F \in \mathfrak{A}_X$ не содержат линейных членов относительно $T_1, \ldots, T_n$. Пусть $F \in \mathfrak{A}_X$ и $F = \sum_{i=1}^{n} a_i T_i + G$, $G \in (T_1, \ldots, T_n)^2$. Подставляя в F уравнения (1), мы можем получить, что $\sum_{i=1}^{n} a_i t^{n+i-1} + G(t^n, t^{n+1}, \ldots, t^{2n-1}) = 0$ тождественно по t. Но это невозможно, если хоть одно $a_i \neq 0$, так как члены $a_i t^{n+i-1}$ имеют степени $\leqslant 2n-1$, а члены, возникающие из $G(t^n, \ldots, t^{2n-1})$, — степень $\geqslant 2n$, и они не могут сократиться.

Как следует из приведенного доказательства, никакая окрестность точки x на кривой X не изоморфна квазипроективному подмногообразию в $\mathbf{A}^m$ с $m < n$.

Рассмотрим примеры касательных пространств. Прежде всего, дадим интерпретацию касательного пространства в точке $q \in \mathbf{P}(V)$ проективного пространства. Касательное пространство $\Theta_{v,V}$ для $v \in V$ естественно отождествляется с V ($\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$ отождествляется с пространством линейных функций, т. е. с V^*). Отображение $\pi\colon V \setminus 0 \to \mathbf{P}(V)$, $\pi(\xi_0, \ldots, \xi_n) = (\xi_0 : \ldots : \xi_n)$, имеет дифференциал $d_v\pi\colon \Theta_{v,V} = V \to \Theta_{\pi(v),\mathbf{P}(V)}$. Если $\xi_0 \neq 0$ в точке v, то в координатах $x_i = \frac{\xi_i}{\xi_0}$ функция $\varphi \in \Theta_{v,V}$ переходит в функцию $\psi = (d_v\pi)(\varphi)$ на $\mathfrak{m}_{\pi(v)}/\mathfrak{m}_{\pi(v)}^2$, для которой $\psi(x_i) = \varphi d_v\left(\frac{\xi_i}{\xi_0}\right) = \frac{\xi_i \varphi(\xi_0) - \xi_0 \varphi(\xi_i)}{\xi_0^2}$. Отсюда следует, что образ отображения $d_v\pi$ совпадает со всем $\Theta_{\pi(v)\mathbf{P}(V)}$, а ядро его состоит из векторов $(\eta_0, \ldots, \eta_n)$, для которых $\xi_i\eta_0 = \xi_0\eta_i$, т. е. из векторов, пропорциональных $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$.

Таким образом, для $\xi \in \mathbf{P}(V)$

$$\Theta_{\xi,\mathbf{P}(V)} \simeq V/l_\xi, \tag{7}$$

где $l_\xi = \pi^{-1}(\xi)$ — прямая в V, соответствующая точке $\xi \in \mathbf{P}(V)$.

Исходя из этого, мы можем сказать, что если $X \subset \mathbf{P}(V)$ — проективное многообразие, определенное системой однородных уравнений, а $\tilde{X} \subset V$ — конус, определенный теми же уравнениями в V, то $\Theta_{x,X} \simeq \Theta_{\tilde{x},\tilde{X}}/l_x$, где $x = \pi(\tilde{x})$, а l_x имеет тот же смысл, что и в (7). Эту интерпретацию мы применим к алгебраическим многообразиям, рассмотренным в примерах 1, 2 и 3 п. 1 § 4 гл. I.

Пример 1. *Грассманово многообразие*. Мы рассмотрим здесь лишь многообразие $X = G(2, n)$. Оно задается уравнениями $x^2 = x \wedge x = 0$ в $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$. Дифференцируя эти уравнения, мы получим, что касательное пространство к многообразию $\tilde{X} \subset \Lambda^2 V$ в точке x состоит из тех $y \in \Lambda^2 V$, для которых

$$x \wedge y = 0. \tag{8}$$

Пусть x соответствует плоскости $L \subset V$, т. е. $\Lambda^2 L = \mathrm{k}x$, а $f \in \mathrm{Hom}(L, V/L)$. Тогда легко проверить, что для любого базиса e_1, e_2 плоскости L бивектор $y = e_1 \wedge f(e_2) - e_2 \wedge f(e_1)$ однозначно определен в $\Lambda^2 V/\mathrm{k}x$, с точностью до множителя не зависит от выбора базиса в L и удовлетворяет (8). Кроме того, любое решение (8) таким образом получается. Мы видим, что

$$\Theta_{x,\,G(2,\,V)} \simeq \mathrm{Hom}(L, V/L), \qquad x \in \Lambda^2 L. \tag{9}$$

Позже мы докажем аналогичное соотношение для любого $G(r, V)$ и дадим его интерпретацию.

Замечание. При выводе соотношения (9) мы исходили из того, что многообразие $G(2, V)$ задается системой уравнений $x \wedge x = 0$. Однако, чтобы применить определение касательного пространства из п. 2, нам надо было бы знать, что эти уравнения не только определяют $X = G(2, V)$ теоретико-множественно, но и порождают его идеал $\mathfrak{A}_X$. Пока же мы можем лишь утверждать, что если обозначить уравнения $x \wedge x = 0$ через $F_1 = \ldots = F_m = 0$, то пространство, определенное уравнениями $\sum \frac{\partial F_i}{\partial T_j}(T_j - x_i) = 0$ (после ограничения некоторой аффинной картой пространства $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$), изоморфно $\mathrm{Hom}(L, V/L)$. Из этого уже нетрудно вывести, что $\mathfrak{A}_X = (F_1, \ldots, F_m)$ и, значит, соотношение (9) верно безо всяких оговорок (см. задачу 15 к § 3).

Пример 2. *Многообразие ассоциативных алгебр*. Дифференцируя соотношение (7) п. 1 § 4 гл. I, мы видим, что касательное пространство определяется уравнениями

$$\sum_l \left(\alpha_{ij}^l x_{lk}^m + \alpha_{lk}^m x_{ij}^l\right) = \sum_l \left(\alpha_{il}^m x_{jk}^l + \alpha_{jk}^l x_{il}^m\right). \tag{10}$$

Пусть $x_{ij}^m = \eta_{ij}^m$ удовлетворяют этим уравнениям. Рассмотрим билинейную функцию $f(x, y)$, $x, y \in A$, для которой $f(e_i, e_j) = \sum_m \eta_{ij}^m e_m$. Соотношения (10) принимают тогда вид

$$xf(y, z) + f(x, yz) = f(xy, z) + f(x, y)z$$

для всех $x, y, z \in A$. Такие функции называются *двумерными коциклами на алгебре A*. Таким образом, касательное пространство к многообразию алгебр в точке, соответствующей алгебре A, изоморфно пространству двумерных коциклов на этой алгебре.

Замечание. Как и в примере 1, мы исходили из уравнений (7) п. 1 § 4 гл. I, которые определяют многообразие ассоциативных алгебр лишь теоретико-множественно. По-видимому, неизвестно, порождают ли левые части этих уравнений идеал многообразия. Известно, что это не так для алгебр Ли, и правдоподобно, что так же обстоит дело и для ассоциативных алгебр. Таким образом, пространство коциклов совпадает с касательным пространством к многообразию алгебр лишь для тех значений размерности n, для которых уравнения (7) п. 1 § 4 гл. I порождают идеал многообразия алгебр (или для тех его компонент, для которых это имеет место). Однако соотношения ассоциативности (т. е. уравнения (7) п. 1 § 4 гл. I) столь естественны, что всякая извлеченная из них информация должна иметь какой-то смысл. В частности, об истолковании пространства коциклов см. т. II, гл. V, § 3, п. 4.

Пример 3. *Многообразие квадрик*. В пространстве $\mathbf{P}(V)$, где V — пространство симметрических матриц, рассмотрим многообразие Δ с уравнением $\det A = 0$, $A \in V$. Легко доказать, что многочлен $\det A$, где $A = (x_{ij})$, $x_{ij} = x_{ji}$ — независимые переменные, неприводим, так что Δ — неприводимая гиперповерхность. Касательное пространство к $\tilde{\Delta}$ в точке A состоит из матриц $B \in V$, для которых $\left(\frac{d}{dt}\det(A + tB)\right)\Big|_{t=0} = 0$. Так как $\frac{d}{dt}(\det(A + tB))|_{t=0} = \det A_1 + \ldots + \det A_n$, где матрица A_i получается заменой в A i-й строки на i-ю строку матрицы B, то это выражение равно 0, если ранг $A < n-1$. Для этих точек $\Theta_{A,\Delta} = \mathbf{P}(V)$. Пусть ранг A равен $n-1$. Преобразования $A \to C^\tau AC$, $\det C \neq 0$, определяют, очевидно, автоморфизмы многообразия Δ. При помощи такого преобразования можно перевести форму f, соответствующую матрице A, в форму $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$. Поэтому можно считать, что $f = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$, и тогда то же рассуждение показывает, что $\frac{d}{dt}(\det(A + tB))|_{t=0}$ равняется коэффициенту b_{nn} матрицы B. Поэтому для таких точек касательное пространство $\Theta_{A,\Delta}$ отождествляется с пространством матриц $B \in V$, для которых $b_{nn} = 0$, т. е. пространством квадрик, проходящих через вершину квадрики $f = 0$.

4. Особые точки. Мы выясним теперь, что можно сказать о размерностях касательных пространств точек неприводимого квазипроективного многообразия X. Наш результат будет носить локальный характер, и поэтому мы ограничимся рассмотрением аффинных многообразий.

Пусть $X \subset \mathbf{A}^N$ — неприводимое многообразие. В прямом произведении $\mathbf{A}^N \times X$ рассмотрим множество Θ таких пар (a, x), $a \in \mathbf{A}^N$, $x \in X$, что $a \in \Theta_x$. Уравнения (2) п. 3 показывают, что Θ замкнуто в $\mathbf{A}^N \times X$. Обозначим через π проекцию $\Theta \to X$: $\pi(a, x) = x$. Очевидно, что $\pi(\Theta) = X$, $\pi^{-1}(x) = \{\pi(a, x);\ a \in \Theta_x\}$. Таким образом, Θ расслаивается на касательные пространства к X в различных точках $x \in X$. Многообразие Θ называется *касательным расслоением* многообразия X. Применяя к Θ теорему о размерностях слоев отображения (теорема 7 § 6 гл. I и следствие), мы видим, что существует такое число s, что $\dim \Theta_x \geqslant s$, и точки $y \in X$, для которых $\dim \Theta_y > s$, образуют замкнутое подмножество X, отличное от X (т. е. подмногообразие меньшего числа измерений).

Определение. Точки x неприводимого многообразия X, для которых $\dim \Theta_x = s = \min \dim \Theta_y$, называются *простыми точками*; остальные точки — *особыми*.

Многообразие, для которого точка x простая, называется неособым в этой точке. Многообразие, все точки которого простые, называется гладким. Как мы только что видели, простые точки образуют открытое непустое подмножество, а особые — замкнутое собственное подмножество многообразия X.

Рассмотрим пример гиперповерхности (пример 2 п. 2), содержащий (при $n = 2$) случай плоских алгебраических кривых, рассмотренный в § 1 гл. I. Если $\mathfrak{A}_X = (F)$, то уравнение касательного пространства в точке x имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial T_i}\right)(x)(T_i - x_i) = 0.$$

Докажем, что в этом случае $s = \min \dim \Theta_y = n-1$. Очевидно, это равносильно тому, что $\frac{\partial F}{\partial T_i}$ не обращаются одновременно в 0 на X. При характеристике 0 это означало бы, что F — постоянная, а при характеристике $p > 0$,— что все переменные входят в F в степенях, кратных p. Но тогда (ввиду алгебраической замкнутости поля k) $F = F_1^p$, а это противоречит тому, что $\mathfrak{A}_X = (F)$. Таким образом, в нашем примере для простых точек $x \in X$ $\dim \Theta_x = \dim X = n-1$. Мы покажем, что так же обстоит дело с произвольным неприводимым многообразием и что общий случай может быть сведен к примеру гиперповерхности.

Теорема 3. *Размерность касательного пространства в простой точке равна размерности многообразия.*

Ввиду определения простой точки теорема утверждает, что для всех точек x неприводимого многообразия X $\dim \Theta_x \geqslant \dim X$, и множество точек x, для которых $\dim \Theta_x = \dim X$, открыто и не пусто. Очевидно, что это — локальное утверждение, и нам достаточно рассматривать случай аффинного многообразия. Мы видели, что существует такое число s, что $\dim \Theta_x \geqslant s$ для всех $x \in X$, и множество точек, для которых $\dim \Theta_x = s$, открыто и не пусто. Нам остается доказать, что $s = \dim X$. Воспользуемся теперь теоремой 6 § 3 гл. I, которая утверждает, что X бирационально изоморфно гиперповерхности Y.

Пусть φ: $X \to Y$ — соответствующий бирациональный изоморфизм. Согласно предложению в п. 3 § 4 гл. I существуют такие открытые и непустые множества $U \subset X$ и $V \subset Y$, что φ определяет изоморфизм между ними. Ввиду замечаний, сделанных перед формулировкой теоремы, множество W простых точек многообразия Y открыто и для $y \in W$, $\dim \Theta_y = \dim Y = \dim X$. Множество $W \cap V$ также открыто и не пусто, и, значит, открыто и не пусто множество $\varphi^{-1}(W \cap V) \subset U$. Так как размерность касательного пространства сохраняется при изоморфизме, то для $x \in \varphi^{-1}(W \cap U)$, $\dim \Theta_x = \dim X$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь приводимые многообразия. Для них перестает быть верным даже неравенство $\dim \Theta_x \geqslant \dim X$. Если, например, $X = X_1 \cup X_2$, $\dim X_1 = 1$, $\dim X_2 = 2$, $x \notin X_2$, $x \in X_1$ и является на X_1 простой точкой, то $\dim \Theta_x = 1$ и $\dim X = 2$. Это и естественно — компоненты многообразия X, не проходящие через точку x, влияют на размерность X и не изменяют пространства Θ_x. Поэтому естественно ввести следующее понятие: *размерностью* $\dim_x X$ *многообразия* X *в точке* x называется максимум размерностей неприводимых компонент многообразия X, проходящих через x. Очевидно, $\dim X = \max\limits_{x \in X} \dim_x X$.

Определение. Точка x аффинного многообразия X называется *простой*, если $\dim \Theta_x = \dim_x X$.

Из теоремы 3 следует, что для любой точки $x \in X$ $\dim \Theta_x \geqslant \dim_x X$. Действительно, если X^i $(i = 1, \ldots, s)$ — неприводимые компоненты многообразия X, проходящие через точку x, а Θ_x^i — касательные пространства к X^i в этой точке, $\dim \Theta_x^i \geqslant \dim X^i$, $\Theta_x^i \subset \Theta_x$, и поэтому $\dim \Theta_x \geqslant \max\limits_i \dim \Theta_x^i \geqslant \max\limits_i \dim X^i = \dim_x X$.

Точно так же из теоремы 3 следует, что особые точки содержатся в подмногообразии меньшего числа измерений многообразия X.

Переход к произвольному квазипроективному многообразию очевиден: точка $x \in X$ называется простой, если она проста на аффинной окрестности $U \ni x$. Это равносильно тому, что $\dim \Theta_x = \dim_x X$.

Многообразие, все точки которого простые, называется *гладким*.

С примерами особых точек плоских кривых мы встречались в § 1 гл. I. Рассмотрим сейчас квадрики в $\mathbf{P}^n$. Такая квадрика Q имеет в некоторой системе координат уравнение $x_0^2 + \ldots + x_r^2 = 0$, $r \leqslant n$ (мы предполагаем здесь, что характеристика поля k отлична от 2). Ее особые точки характеризуются условием $x_0 = \ldots = x_r = 0$, и если $r = n$, то их нет. Если $r < n$, то особые точки образуют линейное подпространство $L \subset \mathbf{P}^n$ размерности $n - r - 1$. Пересечение Q с подпространством размерности r, определяемым уравнениями $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$, является неособой квадрикой S в $\mathbf{P}^r$. Для любой точки $q = (\alpha_0 : \ldots : \alpha_n) \in Q$ точка $s = (\alpha_0 : \ldots : \alpha_r) \in S$. Если точка s фиксирована, то точки q с произвольными $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ образуют $(n - r)$-мерное подпространство, натянутое на s и L. Эти подпространства заметают Q. Поэтому говорят, что Q является конусом с вершиной — подпространством L над неособой квадрикой S.

Пример 5 п. 1 § 6 показывает, что $\dim G(r, n) = r(n - r)$, что $G(r, n)$ гладко и рационально. Точно так же в пространстве квадрик (пример 3) открытое множество детерминантной поверхности, состоящее из квадрик ранга $n - 1$, гладко. В случае многообразия ассоциативных алгебр (пример 2) положение более сложное — существуют как простые, так и особые точки (т. е. «простые» и «особые» алгебры).

5. Касательный конус. Самым простым инвариантом, измеряющим отклонение особой точки от простых, является размерность ее касательного пространства. Однако существует гораздо более тонкий инвариант — касательный конус к X в особой точке x. Дальше это понятие нам не понадобится. Поэтому мы предоставим подробное проведение дальнейших рассуждений читателю в качестве упражнения (очень простого).

Пусть X — аффинное неприводимое многообразие. Касательный конус к X в точке $x \in X$ будет состоять из прямых, проходящих через x, которые мы определим как аналог предельных положений секущих в дифференциальной геометрии.

Предположим, что $X \subset \mathbf{A}^N$, $x = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbf{A}^N$ превращено в векторное пространство за счет выбора начала координат в x. Рассмотрим в $\mathbf{A}^{N+1} = \mathbf{A}^N \times \mathbf{A}^1$ множество $\tilde{X}$ таких пар (a, t), $a \in \mathbf{A}^N$, $t \in \mathbf{A}^1$, что $a \cdot t \in X$. Как всегда, мы имеем две проекции: $\varphi\colon \tilde{X} \to \mathbf{A}^1$ и $\psi\colon \tilde{X} \to \mathbf{A}^N$. Очевидно, что $\tilde{X}$ замкнуто в $\mathbf{A}^{N+1}$. Легко видеть, что оно приводимо (если $X \neq \mathbf{A}^N$) и состоит из двух компонент: $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$; $\tilde{X}_2 = \{(a, 0);\ a \in \mathbf{A}^N\}$, $\tilde{X}_1$ совпадает с замыканием $\varphi^{-1}(\mathbf{A}^1 - (0))$ в $\tilde{X}$. Обозначим через φ_1 и ψ_1 ограничения отображений φ и ψ на $\tilde{X}_1$. Множество $\psi_1(\tilde{X}_1)$ является замыканием множества точек на всех секущих многообразия X, проходящих через точку x. Множество $T_x = \psi_1 \varphi_1^{-1}(0)$ называется *касательным конусом* к X в точке x.

Легко выписать уравнения касательного конуса. Уравнения $\tilde{X}$ имеют вид

$$F(at) = 0, \quad F \in \mathfrak{A}_X.$$

Пусть $F = F_k + F_{k+1} + \ldots + F_l$, где F_j — форма степени j, $F_k \neq 0$. Тогда $F(at) = t^k F_k(a) + \ldots + t^l F_l(a)$. Так как $F(0) = 0$, то всегда $k \geqslant 1$ и уравнение компоненты X_2 есть $t = 0$. Легко видеть, что уравнения T_x имеют вид $F_k = 0$, $F \in \mathfrak{A}_x$. Форма F_k называется *начальной формой многочлена* F. Таким образом, T_x определяется равенством нулю всех начальных форм многочленов идеала $\mathfrak{A}_x$. Так как T_x определяется однородными уравнениями, то он является конусом с вершиной в x. Легко видеть, что $T_x \subset \Theta_x$ и $T_x = \Theta_x$, если точка x простая.

Рассмотрим пример плоской алгебраической кривой $X \subset \mathbf{A}^2$. Если $\mathfrak{A}_x = (F(x, y))$ и F_k — начальная форма многочлена F, то уравнение T_x имеет вид $F_k(x, y) = 0$. Так как F_k — форма от двух переменных, а поле k алгебраически замкнуто, то F_k разлагается в произведение линейных форм $F_k(x, y) = \prod (\alpha_i x + \beta_i y)^{l_i}$. Поэтому T_x распадается в этом случае на несколько прямых $\alpha_i x + \beta_i y = 0$. Эти прямые называются касательными к X в x, а l_i — кратностями этих касательных. Если $k > 1$, то $\Theta_x = \mathbf{A}^2$. Число k называется *кратностью особой точки* x. При $k = 2$ точка называется двойной, при $k = 3$ — тройной.

Например, если $F = x^2 - y^2 + x^3$, $x = (0, 0)$, то T_x состоит из двух прямых: $x + y = 0$, $x - y = 0$; если $F = x^2 y - y^3 + x^4$, $x = (0, 0)$, то T_x состоит из трех прямых: $y = 0$, $x + y = 0$, $x - y = 0$; если $F = y^2 - x^3$, $x = (0, 0)$, то $y = 0$ является двукратной касательной.

Так же как и первоначально данное нами определение касательного пространства, приведенное определение касательного конуса использует понятие, неинвариантное относительно изоморфизма. Однако можно показать, что касательный конус T_x инвариантен относительно изоморфизма и является локальным инвариантом точки x.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что локальное кольцо точки x неприводимого многообразия X является объединением (в $k(X)$) всех колец $k[U]$, где U — окрестности точки x.

2. Отображение $\varphi(t) = (t^3, t^3)$ определяет бирациональный изоморфизм кривой $y^2 = x^3$ и прямой $\mathbf{A}^1$. Какие рациональные функции от t соответствуют функциям локального кольца $\mathcal{O}_x$ точки $(0, 0)$?

3. То же для бирационального изоморфизма между $\mathbf{A}^1$ и кривой (1) п. 2 § 1 гл. I.

4. Доказать, что локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ точки $(0, 0)$ кривой $xy = 0$ изоморфно подкольцу $\Omega \subset \mathcal{O}' \oplus \mathcal{O}'$ ($\mathcal{O}'$ — локальное кольцо

точки O на $\mathbf{A}^1$), состоящему из таких функций (f, g), $f, g \in \mathcal{O}'$, что $f(0) = g(0)$.

5. Определить локальное кольцо точки $(0, 0, 0)$ кривой, состоящей из трех осей координат в $\mathbf{A}^3$.

6. Определить локальное кольцо точки $(0, 0)$ кривой $x \cdot y \times (x - y) = 0$.

7. Доказать, что если $x \in X$, $y \in Y$ — простые точки, то точка $(x, y) \in X \times Y$ проста.

8. Доказать, что если $X = X_1 \cup X_2$, $x \in X_1 \cap X_2$, $\Theta_{x, X}$, Θ_{x, X_1}, Θ_{x, X_2} — касательные пространства, то $\Theta_{x,X} \supset \Theta_{x,X_1} + \Theta_{x,X_2}$. Всегда ли имеет место равенство?

9. Доказать, что гиперповерхность 2-го порядка, имеющая особую точку, является конусом.

10. Доказать, что если гиперповерхность 3-го порядка имеет две особые точки, то прямая, их соединяющая, лежит на гиперповерхности.

11. Доказать, что если плоская кривая 3-го порядка имеет три особые точки, то она распадается на три прямые.

12. Доказать, что особые точки гиперповерхности в пространстве $\mathbf{P}^n$, заданной уравнением $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, определяются из системы уравнений $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, $F_{x_i}(x_0, \ldots, x_n) = 0$ ($i = 0, \ldots, n$). Если степень формы F не делится на характеристику поля, то первое уравнение является следствием остальных.

13. Доказать, что если гиперповерхность X в $\mathbf{P}^n$ содержит линейное подпространство L размерности $r \geqslant \frac{n}{2}$, то она имеет особые точки. Указание. Выбрать систему координат так, чтобы L задавалось уравнениями $x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$, и искать особые точки, содержащиеся в L.

14. При каких значениях a кривая $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + a(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 0$ имеет особую точку? Каковы тогда особые точки? Приводима ли кривая?

15. Определить особые точки поверхности Штейнера в $\mathbf{P}^3$: $x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_0^2 + x_0^2 x_1^2 - x_0 x_1 x_2 x_3 = 0$.

16. При каких значениях a поверхность $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - a x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ имеет особые точки и каковы эти точки?

17. Доказать, что над полем характеристики 0 точки пространства $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$ (п. 4 § 4 гл. I), соответствующие гиперповерхностям, имеющим особую точку, образуют гиперповерхность в $\mathbf{P}^{\nu_{n,m}}$. Указание. Воспользоваться результатами задачи 10 § 6 гл. I.

18. Пусть $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ — уравнение неприводимой кривой $X \subset \mathbf{P}^2$ над полем характеристики 0. Рассмотрим рациональное отображение φ: $X \to \mathbf{P}^2$, заданное формулами $u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, x_1, x_2)$ ($i = 0, 1, 2$). Доказать, что а) $\varphi(X)$ является точкой тогда и только тогда, когда X является прямой; б) если X не является прямой, то φ тогда и только тогда регулярно в точке $x \in X$, когда эта точка простая. Кривая $\varphi(X)$ называется *дуальной* к кривой X.

19. Доказать, что если X — кривая 2-го порядка, то $\varphi(X)$ — тоже кривая 2-го порядка.

20. Найти дуальную кривую к кривой $x_0^3+x_1^3+x_2^3=0$.

21. Доказать, что если гиперповерхность $X\subset\mathbf{P}^n$ не имеет особых точек и не является гиперплоскостью, то множество линейных подпространств Θ_x, $x\in X$, образует гиперповерхность в дуальном пространстве $\widetilde{\mathbf{P}}^n=\mathbf{P}^{\nu_{n,1}}$.

22. Пусть φ — регулярное отображение многообразия $X\subset\mathbf{A}^n$, состоящее в проектировании на некоторое подпространство. Определить отображение $d\varphi$ линейного пространства Θ_x, $x\in X$.

23. Доказать, что для любого целого $t>0$ группа $\mathfrak{m}_x^t/\mathfrak{m}_x^{t+1}$ является конечномерным векторным пространством над полем $\mathbf{k}$.

§ 2. Разложение в степенные ряды

1. Локальные параметры в точке. Мы исследуем простую точку x многообразия X, в которой $\dim_x X=n$.

Определение. Функции $u_1,\ldots,u_n\in\mathcal{O}_x$ называются *локальными параметрами* в точке x, если $u_i\in\mathfrak{m}_x$ и $u_1,\ldots,u_n$ образуют базис пространства $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Ввиду изоморфизма $d_x\colon \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2\to\Theta_x^*$, $u_1,\ldots,u_n$ тогда и только тогда образуют систему локальных параметров, когда линейные формы $d_xu_1,\ldots,d_xu_n$ линейно независимы на Θ_x. Так как $\dim\Theta_x^*=n$, то это в свою очередь равносильно тому, что уравнения

$$d_xu_1=\ldots=d_xu_n=0 \qquad (1)$$

имеют в Θ_x только нулевое решение.

Мы можем заменить X аффинной окрестностью X' точки x, на которой функции $u_1,\ldots,u_n$ регулярны. Обозначим через X_i' гиперповерхность, определенную в X' уравнением $u_i=0$. Пусть U_i — многочлен, определяющий на X' функцию u_i, и $\mathfrak{A}_i=\mathfrak{A}_{X_i'}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{X'}$. Тогда $\mathfrak{A}_i\supset(\mathfrak{A},U_i)$, и из определения касательного пространства следует, что $\Theta_i\subset L_i$, где Θ_i — касательное пространство к X_i' в точке x, а $L_i\subset\Theta_x$ определено уравнением $d_xU_i=0$. Из того, что система (1) имеет только нулевое решение, следует, что $L_i\ne\Theta_x$, т. е. $\dim L_i=n-1$, а из теоремы о размерности пересечения и неравенства $\dim\Theta_i\geqslant\dim X_i'$ следует, что $\dim\Theta_i\geqslant n-1$. Поэтому $\dim\Theta_i=n-1$, а это означает, что точка x проста на X_i'. Пересечение многообразий X_i' совпадает с точкой x в некоторой окрестности этой точки: если бы через x проходила

компонента Y пересечения $\bigcap X_i'$, $\dim Y>0$, то касательное пространство к Y в точке x содержалось бы во всех Θ_i, а это опять противоречит тому, что система (1) имеет только нулевое решение.

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $u_1,\ldots,u_n$ — локальные параметры в точке x, $u_1,\ldots,u_n$ регулярны на X и $X_i=V(u_i)$, то точка x проста на каждом из X_i и $\bigcap\Theta_i=0$, где Θ_i — касательное пространство к X_i в точке x.*

Здесь мы сталкиваемся с общим свойством подмногообразий, которое дальше часто будет встречаться.

Определение. Подмногообразия $Y_1,\ldots,Y_r$ гладкого многообразия X называются *трансверсальными* в точке $x\in\bigcap Y_i$, если

$$\operatorname{codim}_\Theta\Big(\bigcap_{i=1,\ldots,r}\Theta_{x,Y_i}\Big)=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{codim}_X Y_i,\qquad \Theta=\Theta_{x,X}. \qquad (2)$$

Используя неравенство (4) п. 2 § 6 гл. I для подпространств $\Theta_{x,Y_i}\subset\Theta$ и неравенства $\operatorname{codim}\Theta_{x,Y_i}\leqslant\operatorname{codim}_X Y_i$ мы видим, что из (2) следует равенство

$$\dim\Theta_{x,Y_i}=\dim Y_i,$$

которое означает, что все Y_i гладки в точке x, и равенство

$$\operatorname{codim}_\Theta\Big(\bigcap_{i=1,\ldots,r}\Theta_{x,Y_i}\Big)=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{codim}\Theta_{x,Y_i},$$

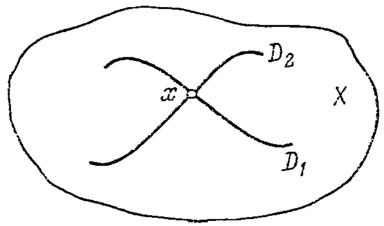


Рис. 7

которое означает трансверсальность линейных пространств Θ_{x,Y_i}, — они имеют самое маленькое пересечение, возможное при их размерностях. Из включения $\bigcap_{i=1,\ldots,r}\Theta_{x,Y_i}\supset\Theta_{x,Y}$, где $Y=\bigcap Y_i$, мы аналогичным образом получаем, что и Y гладко в точке x.

Например, трансверсальны две гладкие кривые на поверхности, имеющие в точке пересечения разные касательные (рис. 7).

Теорема 1, таким образом, утверждает трансверсальность подмногообразий $V(u_i)$.

Пусть X' — аффинная окрестность точки x, в которой $\bigcap X_i=x$. Точка x определяется уравнениями $t_1=\ldots$

$\ldots = t_N = 0$, если $X' \subset \mathbf{A}^N$ и t_i — координаты, а $\cap X_i$ — уравнениями $u_1 = \ldots = u_n = 0$. Ввиду теоремы Гильберта о корнях отсюда следует, что $(t_1, \ldots, t_N)^k \subset \subset (u_1, \ldots, u_n)$ при некотором $k > 0$. Здесь $(t_1, \ldots, t_N)$ и $(u_1, \ldots, u_n)$ — идеалы кольца $\mathrm{k}[X']$. Тем более это верно для идеалов $(t_1, \ldots, t_N)$ и $(u_1, \ldots, u_n)$ в кольце $\mathcal{O}_x$. Заметим, что $(t_1, \ldots, t_N) = \mathfrak{m}_x$, так что $\mathfrak{m}_x^k \subset (u_1, \ldots, u_n)$. В действительности верно более точное утверждение.

Теорема 2. *Локальные параметры порождают максимальный идеал $\mathfrak{m}_x$ локального кольца $\mathcal{O}_x$.*

Это — непосредственное следствие леммы Накаяма (см. Приложение, п. 6, предложение 3). Надо применить ее к идеалу $\mathfrak{m}_x$ как модулю на $\mathcal{O}_x$. Ввиду леммы в п. 1 § 1 гл. II это модуль конечного типа. Так как локальные параметры порождают $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, то по лемме Накаяма они порождают $\mathfrak{m}_x$. Теорема доказана.

Пример. Пусть X — гладкое аффинное многообразие и G — конечная группа его автоморфизмов (ср. пример 11 п. 3 § 2 гл. I). Предположим, что группа G действует на X свободно, т. е. из $g(x) = x$ при $g \in G$, $x \in X$ следует $g = e$ (тождественное преобразование). Докажем, что тогда и фактормногообразие X/G гладко. Пусть $X \to Y = X/G$ — построенное в примере 11 п. 3 § 2 гл. I отображение, $y \in Y$, $y = f(x)$, $\dim X = \dim Y = n$ и $u_1, \ldots, u_n$ — образующие идеала $\mathfrak{m}_x$. Для каждого u_i построим такую функцию $\bar{u}_i \in \mathrm{k}[X]$, что $\bar{u}_i \equiv u_i (\mathfrak{m}_x^2)$, $\bar{u}_i \in \mathfrak{m}_{g(x)}^2$ при $g \in G$, $g \neq e$ (достаточно умножить u_i на квадраты функций, равных 1 в x и 0 в $g(x)$, $g \neq e$). Положим $v_i = S(\bar{u}_i)$ (ср. пример 11 п. 3 § 2 гл. I и предложение 1 п. 5 Приложения). Так как $g^*\bar{u}_i \in \mathfrak{m}_x^2$ при $g \neq e$, то $v_i \equiv u_i (\mathfrak{m}_x^2)$ и, значит, $v_1, \ldots, v_n$ — локальные параметры в точке x. Но $v_i \in \mathrm{k}[Y]$ и $v_i(y) = 0$. Докажем, что $\mathfrak{m}_y = (v_1, \ldots, v_n)$. Пусть $h \in \mathfrak{m}_y$, $h \in \mathrm{k}[Y]$. Тогда $f^*(h) \in \mathfrak{m}_x$ и $f^*(h) = \sum h_i v_i$. Применяя к этому равенству оператор S, получаем (так как $Sf^*(h) = f^*(h)$, $Sv_i = v_i$), что $f^*(h) = \sum S(h_i) v_i$. Таким образом, $\dim \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \leqslant n$, откуда следует, что точка y — простая.

Важно отметить, что простота точки x характеризуется чисто алгебраическим свойством ее локального кольца $\mathcal{O}_x$. По определению точка $x \in X$ проста тогда и только

тогда, когда $\dim_{\mathrm{k}} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \dim_x X$. Левая часть этого равенства определена для любого нетерова локального кольца $\mathcal{O}$. Правая часть тоже может быть выражена как свойство локального кольца $\mathcal{O}_x$. Именно, ввиду следствия 1 теоремы 5 § 6 гл. I размерность многообразия X в точке x может быть определена как наименьшее число r, для которого существуют такие r функций $u_1, \ldots, u_r \in \mathfrak{m}_x$, что множество, определенное уравнениями $u_1 = 0, \ldots, u_r = 0$, состоит в некоторой окрестности точки x только из этой точки. Согласно теореме Гильберта о корнях это свойство равносильно тому, что $(u_1, \ldots, u_r) \supset \mathfrak{m}_x^k$ при некотором $k > 0$.

Для произвольного нетерова локального кольца $\mathcal{O}$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ наименьшее число таких элементов $u_1, \ldots, u_r \in \mathfrak{m}$, что $(u_1, \ldots, u_r) \supset \mathfrak{m}^k$ при некотором $k > 0$, называется размерностью кольца $\mathcal{O}$ и обозначается $\dim \mathcal{O}$. Согласно лемме Накаяма сам идеал $\mathfrak{m}$ порождается n элементами, где $n = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Поэтому

$$\dim \mathcal{O} \leqslant \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Если $\dim \mathcal{O} = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, то локальное кольцо называется *регулярным*. Мы видим, что точка x проста тогда и только тогда, когда ее локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ регулярно. Это и есть алгебраический смысл простоты точки.

2. Разложение в степенные ряды. Сопоставление элементам локального кольца $\mathcal{O}_x$ степенных рядов основано на следующих соображениях. Для любой функции $f \in \mathcal{O}_x$ положим $f(x) = \alpha_0$, $f_1 = f - \alpha_0$. Тогда $f_1 \in \mathfrak{m}_x$. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — система локальных параметров в точке x. По определению элементы $u_1, \ldots, u_n$ порождают все векторное пространство $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Значит, существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{k}$, что $f_1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in \mathfrak{m}_x^2$. Положим $f_2 = f_1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = f - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Так как $f_2 \in \mathfrak{m}_x^2$, то $f_2 = \sum g_j h_j$, $g_j, h_j \in \mathfrak{m}_x$. Как и выше, существуют такие $\beta_{ji}, \gamma_{ji} \in \mathrm{k}$, что

$$g_j - \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} u_i \in \mathfrak{m}_x^2, \quad h_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} u_i \in \mathfrak{m}_x^2.$$

Положим $\sum_j \left(\sum_i \beta_{ji} u_i\right)\left(\sum_i \gamma_{ji} u_i\right) = \sum_{1 \leqslant l,\, k \leqslant n} \alpha_{lk} u_l u_k$. Тогда

$f_2 - \sum \alpha_{lk} u_l u_k \in \mathfrak{m}_x^3$ и, значит, $f - \alpha_0 - \sum \alpha_i u_i - \sum \alpha_{lk} u_l u_k \in \mathfrak{m}_x^3$. Продолжая так, мы сможем, очевидно, найти такие формы $F_i \in k[T_1, \ldots, T_n]$, $\deg F_i = i$, что $f - \sum_{i=0}^{k} F_i(u_1, \ldots, u_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1}$.

Определение. *Кольцом формальных степенных рядов* от переменных $(T_1, \ldots, T_n) = T$ называется кольцо, элементами которого являются бесконечные выражения вида

$$\Phi = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots, \tag{1}$$

где $F_i \in k[T]$ — форма степени i, а действия определяются по правилам: если $\Psi = G_0 + G_1 + G_2 + \ldots$, то

$$\Phi + \Psi = (F_0 + G_0) + (F_1 + G_1) + (F_2 + G_2) + \ldots,$$

$$\Phi \cdot \Psi = H_0 + H_1 + H_2 + \ldots, \quad H_i = \sum_{j+l=i} G_j F_l.$$

Кольцо формальных степенных рядов обозначается через $k[[T]]$. Оно содержит поле k (степенные ряды, в которых $F_i = 0$ при $i > 0$). Если i — первый индекс, для которого $F_i \neq 0$, то F_i называется начальной формой ряда (1). Начальная форма произведения равна произведению начальных форм, поэтому кольцо $k[[T]]$ не имеет делителей 0.

Предшествующие рассуждения дают возможность сопоставить функции $f \in \mathcal{O}_x$ степенной ряд $\Phi = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots$

Мы приходим к следующему определению.

Определение. Формальный степенной ряд Φ называется *рядом Тейлора функции* $f \in \mathcal{O}_x$, если для всех $k \geqslant 0$

$$f - S_k(u_1, \ldots, u_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1}, \quad S_k = \sum_{i=0}^{k} F_i. \tag{2}$$

Пример. Пусть $X = \mathbf{A}^1$ и x — точка, соответствующая значению координаты $t = 0$. Тогда $\mathfrak{m}_x = (t)$ и рациональной функции $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, $Q(0) \neq 0$, сопоставляется такой степенной ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m t^m$, что

$$\frac{P(t)}{Q(t)} - \sum_{m=0}^{k} \alpha_m t^m \equiv 0\,(t^{k+1}),$$

т. е.

$$P(t) - Q(t)\left(\sum_{m=0}^{k} \alpha_m t^m\right) \equiv 0\,(t^{k+1}).$$

Это и есть обычный способ нахождения коэффициентов степенного ряда рациональной функции методом неопределенных коэффициентов.

Например, $\frac{1}{1-t} = \sum_{m=0}^{\infty} t^m$, так как

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{m=0}^{k} t^m = \frac{t^{k+1}}{1-t} \equiv 0\,(t^{k+1}).$$

Соответствие $f \to \Phi$ существенно зависит от выбора локальной системы параметров $u_1, \ldots, u_n$.

Приведенные только что рассуждения доказывают следующее утверждение.

Теорема 3. *Каждая функция f обладает хотя бы одним рядом Тейлора.*

До сих пор мы по существу пользовались не тем, что точка x простая, а лишь тем, что образы $u_1, \ldots, u_n$ порождают $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Теперь мы воспользуемся простотой точки x.

Теорема 4. *Если точка x проста, то функция имеет единственный ряд Тейлора.*

Очевидно, достаточно доказать, что любой ряд Тейлора функции $f = 0$ равен нулю. Согласно (2) это равносильно утверждению: если $F_k(T_1, \ldots, T_n)$ — форма степени k, $u_1, \ldots, u_n$ — локальные параметры простой точки x и

$$F_k(u_1, \ldots, u_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1}, \tag{3}$$

то

$$F_k(T_1, \ldots, T_n) = 0.$$

Предположим, что это не так. За счет невырожденного линейного преобразования можно добиться того, чтобы коэффициент при T_n^k в форме F_k был отличен от 0. Действительно, этот коэффициент равен $F_k(0, \ldots, 0, 1)$, и если $F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$ (такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существуют, раз $F_k \neq 0$), то нам достаточно произвести линейное преобразование, переводящее вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в $(0, \ldots, 0, 1)$. Таким образом, мы можем считать, что

$F_k(T_1, \ldots, T_n) = \alpha T_n^k + G_1(T_1, \ldots, T_{n-1}) T_n^{k-1} + \ldots$ $\ldots + G_k(T_1, \ldots, T_{n-1})$, где $\alpha \neq 0$ и G_i — форма степени i.

Из теоремы 2 п. 1 легко вытекает, что любой элемент идеала $\mathfrak{m}_x^{k+1}$ может быть записан в виде формы степени k от $u_1, \ldots, u_n$ с коэффициентами в $\mathfrak{m}_x$. Поэтому условие (3) можно записать в виде

$$\alpha u_n^k + G_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) u_n^{k-1} + \ldots + G_k(u_1, \ldots, u_{n-1}) =$$
$$= \mu u_n^k + H_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) u_n^{k-1} + \ldots + H_k(u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad (4)$$

где $\mu \in \mathfrak{m}_x$, H_i — форма степени i. Отсюда следует, что $(\alpha - \mu) u_n^k \in (u_1, \ldots, u_{n-1})$. Так как $\alpha \neq 0$, то $\alpha - \mu \notin \mathfrak{m}_x$ и $(\alpha - \mu)^{-1} \in \mathcal{O}_x$, и поэтому $u_n^k \in (u_1, \ldots, u_{n-1})$. Мы видим, что $V(u_n) \supset V(u_1) \cap \ldots \cap V(u_{n-1})$. Отсюда следует, что $\Theta_n \supset \Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_{n-1}$ (Θ_i — касательное пространство к $V(u_i)$ в точке x) и, значит, $\Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_n = \Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_{n-1}$. Поэтому $\dim(\Theta_1 \cap \ldots \cap \Theta_n) \geqslant 1$, что противоречит теореме 1 п. 1. Теорема доказана.

Таким образом, мы имеем однозначно определенное отображение $\tau\colon \mathcal{O}_x \to k[[T]]$, которое сопоставляет каждой функции ее ряд Тейлора. Простая проверка, основывающаяся на определении (2) отображения τ, показывает, что τ является гомоморфизмом. Мы предоставляем эту проверку читателю.

Каково ядро отображения τ? Если $\tau(f) = 0$ для функции $f \in \mathcal{O}_x$, то ввиду (2) это означает, что $f \in \mathfrak{m}_x^{k+1}$ для всех k. Иными словами, это значит, что $f \in \bigcap \mathfrak{m}_x^k$. Речь идет, следовательно, о функциях, аналогичных тем функциям анализа, все производные которых равны 0 в некоторой точке. В нашем случае такая функция должна быть равна 0. Это вытекает из предложения 4 п. 6 Приложения и леммы в п. 1 § 1 гл. II.

Как следствие получается

Теорема 5. *Функция $f \in \mathcal{O}_x$ однозначно определяется любым своим рядом Тейлора. Иначе говоря, отображение τ является изоморфным вложением локального кольца $\mathcal{O}_x$ в кольцо формальных степенных рядов* $k[[T]]$.

Напомним, что в этом параграфе мы нигде не пользовались тем, что многообразие X неприводимо. Наоборот, из теоремы 5 можно сделать некоторые выводы о неприводимости.

Теорема 6. *Если точка x проста, то через нее проходит одна-единственная компонента многообразия X.*

Заменим X окрестностью U точки x, $X' = X - \bigcup Z_i$, где Z_i — все компоненты X, не проходящие через x. Тогда $k[X'] \subset \mathcal{O}_x$. Согласно теореме 5 $\mathcal{O}_x$ изоморфно подкольцу кольца формальных степенных рядов $k[[T]]$. Так как кольцо $k[[T]]$ не имеет делителей 0, то это верно и для кольца $k[X']$, изоморфного его подкольцу. Поэтому X' неприводимо, что и утверждается теоремой.

Следствие. *Множество особых точек алгебраического многообразия X замкнуто.*

Пусть $X = \bigcup X_i$ — разложение на неприводимые компоненты. Из теоремы 6 следует, что множество особых точек многообразия есть объединение множеств $X_i \cap X_j$ ($i \neq j$) и множеств особых точек многообразий X_i. Как объединение конечного числа замкнутых множеств, оно замкнуто.

Если точка x не является простой, то максимум того, что мы можем сделать — это сопоставить элементу $f \in \mathcal{O}_x$ последовательность классов вычетов $\xi_n = f + \mathfrak{m}_x^n \in \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n$. Такая последовательность обладает свойством согласованности: если $\theta_{n+1}\colon \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{n+1} \to \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n$ — канонический гомоморфизм, то $\theta_{n+1}(\xi_{n+1}) = \xi_n$. Совокупность всех согласованных последовательностей $\{\xi_n\}$ при покомпонентном сложении и умножении образует кольцо $\widehat{\mathcal{O}}_x$, называемое пополнением кольца $\mathcal{O}_x$. Мы определили только что гомоморфизм $\tau\colon \mathcal{O}_x \to \widehat{\mathcal{O}}_x$, $\tau(f) = \{\xi_n\}$, $\xi_n = f + \mathfrak{m}_x^n$. То же рассуждение, что и в случае простой точки x, показывает, что τ — вложение. Кольцо $\widehat{\mathcal{O}}_x$ — локальное — оно имеет максимальный идеал $\mathfrak{M}$, состоящий из согласованных последовательностей $\{\xi_n\}$, для которых $\xi_n \in \mathfrak{m}_x$. Можно показать, что применение той же конструкции к $\widehat{\mathcal{O}}_x$ ничего нового не дает: $\widehat{\widehat{\mathcal{O}}}_x = \widehat{\mathcal{O}}_x$ и гомоморфизм τ является в этом случае изоморфизмом. Если точка x — простая, то кольцо $\widehat{\mathcal{O}}_x$ совпадает с кольцом формальных степенных рядов. В общем случае оно является важной характеристикой особой точки. Если для $x \in X$ и $y \in Y$ пополненные локальные кольца $\widehat{\mathcal{O}}_x$ и $\widehat{\mathcal{O}}_y$ изоморфны, то многообразия X и Y называются *формально-аналитически эквивалентными* в окрестности этих точек. Так как в случае простой точки x n-мерного многообразия локальное кольцо $\widehat{\mathcal{O}}_x$ то же, что и у точки $x' \in \mathbf{A}^n$, то в окрестностях всех простых точек все многообразия одной размерности формально-аналитически эквивалентны. Ср. задачи 8—16 к § 3.

3. Многообразия над полем действительных и полем комплексных чисел. Предположим, что поле k совпадает с полем действительных или комплексных чисел. Мы покажем, что в этом случае формальные ряды Тейлора функций $f \in \mathcal{O}_x$ сходятся для малых значений $T_1, \ldots, T_n$.

Пусть $\mathfrak{A}_X = (F_1, \ldots, F_m)$, $X \subset \mathbf{A}^N$ и $\dim_x X = n$. Если $x \in X$ — простая точка, то ранг матрицы

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\right), \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, N,$$

равен $N - n$. Предположим, что

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\right| \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, N-n; \qquad j = n+1, \ldots, N. \tag{1}$$

Пусть x совпадает с началом координат. Тогда $t_1, \ldots, t_n$ (координаты, ограниченные на X) образуют систему локальных параметров точки x. Обозначим через X' совокупность проходящих через точку x компонент многообразия, определяемого уравнениями

$$F_1 = 0, \ \ldots, \ F_{N-n} = 0. \tag{2}$$

Ввиду условия (1) размерность его касательного пространства Θ' в точке x равна n, а по теореме о размерности пересечения $\dim_x X' \geqslant n$. Так как $\dim \Theta' \geqslant \dim_x X'$, то $\dim_x X' = n$ и точка x проста на X'. Отсюда ввиду теоремы 6 следует, что X' неприводимо. Очевидно, что $X' \supset X$, а из того, что $\dim X' = \dim X$, следует $X' = X$.

Мы видим, что X может быть определено в некоторой окрестности точки x $N-n$ уравнениями (2), причем выполнено условие (1). Согласно теореме о неявных функциях (см., например, [14], § 185) существуют система степенных рядов $\Phi_1, \ldots, \Phi_{N-n}$ от n переменных $T_1, \ldots, T_n$ и такое $\varepsilon > 0$, что $\Phi_j(T_1, \ldots, T_n)$ сходятся для всех T_i, $|T_i| < \varepsilon$, и

$$F_i(T_1, \ldots, T_n, \Phi_1(T), \ldots, \Phi_{N-n}(T)) = 0, \tag{3}$$

причем коэффициенты степенных рядов $\Phi_1, \ldots, \Phi_{N-n}$ однозначно определяются из соотношения (3).

Но формальные степенные ряды $\tau(T_{n+1}), \ldots, \tau(T_N)$ (если за локальные параметры выбраны $t_1, \ldots, t_n$) тоже удовлетворяют (3) и поэтому должны совпадать с $\Phi_1, \ldots, \Phi_{N-n}$, откуда следует, что $\tau(T_i)$ $(i = n+1, \ldots, N)$ сходятся при $|T_j| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Любая функция $f \in \mathcal{O}_x$ представима в виде $f = \dfrac{P(T_1, \ldots, T_N)}{Q(T_1, \ldots, T_N)}$, $Q(x) \neq 0$, и $\tau(f) = \dfrac{P(\tau(T_1), \ldots, \tau(T_N))}{Q(\tau(T_1), \ldots, \tau(T_N))}$.

Сходимость ряда $\tau(f)$ следует поэтому из стандартных теорем о сходимости рядов.

Аналогично можно показать, что если $u_1, \ldots, u_n$ — любая другая система локальных параметров, то

$$\left|\frac{\partial \tau(u_i)}{\partial T_j}(0, \ldots, 0)\right| \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n,$$

ряды Тейлора для $t_1, \ldots, t_n$ через локальные параметры $u_1, \ldots, u_n$ получаются обращением рядов $\tau(u_i) = \Phi_i(T_1, \ldots, T_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и поэтому тоже имеют положительный радиус сходимости. Отсюда следует, что ряд $\tau(f)$, $f \in \mathcal{O}_x$, при любом выборе локальных параметров имеет положительный радиус сходимости.

Теорема о неявных функциях утверждает не только существование сходящихся рядов $\Phi_1, \ldots, \Phi_{N-n}$, но и то, что для некоторого $\eta > 0$ любая точка $(t_1, \ldots, t_N) \in X$, $|t_i| < \eta$ $(i = 1, \ldots, N)$ имеет вид $t_{n+i} = \Phi_i(t_1, \ldots, t_n)$ $(i = 1, \ldots, N-n)$. Отсюда следует, что отображение $(t_1, \ldots, t_N) \to (t_1, \ldots, t_n)$ отображает множество $(t_1, \ldots, t_N) \in X$, $|t_i| < \eta$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно на область n-мерного пространства.

Пространство $\mathbf{P}^N$ над полем k (в случае, когда k — поле вещественных или комплексных чисел) является топологическим пространством. Алгебраическое многообразие X в этом пространстве также является топологическим пространством. Эту топологию в X мы будем называть *вещественной* или *комплексной* в зависимости от того, будет k полем вещественных или комплексных чисел. Ее не следует путать с теми топологическими терминами — замкнутость, открытость, ..., которые мы использовали раньше.

Предшествующие рассуждения показывают, что в вещественной топологии n-мерного многообразия X любая простая точка имеет окрестность, гомеоморфную области вещественного n-мерного пространства. Поэтому, если все точки X — простые, то X является n-мерным многообразием в топологическом смысле этого слова. Если k — поле комплексных чисел, то простая точка $x \in X$ имеет в комплексной топологии окрестность, гомеоморфную области в n-мерном комплексном и, значит, в $2n$-мерном вещественном пространстве. Поэтому, если все точки X простые, то X является $2n$-мерным многообразием.

Как легко показать, пространство $\mathbf{P}^N$ компактно в вещественной и комплексной топологиях. Поэтому, если X проективно, то оно компактно. Если k — поле комплексных чисел, то верно и обратное: квазипроективное многообразие X, компактное в своей комплексной топологии, является проективным многообразием. См. задачу 4 к § 2 гл. VII.

Заметим в заключение, что все сказанное в этом пункте (исключая последний абзац) дословно переносится на случай, когда k — поле p-адических чисел.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что множество точек, в которых заданные n функций на n-мерном многообразии X не образуют систему локальных параметров, замкнуто.

2. Доказать, что многочлен $f \in \mathrm{k}[T] = \mathrm{k}[\mathbf{A}^1]$ тогда и только тогда является локальным параметром в точке $T = \alpha$, когда α является его простым корнем.

3. Доказать, что формальный степенной ряд $\Phi = F_0 + F_1 \ldots$ тогда и только тогда обладает обратным в кольце $\mathrm{k}[[T]]$, когда $F_0 \neq 0$.

4. Рассмотрим кольцо $\mathrm{k}\{T\}$, состоящее из выражений вида $\alpha_{-n}T^{-n} + \alpha_{-n+1}T^{-n+1} + \ldots + \alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots$, где T — переменная, n — произвольное целое число. Доказать, что $\mathrm{k}\{T\}$ — поле, изоморфное полю частных кольца $\mathrm{k}[[T]]$.

5. Пусть $X \subset \mathbf{A}^2$ — окружность, заданная уравнением $X^2 + Y^2 = 1$, x — точка $(0, 1)$. Доказать, что X является локальным параметром в точке x и

$$\tau(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) X^{2n}.$$

Характеристика основного поля равна 0.

6. Доказать, что если x — особая точка, то любая функция $f \in \mathcal{O}_x$ обладает бесконечным числом разных рядов Тейлора.

7. Пусть $X = \mathbf{A}^1$, $x \in X$. Доказать, что $\tau(\mathcal{O}_x)$ не совпадает со всем кольцом $\mathrm{k}[[T]]$.

§ 3. Свойства простых точек

1. Подмногообразия коразмерности 1. Теория локальных колец дает возможность доказать одно важное свойство гладких многообразий, аналогичное теореме 3 § 6 гл. I. Речь идет об определении подмногообразия $Y \subset X$ коразмерности 1 одним уравнением. В общем случае такой факт, вообще говоря, не имеет места (замечание 2 после следствия 5 в п. 2 § 6 гл. I). Мы докажем, однако, что на неособых многообразиях он верен локально. Чтобы сформулировать этот результат, введем следующее определение.

Функции $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_x$ называются *локальными уравнениями* подмногообразия $Y \subset X$ в окрестности x, если существует такая аффинная окрестность X' точки x, что $\mathfrak{a}_{Y'} = (f_1, \ldots, f_m)$ в $\mathrm{k}[X']$, где $Y' = Y \cap X'$, $f_i \in \mathrm{k}[X']$. Это понятие удобно переформулировать в терминах локального кольца $\mathcal{O}_x$ точки x. Для этого рассмотрим идеал $\mathfrak{a}_{x,Y} \subset \mathcal{O}_x$, состоящий из функций $f \in \mathcal{O}_x$, равных 0 на Y в некоторой окрестности точки x.

Очевидно, что для аффинного многообразия X

$$\mathfrak{a}_{x,Y} = \left\{f = \frac{u}{v};\ u, v \in \mathrm{k}[X],\ v(x) \neq 0,\ u \in \mathfrak{a}_Y\right\},$$

и если все компоненты Y проходят через точку x, то $\mathfrak{a}_Y = \mathfrak{a}_{x,Y} \cap \mathrm{k}[X]$.

Лемма. *Функции $f_1, \ldots, f_m$ тогда и только тогда являются локальными уравнениями Y в окрестности точки x, когда $\mathfrak{a}_{x,Y} = (f_1, \ldots, f_m)$.*

Очевидно, что если $\mathfrak{a}_Y = (f_1, \ldots, f_m)$ в $\mathrm{k}[X]$, то и $\mathfrak{a}_{x,Y} = (f_1, \ldots, f_m)$ в $\mathcal{O}_x$. Пусть $\mathfrak{a}_{x,Y} = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in \mathcal{O}_x$, $\mathfrak{a}_Y = (g_1, \ldots, g_s)$, $g_i \in \mathrm{k}[X]$.

Так как $g_i \in \mathfrak{a}_{x,Y}$, то

$$g_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} f_j, \quad i = 1, \ldots, s, \quad h_{ij} \in \mathcal{O}_x. \tag{1}$$

Функции f_i, h_{ij} регулярны в некоторой главной аффинной окрестности U точки x. Пусть $U = X - V(g)$, $g \in \mathrm{k}[X]$. Кольцо $\mathrm{k}[U]$ состоит из элементов вида $\frac{u}{g^k}$, $u \in \mathrm{k}[X]$, $k \geqslant 0$. Тогда ввиду (1) $(g_1, \ldots, g_s) = \mathfrak{a}_Y \cdot \mathrm{k}[U] \subset (f_1, \ldots, f_m)$.

Мы покажем, что $\mathfrak{a}_Y \mathrm{k}[U] = \mathfrak{a}_{Y'}$. Отсюда будет следовать, что $\mathfrak{a}_{Y'} \subset (f_1, \ldots, f_m)$, а так как $f_i \in \mathfrak{a}_{Y'}$, то и утверждение леммы.

Остается проверить, что $\mathfrak{a}_Y k[U] = \mathfrak{a}_{Y'}$. Включение $\mathfrak{a}_Y k[U] \subset \mathfrak{a}_{Y'}$ очевидно. Пусть $v \in \mathfrak{a}_{Y'}$. Тогда $v = \frac{u}{g^k}$, $u \in k[X]$, а значит, $u = vg^k$; следовательно, $u \in \mathfrak{a}_Y$, а так как $\frac{1}{g^k} \in k[U]$, то $v = \frac{u}{g^k} \in \mathfrak{a}_Y k[U]$.

Нашей целью является доказательство следующего результата.

Теорема 1. *Неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ коразмерности 1 обладает одним локальным уравнением в окрестности любой неособой точки $x \in X$.*

Доказательство в точности следует ходу доказательства теоремы 3 § 6 гл. I. Там, однако, мы пользовались однозначностью разложения на неприводимые множители в кольце $k[T]$. Здесь роль, аналогичную этому кольцу, играет кольцо $\mathcal{O}_x$. Оно обладает аналогичным свойством.

Теорема 2. *В локальном кольце простой точки разложение на простые множители однозначно.*

Доказательство теоремы 2 основывается на том, что однозначность разложения на простые множители сначала устанавливается для кольца $k[[T]]$. Это довольно элементарный факт, аналогичный соответствующему результату для колец многочленов. Мы укажем только основные этапы доказательства. Совершенно элементарное (и не зависящее от остальной части книги) доказательство можно найти в [17], т. 2, гл. VII, § 1.

Степенной ряд $\Phi(T_1, \ldots, T_n)$ называется регулярным относительно переменной T_n, если его начальная форма (пусть ее степень равна m) содержит член $c_m T_n^m$, $c_m \neq 0$.

Линейное преобразование переменных $T_1, \ldots, T_n$, очевидно, вызывает автоморфизм кольца $k[[T]]$. Мы можем, в частности, произвести такое линейное преобразование, чтобы заданный ряд стал регулярным по T_n.

Лемма 1 (подготовительная теорема Вейерштрасса). *Если степенной ряд $\Phi \in k[[T]]$ регулярен относительно переменной T_n и степень его начальной формы равна m, то существует такой ряд $U \in k[[T]]$, свободный член которого отличен от 0, что ряд ΦU является полиномом от T_n над кольцом $k[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$:*

$$\Phi U = T_n^m + R_1(T_1, \ldots, T_{n-1}) T_n^{m-1} + \ldots + R_m(T_1, \ldots, T_{n-1}),$$
$$R_i(T_1, \ldots, T_{n-1}) \in k[[T_1, \ldots, T_{n-1}]].$$

Доказательство см. в [17], т. 2, с. 174.

Лемма 2. *В кольце формальных степенных рядов разложение элементов на простые множители однозначно.*

Лемма 1 дает возможность доказать это утверждение индукцией по числу переменных $T_1, \ldots, T_n$, сведя его к аналогичному утверждению о многочленах относительно T_n с коэффициентами из $k[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$. Подробное проведение доказательства читатель может найти в [17], т. 2, гл. VII, § 1, теорема 6 (с. 177).

Доказательство теоремы 2. Обозначим через $\widehat{\mathcal{O}}_x$ кольцо формальных степенных рядов и будем считать локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ его подкольцом (что возможно ввиду теоремы 5 § 2). Через $\widehat{\mathfrak{m}}_x$ обозначим идеал кольца $\widehat{\mathcal{O}}_x$, состоящий из степенных рядов без свободного члена. Идеал $\widehat{\mathfrak{m}}_x^k$ состоит из степенных рядов, у которых нет членов степени $<k$. Из определения вложения $\mathcal{O}_x \to \widehat{\mathcal{O}}_x$ (формула (2) п. 2 § 2) следует, что $\widehat{\mathfrak{m}}_x^k \cap \mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_x^k$. Мы находимся, таким образом, в условиях предложения 1 п. 7 Приложения, которые гарантируют нам, что из однозначности разложения на простые множители в $\widehat{\mathcal{O}}_x$ (т. е. леммы 2) следует однозначность разложения в $\mathcal{O}_x$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1, как было уже сказано, совпадает с доказательством теоремы 3 § 6 гл. I. Ввиду локального характера утверждения мы можем считать X аффинным. Пусть f — любая функция из $\mathcal{O}_x$, обращающаяся в 0 на Y. Разложим ее на простые множители в $\mathcal{O}_x$. Один из простых множителей должен ввиду неприводимости Y также обращаться в 0 на Y. Обозначим его через g и докажем, что он и является локальным уравнением Y. Заменив X меньшей аффинной окрестностью, мы можем считать, что g регулярно на X.

Так как $V(g) \supset Y$ и коразмерности обоих подмногообразий равны 1, то $V(g) = Y \cup Y'$. Если $Y' \ni x$, то существуют такие функции h и h', что $h \cdot h' = 0$ на $V(g)$, причем $h \neq 0$ на $V(g)$ и $h' \neq 0$ на $V(g)$. Это значит, что при некотором $r > 0$, $(hh')^r$ делится на g в $k[X]$, а тем более в $\mathcal{O}_x$. Из однозначности разложения на простые множители в $\mathcal{O}_x$ следует, что тогда h или h' делится на g в $\mathcal{O}_x$. Отсюда следует, что h или h' обращается в 0 на $V(g)$ в некоторой окрестности x, а значит, после перехода к меньшей окрестности и на всем $V(g)$. Это противоречит условию. Таким образом, $Y' \not\ni x$, и, заменив X опять достаточно малой аффинной окрестностью точки x, мы можем считать, что $V(g)=Y$. Если теперь u обращается в 0 на Y, то при некотором $s>0$ u^s делится на g в $k[X]$, а значит, подавно и в $\mathcal{O}_x$. Отсюда следует, что u делится на g в $\mathcal{O}_x$. Таким образом, $\mathfrak{a}_{x,Y}=(g)$ и теорема доказана.

Теорема 1 имеет много применений. Вот первое из них (ср. теорему 2 из § 1 гл. I).

Теорема 3. *Если X — гладкое многообразие и $\varphi: X\to \mathbf{P}^N$ — его рациональное отображение в проективное пространство, то множество точек, в которых φ нерегулярно, имеет коразмерность не меньше двух.*

Напомним, что множество точек нерегулярности рационального отображения замкнуто. Утверждение теоремы носит локальный характер, и достаточно проверить его для некоторой окрестности простой точки $x\in X$. Мы можем записать φ в виде $\varphi=(f_0:\ldots:f_n)$, $f_i\in k(X)$, и, не меняя φ, умножить f_i на такой общий множитель, что все $f_i\in\mathcal{O}_x$ и не имеют общего делителя в $\mathcal{O}_x$. При этом φ может быть нерегулярно только в точках, где $f_0=f_1=\ldots=f_n=0$. Но никакое многообразие Y коразмерности 1 не содержится в множестве, определенном этими уравнениями. Действительно, согласно теореме 1, $\mathfrak{a}_{x,Y}=(g)$ и все f_i должны были бы иметь общий множитель g в $\mathcal{O}_x$, вопреки предположению. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любое рациональное отображение гладкой кривой в проективное пространство регулярно.*

Следствие 2. *Если две гладкие проективные кривые бирационально изоморфны, то они изоморфны.*

Пусть k — поле комплексных чисел. Из следствия 2 вытекает, что множества точек кривых X' и X'' гомеоморфны в их комплексной топологии, если кривые X' и X'' бирационально изоморфны. Действительно, регулярные функции, а значит, и регулярные отображения определяются в этом случае сходящимися степенными рядами и поэтому заведомо непрерывны.

То же верно для множеств вещественных точек кривых, определенных уравнениями с вещественными коэффициентами, если бирациональный изоморфизм $\varphi: X\to X'$ определен над полем вещественных чисел, т. е. задан формулами с вещественными координатами. Из этого иногда легко заключить, что две кривые бирационально не изоморфны над полем действительных чисел. Например, кривая $y^2=x^3-x$ имеет график (рис. 8), состоящий

из двух компонент. Поэтому она нерациональна (над полем действительных чисел) — $\mathbf{P}^1$ гомеоморфна окружности и состоит из одной компоненты.

Можно доказать, основываясь на аналогичной идее, что кривая X с уравнением $y^2=x^3-x$ нерациональна и над полем комплексных чисел. Для этого надо сравнить топологические пространства комплексных точек на X и на $\mathbf{P}^1$ в

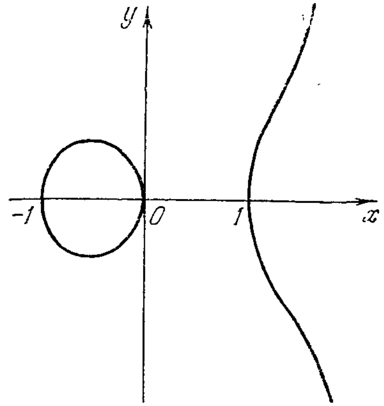


Рис. 8

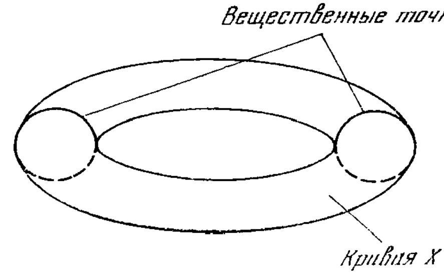


Рис. 9

их комплексной топологии и доказать, что они негомеоморфны. Действительно, первое пространство гомеоморфно тору, а второе — сфере. Это есть частный случай результатов, которые будут доказаны в § 3 гл. VII. На рис. 9 показано, как вещественные точки кривой X расположены среди ее комплексных точек.

2. Гладкие подмногообразия. Теорема 1 не обобщается на подмногообразия коразмерности большей, чем 1 (см., например, задачу 2 к § 6 гл. I). Но для подмногообразий, не особых в точке x, аналогичное утверждение верно. Мы докажем несколько более точный факт. Начнем со вспомогательного утверждения.

Теорема 4. *Пусть X — аффинное многообразие, x — его простая точка, функции $u_1,\ldots,u_n$ регулярны на X и образуют систему локальных параметров в точке x. Тогда подмногообразие Y, определенное уравнением $u_1=\ldots=u_m=0$ $(m\leqslant n)$, не особо в точке x и в некоторой аффинной окрестности точки x, $\mathfrak{a}_Y=(u_1,\ldots,u_m)$, а $u_{m+1},\ldots,u_n$ образуют систему локальных параметров точки x на Y.*

Доказательство использует индукцию по m. При $m=1$ теорема 1 показывает, что в некоторой аффинной окрестности точки x $\mathfrak{a}_Y=(f)$. Пусть $u_1=fv$. Тогда $d_xu_1=v(x)d_xf$. Так как u_1 входит в систему локальных параметров точки x, то $d_xu_1\neq 0$. Поэтому $v(x)\neq 0$ и, значит, в меньшем открытом множестве $\mathfrak{a}_Y=(u_1)$. Так как $d_xu_1\neq 0$, то x — простая точка на Y.

Очевидно, что касательное пространство $\Theta_{x,Y}$ к Y в точке x получается из $\Theta_{x,X}$ наложением условия $d_xu_1=0$. Поэтому $d_xu_2, \ldots, d_xu_n$ является базисом $\Theta^*_{x,Y}$, т. е. $u_2, \ldots, u_n$ — локальные параметры в точке x на Y.

В общем случае положим $X'=X_{u_1}$. Тогда Y определяется на X' уравнениями $u_2=\ldots=u_m=0$ и мы можем применить индукцию. Теорема доказана.

Теперь мы покажем, что любое неособое в точке x подмногообразие Y может быть получено процессом, описанным в теореме 4, в некоторой окрестности простой точки.

Т е о р е м а 5. *Пусть X — многообразие, $Y\subset X$ и x — простая точка на Y и на X. Можно так выбрать систему локальных параметров $u_1, \ldots, u_n$ в точке x на X и такую аффинную окрестность U точки x, что $\mathfrak{a}_Y=(u_1, \ldots, u_m)$ в U.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вложению касательных пространств $\Theta_{x,Y}\to\Theta_{x,X}$ соответствует эпиморфизм сопряженных пространств φ: $\mathfrak{m}_{x,X}/\mathfrak{m}^2_{x,X}\to\mathfrak{m}_{x,Y}/\mathfrak{m}^2_{x,Y}$, определенный ограничением функций с X на Y. Мы можем так выбрать базис $u_1, \ldots, u_n$ в $\mathfrak{m}_{x,X}/\mathfrak{m}^2_{x,X}$, что $u_1, \ldots, u_m\in\mathfrak{a}_Y$, а $u_{m+1}, \ldots, u_n$, ограниченные на Y, образуют базис в $\mathfrak{m}_{x,Y}/\mathfrak{m}^2_{x,Y}$. Рассмотрим аффинную окрестность точки x, в которой все u_i регулярны, и рассмотрим в ней подмногообразие Y', определенное уравнениями $u_1=\ldots=u_m=0$. По построению $Y'\supset Y$. Мы докажем, что $Y'=Y$, откуда ввиду теоремы 4 будет следовать утверждение теоремы.

Согласно теореме 4 Y' не особо в точке x, а значит, ввиду теоремы 6 § 2 Y' неприводимо в окрестности x. Из теоремы 4 следует, что $\dim Y'=n-m$. Из построения ясно, что $\dim\Theta_{x,Y}=n-m$ и, значит, $\dim Y=n-m$. Поэтому $Y=Y'$, а так как, согласно теореме 4, $\mathfrak{a}_{Y'}=(u_1, \ldots, u_m)$, то и $\mathfrak{a}_Y=(u_1, \ldots, u_m)$ в некоторой окрестности точки x. Теорема доказана.

В частном случае $X=\mathbf{A}^m$ и $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ мы уже доказали аналогичный факт в п. 3 § 2.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если t — локальный параметр простой точки алгебраической кривой, то любая функция $f\in\mathcal{O}_x$ однозначно представляется в виде $f=t^nu$, где $n\geqslant 0$, а u — обратимый элемент из $\mathcal{O}_x$. Вывести отсюда теорему 2 для кривых.

2. Доказать обращение теоремы 1 § 2: если подмногообразия коразмерности 1 $D_1, \ldots, D_n$ пересекаются трансверсально в точке x и $u_1, \ldots, u_n$ — их локальные уравнения в окрестности этой точки, то $u_1, \ldots, u_n$ образуют систему локальных параметров в точке x.

3. Верно ли следствие 2 теоремы 3 без предположения гладкости? Верна ли теорема 3 без такого же предположения?

4. Доказать, что точка x алгебраической кривой X тогда и только тогда простая, когда она обладает локальным уравнением.

5. Конус $X\subset\mathbf{A}^3$ задается уравнением $x^2+y^2-z^2=0$. Доказать, что его образующая L, заданная уравнениями $x=0$, $y=z$, не обладает локальным уравнением ни в какой окрестности точки $(0, 0, 0)$.

6. Рациональное отображение φ: $\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ задается формулой $\varphi(x_0:x_1:x_2)=(x_1x_2:x_0x_2:x_0x_1)$. Пусть $x=(1:0:0)$ и $C\subset\mathbf{P}^2$ — кривая, не особая в x. Согласно теореме 3 отображение φ, ограниченное на C, регулярно в x и поэтому переводит x в некоторую точку, которую мы обозначим через $\varphi_C(x)$. Доказать, что $\varphi_{C_1}(x)=\varphi_{C_2}(x)$ тогда и только тогда, когда кривые C_1 и C_2 касаются в точке x, т. е. $\Theta_{x,C_1}=\Theta_{x,C_2}$.

7. Доказать, что если $\varphi=\dfrac{f}{g}$ — рациональная функция, f и g регулярны в простой точке x и степенной ряд $\tau(f)$ делится на $\tau(g)$, то φ регулярна в точке x. У к а з а н и е. Использовать те же рассуждения, что и в предложении 1 п. 7 Приложения.

8. Пусть $X\subset\mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие и $x\in X$. Пусть $\mathfrak{a}_X=(f_1, \ldots, f_m)$. Доказать, что $\widehat{\mathcal{O}}_x\simeq k[[T_1, \ldots, T_n]]/\bar{\mathfrak{a}}_X$, где $\bar{\mathfrak{a}}_X=(\tau(f_1), \ldots, \tau(f_m))$. У к а з а н и е. Здесь надо воспользоваться свойствами из [3], гл. 10. В следующих задачах это утверждение будет использоваться.

9. Доказать, что формально-аналитическая эквивалентность $\mathbf{A}^n$ с собой (автоморфизм) в окрестности O задается такими рядами $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ без свободных членов, что определитель, составленный из линейных членов, отличен от 0.

10. Доказать, что две плоские кривые с уравнениями $F=0$ и $G=0$, проходящие через начало координат $O\in\mathbf{A}^2$, тогда и только тогда формально-аналитически эквивалентны в окрестности O, когда существует такой формальный автоморфизм $\mathbf{A}^2$, задаваемый рядами Φ_1, Φ_2, что $F(\Phi_1, \Phi_2)=G\cdot U$, где U — степенной ряд со свободным членом, не равным 0.

11. Доказать, что все плоские алгебраические кривые, имеющие начало координат O двойной особой точкой с различными касательными, формально-аналитически эквивалентны в окрестности O кривой с уравнением $xy=0$. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 10. Искать Φ_1 и Φ_2 по все более высоким степеням идеала (x, y).

12. Дать формально-аналитическую классификацию двойных особых точек плоских алгебраических кривых над полем k характеристики 0.

13. Пусть X — гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$ с уравнением $F = F_2(T) + F_3(T) + \ldots + F_k(T) = 0$, где $F_2(T)$ — квадратичная форма ранга n. Доказать, что X формально-аналитически эквивалентна в окрестности O конусу $T_1^2 + \ldots + T_n^2 = 0$.

14. Построить бесконечное число гладких проективных кривых, попарно неизоморфных друг другу над полем вещественных чисел.

15. Пусть гладкое неприводимое аффинное n-мерное многообразие X задается уравнениями $F_1 = \ldots = F_m = 0$ и пространство, определенное уравнениями $\sum \frac{\partial F_i}{\partial T_j}(T_j - x_j) = 0$ для всех $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X$, имеет размерность n. Доказать, что тогда $\mathfrak{a}_X = (F_1, \ldots, F_m)$. Вывести отсюда, что левые части уравнений $x \wedge x = 0$ порождают идеал грассманова многообразия $G(2, r)$ (ср. пример 1 в п. 3 § 1).

§ 4. Строение бирациональных изоморфизмов

1. σ-процесс в проективном пространстве. В предыдущем параграфе мы доказали (следствие 2 теоремы 3), что бирациональный изоморфизм между проективными кривыми является изоморфизмом. Для многообразия большего числа измерений такой факт неверен: например, стереографическая проекция, устанавливающая бирациональный изоморфизм между невырожденной поверхностью 2-го порядка и проективной плоскостью, не является регулярным отображением (задача 7 к § 4 гл. I и предложение после следствия 5 теоремы 4 § 6 гл. I). В этом параграфе мы определим и исследуем простейший и типичный бирациональный, но не регулярный изоморфизм: σ-процесс.

Рассмотрим проективные пространства $\mathbf{P}^n$ с однородными координатами $x_0, \ldots, x_n$ и $\mathbf{P}^{n-1}$ с однородными координатами $y_1, \ldots, y_n$.

В пространстве $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$ точку $x \times y$, $x = (x_0 : \ldots : x_n)$, $y = (y_1 : \ldots : y_n)$, мы будем обозначать также через $(x_0 : \ldots : x_n;\ y_1 : \ldots : y_n)$. Рассмотрим замкнутое подмногообразие $\Pi \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$, определенное уравнениями

$$x_i y_j = y_i x_j, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n. \tag{1}$$

Определение 1. Отображение $\sigma\colon \Pi \to \mathbf{P}^n$, определенное проекцией $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}^n$, называется *σ-процессом*.

Обозначим точку $(1 : 0 : \ldots : 0) \in \mathbf{P}^n$ через ξ. Если $(x_0 : \ldots : x_n) \neq \xi$, то из уравнений (1) следует, что $(y_1 : \ldots : y_n) = (x_1 : \ldots : x_n)$ и, значит, отображение

$$(x_0 : \ldots : x_n) \to (x_0 : \ldots : x_n;\ x_1 : \ldots : x_n) \tag{2}$$

является обратным к σ. Если же $(x_0 : \ldots : x_n) = \xi$, то уравнениям удовлетворяют любые значения y_i. Таким образом, $\sigma^{-1}(\xi) = \xi \times \mathbf{P}^{n-1}$ и σ определяет изоморфизм между $\mathbf{P}^n - \xi$ и $\Pi - (\xi \times \mathbf{P}^{n-1})$. Точка ξ называется *центром* σ-процесса.

Опишем теперь строение Π в окрестности точек вида $(\xi;\ y_1 : \ldots : y_n)$. При некотором i $y_i \neq 0$ и, следовательно, выбранная точка лежит в открытом множестве U_i, определенном условиями $x_0 \neq 0$, $y_i \neq 0$. В этом множестве мы можем даже считать $x_0 = 1$, $y_i = 1$. Уравнения (1) примут тогда вид $x_j = y_j x_i$, $1 \leqslant j \neq i \leqslant n$. Отсюда следует, что U_i изоморфно аффинному пространству с координатами $y_1, \ldots, x_i, \ldots, y_n$.

В частности, мы видим, что Π не особо и, значит, ввиду теоремы 6 § 2 неприводимо в окрестности каждой своей точки. Мы увидим вскоре, что Π неприводимо.

Для того чтобы яснее представить себе действие σ-процесса, рассмотрим его на некоторой прямой L, проходящей через точку ξ. Пусть $x_j = \alpha_j x_i$ $(j = 1, \ldots, n, j \neq i)$ — уравнение этой прямой. На L отображение (2) принимает вид $\sigma^{-1}(x_0 : \ldots : x_n) = (x_0 : \ldots : x_n;\ \alpha_1 : \ldots : 1 : \ldots : \alpha_n)$. Мы видим, что σ^{-1} регулярно на L и переводит ее в кривую $\sigma^{-1}(L)$, которая пересекает $\xi \times \mathbf{P}^{n-1}$ в точке $(\xi;\ \alpha_1 : \ldots : \underset{i}{1} : \ldots : \alpha_n)$. Мы можем интерпретировать этот результат так. Отображение σ^{-1} нерегулярно в точке ξ, но, рассмотрев его на прямой L, получаем регулярное отображение $\sigma^{-1}\colon L \to \Pi$. Пользуясь им, мы можем доопределить σ^{-1} в точке ξ (над полем действительных или комплексных чисел это означало бы, что мы определим $\sigma^{-1}(x)$ при $x \in L$ и устремляем $x \to \xi$ по направлению L). Однако результат зависит от выбора L (предельный переход зависит от направления, по которому мы его осуществляем). Выбирая разные L, мы получаем всевозможные точки на $\xi \times \mathbf{P}^{n-1}$. Таким образом, хотя σ^{-1} и нерегулярно в точке ξ, разрешая получающуюся неопределенность, мы получаем не любые точки Π, а только точки из $\xi \times \mathbf{P}^{n-1}$. Имея в виду эту картину, говорят, что σ^{-1} **раздувает** ξ **в** $\xi \times \mathbf{P}^{n-1}$.

Заметим, что заодно мы доказали неприводимость Π. Действительно,

$$\Pi = (\xi \times \mathbf{P}^{n-1}) \cup \overline{(\Pi - (\xi \times \mathbf{P}^{n-1}))}.$$

Так как $\Pi - (\xi \times \mathbf{P}^{n-1})$ изоморфно $\mathbf{P}^n - \xi$, то оно неприводимо, а значит, неприводимо и $\overline{\Pi - (\xi \times \mathbf{P}^{n-1})}$. Нам надо только убедиться, что

$$\xi \times \mathbf{P}^{n-1} \subset \overline{\Pi - (\xi \times \mathbf{P}^{n-1})}.$$

Но заведомо

$$\sigma^{-1}(L) \subset \overline{\Pi - (\xi \times \mathbf{P}^{n-1})}$$

и, значит,

$$\sigma^{-1}(L) \cap (\xi \times \mathbf{P}^{n-1}) \subset \overline{\Pi - (\xi \times \mathbf{P}^{n-1})}.$$

Мы же видели, что при надлежащем выборе L в левой части получается любая точка из $\xi \times \mathbf{P}^{n-1}$.

При $n = 2$ можно наглядно представить себе отображение $\sigma\colon \Pi \to \mathbf{P}^2$ и его действие на прямые L: кривые

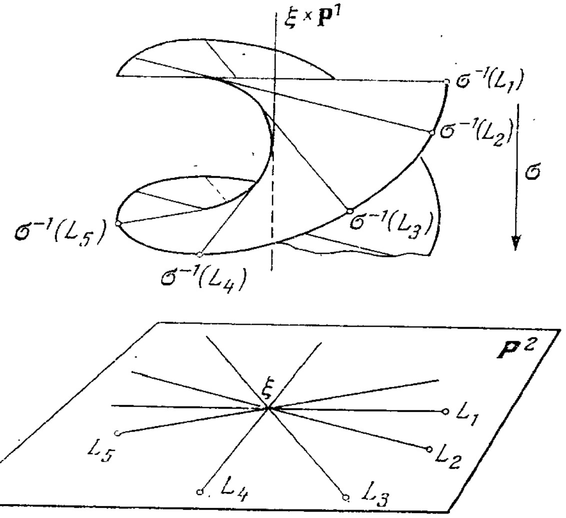


Рис. 10.

$\sigma^{-1}(L)$ пересекают прямую $\xi \times \mathbf{P}^1$ в точках, которые изменяются по мере того, как L поворачивается в $\mathbf{P}^2$ вокруг ξ. Таким образом, Π выглядит похоже на один виток винта (рис. 10).

2. Локальный σ-процесс. Теперь мы построим для любого квазипроективного многообразия X и его простой точки x многообразие Y и отображение $\sigma\colon Y \to X$, аналогичное тому, которое в п. 1 было построено для $X = \mathbf{P}^n$.

Начнем с одной вспомогательной конструкции.

Пусть X — квазипроективное многообразие, ξ — его простая точка и $u_1, \ldots, u_n$ — функции, регулярные на всем X и такие, что

а) уравнения $u_1 = \ldots = u_n = 0$ имеют на X единственное решение ξ;

б) функции $u_1, \ldots, u_n$ образуют систему локальных координат в ξ.

Рассмотрим произведение $X \times \mathbf{P}^{n-1}$ и в нем подмногообразие Y, состоящее из таких точек $(x;\ t_1 : \ldots : t_n)$, $x \in X$, $(t_1 : \ldots : t_n) \subset \mathbf{P}^{n-1}$, что $u_i(x) t_j = u_j(x) t_i$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. Регулярное отображение $\sigma\colon Y \to X$, являющееся ограничением на Y проекции $X \times \mathbf{P}^{n-1} \to X$, называется *локальным σ-процессом* с центром в ξ.

Заметим, что эта конструкция, вообще говоря, неприменима к случаю, когда X проективно,— мы требуем существования на X непостоянных регулярных всюду функций $u_1, \ldots, u_n$. Поэтому новое понятие не охватывает введенного раньше понятия σ-процесса для случая, когда $X = \mathbf{P}^n$. Связь между ними заключается в следующем.

Обозначим через X аффинное подмножество, определенное в $\mathbf{P}^n$ условием $x_0 \neq 0$, и положим $Y = \sigma^{-1}(X)$. Тогда отображение $\sigma\colon Y \to X$, индуцированное на Y σ-процессом $\Pi \to \mathbf{P}^n$, будет локальным σ-процессом.

Следующие свойства, доказанные нами в п. 1 для σ-процесса, дословно так же доказываются для локального σ-процесса: отображение $\sigma\colon Y \to X$ регулярно и определяет изоморфизм

$$Y - (\xi \times \mathbf{P}^{n-1}) \to X - \xi.$$

В точке $y \in \sigma^{-1}(\xi)$ при некотором i $t_i \neq 0$ и мы можем положить $s_j = \dfrac{t_j}{t_i}$, $j \neq i$. Уравнение Y принимают вид $u_j = u_i s_j$ $(j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$. Отсюда мы видим, что идеал точки y имеет вид

$$\mathfrak{m}_y = (u_1 - u_1(y), \ldots, u_n - u_n(y),\ s_1 - s_1(y), \ldots, s_n - s_n(y)) =$$
$$= (s_1 - s_1(y), \ldots, u_i - u_i(y), \ldots, s_n - s_n(y)).$$

Поэтому $\dim \Theta_{y,Y} \leqslant n$, а так как $\dim \sigma^{-1}(X-\xi)=n$, то в любой точке $y \in \sigma^{-1}(X-\xi)$ многообразие Y гладко. Так как

$$Y=\sigma^{-1}(X-\xi) \cup (\xi \times \mathbf{P}^{n-1}),$$

то Y или неприводимо и совпадает с замыканием $\overline{\sigma^{-1}(X-\xi)}$ множества $\sigma^{-1}(X-\xi)$, или имеет еще одну компоненту, изоморфную $\mathbf{P}^{n-1}$. Во втором случае обе компоненты пересекаются: иначе $\sigma^{-1}(X-\xi)$ было бы замкнуто, но тогда ввиду теоремы 3 § 5 гл. I был бы замкнут и его образ $X-\xi$. Точка пересечения обеих компонент была бы простой, что противоречит теореме 6 § 2. Таким образом, Y неприводимо и гладко, а $s_1-s_1(y)$, ..., $u_i-u_i(y)$, ..., $s_n-s_n(y)$ — локальные параметры в точке $y \in \sigma^{-1}(\xi)$, в которой $t_i \neq 0$.

Очевидно, что локальный σ-процесс является собственным отображением (см. замечание к теореме 3 § 5 гл. I).

Теперь мы докажем свойство, которое можно назвать независимостью локального σ-процесса от выбора функций $u_1, \ldots, u_n$.

Лемма. *Если $v_1, \ldots, v_n$ — другая система функций на X, удовлетворяющая условиям* а) *и* б), *Y' — получающееся при помощи нее многообразие, $\sigma'\colon Y' \to X$ — соответствующий локальный σ-процесс, то Y' и Y изоморфны.*

Существует даже такой изоморфизм $\varphi\colon Y \to Y'$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & Y' \arrow[dl, "\sigma'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть $Y' \subset X \times \mathbf{P}^{n-1}$ и однородные координаты в $\mathbf{P}^{n-1}$ обозначены через $t'_1, \ldots, t'_n$. В открытых множествах $Y-\sigma^{-1}(\xi)$ и $Y'-\sigma'^{-1}(\xi)$ мы положим

$$\begin{aligned} &\varphi(x;\ t_1:\ldots:t_n)=(x;\ v_1(x):\ldots:v_n(x)),\\ &\psi(x;\ t'_1:\ldots:t'_n)=(x;\ u_1(x):\ldots:u_n(x)). \end{aligned} \tag{1}$$

Из свойства а) функций u_i следует, что φ и ψ регулярны и $\varphi(Y-\sigma^{-1}(\xi)) \subset Y'$, $\psi(Y'-\sigma'^{-1}(\xi)) \subset Y$.

Рассмотрим теперь открытое множество, в котором $t_i \neq 0$, и положим в нем $s_j=\dfrac{t_j}{t_i}$. Так как $v_k(\xi)=0$, а $u_1, \ldots, u_n$ — базис идеала $\mathfrak{m}_\xi$, то

$$v_k=\sum_{j=1}^{n} h_{kj}u_j, \quad h_{kj} \in \mathcal{O}_\xi. \tag{2}$$

Так как в нашем открытом множестве $u_j=u_is_j$, то

$$\begin{aligned} v_k &= u_i\sum_{j=1}^{n} \sigma^*(h_{kj})\,s_j=u_ig_k,\\ g_k &= \sum_{j=1}^{n} \sigma^*(h_{kj})\,s_j. \end{aligned} \tag{3}$$

Мы положим $\varphi(x;\ t_1:\ldots:t_n)=(x;\ g_1:\ldots:g_n)$. Очевидно, что наше отображение совпадает с (1) в области определения их обоих, так как там $g_k=\dfrac{v_k}{u_i}$. Проверим, что φ регулярно. Для этого нам надо доказать, что $g_1, \ldots, g_n$ не обращаются одновременно в 0 ни в какой точке $\eta \in \sigma^{-1}(\xi)$. Пусть все $g_k(\eta)=0$. Так как не все $s_j(\eta)=0$ ($s_i=1$), то из (3) следует, что $|h_{kj}(\xi)|=0$. Но $v_k \equiv \equiv \Sigma h_{kj}(\xi)\,u_j\,(\mathfrak{m}_\xi^2)$, и отсюда следовало бы, что v_k линейно зависимы в $\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2$, в то время как они образуют систему локальных параметров в точке ξ. Таким образом, мы определяем единое отображение $\varphi\colon Y \to Y'$ и аналогично $\psi\colon Y' \to Y$. То, что они обратны друг другу, достаточно проверить на открытом множестве, где имеют место формулы (1). Там это очевидно.

3. **Поведение подмногообразий при σ-процессе.** Пусть X — квазипроективное подмногообразие в $\mathbf{P}^N$, $\sigma\colon \Pi \to \mathbf{P}^N$ — σ-процесс, определенный в п. 1. Мы исследуем прообраз $\sigma^{-1}(X)$ подмногообразия X, который, конечно, является квазипроективным подмногообразием в Π.

Теорема 1. *Если $X \subset \mathbf{P}^N$, X не особо в точке ξ и $X \neq \mathbf{P}^N$, то относительно σ-процесса с центром в ξ прообраз $\sigma^{-1}(X)$ приводим и состоит из двух компонент:*

$$\sigma^{-1}(X)=(\xi \times \mathbf{P}^{N-1}) \cup Y. \tag{1}$$

На компоненте Y отображение $\sigma\colon Y \to X$ определяет регулярное отображение. Оно является изоморфизмом *некоторой окрестности U точки $x \in X$ и $\sigma^{-1}(U)$, если $x \neq \xi$, и локальным σ-процессом $\sigma^{-1}(U) \to U$, если $x = \xi$.*

Доказательство. Обозначим через Y замыкание $\overline{\sigma^{-1}(X-\xi)}$ множества $\sigma^{-1}(X-\xi)$. Так как σ^{-1} является изоморфизмом в $\mathbf{P}^N - \xi$, то $\sigma^{-1}(X-\xi)$ изоморфно $X-\xi$, а значит, неприводимо. Следовательно, неприводимо и Y. Из определения очевидно, что имеет место (1); если $x \in X - \xi$, то

$$\sigma^{-1}(x) \in Y, \quad \sigma^{-1}(\xi) = \xi \times \mathbf{P}^{N-1}.$$

То, что σ: $Y \to X$ является изоморфизмом в окрестности любой точки $x \in X$, кроме $x = \xi$, уже отмечалось. Нам осталось исследовать это отображение в окрестности ξ.

При этом мы воспользуемся тем, что в аффинном пространстве, содержащем точку ξ, σ-процесс описывается как локальный σ-процесс, и тем, что локальный σ-процесс не зависит от выбора локальных координат. Именно, согласно теореме 5 § 3, мы можем так выбрать систему локальных координат $u_1, \ldots, u_N$ в точке $\xi \in \mathbf{P}^N$, что в некоторой окрестности этой точки многообразие X будет задаваться уравнениями

$$u_{n+1} = \ldots = u_N = 0, \tag{2}$$

а функции $u_1, \ldots, u_n$ будут определять локальную систему координат в точке ξ на X. Мы можем выбрать такую окрестность $U \subset \mathbf{P}^N$ точки ξ, что $u_1, \ldots, u_N$ будут удовлетворять условиям а) и б) леммы п. 2, и, таким образом, доказательство теоремы сводится к частному случаю, когда X задано уравнениями (2).

Из условий а) и б) и $u_i t_j = u_j t_i$ мы получаем, что, для $x \neq \xi$, $t_{n+1}(x) = \ldots = t_N(x) = 0$. Поэтому Y содержится в подпространстве Y', определенном в $X \times \mathbf{P}^{N-1}$ уравнениями

$$t_{n+1} = \ldots = t_N = 0, \tag{3}$$

$$u_i t_j = u_j t_i, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n. \tag{4}$$

Если обозначим через $\mathbf{P}^{n-1}$ подпространство проективного пространства $\mathbf{P}^{N-1}$, определенное уравнениями (3), то увидим, что $Y' \subset X \times \mathbf{P}^{n-1}$ и определяется уравнениями (4). Таким образом, Y' совпадает с многообразием, получающимся при локальном σ-процессе. Мы доказали, что $Y' = \overline{\sigma^{-1}(X-\xi)}$. Поэтому $Y = Y'$, что и доказывает теорему.

Мы можем дать теперь самое общее определение σ-процесса. Если X — квазипроективное многообразие, $X \subset \mathbf{P}^n$, ξ — его простая точка и Y — то многообразие, которое введено в формулировке теоремы 1, то σ: $Y \to X$ называется *σ-процессом с центром* ξ. Из того, что было доказано о локальном σ-процессе, следует, что Y неприводимо, если неприводимо X, все точки из $\sigma^{-1}(\xi)$ просты на Y и $\sigma^{-1}(\xi) \simeq \xi \times \mathbf{P}^{n-1}$.

Заметим, что σ-процесс является изоморфизмом, если X — кривая. Таким образом, наличие нетривиального σ-процесса является типичным для многомерной алгебраической геометрии.

4. Исключительные подмногообразия. Пример σ-процесса указывает на принципиальное различие между алгебраическими кривыми и многообразиями размерности $n > 1$. В то время как бирациональный изоморфизм для неособых проективных кривых является изоморфизмом, σ-процесс дает пример того, что это может быть не так при бóльших размерностях.

Отметим одну особенность σ-процесса — он является регулярным отображением и не является изоморфизмом только потому, что рациональное отображение σ^{-1} нерегулярно (в точке ξ).

В этом пункте мы исследуем отображения f: $X \to Y$, f — регулярное отображение и бирациональный изоморфизм, т. е. $f^{-1} = g$ является рациональным, но нерегулярным отображением $Y \to X$. На примере σ-процесса вы видели, что подмногообразие коразмерности 1 в Y стягивается в точку ξ. Мы покажем, что аналогичное свойство всегда имеет место в такой ситуации.

Теорема 2. *Пусть f: $X \to Y$ — регулярное отображение и бирациональный изоморфизм, $x \in X$, $y = f(x)$ является простой точкой на Y и отображение $g = f^{-1}$ нерегулярно в точке y. Тогда существует такое подмногообразие $Z \subset X$, $Z \ni x$, что* $\operatorname{codim} Z = 1$, $\operatorname{codim} f(Z) \geqslant 2$.

Доказательство. Мы можем в случае необходимости заменить X аффинной окрестностью точки x и поэтому считать, что X аффинно.

Пусть $X \subset \mathbf{A}^N$ и $g = f^{-1}$ задается формулами $t_i = g_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, $g_i \in k(Y)$, где $t_1, \ldots, t_N$ — координаты в $\mathbf{A}^N$.

Очевидно, что $g_i = g^*(t_i)$, и так как g нерегулярно в точке y, то хоть одна из функций g_i нерегулярна в y. Пусть это будет g_1, так что $g_1 \notin \mathcal{O}_y$. Мы можем представить g_1 в виде $g_1 = \frac{u}{v}$, u, $v \in \mathcal{O}_y$, $v(y) = 0$ и ввиду однозначности разложения на простые множители в $\mathcal{O}_y$ (по предположению, точка y проста) выбрать u и v взаимно простыми. Так как $g = f^{-1}$, то $t_1 = f^*(g_1) = f^*\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{f^*(u)}{f^*(v)}$, и поэтому

$$f^*(v)\,t_1 = f^*(u). \tag{1}$$

Очевидно, что $f^*(v)(x) = 0$, так что $x \in V(f^*(v))$. Положим $Z = V(f^*(v))$. По теореме о размерности пересечения $\operatorname{codim} Z = 1$, так как $x \in Z$, и поэтому Z не пусто. Из (1) следует, что $f^*(u) = 0$ на Z, так как t_1 — регулярная функция. Поэтому на $f(Z)$ и $u = 0$ и $v = 0$ и, значит, $f(Z) \subset V(u) \cap V(v)$.

Остается проверить, что $\operatorname{codim}(V(u) \cap V(v)) \geqslant 2$. Но если бы $V(u) \cap V(v)$ содержало компоненту $Y' \ni y$, $\operatorname{codim} Y' = 1$, то Y' имела бы, согласно теореме 1 § 3, локальное уравнение h. Это значит, что $u \in (h)$, $v \in (h)$, а это противоречит тому, что u и v не имеют общего множителя в кольце $\mathcal{O}_y$.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ — регулярное отображение, являющееся бирациональным изоморфизмом. Подмногообразие $Z \subset X$ называется *исключительным*, если $\operatorname{codim} Z = 1$, $\operatorname{codim} f(Z) \geqslant 2$.

Следствие 1. *Если регулярное отображение гладких многообразий $f\colon X \to Y$ является бирациональным изоморфизмом, но не изоморфизмом, то оно имеет исключительное подмногообразие.*

Следствие 2. *Если $f\colon X \to Y$ — регулярное отображение, являющееся бирациональным изоморфизмом, X и Y — кривые и Y гладкая, то $f(X)$ открыто в Y и f определяет изоморфизм между X и $f(X)$.*

Что $f(X)$ открыто в Y, следует из того, что у X и Y существуют изоморфные открытые подмножества U и V. Так как $f(U) = V$ получается из Y выбрасыванием конечного числа точек, то тем более так получается $f(X)$, т. е. оно открыто в Y. Если бы отображение $f\colon X \to f(X)$ не было изоморфизмом, то мы пришли бы к противоречию с теоремой 2, так как в нашем случае только пустое множество имеет коразмерность $\geqslant 2$.

5. Изоморфизм и бирациональный изоморфизм. Рассмотрим класс всех бирационально изоморфных друг другу алгебраических квазипроективных многообразий. Всех представителей этого класса мы будем называть его *моделями*.

В следующем параграфе мы докажем, что в каждом классе бирационально изоморфных кривых существует проективная гладкая модель X_0. Следствие 2 теоремы 3 § 3 утверждает, что такая модель существует (с точностью до изоморфизма) только одна. Поэтому если мы сопоставим каждому классу единственную содержащуюся в нем неособую проективную модель, то мы сведем вопрос о классификации алгебраических кривых с точностью до бирационального изоморфизма к вопросу о классификации неособых проективных кривых с точностью до изоморфизма.

Поля функций на алгебраических кривых — это расширения степени трансцендентности 1 поля k, порожденные над k конечным числом элементов. Поэтому мы можем установить взаимно однозначное соответствие между такими полями K и неособыми проективными кривыми. В этом соответствии $K = \mathrm{k}(X)$. Мы будем также называть X *моделью* поля K.

Можно попробовать непосредственно найти модель X, исходя из алгебраических свойств поля K. Уточним этот вопрос, спросив, как охарактеризовать внутри поля K локальные кольца всех точек кривой X. Легко проверить, что каждое локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ точки $x \in X$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{O}$ — подкольцо поля K, $\mathrm{k} \overset{\subset}{\neq} \mathcal{O} \overset{\subset}{\neq} K$;

2) $\mathcal{O}$ — локальное кольцо и его максимальный идеал $\mathfrak{m}$ главный: $\mathfrak{m} = (u)$;

3) поле отношений кольца $\mathcal{O}$ совпадает с K.

Можно доказать (задачи 7, 8, 9), что любое подкольцо $\mathcal{O}$ поля K, обладающее свойствами 1), 2), 3), совпадает с локальным кольцом $\mathcal{O}_x$ некоторой точки $x \in X$. Таким образом, модель X универсальна — она содержит все локальные кольца поля K, удовлетворяющие естественным условиям 1, 2) и 3).

Как решаются эти вопросы для многообразий размерности $n > 1$? С существованием проективной неособой модели дело обстоит сравнительно благополучно — ее существование доказано в случае $n = 2, 3$ (Уокер, Зарисский для полей характеристики 0 и Абьянкар для конечной характеристики, большей 5) и для произвольного n

в случае характеристики 0 (Хиронака). Для произвольного поля и произвольного n ее существование представляется очень правдоподобным. Наоборот, единственность неособой проективной модели является исключительной особенностью случая $n=1$. Это видно на примере проективной плоскости $\mathbf{P}^2$ и поверхности 2-го порядка, которые бирационально изоморфны, но не изоморфны.

Можно поставить вопрос о существовании в каждом классе бирационально изоморфных многообразий модели, которая была бы универсальной в том смысле, чтобы локальные кольца ее точек, как и в случае $n=1$, исчерпывали все локальные подкольца поля $K=\mathrm{k}(X)$, удовлетворяющие условиям 1), 2) и 3) (с заменой в условии 2) $\mathfrak{m}=(u)$ на $\mathfrak{m}=(u_1, \ldots, u_n)$). Однако такой модели тоже не может быть и по тем же соображениям. Именно, если $\sigma\colon X' \to X$ — σ-процесс с центром $\xi \in X$, то локальные кольца точек $y \in \sigma^{-1}(\xi)$ не совпадают ни с одним из локальных колец $\mathcal{O}_x$, $x \in X$. Читатель легко докажет это в качестве упражнения. Правда, объединяя все неособые модели одного класса, мы можем получить некоторый объект, обладающий этим свойством универсальности, но зато он не будет конечномерным алгебраическим многообразием. Кое-что об этой «бесконечной модели» можно прочитать в [17], т. 2, гл. VI, § 17.

В связи с отсутствием одной выделенной модели возникает задача изучения связей между разными неособыми проективными моделями одного класса бирационально изоморфных многообразий. Мы опишем без доказательства основные из имеющихся здесь результатов.

Все многообразия дальше будут предполагаться неприводимыми, гладкими и проективными.

Начнем с двух терминов. Модель X' *доминирует* X, если существует бирациональное регулярное отображение $f\colon X' \to X$.

Многообразие называется *относительно минимальной моделью*, если оно не доминирует никакого многообразия, не изоморфного ему. Например, гладкая проективная кривая является всегда относительно минимальной моделью. Ввиду теоремы 2 многообразие является относительно минимальной моделью, если оно не имеет исключительных подмногообразий.

Можно доказать, что всякое многообразие доминирует хотя бы одну относительно минимальную модель. Таким образом, в каждом классе бирационально изоморфных многообразий существует хотя бы одна относительно минимальная модель.

Возникает важный вопрос о ее единственности. Если бы в каждом классе существовала такая единственная модель, то это опять сводило бы бирациональную классификацию к классификации с точностью до изоморфизма.

Однако при $n>1$ это не так. Пример дают проективная плоскость $\mathbf{P}^2$ и поверхность 2-го порядка Q, которые, как мы знаем, бирационально изоморфны, так что являются моделями одного и того же класса бирационально изоморфных поверхностей. Мы докажем, что $\mathbf{P}^2$ и Q являются относительно минимальными моделями, т. е. не имеют исключительных кривых. Так как $\mathbf{P}^2$ и Q неизоморфны (замечание 1 в п. 2 § 6 гл. I), то это и дает нужный пример.

В нашем случае неприводимая исключительная кривая $C \subset X$ должна регулярным бирациональным отображением $f\colon X \to Y$ стягиваться в точку $y \in Y$: $f(C)=y$. При этом X и Y — проективные поверхности. Такие кривые обладают рядом очень специальных свойств (чем и объясняется термин «исключительные»). Мы приведем только одно из них.

Согласно теореме 3 § 3 отображение f^{-1} нерегулярно только в конечном числе точек $y_i \in Y$. Пусть U — столь малая аффинная окрестность точки y, что f^{-1} регулярно во всех точках U, отличных от y. Положим $V=f^{-1}(U)$, $C=f^{-1}(y)$. Очевидно, V является открытым подмножеством X и $V \supset C$. Мы покажем, что в V не содержится никакой замкнутой в Y неприводимой кривой C', не содержащейся в C. Действительно, C' является проективной кривой и ее образ $f(C')$ также проективен. Но $f(C') \subset U$, которое аффинно. Согласно следствию 2 теоремы 2 § 5 гл. I это возможно, только если $f(C')=y'$ является точкой. Если $y' \neq y$, то, так как вне y отображение f^{-1} является в U изоморфизмом, C' тоже должна быть точкой. Если же $y'=y$, то $C' \subset f^{-1}(y)=C$.

Таким образом, C лежит изолированно в X — в некоторой ее окрестности V не существует никаких неприводимых проективных кривых, не содержащихся в C. Иначе говоря, C нельзя «немного пошевелить». Отсюда можно вывести, что многие поверхности не содержат исключительных кривых.

Пусть, например, $X = \mathbf{P}^2$, $V = \mathbf{P}^2 - D \supset C$, где C — исключительная кривая. Тогда $\dim D = 0$, так как иначе C и D пересекались бы согласно теореме о размерности пересечения. Но если $\dim D = 0$, т. е. D — конечное множество точек, то существует сколько угодно кривых C, не пересекающих D, например прямых.

Пусть $X = Q$. Здесь мы воспользуемся наличием группы проективных преобразований G, переводящих Q в себя. Напомним, что преобразования из G задаются матрицами 4-го порядка A, удовлетворяющими соотношению $A^*FA = F$, где F — матрица уравнения поверхности Q. Отсюда следует, что G составляет алгебраическое подмногообразие в пространстве всех матриц 4-го порядка. Поэтому мы будем дальше считать G алгебраическим аффинным многообразием.

Если C — кривая и $C \subset Q - D$, то мы построим такое преобразование $\varphi \in G$, что $\varphi(C) \not\subset C$, $\varphi(C) \subset Q - D$, а это противоречит полученному выше свойству исключительных кривых. Для этого достаточно доказать, что множество тех $\varphi \in G$, для которых $\varphi(C) \cap D \neq \varnothing$, является замкнутым. Тогда в нашем распоряжении будет целая окрестность единичного преобразования $e \in G$, состоящая из элементов с нужным свойством. Для того чтобы описать множество S тех $\varphi \in G$, для которых $\varphi(C) \cap D \neq \varnothing$, рассмотрим в прямом произведении $G \times Q$ множество Γ таких пар (φ, x), что $x \in C$, $\varphi(x) \in D$. Очевидно, что Γ замкнуто. Если $f\colon G \times Q \to G$ — проекция, то $S = f(\Gamma)$, а $f(\Gamma)$ замкнуто согласно теореме 2 § 5 гл. I. Это заканчивает доказательство существования двух различных минимальных моделей.

Тем более удивительно, что все же единственность минимальной модели имеет место для алгебраических поверхностей, если только исключить несколько специальных типов. А именно, как показал Энриквес, в классе поверхностей минимальная модель единственна, если в этом классе не содержится поверхность вида $C \times \mathbf{P}^1$, где C — алгебраическая кривая. (Поверхности, бирационально изоморфные $C \times \mathbf{P}^1$, называются *линейчатыми*.) Доказательство теоремы Энриквеса изложено в [1], гл. II.

В настоящее время имеются значительные продвижения в направлении построения теории минимальных моделей в размерности $\geqslant 3$. В этом случае минимальная модель не может существовать в классе гладких многообразий, но есть основания надеяться, что теория сохраняется, если допустить некоторый класс достаточно хорошо контролируемых особых точек. См. об этом, например, обзоры [20] и [30].

ЗАДАЧИ

1. Пусть $\dim X = 2$, ξ — простая точка X, C_1 и $C_2 \subset X$ — две кривые, проходящие через ξ и неособые в ней; $\sigma\colon Y \to X$ — σ-процесс с центром в точке ξ, $C_i' = \sigma^{-1}(C_i - \xi)$, $Z = \sigma^{-1}(\xi)$. Доказать, что $C_1' \cap Z = C_2' \cap Z$ тогда и только тогда, когда C_1 и C_2 касаются в точке ξ.

2. Пусть $\dim X = 2$, ξ — простая точка X, $C \subset X$ — кривая, $C \ni \xi$ и f — локальное уравнение C в окрестности ξ. Пусть $f \equiv \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i u + \beta_i v)^{l_i} \left(\mathfrak{m}_\xi^{k+1}\right)$, $\sum l_i = k$, где u и v — локальные параметры в ξ, а формы $\alpha_i u + \beta_i v$ не пропорциональны друг другу. Как и в задаче 1, $\sigma\colon Y \to X$; $C' = \overline{\sigma^{-1}(C - \xi)}$. Доказать, что $C' \cap Z$ состоит из r точек.

3. Обозначения задачи 2, но, сверх того, $f \equiv (\alpha_1 u + \beta_1 v) \times (\alpha_2 u + \beta_2 v) \left(\mathfrak{m}_\xi^3\right)$ и линейные формы $\alpha_1 u + \beta_1 v$ и $\alpha_2 u + \beta_2 v$ непропорциональны. Доказать, что обе точки $C' \cap Z$ простые на C'.

4. Рассмотрим рациональное отображение $\varphi\colon \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^4$, заданное формулой

$$\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = \left(x_0 x_1 : x_0 x_2 : x_1^2 : x_1 x_2 : x_2^2\right).$$

Доказать, что φ — бирациональный изоморфизм, а обратное отображение $\overline{\varphi(\mathbf{P}^2)} \to \mathbf{P}^2$ совпадает с σ-процессом.

5. Аналогично задаче 4 исследовать отображение $\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^6$, определенное всеми одночленами 3-й степени, кроме x_0^3, x_1^3 и x_2^3.

6. Построить пример бирационального изоморфизма $X \to Y$, при котором исключительное подмногообразие коразмерности 1 отображается в подмногообразие коразмерности 2 ($\dim X = n$, n — произвольное).

7. Пусть $\mathcal{O}$ — локальное кольцо поля $k(X)$, удовлетворяющее условиям 1)—3) п. 5 (X — проективная алгебраическая кривая). Доказать, что для любого $u \in k(X)$ или $u \in \mathcal{O}$ или $u^{-1} \in \mathcal{O}$. Пусть $X \subset \mathbf{P}^n$, $x_0, \ldots, x_n$ — однородные координаты в $\mathbf{P}^n$. Доказать, что существует такое i, что $\frac{x_j}{x_i} \in \mathcal{O}$ $(j = 0, \ldots, n)$.

8. Обозначения задачи 7. Пусть X' — аффинная кривая, $X' = X \cap \mathbf{A}_i^n$. Доказать, что $k[X'] \subset \mathcal{O}$, идеал $k[X] \cap \mathfrak{m}$ является идеалом некоторой точки $x \in X'$, а $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$.

9. Доказать, что если два кольца $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ удовлетворяют условиям 1)—3) п. 5 и $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. Вывести отсюда и из задач 7 и 8, что (в обозначениях задачи 8) $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x$.

10. Пусть V — конус 2-го порядка, заданный уравнением $xy = z^2$ в $\mathbf{A}^3$, $X' \to \mathbf{A}^3$ — σ-процесс с центром в начале координат, V' — замыкание подмногообразия $\sigma^{-1}(V - O)$ в X'. Доказать, что V' — гладкое многообразие и прообраз начала координат при отображении σ: $V' \to V$ является гладкой рациональной кривой.

§ 5. Нормальные многообразия

1. Нормальность. Напомним сначала одно алгебраическое понятие. Кольцо A без делителей 0 называется целозамкнутым, если любой элемент поля частных K кольца A, целый относительно A, принадлежит A.

Определение. Неприводимое аффинное многообразие X называется *нормальным*, если кольцо $k[X]$ целозамкнуто. Неприводимое квазипроективное многообразие X называется *нормальным*, если любая его точка имеет аффинную нормальную окрестность.

Мы докажем вскоре, что гладкие многообразия нормальны (теорема 1). Вот пример ненормального многообразия. На кривой X с уравнением

$$y^2 = x^2 + x^3$$

функция $t = \frac{y}{x} \in k(X)$ цела над $k[X]$, так как $t^2 = 1 + x$, однако $t \notin k[X]$ (задача 7 § 3 гл. I).

Приведенный пример показывает, что понятие нормальности имеет некоторое отношение к особым точкам многообразия. Приведем пример многообразия, имеющего особые точки, но нормального. Это — конус X с уравнением $x^2 + y^2 = z^2$ в $\mathbf{A}^3$ (мы предполагаем, что характеристика основного поля $\neq 2$).

Докажем, что кольцо $k[X]$ целозамкнуто в поле $k(X)$. При этом мы будем пользоваться простейшими свойствами целых элементов (см. [3], гл. V). Поле $k(X)$ состоит из элементов вида $u + vz$, $u, v \in k(x, y)$, причем x и y — независимые переменные. Аналогично $k[X]$ состоит из тех элементов поля $k(X)$, для которых $u, v \in k[x, y]$, поэтому $k[X]$ — конечный модуль над $k[x, y]$ и, значит, все элементы кольца $k[X]$ целые над $k[x, y]$. Если $\alpha = u + vz \in k(X)$ целый над $k[X]$, то он должен быть целым и над $k[x, y]$. Его минимальный многочлен имеет вид $T^2 - 2uT + (u^2 - (x^2 + y^2)v^2)$ и, значит, $2u \in k[x, y]$ и $u \in k[x, y]$. Аналогично $u^2 - (x^2 + y^2)v^2 \in k[x, y]$ и, значит, $(x^2 + y^2)v^2 \in k[x, y]$. Так как $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ — произведение двух взаимно простых элементов, то тогда $v \in k[x, y]$, а это и значит, что $\alpha \in k[X]$.

Докажем несколько простых свойств нормальных многообразий.

Лемма. *Если многообразие X нормально, то локальные кольца $\mathcal{O}_Y$ всех его неприводимых подмногообразий $Y \subset X$ целозамкнуты. Наоборот, если целозамкнуты локальные кольца $\mathcal{O}_x$ всех точек $x \in X$ и X неприводимо, то оно нормально.*

Так как определение нормальности носит локальный характер, то мы можем ограничиться случаем, когда X аффинно. Пусть X нормально, $Y \subset X$ и неприводимо. Докажем целозамкнутость кольца $\mathcal{O}_Y$. Пусть $\alpha \in k(X)$ и α цело над $\mathcal{O}_Y$, т. е.

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (1)$$

Здесь $a_i \in \mathcal{O}_Y$ и поэтому $a_i = \frac{b_i}{c_i}$, b_i, $c_i \in k[X]$, $c_i \notin \mathfrak{a}_Y$. Положим $d_0 = c_1 \ldots c_n$ и умножим (1) на d_0. Мы получим, что

$$d_0\alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + \ldots + d_n = 0, \qquad (2)$$

где $d_i \in k[X]$, $d_0 \notin \mathfrak{a}_Y$. Умножив (2) на d_0^{n-1} и положив $d_0\alpha = \beta$, получим, что β цело над $k[X]$. По предположению $k[X]$ целозамкнуто и, значит, $d_0\alpha = \beta \in k[X]$. Тогда $\alpha = \frac{\beta}{d_0} \in \mathcal{O}_Y$, так как $d_0 \notin \mathfrak{a}_Y$.

Пусть все локальные кольца $\mathcal{O}_x$ целозамкнуты. Докажем, что $k[X]$ целозамкнуто. Если $\alpha \in k(X)$ и α цело над $k[X]$, то $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, $a_i \in k[X]$. Но тогда подавно $a_i \in \mathcal{O}_x$ для любого $x \in X$, а так как, по предположению, $\mathcal{O}_x$ целозамкнуто, то $\alpha \in \mathcal{O}_x$. Поэтому $\alpha \in \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_x$. Согласно теореме 4 § 3 гл. I $\bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_x = k[X]$ и, значит, $\alpha \in k[X]$.

Теорема 1. *Гладкие многообразия нормальны.*

Ввиду леммы нам достаточно доказать, что если x — простая точка, то кольцо $\mathcal{O}_x$ целозамкнуто. Мы знаем, что в $\mathcal{O}_x$ разложение на простые множители однозначно (теорема 2 § 3). Любой элемент $\alpha \in k(X)$ можно представить в виде $\alpha = \frac{u}{v}$, где u, $v \in \mathcal{O}_x$ и не имеют общих делителей. Если α цел над $\mathcal{O}_x$, то $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, $a_i \in \mathcal{O}_x$. Отсюда $u^n + a_1u^{n-1}v + \ldots + a_nv^n = 0$. Мы видим, что $v | u^n$. Из взаимной простоты u и v и однозначности разложения на простые множители следует, что $\alpha \in \mathcal{O}_x$. Теорема доказана.

Теорема 1 показывает, что понятие нормальности является некоторым ослаблением понятия гладкости. Это сказывается и в свойствах нормальных многообразий. В частности, мы покажем, что на нормальные многообразия распространяется в ослабленной форме основное свойство гладких многообразий (теорема 1 § 3).

Теорема 2. *Если X — нормальное многообразие, $Y \subset X$ и $\operatorname{codim} Y = 1$, то существует такое аффинное открытое множество $X' \subset X$, что $X' \cap Y \neq \varnothing$ и идеал многообразия $Y' = X' \cap Y$ в кольце $k[X']$ главный.*

Мы можем, конечно, предполагать X аффинным. Более того, достаточно доказать, что в локальном кольце $\mathcal{O}_Y$ максимальный идеал $\mathfrak{m}_Y$ — главный. Действительно, если $\mathfrak{m}_Y = (u)$, $u \in \mathcal{O}_Y$, то $u = \frac{a}{b}$, a, $b \in k[X]$, $b \notin \mathfrak{a}_Y$. Пусть $\mathfrak{a}_Y = (v_1, \ldots, v_m)$. Так как $\mathfrak{a}_Y \subset \mathfrak{m}_Y$, то $v_i = uw_i$, $w_i = c_i/d_i$, c_i, $d_i \in k[X]$, $d_i \notin \mathfrak{a}_Y$. Тогда идеал $\mathfrak{a}_{Y'}$ множества $Y \cap X'$ будет главным идеалом (a), если $X' = X \setminus (V(b) \cup V(d_1) \cup \ldots \ldots \cup V(d_m))$.

Пусть $f \in k[X]$, $f \neq 0$, $f \in \mathfrak{a}_Y$. Тогда $Y \subset V(f)$, и так как $\operatorname{codim} Y = 1$, $\operatorname{codim} V(f) = 1$ (по теореме о размерности пересечения), то Y состоит из компонент многообразия $V(f)$. Пусть $V(f) = Y \cup \bar{Y}$, $Y \not\subset \bar{Y}$. Положив $\bar{X} = X - \bar{Y}$, мы получим, что $Y \cap \bar{X} \neq \varnothing$, $Y \cap \bar{X} = V(f) \cap \bar{X}$. Поэтому мы будем считать сразу, что $Y = V(f)$.

По теореме Гильберта о корнях отсюда следует, что $\mathfrak{a}_Y^k \subset (f)$ при некотором $k > 0$, а отсюда и $\mathfrak{m}_Y^k \subset (f)$ в $\mathcal{O}_Y$. Пусть k — минимальное число с этим свойством. Тогда существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathfrak{m}_Y$, что $\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \notin (f)$, но $\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\mathfrak{m}_Y \in (f)$. Иначе говоря, при $g = \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}$, $g \notin f$, но $g\mathfrak{m}_Y \in (f)$, т. е. при $u = fg^{-1}$, $u^{-1} \notin \mathcal{O}_Y$, $u^{-1}\mathfrak{m}_Y \in \mathcal{O}_Y$. Теперь мы воспользуемся целозамкнутостью кольца $\mathcal{O}_Y$ (ср. лемму): из нее следует, что $u^{-1}\mathfrak{m}_Y \not\subset \mathfrak{m}_Y$ — иначе, согласно одному из основных свойств целых элементов, u^{-1} был бы целым над $\mathcal{O}_Y$ и содержался бы в нем, что не так. Но $\mathfrak{m}_Y$ — максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_Y$, и если $u^{-1}\mathfrak{m}_Y \subset \mathcal{O}_Y$, но $\notin \mathfrak{m}_Y$, то $u^{-1}\mathfrak{m}_Y = \mathcal{O}_Y$. Это и означает, что $\mathfrak{m}_Y = (u)$.

Теорема 3. *Множество особых точек нормального многообразия имеет коразмерность не меньше чем 2.*

Пусть X нормально, $\dim X = n$, S — множество особых точек X. Мы видели, что S замкнуто в X. Предположим, что S содержит неприводимую компоненту Y размерности $n-1$. Пусть X' — открытое подмножество, существование которого устанавливается теоремой 2, $Y' = Y \cap X'$. Многообразие Y' имеет хотя бы одну простую точку (как точку Y', но не обязательно как точку X'). Обозначим ее через y. Пусть $\mathcal{O}_{y,Y'}$ — ее локальное кольцо на Y' и $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — локальные параметры. Согласно теореме 2 $\mathfrak{a}_{Y'} = (u)$ и, значит, $k[Y'] = k[X']/(u)$. Аналогично $\mathcal{O}_{y,Y'} = \mathcal{O}_{y,X'}/(u)$. Очевидно, $\mathfrak{m}_{y,X'}$ совпадает с прообразом $\mathfrak{m}_{y,Y'}$ при естественном гомоморфизме $\mathcal{O}_{y,X'} \to \mathcal{O}_{y,Y'}$. Обозначим через $v_1, \ldots, v_{n-1}$ любые прообразы элементов $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Тогда $\mathfrak{m}_{y,X'} = (v_1, \ldots, v_{n-1}, u)$. Это показывает, что $\dim \mathfrak{m}_{y,X'}/\mathfrak{m}_{y,X'}^2 \leqslant n$, а значит, точка y проста на X, вопреки предположению $y \in Y \subset S$. Теорема доказана.

Следствие. *Для алгебраических кривых понятия гладкости и нормальности совпадают.*

Пример 1. Пусть X — нормальное аффинное многообразие и G — конечная группа его автоморфизмов. Докажем, что $Y = X/G$ нормально (см. пример 11 п. 3 гл. I). Пусть $h \in k(Y)$ и цело над $k[Y]$. Тем более h цело над $k[X]$ и, значит, $h \in k[X]$. Но раз $h \in k(Y)$, то $g^*h = h$ для любого $g \in G$ и, значит, $h \in k[X]^G = k[Y]$.

Пусть, в частности, $X = \mathbf{A}^2$ и $G = \{1, g\}$, где $g(x, y) = (-x, -y)$. Легко проверить, что $k[X]^G = k[x, y]^G$ порождается функциями $w = xy$, $u = x^2$, $v = y^2$. Иначе говоря, Y определяется уравнением $uv = w^2$. Это — конус, рассмотренный в начале этого пункта. Так как по теореме 1 X нормально, то мы получаем другое доказательство нормальности Y.

Сравним между собой выведенные свойства нормальных многообразий. Прежде всего, заметим, что при доказательстве теоремы 1 мы использовали гладкость многообразия X не в полной мере — мы пользовались только однозначностью разложения на простые множители в кольцах $\mathcal{O}_x$. В связи с этим естественно выделить класс многообразий, в которых это последнее свойство (однозначность разложения на простые множители в кольцах $\mathcal{O}_x$) выполняется. Они называются факториальными. Таким образом, гладкое многообразие факториально, а факториальное — нормально (последнее и доказывает, по существу, теорема 1). Можно показать, что все эти три класса многообразий действительно различны. Например, доказано, что если гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$, $n \geqslant 5$, имеет единственную особую точку, то она факториальна ([13], XI, 3.14). Красивый пример не гладкой, но факториальной поверхности задается уравнением $x^2 + y^3 + z^5 = 0$. Пример нормального, но не факториального многообразия дает рассматриваемый нами квадратичный конус: $z^2 = (x + iy)(x - iy)$ — это два разных разложения одного элемента на простые множители.

Теорема 3 фиксирует внимание на новом свойстве многообразий: множество особых точек имеет коразмерность не меньше чем 2. Многообразия с этим свойством называются *неособыми в коразмерности* 1. Теорема 3 утверждает, что таковы, в частности, нормальные многообразия. Эти два класса многообразий тоже различны. Соответствующий пример строится несколько сложнее. Дело в том, что для гиперповерхностей нормальность совпадает с неособостью в коразмерности 1. Поэтому простейший возможный пример — поверхность в $\mathbf{A}^4$. Неприводимое многообразие X не нормально, если существует такое многообразие Y и эпиморфное отображение $f\colon Y \to X$, что $k[Y]$ — модуль конечного типа над $f^*k[X]$ и f — изоморфизм открытых подмножеств $V \subset Y$ и $U \subset X$. Поэтому первое приближение к примеру дает $X = L_1 \cup L_2$, где две плоскости L_1 и L_2 пересекаются в одной точке, а $Y = L_1 \bigsqcup L_2$ — несвязное объединение L_1 и L_2 (например, в $\mathbf{A}^5$). Но это — приводимое многообразие, а наше определение нормальности предполагает неприводимость. Поэтому мы построим пример, имитирующий эту ситуацию вблизи особой точки. Для этого достаточно построить регулярное конечное отображение $f\colon \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^4$ такое, что $X = f(\mathbf{A}^2)$ замкнуто в $\mathbf{A}^4$, $f\colon \mathbf{A}^2 \to X$ является бирациональным изоморфизмом, две точки, например $y_1, y_2 \in \mathbf{A}^2$, имеют один образ $z \in X$, а $f\colon \mathbf{A}^2 \setminus \{y_1, y_2\} \to X \setminus \{z\}$ является изоморфизмом. Таким образом, f очень похоже на параметризацию (2) кривой (1) в п. 2 § 1 гл. I. Наличие отображения f противоречит нормальности X, а точка z будет единственной особой точкой на X. Зададим f уравнениями

$$f(x, y) = (x, xy, y(y-1), y^2(y-1)).$$

Если координаты в $\mathbf{A}^4$ обозначены через u, v, w, t, то

уравнения многообразия X имеют, как легко проверить, следующий вид: $ut = vw$, $w^3 = t(t-w)$, $u^2w = v(v-u)$, где $u = x$, $v = xy$, $w = y(y-1)$, $t = y^2(y-1)$. Соотношения $x = u$, $y^2 - y = w$ показывают, что x и y целы над $f^*k[X]$, а значит, f конечно. Остальные нужные нам свойства отображения f проверить совсем легко.

2. Нормализация аффинных многообразий. Рассмотрим простейший пример ненормального многообразия — кривой X, определенной уравнением $y^2 = x^2 + x^3$. Его параметризация, использующая параметр $t = \frac{y}{x}$, определяет отображение $f\colon \mathbf{A}^1 \to X$, или, что то же самое, вложение $k[X] \subset k[t]$. Отображение f является бирациональным изоморфизмом, и поэтому $k[X] \subset k[t] \subset k(X) = k(t)$. Прямая $\mathbf{A}^1$ уже нормальна и соответственно кольцо многочленов $k[t]$ целозамкнуто. Больше того, кольцо $k[t]$ можно характеризовать как совокупность всех элементов $u \in k(X)$, целых относительно $k[X]$. Действительно, $t^2 = 1 + x$ и, значит, t цело над $k[X]$, а поэтому и все элементы кольца $k[t]$ целы над $k[X]$. Если же $u \in k(X)$ цело над $k[X]$, то оно цело и над $k[t]$, а так как $k[t]$ целозамкнуто, то $u \in k[t]$. Наконец, то, что кольцо $k[t]$ цело над $k[X]$, в геометрической терминологии означает, что отображение f конечно. Мы покажем, что для любого неприводимого аффинного многообразия X существуют многообразие X' и отображение $X' \to X$ с такими же свойствами. Начнем с определения, которое относится к произвольным неприводимым многообразиям.

Определение. *Нормализацией неприводимого многообразия* X называется неприводимое нормальное многообразие X^ν, обладающее регулярным отображением $\nu\colon X^\nu \to X$, которое конечно и является бирациональным изоморфизмом.

Теорема 4. *Аффинное неприводимое многообразие обладает нормализацией, которая также аффинна.*

Доказательство. Обозначим через A целое замыкание $k[X]$ в $k(X)$, т. е. совокупность всех элементов $u \in k(X)$, целых относительно кольца $k[X]$. Из простейших свойств целых элементов вытекает, что A — кольцо и что A целозамкнуто. Предположим, что мы нашли такое аффинное многообразие X', что $A = k[X']$. Тогда X' нормально и включение $k[X] \subset k[X']$ определяет регулярное отображение $f\colon X' \to X$. Очевидно, что X' является нормализацией X.

Согласно теореме 1 § 2 гл. I такое многообразие X' существует, если A не имеет делителей 0 и обладает конечным числом образующих. Первое условие выполнено, так как $A \subset k(X)$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что кольцо A имеет конечное число образующих. Мы докажем больше,— что A имеет конечное число образующих как модуль над $k[X]$. Если $A = k[X]\omega_1 + \ldots$ $\ldots + k[X]\omega_m$, то $\omega_1, \ldots, \omega_m$ вместе с образующими алгебры $k[X]$ над k составляют систему образующих A как алгебры над k. Для этого мы воспользуемся теоремой 10 § 5 гл. I. Согласно этой теореме существует кольцо $B \subset k[X]$, над которым $k[X]$ цело, изоморфное кольцу многочленов: $B \simeq k[T_1, \ldots, T_r]$. Выпишем все встретившиеся нам кольца и поля:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[drr, phantom, sloped, "\subset"] & k[X] \arrow[r, phantom, "\subset"] & A \arrow[r, phantom, "\subset"] & k(X) \\
 & & k(T_1, \ldots, T_r) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

Из этой схемы и из простейших свойств целых элементов видно, что A совпадает с целым замыканием кольца B в поле $k(X)$. Далее, поле $K = k(X)$ является конечным расширением поля $k(T_1, \ldots, T_r)$, так как $T_1, \ldots, T_r$ — базис трасцендентности поля $k(X)$. Наконец, кольцо B целозамкнуто (многообразие $\mathbf{A}^r$ нормально и даже гладко). Поэтому нужный нам окончательный результат — конечность числа образующих кольца A — вытекает из того, что для $B = k[T_1, \ldots, T_n]$, $L = k(T_1, \ldots, T_n)$ и для любого конечного расширения K/L целое замыкание B в K является конечным B-модулем. По поводу доказательства этого утверждения см. предложение 1 п. 8 Приложения.

Теорема 5. *Если g: $Y \to X$ — конечное отображение, являющееся бирациональным изоморфизмом, то существует такое регулярное отображение h: $X^\nu \to Y$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & X^\nu \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
Y \arrow[rr, "g"'] & & X
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Если g: $Y \to X$ — регулярное отображение, $g(Y)$ плотно в X и Y нормально, то существует такое регулярное отображение h: $Y \to X^\nu$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X^\nu \arrow[rr, "\nu"'] & & X
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство первого утверждения. По условию мы имеем вложение $k[X] \subset k[Y] \subset k(X)$, причем $k[Y]$ цело над $k[X]$. По определению целого замыкания $k[Y] \subset k[X^\nu]$, что и дает нужное регулярное отображение h: $X^\nu \to Y$.

Доказательство второго утверждения. Элемент u кольца $k[X^\nu]$ цел над $k[X]$ и содержится в $k(X) \subset k(Y)$. Так как $k[Y] \supset k[X]$, то u тем более цел над $k[Y]$, а так как $k[Y]$ целозамкнутое, то $u \in k[Y]$. Поэтому $k[X^\nu] \subset k[Y]$, что и дает регулярное отображение h: $Y \to X^\nu$ с нужными свойствами.

Следствие. *Нормализация аффинного многообразия единственна. Точнее, если ν: $X^\nu \to X$ и $\bar\nu$: $\bar X^\nu \to X$ — две нормализации, то существует такой изоморфизм g: $X^\nu \to \bar X^\nu$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X^\nu \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \bar X^\nu \arrow[dl, "\bar\nu"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Это вытекает из любого из двух утверждений теоремы.

Мы не будем доказывать существование нормализации для любых квазипроективных многообразий. Заметим, что для тех многообразий, для которых нам известно, что нормализация существует, она обладает свойствами, установленными в теореме 5, как вытекает немедленно путем рассмотрения аффинных покрытий.

3. Нормализация кривых. Теорема 6. *Квазипроективная неприводимая кривая X обладает нормализацией X^ν (которая также квазипроективна).*

Доказательство. Пусть $X = \cup U_i$ — покрытие X аффинными открытыми множествами. Обозначим через U_i^{ν} нормализацию U_i, которая существует согласно теореме 4, и через f_i: $U_i^{\nu} \to U_i$ — естественное регулярное отображение, являющееся бирациональным изоморфизмом.

Вложим аффинное пространство, содержащее U_i^{ν}, в проективное и обозначим через V_i замыкание U_i^{ν} в этом проективном пространстве. Заметим, что все встретившиеся нам до сих пор многообразия бирационально изоморфны X: U_i открыто в X, f — бирациональный изоморфизм U_i^{ν} и U_i, U_i^{ν} открыто в V_i. Следовательно, U_i^{ν} и V_j бирационально изоморфны. Пусть φ_{ij}: $U_i^{\nu} \to V_j$ — соответствующее отображение. Согласно следствию теоремы 3 U_i^{ν} — гладкая кривая, а так как кривая V_j проективна, то φ_{ij} регулярно ввиду следствия теоремы 3 § 3. Положим $W = \prod_j V_j$, $\varphi_i = \prod_j \varphi_{ij}$, т. е. $\varphi_i(u) = (\varphi_{i1}(u), \varphi_{i2}(u), \ldots)$. Обозначим через X' объединение всех $\varphi_i(U_i^{\nu})$ в W. Мы утверждаем, что $X' = X^{\nu}$. Для этого надо доказать, что а) X' квазипроективно, б) X' неприводимо, в) X' нормально, г) существует конечное отображение ν: $X' \to X$, являющееся бирациональным изоморфизмом.

Для доказательства положим $U_0 = \cap U_i$ — это открытое подмножество в X. Из конструкции отображения φ_i легко следует, что $U_0^{\nu} \subset U_i^{\nu}$ и все φ_i совпадают на U_0^{ν}. Обозначим их ограничения на U_0^{ν} через φ. Тогда $\varphi(U_0^{\nu}) \subset \varphi_i(U_i^{\nu}) \subset \overline{\varphi(U_0^{\nu})}$, где $\overline{\varphi(U_0^{\nu})}$ — замыкание $\varphi(U_0^{\nu})$ в W. Очевидно, что $\overline{\varphi(U_0^{\nu})}$ — неприводимая квазипроективная кривая, а $\overline{\varphi(U_0^{\nu})} - \varphi(U_0^{\nu})$ состоит из конечного числа точек. По построению $\varphi(U_0^{\nu}) \subset X' \subset \overline{\varphi(U_0^{\nu})}$, поэтому $\overline{\varphi(U_0^{\nu})} - X'$ состоит из конечного числа точек. Это доказывает а) и б).

Пусть $x \in X'$, тогда $x \in \varphi_i(U_i^{\nu})$ для некоторого i и $\varphi_i(U_i^{\nu})$ является окрестностью точки x. Мы докажем, что φ_i является изоморфизмом, а так как U_i^{ν} нормально, то отсюда будет следовать нормальность X', т. е. в). Для этого заметим, что по построению φ_i является изоморфным вложением U_i^{ν} в свое замыкание V_i. Поэтому отображение $(u_1, u_2, \ldots) \to \varphi_{ii}^{-1}(u_i)$ является обратным к φ_i, что и доказывает его изоморфный характер.

Наконец, для доказательства г) построим отображение $g_i : \varphi_i(U_i^{\nu}) \to X$; $g_i = f_i \varphi_i^{-1}$. Согласно предыдущему все g_i — конечные отображения. Мы докажем, что все g_i определяют на X' одно конечное отображение f: $X' \to X$. Для этого заметим, что все g_i совпадают на U_0^{ν}: если g : $U_0^{\nu} \to U_0$ — отображение нормализации, то $g_i = g$ на U_0^{ν}. Поэтому отображения g_i и g_j совпадают на открытом подмножестве $\varphi(U_0^{\nu})$, содержащемся в $\varphi_i(U_i^{\nu}) \cap \varphi_j(U_j^{\nu})$. Но два регулярных отображения, совпадающих на непустом открытом подмножестве, совпадают всюду,— это следует из соответствующего свойства функций. Таким образом, g_i и g_j совпадают в тех точках, где они оба определены, а это и значит, что все g_i определяют одно регулярное отображение ν: $X' \to X$. Очевидно, что ν — бирациональный изоморфизм. Теорема доказана.

Теорема 7. *Нормализация проективной кривой проективна.*

Пусть X — проективная кривая, X^{ν} — ее нормализация и ν: $X^{\nu} \to X$ — отображение нормализации. Предположим, что кривая X^{ν} не проективна, и обозначим через $\bar{X}$ ее замыкание в проективном пространстве. Пусть $x \in \bar{X} - X^{\nu}$, U — некоторая аффинная окрестность точки x на $\bar{X}$, U^{ν} — нормализация U и ν': $U^{\nu} \to U$ — отображение нормализации. Мы имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & U^{\nu} \arrow[lld, "h"'] \arrow[d, "\nu'"] \\
X^{\nu} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\nu"] & \bar{X} & U \arrow[l, "\psi"'] \\
X & &
\end{tikzcd}$$

где φ и ψ — изоморфные вложения. Отображение $\nu\varphi^{-1}\psi\nu'$ является бирациональным изоморфизмом, и ввиду следствия 1 теоремы 3 § 3 и гладкости кривой U^{ν} это отображение регулярно. Согласно теореме 5 существует нарисованное на диаграмме регулярное отображение h. Для него $\varphi h = \psi\nu'$. Однако его существование приводит к противоречию: $\varphi h(U^{\nu}) \subset X^{\nu}$, а $\psi\nu'(U^{\nu}) \ni x$, так как отображение нормализации конечно и, значит, эпиморфно согласно теореме 4 § 5 гл. I. Это доказывает теорему.

Следствие. *Неприводимая алгебраическая кривая бирационально изоморфна гладкой проективной кривой.*

Это — соединение следствия теоремы 3 и теоремы 7.

Понятие нормализации дает возможность более подробно исследовать свойства кривых.

Теорема 8. *Регулярное отображение* $\varphi: X \to Y$ *конечно, если* X — *неприводимая гладкая проективная кривая*, $\dim Y > 0$ *и* $Y = \varphi(X)$.

Доказательство. Пусть $V \ni y$ — аффинная окрестность точки $y \in Y$ и $B = k[V]$. Мы будем рассматривать поле $k(Y)$ как подполе поля $k(X)$, причем вложение осуществляется отображением φ^*. В частности, $B \subset k(X)$, и пусть A — целое замыкание кольца B в поле $k(X)$. При доказательстве существования нормализации аффинного многообразия мы выяснили, что A — кольцо конечного типа над B и, значит, $A = k[U]$, где U — аффинная нормальная кривая. Так как она бирационально изоморфна X, то согласно следствию 2 теоремы 2 § 4 можно считать U открытым подмножеством в X. Докажем, что $U = \varphi^{-1}(V)$,— это и гарантирует конечность отображения.

Предположим, что для некоторой точки $y_0 \in V$ есть точка $x_0 \notin U$, $\varphi(x_0) = y_0$. Рассмотрим функцию $f \notin \mathcal{O}_{x_0}$, $f \in \mathcal{O}_{x_i}$ для всех $x_i \in U$, $\varphi(x_i) = y_0$, $x_i \neq x_0$. Такую функцию легко построить, включив точки x_0 и x_i в одно аффинное открытое множество. Если f имеет полюсы в точках $x' \in U$, то $\varphi(x') = y' \neq y_0$, и поэтому можно найти такую функцию $h \in B$, что $h(y_0) \neq 0$, $fh \in \mathcal{O}_{x'}$, т. е. $fh \in A$; надо взять функцию, обращающуюся в 0 в точках y', и возвести ее в достаточно высокую степень. Теперь $f_1 = fh$ цело над B, т. е.

$$f_1^n + b_1 f_1^{n-1} + \ldots + b_n = 0, \qquad b_i \in B,$$
$$f_1 = -b_1 - b_2/f_1 - \ldots - b_n/f_1^{n-1}.$$

Так как $f_1 \notin \mathcal{O}_{x_0}$, то $f_1^{-1} \in \mathfrak{m}_{x_0}$. Поэтому последнее равенство приводит к противоречию — правая часть регулярна в точке x_0, а левая — нет. Теорема доказана.

Другие приложения связаны со свойствами особых точек. Именно, существование нормализации дает возможность ввести некоторые полезные характеристики этих точек.

Пусть X — кривая, x — ее точка, быть может, особая, $\nu: X^\nu \to X$ — нормализация X и $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ — прообразы точки x на X^ν. Точки $\bar{x}_i$ называются *ветвями* кривой X, проходящими через точку x. Эта терминология объясняется тем, что если k есть поле комплексных (или вещественных) чисел, U_i — достаточно малые комплексные (или вещественные) окрестности точек $\bar{x}_i$, то некоторая окрестность точки x является объединением «ветвей» $\nu(U_i)$.

Обозначим через Θ_i касательную прямую к X^ν в точке $\bar{x}_i$. Отображение $d_{\bar{x}_i}\nu$ переводит Θ_i в линейное подпространство касательного пространства к X в точке x. Очевидно, $(d_{\bar{x}_i}\nu)(\Theta_i)$ является или точкой x, или прямой. Во втором случае ветвь $\bar{x}_i$ называется линейной, а прямая $(d_{\bar{x}_i}\nu)(\Theta_i)$ — касательной к этой ветви.

Ветвь $\bar{x}_i$ линейна тогда и только тогда, когда отображение ν^* переводит $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ во все пространство $\mathfrak{m}_{\bar{x}_i}/\mathfrak{m}_{\bar{x}_i}^2$. Пусть точка x совпадает с началом координат в пространстве $\mathbf{A}^n$ с координатами $t_1, \ldots, t_n$. Тогда $\nu^*(t_1) + \mathfrak{m}_{\bar{x}_i}^2, \ldots, \nu^*(t_n) + \mathfrak{m}_{\bar{x}_i}^2$ порождают $f^*(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$. Так как точка $\bar{x}_i$ простая, то $\dim \mathfrak{m}_{\bar{x}_i}/\mathfrak{m}_{\bar{x}_i}^2 = 1$, и поэтому ветвь $\bar{x}_i$ линейна тогда и только тогда, когда $\nu^*(t_s) \notin \mathfrak{m}_{\bar{x}_i}^2$ хоть для одного $s = 1, \ldots, n$. Иначе говоря, $\nu^*(t_s)$ должно быть локальным параметром в точке $\mathfrak{m}_{\bar{x}_i}$. Так как $\mathfrak{m}_x = (t_1, \ldots, t_n)$, то в инвариантной форме это условие линейности принимает вид $\nu^*(\mathfrak{m}_x) \not\subset \mathfrak{m}_{\bar{x}_i}^2$. В качестве меры отклонения ветви $\bar{x}_i$ от линейной можно принять такое число k, что $\nu^*(\mathfrak{m}_x) \subset \mathfrak{m}_{\bar{x}_i}^k$, $\nu^*(\mathfrak{m}_x) \not\subset \mathfrak{m}_{\bar{x}_i}^{k+1}$. Это число называется *кратностью* ветви $\bar{x}_i$.

Точка $(0, 0)$ кривой $y^2 = x^2 + x^3$ дает пример двух линейных ветвей с касательными $y = x$ и $y = -x$, а точка $(0, 0)$ на полукубической параболе $y^2 = x^3$ — пример одной двукратной нелинейной ветви.

Если точка x является центром одной-единственной ветви, которая притом линейна, то x — простая точка. Это есть следствие леммы, которая будет доказана в следующем пункте. Таким образом, простейшей характеристикой «особости» точки являются число ветвей, ей соответствующих, и кратности этих ветвей.

Особая точка плоской алгебраической кривой называется *простейшей* (или *точкой с разделенными касательными*), если ей соответствуют только линейные ветви и касательные к разным ветвям различны.

Предположим, что плоская кривая X задается уравнением $F(x, y)=0$, а поле k имеет характеристику 0. Пусть $(0, 0)=x\in X$ и $\bar{x}\in X^{\nu}$ — одна из соответствующих точке x ветвей. Если t — локальный параметр в точке $\bar{x}$, то имеют место разложения в формальные степенные ряды:

$$x=a_nt^n+a_{n+1}t^{n+1}+\ldots,\quad y=b_mt^m+b_{m+1}t^{m+1}+\ldots,\tag{1}$$
$$a_n\neq 0,\quad b_m\neq 0,\quad n>0,\quad m>0.$$

Существует такой формальный степенной ряд $\tau=r_1t+r_2t^2+\ldots$, $r_1\neq 0$, что $\tau^n=x$. Это легко проверяется: надо положить $r_1=a_n^{1/n}$, после чего для r_i, $i>1$, получаются уравнения степени 1, при решении которых приходится делить на n, что возможно ввиду предположения о характеристике поля k. С другой стороны, t может быть выражено через τ как формальный степенной ряд: $t=r_1^{-1}\tau+s_2\tau^2+s_3\tau^3+\ldots$ — это тоже непосредственно проверяется сравнением коэффициентов. Наконец, подставляя это выражение в (1), мы получаем параметризацию $x=\tau^n$, $y=c_m\tau^m+c_{m+1}\tau^{m+1}+\ldots$, которую можно переписать так:

$$y=c_mx^{m/n}+c_{m+1}x^{(m+1)/n}+\ldots\tag{2}$$

Такая параметризация ветви называется *разложением Пюизо* для y. Она особенно полезна в вопросах анализа, когда y расматривается как функция от x.

Для явного нахождения разложений Пюизо, соответствующих разным ветвям, существует очень полезный прием, использующий *многоугольник Ньютона* многочлена F. Пусть $F(x,y)=\sum A_{ij}x^iy^j$. Нарисуем на плоскости точки с координатами (i, j), для которых $A_{ij}\neq 0$ (рис. 11). Для того чтобы разложение (2) удовлетворяло уравнению $F(x, y)=0$, необходимо, чтобы после его подстановки младшие (по x) члены, возникающие из разных одночленов $A_{ij}x^iy^j$, сокращались. Для этого необходимо, чтобы хотя бы два одночлена $A_{i_1j_1}x^{i_1}y^{j_1}$ и $A_{i_2j_2}x^{i_2}y^{j_2}$ давали члены одинаковой степени по x, а другие одночлены — члены не меньшей степени. Иначе говоря, для

показателя $\alpha=m/n$ должны выполняться условия $i_1+j_1\alpha=i_2+j_2\alpha\leqslant i+j\alpha$ для всех (i, j) с $A_{ij}\neq 0$. На рис. 11 это изображается так, что α является угловым коэффициентом прямой, проходящей через точки (i_1, j_1) и (i_2, j_2), причем все остальные точки, изображенные на этом рисунке, лежат на этой прямой или выше нее. Иными словами, в качестве показателя α могут встречаться лишь угловые коэффициенты выпуклой книзу границы выпуклой оболочки множества точек, изображенных на рисунке.

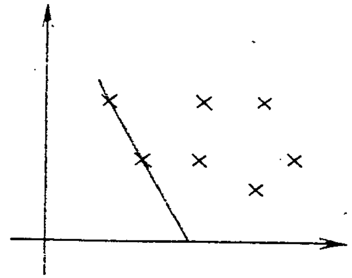


Рис. 11

Перепишем разложение (2) в виде $y=\sum c_{\nu_i}x^{\nu_i}$, где ν_i — возрастающие рациональные показатели, а $c_{\nu_i}\neq 0$. Некоторые из них играют особенно важную роль как характеристики особенности. Пусть первый нецелый показатель имеет вид $\frac{m_1}{n_1}$. Очевидно, $n_1|n$, и если $n_1\neq n$, то должны быть показатели со знаменателем, делящимся строго на n_1. Пусть первый из них, отличный от $\frac{m_1}{n_1}$, есть $\frac{m_2}{n_1n_2}$, потом $\frac{m_3}{n_1n_2n_3}$ — первый из следующих за ним и имеющий знаменатель, строго делящийся на n_1n_2, и т. д. — вплоть до $\frac{m_k}{n_1\ldots n_k}$, где $n_1\ldots n_k=n$. Пары (m_1, n_1), (m_2, n_2), …, (m_k, n_k) называются *характеристическими парами* ветви. Сформулируем в простейшей форме результат, иллюстрирующий значение характеристических пар. Рассмотрим лишь особенности, через которые проходит единственная ветвь. Для любой последовательности характеристических пар существует такое целое число l, что особенность с заданными характеристическими парами однозначно определяется своими первыми l членами разложения (2) с точностью до формально-аналитической эквивалентности (см. определение в п. 2 § 2). Таким образом, особенности с заданной последовательностью характеристических пар образуют конечномерное множество. Простое доказательство и различные обобщения см. в работе [16].

4. Проективные вложения гладких многообразий. Гладкая проективная модель алгебраической кривой, построенная в предыдущем пункте, расположена в некотором проективном пространстве $\mathbf{P}^n$. Возникает естественный вопрос, насколько малым можно выбрать n. Мы ответим на него, доказав общий результат о многообразиях произвольной размерности.

Теорема 9. *Гладкое проективное многообразие размерности n изоморфно подмногообразию пространства $\mathbf{P}^{2n+1}$.*

Пусть X — гладкое проективное многообразие, $X \subset \mathbf{P}^N$. Теорема 9 будет доказана, если при $N > 2n+1$ мы сможем выбрать такую точку $\xi \in \mathbf{P}^N - X$, что проектирование из точки ξ будет изоморфным вложением X в $\mathbf{P}^{N-1}$. Поэтому мы начнем с выяснения того, когда регулярное отображение является изоморфным вложением.

Лемма. *Конечное отображение f многообразия X является изоморфным вложением, если оно взаимно однозначно и $d_x f$ является изоморфным вложением касательного пространства Θ_x для любой точки $x \in X$.*

Положим $f(X) = Y$, $\varphi = f^{-1}$. Лемма будет доказана, если мы покажем, что φ регулярно. Это утверждение носит локальный характер. Пусть $y \in Y$ и $f(x) = y$, $x \in X$. Обозначим через U и V такие аффинные окрестности точек x и y, что $f(U) = V$ и $k[U]$ цело над $k[V]$. Ограничение f на U мы также будем обозначать через f.

Нам достаточно доказать, что f при надлежащем выборе U и V является изоморфизмом. Тогда $\varphi = f^{-1}$ регулярно в точке y.

Вспомним, что пространство Θ_x двойственно $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_x$. Второе условие леммы означает, что отображение $f^*: \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ эпиморфно. Иначе говоря, если $\mathfrak{m}_y = (u_1, \ldots, u_k)$, то $f^*(u_i) + \mathfrak{m}_x^2$ порождают $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Применим лемму Накаяма (предложение 3 п. 6 Приложения) к $\mathfrak{m}_x$ как модулю над $\mathcal{O}_x$. Из нее следует, что тогда $\mathfrak{m}_x = (f^*(u_1), \ldots, f^*(u_k))$, или же

$$\mathfrak{m}_x = f^*(\mathfrak{m}_y)\mathcal{O}_x. \tag{1}$$

Проверим, что $\mathcal{O}_x$ — модуль конечного типа над $f^*(\mathcal{O}_y)$. Так как $k[U]$ — модуль конечного типа над $k[V]$, то нам

достаточно показать, что элементы из $\mathcal{O}_x$ представляются в виде $\xi/f^*(a)$, $\xi \in k[U]$, $a \notin \mathfrak{m}_y$. Для этого достаточно проверить, что для элемента $\alpha \in k[U]$, $\alpha \notin \mathfrak{m}_x$ найдется такой элемент $a \in k[V]$, $a \notin \mathfrak{m}_y$, что $f^*(a) = \alpha \cdot \beta$, $\beta \in k[U]$. Согласно следствию теоремы 4 § 5 гл. I множество $f(V(\alpha))$ замкнуто, а ввиду взаимной однозначности отображения f, $y \notin f(V(\alpha))$. Поэтому существует такая функция $c \in k[V]$, что $c = 0$ на $f(V(\alpha))$ и $c(y) \neq 0$. Тогда $f^*(c) = 0$ на $V(\alpha)$ и $f^*(c)(x) \neq 0$. По теореме Гильберта о корнях $f^*(c)^n = \alpha \cdot \beta$ при некоторых $n > 0$ и $\beta \in k[U]$. Мы можем положить $a = c^n$. Теперь можно применить лемму Накаяма к $\mathcal{O}_x$ как модулю над $f^*(\mathcal{O}_y)$. Равенство (1) показывает, что $\mathcal{O}_x/f^*(\mathfrak{m}_y)\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x = k$ и, значит, порождается одним элементом 1. Из леммы Накаяма теперь следует, что $\mathcal{O}_x = f^*(\mathcal{O}_y)$. Пусть $u_1, \ldots, u_l$ — базис $k[U]$ над $k[V]$. По условию $u_i \in \mathcal{O}_x = f^*(\mathcal{O}_y)$. Обозначим через $V' = V - V(h)$ такую главную аффинную окрестность точки y, что все $(f^*)^{-1}(u_i)$ регулярны в $U' = U - V(f^*(h))$. Тогда $k[U'] = \sum f^* k[V'] u_i$. По условию $u_i \in f^* k[V']$, откуда следует, что $k[U'] = k[V']$, а это означает, что f является изоморфизмом между U' и V'. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если любая прямая, проходящая через точку ξ, пересекает X не более чем в одной точке и касательное пространство к X в любой его точке не содержит ξ, то проектирование с центром в ξ является изоморфизмом.*

Достаточно воспользоваться теоремой 7 § 5 гл. I.

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы 9. Нам достаточно доказать, что если X — гладкое многообразие, $\dim X = n$, $X \subset \mathbf{P}^N$, $N > 2n+1$, то найдется точка ξ, удовлетворяющая условиям следствия.

Обозначим через U_1 и U_2 множества точек $\xi \in \mathbf{P}^N$, относительно которых ξ не удовлетворяет первому и соответственно второму условию следствия.

Рассмотрим в $\mathbf{P}^N \times X \times X$ множество Γ, состоящее из таких точек (a, b, c), $a \in \mathbf{P}^N$, $b, c \in X$, что a, b и c лежат на одной прямой. Очевидно, Γ — замкнутое подмножество в $\mathbf{P}^N \times X \times X$. Проекции $\mathbf{P}^N \times X \times X$ на $\mathbf{P}^N$ и $X \times X$ определяют регулярные отображения $\varphi: \Gamma \to \mathbf{P}^N$ и $\psi: \Gamma \to X \times X$. Очевидно, что если $y \in X \times X$, $y = (b, c)$, $b, c \in X$ и, сверх того, $b \neq c$, то $\psi^{-1}(y)$ состоит из точек (a, b, c), где a — любая точка прямой, проходящей через точки b и c. Поэтому $\dim \psi^{-1}(y) = 1$ и из теоремы 7 § 6 гл. I следует, что $\dim \Gamma = 2n+1$. По определению $U_1 = \varphi(\Gamma)$ и из той же теоремы следует, что $\dim U_1 \leqslant \dim \Gamma = 2n+1$.

Аналогично для исследования множества U_2 рассмотрим в $\mathbf{P}^N \times X$ множество Γ, состоящее из таких точек (a, b), что $a \in \Theta_b$. Совершенно аналогично мы имеем отображения ψ: $\Gamma \to X$ и φ: $\Gamma \to \mathbf{P}^N$. Для $x \in X$ $\dim \psi^{-1}(x) = n$, и поэтому $\dim \Gamma = 2n$, а так как $U_2 = \varphi(\Gamma)$, то $\dim U_2 \leqslant 2n$.

Мы видим, что $\dim U_1 \leqslant 2n+1$, $\dim U_2 \leqslant 2n$, и поэтому, если $N > 2n+1$, то $U_1 \cup U_2 \neq \mathbf{P}^N$, что и надо было доказать.

С л е д с т в и е 2. *Любая квазипроективная гладкая кривая изоморфна кривой, расположенной в трехмерном проективном пространстве.*

Мы увидим дальше, что не любая кривая изоморфна кривой, содержащейся в проективной плоскости. Поэтому не всякая алгебраическая кривая имеет гладкую плоскую проективную модель.

Однако доказано, что, продолжая процесс проектирования, который мы использовали при доказательстве теоремы 9, можно получить плоскую кривую, все особые точки которой являются простейшими двойными точками. Согласно теореме 9 любая гладкая поверхность изоморфна поверхности, расположенной в пятимерном пространстве. В четырехмерное пространство ее, вообще говоря, спроектировать нельзя. Однако всегда можно выбрать проекцию так, чтобы вне конечного числа точек она была изоморфизмом. Так легко прийти к примерам изолированных, но не нормальных особых точек, один из которых был построен в п. 1.

З А Д А Ч И

1. Пусть X — аффинное многообразие, K — конечное расширение поля $k(X)$. Доказать, что существуют аффинное многообразие Y и отображение f: $Y \to X$, обладающее свойствами: 1) f конечно, 2) Y нормально, 3) $k(Y) = K$ и f^*: $k(X) \to k(Y)$ определяет заданное вложение $k(X)$ в K. Доказать, что Y однозначно определяется этими свойствами. Оно называется нормализацией X в поле K.

2. Пусть X — это конус $z^2 = xy$. Доказать, что нормализация X в поле $k(X)(\sqrt{x})$ совпадает с аффинной плоскостью, а отображение нормализации имеет вид $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$.

3. Утверждения, аналогичные задаче 1, доказать для произвольной квазипроективной кривой X. Доказать, что если X проективна, то и Y проективна.

4. Как связана нормализация $X \times Y$ с нормализацией X и Y?

5. Доказать, что точка x нормальна, если кольцо $\hat{\mathcal{O}}_x$ (см. п. 2 § 2) не имеет делителей 0 и нормально. У к а з а н и е. Перенести задачу 7 § 3 на особые точки и применять ее.

6. Доказать, что конус $X \subset \mathbf{A}^n$, заданный уравнением $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, нормален.

7. Доказать, что на гиперповерхности X задачи 13 к § 3 начало координат — нормальная точка.

8. Будет ли нормальна поверхность Штейнера? (задача 15 § 1).

9. Доказать, что любая алгебраическая кривая имеет плоскую проективную модель, у которой особые точки обладают только линейными ветвями.

§ 6. Особенности отображений

При изучении любого регулярного отображения f: $X \to Y$ возникает вопрос: в какой мере слои $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, наследуют свойства многообразия X? Как правило, здесь имеют место соотношения, верные не всегда, но для «большинства» точек $y \in Y$, т. е. для точек некоторого открытого плотного множества $U \subset Y$. Для других же точек $y \notin U$ слои $f^{-1}(y)$ претерпевают те или иные вырождения или приобретают особенности, которых многообразие X не имело. Ситуацию можно сопоставить с теоремой 7 § 6 гл. I.

1. Неприводимость. Конечно, если многообразие X неприводимо, мы не можем ожидать, что большинство слоев отображения f: $X \to Y$ неприводимо: например, для конечного отображения это наборы точек. Сейчас мы сформулируем ограничение, которое дает возможность гарантировать неприводимость «большинства» слоев.

Предположим, что X и Y неприводимы, а $f(X)$ плотно в Y. Многообразие X, определенное над полем k, можно рассматривать и как многообразие над бо́льшим полем $k(Y) \supset k$. Так как все наши предшествующие рассмотрения относились к алгебраически замкнутым полям, то мы должны рассматривать его над еще большим полем — алгебраическим замыканием $\overline{k(Y)}$ поля $k(Y)$. Многообразие X может над этим полем перестать быть неприводимым. Пусть, например, X — это пучок коник, заданный уравнением $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(t)\xi_i\xi_j = 0$ в $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^1$ (пример 1 п. 2 § 6 гл. I). Положим $D(t) = \det(a_{ij}(t))$. Если многочлен $D(t)$ не равен тождественно 0, то коника

$\sum a_{ij}(t)\xi_i\xi_j = 0$ неприводима над полем $\overline{k(t)}$. Если $D(t)\equiv 0$, то над полем $k(t)$ можно привести уравнение коники к виду $a(t)\xi_0^2 + b(t)\xi_1^2 = 0$. Если $-b(t)a(t)$ не является квадратом в поле $k(t)$, то $a(t)\xi_0^2 + b(t)\xi_1^2$ неприводим над полем $k(t)$, но все же приводим над $\overline{k(t)}$.

В общем случае можно показать, что многообразие X тогда и только тогда приводимо над полем $\overline{k(Y)}$, когда отображение $f\colon X\to Y$ можно разложить в композицию $X\to Y'\to Y$, причем расширение $k(Y')/k(Y)$ конечно (это чисто алгебраический факт; см. [17], гл. VII, § 11).

Теорема 1. *Пусть X и Y — неприводимые многообразия, определенные над полем характеристики 0, $f\colon X\to Y$ — регулярное отображение, $f(X)$ плотно в Y и многообразие X остается неприводимым над алгебраическим замыканием $\overline{k(Y)}$ поля $k(Y)$. Тогда в Y существует такое открытое плотное множество $U\subset Y$, что все слои $f^{-1}(y)$, $y\in U$, неприводимы.*

Замечания. 1. Теорема верна и над полями конечной характеристики — доказательство лишь слегка усложняется.

2. Ввиду замечания, предшествующего формулировке теоремы, единственная причина, почему «большинство» слоев может быть приводимым,— существование конечных отображений.

Доказательство. Мы можем заменить Y его открытым аффинным подмножеством Y_1 и, согласно теореме 7 § 6 гл. I, считать, что для $y\in Y_1$ все компоненты слоя $f^{-1}(y)$, $y\in Y_1$, имеют одинаковую размерность $r=\dim X-\dim Y$. В такой ситуации можно заменить и X любым его открытым подмножеством X_1. Действительно, пусть $X\setminus X_1 = Z$ и $Z=\cup Z_i$ — разложение на неприводимые компоненты. За счет уменьшения Y_1 до $Y_2\subset Y_1$ мы можем отбросить те из Z_i, для которых $\overline{f(Z_i)}\neq Y_2$. Если же $f(Z_i)$ плотно в Y_2, то опять, может быть, уменьшая Y_2, мы можем считать, что все компоненты слоев отображения $f\colon Z_i\to Y_2$ имеют размерность, равную $\dim Z_i - \dim Y_2 < r$. Поэтому они пересекаются со слоями отображения $f\colon X\to Y_2$ по подмногообразиям меньшего числа измерений и ввиду того, что все эти компоненты имеют одинаковую размерность, выкидывание из них этих подмногообразий меньшей размерности не повлияет на их приводимость.

Воспользуемся теперь тем, что мы имеем дело с полями характеристики 0: присоединим к полю $k(Y)$ r алгебраически независимых элементов $u_1,\ldots,u_r$ и найдем элемент u_{r+1}, примитивный для расширения $k(X)/k(Y)(u_1,\ldots,u_r)$ и целый над $k[Y_2]$. Пусть X_2 — аффинное многообразие, для которого $k[X_2] = k[Y_2][u_1,\ldots,u_{r+1}]$. По конструкции X_2 бирационально изоморфно X, поэтому они содержат изоморфные открытые подмножества, и, значит, нам достаточно доказать теорему для X_2 вместо X, причем отображение $f\colon X_2\to Y_2$ определяется вложением $k[Y_2]\subset k[Y_2][u_1,\ldots,u_{r+1}]$.

Пусть $F=T^k + a_1(u_1,\ldots u_r)T^{k-1}+\ldots+a_k(u_1,\ldots,u_r)$ — неприводимый многочлен с $a_i\in k[Y_2][u_1,\ldots,u_r]$, корнем которого является u_{r+1}. Неприводимость многообразия X над полем $\overline{k(Y)}$ означает, что F неприводим в кольце $\overline{k(Y)}[u_1,\ldots,u_r]$. Нам же надо доказать, что в Y_2 существует такое открытое подмножество U, что он останется неприводимым при замене всех его коэффициентов (лежащих в $k[Y_2]$) их значениями в точке $y\in U$. Но это сразу следует из предложения в п. 2 § 5 гл. I, согласно которому приводимость многочлена выражается алгебраическими соотношениями между его коэффициентами. Для F какое-то из этих соотношений по условию не выполняется и левая часть этого соотношения дает элемент $a\in k[Y_2]$, $a\neq 0$. Тогда для всех $y\in Y_2$, для которых $a(y_2)\neq 0$, неприводим и многочлен, коэффициенты которого получаются из F заменой значениями в точке y. Иными словами, $U=Y_2\setminus V(a)$.

2. Гладкость. Теорема 2. *Пусть $f\colon X\to Y$ — регулярное отображение многообразий, определенных над полем характеристики 0, X гладко и $f(X)$ плотно в Y. В Y существует такое открытое множество U, что все слои $f^{-1}(y)$, $y\in U$,— гладкие.*

Положим $\dim X=n$, $\dim Y=m$. Согласно теореме 7 § 6 гл. I существует открытое подмножество в Y, для всех точек которого слои $f^{-1}(y)$ состоят из компонент одинаковой размерности $n-m$. Мы можем считать, что Y совпадает с этим открытым подмножеством. Точно так же можно считать Y гладким. Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. *Если для всех точек $x\in f^{-1}(y)$, отображение $d_xf\colon \Theta_{x,X}\to\Theta_{y,Y}$ эпиморфно, то слой $f^{-1}(y)$ гладок.*

Заметим, что касательное пространство $\Theta_{x,f^{-1}(y)}$ к слою $f^{-1}(y)$ лежит в ядре отображения d_xf. Действительно, композиция вложения $\Theta_{x,f^{-1}(y)} \to \Theta_{x,X}$ и гомоморфизма d_xf равна 0: чтобы это проверить, надо по двойственности убедиться, что композиция отображения $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ (сопряженного d_xf) и $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to \widetilde{\mathfrak{m}}_x/\widetilde{\mathfrak{m}}_x^2$, где $\widetilde{\mathfrak{m}}_x$ — максимальный идеал точки x на слое, а $\mathfrak{m}_x \to \widetilde{\mathfrak{m}}_x$ — ограничение на слой, равна 0. Последнее очевидно. Таким образом, если d_xf — эпиморфизм, то $\dim \Theta_{x,f^{-1}(y)} \leqslant \dim \operatorname{Ker} d_xf = \dim \Theta_{x,X} - \dim \Theta_{y,Y} \leqslant n-m$ (здесь мы воспользовались тем, что X гладко, т. е. $\dim \Theta_{x,X} = n$). Так как все компоненты слоя $f^{-1}(y)$ имеют размерность $n-m$, то отсюда следует, что он — гладкий.

Лемма 2. *В X существует такое непустое открытое множество V, что для $x \in V$ отображение d_xf эпиморфно.*

Эпиморфность отображения d_xf: $\Theta_{x,X} \to \Theta_{y,Y}$ равносильна по двойственности тому, что отображение $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ является вложением, т. е. что если $u_1, \ldots, u_m$ — локальные параметры в точке y, то $d_xu_1, \ldots, d_xu_m$ линейно независимы. Используя вложения $\mathcal{O}_y$ в кольцо формальных степенных рядов (см. § 2 гл. II), легко убедиться, что $u_1, \ldots, u_m$ алгебраически независимы, а из плотности $f(X)$ в Y следует, что они алгебраически независимы и как функции на X. Дополним систему $u_1, \ldots, u_m$ до системы $u_1, \ldots, u_n$ из n алгебраически независимых функций на X. Лемма 2 будет доказана, если мы проверим, что для любой системы алгебраически независимых функций $u_1, \ldots, u_n$ на X множество точек, в которых $u_1, \ldots, u_n$ — локальные параметры, открыто и не пусто. Мы можем предполагать, что X аффинно, $X \subset \mathbf{A}^N$ и $x_1, \ldots, x_N$ — координаты. Докажем, что для точек x из открытого непустого множества $U \subset X$ все d_xx_i линейно выражаются через $d_xu_1, \ldots, d_xu_n$. Тогда из линейной зависимости функций d_xu_i вытекало бы, что $\dim \Theta_{x,X} < n$.

Каждая функция x_i связана с $u_1, \ldots, u_n$ соотношением $F_i(x_i, u_1, \ldots, u_n) = 0$, причем F_i — неприводимый многочлен и, значит (ввиду того, что характеристика поля k равна 0), $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i} \neq 0$ (тождественно). Пусть $F_i = a_0x_i^{n_i} + a_1x_i^{n_i-1} + \ldots + a_n$, $a_j \in k[u_1, \ldots, u_n]$. Тогда d_xa_j выражаются через $d_xu_1, \ldots, d_xu_n$. Из условия $F_i(x_i, u_1, \ldots$ $\ldots, u_n) = 0$ вытекает ввиду свойств (5) (п. 3 § 1), что в любой точке $x \in X$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)\, d_xx_i + x_i^{n_i} d_xa_0 + \ldots + d_xa_n = 0.$$

Те точки, в которых $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) \neq 0$, образуют открытое непустое множество, и в них d_xx_i выражается через $d_xu_1, \ldots, d_xu_n$.

Теперь легко закончить доказательство теоремы 2. Обозначим через $Z \subset X$ подмножество тех точек $x \in X$, для которых отображение d_xf не эпиморфно. Легко видеть, что это замкнутое подмножество: оно определяется обращением в 0 некоторых миноров. Нам надо доказать, что $f(Z)$ содержится в собственном замкнутом подмножестве многообразия Y. Если это не так, то $f(Z)$ плотно в Y. Применяя к Z лемму 2, мы найдем в Z непустое открытое подмножество V, для точек которого отображение $\Theta_{x,Z} \to \Theta_{f(x),Y}$ эпиморфно. Но $\Theta_{x,Z} \subset \Theta_{x,X}$, и тогда отображение $\Theta_{x,X} \to \Theta_{f(x),Y}$ тем более должно быть эпиморфным. Это противоречие доказывает теорему.

В теории дифференцируемых многообразий доказывается, что для дифференцируемого отображения f: $X \to Y$ те точки $y \in Y$, прообраз которых не является гладким многообразием, составляют подмножество меры 0 в Y (т. е. аналог подмногообразия меньшего числа измерений). Это так называемая лемма Сарда (см. [24]). Теорема 2 является алгебро-геометрическим эквивалентом над полем характеристики 0. Мы увидим в п. 4, что в характеристике $p > 0$ аналогичный факт неверен.

Теоремы 1 и 2, а также их различные обобщения называются *теоремами Бертини*.

3. Ветвление. Рассмотрим теперь простейшую ситуацию — когда слои отображения нульмерны. Для конечного отображения f: $X \to Y$ число прообразов точки $y \in Y$ конечно, как мы видели в п. 3 § 5 гл. I. Попытаемся исследовать это число. Естественно ожидать, что, по аналогии с теоремой о размерности прообраза, это число одно и то же для всех точек y из некоторого открытого множества и только на некотором замкнутом подмножестве $Z \subset Y$ могут возникать отклонения.

Так обстоит дело в простейшем примере отображения

$$f\colon \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1, \quad y = f(x) = x^2. \qquad (1)$$

Чтобы сформулировать в общем виде особенность этого примера, введем одно понятие.

Определение. Если X и Y — неприводимые многообразия одинаковой размерности, а $f\colon X \to Y$ — такое регулярное отображение, что $f(X)$ плотно в Y, то степень расширения $k(X)/f^*k(Y)$ (которая при этих условиях конечна), называется *степенью отображения* f:

$$\deg f = [k(X) : f^*k(Y)].$$

В случае отображения (1) $\deg f = 2$, и если характеристика поля k не равна 2, то любая точка $y \neq 0$ имеет два разных прообраза, а точка $y = 0$ — один прообраз. Всегда ли число прообразов не превосходит степени отображения? Это не так в приведенном в п. 2 § 1 гл. I примере параметризации (2) $f\colon \mathbf{A}^1 \to Y$ кривой Y (1) с двойной точкой: здесь $\deg f = 1$, однако прообраз особой точки состоит из двух точек. Оказывается, что причина здесь в том, что кривая Y не нормальна.

Теорема 3. *Если $f\colon X \to Y$ — конечное отображение неприводимых многообразий и Y нормально, то число прообразов любой точки $y \in Y$ не превосходит* $\deg f$.

Ввиду определения конечного отображения мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда X и Y аффинны. Положим

$$k[X] = A, \quad k[Y] = B,$$
$$k(X) = K, \quad k(Y) = L, \quad [K : L] = \deg f = n.$$

Так как Y нормально, то B целозамкнуто, а так как f конечно, то A — модуль конечного типа над B. Поэтому для любого элемента $a \in A$ коэффициенты его минимального многочлена принадлежат B. Это — простое свойство целозамкнутых колец, доказательство которого можно найти в [3], гл. V. Пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Рассмотрим такой элемент $a \in A$, что значения $a(x_i)$ все различны при $i = 1, \ldots, m$ (если $X \subset \mathbf{A}^N$, то речь идет о построении такого многочлена в N-мерном пространстве, а это совсем элементарно). Пусть $F \in B[T]$ — минимальный многочлен элемента a. Очевидно, $\deg F \leqslant n$. Заменим в F все коэффициенты их значениями в точке y и полученный многочлен обозначим через $\bar{F}(T)$. Он имеет m разных корней $a(x_i)$. Таким образом,

$$m \leqslant \deg \bar{F} = \deg F \leqslant n,$$

так что $m \leqslant n$, как и утверждалось.

Дальше в этом пукте мы будем всегда рассматривать конечные отображения $f\colon X \to Y$ неприводимых многообразий, причем Y предполагать нормальным.

Определение. Отображение f называется *неразветвленным* в точке $y \in Y$, если число прообразов этой точки равно степени отображения. В противном случае y называется *точкой ветвления*.

Теорема 4. *Множество точек, в которых отображение не разветвлено, открыто, а если расширение $k(X)/f^*k(Y)$ сепарабельно, то не пусто.*

Сохраним обозначения, введенные при доказательстве теоремы 3. Если f не разветвлено в точке y, то $\deg \bar{F} = \deg F = n$ и $\bar{F}$ имеет n различных корней. Обозначим через $D(F)$ дискриминант многочлена F. Как мы видели, условие неразветвленности в точке y можно записать в виде

$$D(\bar{F}) = D(F)(y) \neq 0. \tag{2}$$

Но тогда $D(F)(y') \neq 0$ для точек y' некоторой окрестности точки y. Это и надо было доказать.

Таким образом, множество точек ветвления замкнуто. Оно называется *подмногообразием ветвления* отображения f.

Остается еще вопрос о том, является ли оно собственным подмногообразием. Если расширение $k(X)/f^*k(Y)$ несепарабельно, то для минимального многочлена F любого элемента этого расширения $D(F) = 0$. Поэтому условие (2) не выполняется ни для одной точки — все точки являются точками ветвления.

Пусть расширение $k(X)/f^*k(Y)$ сепарабельно. В этом случае отображение f тоже называется *сепарабельным*. Мы можем опять считать X и Y аффинными и употреблять прежние обозначения. Если $a \in A$ — примитивный элемент расширения $k(X)/f^*k(Y)$, а $F(T)$ — его минимальный многочлен, то $\deg F = n$, $D(F) \neq 0$. Поэтому существуют точки $y \in Y$, в которых $D(F)(y) \neq 0$, а значит, отображение f не разветвлено. Это доказывает теорему 4.

Мы видим, что если отображение $f\colon X \to Y$ конечно и сепарабельно, многообразия X и Y неприводимы, а Y нормально, то имеет место та же картина, что и в примере (1): точки некоторого непустого подмножества $U \subset Y$ имеют $\deg f$ различных прообразов, а точки дополнения — меньше прообразов.

Пусть теперь Y гладко. Предшествующие рассуждения позволяют описать в очень явной форме конечные неразветвленные отображения $f\colon X\to Y$. Рассмотрим функцию $a\in A=\mathrm{k}[X]$, принимающую разные значения во всех точках прообраза $f^{-1}(y)$ некоторой точки $y\in Y$. Тогда $\mathrm{k}(X)=\mathrm{k}(Y)(a)$. Если $F\in B[T]$, $B=\mathrm{k}[Y]$,— минимальный многочлен элемента a, то согласно (2) $D(F)(y)\neq\neq 0$ и, значит, $F'(a)(x)\neq 0$ для $x\in f^{-1}(y)$. Будем дальше обозначать через Y аффинную окрестность точки y, для которой выполнено условие $D(F)\neq 0$, а через X — ее прообраз. Положим $A'=B[a]=B[T]/(F(T))$. Тогда $A'=\mathrm{k}[X']$, где X' задается в $Y\times\mathbf{A}^1$ уравнением $F(T)=0$. Мы докажем, что (ввиду гладкости Y) многообразие X' тоже гладко. Но тогда оно нормально и, значит, кольцо A' целозамкнуто, а так как $A\supset A'$ и поля частных у них одинаковые, то $A=A'$ и $X=X'$, т. е. полученная явная конструкция для X' описывает на самом деле X.

Остается доказать гладкость многообразия X'. Пусть $F(T)=T^n+b_1T^{n-1}+\ldots+b_n$, $b_i\in B$. Докажем, что отображение $d_xf\colon\Theta_{x,X'}\to\Theta_{f(x),Y}$ является вложением для любой точки $x\in X'$. По двойственности это равносильно тому, что отображение $\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2\to\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, $z=f(x)$, является эпиморфизмом. Пусть $u_1,\ldots,u_m$ — локальные параметры в точке z. Нам надо доказать, что $d_xu_1,\ldots,d_xu_m$ порождают $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. По определению это пространство порождается элементами d_xb, $b\in B$ (которые выражаются через d_xu_i), и d_xa. Остается доказать, что d_xa выражается через d_xu_i. Воспользуемся тем, что $F(a)=0$, и свойствами (5) из п. 3 § 1. Мы получим, что

$$F'(a)(x)d_xa+a^{n-1}(x)d_xb_1+\ldots+d_xb_n=0.$$

Так как $F'(a)(x)\neq 0$, то d_xa выражается через d_xu_i.

Теперь вспомним, что Y гладко и $\dim X'=\dim Y=m$. Поэтому $\dim\Theta_{z,Y}=m$, а, ввиду вложения $d_xf\colon\Theta_{x,X'}\subset\subset\Theta_{y,Y}$, $\dim\Theta_{x,X'}=m$. Значит, X' гладко и $X'=X$. Но мы доказали и несколько больше. Резюмируем все доказанное.

Теорема 5. *Неразветвленное конечное отображение $f\colon X\to Y$ для гладкого Y локально записывается как проекция на Y многообразия $X\subset Y\times\mathbf{A}^1$, где X определено уравнением $F(T)=0$ и $D(F)\neq 0$ на Y. Дифференциал d_xf определяет изоморфизм касательных пространств:* $\Theta_{x,X}\xrightarrow{\sim}\Theta_{f(x),Y}$.

В случае, когда $\mathrm{k}=\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, эта теорема показывает, что, как отображение топологических пространств, $f\colon X\to Y$ является неразветвленным накрытием, т. е. любая точка $y\in Y$ обладает такой окрестностью U, что $f^{-1}(U)$ распадается на непересекающиеся открытые множества, каждое из которых f отображает гомеоморфно на U. Действительно, пусть $f^{-1}(y)=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $u_1,\ldots,u_m$ — локальные параметры в окрестности y, $v_1^{(i)},\ldots,v_m^{(i)}$ — локальные параметры в точке x_i. Изоморфизм $d_{x_i}f\colon\Theta_{x_i,X}\xrightarrow{\sim}\Theta_{y,Y}$ показывает, что $\det\left(\dfrac{\partial v_k^{(i)}}{\partial u_j}\right)(x_i)\neq 0$ для всех $i=1,\ldots,n$. По теореме о неявных функциях отсюда следует, что существуют такие окрестности V_i точек x_i и U точки y, что f определяет гомеоморфизм V_i и U. Мы можем выбрать эти окрестности столь малыми, что V_i и V_j не пересекаются при $i\neq j$. Проверим, что $f^{-1}(U)=\cup V_i$. Если $y'\in U$, то $f^{-1}(y')$ состоит, ввиду неразветвленности отображения f, из n точек, где $n=\deg f$. Так как y' уже имеет n прообразов в $\cup V_i$, то $f^{-1}(U)=\cup V_i$.

4. **Примеры.** 1. *Пучок квадрик.* Рассмотрим в $\mathbf{P}^n\times\mathbf{A}^1$ гиперповерхность X с уравнением $\sum\limits_{i,j=0}^{n}a_{ij}(t)\,\xi_i\xi_j=0$, $a_{ij}(t)\in\mathrm{k}[\mathbf{A}^1]=\mathrm{k}[t]$. Она называется *пучком квадрик*, а многочлен $D(t)=\det(a_{ij}(t))$ — *дискриминантом пучка*. Мы будем предполагать, что $D(t)\not\equiv 0$. С пучком коник мы встречались в примерах 1 и 2 § 6 гл. I.

Выясним, во-первых, когда многообразие X гладко, а во-вторых, над какими точками $\alpha\in\mathbf{A}^1$ будет негладким слой проекции $X\to\mathbf{A}^1$, индуцированной проекцией $\mathbf{P}^n\times\mathbf{A}^1\to\mathbf{A}^1$. Мы будем предполагать, что характеристика поля k отлична от 2.

Положим $\sum\limits_{i,j=0}^{n}a_{ij}(t)\,\xi_i\xi_j=F$. Если в точке $t=\alpha$ $D(\alpha)\neq 0$, то уравнения $\dfrac{\partial F}{\partial\xi_i}=0$ $(i=0,\ldots,n)$, $t=\alpha$, имеют только нулевое решение, и поэтому точки слоя над точкой $t=\alpha$ являются простыми как на X, так и на слое. Остается рассмотреть значения $t=\alpha$, для которых $D(\alpha)=0$. Мы будем считать, что $\alpha=0$.

Положим $\overline{F}=\sum a_{ij}(0)\,\xi_i\xi_j$ и обозначим через r ранг этой квадратичной формы. После некоторого невырожденного линейного преобразования с коэффициентами из k форма $\overline{F}$ примет вид $\xi_0^2 + \ldots + \xi_{r-1}^2$. Применим к форме F обычный способ выделения квадратов. Тогда после линейного преобразования, коэффициенты которого лежат в локальном кольце $\mathcal{O}_0$ точки $t=0$ на $\mathbf{A}^1$ (т. е. не содержат t в знаменателе), а определитель обратим в $\mathcal{O}_0$, форма F примет вид $F = a_0(t)\xi_0^2 + \ldots + a_{r-1}(t)\xi_{r-1}^2 + tG(\xi_r, \ldots, \xi_n)$, где $a_i(t) \in \mathcal{O}_0$, $a_i(0) \neq 0$. Точка $t=0$, $\xi_0 = 0, \ldots, \xi_{r-1} = 0$ лежит на пучке при любых $\xi_r, \ldots, \xi_n$, и в ней $\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = 0$. Пусть $G(\xi_r, \ldots, \xi_n) = \overline{G}(\xi_r, \ldots, \xi_n) + tG_1(\xi_r, \ldots, \xi_n)$, где $\overline{G}(\xi_r, \ldots, \xi_n) \in \mathrm{k}[\xi_r, \ldots, \xi_n]$. Тогда в нашей точке $\frac{\partial F}{\partial t} = \overline{G}(\xi_r, \ldots, \xi_n)$. Если $r < n$, то существуют такие $\xi_r, \ldots, \xi_n$, не все равные 0, что $G(\xi_r, \ldots, \xi_n) = 0$ и точка будет особой. При $r = n$ форма приобретает вид $F = a_0(t)\xi_0^2 + \ldots + a_{n-1}(t)\xi_{n-1}^2 + t^k a_n(t)\xi_n^2$, $a_i(0) \neq 0$, $k \geqslant 1$. Если $k > 1$, то в точке $\xi_0 = \ldots = \xi_{n-1} = t = 0$, $\xi_n = 1$, $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ и точка особая. Остается случай $k=1$, когда, как легко убедиться, особых точек гиперповерхности X в слое над точкой 0 не будет. Таким образом, *пучок квадрик X будет гладким многообразием тогда и только тогда, когда его дискриминант не имеет кратных корней. Негладкие слои лежат в точности над корнями дискриминанта. В частности, число негладких слоев отображения $X \to \mathbf{A}^1$ равно степени дискриминанта.*

2. *Пучок эллиптических кривых.* Рассмотрим в $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^1$ поверхность X, определенную уравнением $\xi_2^2\xi_0 - \xi_1^3 - a(t)\xi_1\xi_0^2 - b(t)\xi_0^3 = 0$, $a(t)$, $b(t) \in \mathrm{k}[\mathbf{A}^1] = \mathrm{k}[t]$. Мы будем считать, что поле k имеет характеристику, отличную от 2 и 3. Проекция $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ определяет отображение $f\colon X \to \mathbf{A}^1$. Слой $f^{-1}(\alpha)$ над точкой α является кубикой $\xi_2^2\xi_0 - \xi_1^3 - a(\alpha)\xi_1\xi_0^2 - b(\alpha)\xi_0^3 = 0$. Эта кубика имеет единственную точку «в бесконечности» $\xi_0 = 0$ — точку перегиба $(0:1:0)$, и в карте $\mathbf{A}^2$, где $\xi_0 \neq 0$, $x = \xi_1/\xi_0$, $y = \xi_2/\xi_0$, она задается уравнением $y^2 = x^3 + a(\alpha)x + b(\alpha)$. Если кривая $f^{-1}(\alpha)$ — гладкая, то, как и в примере 1, поверхность X не имеет особых точек, лежащих на слое $f^{-1}(\alpha)$. Пусть кривая $f^{-1}(\alpha)$ — негладкая. Точка $(0:1:0)$ на ней, как легко проверить, простая. Значит, должны иметь совместное решение уравнения $y=0$, $3x^2 + a(\alpha) = 0$, $x^3 + a(\alpha)x + b(\alpha) = y^2$, откуда следует, что $4a(\alpha)^3 + 27b(\alpha)^2 = 0$. Многочлен $D(t) = 4a(t)^3 + 27b(t)^2$ называется *дискриминантом* пучка X. Мы будем предполагать, что $D(t) \not\equiv 0$. Мы доказали, что если $D(\alpha) \neq 0$, то все точки слоя $f^{-1}(\alpha)$ являются простыми как на слое, так и на поверхности X.

Если $D(\alpha) = 0$, то то же рассуждение показывает, что слой $f^{-1}(\alpha)$ имеет особую точку, причем из уравнений $3x^2 + a(\alpha) = 0$, $x^3 + a(\alpha)x + b(\alpha) = 0$ следует, что для координаты x этой точки $2a(\alpha)x + 3b(\alpha) = 0$. Чтобы эта точка была особой на X, должно еще удовлетворяться соотношение $a'(\alpha)x + b'(\alpha) = 0$, откуда $2ab' - 3ba' = 0$. Так как, сверх того, $4a^3 + 27b^2 = 0$, то либо $a(\alpha) = b(\alpha) = 0$, либо $a(\alpha) \neq 0$, $b(\alpha) \neq 0$. При $a(\alpha) = b(\alpha) = 0$ наши соотношения эквивалентны тому, что $b'(\alpha) = 0$, а при $a(\alpha) \neq 0$, $b(\alpha) \neq 0$ могут быть записаны как $(a^3/b^2)'(\alpha) = 0$ или $D'(\alpha) = \left(b^2\left(4\frac{a^3}{b^2} + 27\right)\right)'(\alpha) = 0$. Таким образом, *пучок эллиптических кривых является гладкой поверхностью, когда корни дискриминанта простые или являются общими корнями a и b, простыми для b. Вырожденные слои соответствуют корням дискриминанта.*

3. *Особенности конечной характеристики.* Примеры, в которых не выполняется утверждение теоремы 2, можно построить в характеристике 2. Для этого рассмотрим пучок эллиптических кривых $\xi_2^2\xi_0 = \xi_1^3 + a(t)\xi_1\xi_0^2 + b(t)\xi_0^3$, в «конечной части» задаваемый уравнением $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$. В характеристике 2 любой слой $y^2 = x^3 + a(\alpha)x + b(t)$ имеет особую точку $x = a(\alpha)^{1/2}$, $y = b(\alpha)^{1/2}$, и только ее. Чтобы эта точка была особой на поверхности X, необходимо выполнение соотношения $a'(\alpha)x + b'(\alpha) = 0$, т. е. $((a')^2a + (b')^2)(\alpha) = 0$. Таким образом, все слои проекции $X \to \mathbf{A}^1$ — особые кривые, а поверхность X имеет особые точки только в слоях $f^{-1}(\alpha)$, где α — корень многочлена $(a')^2a + (b')^2$. Если S — множество этих корней, то поверхность $X \setminus \bigcup_{\alpha \in S} f^{-1}(\alpha)$ — гладкая, а все слои ее отображения на $\mathbf{A}^1 \setminus S$ — особые.

Аналогичный пример существует и в характеристике 3: пучок с уравнением $y^2 = x^3 + a(t)$. Можно показать, что такие «патологические» пучки кубик существуют только в характеристиках $p=2$ и $p=3$.

Пример, когда для конечного отображения $f\colon X \to Y$ все точки являются точками ветвления, дает отображение Фробениуса (пример 6 п. 3 § 2 гл. I) в характеристике $p > 0$. Для него $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p)$, и поэтому (в характеристике p) каждая точка x имеет единственный прообраз $\varphi^{-1}(x)$.

В теории кривых отображение Фробениуса в особенности отражает специфику конечной характеристики. При этом его надо несколько обобщить. Пусть C — плоская кривая $f(x, y) = \sum a_{ij}x^iy^j = 0$, C' — кривая $g(u, v) = \sum a_{ij}^p u^i v^j = 0$. Очевидно, что $u = x^p$, $v = y^p$ определяют (в характеристике p) рациональное (и даже регулярное) отображение $\varphi\colon C \to C'$. Оно называется тоже отображением Фробениуса и совпадает с введенным в п. 3 § 2 гл. I, если $a_{ij} \in \mathbf{F}_p$ (тогда $C = C'$).

Теорема 6. *Отображение Фробениуса алгебраических кривых имеет степень p. Любое рациональное несепарабельное отображение кривых $f\colon X \to Y$ представляется в виде $f = g \cdot \varphi$, где $g\colon X' \to Y$ — некоторое отображение, а $\varphi\colon X \to X'$ — отображение Фробениуса.*

Это следует из общих свойств полей характеристики $p > 0$ и степени трансцендентности 1 (Приложение, п. 4, предложение 2). Там доказано, что $[k(X) : \varphi^*k(X')] = p$, а это и значит, что $\deg \varphi = p$. Кроме того, $\varphi^*k(Y) \supset k(X)^{(p)}$, но $k(X)^{(p)} = \varphi^*k(X')$. Вложение полей $f^*k(Y) \subset \varphi^*k(X')$ и изоморфизм $\varphi^*\colon k(X') \to \varphi^*k(X')$ определяют вложение $(\varphi^*)^{-1}f^*k(Y) \subset k(X')$, т. е. рациональное отображение $g\colon X' \to Y$, для которого $f = g \cdot \varphi$.

ЗАДАЧИ

1. Классифицировать с точностью до формально-аналитической эквивалентности особые точки пучка квадрик над точкой $t = 0$ в предположении, что при $t = 0$ ранг квадрики падает на 1.

2. Рассмотрим связку коник X над $\mathbf{A}^2$, заданную в $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^2$ уравнением $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(s, t)\,\xi_i\xi_j = 0$. Предположим, что над любой точкой $\alpha \in \mathbf{A}^2$ ранг коники падает не более чем на 1. Доказать, что многообразие X — гладкое тогда и только тогда, когда кривая $\det(a_{ij}(s, t)) = 0$ — гладкая.

3. Доказать, что если пучок эллиптических кривых (пример 2 п. 4) является гладкой поверхностью, то его вырожденный слой неприводим. Верно ли это для любого семейства кубик?

4. Определить подмногообразие ветвления отображения $X \to \mathbf{P}^n$, где X — нормализация $\mathbf{P}^n$ в квадратичном расширении $k(\mathbf{P}^n) =$

$= k(x_1, \dots, x_n)$, определенном уравнением $y^2 = f(x_1, \dots, x_n)$, где f — многочлен степени m. Указание. Ответ зависит от четности m.

5. Доказать, что если p — характеристика поля k, то кривая $y^p + y = f(x)$, где f — многочлен, является неразветвленным накрытием прямой $\mathbf{A}^1$ с координатой x.

6. Доказать, что для поверхностей $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$ над полем характеристики 2 и $y^2 = x^3 + a(t)$ над полем характеристики 3 особые точки слоев образуют гладкую кривую, отображающуюся на прямую $\mathbf{A}^1$ с координатой t со степенью $p = 2$ и 3 соответственно.

Глава III

ДИВИЗОРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Дивизоры

1. Дивизор функции. Многочлен от одной переменной однозначно с точностью до постоянного множителя задается, если указать его корни и их кратности, т. е. набором точек $x_1, \ldots, x_r \in \mathbf{A}^1$ с кратностями $k_1, \ldots, k_r$. Рациональная функция $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f, g \in k[\mathbf{A}^1]$, определяется нулями многочленов f и g, т. е. точками, в которых она обращается в 0 или нерегулярна. Чтобы отличать корни g от корней f, мы будем брать их кратности со знаком минус. Таким образом, функция φ задается точками $x_1, \ldots, x_r$ с любыми целыми кратностями $k_1, \ldots, k_r$. Сейчас мы поставим себе цель аналогичным образом задать рациональную функцию на произвольном алгебраическом многообразии.

Мы будем исходить из того, что, согласно теореме о размерности пересечения, множество точек, в которых регулярная функция обращается в 0, образует подмногообразия коразмерности 1. Поэтому объект, который мы будем сопоставлять функции,— это набор неприводимых подмногообразий коразмерности 1 с приписанными им кратностями. Мы будем придавать кратностям целые, как положительные, так и отрицательные, значения.

Определение. Набор неприводимых замкнутых подмногообразий $C_1, \ldots, C_r$ коразмерности 1 в неприводимом многообразии X с приписанными им целыми кратностями $k_1, \ldots, k_r$ называется *дивизором*.

Дивизор D записывается в виде

$$D = k_1C_1 + \ldots + k_rC_r. \tag{1}$$

Если все $k_i = 0$, то пишут $D = 0$, если все $k_i > 0$, то $D > 0$, в этом случае D называется *эффективным*. Неприводимые подмногообразия C_i коразмерности 1, взятые с коэффициентом 1, называются *простыми* дивизорами. Если в (1) все $k_i \neq 0$, то многообразие $C_1 \cup \ldots \cup C_r$ называется *носителем* дивизора D и обозначается $\operatorname{Supp} D$.

Мы определим операцию сложения дивизоров. Для этого заметим, что если разрешить коэффициентам в (1) принимать также и нулевые значения, то любые два дивизора можно записать в виде

$$D' = k_1'C_1 + \ldots + k_r'C_r, \quad D'' = k_1''C_1 + \ldots + k_r''C_r$$

с общими $C_1, \ldots, C_r$. По определению тогда

$$D' + D'' = (k_1' + k_1'')\,C_1 + \ldots + (k_r' + k_r'')\,C_r.$$

Таким образом, дивизоры на многообразии X образуют группу, изоморфную свободному модулю над $\mathbf{Z}$, образующими которого являются неприводимые подмногообразия коразмерности 1 в X. Эта группа обозначается через $\operatorname{Div}(X)$.

Мы перейдем теперь к сопоставлению функции $f \in k(X)$, $f \neq 0$, дивизора. Пусть C — простой дивизор; мы сопоставим сначала каждой функции $f \in k(X)$, $f \neq 0$, целое число $\nu_C(f)$. Если $X = \mathbf{A}^1$, то это — порядок нуля (или полюса) функции f в точке.

Это можно сделать только при одном ограничении на многообразие X. Именно, мы предположим, что X *гладко в коразмерности* 1, т. е. что множество особых точек многообразия X имеет коразмерность $\geqslant 2$. Пусть $C \subset X$ — неприводимое подмногообразие коразмерности 1 и U — некоторое аффинное открытое множество, состоящее из простых точек, пересекающееся с C и такое, что C определяется в U локальным уравнением. Такое множество U существует ввиду ограничения, наложенного на X, и ввиду теоремы 1 § 3 гл. II. Таким образом, в $k[U]$ $\mathfrak{a}_C = (\pi)$. Докажем, что для любой функции $f \in k[U]$, $f \neq 0$, существует такое число $k \geqslant 0$, что $f \in (\pi^k)$, $f \notin (\pi^{k+1})$. Если бы это было не так, т. е. $f \in (\pi^k)$ для всех $k > 0$, то $f \in \bigcap (\pi^k)$, и поэтому $f = 0$ согласно теореме 5 § 2 гл. II.

Определяемое нами число k обозначим через $\nu_C(f)$. Оно обладает свойствами

$$\begin{gathered} \nu_C(f_1f_2) = \nu_C(f_1) + \nu_C(f_2), \\ \nu_C(f_1 + f_2) \geqslant \min(\nu_C(f_1);\ \nu_C(f_2)) \\ \text{при } f_1 + f_2 \neq 0, \end{gathered} \tag{2}$$

которые легко следуют из определения и неприводимости C.

В случае гладких плоских кривых мы уже определили эту функцию в теореме 1 § 1 гл. I.

Если X неприводимо, то любую функцию $f \in k(X)$ можно представить в виде $f = \frac{g}{h}$, g, $h \in k[U]$. Для $f \neq 0$ положим $\nu_C(f) = \nu_C(g) - \nu_C(h)$. Из (2) сразу следует, что $\nu_C(f)$ не зависит от представления f в виде $\frac{g}{h}$ и что (2) верно для всех $f \in k(X)$ и отличных от нуля.

Данное нами определение числа $\nu_C(f)$ пока зависело от выбора открытого множества U и поэтому мы будем писать $\nu_C^U(f)$ вместо $\nu_C(f)$. Покажем, что на самом деле $\nu_C^U(f)$ не зависит от U.

Предположим сначала, что V — аффинное открытое множество, $V \subset U$ и $V \cap C \neq \varnothing$. Тогда π является локальным уравнением для C также и в V и очевидно, что $\nu_C^V(f) = \nu_C^U(f)$. Если же V — любое открытое множество, удовлетворяющее тем же условиям, что и U, то $U \cap C$ и $V \cap C$ открыты в C и не пусты, а так как C неприводимо, то они имеют непустое пересечение. Взяв за W аффинную окрестность в $U \cap V$ некоторой точки $x \in U \cap \cap V \cap C$, мы получим, что, согласно предыдущему замечанию, $\nu_C^U(f) = \nu_C^W(f)$, $\nu_C^V(f) = \nu_C^W(f)$, а значит, $\nu_C^U(f) = \nu_C^V(f)$. Таким образом, корректность обозначения $\nu_C(f)$ оправдана. Заметим, что если $X = \mathbf{A}^1$, $C = x$ — точка с координатой α, $f \in k[\mathbf{A}^1] = k[T]$, то $\nu_x(f)$ совпадает с кратностью корня α многочлена $f(T)$, а общее определение, по существу, копирует этот частный случай.

Если $\nu_C(f) = k > 0$, то говорят, что функция f имеет нуль порядка k на подмногообразии C; если $\nu_C(f) = -k < 0$, то f имеет полюс порядка k на C. Заметим, что эти понятия определены для подмногообразий коразмерности 1, а не для точек. Например, для функции x/y на $\mathbf{A}^2$ точка $(0, 0)$ принадлежит как к подмногообразию нулей $(x = 0)$, так и к подмногообразию полюсов $(y = 0)$ функции.

Докажем теперь, что заданной функции $f \in k(X)$ соответствует только конечное число таких неприводимых подмногообразий коразмерности 1, что $\nu_C(f) \neq 0$. Рассмотрим сначала случай, когда X — аффинное многообразие и $f \in k[X]$. Тогда из определения следует, что если C не является компонентой подмногообразия $V(f)$, то $\nu_C(f) = 0$. Если X по-прежнему аффинно, но $f \in k(X)$, то $f = g/h$, g, $h \in k[X]$, и мы видим, что $\nu_C(f) = 0$, если C не является компонентой $V(g)$ или $V(h)$. Наконец, в общем случае пусть $X = \cup U_i$ — конечное покрытие X аффинными открытыми множествами. Тогда любое C пересекается хоть с одним U_i, и поэтому $\nu_C(f) \neq 0$ только для тех C, которые являются замыканиями таких неприводимых подмногообразий $\tilde{C} \subset U_i$, что $\nu_{\tilde{C}}(f) \neq 0$ в U_i. Ввиду конечности числа U_i и числа $\tilde{C}$ в любом U_i число C с $\nu_C(f) \neq 0$ конечно. Таким образом, мы можем рассмотреть дивизор

$$\sum \nu_C(f)\, C, \tag{3}$$

где сумма распространена на все неприводимые подмногообразия коразмерности 1, для которых $\nu_C(f) \neq 0$. Этот дивизор называется *дивизором функции* f и обозначается через (f).

Дивизор вида $D = (f)$, $f \in k(X)$, называется *главным*. Если $(f) = \sum k_i C_i$, то дивизоры $(f)_0 = \sum\limits_{i, k_i > 0} k_i C_i$ и $(f)_\infty = -\sum\limits_{j, k_j < 0} k_j C_j$ называются *дивизорами нулей* и *полюсов* функции f. Очевидно, $(f)_0 \geqslant 0$, $(f)_\infty \geqslant 0$, $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$. Обратим внимание на некоторые простые свойства: $(f_1 f_2) = (f_1) + (f_2)$, $(f) = 0$, если $f \in k$, $(f) \geqslant 0$, если $f \in k[X]$.

Докажем, что для гладкого неприводимого многообразия X верно и обратное: если $(f) \geqslant 0$, то функция f регулярна на многообразии X. Пусть $x \in X$ — точка, в которой функция f нерегулярна. Тогда $f = \frac{g}{h} \notin \mathcal{O}_x$, $h, g \in \mathcal{O}_x$. Из однозначности разложения на простые множители в $\mathcal{O}_x$ (теорема 2 § 3 гл. II) следует, что h и g можно выбрать взаимно простыми в $\mathcal{O}_x$. Пусть π — простой элемент кольца $\mathcal{O}_x$, входящий в h, но не в g. В некоторой аффинной окрестности U точки x многообразие $V(\pi)$ неприводимо и имеет коразмерность 1. Обозначим его замыкание в X через C. Тогда, очевидно, $\nu_C(f) < 0$. Этот результат верен также, если многообразие X нормально, но мы не будем здесь его доказывать.

Так как на проективном неприводимом многообразии X функция, регулярная во всех точках, является константой (следствие 1 теоремы 3 § 5 гл. I), то из только что доказанного результата следует, что если $(f) \geqslant 0$, то $f = \alpha \in k$ на гладком проективном многообразии X.

В частности, на гладком проективном неприводимом многообразии рациональная функция определяется своим дивизором однозначно с точностью до постоянного множителя: если $(f)=(g)$, то $(f\cdot g^{-1})=0$ и $f=\alpha\cdot g$, $\alpha\in k$.

Пример 1. $X=\mathbf{A}^n$. Согласно теореме 3 § 6 гл. I любое неприводимое подмногообразие C коразмерности 1 задается одним уравнением: $\mathfrak{A}_C=(F)$, $F=k[X]$. Отсюда следует, что $C=(F)$, т. е. любой простой дивизор,— а значит, и любой дивизор вообще,— главный.

Пример 2. $X=\mathbf{P}^n$. Любое неприводимое подмногообразие C коразмерности 1 задается одним однородным уравнением F, причем $\mathfrak{a}_C=\left(T_i^{-k}F\right)$ в аффинном открытом множестве U_i, если степень F есть k. Отсюда вытекает следующий способ построения дивизора функции $f\in k(\mathbf{P}^n)$: представим f в виде $f=\frac{F}{G}$, где F и G — формы одинаковой степени, и разложим эти формы на произведение неприводимых форм: $F=\prod H_i^{k_i}$, $G=\prod L_j^{m_j}$, тогда

$$(f)=\sum k_iC_i-\sum m_jD_j, \tag{4}$$

где C_i и D_j — неприводимые дивизоры, определенные уравнениями $H_i=0$ и $L_j=0$.

Обозначим через $\deg F$ степень формы F. Так как $\deg F=\deg G$, то $\sum k_i\deg H_i=\sum m_j\deg L_j$. Определим степень дивизора $D=\sum k_iC_i$ как число $\deg D=\sum k_i\deg H_i$. Мы доказали, что если дивизор D главный, то $\deg D=0$.

Легко проверить и обратное: если $\sum k_i\deg C_i=0$ и C_i задается уравнением H_i, где H_i — форма, то функция $f=\prod H_i^{k_i}$ однородная степени 0 и $\sum k_iC_i=(f)$.

Пример 3. Случай $X=\mathbf{P}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{P}^{n_k}$ разбирается аналогично. Подмногообразие C коразмерности 1 опять задается одним уравнением $H=0$ (теорема 3′ § 6 гл. I), однако H однородно отдельно по каждой группе координат пространств $\mathbf{P}^{n_i}$ и соответственно имеет k разных степеней $\deg_i H$ $(i=1,\ldots,k)$. Аналогично примеру 2 вводятся степени $\deg_i D$ дивизора D на X и дивизор D является главным тогда и только тогда, когда $\deg_i D=0$ $(i=1,\ldots,k)$.

Главные дивизоры образуют подгруппу $P(X)$ группы $\operatorname{Div}(X)$ всех дивизоров. Факторгруппа $\operatorname{Div}(X)/P(X)$

называется *группой классов дивизоров* и обозначается через $\mathrm{Cl}(X)$. Дивизоры, принадлежащие к одному классу смежности в $\operatorname{Div}(X)/P(X)$, называются *эквивалентными*: $D_1\sim D_2$, если $D_1-D_2=(f)$, $f\in k(X)$. Класс смежности в $\operatorname{Div}(X)/P(X)$ называется *классом дивизоров*.

В разобранных примерах мы имеем

1. $\mathrm{Cl}(\mathbf{A}^n)=0$. 2. $\mathrm{Cl}(\mathbf{P}^n)=\mathbf{Z}$. 3. $\mathrm{Cl}\left(\mathbf{P}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{P}^{n_k}\right)=\mathbf{Z}^k$.

2. Локально главные дивизоры. Предположим многообразие X гладким. В этом случае для любого простого дивизора $C\subset X$ и любой точки $x\in X$ существует открытое множество $U\ni x$, в котором C задается локальным уравнением π. Если D — любой дивизор, $D=\sum k_iC_i$ и в U любой из C_i задается локальным уравнением π_i, то в U имеем $D=(f)$, $f=\prod\pi_i^{k_i}$. Таким образом, любая точка x обладает окрестностью, в которой дивизор D главный. Мы можем из всех таких окрестностей выбрать конечное покрытие $X=\cup U_i$, причем в любом U_i будет $D=(f_i)$.

Очевидно, что функции f_i нельзя выбирать произвольно: f_i не равны тождественно нулю и в $U_i\cap U_j$ дивизоры (f_i) и (f_j) совпадают. Как мы видели в п. 1, отсюда следует, что функция $f_if_j^{-1}$ регулярна в $U_i\cap U_j$ и не обращается там в нуль. Если система функций $\{f_i\}$, соответствующих множествам покрытия $\{U_i\}$, удовлетворяет этим условиям: $f_if_j^{-1}$ регулярна и $\neq 0$ в $U_i\cap U_j$, то мы будем называть ее согласованной.

Наоборот, любая согласованная система функций определяет дивизор на X. Действительно, для любого простого дивизора C положим $k_C=\nu_C(f_i)$, если $U_i\cap C\neq\varnothing$, где f_i и C рассматриваются как функция и простой дивизор в многообразии U_i. Из согласованности системы функций следует, что это число не зависит от выбора U_i. Очевидно, что существует только конечное число таких C, что $k_C\neq 0$,— это замыкания неприводимых компонент дивизоров (f_i). Поэтому мы можем рассмотреть дивизор $D=\sum k_CC$. Очевидно, что ему соответствует заданная система функций $\{f_i\}$.

Наконец, легко выяснить, когда система функций $\{f_i\}$, соответствующая покрытию $\{U_i\}$, задает тот же дивизор, что и система $\{g_j\}$, соответствующая покрытию $\{V_j\}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в $U_i\cap V_j$

функции $f_i g_j^{-1}$ были всюду регулярны и $\neq 0$. Простая проверка предоставляется читателю.

Задание дивизоров системами функций позволяет изучить их поведение при регулярных отображениях. Пусть φ: $X \to Y$ — регулярное отображение гладких неприводимых многообразий и D — дивизор на Y. Предположим, что $\varphi(X) \not\subset \operatorname{Supp} D$. Мы покажем, что при этом ограничении можно определить прообраз $\varphi^*(D)$ дивизора D аналогично тому, как определен прообраз регулярной функции. Прежде всего выясним, когда можно построить прообраз рациональной функции f на Y и когда он не равен тождественно нулю на X. Для этого достаточно, чтобы была хоть одна точка $y \in \varphi(X)$, в которой f регулярна и $f(y) \neq 0$. Тогда такие точки образуют непустое открытое множество V. На V функция f регулярна и, значит, $\varphi^*(f)$ — регулярная, не равная тождественно (даже нигде) нулю функция на $\varphi^{-1}(V)$. Так как $\varphi^{-1}(V)$ открыто в X, то $\varphi^*(f)$ определяет рациональную функцию на X. В терминах дивизоров наше условие на отображение φ и функцию f сводится к тому, что $\varphi(X) \not\subset \not\subset \operatorname{Supp}(f)$.

Пусть теперь дивизор D задан согласованной системой функций $\{f_i\}$ и покрытием $\{U_i\}$. Рассмотрим те U_i, для которых $\varphi(X) \cap U_i$ не пусто, и докажем, что $\varphi(X) \cap U_i \not\subset \not\subset \operatorname{Supp}(f_i)$. Действительно, из неприводимости многообразия X следует, что $\overline{\varphi(X)}$ неприводимо в Y. Если $\varphi(X) \cap U_i \subset \operatorname{Supp}(f_i)$, то из неприводимости $\overline{\varphi(X)}$ и того, что $\varphi(X) \cap U_i$ не пусто, следует, что $\overline{\varphi(X)} \subset \operatorname{Supp}(f_i)$. Наконец, из того, что $\operatorname{Supp}(f_i) \cap U_i = \operatorname{Supp} D \cap U_i$, неприводимости $\overline{\varphi(X)}$ и того, что оно пересекается с U_i, следует, что $\varphi(X) \subset \operatorname{Supp} D$, вопреки предположенному.

Поэтому для всех U_i, которые пересекаются с $\varphi(X)$, рациональные функции $\varphi^*(f_i)$ определены в $\varphi^{-1}(U_i)$. Множества $\varphi^{-1}(U_i) = V_i$, для которых $\varphi(X)$ пересекается с U_i, открыты и образуют покрытие X, а функции $\varphi^*(f_i)$ образуют согласованную систему функций, которая определяет некоторый дивизор на X. Очевидно, что этот дивизор не изменится, если задать D другой системой функций. Полученный дивизор называется прообразом дивизора D и обозначается $\varphi^*(D)$.

Пример. Пусть X и Y — две кривые и f: $X \to Y$ — отображение, переводящее X в точку $a \in Y$. Если $b \in Y$, $b \neq a$, и (b) — дивизор, содержащий точку b с кратностью 1, то в окрестности точки a локальным уравнением для (b) служит 1, поэтому $f^*((b)) = 0$.

В частности, если $\varphi(X)$ плотно в Y, определен прообраз любого дивизора $D \in \operatorname{Div}(Y)$.

Если D и D' — два дивизора на Y, заданные системой функций $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$, соответствующими покрытиям $\{U_i\}$ и $\{V_j\}$, то дивизор $D + D'$ задается системой функций $\{f_i \cdot g_j\}$ и покрытием $\{U_i \cap V_j\}$. Отсюда сразу же следует, что $\varphi^*(D + D') = \varphi^*(D) + \varphi^*(D')$, так что если $\varphi(X)$ плотно в Y, то φ^* определяет гомоморфизм

$$\varphi^*: \operatorname{Div} Y \to \operatorname{Div} X.$$

Главный дивизор (f) задается системой функций $f_i = f$, и, следовательно, $\varphi^*((f)) = (\varphi^*(f))$.

Поэтому φ^* отображает $P(Y)$ в $P(X)$ и определяет гомоморфизм φ^*: $\operatorname{Cl}(Y) \to \operatorname{Cl}(X)$.

В качестве приложения задания дивизоров согласованными системами функций покажем, как можно сопоставить дивизор не функции, а форме от координат на гладком проективном многообразии. Пусть $X \subset \mathbf{P}^N$ и F — форма от координат в $\mathbf{P}^N$, не равная тождественно нулю на X. Для любой точки $x \in X$ рассмотрим такую форму G той же степени, что и F, что $G(x) \neq 0$. Такие формы существуют: например, если $x = (\alpha_0 : \ldots : \alpha_N)$ и $\alpha_i \neq 0$, то можно взять $G = T_i^{\deg F}$. Тогда $f = \frac{F}{G}$ является рациональной функцией на X, регулярной в открытом множестве, в котором $G \neq 0$.

Легко видеть, что существуют такие формы G_i, что открытые множества $U_i = X - X_{G_i}$ образуют покрытие многообразия X. Столь же легко проверить, что функции $f_i = \frac{F}{G_i}$ и открытые подмножества U_i образуют согласованную систему функций и, значит, определяют дивизор на X. Другой выбор форм G_i не изменит этого дивизора, который, следовательно, зависит только от формы F. Он называется *дивизором формы* F и обозначается (F). Так как функции f_i регулярны в множествах U_i, то $(F) \geqslant 0$. Если F_1 — другая форма, $\deg F_1 = \deg F$, то дивизор $(F) - (F_1)$ является дивизором рациональной функции F/F_1. Поэтому $(F) \sim (F_1)$, если $\deg F = \deg F_1$.

В частности, все дивизоры (L), где L — линейная форма, эквивалентны друг другу. Очевидно, что $\operatorname{Supp}(L) =$

$=X_L$ — сечение X гиперплоскостью $L=0$. Поэтому эти дивизоры называются *дивизорами гиперплоского сечения*.

Взяв выше за F_1 форму $L^{\deg F}$, мы получим, что $(F)\sim \deg F\cdot(L)$, где (L) — дивизор гиперплоского сечения.

Все рассуждения, связанные с заданием дивизора согласованной системой функции, можно обобщить на произвольные, не обязательно гладкие многообразия. Однако при этом возможность задания согласованной системой функций надо брать за определение дивизора. Объект, к которому мы таким образом приходим, называется *локально главным дивизором*.

Точнее говоря, локально главный дивизор на неприводимом многообразии — это система рациональных функций $\{f_i\}$, соответствующих открытым множествам покрытия $\{U_i\}$ и удовлетворяющих условиям: 1) f_i не равны тождественно 0 и 2) $f_if_j^{-1}$ и $f_jf_i^{-1}$ регулярны на $U_i\cap U_j$. При этом функции $\{f_i\}$ и покрытие $\{U_i\}$ определяют тот же дивизор, что и функции $\{g_j\}$ и покрытие $\{V_j\}$, если $f_ig_j^{-1}$ и $f_i^{-1}g_j$ регулярны в $U_i\cap V_j$.

Каждая функция $f\in \mathrm{k}(X)$ определяет локально главный дивизор, если положить $f_i=f$. Такие дивизоры называются *главными*.

Произведением локально главных дивизоров, заданных функциями $\{f_i\}$ и покрытием $\{U_i\}$ и функциями $\{g_j\}$ и покрытием $\{V_j\}$, называется дивизор, заданный функциями $\{f_ig_j\}$ и покрытием $\{U_i\cap V_j\}$. Все локально главные дивизоры образуют группу, а главные — ее подгруппу. Факторгруппа называется *группой Пикара* многообразия X и обозначается через $\mathrm{Pic}(X)$.

Любой локально главный дивизор имеет *носитель* — это замкнутое подмногообразие, состоящее в множестве U_i из точек, в которых f_i нерегулярна или равна нулю. Так же как и для дивизоров на гладких многообразиях, можно определить прообраз локально главного дивизора D на Y при регулярном отображении $\varphi\colon X\to Y$, если $\varphi(X)$ не содержится в $\mathrm{Supp}\,D$.

Отметим один важный частный случай. Если X — гладкое многообразие и Y — его не обязательно гладкое подмногообразие, то любой такой дивизор D на X, что $\mathrm{Supp}\not\supset Y$, определяет локально главный дивизор $\tilde D$ на Y. Для этого надо рассмотреть отображение вложения φ: $Y\to X$ и положить $\tilde D=\varphi^*(D)$. Мы будем называть $\tilde D$ *ограничением* D на Y и обозначать через $\rho_Y(D)$. Из определения следует, что для главных дивизоров $\rho_Y((f))=(\tilde f)$, где $\tilde f$ — ограничение функции f на Y.

Конечно, различие между дивизорами и локально главными дивизорами и между группами Pic и Cl проявляется только в случае негладких многообразий.

3. Как сдвинуть носитель дивизора с точек. Теорема 1. *Для любого дивизора D на гладком многообразии X и конечного числа точек $x_1,\ldots,x_m\in X$ существует такой дивизор D', что $D'\sim D$, $x_i\notin \mathrm{Supp}\,D'$ $(i=1,\ldots,m)$.*

Мы можем считать D простым дивизором, иначе достаточно было бы применить теорему к каждой его компоненте. Выберем в X аффинное открытое множество, содержащее точки $x_1,\ldots,x_m$. Достаточно доказать теорему для этого множества, так что мы можем предполагать X аффинным многообразием. Применяя индукцию по числу m, мы можем предполагать, что $x_1,\ldots,x_i\notin\mathrm{Supp}\,D$, $x_{i+1}\in\mathrm{Supp}\,D$. Нам остается построить такой дивизор D', что $D'\sim D$, $x_1,\ldots,x_{i+1}\notin\mathrm{Supp}\,D'$. Рассмотрим некоторое локальное уравнение π' простого дивизора D в окрестности точки x_{i+1}. Покажем, что π' можно выбрать так, что $\pi'\in\mathrm{k}[X]$ (по предположению X аффинно). Действительно, π' регулярно в точке x_{i+1}, и, значит, если $(\pi')_\infty=\sum k_lF_l$, то $F_l\not\ni x_{i+1}$. Поэтому для каждого l существует такая функция $f_l\in\mathrm{k}[X]$, равная нулю на F_l, что $f_l(x_{i+1})\neq 0$. Функция $\pi=\pi'\prod f_l^{k_l}$, очевидно, регулярна на X и является локальным уравнением D в окрестности точки x_{i+1}. Так как по условию $x_j\notin\mathrm{Supp}\,D\cup x_1\cup\ldots\cup x_{j-1}\cup x_{j+1}\cup\ldots\cup x_i$ $(j=1,\ldots,i)$, то для любого $j=1,\ldots,i$ существует такая функция $g_j\in\mathrm{k}[X]$, что $g_j|_D=0$, $g_j(x_l)=0$ $(l=1,\ldots,j-1,\ j+1,\ldots,i)$, $g_j(x_j)\neq 0$.

Рассмотрим функцию

$$f=\pi+\sum_{j=1}^{i}\alpha_jg_j^2,\qquad \alpha_j\in\mathrm{k},$$

и подберем константы α_j так, чтобы

$$f(x_j)\neq 0,\quad j=1,\ldots,i. \tag{1}$$

Для этого достаточно взять $\alpha_j\neq -\dfrac{\pi(x_j)}{g_j(x_j)^2}$. Так как все $g_j|_D=0$, то в локальном кольце $\mathcal{O}_{x_{i+1}}$ имеем $g_j\equiv 0(\pi)$ и $\sum\alpha_jg_j^2=\pi^2h$, $h\in\mathcal{O}_{x_{i+1}}$, $f=\pi(1+\pi h)$. Так как

$(1+\pi h)(x_{i+1})=1$, то отсюда следует, что f — локальное уравнение дивизора D в окрестности точки x_{i+1}. Поэтому $(f)=D+\sum r_s D_s$, причем ни один из простых дивизоров D_s не проходит через точку x_{i+1}. Это означает, что если положить $D'=D-(f)$, то $\operatorname{Supp} D' \not\ni x_{i+1}$. Далее, (1) показывает, что $\operatorname{Supp}(f) \not\ni x_j$ $(j=1, \ldots, i)$. и поэтому дивизор D' удовлетворяет условиям теоремы.

Вот первое применение теоремы 1. В п. 2 мы определили прообраз $f^*(D)$ дивизора D многообразия X при регулярном отображении $f\colon Y\to X$ при условии, что $f(Y)\not\subset \operatorname{Supp} D$. Теорема 1 позволяет нам заменить дивизор D таким эквивалентным ему дивизором D', что $\operatorname{Supp} D' \not\ni x$, где x — как угодно выбранная точка из $f(Y)$. Тогда автоматически $f(Y)\not\subset \operatorname{Supp} D'$ и прообраз $f^*(D')$ определен. Это показывает, что мы можем без всяких ограничений на регулярное отображение f определить прообраз класса дивизоров $C\in \mathrm{Cl}(X)$. Для этого надо выбрать в C такой дивизор D, что $f(Y)\not\subset \operatorname{Supp} D$, и рассмотреть класс на Y, содержащий дивизор $f^*(D)$. Легко проверить, что таким образом мы получаем гомоморфизм

$$f^*\colon \mathrm{Cl}(X)\to \mathrm{Cl}(Y).$$

Иными словами, $\mathrm{Cl}(X)$ является функтором из категории неприводимых гладких алгебраических многообразий в категорию абелевых групп.

Пример. Пусть $f\colon X\to Y$, $f(X)=a\in Y$ (ср. пример в п. 2). Тогда по теореме 1, $(a)\sim\sum r_i(b_i)$, $b_i\neq a$, и для класса C_a, содержащего дивизор (a), опять $f^*(C_a)=0$.

4. Дивизоры и рациональные отображения. Сопоставление функциям дивизоров полезно для исследования рациональных отображений многообразий в проективное пространство. Пусть X — гладкое многообразие и $\varphi\colon X\to \mathbf{P}^n$ — его рациональное отображение. Выясним, в каких точках отображение φ нерегулярно.

Рациональное отображение задается формулами

$$\varphi=(f_0:\ldots:f_n),\quad f_i\in \mathrm{k}(X), \tag{1}$$

причем мы можем считать, что ни одна из функций f_i не равна тождественно нулю на X. Пусть

$$(f_i)=\sum_{j=1}^{m} k_{ij}C_j,$$

где C_j — простые дивизоры. Мы допускаем при этом, что некоторые $k_{ij}=0$.

Чтобы выяснить, регулярно ли φ в точке $x\in X$, зададим C_j локальным уравнением π_j в точке x. Тогда

$$f_i=\left(\prod \pi_j^{k_{ij}}\right)u_i,\qquad u_i\in\mathcal{O}_x,\qquad u_i(x)\neq 0.$$

Ввиду однозначности разложения на простые множители в $\mathcal{O}_x$ существует наибольший общий делитель d элементов $f_0, \ldots, f_n$, т. е. такой элемент $d\in \mathrm{k}(X)$, что $f_i d^{-1}\in\mathcal{O}_x$, и если $d_1\in\mathrm{k}(X)$ таков, что $f_i\cdot d_1^{-1}\in\mathcal{O}_x$, то $d_1\mid d$, т. е. $dd_1^{-1}\in\mathcal{O}_x$.

Так как локальные уравнения неприводимых многообразий — простые элементы в $\mathcal{O}_x$, то

$$d=\prod \pi_j^{l_j},\qquad l_j=\min_{i=0,\ldots,n} k_{ij}.$$

Отображение φ регулярно в точке x, если существует такая функция $g\in\mathrm{k}(X)$, что $f_ig^{-1}\in\mathcal{O}_x$ $(i=0, \ldots, n)$, $(f_ig^{-1})(x)$ не все равны нулю. Ввиду определения наибольшего общего делителя отсюда следует, что $g\mid d$. Если $d=g\cdot h$, $h\in\mathcal{O}_x$ и $h(x)=0$, то $h\mid(f_ig^{-1})$, и поэтому все $(f_ig^{-1})(x)=0$. Таким образом, нужным условиям может удовлетворять только такая функция g, что $d=g\cdot h$, $h(x)\neq 0$. Тогда $f_ig^{-1}=(f_id^{-1})h$, т. е.

$$f_ig^{-1}=\left(\prod_j \pi_j^{k_{ij}-l_j}\right)(u_ih),$$

и отображение φ регулярно тогда и только тогда, когда не все функции $\prod\limits_j \pi_j^{k_{ij}-l_j}$ обращаются в нуль в точке x.

Чтобы перевести этот ответ на язык дивизоров, назовем наибольшим общим делителем дивизоров $D_i=\sum k_{ij}C_j$ $(i=1, \ldots, n)$ дивизор

$$\text{НОД}(D_1, \ldots, D_n)=\sum l_jC_j,\qquad l_j=\min_{i=1,\ldots,n} k_{ij}.$$

Очевидно, что $D_i'=D_i-\text{НОД}(D_1, \ldots, D_n)\geqslant 0$, и дивизоры D_i' не имеют общих компонент. Положим, в частности, $D=\text{НОД}((f_0), \ldots, (f_n))$, $D_i'=(f_i)-D$.

Тогда в некоторой окрестности точки x

$$\left(\prod_j \pi_j^{k_{ij}-l_j}\right)=D_i',$$

и мы можем сказать, что отображение φ регулярно в точке x тогда и только тогда, когда не все многообразия $\operatorname{Supp} D'_i$ проходят через эту точку.

Нами доказан следующий результат.

Теорема 2. *Рациональное отображение* (1) *нерегулярно в точности в точках множества*

$$\bigcap \operatorname{Supp} D'_i, \quad D'_i = (f_i) - \text{НОД}((f_0), \ldots, (f_n)), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Так как дивизоры D'_i не имеют общих неприводимых компонент, то множество $\bigcap \operatorname{Supp} D'_i$ имеет коразмерность $\geqslant 2$. Теорема 2 является, таким образом, уточнением теоремы 3 § 3 гл. II.

Замечание. Дивизоры D'_i могут быть истолкованы как прообразы гиперплоскостей $x_i = 0$ при отображении $\varphi: X \to \mathbf{P}^n$. Действительно, если $x \notin \bigcap \operatorname{Supp} D'_i$ и $D = (h)$ в окрестности x, то в этой окрестности регулярное отображение задается формулами:

$$\varphi = (f_0/h : \ldots : f_n/h).$$

Прообраз гиперплоскости $x_i = 0$ имеет локальное уравнение f_i/h, т. е. совпадает с D'_i.

Вообще, если $\lambda = (\lambda_0 : \ldots : \lambda_n)$ и $E_\lambda \subset \mathbf{P}^n$ есть гиперплоскость $\sum \lambda_i x_i = 0$, то

$$\varphi^*(E_\lambda) = \left(\sum \lambda_i f_i\right) - D.$$

5. Пространство, ассоциированное с дивизором. То, что все многочлены $f(t)$ степени $\leqslant n$ образуют векторное пространство конечной размерности, можно следующим образом интерпретировать в терминах дивизоров. Обозначим через x_∞ бесконечно удаленную точку на проективной прямой $\mathbf{P}^1$ с координатой t. Многочлен от t степени k имеет в точке x_∞ полюс порядка k и не имеет других полюсов. Поэтому условие $\deg f \leqslant n$ можно выразить и так: дивизор $(f) + nx_\infty$ эффективен.

Аналогично этому для произвольного дивизора D на гладком многообразии X можно рассмотреть множество, состоящее из нуля и тех функций $f \in k(X)$, $f \neq 0$, для которых

$$(f) + D \geqslant 0. \qquad (1)$$

Эта совокупность является линейным пространством над полем k относительно обычных действий над функциями. Действительно, если $D = \sum n_i C_i$, то (1) равносильно тому, что

$$\nu_{C_i}(f) \geqslant -n_i, \quad \nu_C(f) \geqslant 0 \text{ при } C \neq C_i,$$

ввиду чего наше утверждение сразу следует из формул в п. 1.

Пространство функций, удовлетворяющих условию (1), называется *пространством, ассоциированным с дивизором* D, и обозначается $\mathscr{L}(D)$.

Аналогом того, что многочлены степени $\leqslant n$ образуют конечномерное пространство, является то, что пространство $\mathscr{L}(D)$ конечномерно, если D — любой дивизор, а X — проективное многообразие.

Эта теорема будет нами доказана для случая алгебраических кривых в § 2. Ее доказательство в общем случае может быть получено отсюда без особого труда индукцией по размерности. Однако место этой теоремы становится понятнее, если ее получить как частный случай гораздо более общего утверждения о когерентных пучках. В таком виде она и будет доказана в § 3 гл. VI.

Размерность пространства $\mathscr{L}(D)$ называется также *размерностью дивизора* D и обозначается через $l(D)$.

Теорема 3. *Эквивалентные дивизоры имеют одинаковую размерность.*

Пусть $D_1 \sim D_2$ — это значит, что $D_1 - D_2 = (g)$; $g \in k(X)$. Если $f \in \mathscr{L}(D_1)$, то $(f) + D_1 \geqslant 0$. Отсюда следует, что $(f \cdot g) + D_2 = f + D_1 \geqslant 0$, т. е. $f \cdot g \in \mathscr{L}(D_2)$, $g \cdot \mathscr{L}(D_1) = \mathscr{L}(D_2)$. Таким образом, умножение всех функций $f \in \mathscr{L}(D_1)$ на функцию g определяет изоморфизм пространств $\mathscr{L}(D_1)$ и $\mathscr{L}(D_2)$, откуда и следует теорема.

Мы видим, что можно, таким образом, говорить о размерности $l(C)$ класса дивизоров C, подразумевая под этим общую размерность всех дивизоров этого класса. Это число имеет следующий смысл. Если $D \in C$, $f \in \mathscr{L}(D)$, то дивизор $D_f = (f) + D$ эффективен. Очевидно, что $D_f \sim D$, и поэтому $D_f \in C$. Наоборот, любой эффективный дивизор $D' \in C$ имеет вид D_f, где $f \in \mathscr{L}(D)$. Очевидно, если X проективно, то функция f определяется дивизором D_f однозначно с точностью до постоянного множителя. Таким образом, мы можем установить взаимно однозначное соответствие между эффективными дивизорами класса C и точками $l(C)$ — 1-мерного проективного пространства $\mathbf{P}(\mathscr{L}(D))$, соответствующего дивизору D (напомним, что проективное пространство $\mathbf{P}(L)$, соответствующее векторному пространству L, состоит из всех одномерных линейных подпространств пространства L).

Пространство $\mathscr{L}(D)$ полезно при задании рациональных отображений дивизорами, которое описано в п. 4. Если

$$\varphi = (f_0 : \ldots : f_n) \colon X \to \mathbf{P}^n \qquad (2)$$

— рациональное отображение и, как в п. 4,

$$D = \text{НОД}((f_0), \ldots, (f_n)), \; D_i = (f_i) - D, \qquad (3)$$

то $D_i \geqslant 0$, и поэтому все $f_i \in \mathscr{L}(-D)$.

Выбор функций f_i зависел от выбора системы проективных координат в $\mathbf{P}^n$. Поэтому инвариантным образом отображению φ соответствует совокупность всех функций $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i$, являющихся линейными комбинациями функций f_i. Эти функции образуют линейное подпространство $M \subset \mathscr{L}(-D)$. Дальше мы будем предполагать, что $\varphi(X)$ не содержится ни в каком собственном линейном подпространстве в $\mathbf{P}^n$. Тогда $\sum \lambda_i f_i \neq 0$ на X, если не все $\lambda_i = 0$. Совокупность эффективных дивизоров, соответствующих такой совокупности функций, т. е. дивизоры $(g) - D$, $g \in M$, называется *линейной системой* дивизоров. Если $M = \mathscr{L}(-D)$, то линейная система называется *полной*. Смысл дивизоров $(f) - D$, $f \in M$, очень простой — это прообразы дивизоров гиперплоскостей в $\mathbf{P}^n$ при отображении φ. Таким образом, мы можем построить все рациональные отображения заданного гладкого многообразия X в различные проективные пространства. Для этого надо взять произвольный дивизор D, а в пространстве $\mathscr{L}(-D)$ — линейное конечномерное подпространство M. Если $f_0, \ldots, f_n$ — его базис, то формулы (2) дадут искомое отображение. Заметим, что дивизоры $D_i \in \mathscr{L}(-D)$ обладают дополнительным свойством: они не имеют общих компонент.

Так как умножение всех функций f_i на общий множитель $g \in k(X)$ не изменит отображения φ, а дивизор D при этом изменится на эквивалентный дивизор $(g) + D$, то инвариантом рационального отображения является класс дивизора D. Таким образом, мы имеем следующий способ построения всех таких рациональных отображений φ многообразия X в проективное пространство $\mathbf{P}^m$, что $\varphi(X)$ не содержится ни в каком собственном подпространстве в $\mathbf{P}^m$: выбираем произвольный класс дивизоров на X и для любого дивизора D этого класса в пространстве $\mathscr{L}(-D)$ такое линейное конечномерное подпространство M, что эффективные дивизоры $(f) - D$ не имеют общих компонент. Если $f_0, \ldots, f_n$ — базис M, то наше отображение задается формулой (2). Конечно, может оказаться, что $\mathscr{L}(-D) = 0$ или что все дивизоры $(f) - D$, $f \in \mathscr{L}(-D)$, имеют общую компоненту, тогда этот класс дивизоров не приводит ни к какому отображению.

Обратим внимание на одно интересное свойство полученной картины. Среди всех рациональных отображений, соответствующих заданному классу C, существует одно максимальное: то, которое получается, если за M взять все пространство $\mathscr{L}(-D)$, $D \in C$ (мы принимаем здесь на веру недоказанную пока теорему о конечномерности пространства $\mathscr{L}(-D)$).

Все другие отображения, соответствующие этому классу, получаются, если строить композиции этого отображения с различными отображениями проектирования. Действительно, если $\varphi = (f_0 : \ldots : f_N)$, а, скажем, $\psi = (f_0 : \ldots : f_n)$, $n < N$, то $\psi = \pi\varphi$, где $\pi(x_0 : \ldots : x_N) = (x_0 : \ldots : x_n)$ — проектирование, которое мы сейчас рассматриваем как рациональное отображение.

Посмотрим, как работает эта схема, если взять за X проективное пространство $\mathbf{P}^m$. Мы знаем, что $\mathrm{Cl}(\mathbf{P}^m) \simeq \mathbf{Z}$ и класс C_k, соответствующий целому числу k, состоит из дивизоров степени k.

Очевидно, что если $k > 0$, $D \in C_k$, то $\mathscr{L}(-D) = 0$. Если $k \leqslant 0$, то можно взять за $-D$ дивизор kE, где E — дивизор бесконечно удаленной гиперплоскости $x_0 = 0$. В этом случае $\mathscr{L}(kE)$ состоит из многочленов степени $\leqslant k$ от неоднородных координат $\dfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \dfrac{x_m}{x_0}$ (см. задачу 15). Если помножить формулы получающегося отображения на x_0^k, то мы получим отображение Веронезе $v_k \colon \mathbf{P}^m \to \mathbf{P}^{\nu_{k,m}}$. Таким образом, мы видим, что любое рациональное отображение пространства $\mathbf{P}^m$ получается композицией отображения Веронезе и проектирования.

Пример. Пусть $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ — неприводимая n-мерная гиперповерхность с уравнением $F = 0$, $\deg F = k$. Найдем пространство $\mathscr{L}(D)$, где $D = (H)$ и H — форма степени m. Так как $(H) \sim m(x_0)$, то можно считать, что $D =$

$=m(x_0)$. Очевидно, что если Φ — любая форма степени m, то $\Phi/x_0^m\in\mathscr{L}(m(x_0))$. Докажем, что этими функциями пространство $\mathscr{L}(m(x_0))$ исчерпывается.

Если $\varphi\in\mathscr{L}(m(x_0))$, то $\varphi\in k[U_0]$, где $U_0\subset X$ — открытое множество, $x_0\neq 0$. Положив $y_i=x_i/x_0$ $(i=1,\ldots,n+1)$, мы видим, что $\varphi=P(y_1,\ldots,y_{n+1})$, где P — многочлен, который можно менять, прибавляя к нему кратность уравнения $F_0=F/x_0^k$ гиперповерхности X. Наше утверждение заключается в том, что за счет такого прибавления можно получить многочлен P с $\deg P\leqslant m$. Пусть $\deg P=l>m$ и за счет указанных изменений степень P не может быть понижена. Мы выберем систему координат так, что пересечение X с $x_0=0$, $x_1=0$ имеет размерность $n-2$. Это означает, что если f_k — форма старшей степени многочлена $F_0(y_1,\ldots,y_{n+1})$, то f_k не делится на y_1.

Перейдем к открытому множеству $U_1\subset X$, $x_1\neq 0$, и положим $z_1=x_0/x_1=1/y_1$, $z_i=x_i/x_1=y_i/y_1$, $i>1$. Тогда $y_1=1/z_1$, $y_i=z_i/z_1$, $i>1$, и $\varphi=P(y_1,\ldots,y_{n+1})=z_1^{-l}\widetilde{P}(z_1,\ldots,z_{n+1})$, где $\widetilde{P}$ — многочлен степени l. По условию $(\varphi)+m(z_1)>0$ в U_1, т. е. $\varphi z_1^m\in k[U_1]$, или $\widetilde{P}z_1^{m-l}=Q(z_1,\ldots,z_{n+1})$, на U_1, где Q — многочлен. Пусть $\deg Q=r$. По условию $z_1^{m-l}\widetilde{P}=Q+A\cdot F_1$, где $F_1=F/x_1^k$ — уравнение U_1 и A — рациональная функция, не содержащая F_1 в знаменателе. Возвращаясь к U_0, получим

$$Py_1^{-m}=\widetilde{Q}y_1^{-r}+BF_0, \tag{4}$$

где $\widetilde{Q}(y_1,\ldots,y_{n+1})$ — многочлен степени r и B не содержит F_0 в знаменателе. Если $m\geqslant r$, то, умножая (4) на y_1^m, получим $P-CF_0=\widetilde{Q}y_1^{m-r}$, где C — теперь многочлен. Так как $\deg\left(\widetilde{Q}y_1^{m-r}\right)=m<l$, то это противоречит нашему предположению, что степень P нельзя понизить. Если же $r\geqslant m$, то аналогично получим $Py_1^{r-m}-CF_0=\widetilde{Q}$. Обозначим через p_l, q_r, f_k и c формы старших степеней в P, $\widetilde{Q}$, F_0 и C. Так как $\deg\left(Py_1^{r-m}\right)=l+r-m>\deg\widetilde{Q}$, то $p_ly_1^{r-m}=cf_k$. Ввиду сделанного предположения f_k не делится на y_1 и, значит, p_l делится на f_k: $p_l=g_{l-k}f_k$. Тогда $\deg(P-g_{l-m}F_0)<l$, что опять противоречит сделанному относительно P предположению.

6. Пучок коник над $\mathbf{P}^1$. Закончим этот параграф одним красивым примером, который будет нам дальше полезен.

Пусть X — гладкая проективная поверхность и $\varphi\colon X\to\mathbf{P}^1$ — регулярное отображение. Предположим, что в $\mathbf{P}^1$ выбрана точка ∞ так, что ее прообраз $\varphi^{-1}(\infty)$ гладок, $\mathbf{P}^1\setminus\infty=\mathbf{A}^1$ и отображение $\varphi^{-1}(\mathbf{A}^1)\to\mathbf{A}^1$ определяет пучок коник (п. 2 § 6 гл. I). В такой ситуации поверхность X вместе с отображением φ называется *пучком коник над* $\mathbf{P}^1$. Открытое множество $\varphi^{-1}(\mathbf{A}^1)$ задается в $\mathbf{P}^2\times\mathbf{A}^1$ уравнением

$$\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}(t)\,\xi_i\xi_j=0, \tag{1}$$

где t — координата на $\mathbf{A}^1$. В п. 4 § 5 гл. II мы видели, что негладкие слои отображения φ соответствуют корням $t=\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ дискриминанта $\Delta(t)=\det(a_{ij}(t))$, что корни эти простые и соответствующие им слои $F_1,\ldots,F_m$ имеют вид $F_i=L_i+L_i'$, где L_i, L_i' — прямые, $L_i\neq L_i'$.

Так как $\Delta(t)$ имеет лишь простые корни, то $\Delta\neq 0$ тождественно, т. е. коника (1) невырождена. В п. 2 § 6 гл. I (следствие 4 предложения) мы видели, что пучок φ имеет сечение, т. е. рациональное отображение $s\colon\mathbf{A}^1\to\varphi^{-1}(\mathbf{A}^1)$, для которого $s(\alpha)$ лежит в слое $\varphi^{-1}(\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{A}^1$, т. е. $\varphi s=1$. Это рациональное отображение продолжается с $\mathbf{A}^1$ на $\mathbf{P}^1$ и дает регулярное отображение $s\colon\mathbf{P}^1\to X$. Обозначим кривую $s(\mathbf{P}^1)$ через S. Выберем некоторый фиксированный неособый слой F.

Теорема 4. *Группа* $\mathrm{Cl}(X)$ *является свободной абелевой группой с* $m+2$ *образующими — классами, определенными* $L_1,\ldots,L_m$, F, S.

Пусть C — простой дивизор на X. Это — неприводимая кривая, и φ отображает ее в точку $\gamma\in\mathbf{P}^1$ или на все $\mathbf{P}^1$.

В первом случае C содержится в слое $\varphi^{-1}(\gamma)$. Пусть $\varphi(C)=\mathbf{P}^1$. Тогда отображение $\varphi\colon C\to\mathbf{P}^1$ определяет вложение полей $k(\mathbf{P}^1)\subset k(C)$ и никакая функция $u\in k(\mathbf{P}^1)$, $u\neq 0$, не обращается в 0 на C (мы отождествляем здесь u и $\varphi^*(u)$). Иначе говоря,

$$\nu_C(u)=0\quad\text{для}\quad u\in k(\mathbf{P}^1),\quad u\neq 0. \tag{2}$$

Поэтому функция ν_C определяет функцию ν на $k(X)$, обладающую свойствами (2) п. 1 и (2). Следствие 4 предложения в п. 2 § 6 гл. I показывает, что над полем $K=k(\mathbf{P}^1)=k(t)$ коника (1) рациональна, т. е. $k(X)=K(T)$. При этом изоморфизм использует точку на конике (1), соответствующую сечению s, и, в частности, его можно выбрать так, что в этой точке функция T имеет полюс первого порядка. Таким образом, функция ν на $k(X)\setminus 0$ есть функция на $K(T)\setminus 0$, удовлетворяющая условиям (2) п. 1 и (2). Все такие функции легко определить. Пусть $\nu(T)\geqslant 0$. Тогда из (2) следует, что $\nu(H)\geqslant 0$ для всех $H\in K[T]$, и если $\nu\neq 0$ тождественно, то $\nu(H)>0$ для некоторого H. Отсюда $\nu(P)>0$, где P — некоторый неприводимый делитель H. Но тогда $\nu(Q)=0$ для любого неприводимого многочлена, не пропорционального P. Действительно, иначе ввиду существования таких многочленов U и V, что $PU+QV=1$, из $\nu(P)>0$, $\nu(Q)>0$ следовало бы, что $\nu(1)>0$, в то время как $\nu(u)=0$ для $u\in K$. Отсюда следует, что $\nu(f)=\nu_P(f)$ равно показателю m в представлении функции f в виде $f=P^m\cdot g$, где ни числитель, ни знаменатель g не делятся на P. В частности, для взятого нами дивизора C существует такой неприводимый многочлен $P\in K[T]$, что $\nu_P(f)=\nu_C(f)$, причем дивизор C однозначно определяется этим условием, т. е. многочленом P. Поэтому $\nu_C(P)=1$, т. е. C входит в дивизор $(P)_0$ с коэффициентом 1, и так как P однозначно определяет C, то в $(P)_0$ не входит, кроме C, никакой неприводимый дивизор, кроме компонент коник пучка:

$$(P)_0=C+\sum G_i, \tag{3}$$

где G_i — коники пучка или их компоненты.

Если же $\nu(T)<0$, то надо положить $U=T^{-1}$, и мы получим, что ν соответствует многочлену $U\in K[U]$. В терминах кольца $K[T]$, как легко видеть, $\nu(F)=-\deg H$ для $H\in K[T]$, т. е. такая функция ν существует только одна. Так как по условию T имеет полюс в точке, соответствующей сечению s, то ν должна совпадать с ν_S. Как и раньше, $\nu_S(H)=-\deg H$, причем S — единственная кривая с этим свойством, так что

$$(H)_\infty=(\deg H)\cdot S+\sum G'_j \tag{4}$$

для любого $H\in K[T]$, где G'_i — коники пучка или их компоненты. В частности, если P — неприводимый многочлен, соответствующий кривой $C\neq S$, то $(P)_\infty=(\deg P)\cdot S+\sum G'_j$ и $(P)=C-(\deg P)S+\sum G_i-\sum G'_j$. Отсюда $C\sim(\deg P)S+\sum r_l G''_l$, где G''_l — компоненты коник пучка. Остается рассмотреть их. Это могут быть, во-первых, невырожденные коники, т. е. слои $\varphi^*(\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{P}^1$. Но так как все точки на $\mathbf{P}^1$ эквивалентны, то все слои тоже эквивалентны — например, выбранному слою F. Во-вторых, это могут быть компоненты L_i и L'_i. Но так как $L_i+L'_i=F_i\sim F$, то L'_i выражаются через F и L_i. В результате мы видим, что любой неприводимый дивизор эквивалентен линейной комбинации S, F и $L_1, \ldots, L_m$. Значит, классы, определенные этими дивизорами, порождают группу $\mathrm{Cl}(X)$.

Остается проверить, что эти классы линейно независимы. Пусть $nF+lS+\sum_{i=1}^{m} r_iL_i\sim 0$. Рассмотрим ограничение этого дивизора на различные гладкие кривые: оно тоже должно быть эквивалентно 0. Рассмотрим ограничение на невырожденный слой $F'\neq F$. Так как $F\cap F'=\varnothing$, $L_i\cap F'=\varnothing$, а ограничение S дает точку ξ, то должно быть $l\cdot\xi\sim 0$. Это возможно лишь при $l=0$. Рассматривая ограничение на L'_i, мы получим, что $r_i=0$. Остается соотношение $nF\sim 0$, причем, если $n\neq 0$, то можно считать $n>0$. Это невозможно: эффективный дивизор не может быть главным.

ЗАДАЧИ

1. Определить дивизор функции $\frac{x}{y}$ на поверхности 2-го порядка $xy-zt=0$ в $\mathbf{P}^3$.

2. Определить дивизор функции $x-1$ на окружности $x_1^2+x_2^2=x_0^2$, $x=\frac{x_1}{x_0}$.

3. Определить прообраз $f^*(D_a)$, где $f(x, y)=x$ — проектирование окружности $x^2+y^2=1$ на ось x, а D_a — дивизор на прямой $\mathbf{A}^1$, $D_a=p$, $p\in\mathbf{A}^1$ и имеет координату a.

4. X — гладкая проективная кривая, $f\in k(X)$. Рассматривая f как регулярное отображение $f\colon X\to\mathbf{P}^1$, доказать, что $(f)=f^*(D)$, где $D=0-\infty$ есть дивизор на $\mathbf{P}^1$.

5. X — гладкое аффинное многообразие. Доказать, что $\mathrm{Cl}(X)=0$ тогда и только тогда, когда в кольце $k[X]$ разложение на простые множители однозначно.

6. X — гладкое проективное многообразие, $X\subset\mathbf{P}^N$, $k[S]$ — кольцо многочленов от однородных координат в $\mathbf{P}^N$, $\mathfrak{A}_X\subset k[S]$ — идеал X. Доказать, что если в кольце $k[S]/\mathfrak{A}_X$ разложение на простые множители однозначно, то $\mathrm{Cl}(X)=\mathbf{Z}$ и образующей является класс гиперплоских сечений.

7. Найти $\mathrm{Cl}(\mathbf{P}^n\times\mathbf{A}^n)$.

8. Проекция p: $X \times \mathbf{A}^1 \to X$ определяет гомоморфизм p^*: $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(X \times \mathbf{A}^1)$. Доказать, что гомоморфизм p^* эпиморфен. Указание. Воспользоваться отображением q^*: $\mathrm{Cl}(X \times \mathbf{A}^1) \to \mathrm{Cl}(X)$, где q: $X \to X \times \mathbf{A}^1$ задается тем, что $q(x) = x \times 0$.

9. Доказать, что для любого дивизора на $X \times \mathbf{A}^1$ существует такое открытое множество $U \subset X$, что на $U \times \mathbf{A}^1$ этот дивизор главный. Указание. X можно считать аффинным, а дивизор — неприводимым. Тогда он задается простым идеалом в $\mathrm{k}[X \times \mathbf{A}^1] = \mathrm{k}[X][T]$. Воспользоваться тем, что в $\mathrm{k}(X)[T]$ все идеалы главные, потом заменить X некоторым главным аффинным открытым подмножеством.

10. Доказать, что $\mathrm{Cl}(X \times \mathbf{A}^1) \simeq \mathrm{Cl}(X)$. Воспользоваться результатом задач 8 и 9.

11. Пусть X — проективная кривая, заданная уравнением $y^2 = x^2 + x^3$ в аффинных координатах. Доказать, что любой локально главный дивизор на X эквивалентен дивизору, носитель которого не содержит точку $(0, 0)$. Пользуясь этим и отображением нормализации φ: $\mathbf{P}^1 \to X$, при котором $\varphi^{-1}(0, 0)$ состоит из двух точек x_1 и $x_2 \in \mathbf{P}^1$, описать $\mathrm{Pic}(X)$ как D/P, где D — группа всех дивизоров на $\mathbf{P}^1$, носители которых не содержат x_1 и x_2, P — группа таких главных дивизоров (f), что f регулярна в x_1 и x_2 и $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$. Доказать, что группа $\mathrm{Pic}(X)$ изоморфна группе по умножению отличных от нуля элементов поля k.

12. Найти $\mathrm{Pic}(X)$, где X — кривая с уравнением $y^2 = x^3$.

13. Пусть X — квадратичный конус. Используя отображение φ: $\mathbf{A}^2 \to X$, описанное в задаче 2 к § 5 гл. II, определить образ $\varphi^*(\mathrm{Div}(X))$ в $\mathrm{Div}\,\mathbf{A}^2$. Доказать, что $D = (F) \in \mathrm{Div}\,\mathbf{A}^2$ тогда и только тогда принадлежит $\varphi^*(\mathrm{Div}(X))$, когда $F(-u, -v) = \pm F(u, v)$, т. е. F является или четной, или нечетной функцией. Доказать, что главные дивизоры на X соответствуют четным функциям. Доказать, что $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

14. Пользуясь теоремой 2, определить, в каких точках не регулярно бирациональное отображение φ: $X \to \mathbf{P}^2$, где X — поверхность 2-го порядка в $\mathbf{P}^3$, φ — проектирование из точки $x \in X$. То же для φ^{-1}.

15. Доказать, что если E — гиперплоскость $x_0 = 0$ в $\mathbf{P}^n$, то пространство $\mathscr{L}(kE)$ состоит из полиномов от неоднородных координат $\dfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_0}$ степени $\leqslant k$. Указание. Воспользоваться тем, что если $f \in \mathscr{L}(kE)$, то $f \in \mathrm{k}\left[\mathbf{A}_0^n\right]$.

16. Доказать, что любой автоморфизм многообразия $\mathbf{P}^n$ переводит дивизоры гиперплоскостей друг в друга. Указание. Класс гиперплоскостей определяется инвариантными свойствами в $\mathrm{Cl}(\mathbf{P}^n)$, а дивизоры гиперплоскостей — как эффективные дивизоры в нем.

17. Доказать, что любой автоморфизм многообразия $\mathbf{P}^n$ является проективным преобразованием. Указание. Воспользоваться результатом задачи 16.

18. Пусть σ: $X \to Y$ — σ-процесс с центром в $y \in Y$ и Y гладко. Доказать, что $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathrm{Cl}(Y) \oplus \mathbf{Z}$.

§ 2. Дивизоры на кривых

1. Степень дивизора на кривой. Рассмотрим проективную гладкую кривую X. Дивизор на X является линейной комбинацией точек $D = \sum k_i x_i$, $k_i \in \mathbf{Z}$, $x_i \in X$. *Степенью дивизора* D называется число $\deg D = \sum k_i$.

Пример 2 п. 1 § 1 при $n = 1$ показывает, что на $X = \mathbf{P}^1$ дивизор D является главным тогда и только тогда, когда $\deg D = 0$. Мы покажем, что равенство $\deg D = 0$ выполняется для главного дивизора на любой гладкой проективной кривой. Для этого мы воспользуемся понятием степени отображения f, $\deg f$, введенным в п. 3 § 6 гл. II.

Теорема 1. *Если f: $X \to Y$ — регулярное отображение гладких проективных кривых и $f(X) = Y$, то $\deg f = \deg f^*(y)$ для любой точки $y \in Y$.*

В теореме 1 $f^*(y)$ — дивизор на X, являющийся прообразом дивизора на Y, состоящего из точки y с коэффициентом 1. Таким образом, $\deg f$ равно числу прообразов любой точки $y \in Y$ (взятых с правильными кратностями). Это делает более понятным интуитивный смысл степени отображения f — она показывает, сколько раз X покрывает Y при отображении f.

Следствие. *Степень главного дивизора на гладкой проективной кривой X равна нулю.*

Действительно, любая непостоянная функция $f \in \mathrm{k}(X)$ определяет регулярное отображение f: $X \to \mathbf{P}^1$. При этом для точки $0 \in \mathbf{P}^1$ будет $f^*(0) = (f)_0$ — это сразу следует из определения обоих дивизоров. Аналогично $f^*(\infty) = (f)_\infty$. Согласно теореме 1 $\deg(f) = \deg(f)_0 - \deg(f)_\infty = \deg f^*(0) - \deg f^*(\infty) = \deg f - \deg f = 0$.

Если X и Y — многообразия одинаковой размерности и регулярное отображение f: $X \to Y$ таково, что $f(X)$ плотно в Y, то оно определяет вложение f^*: $\mathrm{k}(Y) \to \mathrm{k}(X)$, пользуясь которым, мы дальше будем считать $\mathrm{k}(Y)$ подполем поля $\mathrm{k}(X)$ (т. е. для $u \subset \mathrm{k}(Y)$ писать u вместо $f^*(u)$, когда это не может вызвать недоразумений).

Теорема 1 вытекает из двух результатов. Для их формулировки введем следующее обозначение. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — точки кривой X. Положим

$$\widetilde{\mathcal{O}} = \bigcap_{i=1,\ldots,r} \mathcal{O}_{x_i}. \tag{1}$$

Таким образом $\widetilde{\mathcal{O}}$ состоит из функций, регулярных во всех точках $x_1, \ldots, x_r$. Если $\{x_1, \ldots, x_r\} = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, то кольцо $\mathcal{O}_y$, которое мы будем в силу установленного выше соглашения считать подкольцом поля $k(X)$, содержится в $\widetilde{\mathcal{O}}$.

Теорема 2. *$\widetilde{\mathcal{O}}$ является кольцом главных идеалов с конечным числом простых идеалов. Существуют такие элементы $t_i \in \widetilde{\mathcal{O}}$, что*

$$\nu_{x_i}(t_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant r. \tag{2}$$

Если $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$, $u \neq 0$, то

$$u = t_1^{k_1} \ldots t_r^{k_r} v, \tag{3}$$

где $k_i = \nu_{x_i}(u)$, а v обратимо в $\widetilde{\mathcal{O}}$.

Теорема 3. *Если $\{x_1, \ldots, x_r\} = f^{-1}(y)$, то $\widetilde{\mathcal{O}}$ является свободным модулем над $\mathcal{O}_y$ и $\widetilde{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}_y^n$, где $n = \deg f$.*

Покажем, как теорема 1 вытекает из теорем 2 и 3. Пусть t — локальный параметр в точке y, $\{x_1, \ldots, x_r\} = f^{-1}(y)$. Согласно теореме 2, $t = t_1^{k_1} \ldots t_r^{k_r} v$, где $k_i = \nu_{x_i}(t)$. Вспомнив определение прообраза дивизора, мы увидим, что

$$f^*(y) = \sum k_i x_i \quad \text{и} \quad \deg f^*(y) = \sum_{i=1}^{r} k_i.$$

Так как элементы $t_1, \ldots, t_r$ попарно взаимно просты в $\widetilde{\mathcal{O}}$, то

$$\widetilde{\mathcal{O}}/(t) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \widetilde{\mathcal{O}}/(t_i^{k_i}).$$

Легко видеть, что любой элемент $w \in \widetilde{\mathcal{O}}$ однозначно представляется в виде

$$w \equiv \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \ldots + \alpha_{k_i-1} t_i^{k_i-1} \pmod{t_i^{k_i}}, \quad \alpha_i \in k. \tag{4}$$

Действительно, если мы уже имеем представление

$$w \equiv \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \ldots + \alpha_{s-1} t_i^{s-1} \pmod{t_i^s},$$

то

$$v = t_i^{-s}(w - \alpha_0 - \ldots - \alpha_{s-1} t_i^{s-1}) \in \widetilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_{x_i}.$$

Положим $v(x_i) = \alpha_s$. Тогда $\nu_{x_i}(v - \alpha_s) > 0$ и из теоремы 2 следует, что $v \equiv \alpha_s \pmod{t_i}$, т. е.

$$w \equiv \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \ldots + \alpha_{s-1} t^{s-1} + \alpha_s t_i^s \pmod{t_i^{s+1}}.$$

Это доказывает по индукции формулу (4).

Из представления (4) следует, что $\dim \widetilde{\mathcal{O}}/(t_i^{k_i}) = k_i$. Поэтому

$$\dim \widetilde{\mathcal{O}}/(t) = \sum_{i=1}^{r} k_i. \tag{5}$$

Применим теперь теорему 3. Из нее следует, что $\widetilde{\mathcal{O}}/(t) \simeq (\mathcal{O}_y/(t))^n$. Но t — локальный параметр в точке a, и поэтому

$$\mathcal{O}_y/(t) \simeq k, \quad \dim \widetilde{\mathcal{O}}/(t) = n = \deg f. \tag{6}$$

Равенства (5) и (6) доказывают теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через u_i локальный параметр в точке x_i. Тогда x_i входит в дивизор (u_i) с коэффициентом 1, т. е. $(u_i) = x_i + D$, где в D точка x_i не входит. Согласно теореме 1 § 1 мы можем сдвинуть носитель дивизора D с точек $x_1, \ldots, x_r$, т. е. найти такую функцию f_i, что в $D + (f_i)$ эти точки не входят. Это значит, что для $t_i = u_i f$ выполнены соотношения (2). Пусть $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$. Положим $\nu_{x_i}(u) = k_i$. По условию $k_i \geqslant 0$. Для элемента $v = u t_1^{-k_1} \cdot \ldots \cdot t_r^{-k_r}$ имеем $\nu_{x_i}(v) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$, откуда следует, что $v \in \widetilde{\mathcal{O}}$ и $v^{-1} \in \widetilde{\mathcal{O}}$. Мы получаем представление (3) для u.

Остается проверить, что $\widetilde{\mathcal{O}}$ — кольцо главных идеалов. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал $\widetilde{\mathcal{O}}$. Положим $k_i = \inf\limits_{u \in \mathfrak{a}} \nu_{x_i}(u)$, $a = t_1^{k_1} \ldots t_r^{k_r}$. Тогда $ua^{-1} \in \widetilde{\mathcal{O}}$, т. е. $\mathfrak{a} \subset (a)$. Докажем, что $\mathfrak{a} = (a)$. Для этого обозначим через $\mathfrak{a}'$ множество функций ua^{-1}, $u \in \mathfrak{a}$. Очевидно, что $\mathfrak{a}'$ — идеал $\widetilde{\mathcal{O}}$ и $\inf\limits_{u \in \mathfrak{a}'} v_{x_i}(u) = 0$. Значит, для любого $i = 1, \ldots, r$ существует $u_i \in \mathfrak{a}'$, для которого $\nu_{x_i}(u_i) = 0$, т. е. $u_i(x_i) \neq 0$. Очевидная проверка показывает, что для элемента $c = \sum_{j=1}^{r} u_j t_1 \ldots \widehat{t_j} \ldots t_r \in \mathfrak{a}'$, $\nu_{x_i}(c) = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$. Это значит, что $c^{-1} \in \widetilde{\mathcal{O}}$, и поэтому $\mathfrak{a}' = \widetilde{\mathcal{O}}$, $\mathfrak{a} = (a)$. Теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Мы докажем прежде всего, что $\widetilde{\mathcal{O}}$ — модуль конечного типа над $\mathcal{O}_y$. Для этого вспомним, что согласно теореме 8 § 5 гл. II отображение f конечно. Поэтому нужный нам результат вытекает из леммы.

Лемма. *Пусть $f\colon X \to Y$ — конечное отображение кривых, причем X — гладкая. Если $y \in Y$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, то кольцо $\widetilde{\mathcal{O}} = \bigcap \mathcal{O}_{x_i}$ является модулем конечного типа над $\mathcal{O}_y$.*

Ввиду локальности утверждения можно предполагать, что X и Y аффинны. Пусть $k[X] = A$, $k[Y] = B$, $B \subset A$, и A — модуль конечного типа над B. Докажем, что $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_y A$.

Действительно, если $\varphi \in \widetilde{\mathcal{O}}$ и z_i — полюсы φ на U, то $f(z_i) = y_i \neq y$. Существует такая функция $h \in B$, что $h(y) \neq 0$, $h(y_i) = 0$, причем $\varphi h \in \mathcal{O}_{z_i}$ и, значит, $\varphi h \in A$. Так как $h^{-1} \in \mathcal{O}_y$, то $\varphi \in A\mathcal{O}_y$. Мы доказали, что $\widetilde{\mathcal{O}} \subset A\mathcal{O}_y$. Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

Очевидно, что образующие модуля A над $k[V]$ являются в то же время образующими модуля $A\mathcal{O}_y$ над $\mathcal{O}_y$. Поэтому $\widetilde{\mathcal{O}}$ является модулем конечного типа.

Теперь легко закончить доказательство теоремы 3. По основной теореме о модулях над кольцом главных идеалов $\widetilde{\mathcal{O}}$ является прямой суммой свободного модуля и модуля кручения. Однако $\mathcal{O}_y$ и $\widetilde{\mathcal{O}}$ содержатся в поле $k(X)$, откуда следует, что этот модуль кручения равен нулю и $\widetilde{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}_y^m$ с некоторым m.

Остается определить m, т. е. ранг модуля $\widetilde{\mathcal{O}}$. Он равен максимальному числу линейно независимых над $\mathcal{O}_y$ элементов, содержащихся в $\widetilde{\mathcal{O}}$. Так как линейная независимость над кольцом и его полем частных одно и то же, а поле частных кольца $\mathcal{O}_y$ совпадает с $k(Y)$, то m равно максимальному числу линейно независимых над $k(Y)$ элементов кольца $\widetilde{\mathcal{O}}$.

По условию $[k(X) : k(Y)] = n$ и поэтому заведомо $m \leqslant n$. Нам остается показать, что в $\widetilde{\mathcal{O}}$ содержится n линейно независимых относительно $k(Y)$ элементов. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — базис расширения $k(X)/k(Y)$. Обозначим через k максимум порядков полюсов функций α_i в точках x_j, а через t локальный параметр точки y. Очевидно, что функции $\alpha_i t^k$ регулярны в этих точках и, значит, содержатся в $\widetilde{\mathcal{O}}$. Следовательно, они линейно независимы над $k[Y]$. Теорема доказана.

Из следствия теоремы 1 следует, что все эквивалентные дивизоры на гладкой проективной кривой имеют одну и ту же степень. Поэтому можно говорить о степени класса дивизоров. Мы имеем, следовательно, гомоморфизм

$$\deg\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathbf{Z},$$

образ которого есть вся группа $\mathbf{Z}$, а ядро состоит из классов нулевой степени и обозначается через $\mathrm{Cl}^0(X)$. Роль этой группы ясна уже из следующего результата.

Теорема 4. *Гладкая проективная кривая X рациональна тогда и только тогда, когда $\mathrm{Cl}^0(X) = 0$.*

Действительно, если $X \approx \mathbf{P}^1$, то мы имеем дело с примером 2 п. 1 § 1 (при $n = 1$). Там мы видели, что $\mathrm{Cl}(\mathbf{P}^1) = \mathbf{Z}$ и, значит, $\mathrm{Cl}^0(\mathbf{P}^1) = 0$. Пусть, наоборот, $\mathrm{Cl}^0(X) = 0$. Это значит, что любой дивизор нулевой степени главный. В частности, если $x, y \in X$, $x \neq y$, то существует такая функция $f \in k(X)$, что $x - y = (f)$. Рассматривая f как отображение $X \to \mathbf{P}^1$, мы получаем из теоремы 1, что $k(X) = k(f)$, т. е. что f является бирациональным изоморфизмом. Так как X и $\mathbf{P}^1$ — гладкие проективные кривые, то f является изоморфизмом.

2. Теорема Безу на кривой. Мы укажем сейчас простейшие применения теоремы о степени главного дивизора. Они являются очень специальными частными случаями более общих теорем, которые мы докажем в связи с теорией индексов пересечения. Однако удобно изложить уже сейчас эти простейшие случаи, так как они будут полезны нам в следующем пункте.

Пусть X — гладкая проективная кривая, $X \subset \mathbf{P}^n$, F — форма от координат точек $\mathbf{P}^n$, не равная тождественно 0 на X, и x — точка на X.

В п. 2 § 1 мы ввели дивизор (F) формы F на X. Степень $\deg(F)$ этого дивизора обозначается также (X, F) и называется индексом пересечения X и гиперповерхности $\mathbf{P}^n_F$.

Из теоремы 1 сразу вытекает важное следствие: это число одно и то же для всех форм одинаковой степени.

Действительно, если $\deg F = \deg F_1$, то $f = \dfrac{F}{F_1} \in k(X)$. Из определений дивизора (F) сразу следует, что $(F) =$

$=(F_1)+(f)$, откуда $(F)\sim(F_1)$. Согласно следствию теоремы 1 $\deg(F)=\deg(F_1)$.

Чтобы выяснить зависимость числа (X, F) от степени формы F, достаточно взять за F любую форму степени $m=\deg F$. В частности, мы можем положить $F=L^m$, где L — линейная форма. Тогда

$$(X,\ F)=m(X,\ L)=(\deg F)\,(X,\ L). \tag{1}$$

Наконец, выясним смысл числа (X, L).

Определение. Степенью $\deg X$ кривой X называется максимум чисел точек пересечения X с гиперплоскостью, не содержащей ни одной компоненты кривой.

Так как $(X, L)=\sum\limits_{L(x)=0}\nu_x((L))$, то $\deg X\leqslant(X, L)$.

Выясним для случая любой формы F, когда $\nu_x((F))=1$.

Ввиду аддитивности функции $\nu_x((F))$ достаточно рассмотреть случай неприводимой формы.

Лемма. *Пусть* $X\subset\mathbf{P}^n$, F — *неприводимая форма*, $Y=\mathbf{P}^n_F$. *Равенство* $\nu_x((F))=1$ *равносильно тому, что* $F(x)=0$ *и* $\Theta_{x,Y}\not\supset\Theta_{x,X}$. *Оба эти пространства рассматриваются как подпространства в* $\Theta_{x,\mathbf{P}^n}$.

Доказательство получается сопоставлением нескольких определений из гл. II. Пусть G — такая форма, что $G(x)\neq0$, $\deg G=\deg F$. По определению $\nu_x((F))=\nu_x(f)$, где $f=\left(\frac{F}{G}\right)\Big|_X$. Мы знаем, что $\nu_x((f))>1$ равносильно тому, что $f\in\mathfrak{m}_x^2$, или, что то же самое, $d_xf=0$. Но $d_xf\in\Theta^*_{x,X}$ и является ограничением на $\Theta_{x,X}$ дифференциала $d_x\left(\frac{F}{G}\right)$ функции $\frac{F}{G}$, рациональной на $\mathbf{P}^n$ и регулярной в x. Таким образом $\nu_x((F))>1$ равносильно тому, что $d_x\left(\frac{F}{G}\right)=0$ на $\Theta_{x,X}$. Далее, $\frac{F}{G}$ — локальное уравнение Y в окрестности точки x, в которой $G\neq0$. Поэтому $d_x\left(\frac{F}{G}\right)=0$ — это уравнение $\Theta_{x,Y}$ и $d_x\left(\frac{F}{G}\right)=0$ на $\Theta_{x,X}$ тогда и только тогда, когда $\Theta_{x,Y}\supset\Theta_{x,X}$. Лемма доказана.

Применим это к вычислению индекса пересечения (X, L).

Так как число (X, L) одно и то же для всех линейных форм L, то число точек $x\in X$, для которых $L(x)=0$, достигает своего максимума, когда все $\nu_x(L)=1$. Согласно лемме это равносильно тому, что гиперплоскость L не касается ни в одной точке кривой X. Взяв за L такую линейную форму, мы получим, что

$$\deg X=(X,\ L). \tag{2}$$

Надо только проверить, что линейные формы с нужным нам свойством действительно существуют. Это легко сделать при помощи рассуждения, которым мы много раз пользовались: в произведении $X\times\mathbf{P}^n$ ($\mathbf{P}^n$ — пространство гиперплоскостей в $\mathbf{P}^n$) рассмотреть множество Γ таких пар (x, ξ), что ξ касается X в точке x. Стандартное применение теоремы о размерности слоев отображений даст тогда, что образ Γ при проектировании $X\times\widetilde{\mathbf{P}}^n\to\widetilde{\mathbf{P}}^n$ имеет коразмерность $\geqslant1$.

Сопоставляя равенства (1) и (2), мы получаем соотношение

$$(X,\ F)=\deg F\cdot\deg X, \tag{3}$$

которое носит название *теоремы Безу*. Тем самым мы доказали, наконец, эту теорему, сформулированную еще в § 1 гл. I.

3. Размерность дивизора. В п. 5 § 1 мы сопоставили дивизору D на гладком многообразии векторное пространство $\mathscr{L}(D)$.

Теорема 5. *Пространство* $\mathscr{L}(D)$ *конечномерно для любого дивизора* D *на проективной гладкой алгебраической кривой.*

Прежде всего утверждение теоремы легко свести к случаю, когда $D\geqslant0$. Действительно, пусть $D=D_1-D_2$, $D_1\geqslant0$, $D_2\geqslant0$. Тогда $\mathscr{L}(D)\subset\mathscr{L}(D_1)$: если $f\in\mathscr{L}(D)$, то $(f)+D_1-D_2=D'\geqslant0$ и, значит, $(f)+D_1=D'+D_2\geqslant0$, т. е. $f\in\mathscr{L}(D_1)$. Отсюда и получается нужная редукция.

Пусть $D\geqslant0$ и x — точка, входящая в дивизор с кратностью $r>0$, $D=rx+D_1$. Положим $(r-1)x+D_1=D'$. Пусть t — локальный параметр в точке x. Для функции $f\in\mathscr{L}(D)$ положим $\lambda(f)=(t^rf)(x)$. Очевидно, что λ — линейная функция на $\mathscr{L}(D)$, ядро которой совпадает с $\mathscr{L}(D')$. Продолжая эту конструкцию $\deg D$ раз, мы убедимся, что пространство $\mathscr{L}(0)$ является в $\mathscr{L}(D)$ множеством нулей $\deg D$ линейных форм. Но мы знаем, что $\mathscr{L}(0)=\mathrm{k}$ (п. 1 § 1). Отсюда следует, что $\mathscr{L}(D)$ конечномерно и даже

$$l(D) \leqslant \deg D + 1. \tag{1}$$

З а м е ч а н и я. 1. Равенство в (1) достигается в случае $X \in \mathbf{P}^1$. Действительно, в этом случае любой дивизор D эквивалентен дивизору вида rx, где за x можно взять бесконечно удаленную точку на $\mathbf{P}^1$. Тогда $\mathscr{L}(D)$ совпадает с пространством многочленов степени $\leqslant r$ и $l(D) = r + 1$.

2. Если кривая X не рациональна, то неравенство (1) может быть улучшено. Именно, в этом случае $\mathscr{L}((x)) = k$, где x — точка. Действительно, если бы в $\mathscr{L}((x))$ содержалась непостоянная функция f, то мы имели бы $(f)_\infty = (x)$. Тогда по следствию теоремы 1 $\deg(f)_0 = 1$, т. е. $(f) = (y) - (x)$, что противоречит нерациональности кривой X (см. доказательство теоремы 4). Поэтому в процессе доказательства неравенства (1) мы уже после $\deg D - 1$ шагов получим дивизор (x), для которого $l((x)) = 1$, и, значит,

$$l(D) \leqslant \deg D \tag{2}$$

для $D > 0$.

Таким образом, рациональные кривые характеризуются тем, что на них $l(D) = \deg D + 1$ для $D > 0$.

З А Д А Ч И

1. Прямая l называется двойной касательной плоской кривой X, если она касается X в любой их точке пересечения. Доказать, что множество кривых 4-й степени, имеющих заданную прямую (например, $y = 0$) двойной касательной, имеет коразмерность 2 в пространстве всех кривых. Доказать, что любая неприводимая кривая 4-й степени имеет двойную касательную.

2. Для особой проективной кривой X определить дивизор формы F на нормализации X^ν, используя прообразы функций $\nu^*(F/G)$, как в п. 2 § 1, и индекс пересечения $(X \cdot F)$ как степень этого дивизора на X^ν. Доказать, что при этом сохраняет силу теорема Безу.

3. Доказать, что число особых точек неприводимой плоской кривой степени n не превосходит $(n-1)(n-2)/2$. У к а з а н и е. Провести кривую степени n через $(n-1)(n-2)/2 + 1$ особых и возможно большее число неособых точек. Потом применить теорему Безу.

4. Если кратность касания прямой l и плоской кривой X в точке $x \in X$ равна r, то $r - 2$ называется кратностью перегиба. Доказать, что сумма кратностей перегиба кривой степени n, распространенная на все точки перегиба, равна $3n(n-2)$. У к а з а н и е. Доказать, что кратность перегиба в точке x равна порядку нуля гессиана в этой точке.

5. Пусть X — гладкая кривая, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Доказать, что за функции t_i в теореме 2 можно принять левые части уравнений таких гиперплоскостей E_i, что $E_i \ni x_i$, $E_i \not\ni x_j$ при $i \neq j$ и $E_i \not\supseteq \Theta_{x_i, X}$, т. е. не касаются X в точке x_i.

6. Доказать, что кривая степени n в $\mathbf{P}^n$, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости, рациональна.

§ 3. Плоская кубика

1. Группа классов. Мы видели, что для рациональных кривых X (и только для них) $\mathrm{Cl}^0(X) = 0$. Теперь мы разберем простейший случай, когда $\mathrm{Cl}^0(X) \neq 0$. Это гладкая плоская кубика — один из самых красивых и богатых неожиданными свойствами примеров в алгебраической геометрии. Мы доказали в п. 2 § 6 гл. I, что такая кубика всегда имеет точку перегиба и, значит, приводится к вейерштрассовой нормальной форме. Отсюда, как показано в п. 6 § 1 гл. I, следует, что она не рациональна.

Т е о р е м а 1. *Выберем произвольную точку α_0 на гладкой плоской проективной кубике X и сопоставим любой точке $\alpha \in X$ класс C_α, содержащий дивизор $\alpha - \alpha_0$. Отображение $\alpha \to C_\alpha$ определяет взаимно однозначное соответствие между точками $\alpha \in X$ и классами $C \in \mathrm{Cl}^0(X)$.*

Если $C_\alpha = C_\beta$, то $\alpha - \alpha_0 \sim \beta - \alpha_0$ и $\alpha \sim \beta$. Из доказательства теоремы 4 § 2 следует, что при $\alpha \neq \beta$ отсюда вытекала бы рациональность кривой X, про которую нам известно, что она не рациональна.

Остается доказать, что в любом классе C нулевой степени содержится дивизор вида $\alpha - \alpha_0$. Пусть сначала D — любой эффективный дивизор. Мы докажем, что существует такая точка $\alpha \in X$, что

$$D \sim \alpha + k\alpha_0. \tag{1}$$

Если $\deg D = 1$, то (1) верно с $k = 0$. Если $\deg D > 1$, то $D = D' + \beta$, $\deg D' = \deg D - 1$, $D' > 0$. Применяя индукцию, мы можем считать (1) доказанным для D': $D' \sim \gamma + l\alpha_0$. Тогда $D \sim \beta + \gamma + l\alpha_0$. Если мы найдем такую точку α, что

$$\beta + \gamma \sim \alpha + \alpha_0, \tag{2}$$

то отсюда будет следовать (1).

Пусть сначала $\beta \neq \gamma$. Проведем прямую с уравнением $L = 0$ через эти точки. Согласно теореме Безу $(L, X) = 3$

и, значит,

$$(L)=\beta+\gamma+\delta, \qquad \delta\in X. \tag{3}$$

Предположим, кроме того, что $\delta\neq\alpha_0$, и проведем прямую с уравнением $L_1=0$ через точки δ и α_0. Аналогично (3) мы получаем, что $(L_1)=\delta+\alpha_0+\alpha$. Так как $(L)\sim(L_1)$, то $\beta+\gamma+\delta\sim\delta+\alpha+\alpha_0$, откуда следует (2).

Надо еще разобрать случаи, когда $\beta=\gamma$ или $\delta=\alpha_0$. Если $\beta=\gamma$, то проведем касательную к X в точке β. Пусть $L=0$ — ее уравнение. Согласно лемме в п. 2 $\nu_\beta(L)\geqslant 2$, и поэтому $(L)=2\beta+\delta$. Таким образом, (3) имеет место и в этом случае. Аналогично разбирается случай $\delta=\alpha_0$.

Пусть теперь $\deg D=0$. Тогда $D=D_1-D_2$, $D_1\geqslant 0$, $D_2\geqslant 0$, $\deg D_1=\deg D_2$. Применяя (1) к D_1 и D_2, мы получим, что $D_1\sim\beta+k\alpha_0$, $D_2\sim\gamma+k\alpha_0$ с одним и тем же k, так как $\deg D_1=\deg D_2$. Поэтому $D=D_1-D_2\sim\beta-\gamma$, и нам достаточно найти такую точку α, что $\beta-\gamma\sim\alpha-\gamma_0$. Это соотношение равносильно тому, что $\beta+\gamma_0\sim\alpha+\gamma$, и совпадает с (2) с точностью до обозначений. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1 дает возможность явно найти функцию $l(D)$ для дивизоров D на гладкой кубике в $\mathbf{P}^2$.

Теорема 2. *На гладкой кубике $X\subset\mathbf{P}^2$ для любого дивизора $D>0$*

$$l(D)=\deg D. \tag{4}$$

Наоборот, кривая, для которой соотношение (4) *имеет место, изоморфна гладкой кубике.*

Ввиду замечания 2 к теореме 5 § 2, $l(D)\leqslant\deg D$ для $D>0$ на гладкой кубике, и нам достаточно показать, что $l(D)\geqslant\deg D$. В доказательстве теоремы 1 было показано, что $D\sim\alpha+m\alpha_0$. Так что достаточно показать, что $l(\alpha+m\alpha_0)>m$ (строгое неравенство!). При $m=1$ $l(\alpha+\alpha_0)>1$, так как в $\mathscr{L}(\alpha+\alpha_0)$ содержится непостоянная функция l_1/l_0, где линейная форма l_0 определяет прямую, проходящую через точки α и α_0, а l_1 — любую прямую, проходящую через третью точку пересечения прямой $l_0=0$ и X (рис. 12, *а*).

Поэтому для $m>1$ достаточно указать функцию f_m с $(f_m)_\infty=m\alpha_0$, тогда $f_m\in\mathscr{L}(m\alpha_0)\subset\mathscr{L}(\alpha+m\alpha_0)$, $f\notin\mathscr{L}(\alpha+(m-1)\alpha_0)$, откуда $l(\alpha+m\alpha_0)\geqslant l(\alpha+(m-1)\times\alpha_0)+1$, и наше утверждение получается по индукции.

Такую функцию f_m легко указать для $m=2$, 3. Именно, $f_2=l_1/l_0$, где линейная форма l_0 определяет касательную к X в точке α_0, а l_1 — прямую, проходящую через другую точку пересечения $l_0=0$ с X (рис. 12, *б*). Аналогично, $f_3=l_1l_3/l_0l_2$, где l_0 и l_1 имеют прежний смысл, $l_2=0$ определяет прямую, проходящую через α_0 и точку пересечения l_1 с X, а $l_3=0$ — прямую, проходящую через третью

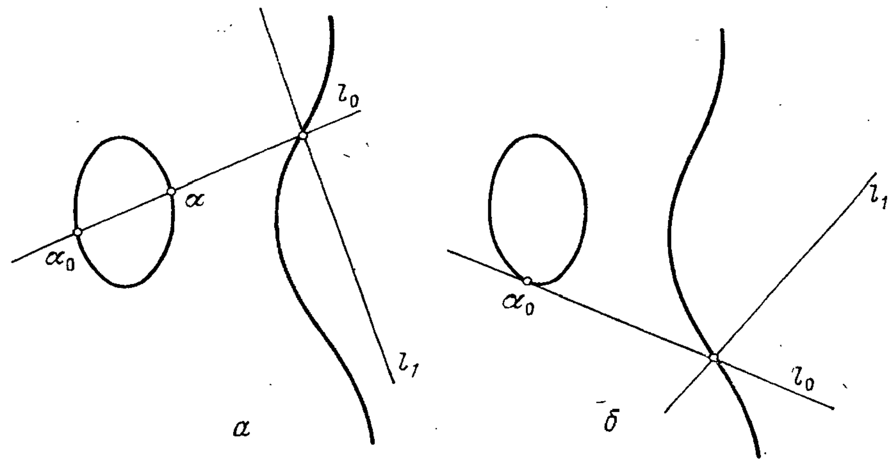


Рис. 12

точку пересечения $l_2=0$ с X (см. рис. 12). Наконец, если m четно, $m=2r$, то $f_m=f_2^r$, а если $m\geqslant 3$ и нечетно, $m==2r+3$, то $f_m=f_3f_2^r$. Этим доказано равенство (4).

Пусть, наоборот, на проективной гладкой кривой X имеет место равенство (4) для любого дивизора $D>0$. Возьмем произвольную точку $p\in X$. Так как, согласно (4), $\mathscr{L}(2p)>1$, то существует функция $x\in k(X)$ с $(x)_\infty=2p$ ($(x)_\infty=p$ невозможно — иначе кривая X была бы рациональной). Согласно (4) $\mathscr{L}(3p)\neq\mathscr{L}(2p)$, значит, существует функция $y\in k(X)$ с $(y)_\infty=3p$. Наконец, согласно (4), $\mathscr{L}(6p)=6$. Но мы можем указать семь функций, принадлежащих пространству $\mathscr{L}(6p)$: 1, x, x^2, x^3, y, xy, xy^2. Поэтому между ними должна существовать линейная зависимость:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+b_0y+b_1xy+b_3xy^2=0. \tag{5}$$

Таким образом, функции x и y определяют рациональное, а значит, и регулярное отображение X на кубику $Y\subset\mathbf{P}^2$, имеющую уравнение (5) в неоднородных координатах (это рациональное отображение, определенное линейной системой $\mathscr{L}(3p)$). Отображение f определяет вложение $f^*\colon \mathrm{k}(Y)\subset \mathrm{k}(X)$. Докажем, что $f^*(\mathrm{k}(Y))=\mathrm{k}(X)$. Для этого заметим, что $\mathrm{k}(Y)\supset \mathrm{k}(x)$ и $\mathrm{k}(Y)\supset \mathrm{k}(y)$ и функции x и y определяют отображения кривой X на $\mathbf{P}^1$. По условию $(x)_\infty=2p$, а это значит, что при отображении g, определяемом функцией x, $g^*(\infty)=2p$. Из теоремы 1 § 2 следует, что $\deg g=2$, т. е. $[\mathrm{k}(X)\colon \mathrm{k}(f^*(x))]=2$. Аналогично, $[\mathrm{k}(X)\colon \mathrm{k}(f^*(y))]=3$. Так как $[\mathrm{k}(X)\colon f^*(\mathrm{k}(Y))]$ должно делить оба эти числа, то $\mathrm{k}(X)=f^*(\mathrm{k}(Y))$, т. е. f является бирациональным изоморфизмом. Кубика (5) не может иметь особых точек: тогда она, а значит и кривая X, была бы рациональной, чего не может быть ввиду соотношения (4). Значит, эта кубика — гладкая, а поэтому f является изоморфизмом. Теорема доказана.

Таким образом, гладкие кубики в $\mathbf{P}^2$ характеризуются соотношением (4) точно так же, как рациональные кривые — соотношением $l(D)=\deg D+1$ для $D>0$.

2. Групповой закон. Теорема 1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками гладкой проективной кубики X и элементами группы $\mathrm{Cl}^0(X)$. При этом точке $\alpha\in X$ соответствует класс C_α, содержащий дивизор $\alpha-\alpha_0$, где α_0 — фиксированная точка, служащая для определения соответствия.

Пользуясь этим, мы можем перенести групповой закон с группы $\mathrm{Cl}^0(X)$ на само множество X. Получающуюся операцию над точками кривой X мы будем называть *сложением* и обозначать $\oplus$, а операцию обращения — $\ominus$. Согласно определению $\alpha\oplus\beta=\gamma$, если $C_\alpha+C_\beta=C_\gamma$, т. е.

$$\alpha+\beta\sim\gamma+\alpha_0. \tag{1}$$

При этом точка α_0, очевидно, является нулевой. Мы будем обозначать ее дальше через o, так что (1) перепишется в виде

$$\alpha+\beta\sim(\alpha\oplus\beta)+o. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 1 дает возможность описать операции $\oplus$ и $\ominus$ в элементарных геометрических терминах. Именно, если касательная к X в точке o пересекает X в точке π, а прямая, проходящая через π и α, пересекает X в точке α', то

$$2o+\pi\sim\pi+\alpha+\alpha',\quad \alpha+\alpha'\sim 2o, \tag{3}$$

а это значит, что $\alpha'=\ominus\alpha$ (рис. 13, *а*). При этом, если $\alpha=\pi$, то проведение прямой через точки α и π надо заменить проведением касательной в точке α.

Аналогично, чтобы описать операцию $\oplus$, проведем прямую через точки α и β. Пусть γ' — ее третья точка

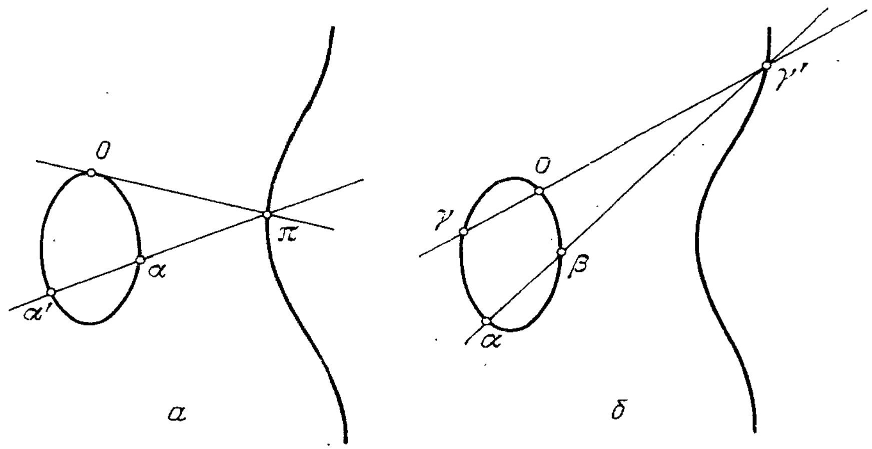


Рис. 13

пересечения с X, а γ — третья точка пересечения с X прямой, проходящей через γ' и o. Тогда (рис. 13, *б*)

$$\begin{gathered}\alpha+\beta+\gamma'\sim\gamma'+\gamma+o,\\ \alpha+\beta\sim\gamma+o,\\ \gamma=\alpha\oplus\beta.\end{gathered} \tag{4}$$

Если $\alpha=\beta$ (или $\gamma'=o$), проведение секущей через α и β надо заменить проведением касательной в α (или γ').

Это описание особенно просто, если за o принять точку перегиба кривой, что мы дальше всегда и будем предполагать. Тогда сечение кривой X прямой эквивалентно $3o$ (надо взять касательную в точке o). Если γ_1 — третья точка пересечения кривой с прямой, проходящей через γ и o, то

$$\gamma+\gamma_1+o\sim 3o, \tag{6}$$

а значит, $\gamma_1=\ominus\gamma$ (рис. 14).

Чтобы описать операцию $\oplus$, проведем прямую через точки α и β. Пусть γ' — ее третья точка пересечения с кривой, а γ — третья точка пересечения с X прямой, проходящей через γ' и o. Тогда (рис. 13)

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma' &\sim \gamma+\gamma'+o, \\ \alpha+\beta &\sim \gamma+o. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $\alpha=\beta$, то секущую через α и β надо заменить касательной в точке α.

Другая форма соотношений (7) заключается в том, что точки α, β и γ тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда $\alpha\oplus\beta\oplus\gamma=o$. В частности, точка β лежит на касательной в точке α тогда и только тогда, когда $2\alpha\oplus\beta=o$ (2α — умножение на 2 в смысле группового закона). Наконец, $\beta=\alpha$, если α является точкой перегиба. Тогда $3\alpha=o$. Таким образом, *точки перегиба кубики — это в точности элементы порядка 3 и нулевой элемент определенного на ней группового закона.*

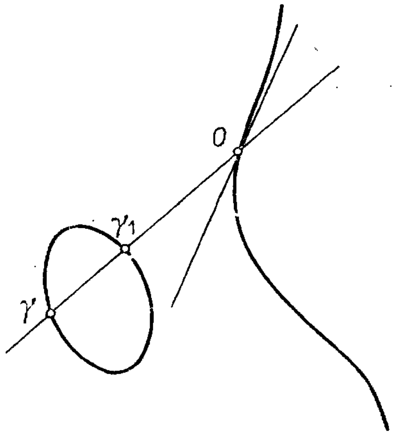


Рис. 14

Кубика в вейерштрассовой нормальной форме имеет точку перегиба в бесконечности. Мы будем (исключительно ради упрощения формул) предполагать, что характеристика поля k отлична от 2 и 3. Тогда уравнение кривой записывается в виде

$$y^2=x^3+ax+b \tag{8}$$

и ее бесконечно удаленная точка o лежит на прямых $x=c$. Поэтому операция $\ominus$ записывается особенно просто:

$$\ominus(x,\ y)=(x,\ -y). \tag{9}$$

Чтобы записать операцию $\alpha\oplus\beta$, проведем прямую через точки $\alpha=(x_1,\ y_1)$ и $\beta=(x_2,\ y_2)$:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{10}$$

Точки пересечения с кривой (8) получаются из уравнения

$$\left(y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\right)^2=x^3+ax+b,$$

т. е.

$$x^3-\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2x^2+\ldots=0.$$

Мы знаем корни x_1 и x_2 этого уравнения. Поэтому для третьего корня получаем

$$x_3=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2-x_2-x_1. \tag{11}$$

Координата y_3 получается из (10), и окончательно

$$\alpha\oplus\beta=(x_3,\ -y_3).$$

При $\alpha=\beta$ мы должны провести касательную в точке $(x_1,\ y_1)$. Аналогичные преобразования дают для другой ее точки пересечения с X:

$$x_2=\frac{(3x_1^2+a)^2}{4(x_1^3+ax_1+b)}-2x_1 \tag{12}$$

и $2\alpha=(x_2,\ -y_2)$, где y_2 получается из уравнения касательной при x_2, задаваемом формулой (12).

Замечательное свойство построенного нами группового закона заключается в том, что он задается рациональными формулами, т. е. определяет рациональное отображение $X\times X\to X$. Можно утверждать и большее.

Теорема 3. *Отображения* φ: $X\to X$, $\varphi(\alpha)=\ominus\alpha$, *и* ψ: $X\times X\to X$, $\psi(\alpha,\ \beta)=\alpha\oplus\beta$, *регулярны.*

Для φ это очевидно из формулы (9). Из формулы (10) следует точно так же, что ψ регулярно в точке (α,β), если $\alpha=(x_1,\ y_1)$, $\beta=(x_2,\ y_2)$ и $x_1\neq x_2$, т. е. $\alpha\neq\beta$ и $\alpha\neq\ominus\beta$ (так как $y_2=\pm y_1$ при $x_2=x_1$).

Рассмотрим теперь отображение s_ξ отражения от точки $\xi\in X$, сопоставляющее точке $\alpha\neq\xi$ третью точку пересечения с X прямой, проходящей через α и ξ. Очевидно, что $s_\xi(\alpha)=\ominus(\alpha\oplus\xi)$. Из формул видно, что это отображение рационально, а следовательно, регулярно. Кроме того, $s_\xi^2=1$, значит, s_ξ — автоморфизм. Докажем, что $s_\xi(\xi)$ — это другая точка пересечения с X касательной в точке ξ. Для этого применим к соотношению

$$\alpha+\xi+s_\xi(\alpha)\sim 3o$$

автоморфизм s_ξ. Очевидно, он сохраняет эквивалентность дивизоров. Кроме того, $s_\xi(o) = \ominus\xi$. Поэтому

$$s_\xi(\alpha) + s_\xi(\xi) + \alpha \sim 3(\ominus\xi).$$

Подставив сюда выражение $s_\xi = \ominus(\alpha \oplus \xi)$, мы получим, что $s_\xi(\xi) = 2(\ominus\xi)$ (2 означает удвоение в групповом законе на X), а это и есть точка пересечения с касательной.

Теперь мы можем рассмотреть автоморфизм сдвига: $t_\xi(\alpha) = \alpha \oplus \xi$ для $\alpha \neq \xi$. Очевидно, что $t_\xi = s_o s_\xi$, откуда следует, что для $\alpha = \xi$, $t_\xi(\alpha) = 2\alpha$. Наконец, для любых $\alpha, \beta \in X$

$$\psi(\alpha, \beta) = t^{-1}_{\xi\oplus\eta}\psi(t_\xi(\alpha), t_\eta(\beta)).$$

Поэтому, если отображение ψ регулярно хоть в одной точке (α_0, β_0), то оно регулярно в любой точке $(\alpha, \beta) = (t_\xi(\alpha_0), t_\eta(\beta_0))$, $\xi = \alpha \oplus (\ominus\alpha_0)$, $\eta = \beta \oplus (\ominus\beta_0)$. Но оно регулярно, как мы видели, при $\alpha \neq \beta$ и $\alpha \neq \ominus\beta$, значит, оно регулярно всюду. Теорема доказана.

Отображение $\psi\colon X \times X \to X$ имеет дифференциал в точке $(\alpha, \beta) \in X \times X$: $d_{(\alpha,\beta)}\psi\colon \Theta_{(\alpha,\beta)} \to \Theta_{\alpha\oplus\beta}$. Очевидно, что $\Theta_{(\alpha,\beta)} \simeq \Theta_\alpha \oplus \Theta_\beta$, а линейное отображение прямой суммы задается отображениями слагаемых. Наконец, сквозное отображение $\Theta_\alpha \to \Theta_\alpha \oplus \Theta_\beta \to \Theta_{\alpha\oplus\beta}$ происходит из отображения $X \to X \times X \to X$, где $X \to X \times X$ есть $\xi \to (\xi, \beta)$, а $X \times X \to X$ — это ψ. Полученное сквозное отображение $X \to X$ есть просто t_β, и, значит, ограничение $d\psi$ на Θ_α совпадает с dt_β и $d\psi = dt_\alpha + dt_\beta$. Нами доказана

Лемма. *Для отображения $\psi\colon X \times X \to X$ дифференциал $d\psi\colon \Theta_{(\alpha,\beta)} \to \Theta_{\alpha\oplus\beta}$ имеет вид $d\psi = dt_\alpha + dt_\beta$. В частности, он эпиморфен.*

3. Отображения. Мы исследуем регулярные отображения $\lambda\colon X \to X$ кубики на себя. Примером такого отображения является сдвиг: $t_\xi(\alpha) = \alpha \oplus \xi$. Если $\lambda(o) = \xi$, то $t_{\ominus\xi}\lambda = \lambda'$ оставляет o на месте. Дальше мы будем это всегда предполагать: $\lambda(o) = o$. В § 4 будет доказано, что тогда λ — гомоморфизм группового закона, определенного на X, но сейчас мы этим не будем пользоваться.

Как и любые отображения в группу, наши отображения можно складывать, определяя $\lambda + \mu$ тем, что $(\lambda + \mu)(\alpha) = \lambda(\alpha) \oplus \mu(\alpha)$. Очевидно, что все регулярные отображения $\lambda\colon X \to X$, для которых $\lambda(o) = o$, образуют группу. Если $\lambda(X)$ не совпадает с точкой, то $\lambda(X) = X$. Тогда степень $\deg\lambda$ определена и положительна. Мы обозначим $\deg\lambda$ через $n(\lambda)$. Если же $\lambda(X) = o$, то положим $n(\lambda) = 0$.

Основной результат, имеющий очень много приложений, таков.

Теорема 4. *На группе регулярных отображений $\lambda\colon X \to X$, $\lambda(o) = o$, существует такое скалярное произведение (λ, μ), что $(\lambda, \lambda) = n(\lambda)$.*

Термин «скалярное произведение» означает, что для любых (λ, μ) определено число $(\lambda, \mu) \in \mathbf{Q}$ со свойствами $(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$, $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu) = (\lambda_1, \mu) + (\lambda_2, \mu)$. Для любой функции $n(\lambda)$ со значениями в $\mathbf{Q}$ и такой, что $n(\lambda) > 0$ при $\lambda \neq 0$ и $n(\lambda) = 0$ при $\lambda = 0$, тогда и только тогда существует скалярное произведение (λ, μ) со свойствами $(\lambda, \lambda) = n(\lambda)$, когда

$$n(\lambda + \mu) + n(\lambda - \mu) = 2(n(\lambda) + n(\mu)). \qquad (1)$$

Это элементарный, чисто алгебраический факт (см. Приложение, п. 1, предложение 1). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно проверить соотношение (1) при $n(\lambda) = \deg\lambda$.

Рассмотрим отображение $\psi\colon X \times X \to X$, $\psi(x, y) = x \oplus y$, и дивизор $\Sigma = \psi^*(o)$. Ввиду леммы из п. 2, $d\psi$ — эпиморфизм. Отсюда следует, что дивизор $\psi^*(o)$ — простой. Действительно, если t_o — локальный параметр точки o в X, то $\psi^*(t_o)$ — локальное уравнение Σ. Ввиду эпиморфности отображения $d\psi$ сопряженное отображение $\mathfrak{m}_o/\mathfrak{m}_o^2 \to \mathfrak{m}_{(\alpha,\ominus\alpha)}/\mathfrak{m}^2_{(\alpha,\ominus\alpha)}$ — вложение. Поэтому $\psi^*(t_o) \notin \mathfrak{m}^2_{(\alpha,\ominus\alpha)}$, а отсюда следует, что дивизор $\psi^*(o)$ неприводим. Это подмногообразие состоит из точек $(\alpha, \ominus\alpha) \in X \times X$. Отображение $\psi_1\colon X \times X \to X$, $\psi_1(\alpha, \beta) = \alpha \ominus \beta$, отличается от ψ автоморфизмом $(\alpha, \beta) \to (\alpha, \ominus\beta)$, и для него верны те же заключения. Мы положим $\Delta = \psi_1^*(o)$ — это множество точек (α, α). Наконец, положим $p_1(\alpha, \beta) = \alpha$, $p_2(\alpha, \beta) = \beta$. Очевидно, что $p_1^*(o) = o \times X$, $p_2^*(o) = X \times o$. Тождество (1) легко вытекает из следующего утверждения.

Лемма. *На поверхности $X \times X$*

$$\Sigma + \Delta \sim 2(p_1^*(o) + p_2^*(o)). \qquad (2)$$

Для доказательства мы укажем функцию F на $X \times X$, для которой левая часть в (2) совпадает с $(F)_0$, а правая — с $(F)_\infty$. А именно, если X задано в вейерштрассовой нормальной форме (8) п. 2, то $F = p_1^*(x) - p_2^*(x)$.

Проверка почти тавтологична. Функция x определяет отображение $x\colon X \to \mathbf{P}^1$ кривой (8) п. 2 на $\mathbf{P}^1$, при котором $x(\alpha) = x(\beta)$, только если $\alpha = \beta$ или $\alpha = \ominus\beta$. Поэтому $\deg x = 2$, а так как $x(o) = \infty$ и $\ominus o = o$, то $(x)_\infty = x^*(\infty) = 2o$. Отсюда $(p_1^*(x))_\infty = p_1^*((x)_\infty) = 2p_1^*(o)$ и $(p_2^*(x))_\infty = 2p_2^*(o)$, а $(F)_\infty = 2(p_1^*(o) + p_2^*(o))$. Очевидно, что $\operatorname{Supp}(F)_0 = \operatorname{Supp}(\Sigma + \Delta)$, и остается доказать, что Σ и Δ входят в $(F)_0$ с коэффициентом 1. Это достаточно проверить на открытом множестве, пересекающем Σ и Δ. В множестве S, где $y \neq 0$ на X, функция x будет локальным параметром, а значит, в $U = S \times S$ локальными параметрами будут $p_1^*(x)$ и $p_2^*(x)$. Поэтому $F \notin \mathfrak{m}_x^2$ для $x \in U$ и, значит, F не может делиться на квадрат функции $g \in \mathfrak{m}_x$. Этим лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим отображение $f\colon X \to X \times X$, $f(\alpha) = (\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$. Очевидно, что $p_1 f = \alpha$, $p_2 f = \mu$, так что $f^*(p_1^*(o)) = \lambda^*(o)$ и $f^*(p_2^*(o)) = \mu^*(o)$ при $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$. Аналогично, $\Sigma = \psi^*(o)$ и $\psi f = \lambda + \mu$, так что $f^*(\Sigma) = (\lambda + \mu)^*(o)$ при $\lambda + \mu \neq 0$ и также $f^*(\Delta) = (\lambda - \mu)^*(o)$ при $\lambda - \mu \neq 0$. Поэтому, применяя гомоморфизм f^* к (2), мы получаем, что

$$(\lambda + \mu)^*(o) + (\lambda - \mu)^*(o) \sim 2(\lambda^*(o) + \mu^*(o))$$

(если λ, μ, $\lambda + \mu$ и $\lambda - \mu \neq 0$). Так как степени эквивалентных дивизоров равны, а $\deg \lambda^*(o) = \deg \lambda = n(\lambda)$ (и аналогично для μ, $\lambda + \mu$ и $\lambda - \mu$), то отсюда вытекает теорема — при λ, μ, $\lambda + \mu$ и $\lambda - \mu \neq 0$. Если, например, $\lambda + \mu = 0$, то надо применить утверждение примера из п. 3 § 1 и то, что $n(\lambda + \mu) = 0$. Аналогично — если $\lambda - \mu = 0$. При $\lambda = 0$ или $\mu = 0$ теорема очевидна.

4. Приложения. Пример 1. Рассмотрим гомоморфизм δ_m умножения на m в группе X: $\delta_m(\alpha) = \alpha \oplus \ldots \oplus \alpha$ (m раз). Из (1) п. 3 при $\lambda = \mu = \delta_1$ следует, что $n(\delta_2) = 4$ и дальше — индукцией по m — что $n(\delta_m) = m^2$. Предположим, что характеристика поля k равна 0. Согласно теореме 4 § 6 гл. II существует такое открытое непустое множество $U \subset X$, что точки $\alpha \in U$ имеют ровно m^2 прообразов при отображении δ_m. Но δ_m — гомоморфизм и число прообразов любой точки равно порядку его ядра. Мы видим, что число решений уравнения $m\alpha = 0$ в группе X равно m^2.

Предположим теперь, что характеристика поля k равна $p > 0$, но m не делится на p. Чтобы применить теорему 4 § 6 гл. II, нам надо доказать, что в этом случае отображение δ_m сепарабельно.

Если бы это было не так, то согласно теореме 6 § 6 гл. II δ_m представлялось бы в виде $g \cdot \varphi$, а тогда $\deg \delta_m$ делилось бы на p, а мы знаем, что $\deg \delta_m = m^2$ и $p \nmid m$. Таким образом, число решений уравнения $m\alpha = 0$ равно m^2, если m не делится на характеристику поля k.

В частности, уравнение $3\alpha = 0$ имеет девять решений, если характеристика поля k отлична от 3. Мы видели в п. 2, что точки α, удовлетворяющие этому условию,— это точки перегиба кривой X. Значит, гладкая плоская кубика имеет девять точек перегиба. Они обладают рядом замечательных свойств. Например, прямая, проходящая через две из них, пересекает кривую опять в точке перегиба. Это сразу следует из того, что сумма двух решений уравнения $3\alpha = 0$ опять является решением.

Пример 2. Предположим теперь, что коэффициенты кубики X принадлежат полю из p элементов $\mathbf{F}_p$. В п. 3 § 2 гл. I мы определили отображение Фробениуса $\varphi\colon (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p)$ для аффинных многообразий, определенных над $\mathbf{F}_p$. Это определение автоматически переносится на произвольные квазипроективные многообразия. Согласно теореме 6 § 6 гл. II $\deg \varphi = p$.

Применим теорему 4 к отображениям вида $a + b\varphi$, $a, b \in \mathbf{Z}$. Мы знаем, что $n(a + b\varphi) = (a + b\varphi,\ a + b\varphi)$, поэтому

$$n(a + b\varphi) = a^2 n(1) + 2ab(1, \varphi) + b^2 p. \tag{1}$$

По своему определению $n(a + b\varphi) \geqslant 0$, откуда

$$|(1, \varphi)| \leqslant \sqrt{p}. \tag{2}$$

С другой стороны, из (1) следует, что $2(1, \varphi) = n(1 - \varphi) - p - 1$, и поэтому (2) дает нам

$$|n(1 - \varphi) - p - 1| \leqslant 2\sqrt{p}. \tag{3}$$

При этом $n(1 - \varphi) = \deg(1 - \varphi)^*(o)$, а $\operatorname{Supp}(1 - \varphi)^*(o)$ состоит из точек α, для которых $(1 - \varphi)(\alpha) = o$, т. е. $\alpha = \varphi(\alpha)$ — это точки на X с координатами из $\mathbf{F}_p$. Докажем, что все эти точки входят в $(1 - \varphi)^*(o)$ с кратностями 1. Для этого, как и в предшествующем примере, достаточно сослаться на теорему 4 § 6 гл. II и доказать, что отображение $1-\varphi$ сепарабельно. Чтобы это проверить, надо доказать, что $1-\varphi\neq\mu\varphi$ ни для какого отображения $\mu\colon X\to X$. Но отсюда следовало бы, что $1=(1+\mu)\varphi$, а это противоречит тому, что $\deg\varphi=p>1$.

Таким образом, (3) переписывается в виде

$$|N-p-1|\leqslant 2\sqrt{p}, \tag{3'}$$

где N — число точек с координатами из $\mathbf{F}_p$ на кубике (включая и бесконечно удаленную). Иначе говоря, для числа решений N_0 сравнения

$$y^2\equiv x^3+ax+b \pmod p \tag{4}$$

получается неравенство

$$|N_0-p|\leqslant 2\sqrt{p}. \tag{5}$$

Этот результат допускает следующую переформулировку. Если x — вычет $\operatorname{mod} p$, то сравнение (4) не имеет решения при $\left(\frac{x^3+ax+b}{p}\right)=-1$ и имеет два решения при $\left(\frac{x^3+ax+b}{p}\right)=1$ $\left(\text{здесь } \left(\frac{a}{p}\right) \text{ — символ Лежандра}\right)$. Поэтому $N_0-p=\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x^3+ax+b}{p}\right)$ и (5) дает

$$\left|\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x^3+ax+b}{p}\right)\right|\leqslant 2\sqrt{p}. \tag{6}$$

Оценки (5) и (6) имеют много применений в теории чисел.

5. Алгебраически незамкнутое поле. Предположим, что коэффициенты a и b в уравнении (8) п. 2 принадлежат некоторому полю $\varkappa$, не обязательно алгебраически замкнутому. Обозначим через k его алгебраическое замыкание. Определение или явные формулы для группового закона на X показывают, что точки с координатами из $\varkappa$ образуют подгруппу, которую мы будем обозначать $X(\varkappa)$.

Пример 1. Пусть $\varkappa=\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел. В этом случае так называемая *теорема Морделла* утверждает, что группа $X(\mathbf{Q})$ имеет конечное число образующих. Это в принципе столь же финитное описание множества рациональных решений уравнения (8) п. 2,

как и то, которое параметризация, полученная в п. 2 § 1 гл. I, дает для случая коники.

Пример 2. В более общей ситуации, когда X — гладкая проективная алгебраическая кривая, определенная уравнениями с коэффициентами в поле $\varkappa$, мы можем применять предшествующую теорию к полю $k\supset\varkappa$ — алгебраическому замыканию поля $\varkappa$. Мы будем дальше предполагать поле $\varkappa$ совершенным (только для того, чтобы немного упростить рассуждения). С такой кривой связывается поле $\varkappa(X)\subset k(X)$, состоящее из рациональных функций от координат с коэффициентами из поля $\varkappa$. Пусть $D=\sum n_ix_i$, $x_i\in X$, — дивизор и пусть координаты точек x_i содержатся в поле $\varkappa'$, $\varkappa\subset\varkappa'\subset k$, причем мы можем считать, что $\varkappa'/\varkappa$ — расширение Галуа. Очевидно, что автоморфизм σ расширения $\varkappa'/\varkappa$, примененный к координатам точки $x_i\in X(\varkappa')$, переводит ее в точку $\sigma(x_i)\in X(\varkappa')$. Если для любого автоморфизма σ группы Галуа расширения $\varkappa'/\varkappa$ и любой точки x_i точка $\sigma(x_i)$ входит в дивизор D с тем же коэффициентом, что и x_i, то дивизор D называется *рациональным* над $\varkappa$. Таковы, в частности, дивизоры функций поля $\varkappa(X)$.

Мы обозначим через $\mathscr{L}_\varkappa(D)$ подпространство (над $\varkappa$), состоящее из функций $f\in\varkappa(X)$, $(f)+D>0$. Это — векторное пространство над полем $\varkappa$. Положим $l_\varkappa(D)=\dim_\varkappa\mathscr{L}_\varkappa(D)$. Очевидно, что автоморфизмы расширения $\varkappa'/\varkappa$ переводят функции пространства $\mathscr{L}(D)$ в себя и сохраняют пространство $\mathscr{L}_\varkappa(D)$. При этом они не являются линейными преобразованиями: $\sigma(\alpha f)=\sigma(\alpha)\sigma(f)$ для $\alpha\in k$, $f\in\mathscr{L}(D)$. Такие преобразования называются *полулинейными*, и так называемая основная теорема о полулинейных преобразованиях утверждает, что пространство $\mathscr{L}(D)$ порождается над k подпространством (над $\varkappa$) своих инвариантных элементов $\mathscr{L}_\varkappa(D)$: $\mathscr{L}(D)=\mathscr{L}_\varkappa(D)k$ (см. Приложение, п. 3, предложение 1). В частности,

$$l_\varkappa(D)=l(D). \tag{1}$$

Если дивизоры D и D' рациональны над $\varkappa$ и эквивалентны, то существует такая функция $f\in\varkappa(X)$, что $(f)=D-D'$. Для доказательства надо применить основную теорему о полулинейных преобразованиях к одномерному пространству функций $g\in\varkappa'(X)$, для которых $(g)=D-D'$.

Вернемся теперь к кубике X. В п. 3 § 2 гл. I мы определили дзета-функции $Z_X(t)$ и $\zeta_X(s)$ для аффинного многообразия, определенного уравнениями с коэффициентами в поле $\mathbf{F}_p$. Это определение, очевидно, переносится на произвольное квазипроективное многообразие. Если X — кривая, то циклы, определенные в п. 3 § 2 гл. I,— это рациональные над $\mathbf{F}_p$ дивизоры, причем, очевидно, неприводимые в этом смысле, т. е. не разлагающиеся в сумму рациональных. Эйлеровское произведение (2) п. 3 § 2 гл. I переписывается тогда, как и в случае римановой ζ-функции, в виде

$$\mathrm{Z}_X(t) = \sum_{D\geqslant 0} t^{\deg D},$$

где D пробегает все эффективные рациональные над $\mathbf{F}_p$ дивизоры. Иначе говоря,

$$\mathrm{Z}_X(t) = \sum a_n t^n,$$

где a_n — число эффективных рациональных дивизоров D степени n. Сейчас мы в состоянии явно определить это число для случая, когда X — кубика.

Сначала найдем число классов рациональных дивизоров степени n. Мы показали в п. 1, что если $\deg D = n$, то $D \sim x + (n-1)o$. Из того, что D рационален над $\mathbf{F}_p$, следует, что $x \in X(\mathbf{F}_p)$. Действительно, если координаты точки x лежат в расширении Галуа $\varkappa'/\varkappa$, то для любого автоморфизма этого расширения $\sigma(x) \sim x$, а значит, $\sigma(x) = x$. Таким образом, число классов дивизоров степени n равно N, где N — число точек $x \in X(\mathbf{F}_p)$. Теперь найдем число дивизоров в заданном классе, т. е. число дивизоров $D \sim D_0$, при заданном D_0. Они соответствуют функциям $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{F}_p}(D)$, причем $f \neq 0$ и функции рассматриваются с точностью до множителя из $\mathbf{F}_p$. Таким образом, число рациональных дивизоров D с $D \sim D_0$, $D > 0$, равно $\left(p^{l_\varkappa(D)} - 1\right)/(p-1)$. Ввиду (1) $l_\varkappa(D) = l(D)$, а ввиду теоремы 2, $l(D) = n$. Поэтому $a_n = N\dfrac{p^n - 1}{p-1}$, и мы получаем, что

$$\mathrm{Z}_X(t) = 1 + N\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n-1}{p-1}t^n = 1 + \frac{N}{p-1}\left(\frac{pt}{1-pt} - \frac{t}{1-t}\right) = \frac{1 + (N-p-1)\,t + pt^2}{(1-t)(1-pt)}.$$

Мы видим, что функция $\mathrm{Z}_X(t)$ рациональна. Более того, неравенство (3′) п. 4 показывает, что корни α_1 и α_2 трехчлена $1 + (N-p-1)t + pt^2$ комплексно сопряжены. Так как их произведение равно $\dfrac{1}{p}$, то $|\alpha_i| = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$. Для функции $\zeta_X(s) = \mathrm{Z}_X(p^{-s})$ это дает, что ее нули β_1 и β_2 лежат на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1/2$. Мы получаем, таким образом, аналог гипотезы Римана. Аналогичные результаты имеют место для произвольных гладких проективных многообразий, но доказываются они гораздо сложнее (см. обзор в [29], Приложение C).

ЗАДАЧИ

1. Найти все точки второго порядка на кубике в вейерштрассовой нормальной форме.

2. Доказать, что если две кубики пересекаются ровно в 9 точках, то любая кубика, проходящая через восемь из этих точек, проходит и через девятую.

3. Доказать, что координата x точек перегиба кубики (8) п. 2 удовлетворяет уравнению $f(x) = x^4 + 2ax^2 + 4bx + a^2 = 0$. Доказать, что при $a, b \in \mathbf{R}$ все точки перегиба не могут быть вещественными. [Указание. Воспользоваться тем, что $f'(x) = 4(x^3 + ax + b)$.] Доказать, что вещественная кубика имеет одну или три вещественные точки перегиба. В последнем случае все они лежат на одной прямой.

4. Доказать, что через каждую точку кубики проходят четыре касательные к кубике.

5. Доказать, что точки касания четырех касательных к кубике, проведенных из ее точки α, лежат на конике, которая касается кубики в точке α.

6. Доказать, что если две кубики X_1 и X_2 с уравнениями $y^2 = x^3 + a_i x + b_i$, $i = 1, 2$, изоморфны, то существует изоморфизм, переводящий их бесконечно удаленные точки друг в друга.

7. В условиях задачи 6 доказать, что изоморфизм, переводящий друг в друга бесконечно удаленные точки кубик X_1 и X_2, является линейным преобразованием.

8. Доказать, что если в условиях задач 6 и 7 $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, то кубики X_1 и X_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $a_1^3/b_1^2 = a_2^3/b_2^2$.

9. Доказать, что дзета-функция $\zeta_X(s)$, связанная с кубикой, удовлетворяет функциональному уравнению $\zeta_X(1-s) = \zeta_X(s)$.

10. Доказать, что любое отображение кубики $\alpha\colon X \to X$, $\alpha(X) = X$, может быть записано в виде $\alpha = \varphi^r\beta$, где φ — отображение Фробениуса, $r \geqslant 0$, а β сепарабельно.

§ 4. Алгебраические группы

Результаты предшествующих параграфов приводят к интересному разделу алгебраической геометрии — теории алгебраических групп. Мы не будем углубляться в эту область, но, чтобы дать читателю хотя бы некоторое представление о ней, расскажем в этом параграфе о некоторых ее основных результатах, опуская бо́льшую часть доказательств.

1. Алгебраические группы. Плоские кубические кривые являются одним из важнейших примеров общего понятия, которое мы теперь введем.

Алгебраической группой называется алгебраическое многообразие G, которое в то же время является группой, причем выполнены условия: отображения $\varphi: G \to G$, $\varphi(g) = g^{-1}$, и $\psi: G \times G \to G$, $\psi(g_1, g_2) = g_1 g_2$, регулярны (g^{-1} и $g_1 g_2$ — обратный элемент и произведение в группе G).

Примеры алгебраических групп.

Пример 1. Плоская кубическая кривая с групповым законом $\oplus$. То, что условия в определении алгебраической группы выполнены, утверждается теоремой 1 § 3.

Пример 2. Аффинная прямая $\mathbf{A}^1$, на которой групповой закон задается сложением координат точек. Эта группа называется *аддитивной*.

Пример 3. Многообразие $\mathbf{A}^1 - O$, где O — нулевая точка; групповой закон задается умножением координат точек. Эта группа называется *мультипликативной*.

Пример 4. В пространстве $\mathbf{A}^{n^2}$ квадратных матриц n-го порядка открытое множество невырожденных матриц с обычным законом умножения матриц. Эта группа называется *полной линейной*.

Пример 5. В пространстве $\mathbf{A}^{n^2}$ замкнутое подмножество, состоящее из ортогональных матриц. Закон умножения, естественно, тот же, что и в примере 4.

Покажем на самом простом примере, как тот факт, что G является алгебраической группой, влияет на геометрию многообразия G.

Теорема 1. *Многообразие алгебраической группы гладко.*

Из определения алгебраической группы следует, что для любого $h \in G$ отображение

$$t_h: G \to G, \quad t_h(g) = hg$$

является автоморфизмом многообразия G.

Так как $t_h(g_1) = g_2$ для любых $g_1, g_2 \in G$ при $h = g_2 g_1^{-1}$, а свойство точки быть особой инвариантно относительно автоморфизмов, то если хоть одна точка многообразия G особая, то и все точки являются особыми. Но это противоречит тому, что в любом алгебраическом многообразии особые точки образуют замкнутое собственное подмногообразие. Поэтому G не может иметь особых точек. Теорема доказана.

Обобщением этой ситуации является случай, когда на алгебраическом многообразии X задана группа G его автоморфизмов, причем для любых $x_1, x_2 \in X$ существует такое $g \in G$, что $g(x_1) = x_2$. В этом случае X называется *однородным*. Предшествующее рассуждение показывает, что однородное многообразие гладко. Примером является грассманово многообразие (пример 1 п. 1 § 4 гл. I).

2. Факторгруппы. Теорема Шевалле. Этот пункт содержит формулировки нескольких основных теорем об алгебраических группах. Доказательства этих теорем приведены не будут.

Подгруппой алгебраической группы G называется подгруппа группы G, являющаяся замкнутым подмножеством в G.

Подгруппа $H \subset G$ называется *нормальным делителем*, если, как и в абстрактной теории групп, $g^{-1}Hg = H$ для всех $g \in H$. Наконец, *гомоморфизмом* алгебраических групп $\varphi: G_1 \to G_2$ называется регулярное отображение, являющееся гомоморфизмом абстрактных групп.

Проблема построения факторгруппы по заданному нормальному делителю N является весьма тонкой. Трудность заключается, конечно, в том, как превратить множество G/N в алгебраическое многообразие.

Теорема А*). *Абстрактную группу G/N можно таким образом превратить в алгебраическую группу, что будут выполнены условия:*

1. *Естественное отображение $\varphi: G \to G/N$ является гомоморфизмом алгебраических групп.*

2. *Для любого гомоморфизма алгебраических групп $\psi: G \to G_1$, ядро которого содержит N, существует такой гомоморфизм $f: G/N \to G_1$, что $\psi = f \cdot \varphi$.*

Очевидно, что алгебраическая группа G/N однозначно определяется условиями 1 и 2. Она называется *факторгруппой G по N*.

Алгебраическая группа G называется *аффинной*, если алгебраическое многообразие G аффинно, и *абелевым*

*) Буквами будут обозначаться теоремы, доказательства которых не приводятся.

многообразием, если алгебраическое многообразие G проективно и неприводимо.

Теорема B. *Аффинная алгебраическая группа изоморфна подгруппе полной линейной группы* (пример 4 в п. 2).

Очевидно, что полная линейная группа, а значит, и любая ее подгруппа, аффинна.

Теорема C (теорема Шевалле). *У всякой алгебраической группы G имеется такой нормальный делитель N, что N — аффинная группа, а G/N — абелево многообразие. Этим свойством N определяется однозначно.*

3. Абелевы многообразия. Условие проективности многообразия алгебраической группы G, которое определяет абелевы многообразия, содержит удивительно много информации. Из него вытекает много неожиданных свойств абелевых многообразий. Простейшие из них мы здесь выведем, так как они требуют только применения простых теорем, доказанных еще в гл. I.

Нам понадобится одно свойство произвольных проективных многообразий. Назовем семейством отображений многообразия X в Z отображение $f\colon X\times Y\to Z$, где Y — некоторое алгебраическое многообразие, называемое базой семейства. Очевидно, что для любого $y\in Y$ мы имеем отображение $f_y(x)=f(x, y)$, что оправдывает нашу терминологию.

Лемма. *Если многообразия X и Y неприводимы, а X проективно и, для семейства f отображений X в Z с базой Y и некоторой точки $y_0\in Y$, $f(X\times y_0)$ есть одна точка $z_0\in Z$, то, для любого $y\in Y$, $f(X\times y)$ есть одна точка.*

Доказательство. Рассмотрим график Γ отображения f. Очевидно, что $\Gamma\subset X\times Y\times Z$ и Γ изоморфно $X\times Y$. Обозначим через p проекцию $X\times Y\times Z\to Y\times Z$ и через $\overline{\Gamma}$ — множество $p(\Gamma)$. Так как X проективно, то $\overline{\Gamma}$ замкнуто согласно теореме 3 § 5 гл. I. Обозначим через $q\colon \overline{\Gamma}\to Y$ отображение, определенное проекцией $Y\times Z\to Y$. Слой отображения q над точкой y, очевидно, имеет вид $(y, f(x, y))$ и, значит, не пуст, так что $q(\overline{\Gamma})=Y$. С другой стороны, по условию, для $y=y_0$ слой состоит из одной точки (y_0, z_0). Применяя теорему 7 § 6 гл. I, мы видим, что $\dim\overline{\Gamma}=\dim Y$.

Выберем произвольную точку $x_0\in X$; очевидно, $\overline{\Gamma}\supset\{(y, f(x_0, y)), y\in Y\}$, а последнее многообразие изоморфно Y. Так как оба многообразия неприводимы и имеют одинаковую размерность, то они совпадают, а это и значит, что $f(X\times y)=f(x_0, y)$.

Замечание. Без предположения проективности многообразия X лемма неверна, как показывает пример семейства отображений $f\colon \mathbf{A}^1\times\mathbf{A}^1\to\mathbf{A}^1$, $f(x, y)=xy$. Причина этого в том, что множество $\overline{\Gamma}$ не будет замкнутым и к нему нельзя применить теорему 7 § 6 гл. I. В нашем примере $\overline{\Gamma}\subset\mathbf{A}^1\times\mathbf{A}^1=\mathbf{A}^2$ и состоит из всех точек (u, v), кроме точек с $u=0$, $v\neq 0$. Это — плоскость, из которой выкинута прямая $u=0$, но сохранена точка $u=0$, $v=0$. Для проекции $q\colon (u, v)\to u$ действительно неверна теорема 7 § 6 гл. I: размерность слоя над точкой $u=0$ равна 0, размерность образа равна 1, а размерность отображаемого многообразия равна 2 (рис. 15).

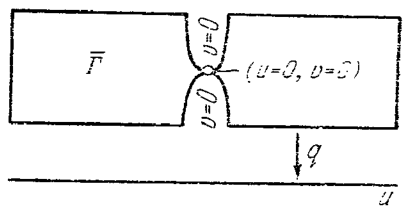


Рис. 15

Теорема 2. *Абелево многообразие коммутативно.*

Рассмотрим семейство отображений G в G с базой G: $f\colon G\times G\to G$, $f(g, g')=g^{-1}g'g$. Очевидно, что $f(g, e)=e$ и, значит, согласно лемме $f(G, g')$ состоит из одной точки. Поэтому $f(g, g')=f(e, g')=g'$, а это и значит, что группа G коммутативна.

Теорема 3. *Если $\psi\colon G\to H$ — регулярное отображение абелева многообразия G в алгебраическую группу H, то $\psi(g)=\psi(e)\varphi(g)$, где $e\in G$ — единичный элемент, а $\varphi\colon G\to H$ — гомоморфизм.*

Доказательство. Положим $\varphi(g)=\psi(e)^{-1}\psi(g)$ и докажем, что φ — гомоморфизм. Для этого рассмотрим семейство отображений многообразия G в X, база которого совпадает с G: $f\colon G\times G\to H$, $f(g', g)=\varphi(g')\varphi(g)\varphi(g'g)^{-1}$. Так как $\varphi(e)=e'$ — единичный элемент группы H, то $f(G, e')=e'$. Согласно лемме для любого элемента $g\in G$, $f(G, g)$ состоит из одной точки, т. е. $f(g', g)$ не зависит от g'. Положив $g'=e$, мы получим, что $f(g', g)=f(e, g)=e'$, а это и значит, что φ — гомоморфизм.

Следствие. *Если два абелевых многообразия изоморфны как алгебраические многообразия, то они изоморфны как группы — «алгебра определяется геометрией».*

В частности, отображения кубики $\lambda\colon X\to X$, $\lambda(o)=o$, рассматривавшиеся в § 3, являются гомоморфизмами.

4. Многообразие Пикара. Единственные примеры абелевых многообразий, которые нам до сих пор встречались,— это плоские кубические кривые. Мы определили на них групповой закон, исходя из изучения их группы классов дивизоров. Этот пример типичен для гораздо более общей ситуации. Исходя из произвольного гладкого проективного многообразия X, можно построить абелево многообразие, группа точек которого изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathrm{Cl}(X)$ (группе $\mathrm{Cl}^0(X)$ в случае кубической кривой). Мы приведем это определение, пропуская доказательства всех утверждений, кроме самых простых.

Нашей целью является изучение дивизоров на гладких многообразиях, но в промежуточных рассмотрениях будут встречаться дивизоры на произвольных многообразиях. Мы будем в этом случае под дивизорами понимать только локально главные дивизоры.

Сейчас мы определим новое отношение эквивалентности для дивизоров — алгебраическую эквивалентность. Она грубее (т. е. следует из) эквивалентности, которую мы раньше рассматривали.

Пусть X и T — два произвольных неприводимых многообразия. Для любой точки $t \in T$ отображение j_t: $x \to (x, t)$ определяет вложение X в $X \times T$. Каждый дивизор C на $X \times T$, для которого $\mathrm{Supp}\, C \not\supset X \times t$, определяет дивизор $j_t^*(C)$ на X. Мы будем говорить в этом случае, что дивизор $j_t^*(C)$ определен.

Семейством дивизоров на X с базой T называется любое отображение f: $T \to \mathrm{Div}(X)$. Семейство f называется *алгебраическим*, если существует такой дивизор $C \in \mathrm{Div}(X \times T)$, что дивизор $j_t^*(C)$ определен для всех $t \in T$ и $j_t^*(C) = f(t)$.

Дивизоры D_1 и D_2 на X называются *алгебраически эквивалентными*, если существуют такое алгебраическое семейство дивизоров f на X с базой T и такие две точки $t_1, t_2 \in T$, что $f(t_1) = D_1$, $f(t_2) = D_2$. Это отношение обозначается $D_1 \equiv D_2$. Таким образом, алгебраическая эквивалентность дивизоров означает возможность «алгебраически деформировать» их друг в друга. Очевидно, что алгебраическая эквивалентность рефлексивна и симметрична. Легко доказать, что она и транзитивна. Если алгебраическая эквивалентность дивизоров D_1 и D_2 осуществляется дивизором C на $X \times T$, а эквивалентность D_2 и D_3 — дивизором C' на $X \times T'$, то, чтобы доказать эквивалентность D_1 и D_3, надо рассмотреть дивизор $(C \times T') + (C' \times T) - D_2 \times T \times T'$ на $X \times T \times T'$. Подробная проверка предоставляется читателю.

Наконец, легко видеть, что алгебраическая эквивалентность согласована со сложением в группе $\mathrm{Div}(X)$: дивизоры D с $D \equiv 0$ образуют подгруппу. Мы обозначим ее через $\mathrm{Div}^a(X)$.

Из эквивалентности дивизоров следует их алгебраическая эквивалентность. Достаточно проверить это для эквивалентности дивизора нулю. Пусть $D \in \mathrm{Div}(X)$, $D \sim 0$, т. е. $D = (g)$, $g \in k(X)$. Рассмотрим многообразие $T = \mathbf{A}^2 - (0, 0)$ и обозначим через u и v координаты на $\mathbf{A}^2$. Мы будем рассматривать g, u и v как функции на $X \times T$, подразумевая под этим, как обычно, $p^*(g)$, $q^*(u)$ и $q^*(v)$, где p: $X \times T \to X$ и q: $X \times T \to T$ — проекции. Положим $C = (u + vg)$ и рассмотрим алгебраическое семейство, определенное дивизором C на $X \times T$. Легко проверить, что $f(1, 0) = 0$ (нулевой дивизор), $f(0, 1) = D$ и, значит, $D \equiv 0$.

Наконец, рассмотрим понятие алгебраической эквивалентности на примере гладкой проективной кривой X. Для любых двух точек $x, y \in X$ имеем $x \equiv y$. Для этого достаточно рассмотреть семейство дивизоров f, параметризованное самой кривой X и определенное диагональю на $X \times X$. Легко проверить, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Поэтому для любого дивизора $D = \sum n_i x_i$ и любой точки $x_0 \in X$ выполняется $D \equiv \left(\sum n_i\right) x_0$, т. е. два дивизора одинаковой степени алгебраически эквивалентны.

Немного сложнее доказать обратное утверждение: алгебраически эквивалентные дивизоры на гладкой проективной кривой имеют одинаковую степень. Мы не будем приводить здесь доказательства. Таким образом, для дивизоров на гладкой проективной кривой X алгебраическая эквивалентность дивизоров равносильна совпадению степеней. Поэтому

$$\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^a(X) = \mathrm{Cl}(X)/\mathrm{Cl}^0(X) = \mathbf{Z}.$$

Обобщением этого является следующая теорема, доказанная Севери (для полей характеристики 0) и Нероном (в общем случае).

Теорема D. *Для гладкого проективного многообразия X группа $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^a(X)$ имеет конечное число образующих.*

Можно показать, что для $X = \prod \mathbf{P}^{n_i}$ алгебраическая эквивалентность совпадает с эквивалентностью дивизоров. Этот пример показывает, что группа $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^a(X)$ может быть более сложной, чем $\mathbf{Z}$.

В случае плоской кубической кривой X группа $\mathrm{Cl}^0(X) = \mathrm{Div}^a(X)/P(X)$, где $P(X)$ — группа главных дивизоров, является одномерным абелевым многообразием. Аналогично этому для любого проективного гладкого многообразия существует абелево многообразие G, группа точек которого изоморфна группе $\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$ и которое обладает следующим свойством.

Для любого алгебраического семейства дивизоров f на X с базой T существует такое регулярное отображение $\varphi\colon T \to G$, что $f(t) - f(t_0) \in \varphi(t)$, где t_0 — некоторая фиксированная точка T (G отождествляется с $\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$, и поэтому $\varphi(t)$ считается классом дивизоров).

Абелево многообразие G однозначно определяется этим свойством. Оно называется *многообразием Пикара* многообразия X.

Многообразие Пикара гладкой проективной алгебраической кривой X называется также *якобиевым многообразием* этой кривой.

ЗАДАЧИ

1. Пусть G — алгебраическая группа, $\psi\colon G \times G \to G$ — регулярное отображение, определенное групповым законом, Θ_e — касательное пространство G в единичной точке, Θ_e' — касательное пространство $G \times G$ в единичной точке. Доказать, что $\Theta_e' = \Theta_e \oplus \Theta_e$, а $d_e\psi\colon \Theta_e \oplus \Theta_e \to \Theta_e$ задается сложением векторов.

2. В обозначениях задачи 1 пусть G — коммутативная группа и $\varphi_n\colon G \to G$ задано тем, что $\varphi_n(g) = g^n$. Предполагая, что характеристика основного поля равна 0, доказать, что $d_e\varphi_n(x)$ — невырожденное линейное преобразование. Вывести отсюда, что в коммутативной алгебраической группе число элементов порядка n конечно и из любого элемента извлекается корень степени n.

§ 5. Дифференциальные формы

1. Одномерные регулярные дифференциальные формы. В гл. II мы ввели понятие дифференциала d_xf функции f, регулярной в точке x алгебраического многообразия X. По определению d_xf — это линейная форма на касательном пространстве Θ_x точки x, т. е. $d_xf \in \Theta_x^*$. Сейчас мы исследуем зависимость этого понятия от точки x.

Если функция f фиксирована и регулярна на всем X, то d_xf в своей зависимости от x является объектом нового, еще не встречавшегося нам типа: это сопоставление каждой точке $x \in X$ вектора из дуального пространства Θ_x^* к касательному пространству в этой точке. С объектами аналогичной природы мы будем дальше все время встречаться. Вероятно, следующее пояснение может помочь. В линейной алгебре мы имеем дело с константами, но также и с другими величинами — векторами, линейными формами и произвольными тензорами. В геометрии аналогом констант являются функции (значения которых — константы). Аналогом векторов, линейных форм и т. д. являются «функции», сопоставляющие каждой точке x алгебраического (или дифференцируемого) многообразия X вектор, линейную форму и т. д. в касательном пространстве Θ_x этой точки.

Рассмотрим множество $\Phi[X]$ всевозможных отображений φ, сопоставляющих любой точке $x \in X$ вектор $\varphi(x)$ пространства Θ_x^*. Это, конечно, слишком большое множество, так же как и совокупность всех функций на X со значениями в k, которая слишком велика, чтобы быть интересной. Аналогично тому, как среди всех функций мы выделили регулярные, в множестве $\Phi[X]$ мы выделим часть, более тесно связанную со структурой многообразия X. Для этого заметим, что $\Phi[X]$ является абелевой группой, если положить $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Кроме того, $\Phi[X]$ станет модулем над кольцом всех функций на X со значениями в k, если мы положим $(f \cdot \varphi)(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ для функции f на X и для $\varphi \in \Phi[X]$. В частности, мы можем рассматривать $\Phi[X]$ как модуль над кольцом $k[X]$ всех регулярных функций на X.

Как мы видели, любая регулярная на X функция определяет дифференциал $d_xf \in \Phi[X]$.

Поэтому любая функция $f \in k[X]$ определяет функцию $\varphi \in \Phi[X]$: $\varphi(x) = d_xf$. Обозначим эту функцию через df.

Определение. Элемент $\varphi \in \Phi[X]$ называется *регулярной на X дифференциальной формой*, если любая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U, что ограничение φ на U принадлежит к подмодулю модуля $\Phi[U]$, порожденному над кольцом $k[U]$ элементами df, $f \in k[U]$.

Очевидно, что все регулярные на X дифференциальные формы образуют модуль над $k[X]$. Этот модуль обозначается через $\Omega[X]$. Таким образом, $\varphi \in \Omega[X]$, если в окрестности любой точки $x \in X$ возможно представление

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} f_i dg_i, \tag{1}$$

где $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ регулярны в окрестности точки x.

Взятие дифференциала функции определяет отображение d: $\mathrm{k}[X] \to \Omega[X]$. Свойства (1) п. 3 § 1 гл. II теперь приобретают вид

$$d(f+g) = df + dg, \quad d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df. \tag{2}$$

Из этих формул легко получить тождество, верное для любого многочлена $F \in \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_m]$ и функций $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{k}[X]$:

$$d(F(f_1, \ldots, f_m)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial T_i}(f_1, \ldots, f_m)\, df_i. \tag{3}$$

Для этого надо, пользуясь (2), свести его доказательство к случаю одночлена, а потом, опять используя (2), доказать индукцией по степени одночлена. Подробности этой проверки предоставляются читателю.

После того как соотношение (3) доказано для многочленов, оно немедленно обобщается на случай рациональных функций F. При этом следует иметь в виду, что если рациональная функция F регулярна в точке x, то и все функции $\frac{\partial F}{\partial T_i}$ в этой точке регулярны. Действительно, тогда $F = \frac{P}{Q}$, P, Q — полиномы и $Q(x) \neq 0$. Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial T_i} = Q^{-2}\left(Q \frac{\partial P}{\partial T_i} - P \frac{\partial Q}{\partial T_i}\right);$$

отсюда и следует ее регулярность.

П р и м е р 1. $X = \mathbf{A}^n$. Так как в любой точке $x \in \mathbf{A}^n$ дифференциалы координат $d_x t_1, \ldots, d_x t_n$ образуют базис пространства Θ_x^*, то любой элемент $\varphi \in \Phi[\mathbf{A}^n]$ однозначно представляется в виде $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, dt_i$, где ψ_i — функции на $\mathbf{A}^n$ со значениями в k.

Если $\varphi \in \Omega[\mathbf{A}^n]$, то в окрестности любой точки имеет место разложение (1). Применяя к g_i соотношение (3), мы получим разложение $\varphi = \sum h_i\, dt_i$, в котором h_i регулярны в точке x. Так как такое представление однозначно, то ψ_i должны быть регулярны в любой точке $x \in \mathbf{A}^n$, т. е. $\psi_i \in \mathrm{k}[\mathbf{A}^n]$. Поэтому $\Omega[\mathbf{A}^n] = \bigoplus \mathrm{k}[\mathbf{A}^n]\, dt_i$.

П р и м е р 2. Пусть $X = \mathbf{P}^1$ и t — координата на X. Тогда $X = \mathbf{A}_0^1 \cup \mathbf{A}_1^1$, причем $\mathbf{A}_0^1 \simeq \mathbf{A}_1^1 \simeq \mathbf{A}^1$. Согласно результату примера 1 любой элемент $\varphi \in \Omega[\mathbf{P}^1]$ представляется в виде $\varphi = P(t)\,dt$ на $\mathbf{A}_0^1$, $\varphi = Q(u)\,du$ на $\mathbf{A}_1^1$, где $ut = 1$. Из последнего соотношения следует, что $du = -\frac{dt}{t^2}$, и в $\mathbf{A}_0^1 \cap \mathbf{A}_1^1$ мы имеем

$$P(t)\,dt = -\frac{Q\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt, \text{ т. е. } P(t) = -\frac{Q^*(t)}{t^{n+2}},$$

если $\deg Q = n$. При этом $Q^*(t) = t^n Q\left(\frac{1}{t}\right)$ и $Q^*(0) \neq 0$.

Такое соотношение между многочленами возможно только при $P = Q = 0$. Поэтому $\Omega[\mathbf{P}^1] = 0$.

П р и м е р 3. Пусть X задается уравнением $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$ в $\mathbf{P}^2$ и характеристика поля $\mathrm{k} \neq 3$.

Обозначим через U_{ij} открытое множество, в котором $x_i \neq 0$, $x_j \neq 0$. Тогда $X = U_{01} \cup U_{12} \cup U_{20}$. Положим

$$\text{в } U_{01}\text{: } x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad \varphi = \frac{dy}{x^2},$$

$$\text{в } U_{12}\text{: } u = \frac{x_2}{x_1}, \quad v = \frac{x_0}{x_1}, \quad \psi = \frac{dv}{u^2},$$

$$\text{в } U_{20}\text{: } s = \frac{x_0}{x_2}, \quad t = \frac{x_1}{x_2}, \quad \chi = \frac{dt}{s^2}.$$

Очевидно, что $\varphi \in \Omega[U_{01}]$, $\psi \in \Omega[U_{12}]$, $\chi \in \Omega[U_{20}]$. Легко проверить, что $\varphi = \psi$ в $U_{01} \cap U_{12}$, $\varphi = \chi$ в $U_{01} \cap U_{20}$ и $\psi = \chi$ в $U_{12} \cap U_{20}$. Поэтому эти формулы определяют единую форму $\omega \in \Omega[X]$. Этот пример интересен тем, что $\Omega[X] \neq 0$, в то время как X — проективное многообразие и на нем нет непостоянных регулярных функций.

В общем случае можно доказать факт, аналогичный тому, который имеет место в примере 1, но более слабый.

Т е о р е м а 1. *Любая простая точка x алгебраического многообразия X имеет такую аффинную окрестность $U \ni x$, что модуль $\Omega[U]$ свободен над $\mathrm{k}[U]$. Его ранг равен* $\dim_x X$.

Доказательство. Пусть $X\subset \mathbf{A}^N$ и многочлены $F_1, \ldots, F_m$ образуют базис идеала многообразия X. Тогда $F_i=0$ на X, и поэтому ввиду (3)

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial T_j}\, dt_j = 0. \tag{4}$$

Если точка x простая и $\dim_x X = n$, то ранг матрицы $\left(\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\right)$ равен $N-n$. Пусть, например, $t_1, \ldots, t_n$ — локальные параметры в точке x. Тогда из (4) следует, что все dt_j можно выразить через $dt_1, \ldots, dt_n$ с коэффициентами, которые являются рациональными функциями, регулярными в точке x.

Рассмотрим окрестность U точки x, в которой все эти функции регулярны. В ней $d_yt_1, \ldots, d_yt_n$ образуют базис Θ_y^* для любой точки $y\in U$. Пусть $\varphi\in\Omega[U]$. Согласно сказанному выше в U существует однозначное представление

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\, dt_i, \tag{5}$$

где ψ_i — функции на U со значениями в k. Из представления (1) и формулы (3) следует, что φ в окрестности любой точки $y\in U$ выражается в виде линейной комбинации $dt_1, \ldots, dt_N$, коэффициенты которой — функции, регулярные в U. Как мы видели, $dt_1, \ldots, dt_N$ можно аналогичным образом выразить через $dt_1, \ldots, dt_n$. Поэтому $\varphi = \sum_{i=1}^{n} g_i\, dt_i$, где g_i регулярны в окрестности точки y. Из единственности представления (5) следует, что $\psi_i=g_i$ в окрестности точки y и, значит, $\psi_i\in \mathrm{k}[U]$. Мы видим, что $\Omega[U]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{k}[U]\, dt_i$.

Предположим, что между $dt_1, \ldots, dt_n$ имеется соотношение $\sum_{i=1}^{n} g_i\, dt_i=0$ и, например, $g_n\neq 0$. Тогда в открытом множестве, где $g_n\neq 0$, $dt_1, \ldots, dt_n$ линейно зависимы, а это противоречит тому, что d_yt_i независимы в Θ_y^* для всех $y\in U$. Теорема доказана.

Следствие. *Если $u_1, \ldots, u_n$ — любая система локальных параметров в точке x, то в некоторой окрестности U точки x $du_1, \ldots, du_n$ порождают модуль $\Omega[U]$.*

Пусть $dt_1, \ldots, dt_n$ — базис свободного модуля $\Omega[U]$ в окрестности $U\ni x$, существующей согласно теореме 1. Тогда $du_i=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, dt_j$, а так как u_i — локальные параметры, то $|g_{ij}(x)|\neq 0$. Поэтому в окрестности U', в которой $|g_{ij}|\neq 0$, $du_1, \ldots, du_n$ порождают модуль $\Omega[U']$.

2. Алгебраическое описание модуля дифференциалов. Мы видели в гл. I, что категория аффинных многообразий эквивалентна категории колец некоторого специального типа. Поэтому на всю теорию аффинных многообразий можно смотреть с чисто алгебраической стороны и, в частности, попытаться понять алгебраический смысл модуля дифференциальных форм.

Рассмотрим аффинное многообразие X, обозначим кольцо $\mathrm{k}[X]$ через A и модуль $\Omega[X]$ через Ω. Взятие дифференциала определяет гомоморфизм k-модулей $d\colon A\to\Omega$.

Предложение 1. *Модуль Ω порожден над A элементами df, $f\in A$.*

Это — аналог теоремы 4 § 3 гл. I и доказывается совершенно аналогично. Если $\omega\in\Omega$, то по определению для любой точки $x\in X$ существует представление $\omega=\sum f_{i,x}dg_{i,x}$, $f_{i,x}, g_{i,x}\in\mathcal{O}_x$. Для любой функции $u\in\mathcal{O}_x$ существует представление $u=\frac{v}{w}$, $v, w\in A$, $w(x)\neq 0$. Воспользовавшись таким представлением для $f_{i,x}$ и $g_{i,x}$ и взяв общий знаменатель всех дробей, мы получим такую функцию p_x, что $p_x(x)\neq 0$,

$$p_x\cdot\omega=\sum r_{i,x}dh_{i,x},\quad r_{i,x}, h_{i,x}\in A.$$

Ввиду того, что $p_x(x)\neq 0$, существуют такие функции $q_x\in A$, что $\sum p_xq_x=1$, откуда $\omega=\sum q_xr_{i,x}dh_{i,x}$. Это доказывает предложение 1.

Предложение 1 подсказывает мысль дать описание модуля Ω через его образующие df, $f\in A$. Очевидно, что выполнены следующие соотношения:

$$d(f+g)=df+dg,\quad dfg=f\,dg+g\,df,\qquad d\alpha=0\quad\text{при}\quad \alpha\in\mathrm{k}. \tag{1}$$

Предложение 2. *Если X — гладкое аффинное многообразие, $A = \mathrm{k}[X]$, то A-модуль Ω определяется соотношениями* (1).

Доказательство. Обозначим через R модуль, определенный над кольцом A образующими df, находящимися во взаимно однозначном соответствии с элементами A, и соотношениями (1). Имеется очевидный гомоморфизм ξ: $R \to \Omega$, и предложение 1 показывает, что ξ — эпиморфизм.

Нам остается доказать, что ξ не имеет ядра. Пусть $\varphi \in R$ и $\xi(\varphi) = 0$. Заметим, что рассуждения в доказательстве теоремы 1 использовали только соотношения (1). Поэтому они применимы и к модулю R и показывают, что для любой точки $x \in X$ существует такая функция $D \in A$, что $D(x) \neq 0$ и $D \cdot \varphi = \sum g_i\, dt_i$, $g_i \in A$, где теперь локальные параметры t_i выбраны в качестве элементов кольца A. Если $\xi(\varphi) = 0$, то $\sum g_i\, dt_i = 0$ в модуле Ω и из теоремы 1 следует, что все $g_i = 0$. Таким образом, $D \cdot \varphi = 0$. Мы видим, что для любой точки x существует такая функция $D \in A$, что $D(x) \neq 0$, $D \cdot \varphi = 0$. Рассуждая, как при доказательстве предложения 1, мы получаем, что $\varphi = 0$. Предположение доказано.

Таким образом, в этом случае модуль $\Omega[X]$ можно описать чисто алгебраически, исходя из кольца $\mathrm{k}[X]$. Это подсказывает мысль рассмотреть аналогичный модуль для любого кольца A, являющегося алгеброй над подкольцом A_0. Модуль Ω_A, определенный образующими da и соотношениями (1) (конечно, в последнем $\alpha \in A_0$), называется *модулем дифференциалов кольца A* над A_0.

Если многообразие X негладкое, то такой чисто алгебраически определенный модуль Ω_A дифференциалов, вообще говоря, не совпадает с $\Omega[X]$ (см. задачу 9). Предложение 1, которое верно и для негладких многообразий, показывает, что Ω_A содержит больше информации о многообразии X, чем модуль $\Omega[X]$. Однако дальше мы будем иметь дело в основном с гладкими многообразиями и это различие не будет для нас важно.

3. Дифференциальные формы высших степеней. Дифференциальные формы, которые мы рассматривали в п. 1, сопоставляют каждой точке $x \in X$ элемент пространства Θ_x^*. Сейчас мы рассмотрим более общие дифференциальные формы, которые сопоставляют точке $x \in X$ линейную

кососимметрическую форму на пространстве Θ_x, т. е. элемент r-й внешней степени $\Lambda^r\Theta_x^*$ пространства Θ_x^*.

Определение вполне аналогично тому, которое рассмотрено в п. 1. Обозначим через $\Phi^r[X]$ множество всевозможных сопоставлений каждой точке $x \in X$ элемента пространства $\Lambda^r\Theta_x^*$. Таким образом, если $\omega \in \Phi^r[X]$, $x \in X$, то $\omega(x) \in \Lambda^r\Theta_x^*$. В частности, $\Phi^0[X]$ — кольцо любых отображений $X \to \mathrm{k}$; $\Phi^1[X]$ — это $\Phi[X]$, рассмотренное в предшествующем пункте. Поэтому $df \in \Phi^1[X]$ для $f \in \mathrm{k}[X]$.

Напомним, что для любого векторного пространства L определена операция внешнего умножения $\wedge$: если $\varphi \in \Lambda^r L$, $\psi \in \Lambda^s L$, то $\varphi \wedge \psi \in \Lambda^{r+s} L$, причем $\varphi \wedge \psi$ дистрибутивно, ассоциативно и $\psi \wedge \varphi = (-1)^{rs} \varphi \wedge \psi$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис L, то базис $\Lambda^r L$ состоит из всех произведений $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. Поэтому $\dim \Lambda^r L = \binom{n}{r}$, в частности, $\dim \Lambda^n L = 1$, $\Lambda^r L = 0$ при $r > n$.

Определим операцию внешнего умножения в множествах $\Phi^r[X]$: при $\omega_r \in \Phi^r[X]$, $\omega_s \in \Phi^s[X]$, зададим $\omega = \omega_r \wedge \omega_s$ равенством $\omega(x) = \omega_r(x) \wedge \omega_s(x)$ для всех $x \in X$. Очевидно, что $\omega \in \Phi^{r+s}[X]$. При $r = 1$, $s = 0$ мы приходим к умножению элементов $\Phi^1[X] = \Phi[X]$ на функции. Полагая $s = 0$, r любым, мы видим, что определено умножение $\Phi^r[X]$ на функции на X. В частности, все $\Phi^r[X]$ являются модулями над кольцом $\mathrm{k}[X]$.

Определение. Элемент $\varphi \in \Phi^r[X]$ называется *r-мерной регулярной дифференциальной формой на X*, если любая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U, что на U элемент φ принадлежит подмодулю $\Phi^r[U]$, порожденному над $\mathrm{k}[U]$ элементами $df_1 \wedge \ldots \wedge df_r$, $f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{k}[U]$.

Все r-мерные регулярные дифференциальные формы на X образуют модуль над $\mathrm{k}[X]$. Этот модуль обозначается через $\Omega^r[X]$.

Таким образом, элемент $\omega \in \Omega^r[X]$ в окрестности любой точки $x \in X$ записывается в виде

$$\omega = \sum g_{i_1 \ldots i_r} df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_r}, \tag{1}$$

$g_{i_1 \ldots i_r}, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}$ регулярны в точке x.

Операция внешнего умножения определена для регулярных форм и очевидно, что для $\omega_r \in \Omega^r[X]$, $\omega_s \in \Omega^s[X]$ имеем $\omega_r \wedge \omega_s \in \Omega^{r+s}[X]$. В частности, любое $\Omega^r[X]$ является модулем над $\mathrm{k}[X]$.

Дифференциальные формы, которые мы рассматривали в предшествующем пункте, являются с точки зрения нового определения одномерными дифференциальными формами.

Теорема 1 имеет аналог для форм $\Omega^r[X]$ при любом r.

Теорема 2. *Любая простая точка n-мерного многообразия имеет такую окрестность U, что модуль $\Omega^r[U]$ свободен над $\mathrm{k}[U]$ и имеет ранг $\binom{n}{r}$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 мы видели, что существуют такая окрестность U простой точки x и такие n функций $u_1, \ldots, u_n$, регулярные в U, что $d_y u_1, \ldots, d_y u_n$ образуют базис Θ_y^* для любого $y \in U$. Отсюда следует, что любой элемент $\varphi \in \Phi^r[U]$ представляется в виде

$$\varphi = \sum \psi_{i_1 \ldots i_r} du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r},$$

где $\psi_{i_1 \ldots i_r}$ — функции на U со значениями в k.

Если $\varphi \in \Omega^r[U]$, то, для любой точки $y \in U$, φ представимо в виде (1). Применив к формам df_i теорему 1, мы увидим, что функции $\psi_{i_1 \ldots i_r}$ регулярны в точке y. Так как y — любая точка на U, то они регулярны в U. Таким образом, формы $du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$, $i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_r$, порождают модуль $\Omega^r[U]$. Остается доказать, что эти формы линейно независимы над $\mathrm{k}[U]$. Но любая зависимость

$$\sum g_{i_1 \ldots i_r} du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} = 0$$

дает в точке $x \in U$ соотношение

$$\sum g_{i_1 \ldots i_r}(x)\, d_x u_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_x u_{i_r} = 0. \tag{2}$$

Так как $d_x u_1, \ldots, d_x u_n$ — базис пространства Θ_x^*, то $d_x u_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_x u_{i_r}$ образуют базис в $\Lambda^r \Theta_x^*$. Поэтому из (2) следует, что $g_{i_1 \ldots i_r}(x) = 0$ для всех $x \in U$, т. е. $g_{i_1 \ldots i_r} = 0$. Теорема доказана.

Особенно важным является модуль $\Omega^n[U]$, который в предположениях теоремы 2 имеет ранг 1 над $\mathrm{k}[U]$.

Таким образом, если $\omega \in \Omega^n[U]$, то

$$\omega = g\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n, \quad g \in \mathrm{k}[U]. \tag{3}$$

Запись ω в таком виде существенно зависит от выбора локальных параметров $u_1, \ldots, u_n$. Выясним, какова эта зависимость. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — другие такие n регулярных функций на X, что $v_1 - v_1(x), \ldots, v_n - v_n(x)$ являются локальными параметрами в любой точке $x \in U$. Тогда

$$\Omega^1[U] = \mathrm{k}[U]\, dv_1 + \ldots + \mathrm{k}[U]\, dv_n$$

и, в частности, все du_i представимы в виде

$$du_i = \sum_{j=0}^{n} h_{ij} dv_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Так как $d_x u_1, \ldots, d_x u_n$ образуют базис пространства Θ_x^* для всех $x \in U$, то из (4) следует, что $\det(h_{ij}(x)) \neq 0$. По аналогии с анализом $\det(h_{ij})$ называется *якобианом функций* $u_1, \ldots, u_n$ по $v_1, \ldots, v_n$. Обозначим его через $J\left(\frac{u_1, \ldots, u_n}{v_1, \ldots, v_n}\right)$. Как мы видели, $J\left(\frac{u_1, \ldots, u_n}{v_1, \ldots, v_n}\right) \in \mathrm{k}[U]$ и для всех $x \in U$

$$J\left(\frac{u_1, \ldots, u_n}{v_1, \ldots, v_n}\right)(x) \neq 0. \tag{5}$$

Подстановка (4) в выражение для ω и простое вычисление во внешней алгебре показывают, что

$$\omega = g \cdot J\left(\frac{u_1, \ldots, u_n}{v_1, \ldots, v_n}\right) dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n. \tag{6}$$

Таким образом, хотя форма $\omega \in \Omega^n[U]$ задается функцией $g \in \mathrm{k}[X]$, такое задание возможно только при выборе локальных параметров и существенно зависит от этого выбора.

Напомним, что представление (3) возможно, как правило, только локально (см. формулировки теорем 1 и 2). Если $X = \cup U_i$ и в каждом U_i такое представление возможно, то на всем X мы не можем сопоставить ω единую функцию g: функции g_i, получающиеся в разных U_i, между собой не совпадают. Пример этого мы видели в п. 1 (пример 3).

4. Рациональные дифференциальные формы. Пример 2 в п. 1 показывает, что на алгебраическом многообразии X может быть очень мало регулярных дифференциальных форм ($\Omega^1[\mathbf{P}^1]=0$), в то время как на его открытых подмножествах их достаточно много ($\Omega^1[U]=\mathrm{k}[U]\,du$). С аналогичным явлением мы встретились в связи с понятием регулярной функции и, именно исходя из этих соображений, ввели понятие рациональной функции как функции, регулярной на некотором открытом подмножестве. Сейчас мы введем аналогичное понятие для дифференциальных форм.

Рассмотрим гладкое неприводимое квазипроективное многообразие X. Пусть ω — r-мерная дифференциальная форма на X. Напомним, что имеет смысл говорить об обращении ω в 0 в точке $x\in X$: $\omega(x)\in\Lambda^r\Theta_x^*$ и, в частности, может быть нулем.

Лемма. *Множество точек, в которых регулярная дифференциальная форма ω обращается в 0, замкнуто.*

Пусть Y — множество нулей формы ω. Так как замкнутость — локальное свойство, то мы можем ограничиться рассмотрением достаточно малой окрестности U произвольной точки $x\in X$. В частности, мы можем выбрать U так, чтобы в нем имели место теоремы 1 и 2. Тогда существуют такие функции $u_1,\ldots,u_n\in\mathrm{k}[U]$, что $\Omega^r[U]$ — свободный модуль с образующими $du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}$, $i_1<\ldots<i_r$. Поэтому ω однозначно представляется в виде $\omega=\sum g_{i_1,\ldots,i_r}du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}$ и равенство $\omega(x)=0$ равносильно равенствам $g_{i_1\ldots i_r}(x)=0$, которые определяют замкнутое множество. Лемма доказана.

Из леммы, в частности, следует, что если $\omega(x)=0$ для всех точек x открытого множества U, то $\omega=0$ на всем X.

Введем теперь новый объект, состоящий из открытого множества $U\subset X$ и дифференциальной формы $\omega\in\Omega^r[U]$. Определим для таких пар (ω, U) отношение эквивалентности $(\omega, U)\sim(\omega', U')$, если $\omega=\omega'$ на $U\cap U'$. Ввиду сделанного выше замечания достаточно потребовать, чтобы ω и ω' совпадали на каком-либо открытом множестве, содержащемся в U и U'. Отсюда следует транзитивность этого отношения эквивалентности. Класс, определенный таким отношением эквивалентности, называется *рациональной дифференциальной формой* на X. Множество всех r-мерных рациональных дифференциальных форм на X обозначается через $\Omega^r(X)$. Очевидно, что $\Omega^0(X)=\mathrm{k}(X)$.

Действия над представителями классов переносятся на классы и определяют операцию умножения: если $\omega_r\in\Omega^r(X)$, $\omega_s\in\Omega^s(X)$, то $\omega_r\wedge\omega_s\in\Omega^{r+s}(X)$. При $s=0$ мы видим, что $\Omega^r(X)$ является модулем над $\mathrm{k}(X)$.

Если рациональная дифференциальная форма ω (которая есть класс эквивалентных пар) содержит пару $(\bar\omega, U)$, то ω называется *регулярной* в U. Объединение всех открытых множеств, в которых ω регулярна, есть открытое множество U_ω, называемое *областью регулярности* ω. Очевидно, что ω определяет некоторую регулярную форму, принадлежащую $\Omega^r[U_\omega]$. Если $x\in U_\omega$, то мы будем говорить, что ω *регулярна* в точке x. Очевидно, что $\Omega^r(X)$ не меняется при замене X его открытым подмножеством, т. е. является бирациональным инвариантом.

Выясним структуру модуля $\Omega^r(X)$ над полем $\mathrm{k}(X)$.

Теорема 3. *$\Omega^r(X)$ является векторным пространством над $\mathrm{k}(X)$ размерности $\binom{n}{r}$.*

Рассмотрим любое открытое множество $U\subset X$, для которого модуль $\Omega^r[U]$ свободен над $\mathrm{k}[U]$ (теоремы 1 и 2). Тогда существуют такие n функций $u_1,\ldots,u_n\in\mathrm{k}[U]$, что произведения

$$du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r},\quad 1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n,\tag{1}$$

образуют базис $\Omega^r[U]$ над $\mathrm{k}[U]$. Любая форма $\omega\in\Omega^r(X)$ регулярна в некотором открытом множестве $U'\subset U$, для которого по-прежнему формы (1) дают базис в $\Omega^r[U']$ над $\mathrm{k}[U']$. Поэтому ω' представляется однозначно в виде

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n} g_{i_1\ldots i_r}du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r},$$

где $g_{i_1\ldots i_r}$ регулярны в некотором открытом множестве $U'\subset U$, т. е рациональны на X. Это и значит, что формы (1) — базис $\Omega^r(X)$ над $\mathrm{k}(X)$.

Какие n функций $u_1,\ldots,u_n\in\mathrm{k}(X)$ обладают тем свойством, что $du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}$ $(1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n)$ — базис $\Omega^r(X)$ над $\mathrm{k}(X)$? Мы выведем достаточное для этого условие. Это же условие и необходимо, но это нам не понадобится.

Теорема 4. *Если $u_1,\ldots,u_n$ — сепарабельный трансцендентный базис поля $\mathrm{k}(X)$, то формы $du_{i_1}\wedge\ldots$*

$\ldots \wedge du_{i_r}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n$, *образуют базис* $\Omega^r(X)$ *над* $k(X)$.

Так как $\Omega^r(X)$ и $k(X)$ — бирациональные инварианты, то мы можем считать X аффинным: $X \subset \mathbf{A}^N$.

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — сепарабельный трансцендентный базис поля $k(X)$. Тогда любой элемент $v \in k(X)$ удовлетворяет соотношению $F(v, u_1, \ldots, u_n) = 0$, сепарабельному относительно v.

В частности, для всех координат t_i в $\mathbf{A}^N$ имеют место соотношения $F_i(t_i, u_1, \ldots, u_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$. Из них следует, что на X выполняется соотношение $F'_{i,t_i}dt_i + \sum_{j=1}^{n} F'_{i,u_j}du_j = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$. Из сепарабельности многочленов F_i по t_i следует, что $F'_{i,t_i} \neq 0$ на X. Поэтому

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{F'_{i,u_j}}{F'_{i,t_i}} \right) du_j. \qquad (2)$$

На некотором открытом множестве $U \subset X$ все функции $-\dfrac{F'_{i,u_j}}{F'_{i,t_i}}$ и u_i регулярны, а тогда (2) показывает, что в любой точке $y \in U$ дифференциалы $d_y u_j$ порождают пространство Θ_y^*. Так как число этих дифференциалов равно размерности пространства, то они образуют его базис. Поэтому du_i образуют базис модуля $\Omega^1[U]$ над $k[U]$, произведения (1) — базис $\Omega^r[U]$ над $k[U]$, а тем более $\Omega^r(X)$ над $k(X)$.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что на аффинной окружности с уравнением $x^2 + y^2 = 1$ рациональная дифференциальная форма $\dfrac{dx}{y}$ регулярна. Предполагается, что характеристика основного поля $\neq 2$.

2. В обозначениях задачи 1 доказать, что $\Omega^1[X] = k[X]\dfrac{dx}{y}$. Указание. Записать любую форму $\omega \in \Omega^1[X]$ в виде $\omega = f \cdot \dfrac{dx}{y}$ и воспользоваться тем, что $\dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x}$.

3. Доказать, что в примере 3 п. 1 $\dim \Omega^1[X] = 1$.

4. Доказать, что $\Omega^n[\mathbf{P}^n] = 0$.

5. Доказать, что $\Omega^1[\mathbf{P}^n] = 0$.

6. Доказать, что $\Omega^r[\mathbf{P}^n] = 0$ при $r > 0$.

7. Пусть $\omega = \dfrac{P(t)}{Q(t)} dt$, где P и Q — многочлены, $\deg P = m$, $\deg Q = n$ — рациональная форма на $\mathbf{P}^1$ (t — координата на $\mathbf{P}^1$). В каких точках $x \in \mathbf{P}^1$ форма ω нерегулярна?

8. Доказать, что касательное расслоение гладкого многообразия X, введенное в п. 4 § 1 гл. II, бирационально изоморфно прямому произведению $X \times \mathbf{A}^n$. Указание. Для открытого множества U в теореме 1 построить изоморфизм касательного расслоения к U на $U \times \mathbf{A}^n$: $(x, \xi) \to x \times ((d_x u_1)(\xi), \ldots, (d_x u_n)(\xi))$, $\xi \in \Theta_x$.

9. Вычислить модуль Ω_A, построенный при доказательстве предложения 2 в п. 2 для кривой $y^2 = x^3$, и доказать, что $\xi(3y\,dx - 2x\,dy) = 0$. Указание. Воспользоваться тем, что $k[X] = k[x] + k[x]y$.

10. Пусть K — расширение поля k. Дифференцированием поля K над k называется k-линейное отображение D: $K \to K$, удовлетворяющее условию $D(xy) = D(x)y + xD(y)$, $x, y \in K$. Доказать, что если $u \in K$ и D — дифференцирование, то отображение $D_1(x) = uD(x)$ — тоже дифференцирование, так что все дифференцирования K над k образуют векторное пространство над K. Оно обозначается через $\mathbf{D}_k(K)$.

11. Пусть D — дифференцирование поля $K = k(X)$ над k, $\omega \in \Omega^1(X)$, $\omega = \sum f_i dg_i$. Доказать, что функция $(D, \omega) = \sum f_i D(g_i)$ не зависит от представления ω в виде $\sum f_i dg_i$. Доказать, что это скалярное произведение устанавливает изоморфизм $\mathbf{D}_k(K) = (\Omega^1(X))^* = \mathrm{Hom}_{k(X)}(\Omega^1(X), k(X))$.

§ 6. Примеры и применения дифференциальных форм

1. Поведение при отображениях. Сначала мы исследуем поведение дифференциальных форм при регулярных отображениях. Если φ: $X \to Y$ — такое отображение, $x \in X$, то $d_x\varphi$ есть отображение $\Theta_{x,X} \to \Theta_{\varphi(x),Y}$, а сопряженное преобразование $(d_x\varphi)^*$ отображает $\Theta^*_{\varphi(x),Y}$ в $\Theta^*_{x,X}$. Поэтому для $\omega \in \Phi[Y]$ мы имеем $\varphi^*(\omega) \in \Phi[X]$, где $\varphi^*(\omega)(x) = (d_x\varphi^*)(\omega(\varphi(x)))$.

Из определения легко вытекает, что отображение $(d_x\varphi)^*$ согласовано со взятием дифференциала, т. е. $(d_x\varphi)^*(d_{\varphi(x)}f) = d_x(\varphi^*(f))$ для $f \in k[Y]$. Отсюда следует, что если $\omega \in \Omega^1[Y]$, то $\varphi^*(\omega) \in \Omega^1[X]$ и φ^* определяет гомоморфизм φ^*: $\Omega^1[Y] \to \Omega^1[X]$, который согласован со взятием дифференциала для $f \in k[Y]$.

Наконец, из линейной алгебры известно, что линейное преобразование линейных пространств φ: $L \to M$ определяет линейное преобразование $\Lambda^r\varphi$: $\Lambda^r L \to \Lambda^r M$. Применяя это к отображению $(d_x\varphi)^*$, мы получим отображение $\Lambda^r(d_x\varphi)^*\colon \Lambda^r\Theta^*_{\varphi(x),Y}\to\Lambda^r\Theta^*_{x,X}$ и отображения $\Phi^r[Y]\to\Phi^r[X]$ и $\Omega^r[Y]\to\Omega^r[X]$. Последнее мы будем опять обозначать через φ^*.

Из всего сказанного выше вытекает, что эффективное вычисление действия операции φ^* на дифференциальные формы очень просто: если

$$\omega=\sum g_{i_1\ldots i_r}du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r},$$

то

$$\varphi^*(\omega)=\sum\varphi^*(g_{i_1\ldots i_r})\,d(\varphi^*(u_{i_1}))\wedge\ldots\wedge d(\varphi^*(u_{i_r})). \qquad (1)$$

Пусть теперь X неприводимо, $\varphi\colon X\to Y$ — рациональное отображение и $\varphi(X)$ плотно в Y. Так как φ является регулярным отображением открытого множества $U\subset X$ в Y и любое открытое множество $V\subset Y$ пересекается с $\varphi(U)$, то предшествующие рассуждения определяют отображение $\varphi^*\colon \Omega^n(Y)\to\Omega^r(X)$. Это отображение опять задается формулой (1).

Мы знаем, что при $r=0$, т. е. для функций, отображение φ^* является вложением. Для дифференциальных форм это не всегда так. Пусть, например, $X=Y=\mathbf{P}^1$, $\mathrm{k}(X)=\mathrm{k}(t)$, $\mathrm{k}(Y)=\mathrm{k}(u)$, k имеет конечную характеристику p и φ задается формулой $u=t^p$. Тогда $\varphi^*(f(u))=f(t^p)$ и $\varphi^*(df)=d(f(t^p))=0$ $(f\in\mathrm{k}(u))$, так что $\varphi^*(\Omega^1(Y))=0$. Ситуация выясняется следующим результатом.

Теорема 1. *Если поле $\mathrm{k}(X)$ имеет сепарабельный трансцендентный базис над $\mathrm{k}(Y)$, то отображение $\varphi^*\colon \Omega^r(Y)\to\Omega^r(X)$ является вложением.*

Мы здесь отождествляем поле $\mathrm{k}(Y)$ с подполем $\varphi^*\mathrm{k}(Y)$ поля $\mathrm{k}(X)$.

Пусть $\mathrm{k}(X)/\mathrm{k}(Y)$ имеет сепарабельный трансцендентный базис $v_1,\ldots,v_s$. Это значит, что $v_1,\ldots,v_s$ алгебраически независимы над $\mathrm{k}(Y)$ и $\mathrm{k}(X)$ — конечное сепарабельное расширение поля $\mathrm{k}(Y)(v_1,\ldots,v_s)$. Поле $\mathrm{k}(Y)$ имеет сепарабельный трансцендентный базис над k (см. замечание 1 к теореме 5 § 3 гл. I). Обозначим его через $u_1,\ldots,u_r$. Тогда $u_1,\ldots,u_r,\ v_1,\ldots,v_s$ — сепарабельный трансцендентный базис поля $\mathrm{k}(X)$ над k.

Записав любую дифференциальную форму $\omega\in\Omega^r(Y)$ в виде

$$\omega=\sum g_{i_1\ldots i_r}du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r} \qquad (2)$$

и применив к ней (1), мы получим запись $\varphi^*(\omega)$ через произведения $d\varphi^*(u_{i_1})\wedge\ldots\wedge d\varphi^*(u_{i_r})$, которые составляют часть базиса $\Omega^r(X)$ над $\mathrm{k}(X)$, так как $\varphi^*(u_i)$ — часть сепарабельного трансцендентного базиса $u_1,\ldots,u_r$, $v_1,\ldots,v_s$ (теорема 4 § 4). Поэтому $\varphi^*(\omega)=0$, только если все $\varphi^*(g_{i_1\ldots i_r})=0$, а это возможно только при $g_{i_1\ldots i_r}=0$, т. е. $\omega=0$.

Все предшествующее было более или менее очевидно. Теперь мы подошли к неожиданному факту.

Теорема 2. *Если X и Y — гладкие многообразия, Y проективно и $\varphi\colon X\to Y$ — такое рациональное отображение, что $\varphi(X)$ плотно в Y, то $\varphi^*\Omega^r[Y]\subset\Omega^r[X]$.*

Иными словами, φ^* переводит регулярные дифференциальные формы в регулярные. Так как φ только рационально, это кажется совсем неправдоподобным даже для функций, т. е. при $r=0$. В этом случае положение спасается тем, что ввиду проективности Y регулярные функции на нем постоянны и теорема тривиальна.

В общем случае теорема менее очевидна. Мы воспользуемся тем, что ввиду теоремы 3 § 3 гл. II отображение φ регулярно на $X-Z$, где Z замкнуто в X и $\operatorname{codim}_X Z\geqslant 2$. Если $\omega\in\Omega^r[Y]$, то $\varphi^*(\omega)$ регулярна на $X-Z$. Докажем, что из этого следует ее регулярность на всем X. Для этого запишем $\varphi^*(\omega)$ в некотором открытом множестве U в стандартном виде (2) (с заменой ω на $\varphi^*(\omega)$), где теперь $u_1,\ldots,u_n$ — такие регулярные функции на U, что $du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}$ — базис $\Omega^r[U]$ над $\mathrm{k}[U]$. Тогда из регулярности формы $\varphi^*(\omega)$ на $X-Z$ следует регулярность всех функций $g_{i_1\ldots i_r}$ в $U-(Z\cap U)$. Но $\operatorname{codim}_U(Z\cap U)\geqslant 2$, и это значит, что множество точек, где $g_{i_1\ldots i_r}$ не регулярна, имеет коразмерность $\geqslant 2$. С другой стороны, это множество есть дивизор $(g_{i_1\ldots i_r})_\infty$. Это возможно только в том случае, когда $(g_{i_1\ldots i_r})_\infty=0$ и, значит, функция $g_{i_1\ldots i_r}$ регулярна.

Следствие. *Если гладкие проективные многообразия X и Y бирационально изоморфны, то векторные пространства $\Omega^r[X]$ и $\Omega^r[Y]$ изоморфны над полем k.*

Значение теоремы 2 и ее следствия усиливается тем, что для проективного многообразия X пространство $\Omega^r[X]$ конечномерно над k. Этот результат является следствием общей теоремы о когерентных пучках, которая будет доказана в гл. VI. Для случая кривых мы докажем его в п. 3. Положим $h^r = \dim \Omega^r[X]$. Следствие теоремы 2 означает, что числа h^r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ являются бирациональными инвариантами гладкого проективного многообразия X.

2. Инвариантные дифференциальные формы на группе. Пусть X — алгебраическое многообразие, ω — дифференциальная форма на нем, а g — автоморфизм X. Форма ω называется инвариантной относительно g, если

$$g^*(\omega) = \omega.$$

Пусть, в частности, G — алгебраическая группа. Определение дано в п. 2 § 3. Из него сразу следует, что для любого элемента $g \in G$ отображение

$$t_g(x) = g \cdot x$$

регулярно и является автоморфизмом G как алгебраического многообразия. Дифференциальная форма на G называется *инвариантной*, если она инвариантна относительно всех преобразований t_g.

Инвариантная дифференциальная форма регулярна. Действительно, если форма ω регулярна в точке $x_0 \in G$, то $t_g^*\omega$ регулярна в точке $g^{-1}x_0$. Но $t_g^*\omega = \omega$ и, значит, ω регулярна во всех точках gx_0, $g \in G$, а это вообще все точки G.

Мы покажем, как найти все инвариантные дифференциальные формы на алгебраической группе. Для этого рассмотрим автоморфизмы t_g^* векторных пространств $\Phi^r[G]$, соответствующие сдвигам t_g (ср. п. 1). Мы определим сначала множество элементов $\varphi \in \Phi^r[G]$, инвариантных относительно всех t_g^*, $g \in G$. В этом множестве содержатся, в частности, инвариантные дифференциальные формы.

Условие

$$t_g^*(\varphi) = \varphi$$

означает, что для любой точки $x \in G$

$$\varphi(x) = (\Lambda^r dt_g^*)(\varphi(gx)). \tag{1}$$

В частности, при $g = x^{-1}$

$$(\Lambda^r dt_{x^{-1}}^*)(\varphi(e)) = \varphi(x). \tag{2}$$

Эта формула показывает, что φ однозначно задается элементом $\varphi(e)$ конечномерного векторного пространства

$\Lambda^r\Theta_e^*$. Наоборот, задав произвольно $\eta \in \Lambda^r\Theta_e^*$, мы можем построить по формуле (2) элемент $\varphi \in \Phi^r[G]$:

$$\varphi(x) = (\Lambda^r dt_{x^{-1}}^*)(\eta).$$

Простая подстановка показывает, что он удовлетворяет и условию (1), т. е. инвариантен относительно t_g^*. Таким образом, подпространство элементов $\varphi \in \Phi^r[G]$, инвариантных относительно автоморфизмов t_g^*, изоморфно пространству $\Lambda^r\Theta_e^*$, и изоморфизм задается соответствием

$$\varphi \to \varphi(e).$$

Покажем теперь, что все построенные нами элементы φ являются регулярными дифференциальными формами, т. е. содержатся в $\Omega^r[G]$. Ввиду инвариантности регулярность формы φ достаточно проверить в одной какой-нибудь точке, например в единичной точке e. Кроме того, достаточно ограничиться случаем $r = 1$. Действительно, если $\eta = \sum \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_r}$, $\alpha_j \in \Lambda^1\Theta_e^*$, и формы φ_j, соответствующие α_j по формуле (2), регулярны, то форма $\varphi = \sum \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_r}$ регулярна и соответствует η.

Выберем такую аффинную окрестность V точки e, что модуль $\Omega^1[V]$ свободен, и пусть $du_1, \ldots, du_n$ — его базис. Существует такая аффинная окрестность U точки e, что $\mu(U \times U) \subset V$, где μ — отображение умножения в G. Как и любая функция из $k[U \times U]$, $\mu^*(u_l)$ может быть записана в виде

$$\mu^*(u_l)(g_1, g_2) = \sum v_{lj}(g_1) w_{lj}(g_2), \quad v_{lj}, w_{lj} \in k[U],$$
$$(g_1, g_2) \in U \times U \subset G \times G.$$

По определению $t_h = \mu s_h$, где s_h — вложение $G \to G \times G$, $s_h(g) = (h, g)$. Поэтому $t_h^*(u_l)(g) = \sum v_{lj}(h) w_{lj}(g)$, а так как $(t_h^*(du_l))(g) = d_{hg}(t_h^*(u_l))$, то $(d_h^*(du_l))(g) = \sum v_{lj}(h)\, d_{hg}(w_{lj})$. Полагая, в частности, $h = g^{-1}$, получим

$$(t_{g^{-1}}^*(du_l))(g) = \sum v_{lj}(g^{-1})\, d_e w_{lj}.$$

Выражая dw_{lj} через du_k, мы получим соотношения

$$t_{g^{-1}}^* du_l = \sum c_{kl}(g)\, du_k, \quad c_{kl} \in k[U], \tag{3}$$

причем

$$c_{kl}(g) = \sum_j v_{lj}(g^{-1}) \frac{\partial w_{lj}}{\partial u_k}(e). \qquad (4)$$

Запишем теперь инвариантную форму φ в виде $u = \sum \psi_k \, du_k$ и рассмотрим соотношение $t_g^* \varphi = \varphi$ в точке e. Подставляя выражения (3) и приравнивая коэффициенты при du_k, мы получим

$$\sum c_{kl} \psi_l = \psi_k(e). \qquad (5)$$

Так как $(c_{kl}(e))$ — единичная матрица, то $\det(c_{kl})(e) \neq 0$ и из системы уравнений (5) следует, что $\psi_k \in \mathcal{O}_e$.

Сформулируем доказанный результат:

Предложение. *Отображение $\omega \to \omega(e)$ устанавливает изоморфизм между пространством r-мерных инвариантных регулярных дифференциальных форм на G и пространством $\Lambda^r \Theta_e^*$.*

3. Канонический класс. Мы рассмотрим теперь специально n-мерные рациональные дифференциальные формы на n-мерном гладком многообразии X. В некоторой окрестности точки $x \in X$ такая форма представляется в виде $\omega = g \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$. Покроем все X такими аффинными множествами U_i, что в каждом из них имеет место это представление $\omega = g^i du_1^{(i)} \wedge \ldots \wedge du_n^{(i)}$. В пересечении $U_i \cap U_j$ получим согласно формуле (6) п. 3 § 5, что

$$g^{(j)} = g^{(i)} J\left(\frac{u_1^{(i)}, \ldots, u_n^{(i)}}{u_1^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}}\right).$$

Так как якобиан J регулярен и отличен от нуля в $U_i \cap U_j$ (см. (5) в п. 3 § 5), то система функций $g^{(i)}$ в U_i является согласованной системой функций в смысле п. 2 § 1 и поэтому определяет дивизор на X. Этот дивизор называется *дивизором* формы ω и обозначается через (ω).

Следующие свойства дивизора n-мерной дифференциальной формы на n-мерном многообразии сразу следуют из определения:

а) $(f \cdot \omega) = (f) + (\omega)$, если $f \in k(X)$;

б) $(\omega) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\omega \in \Omega^n[X]$.

Согласно теореме 3 § 5 (при $r = n$) пространство $\Omega^n(X)$ одномерно над $k(X)$. Поэтому, если $\omega_1 \in \Omega^n(X)$, $\omega_1 \neq 0$, то любая форма $\omega \in \Omega^n(X)$ представляется в виде $\omega = f\omega_1$. Свойство а) поэтому показывает, что дивизоры всех форм $\omega \in \Omega^n(X)$ эквивалентны друг другу и образуют один класс дивизоров на X.

Этот класс дивизоров называется *каноническим классом* X и обозначается через K или K_X.

Пусть ω_1 — фиксированная форма из $\Omega^n(X)$, через которую любая форма выражается в виде $\omega = f\omega_1$. Свойство б) показывает, что ω тогда и только тогда регулярна на X, когда $(f) + (\omega_1) \geqslant 0$. Иначе говоря, $\Omega^n[X] \simeq \mathscr{L}((\omega_1))$, если воспользоваться понятием пространства, ассоциированного с дивизором, введенным в п. 5 § 1.

Таким образом, $h^n = \dim_k \Omega^n[X] = l((\omega_1)) = l(K)$. Мы видим, что инвариант h^n, введенный в п. 1, совпадает с размерностью канонического класса.

Пример. Предположим, что X — многообразие алгебраической группы. В п. 2 мы показали, что пространство r-мерных инвариантных дифференциальных форм на X изоморфно $\Lambda^r \Theta_e^*$, где Θ_e — касательное пространство к X в единичной точке e. В частности, пространство n-мерных инвариантных дифференциальных форм одномерно, так как $\Lambda^n \Theta_e^* \simeq k$. Если ω — ненулевая инвариантная форма, то $\omega \in \Omega^n[X]$, т. е. $(\omega) \geqslant 0$. Но если $\omega(x) = 0$ для некоторой точки $x \in X$, то ввиду инвариантности и $\omega(y) = 0$ для любой точки $y \in X$. Поэтому $\omega(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, т. е. ω регулярна и не обращается в 0 на X. Это значит, что $(\omega) = 0$, т. е. $K_X = 0$.

В § 2 мы доказали конечность числа $l(D)$ для любого дивизора D на гладкой проективной алгебраической кривой. Отсюда, в частности, следует, что число $h^1 = \dim_k \Omega^1[X]$ конечно для любой гладкой проективной алгебраической кривой X. Это число называется *родом* кривой и обозначается через $g(X)$ или g: $h^1 = g$, если $\dim X = 1$.

В случае, когда $\dim X = 1$, мы знаем, что все дивизоры одного класса имеют одну и ту же степень, так что можно говорить о степени $\deg C$ класса C. В частности, степень $\deg K_X$ канонического класса является бирациональным инвариантом кривой X.

Введенные нами инварианты: род $g(X)$ и $\deg K_X$ — не независимы. Можно доказать, что между ними существует соотношение $\deg K_X = 2g(X) - 2$. См. по этому поводу п. 6. В частности, если гладкая проективная кривая X является алгебраической группой, то $K_X = 0$, как мы только что видели. Поэтому $g_X = 1$, т. е. из всех проективных кривых только на кривых рода 1 можно определить закон алгебраической группы. Мы увидим в п. 6, что кривые рода 1 — это в точности гладкие кубические кривые.

4. Гиперповерхности. Мы вычислим сейчас канонический класс и определим h^n для случая, когда X — гладкая гиперповерхность в $\mathbf{P}^N$, $n = \dim X = N - 1$. Пусть X задано уравнением $F(x_0 : \ldots : x_N) = 0$, $\deg F = \deg X = m$. Рассмотрим аффинное открытое множество U, в котором $x_0 \neq 0$. В нем X задается уравнением $G(y_1, \ldots, y_N) = 0$, $G(y_1, \ldots, y_N) = F(1, y_1, \ldots, y_N)$, где $y_i = x_i/x_0$.

В открытом подмножестве $U_i \subset U$, в котором $G'_{y_i} \neq 0$, локальными параметрами являются $y_1, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_N$, и форма $dy_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \ldots \wedge dy_N$ является базисом $\Omega^n[U_i]$ над $k[U_i]$. Однако удобнее взять за базис форму

$$\omega_i = \frac{1}{G'_{y_i}} dy_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \ldots \wedge dy_N$$

(что возможно, так как $G'_{y_i} \neq 0$ в U_i). Дело в том, что формы $\omega_1, \ldots, \omega_N$ очень просто связаны друг с другом: умножив соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} G'_{y_i} dy_i = 0$$

на $dy_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_j} \wedge \ldots \wedge dy_N$, мы увидим, что

$$\omega_j = (-1)^{i+j} \omega_i. \tag{1}$$

Так как X гладко, то $U = \cup U_i$, и из (1) следует, что все формы ω_i регулярны во всем U и что дивизор этих форм в U равен 0.

Остается исследовать точки, не принадлежащие U. Рассмотрим, например, открытое подмножество V, в котором $x_1 \neq 0$. В этом аффинном многообразии координатами являются $z_1, \ldots, z_N$: $z_1 = \dfrac{1}{y_1}$, $z_i = \dfrac{y_i}{y_1}$ $(i = 2, \ldots, N)$. Очевидно, что

$$y_1 = \frac{1}{z_1}, \quad y_i = \frac{z_i}{z_1}, \quad i = 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Поэтому

$$dy_1 = -\frac{dz_1}{z_1^2}, \quad dy_i = \frac{z_1\, dz_i - z_i\, dz_1}{z_1^2}, \quad i = 2, \ldots, N.$$

Подставим эти выражения в ω_N. Пользуясь тем, что $dz_1 \wedge dz_1 = 0$, мы получим

$$\omega_N = -\frac{1}{z_1^N G'_{y_N}} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{N-1}.$$

Уравнение X в V имеет вид

$$H(z_1, \ldots, z_N) = 0, \quad \text{где} \quad H = z_1^m G\left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_N}{z_1}\right).$$

Из соотношения

$$H'_{z_N} = z_1^{m-1} G'_{y_N}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_N}{z_1}\right) = z_1^{m-1} G'_{y_N}(y_1, \ldots, y_N)$$

следует, что

$$\omega_N = -\frac{1}{z_1^{N-m+1} H'_{z_N}} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{N-1}. \tag{3}$$

Все рассуждения, проведенные для U, годятся и для V и показывают, что

$$\Omega^n[V] = k[V] \frac{1}{H'_{z_N}} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{N-1}. \tag{4}$$

Поэтому в V имеем $(\omega_N) = -(N - m + 1) \cdot (z_1)$. Очевидно, что дивизор (z_1) в V является дивизором формы x_0 на X, как он был определен в п. 2 § 1. Окончательно мы получаем, что на X выполняется соотношение $(\omega_N) = (m - N - 1) \cdot (x_0) = (m - n - 2) \cdot (x_0)$. Таким образом, K_X является классом дивизоров, содержащим дивизор $(m - n - 2) L$, где L — сечение X гиперплоскостью.

Найдем теперь $\Omega^n[X]$.

Записав форму $\omega \in \Omega^n(X)$ в виде $\omega = \varphi \omega_N$, мы видим, что $\omega \in \Omega^n[X]$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathscr{L}((m - n - 2)(x_0))$. Согласно примеру в конце п. 5 § 1 это равносильно тому, что $\varphi = P(z_1, \ldots, z_N)$, где P — многочлен и

$$\deg P \leqslant m - N - 1 = m - n - 2. \tag{5}$$

Отсюда легко вычислить размерность $\Omega^n[X]$. Именно, два разных многочлена $P, Q \in k[y_1, \ldots, y_N]$, удовлетворяющих условию (5), определяют разные элементы кольца $k[X]$ — иначе $P - Q = 0(G)$, а это противоречит (5). Таким образом, размерность $\Omega^n[X]$ совпадает с размерностью пространства многочленов P, удовлетворяющих условию (5). Эта размерность равна $\frac{(m-1)\ldots(m-N)}{N!} = \binom{m-1}{N}$. Таким образом,

$$h^n(X) = \binom{m-1}{n+1}. \tag{6}$$

Простейший случай этой формулы: при $N = 2$, $n = 1$

$$g(X) = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

— формула для рода гладкой плоской кривой степени m.

Из формулы (6) мы можем сразу сделать важный вывод. Именно, интерпретируя $\binom{m-1}{n+1}$ как число сочетаний, мы сразу получаем, что при $m > m' > n+1$

$$\binom{m-1}{n+1} > \binom{m'-1}{n+1}.$$

Поэтому формула (6) показывает, что гиперповерхности разных степеней $m, m' > n+1$ бирационально не изоморфны. Мы видим, что существует бесконечное число бирационально неизоморфных друг другу алгебраических многообразий заданной размерности.

В частности, при $N = 2$, $m = 3$ получаем $g(X) = 1$, а так как $g(\mathbf{P}^1) = 0$, то мы видим еще раз, что гладкая кубика в $\mathbf{P}^2$ нерациональна.

Из формулы (6) следует, что $h^n(X) = 0$, если $m \leqslant N$. В частности, $h^n(\mathbf{P}^n) = 0$. При $n = 1$ мы непосредственно проверили это в п. 2.

Рассмотрим подробнее случай $m \leqslant N$. Если $N = 2$, то это значит, что $m = 1, 2$. При $m = 1$ имеем $X = \mathbf{P}^1$ и равенство $h^1(\mathbf{P}^1) = 0$ нам уже известно. При $m = 2$ мы имеем дело с гладкой кривой 2-го порядка, которая изоморфна $\mathbf{P}^1$, так что и в этом случае равенство $h^1(X) = 0$ не дает ничего нового.

Пусть $N = 3$. При $m = 1$ мы имеем дело с $\mathbf{P}^2$, и равенство $h^2 = 0$ нам уже известно. Если $m = 2$, то X является гладкой поверхностью 2-го порядка, которая бирационально изоморфна $\mathbf{P}^2$, так что равенство $h^2(X) = 0$ является следствием равенства $h^2(\mathbf{P}^2) = 0$ и теоремы 2. Если $m = 3$, то X является кубической поверхностью. Если на такой поверхности лежат две скрещивающиеся прямые, то она бирационально изоморфна $\mathbf{P}^2$ (см. пример 2 п. 3 § 3 гл. I). Можно показать, что две скрещивающиеся прямые лежат на любой гладкой кубической поверхности, так что равенство $h^2(X) = 0$ опять есть следствие теоремы 2 и того, что $h^2(\mathbf{P}^2) = 0$.

Рассмотренные примеры приводят к интересным вопросам о гладких гиперповерхностях малой степени: $X \subset \mathbf{P}^N$, $m = \deg X \leqslant N$. Мы видим, что при $N = 2, 3$ X бирационально изоморфно проективному пространству $\mathbf{P}^{N-1}$, что дает «объяснение» равенства $h^n(X) = 0$, $n = N - 1$.

При $N = 4$ мы сталкиваемся здесь с новым явлением. Для $m = 3$, например, даже для гиперповерхности

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \tag{7}$$

вопрос о том, будет ли она бирационально изоморфна $\mathbf{P}^3$, является весьма тонким. Однако можно показать, что существует такое рациональное отображение $\varphi: \mathbf{P}^3 \to X$, что $\varphi(\mathbf{P}^3)$ плотно в X и $k(\mathbf{P}^3)$ сепарабельно над $k(X)$ (см. задачу 13). Уже это вместе с равенством $h^3(\mathbf{P}^3) = 0$ и теоремами 1 и 2 дает $h^3(X) = 0$. В связи с этим вводится следующая терминология: многообразие X называется *рациональным*, если оно бирационально изоморфно $\mathbf{P}^n$, $n = \dim X$, и *унирациональным*, если существует такое рациональное отображение $\varphi: \mathbf{P}^n \to X$, что $\varphi(\mathbf{P}^n)$ плотно в X и $k(\mathbf{P}^n)/k(X)$ сепарабельно. Из теорем 1 и 2 и задачи 6 к § 5 вытекает, что для унирационального многообразия X все $h^i(X) = 0$.

Типичным для ряда трудностей, встречающихся в алгебраической геометрии, является вопрос о том, совпадают ли понятия рационального и унирационального многообразия. Этот вопрос называется проблемой Люрота. Очевидно, что его можно переформулировать как задачу теории полей: пусть K — такое подполе поля рациональных функций $k(T_1, \ldots, T_n)$, что $k(T_1, \ldots, T_n)/K$ конечно и сепарабельно; будет ли K изоморфно полю рациональных функций?

Для $n = 1$ ответ положительный, и причем даже без требования алгебраической замкнутости поля k и сепарабельности $k(T)/K$.

Для $n=2$ без этих ограничений ответ отрицательный, а при их наличии — положительный, но доказательство является очень тонким. Оно изложено для полей характеристики 0, например, в [1], гл. III, а в общем случае — в [5].

Для $n \geqslant 3$ ответ отрицательный, даже когда k — поле комплексных чисел. Это — тонкий результат теории трехмерных многообразий. Один из примеров унирациональногo, но не рационального многообразия — это гладкая трехмерная кубика, в частности гиперповерхность (7) (см. [9]). Другой пример нерационального многообразия — гладкая гиперповерхность степени 4 в $\mathbf{P}^4$; некоторые из таких гиперповерхностей унирациональны (см. [18]). Еще один тип примеров см. в [2].

В то время как для трехмерных многообразий проблема Люрота является тонким геометрическим вопросом, для бóльших размерностей она оказалась более алгебраической по духу, и решение ее — элементарнее. Например, построены примеры таких конечных групп G линейных преобразований переменных $x_1, \ldots, x_n$, что подполе инвариантов $\mathrm{k}(x_1, \ldots, x_n)^G$ этой группы не изоморфно полю рациональных функций (см. [4, 26]).

5. Гиперэллиптические кривые. В качестве второго примера рассмотрим один тип кривых. Обозначим через Y аффинную плоскую кривую с уравнением $y^2=F(x)$, где $F(x)$ — многочлен без кратных корней нечетной степени $n=2m+1$ (в § 1 гл. I доказано, что случай четной степени сводится к нечетной). Предположим, что характеристика поля $\mathrm{k} \neq 2$. Гладкая проективная модель X кривой Y называется *гиперэллиптической кривой*. Мы вычислим канонический класс и род кривой X.

Рациональное отображение $(x, y) \to x$ кривой Y: $Y \to \mathbf{A}^1$ определяет регулярное отображение f: $X \to \mathbf{P}^1$. Очевидно, что $\deg f=2$, так что, согласно теореме 1 § 2, для $\alpha \in \mathbf{P}^1$ или $f^{-1}(\alpha)$ состоит из двух точек z', z'', в каждой из которых $v_{z'}(u)=v_{z''}(u)=1$ для локального параметра u в точке α, или же $f^{-1}(\alpha)=z$ и $v_z(u)=2$.

Аффинная кривая Y, как легко проверить, гладкая. Если $\overline{Y}$ — ее проективное замыкание, то X является нормализацией $\overline{Y}$, и мы имеем отображение φ: $X \to \overline{Y}$, являющееся изоморфизмом Y и $\varphi^{-1}(Y)$. Отсюда следует, что если точка $\xi \in \mathbf{A}^1$ имеет координату α и $F(\alpha) \neq 0$, то $f^{-1}(\xi)=(z', z'')$, а если $F(\alpha)=0$, то $f^{-1}(\xi)=z$.

Рассмотрим бесконечно удаленную точку $\alpha_\infty \in \mathbf{P}^1$. Если координата на $\mathbf{P}^1$ обозначена через x, то локальным параметром в α_∞ является $u=x^{-1}$. Если бы $f^{-1}(\alpha_\infty)$ состояло из двух точек z', z'', то, например, в z' функция u была бы локальным параметром. Отсюда следует, что $v_{z'}(u)=1$, $v_{z'}(F(x))=-n$. Но так как n нечетно, то это противоречит тому, что $v_{z'}(F(x))=2v_{z'}(y)$. Таким образом, $f^{-1}(\alpha_\infty)$ состоит из одной точки, которую мы обозначим z_∞, и $v_{z_\infty}(x)=-2$, $v_{z_\infty}(y)=-n$. Отсюда следует, что $X=\varphi^{-1}(Y) \cup z_\infty$.

Перейдем теперь к дифференциальным формам на X. Рассмотрим, например, форму $\omega=\frac{dx}{y}$. В точке $\xi \in Y$, если $y(\xi) \neq 0$, локальным параметром является x и $v_\xi(\omega)=0$. Если же $y(\xi)=0$, то локальным параметром является y и $v_\xi(x)=2$, откуда опять следует, что $v_\xi(\omega)=0$. Таким образом, $(\omega)=k \cdot z_\infty$, и нам остается определить k. Для этого достаточно вспомнить, что если t — локальный параметр в z_∞, то $x=t^{-2}u$, $y=t^{-n}v$, $u, v, u^{-1}, v^{-1} \in \mathcal{O}_{z_\infty}$. Поэтому $\omega=t^{n-3}w\,dt$, w, $w^{-1} \in \mathcal{O}_{z_\infty}$, откуда $(\omega)=(n-3)z_\infty$.

Найдем теперь $\Omega^1[X]$. Как мы видели, ω образует базис модуля $\Omega^1[Y]$: $\Omega^1[Y]=\mathrm{k}[Y]\omega$, так что любая форма из $\Omega^1[X]$ имеет вид $u\omega$, где $u \in \mathrm{k}[Y]$ и, значит, может быть представлено в виде $P(x)+Q(x)y$, P, $Q \in \mathrm{k}[X]$.

Остается выяснить, какие из этих форм регулярны в z_∞. Это будет тогда и только тогда, когда

$$v_{z_\infty}(u) \geqslant -(n-3). \tag{1}$$

Найдем такие $u \in \mathrm{k}[Y]$. Так как $v_{z_\infty}(x)=-2$, то $v_{z_\infty}(P(x))$ всегда четно, а так как $v_{z_\infty}(y)=-n$, то $v_{z_\infty}(Q(x)y)$ нечетно. Поэтому

$$v_{z_\infty}(u)=v_{z_\infty}(P(x)+Q(x)y) \leqslant \min(v_{z_\infty}(P(x)),\ v_{z_\infty}(Q(x)y)),$$

и, значит, если $Q \neq 0$, то $v_{z_\infty}(u) \leqslant -n$. Таким образом, $u=P(x)$, и условие (1) дает, что $2\deg P \leqslant n-3$.

Мы нашли, что $\Omega^1[X]$ состоит из форм вида $\frac{P(x)}{y}dx$, где степень многочлена $P(x)$ не больше $\frac{n-3}{2}$. Отсюда следует, что $g=h^1=\dim \Omega^1[X]=\frac{n-1}{2}$.

Интересно сравнить результаты п. 4 и п. 5 при $N=2$. Во втором случае мы видели, что существуют алгебраические кривые любого наперед заданного рода. В первом — что род плоской гладкой кривой имеет вид $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, т. е. является далеко не произвольным целым числом. Таким образом, не любая гладкая проективная кривая изоморфна плоской гладкой кривой. Например, это неверно для гиперэллиптических кривых при $n=9$.

6. Теорема Римана — Роха на кривых. Одним из центральных результатов теории алгебраических кривых является *теорема Римана — Роха*. Она заключается в равенстве

$$l(D)-l(K-D)=\deg D-g+1, \qquad (1)$$

где D — произвольный дивизор на гладкой проективной кривой, K — ее канонический класс, а g — род. Доказательство этой теоремы требует углубления в подробности теории алгебраических кривых и поэтому здесь не приведено. Но укажем на некоторые ее следствия, которые сделают более ясной ее значение для теории кривых.

Следствие 1. *Полагая $D=K$, мы получаем, что так как $l(K-K)=l(0)=1$, $l(K)=g$, то* $\deg K=2g-2$.

Об этом равенстве мы говорили в п. 3.

Следствие 2. *Если* $\deg D>2g-2$, *то* $l(D)=\deg D-g+1$.

Это следует из того, что при $\deg D>2g-2$ $\deg(K-D)<0$, откуда $l(K-D)=0$: $K-D\sim D'\geqslant 0$ противоречит тому, что $\deg D'<0$.

Следствие 3. Если $g=0$ и $D=x$ — точка на X, то, по (1), $l(D)\geqslant 2$. Это значит, что пространство $\mathscr{L}(D)$ содержит, кроме констант, и непостоянную функцию f. Для такой функции $(f)_\infty=x$, т. е. если интерпретировать f как отображение $f\colon X\to\mathbf{P}^1$, то $\deg f=1$ в силу теоремы 1 § 2. Отсюда следует, что $X\simeq\mathbf{P}^1$, т. е. *равенство $g=0$ не только необходимо, но и достаточно для рациональности кривой X.*

Следствие 4. *Если $g=1$, то кривая X изоморфна кубике на $\mathbf{P}^2$.*

Действительно, при $g=1$ следствие 2 дает $l(D)=\deg D$ при $D>0$ и утверждение следует из теоремы 2 § 3.

Следствие 5. Рассмотрим базис $f_0,\ldots,f_n$ пространства $\mathscr{L}(D)$, $D\geqslant 0$ и соответствующее рациональное отображение $\varphi=(f_0:\ldots:f_n)$, $X\to\mathbf{P}^n$. Выясним, когда φ является вложением. *Мы докажем, что это так, если выполнены условия*

$$l(D-x)=l(D)-1,\quad l(D-x-y)=l(D)-2 \qquad (2)$$

для любых точек $x,y\in X$. Из следствия 2 вытекает, что *равенства* (2) *верны, если* $\deg D\geqslant 2g+1$, *так что в этом случае φ является вложением.*

Заметим, прежде всего, что первое из условий (2) гарантирует, что $-D=\text{НОД}(f_i)$. Действительно, по определению $\text{НОД}(f_i)\geqslant -D$. Если бы здесь не было равенства, то существовала бы такая точка x, что $(f_i)\geqslant -D+x$, т. е. $\mathscr{L}(D)\subset\mathscr{L}(D-x)$, $l(D)\leqslant l(D-x)$, что противоречит (2). Таким образом, согласно замечанию в конце п. 4 § 1 дивизоры $D_\lambda=\left(\sum\lambda_if_i\right)+D$ являются прообразами гиперплоскостей при отображении φ.

Для доказательства того, что φ — изоморфизм, мы воспользуемся леммой п. 4 § 5 гл. II и теоремой 8 § 5 гл. II, условия которой проверим при помощи сделанного выше замечания. Если $\varphi(x)=\varphi(y)$, то всякая гиперплоскость E, проходящая через точку $\varphi(x)$, проходит и через точку $\varphi(y)$. Это значит, что если $D_\lambda-x\geqslant 0$, то $D_\lambda-x-y\geqslant 0$, т. е. $l(D_\lambda-x)\leqslant l(D_\lambda-x-y)$, что противоречит второму условию (2).

Докажем, что касательные пространства отображаются изоморфно. Это равносильно тому, что

$$\varphi^*\colon \mathfrak{m}_{\varphi(x)}/\mathfrak{m}^2_{\varphi(x)}\to\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$$

эпиморфно. Если это не так, то $\varphi^*(\mathfrak{m}_{\varphi(x)})\subset\mathfrak{m}_x^2$, ибо в нашем случае $\dim\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2=1$. Иначе говоря, для любой функции $u\in\mathfrak{m}_{\varphi(x)}$ имеем $v_x(\varphi^*(u))\geqslant 2$. В применении к линейным функциям это показывает, что, если $D_\lambda-x\geqslant 0$, то $D_\lambda-2x\geqslant 0$. Мы опять получаем, что $l(D-x)\leqslant l(D-2x)$, что противоречит второму условию (2). Доказательство окончено.

Очевидно, что при выборе другого базиса в пространстве $\mathscr{L}(D)$ отображение φ умножится на проективное преобразование пространства $\mathbf{P}^n$. С другой стороны, замена D на другой дивизор $D+(f)$ приводит к изоморфизму $u\to uf$ пространства $\mathscr{L}(D)$ и, следовательно, не меняет φ. Таким образом, имеет смысл говорить об отображении φ, соответствующем классу дивизоров.

Пусть, например, X — кривая рода 1, $x_0\in X$. Условия следствия 5 выполнены для дивизора $3x_0$. Поэтому отображение φ, соответствующее этому дивизору, отображает X изоморфно на кривую $X' \subset \mathbf{P}^2$ (так как $l(3x_0) = 3$ ввиду (1)). Как мы видели, $3x_0$ — прообраз сечения X' прямой, и раз $\deg 3x_0 = 3$, то и $\deg X' = 3$. Таким образом, любая кривая рода 1 изоморфна плоской кубической кривой.

Наиболее интересны отображения φ, соответствующие классам, внутренним образом связанным с кривой X. Такими являются, например, кратности nK канонического класса. Равенство (1) показывает, что $\deg nK \geqslant 2g+1$ при $n \geqslant 2$, если $g > 2$, и при $n \geqslant 3$, если $g = 2$. Таким образом, при $g > 1$ класс $3K$ всегда удовлетворяет условиям следствия 4. Соответствующее отображение φ_{3K} отображает кривую X в $\mathbf{P}^m$, где $m = l(3K) - 1 = 5g - 6$ (по следствию 2). При этом кривые X и X' изоморфны тогда и только тогда, когда их образы $\varphi_{3K}(X)$ и $\varphi_{3K}(X')$ получаются друг из друга проективным преобразованием пространства. Вопрос о бирациональной классификации сводится, таким образом, к проективной классификации.

Отображение φ, соответствующее каноническому классу, не всегда является вложением. Однако все случаи, когда это не так, можно перечислить (см. задачи 11 и 12).

В качестве простого применения этих соображений рассмотрим плоские кривые 4-й степени. Согласно п. 4 их канонический класс совпадает с классом пересечения с прямой в $\mathbf{P}^2$. Поэтому отображение φ_K, соответствующее классу, совпадает с их естественным вложением в плоскость. Из сказанного выше вытекает, что две такие кривые изоморфны тогда и только тогда, когда они проективно эквивалентны. Это приводит нас к очень важному выводу. Множество плоских кривых 4-й степени можно отождествить с пространством $\mathbf{P}^{14}$ (п. 4 § 4 гл. I). С другой стороны, группа всех проективных преобразований плоскости имеет размерность 8 (матрицы 3-го порядка с точностью до постоянного множителя). Используя теорему о размерности слоев, отсюда можно вывести, что в $\mathbf{P}^{14}$ существуют открытое множество U и такое его отображение $f\colon U \to M$ на некоторое многообразие M, что две точки u_1 и $u_2 \in U$ соответствуют проективно эквивалентным кривым, только если они лежат в одном слое отображения f. Размерность слоя равна, следовательно, 8, а $\dim M = 14 - 8 = 6$.

Таким образом, далеко не любые две кривые степени 4 изоморфны: надо еще, чтобы им соответствовала одна и та же точка на шестимерном многообразии M. Это показывает, что род — не полная система бирациональных инвариантов кривых. Кроме целозначного инварианта — рода, кривые имеют еще «непрерывные» инварианты, называемые *модулями*. Доказано, что все кривые заданного рода $g > 1$ образуют (в смысле, который мы не будем здесь уточнять) одно неприводимое многообразие размерности $3g - 3$. В случае кривых 4-й степени $g = 3$ и $3g - 3 = 6 = \dim M$. Аналогичная картина имеет место и для кривых рода 1 (см. задачу 8 § 3). Только для $g = 0$ все кривые этого рода изоморфны.

7. Проективные погружения поверхностей. Здесь мы расскажем о том, как обобщаются факты, доказанные в предыдущем пункте для алгебраических кривых, на поверхности. Никакие доказательства приведены не будут. Читатель может познакомиться с ними по книге [1] или [5]. Кроме того, мы ограничимся случаем поля характеристики 0.

Аналогом кривых рода, большего 1, являются поверхности, у которых некоторая кратность канонического класса определяет бирациональный изоморфизм. Они называются поверхностями общего типа, и для них бирациональная классификация в некотором смысле сводится к проективной. Основной результат о поверхностях общего типа заключается в том, что для них уже пятикратный канонический класс $5K$ определяет регулярное отображение и бирациональный изоморфизм.

Остается перечислить поверхности необщего типа. Они играют роль кривых рода 0 и 1 и даются аналогичными конструкциями.

Аналогами рациональных кривых являются, во-первых, *рациональные поверхности*, т. е. поверхности, бирационально изоморфные $\mathbf{P}^2$, и, во-вторых, *линейчатые поверхности*. Это — поверхности X, которые могут быть так отображены на кривую C, что все слои этого отображения изоморфны проективной прямой $\mathbf{P}^1$. Таким образом, это — алгебраические семейства прямых.

Аналогом кривых рода 1 являются три типа поверхностей:

Первый тип — двумерные абелевы многообразия. Поверхности второго типа (они называются *поверхностями К3*) имеют то свойство, общее с абелевыми многообразиями, что их канонический класс равен 0. Однако в отличие от абелевых многообразий на них нет регулярных одномерных дифференциальных форм (согласно предложению из п. 2 на абелевых многообразиях существуют инвариантные, а значит, регулярные одномерные дифференциальные формы). Третий тип — *эллиптические поверхности*, т. е. семейства эллиптических кривых. Эти поверхности обладают таким отображением $f\colon X \to C$ на кривую C, что для всех $y \in C$, для которых $f^{-1}(y)$ — гладкая кривая (а таковы все y, кроме конечного числа), эта кривая имеет род 1.

Основная теорема заключается в том, что все поверхности необщего типа исчерпываются перечисленными пятью типами: рациональными, линейчатыми, абелевыми, $K3$ и эллиптическими.

Чтобы лучше разобраться в этих классах поверхностей, их удобно классифицировать по инварианту $\varkappa$ — максимальной размерности образа поверхности X при рациональном отображении, заданном классами дивизоров nK, $n = 1, 2, \ldots$ Если $l(nK) = 0$ для всех n, то такого отображения нет, и мы полагаем $\varkappa = -1$. Вот результат классификации. Поверхности общего типа — это те, для которых $\varkappa = 2$. Поверхности с $\varkappa = 1$ все являются эллиптическими. Точнее, это те эллиптические поверхности, для которых $nK \neq 0$ при $n \neq 0$. Порядок канонического класса эллиптической поверхности X в группе $\mathrm{Cl}(X)$ бесконечен или является делителем 12. Поверхности с $\varkappa = 0$ характеризуются условием $12K = 0$. Таким образом, это — эллиптические поверхности, для которых $12K = 0$, поверхности типа $K3$ и двумерные абелевы многообразия. Поверхности с $\varkappa = -1$ — это рациональные или линейчатые.

Для каждого из этих типов существует характеристика через инварианты, аналогично тому, как равенство $g = 0$ характеризует рациональные кривые. Мы приведем характеристику только двух первых типов. Для этого воспользуемся результатом задачи 7, согласно которому числа $l(mK)$ при $m \geqslant 0$ являются бирациональными инвариантами гладких проективных многообразий. Они называются кратными родами и обозначаются через P_m. В частности, $P_1 = h^n = \dim \Omega^n[X]$ при $n = \dim X$.

Критерий рациональности. *Поверхность X рациональна тогда и только тогда, когда $\Omega^1[X] = 0$ и $P_1 = P_2 = 0$.*

Из этого критерия сразу вытекает решение проблемы Люрота для поверхностей.

Критерий линейчатости. *Поверхность X линейчатая тогда и только тогда, когда $P_3 = P_4 = 0$.*

Обобщения результатов, изложенных в этом пункте, на многообразия размерности >2 неизвестны, однако в этом вопросе в последнее время имеется большое продвижение. См. об этом, например, обзоры [10, 31] по поводу связи с теорией минимальных моделей [19].

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что $df = 0$ для элемента $f \in \mathrm{k}(X)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{k}$ (если поле k имеет характеристику 0) или $f = g^p$ (если $\operatorname{char} k = p > 0$). Указание. Воспользоваться теоремой 1 и следующей леммой: если K/L — конечное сепарабельное расширение характеристики $p > 0$, $x \in K$ и его минимальный многочлен имеет вид $\sum a_i^p x^i$, $a_i \in L$, то $x = y^p$, $y \in K$.

2. Пусть X и Y — гладкие проективные кривые, $\varphi\colon X \to Y$ — такое регулярное отображение, что $\varphi(X) = Y$ и $x \in X$, $y \in Y$, $\varphi(x) = y$ и t — локальный параметр в точке y. Доказать, что число $e_x = \nu_x(f^*dt)$ не зависит от выбора локального параметра t и что $e_x > 0$ тогда и только тогда, когда x — точка ветвления отображения φ. Число e_x называется *кратностью ветвления* точки x.

3. Пусть в обозначениях задачи 2 $\varphi^*(y) = \sum l_i x_i$, где y — дивизор, состоящий из одной точки y. Предположим, что характеристика поля k равна или 0, или числу $p > l_i$. Доказать, что $e_{x_i} = l_i - 1$.

4. Пусть $Y = \mathbf{P}^1$ в обозначениях задач 2 и 3. Доказать, что $g(X) = \frac{1}{2}\sum_{x \in X} e_x - \deg\varphi + 1$. Обобщить это соотношение на случай произвольной кривой Y.

5. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ удовлетворяет условиям задачи 2. Доказать, что дифференциал $\omega \in \Omega^1(Y)$ регулярен тогда же, когда и дифференциал $\varphi^*\omega \in \Omega^1(X)$.

6. Обозначим через Ψ_m множество всех функций ψ от mn векторов x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, n-мерного пространства L, удовлетворяющих условиям: а) ψ линейна по любому аргументу, б) ψ кососимметрична как функция от $x_{i_0 j}$, $j = 1, \ldots, n$, при любом фиксированном i_0, в) ψ симметрична как функция от x_{ij_0}, $i = 1, \ldots, m$, при любом заданном j_0. Пусть характеристика поля k больше m. Доказать, что любая функция $\psi \in \Psi_m$ задается своими значениями $\psi_{y_1 \ldots y_n}$ от векторов $x_{ij} = y_j$ и что $\psi_{y_1 \ldots y_n} = d^m \psi_{e_1 \ldots e_n}$, где d — определитель из координат векторов $y_1 \ldots y_n$ в базисе $e_1 \ldots e_n$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \in L^*$. Функция ψ, для которой $\psi_{y_1 \ldots y_n} = (\det(\xi_i(y_j)))^m$, обозначается $(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n)^m$. Доказать, что $\dim \Psi_m = 1$, а $(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n)^m$ — его базис.

7. Обобщить построение регулярных и рациональных n-мерных дифференциальных форм на n-мерном многообразии, заменив всюду пространство $\Lambda^n \Theta_x^*$ соответствующим пространством Ψ_m.

Соответствующий объект называется *дифференциальной формой веса* m. Доказать, что в аналоге формулы (6) п. 3 § 5 надо J заменить на J^m. Доказать, что дифференциальная форма веса m обладает дивизором, все эти дивизоры образуют один класс, который совпадает с mK_X. Обобщить теорему 2.

8. Вычислить пространство регулярных дифференциальных форм веса 2 за гиперэллиптической кривой. Указание. Записать их в виде $\frac{f}{y^2}(dx)^2$.

9. Проверить соотношение $\deg K = 2g - 2$ для гиперэллиптических кривых и для плоских гладких кривых.

10. Доказать, что для гиперэллиптической кривой отношения регулярных дифференциальных форм порождают подполе поля $k(X)$, изоморфное полю рациональных функций. Исходя из этого, доказать, что гладкая плоская проективная кривая степени $m > 3$ не гиперэллиптична.

11. Доказать, что для гиперэллиптической кривой рациональное отображение, соответствующее каноническому классу, не является изоморфизмом.

12. Доказать, что если отображение, соответствующее каноническому классу кривой X, не является изоморфизмом, то X рациональна или гиперэллиптична. Указание. Если не выполнено одно из условий (2) п. 6, то теорема Римана — Роха дает $l(x) \geqslant 2$ или $l(x+y) \geqslant 2$.

13. Доказать, что гладкая гиперповерхность X 3-й степени в $\mathbf{P}^4$ унирациональна. Указание. Используя теорему 10 § 6 гл. I, показать, что X содержит прямую l. Используя задачу 8 к § 5, доказать, что существует такое открытое множество $U \subset X$, $U \cap l \neq \varnothing$, что касательное расслоение к U изоморфно $U \times \mathbf{A}^3$. Обозначим через $\mathbf{P}^2$ проективное пространство, состоящее из прямых, проходящих через начало координат в $\mathbf{A}^3$. Для точки $\xi = (u, \alpha)$, $u \in l \cap U$, $\alpha \in \mathbf{P}^2$, обозначим через $\varphi(\xi)$ точку пересечения прямой α, лежащей в $\Theta_{u,X}$, с X. Доказать, что φ определяет рациональное отображение $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \to X$.

14. Пусть o — точка алгебраической кривой X рода g. Доказать (используя теорему Римана — Роха), что любой дивизор D, $\deg D = 0$, эквивалентен дивизору вида $D_0 - go$, где $D_0 > 0$, $\deg D_0 = g$ (обобщение теоремы 1 § 3).

15. Пусть $X \subset \mathbf{P}^2$ — плоская гладкая неприводимая кривая с уравнением $F = 0$, $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \notin X$, $x \in X$. Кратность c_x, с которой x входит в дивизор формы $\sum_{i=0}^{2} \alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$, называется кратностью касания в x. Доказать, что $c_x = e_x$ — кратности ветвления точки x относительно отображения $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^1$ проектирования из точки α. Вывести отсюда, что число $c = \sum_{x \in X} c_x$ — число касательных, взятых с соответствующими кратностями, проходящих через α,— не зависит от α. Оно называется *классом* кривой. Доказать, что $c = n(n-1)$, $n = \deg X$.

16. Доказать, что если X — гладкая аффинная гиперповерхность, то $K_X = 0$.

Глава IV

ИНДЕКСЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

§ 1. Определение и основные свойства

1. Определение индекса пересечения. Теоремы о размерности пересечения многообразий, которые мы доказали в гл. I, часто дают возможность утверждать, что некоторые системы уравнений имеют решения. Однако они ничего не говорят о числе решений, если это число конечно. Разница такая же, как между теоремой о существовании корня многочлена и теоремой о том, что число корней многочлена равно его степени. Последняя теорема становится верной, только если считать каждый корень вместе с его кратностью. Аналогично, для того чтобы сформулировать общие теоремы о числе точек пересечения подмногообразий, мы должны приписать этим точкам некоторые кратности. Это и будет сделано в настоящем пункте.

Мы будем рассматривать пересечение подмногообразий коразмерности 1 на гладком многообразии X. Нас интересует случай, когда число точек пересечения конечно. Если $\dim X = n$, $C_1, \ldots, C_k$ — подмногообразия коразмерности 1, имеющие непустое пересечение, то по теореме о размерности пересечения $\dim(C_1 \cap \ldots \cap C_k) > 0$, если $k < n$. Поэтому нам естественно рассмотреть случай $k = n$. Теория, которая будет дальше применена, становится проще, если вместо подмногообразий коразмерности 1 рассматривать произвольные дивизоры. Таким образом, мы рассматриваем n дивизоров $D_1, \ldots, D_n$ на n-мерном многообразии X. Если $x \in X$, $x \in \cap \operatorname{Supp} D_i$ и $\dim_x \cap \operatorname{Supp} D_i = 0$, то говорят, что $D_1, \ldots, D_n$ *находятся в общем положении* в точке x. Это означает, что, в некоторой окрестности точки x, $\cap \operatorname{Supp} D_i$ состоит только из x. Если $D_1, \ldots, D_n$ находятся в общем положении во всех точках подмногообразия $\cap \operatorname{Supp} D_i$, то это подмногообразие состоит из конечного числа точек или пусто. Мы будем говорить тогда, что $D_1, \ldots, D_n$ находятся в общем положении.

Определим сначала индекс пересечения для эффективных дивизоров, находящихся в общем положении.

Соответствующий объект называется *дифференциальной формой веса* m. Доказать, что в аналоге формулы (6) п. 3 § 5 надо J заменить на J^m. Доказать, что дифференциальная форма веса m обладает дивизором, все эти дивизоры образуют один класс, который совпадает с mK_X. Обобщить теорему 2.

8. Вычислить пространство регулярных дифференциальных форм веса 2 за гиперэллиптической кривой. Указание. Записать их в виде $\frac{f}{y^2}(dx)^2$.

9. Проверить соотношение $\deg K = 2g - 2$ для гиперэллиптических кривых и для плоских гладких кривых.

10. Доказать, что для гиперэллиптической кривой отношения регулярных дифференциальных форм порождают подполе поля $k(X)$, изоморфное полю рациональных функций. Исходя из этого, доказать, что гладкая плоская проективная кривая степени $m > 3$ не гиперэллиптична.

11. Доказать, что для гиперэллиптической кривой рациональное отображение, соответствующее каноническому классу, не является изоморфизмом.

12. Доказать, что если отображение, соответствующее каноническому классу кривой X, не является изоморфизмом, то X рациональна или гиперэллиптична. Указание. Если не выполнено одно из условий (2) п. 6, то теорема Римана — Роха дает $l(x) \geqslant 2$ или $l(x+y) \geqslant 2$.

13. Доказать, что гладкая гиперповерхность X 3-й степени в $\mathbf{P}^4$ унирациональна. Указание. Используя теорему 10 § 6 гл. I, показать, что X содержит прямую l. Используя задачу 8 к § 5, доказать, что существует такое открытое множество $U \subset X$, $U \cap l \neq \varnothing$, что касательное расслоение к U изоморфно $U \times \mathbf{A}^3$. Обозначим через $\mathbf{P}^2$ проективное пространство, состоящее из прямых, проходящих через начало координат в $\mathbf{A}^3$. Для точки $\xi = (u, \alpha)$, $u \in l \cap U$, $\alpha \in \mathbf{P}^2$, обозначим через $\varphi(\xi)$ точку пересечения прямой α, лежащей в $\Theta_{u, X}$, с X. Доказать, что φ определяет рациональное отображение $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \to X$.

14. Пусть o — точка алгебраической кривой X рода g. Доказать (используя теорему Римана — Роха), что любой дивизор D, $\deg D = 0$, эквивалентен дивизору вида $D_0 - go$, где $D_0 > 0$, $\deg D_0 = g$ (обобщение теоремы 1 § 3).

15. Пусть $X \subset \mathbf{P}^2$ — плоская гладкая неприводимая кривая с уравнением $F = 0$, $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \notin X$, $x \in X$. Кратность c_x, с которой x входит в дивизор формы $\sum_{i=0}^{2} \alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$, называется кратностью касания в x. Доказать, что $c_x = e_x$ — кратности ветвления точки x относительно отображения $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^1$ проектирования из точки α. Вывести отсюда, что число $c = \sum_{x \in X} c_x$ — число касательных, взятых с соответствующими кратностями, проходящих через α,— не зависит от α. Оно называется *классом* кривой. Доказать, что $c = n(n-1)$, $n = \deg X$.

16. Доказать, что если X — гладкая аффинная гиперповерхность, то $K_X = 0$.

Глава IV

ИНДЕКСЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

§ 1. Определение и основные свойства

1. Определение индекса пересечения. Теоремы о размерности пересечения многообразий, которые мы доказали в гл. I, часто дают возможность утверждать, что некоторые системы уравнений имеют решения. Однако они ничего не говорят о числе решений, если это число конечно. Разница такая же, как между теоремой о существовании корня многочлена и теоремой о том, что число корней многочлена равно его степени. Последняя теорема становится верной, только если считать каждый корень вместе с его кратностью. Аналогично, для того чтобы сформулировать общие теоремы о числе точек пересечения подмногообразий, мы должны приписать этим точкам некоторые кратности. Это и будет сделано в настоящем пункте.

Мы будем рассматривать пересечение подмногообразий коразмерности 1 на гладком многообразии X. Нас интересует случай, когда число точек пересечения конечно. Если $\dim X = n$, $C_1, \ldots, C_k$ — подмногообразия коразмерности 1, имеющие непустое пересечение, то по теореме о размерности пересечения $\dim(C_1 \cap \ldots \cap C_k) > 0$, если $k < n$. Поэтому нам естественно рассмотреть случай $k = n$. Теория, которая будет дальше применена, становится проще, если вместо подмногообразий коразмерности 1 рассматривать произвольные дивизоры. Таким образом, мы рассматриваем n дивизоров $D_1, \ldots, D_n$ на n-мерном многообразии X. Если $x \in X$, $x \in \bigcap \operatorname{Supp} D_i$ и $\dim_x \bigcap \operatorname{Supp} D_i = 0$, то говорят, что $D_1, \ldots, D_n$ *находятся в общем положении* в точке x. Это означает, что, в некоторой окрестности точки x, $\bigcap \operatorname{Supp} D_i$ состоит только из x. Если $D_1, \ldots, D_n$ находятся в общем положении во всех точках подмногообразия $\bigcap \operatorname{Supp} D_i$, то это подмногообразие состоит из конечного числа точек или пусто. Мы будем говорить тогда, что $D_1, \ldots, D_n$ находятся в общем положении.

Определим сначала индекс пересечения для эффективных дивизоров, находящихся в общем положении.

Пусть дивизоры $D_1, \ldots, D_n$ эффективны, находятся в общем положении в точке x и имеют локальные уравнения $f_1, \ldots, f_n$ в некоторой окрестности этой точки. Тогда существует окрестность $U \ni x$, в которой $f_1, \ldots, f_n$ регулярны и не обращаются в нуль нигде, кроме точки x. Из теоремы Гильберта о корнях следует, что идеал, порожденный функциями $f_1, \ldots, f_n$ в локальном кольце $\mathcal{O}_x$ точки x, содержит некоторую степень максимального идеала $\mathfrak{m}_x$ этого кольца. Пусть

$$(f_1, \ldots, f_n) \supset \mathfrak{m}_x^k. \tag{1}$$

Рассмотрим факторпространство (над полем k) $\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_n)$. Размерность его над k конечна. Действительно, ввиду (1) для этого достаточно доказать, что $\dim_{\mathrm{k}} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^k < \infty$. Последнее сразу следует из теоремы о разложении в степенные ряды: $\dim_{\mathrm{k}} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^k$ совпадает с размерностью пространства многочленов степени $<k$ от n переменных.

Дальше размерность векторного пространства E над полем k мы будем обозначать через $l(E)$.

Определение 1. Если эффективные дивизоры $D_1, \ldots, D_n$ на n-мерном многообразии X находятся в общем положении в точке $x \in X$ и имеют локальные уравнения $f_1, \ldots, f_n$ в некоторой окрестности этой точки, то число

$$l(\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_n)) \tag{2}$$

называется *индексом* (или *кратностью*) пересечения $D_1, \ldots, D_n$ в этой точке и обозначается через $(D_1, \ldots \ldots, D_n)_x$.

Число (2) действительно зависит только от дивизоров $D_1, \ldots, D_n$, а не от выбора их локальных уравнений $f_1, \ldots, f_n$: если $f_1', \ldots, f_n'$ — другие локальные уравнения, то $f_i' = f_i g_i$, где $g_i, g_i^{-1} \in \mathcal{O}_x$, и поэтому $(f_1, \ldots, f_n) = (f_1', \ldots, f_n')$.

Пусть теперь дивизоры $D_1, \ldots, D_n$ не обязательно эффективны. Представим их в виде $D_i = D_i' - D_i''$, $D_i' \geqslant 0$, $D_i'' \geqslant 0$, причем дивизоры D_i' и D_i'' не имеют общих компонент. Такое представление единственно. Предположим, что $D_1, \ldots, D_n$ находятся в общем положении в точке x. Тогда для любой перестановки $i_1, \ldots, i_n$ и любого k дивизоры $D_{i_1}', \ldots, D_{i_k}', D_{i_{k+1}}'', \ldots, D_{i_n}''$ находятся в общем положении в точке x, так как $\mathrm{Supp}\, D_i = \mathrm{Supp}\, D_i' \cup \mathrm{Supp}\, D_i''$.

Определим теперь индекс пересечения $D_1, \ldots, D_n$ в точке x по аддитивности, т. е. положим

$$(D_1, \ldots, D_n)_x = \\ = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{n-k} (D_{i_1}', \ldots, D_{i_k}', D_{i_{k+1}}'', \ldots, D_{i_n}'')_x. \tag{3}$$

Определение 2. Если дивизоры $D_1, \ldots, D_n$ на n-мерном многообразии X находятся в общем положении, то число

$$\sum_{x \in \bigcap \mathrm{Supp}\, D_i} (D_1, \ldots, D_n)_x$$

называется их *индексом пересечения* и обозначается через $(D_1, \ldots, D_n)$.

Формально можно было бы распространить сумму на все точки $x \in X$, однако отличны от нуля только написанные выше члены.

Замечание. Индекс пересечения можно определить, и не требуя гладкости многообразия X, однако тогда надо ограничиться только локально главными дивизорами. При этом все приведенные определения сохраняют смысл.

Теперь мы приведем несколько примеров, цель которых — показать, что введенное определение кратности пересечения согласуется с геометрической интуицией.

Пример 1. Пусть $\dim X = 1$, t — локальный параметр в точке x, f — локальное уравнение дивизора D, $\nu_x(f) = \nu_x(D) = k$. Тогда $(D)_x = l(\mathcal{O}_x/(f)) = l(\mathcal{O}_x/(t^k)) = k$. Таким образом, в этом случае индекс $(D)_x$ равен кратности, с которой точка x входит в дивизор D.

В следующих примерах будем считать, что D_i — простые дивизоры, т. е. неприводимые подмногообразия коразмерности 1.

Пример 2. Если $x \in D_1 \cap \ldots \cap D_n$, то согласно определению $(D_1, \ldots, D_n)_x \geqslant 1$. Выясним, когда $(D_1, \ldots \ldots, D_n)_x = 1$.

Так как $f_i \in \mathfrak{m}_x$ и, значит, $(f_1, \ldots, f_n) \subset \mathfrak{m}_x$, а $l(\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x) = 1$, то условие $(D_1, \ldots, D_n)_x = 1$ равносильно тому, что $(f_1, \ldots, f_n) = \mathfrak{m}_x$. Иначе говоря, $f_1, \ldots, f_n$ должны образовывать систему локальных параметров. Мы видели в п. 1 § 2 гл. II, что это имеет место тогда и только тогда, когда подмногообразия $D_1, \ldots, D_n$ пересекаются в точке x трансверсально, т. е. точка x простая на всех D_i и $\bigcap \Theta_{x,D_i} = 0$.

Пример 3. Пусть $\dim X = 2$, точка x простая на кривых D_1 и D_2. Согласно примеру 2, $(D_1, D_2)_x > 1$ тогда и только тогда, когда прямые Θ_{x,D_1} и Θ_{x,D_2} совпадают. Пусть f_i $(i = 1, 2)$ — локальные уравнения кривых D_i, u и v — локальные параметры в точке x и $f_i \equiv \alpha_i u + \beta_i v \left(\mathfrak{m}_x^2\right)$ $(i = 1, 2)$. Тогда уравнение прямых Θ_{x,D_i} имеет вид $\alpha_i \xi + \beta_i \eta = 0$ $(i = 1, 2)$, где $\xi = d_x u$, $\eta = d_x v$ — координаты в $\Theta_{x,X}$. Поэтому $\Theta_{x,D_1} = \Theta_{x,D_2}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_2 u + \beta_2 v = \gamma(\alpha_1 u + \beta_1 v)$ при некотором $\gamma \in \mathrm{k}$, $\gamma \neq 0$, или, иначе говоря, $f_2 \equiv \gamma f_1 \left(\mathfrak{m}_x^2\right)$. Естественно поэтому назвать порядком касания кривых D_1 и D_2 в точке x такое число k, что существует обратимый элемент g, $g^{-1} \in \mathcal{O}_x$, для которого $f_2 \equiv g f_1 \left(\mathfrak{m}_x^{k+1}\right)$, и такого g не существует для большего значения показателя k. Мы докажем, что индекс пересечения $(D_1, D_2)_x$ на 1 больше порядка касания кривых D_1 и D_2 в x.

Для этого заметим, что так как x — простая точка на D_1, то мы можем считать, что f_1 — один из элементов системы локальных параметров в точке x. С другой стороны, $g^{-1} f_2$ является локальным уравнением кривой D_2. Поэтому можно предположить, что u, v — локальные параметры, локальное уравнение D_1 есть u, а D_2 есть f и $f \equiv u \left(\mathfrak{m}_x^{k+1}\right)$. Тогда $f \equiv u + \varphi(u, v) \left(\mathfrak{m}_x^{k+2}\right)$, где φ — форма степени $k+1$. При этом φ не делится на u, иначе D_1 и D_2 имели бы касание порядка $>k$. Поэтому

$$\varphi(0, v) = C v^{k+1}, \quad C \neq 0. \tag{4}$$

Согласно определению индекса пересечения

$$(D_1, D_2)_x = l(\mathcal{O}_x/(u, f)) = l(\mathcal{O}_x/(u)/(u, f)/(u)).$$

Очевидно, что $\mathcal{O}_x/(u) = \overline{\mathcal{O}}$ есть локальное кольцо точки x на D_1 и гомоморфизм $\mathcal{O}_x \to \overline{\mathcal{O}}$ есть ограничение функции на X на кривую D_1. Кроме того, $(u, f)/(u) = (\bar{f})$, где $\bar{f}$ — образ f в $\overline{\mathcal{O}}$. Так как в $\overline{\mathcal{O}}$ $\bar{f} \in \overline{\mathfrak{m}}_x^{k+1}$, $\bar{f} \equiv \bar{\varphi}\left(\overline{\mathfrak{m}}_x^{k+2}\right)$, а согласно (4) $\bar{\varphi} \notin \overline{\mathfrak{m}}_x^{k+2}$, то $\nu_x(\bar{f}) = k+1$ и $l(\overline{\mathcal{O}}/(\bar{f})) = k+1$. Таким образом, $(D_1, D_2)_x = k+1$.

Пример 4. Пусть опять $\dim X = 2$ и точка x особая на D. Это значит, что $f \in \mathfrak{m}_x^2$, где f — локальное уравнение D. Поэтому естественно называть *кратностью особой точки* наибольшее k, для которого $f \in \mathfrak{m}_x^k$. Мы докажем, что для любой кривой D', находящейся с D в общем положении в точке x,

$$(D, D')_x \geqslant k \tag{5}$$

и существуют такие кривые, что $(D, D')_x = k$.

Пусть f' — локальное уравнение кривой D'. Обозначим кольцо $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^k$ через $\overline{\mathcal{O}}$ и образ f' в $\overline{\mathcal{O}}$ через $\bar{f}$. Так как $f \in \mathfrak{m}_x^k$, то $(D, D')_x = l(\mathcal{O}_x/(f, f')) \geqslant l(\overline{\mathcal{O}}/(\bar{f}))$. Кольцо $\mathcal{O}$ изоморфно, согласно теореме о разложении в степенные ряды, кольцу $\mathrm{k}[u, v]/(u, v)^k$. Поэтому как векторное пространство оно изоморфно пространству многочленов от u и v степени $<k$ и имеет размерность $1 + 2 + \ldots \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Если $f' \in \mathfrak{m}_x^l$, $f' \notin \mathfrak{m}_x^{l+1}$, то элементам идеала $(\bar{f})$ соответствуют многочлены вида $f' \cdot g$, где g пробегает все многочлены степени $\leqslant k - l$. Поэтому $l((\bar{f})) \leqslant 1 + \ldots + (k - l) = \frac{(k+1-l)(k-l)}{2}$. Так как $f' \in \mathfrak{m}$, то $l \geqslant 1$, и поэтому $l(\overline{\mathcal{O}}/(\bar{f})) = l(\overline{\mathcal{O}}) - l((\bar{f})) \geqslant k$.

Докажем теперь, что равенство в (5) может достигаться.

Пусть $f \equiv \varphi(u, v) \left(\mathfrak{m}_x^{k+1}\right)$, где φ — форма степени k. Рассмотрим линейную форму от u и v, не делящую φ. За счет линейного преобразования u и v мы можем считать, что это u, т. е. что $\varphi(0, v) \neq 0$. Возьмем за D' кривую с локальным уравнением u. Тогда $(D, D')_x = l(\mathcal{O}_x/(u, f))$, а, как мы видели при разборе примера 3, это число равно k.

2. Аддитивность индекса пересечения. Теорема 1. *Если дивизоры $D_1, \ldots, D_{n-1}, D'_n$ и $D_1, \ldots, D_{n-1}, D''_n$ находятся в общем положении в точке x, то*

$$(D_1, \ldots, D_{n-1}, D'_n + D''_n)_x = \\ = (D_1, \ldots, D_{n-1}, D'_n)_x + (D_1, \ldots, D_{n-1}, D''_n)_x. \tag{1}$$

Доказательство. Очевидно, прежде всего, что теорему 1 достаточно доказать для эффективных дивизоров $D_1, \ldots, D_{n-1}, D'_n, D''_n$. Далее мы будем предполагать эти дивизоры эффективными.

Обозначим локальные уравнения дивизоров $D_1, \ldots \ldots, D_{n-1}, D'_n, D''_n$ через $f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n, f'_n$ кольцо

$\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_{n-1})$ через $\overline{\mathcal{O}}$, а образы f_n' и f_n'' в $\overline{\mathcal{O}}$ через f и g. Тогда

$$(D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n' + D_n'')_x = l(\overline{\mathcal{O}}/(f \cdot g)),$$
$$(D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n')_x = l(\overline{\mathcal{O}}/(f)),$$
$$(D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n'')_x = l(\overline{\mathcal{O}}/(g)).$$

Так как последовательность

$$0 \to (g)/(fg) \to \overline{\mathcal{O}}/(fg) \to \overline{\mathcal{O}}/(g) \to 0$$

точна, то

$$l(\overline{\mathcal{O}}/(f \cdot g)) = l(\overline{\mathcal{O}}/(g)) + l((g)/(f \cdot g)). \qquad (2)$$

Если элемент g не является делителем 0 в $\overline{\mathcal{O}}$, то умножение на g определяет изоморфизм $\overline{\mathcal{O}}/(f) \simeq (g)/(fg)$ и

$$l((g)/(f \cdot g)) = l(\overline{\mathcal{O}}/(f)). \qquad (3)$$

Поэтому, если мы докажем, что g не делитель 0 в $\overline{\mathcal{O}}$, то из (2) и (3) будет следовать (1).

Последовательность n элементов $f_1, \ldots, f_n$ локального кольца $\mathcal{O}_x$ простой точки n-мерного многообразия называется *простой последовательностью*, если f_i не является делителем 0 в $\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ для $i = 1, \ldots, n$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что теорема 1 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1. *Если дивизоры $D_1, \ldots, D_n$ находятся в общем положении в простой точке x, то их локальные уравнения $f_1, \ldots, f_n$ образуют простую последовательность.*

Доказательство леммы 1 в свою очередь требует простого вспомогательного предложения.

Лемма 2. *Свойство быть простой последовательностью сохраняется при перестановке элементов последовательности.*

Это общее свойство локальных колец. См. предложение 5 в п. 6 Приложения.

Доказательство леммы 1. Доказательство ведется индукцией по размерности n многообразия X. Из условия леммы и из теоремы о размерности пересечения следует, что $\dim_x(\operatorname{Supp}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Supp}(f_{n-1})) = 1$. Поэтому можно найти такую функцию u, что $u(x) = 0$, точка x проста на подмногообразии $V(u)$ и дивизоры $(f_1), \ldots, (f_{n-1}), (u)$ находятся в точке x в общем положении. Достаточно взять за u уравнение гиперплоскости, проходящей через x и не содержащей $\Theta_{x,X}$ и ни одной из компонент кривой $\operatorname{Supp}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Supp}(f_{n-1})$. Рассмотрим ограничения функций $f_1, \ldots, f_{n-1}$ на $V(u)$. Очевидно, они удовлетворяют всем условиям леммы 1, и поэтому, по индуктивному предположению, образуют на $V(u)$ простую последовательность. Так как локальное кольцо точки x на $V(u)$ имеет вид $\mathcal{O}_x/(u)$, то мы видим, что $u, f_1, \ldots, f_{n-1}$ — простая последовательность. Из леммы 2 следует, что тогда и последовательность $f_1, \ldots, f_{n-1}, u$ проста.

Чтобы доказать простоту последовательности $f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n$, нам остается только проверить, что f_n не делитель 0 в $\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_{n-1})$. Из условия на функции $f_1, \ldots, f_n$ следует, что в некоторой окрестности точки x уравнения $f_1 = \ldots = f_n = 0$ не имеют других решений, кроме точки x. Теорема Гильберта о корнях показывает поэтому, что $(f_1, \ldots, f_n) \supset \mathfrak{m}_x^k$ при некотором k. В частности, $u^k \in (f_1, \ldots, f_n)$, т. е. $u^k \equiv af_n((f_1, \ldots, f_{n-1}))$ при некотором $a \in \mathcal{O}_x$.

Если бы f_n было делителем 0 в $\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_{n-1})$, то отсюда следовало бы, что u^k, а значит, и u,— делитель 0 в этом кольце. Но это противоречит тому, что, как мы доказали, $f_1, \ldots, f_{n-1}, u$ — простая последовательность.

Лемма 1, а тем самым и теорема 1 доказаны.

3. Инвариантность относительно эквивалентности. Мы приступаем к доказательству основного свойства индексов пересечения, которое лежит в основе всех их применений.

Теорема 2. *Если многообразие X гладко и проективно и как дивизоры $D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n$, так и дивизоры $D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n'$ находятся в общем положении, а дивизоры D_n и D_n' эквивалентны, то*

$$(D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n) = (D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n'). \qquad (1)$$

По условию теоремы $D_n - D_n' = (f)$ и равенство (1) равносильно тому, что

$$(D_1, \ldots, D_{n-1}, (f)) = 0, \qquad (2)$$

когда $D_1, \ldots, D_{n-1}$ и (f) находятся в общем положении.

Представляя D_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, как разности эффективных дивизоров, мы видим, что достаточно доказать (2) для $D_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Это мы и будем дальше предполагать.

Доказательство теоремы 2 использует более общее понятие индекса пересечения, чем то, которым мы до сих пор пользовались. Именно, пусть задано $k \leqslant n$ эффективных дивизоров $D_1, \ldots, D_k$ на n-мерном гладком многообразии X. Мы будем говорить, что они находятся в общем положении, если $\dim \bigcap\limits_{i=1,\ldots,k} \operatorname{Supp} D_i = n-k$ или $\bigcap \operatorname{Supp} D_i$ пусто. Предположим, что это свойство выполнено и

$$\bigcap_{i=1,\ldots,k} \operatorname{Supp} D_i = \bigcup C_j, \tag{3}$$

где C_j — неприводимые многообразия размерности $n-k$.

В этих условиях компонентам C_j можно приписать кратности, называемые кратностями пересечения и совпадающие с индексами пересечения, если $k=n$, и, значит, C_j состоит из одной точки.

Определение кратностей пересечения использует одно общее понятие, которые мы сейчас введем.

Определение 1. Модуль M над кольцом A называется *модулем конечной длины*, если он обладает такой конечной последовательностью подмодулей

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n = 0, \quad M_i \neq M_{i+1}, \tag{4}$$

что все фактормодули M_i/M_{i+1} просты, т. е. не содержат подмодулей, отличных от нуля и всего модуля. Из теоремы Жордана — Гельдера следует, что все такие цепочки состоят из одного и того же числа модулей n, которое называется *длиной модуля* и обозначается через $l(M)$ или $l_A(M)$.

Если A — поле, то понятие длины превращается в размерность векторного пространства.

Если модуль имеет конечную длину, то это верно и для любого его подмодуля и фактормодуля.

Если модуль M обладает цепочкой подмодулей (4), в которой длины модулей M_i/M_{i+1} конечны, то и длина модуля M конечна и $l(M) = \sum l(M_i/M_{i+1})$. Определение кратности пересечения точно копирует определение индекса пересечения. Пусть C — одна из компонент C_j в разложении (3). Выберем точку $x \in C$ и локальные уравнения f_i дивизоров D_i в окрестности этой точки. Тогда $f_i \in \mathcal{O}_C$ и идеал $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_k) \subset \mathcal{O}_C$ не зависит ни от выбора локальных уравнений, ни от выбора точки x. Действительно, если $g_1, \ldots, g_k$ — другие локальные уравнения в окрестности другой точки, то и f_i и g_i — локальные уравнения дивизора D_i на целом открытом множестве, пересекающемся с C. Отсюда следует, что $f_i g_i^{-1} \in \mathcal{O}_C$ и $g_i f_i^{-1} \in \mathcal{O}_C$, а поэтому $(f_1, \ldots, f_k) = (g_1, \ldots, g_k)$.

Лемма 1. *Модуль $\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}$ имеет конечную длину.*

Действительно, так как C — неприводимая компонента подмногообразия, определенного уравнениями $f_1 = \ldots \ldots = f_k = 0$, то существует открытое аффинное подмножество $U \subset X$, пересекающее C, в котором эти уравнения определяют подмногообразие C. Тогда по теореме Гильберта о корнях $(f_1, \ldots, f_k) \supset \mathfrak{a}_C^r$ при некотором $r > 0$. Рассмотрим теперь локальное кольцо $A_\mathfrak{p}$, где $A = \mathrm{k}[U]$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_C$. Тогда $A_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_C$, $\varphi((f_1, \ldots, f_k)) = \mathfrak{a}$ и $\varphi(\mathfrak{a}_C) = \mathfrak{m}_C$ (здесь $\varphi\colon A \to A_\mathfrak{p}$ — естественный гомоморфизм; см. п. 1 § 1 гл. II). Поэтому в $\mathcal{O}_C$ будет $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}_C^r$.

Лемма следует теперь из общего свойства локальных колец: если $\mathfrak{a}$ — идеал нётерова локального кольца $\mathcal{O}$ и $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^r$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца $\mathcal{O}$ и $r > 0$, то $l_\mathcal{O}(\mathcal{O}/\mathfrak{a}) < \infty$. См. Приложение, п. 9, предложение 1.

Определение 2. Число $l_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})$ называется *кратностью, или индексом пересечения* заданных дивизоров $D_1, \ldots, D_k$ в компоненте C. Оно обозначается через $(D_1, \ldots, D_k)_C$.

Мы будем дальше рассматривать случай $k = n-1$, так что компоненты C_i пересечения $D_1 \cap \ldots \cap D_{n-1}$ будут кривыми. Обозначим $\mathcal{O}_x/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_{n-1})$, через $\overline{\mathcal{O}}$ — это, очевидно, локальное кольцо, максимальный идеал которого совпадает с образом $\overline{\mathfrak{m}}$ максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_x$ при каноническом гомоморфизме $\mathcal{O}_x \to \overline{\mathcal{O}}$.

Прежде всего нам надо выяснить, каковы простые идеалы кольца $\overline{\mathcal{O}}$. Обозначим через $\mathfrak{p}_i$ совокупность функций из $\mathcal{O}_x$, тождественно равных 0 на кривой C_i, а через $\overline{\mathfrak{p}}_i$ — образ идеала $\mathfrak{p}_i$ в $\overline{\mathcal{O}}$. Очевидно, что $\overline{\mathcal{O}}/\overline{\mathfrak{p}}_i = \mathcal{O}_x/\mathfrak{p}_i = \mathcal{O}_{x, C_i}$ есть локальное кольцо точки x на кривой C_i.

Лемма 2. *Идеалы $\overline{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{p}}_r$ и $\overline{\mathfrak{m}}$ исчерпывают все простые идеалы кольца $\overline{\mathcal{O}}$.*

Утверждение леммы равносильно тому, что $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ и $\mathfrak{m}_x$ — это все простые идеалы кольца $\mathcal{O}_x$, содержащие идеал $\mathfrak{a}$. Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_x$, $\mathfrak{p}$ — простой идеал. Рассмотрим аффинную окрестность U точки x, в которой $f_1, \ldots, f_{n-1}$ регулярны, и положим $A = \mathrm{k}[U]$, $\mathfrak{P} = A \cap \mathfrak{p}$. Очевидно, что $\mathfrak{P}$ — простой идеал. Обозначим через V подмногообразие, которое он определяет в U. Так как $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, то $V \subset C_1 \cup \ldots \cup C_r$, а так как $\mathfrak{P}$ прост, то V неприводимо. Поэтому V или совпадает с одним из C_i и тогда $\mathfrak{P} = A \cap \mathfrak{p}_i$, или же V является точкой $y \in U$ (вспомним, что C_i одномерны). В последнем случае, если $y \neq x$, в $\mathfrak{P}$, а значит, и в $\mathfrak{p}$ содержится функция, отличная от нуля в x. Так как $\mathcal{O}_x$ — локальное кольцо, то тогда $\mathfrak{p} = \mathcal{O}_x$ (в то время как само кольцо к числу своих простых идеалов не относится). Таким образом, единственная остающаяся возможность — это $\mathfrak{P} = A \cap \mathfrak{m}_x$. Так как $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot \mathcal{O}_x$, то отсюда следует сразу, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$, или $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_x$, как и утверждает лемма.

Очевидно, что идеалы $\overline{\mathfrak{p}}_i$ являются минимальными простыми идеалами кольца $\overline{\mathcal{O}}$. Локальное кольцо, в котором все простые идеалы, отличные от максимального, минимальны, называется *одномерным*. Таким образом, $\overline{\mathcal{O}}$ — одномерное локальное кольцо. Если $f \in \overline{\mathcal{O}}$ — элемент одномерного локального кольца, не являющийся в нем делителем 0, то длина $l(\overline{\mathcal{O}}/(f))$ может быть выражена через инварианты, связанные с локализациями по минимальным простым идеалам:

$$l_{\overline{\mathcal{O}}}(\overline{\mathcal{O}}/(f)) = \sum_{\mathfrak{p}_i} l_{\overline{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}_i}}\left(\overline{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}_i}\right) l_{\overline{\mathcal{O}}}(\overline{\mathcal{O}}/(\mathfrak{p}_i + f\overline{\mathcal{O}})). \qquad (6)$$

Это общее свойство одномерных локальных колец. Его доказательство см. в Приложении, п. 9, предложение 2.

В нашем случае $f = f_n$, $\overline{\mathcal{O}}/(f) = \mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_n)$ и $l(\overline{\mathcal{O}}/(f)) = (D_1, \ldots, D_n)_x$. С другой стороны, легко проверить, что $\overline{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}_i} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}/\varphi_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})$, так что $l_{\overline{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}_i}}\left(\overline{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}_i}\right) = l(\mathcal{O}_{C_i}/\mathfrak{a}) = (D_1, \ldots, D_{n-1})_{C_i}$. Наконец, $\overline{\mathcal{O}}/(\mathfrak{p}_i + f\overline{\mathcal{O}}) = (\overline{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_i)/(f) = \mathcal{O}_{x,C_i}/(f)$. Поэтому $l_{\overline{\mathcal{O}}}(\overline{\mathcal{O}}/(\mathfrak{p}_i + f\overline{\mathcal{O}})) = l(\mathcal{O}_{x,C_i}/(f_n)) = \left(\rho_{C_i}(D_n)\right)_x$, где $\rho_{C_i}(D_n)$ — ограничение дивизора D_n на кривую C_i (см. п. 2 § 1 гл. III). Таким образом, формула (6) переписывается в виде

$$(D_1, \ldots, D_n)_x = \sum_{i=1}^{r} (D_1, \ldots, D_{n-1})_{C_i} \left(\rho_{C_i}(D_n)\right)_x. \qquad (7)$$

Индекс $(D)_x$, где D — локально главный дивизор на кривой C, дается формулой

$$(D)_x = \sum_{\nu(y)=x} (\nu^*(D))_y, \qquad (8)$$

где $\nu\colon C^\nu \to C$ — нормализация.

Действительно, пусть f — локальное уравнение дивизора D в окрестности точки $x \in C$. Тогда формула (8) перепишется так:

$$l(\mathcal{O}_x/(f)) = \sum_{\nu(y)=x} l(\mathcal{O}_y/(f)), \qquad (9)$$

где $\mathcal{O}_x$ и $\mathcal{O}_y$ — локальные кольца точек $x \in C$ и $y \in C^\nu$.

Положим $\widetilde{\mathcal{O}} = \bigcap_{\nu(y)=x} \mathcal{O}_y$. Так как $\widetilde{\mathcal{O}}$ содержится в поле частных кольца $\mathcal{O}_x$, то для любого $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$ существует такое $v \in \mathcal{O}_x$, что $u \cdot v \in \mathcal{O}_x$. Согласно лемме в п. 1 § 2 гл. III $\widetilde{\mathcal{O}}$ — модуль конечного типа над $\mathcal{O}_x$. Пусть $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_x u_1 + \ldots + \mathcal{O}_x u_r$, $v_i \in \mathcal{O}_x$, $u_i v_i \in \mathcal{O}_x$ и $v = v_1 \ldots v_r$. Тогда $v\widetilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_x$. Отсюда, в частности, следует, что $l(\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_x) \leqslant l(\widetilde{\mathcal{O}}/v\widetilde{\mathcal{O}})$, а по теореме 2 § 2 гл. III $l(\widetilde{\mathcal{O}}/v\widetilde{\mathcal{O}}) = \sum_{\nu(y)=x} \nu_y(v) < \infty$ и, значит, $l(\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_x) < \infty$.

Из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\mathcal{O}} & \\
f\widetilde{\mathcal{O}} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \mathcal{O}_x \arrow[ul, phantom, sloped, "\subset"] \\
 & f\mathcal{O}_x \arrow[ul, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

следует, что $l(\widetilde{\mathcal{O}}/(f)) + l(f\widetilde{\mathcal{O}}/f\mathcal{O}_x) = l(\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_x) + l(\mathcal{O}_x/(f))$. Так как в $\widetilde{\mathcal{O}}$ нет делителей 0, то $\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_x \simeq f\widetilde{\mathcal{O}}/f\mathcal{O}_x$ и $l(\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_x) = l(f\widetilde{\mathcal{O}}/f\mathcal{O}_x)$, откуда $l(\mathcal{O}_x/(f)) = l(\widetilde{\mathcal{O}}/(f))$. По теореме 2 § 2 гл. III $l(\widetilde{\mathcal{O}}/(f)) = \sum_{\nu(y)=x} \nu_y(f) = \sum_{\nu(y)=x} l(\mathcal{O}_y/(f))$. Этим доказаны (9) и (8).

Комбинация формул (7) и (8) почти сразу дает доказательство теоремы 2.

Запишем индекс пересечения в виде

$$(D_1, \ldots, D_n) = \sum_{x \in X} (D_1, \ldots, D_n)_x.$$

Согласно (7)

$$(D_1, \ldots, D_n) = \sum_{j=1}^{r} (D_1, \ldots, D_{n-1})_{C_j} \sum_{x \in C_j} (\rho_{C_j}(D_n))_x,$$

а согласно (8)

$$\sum_x (\rho_{C_j}(D_n))_x = \sum_{y \in \overset{\vee}{C}_j} ((\nu^* \rho_{C_j})(D_n))_y.$$

Если дивизор D_n — главный, $D_n = (f)$, то и дивизор $(\nu^*\rho_{C_j})(D_n)$ — тоже главный: $(\nu^*\rho_{C_j})(D_n) = (g)$ и $((g))_y = \nu_y(g)$.

Ввиду проективности многообразия X кривые C_j проективны, а ввиду теоремы 7 § 5 гл. II это верно и для $\overset{\vee}{C}_j$. Согласно следствию теоремы 1 § 2 гл. III $\sum_{y \in \overset{\vee}{C}_j} \nu_y(g) = \deg((g)) = 0$, откуда и следует, что $(D_1, \ldots, D_{n-1}, (f)) = 0$.

4. Общее определение индекса пересечения. Теорема 2 и теорема о сдвиге носителя дивизора с точки (теорема 1 § 1 гл. III) дают возможность определить индекс пересечения любых n дивизоров на n-мерном гладком проективном многообразии, без каких-либо ограничений типа общего положения.

Для этого нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Для любых n дивизоров $D_1, \ldots, D_n$ на n-мерном многообразии X найдутся такие n дивизоров $D'_1, \ldots, D'_n$, что $D_i \sim D'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $D'_1, \ldots, D'_n$ находятся в общем положении.*

Пусть мы нашли такие дивизоры $D'_1, \ldots, D'_k$, что $D_i \sim D'_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $\dim(\operatorname{Supp} D'_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Supp} D'_k) = n - k$ или это пересечение пусто. Предположим, что

$$\operatorname{Supp} D'_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Supp} D'_k = C_1 \cup \ldots \cup C_r$$

— разложение на неприводимые компоненты. Выберем на каждой из компонент C_j по точке x_j и найдем, пользуясь теоремой о сдвиге носителя дивизора, такой дивизор D'_{k+1}, что $D'_{k+1} \sim D_{k+1}$, $\operatorname{Supp} D'_{k+1} \not\ni x_j$ $(j = 1, \ldots, r)$. Тогда $\operatorname{Supp} D'_{k+1}$ тем более не содержит ни одной из компонент C_j и по теореме о размерности пересечения

$$\dim(\operatorname{Supp} D'_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Supp} D'_{k+1}) = n - k - 1,$$

если это пересечение не пусто. Когда мы таким образом дойдем до $k = n$, мы получим нужную систему дивизоров.

Лемма 2. *Если дивизоры $D_1, \ldots, D_n$ и дивизоры $D'_1, \ldots, D'_n$ находятся в общем положении и $D_i \sim D'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то*

$$(D_1, \ldots, D_n) = (D'_1, \ldots, D'_n). \tag{1}$$

Если $D_1 = D'_1, \ldots, D_{n-1} = D'_{n-1}$, то это — утверждение теоремы 2. Докажем, что равенство (1) верно, если $D_1 = D'_1, \ldots, D_{n-k} = D'_{n-k}$. При $k = n$ мы получим наше утверждение.

Воспользуемся индукцией по k. Предположим, что утверждение верно для меньших значений k. Так как обе системы дивизоров $D_1, \ldots, D_n$ и $D'_1, \ldots, D'_n$ находятся в общем положении, то $\dim Y = \dim Y' = 1$, где $Y = \bigcap_{i \ne n-k+1} \operatorname{Supp} D_i$, $Y' = \bigcap_{i \ne n-k+1} \operatorname{Supp} D'_i$. Выберем на каждой компоненте каждого из многообразий Y, Y' по точке и найдем, согласно теореме о сдвиге носителя дивизора, такой дивизор D''_{n-k+1}, что $\operatorname{Supp} D''_{n-k+1}$ не проходит ни через одну из этих точек и $D''_{n-k+1} \sim D_{n-k+1}$. Тогда обе системы $D_1, \ldots, D_{n-k}, D'_{n-k+1}, \ldots, D_n$ и $D'_1, \ldots, D'_{n-k}, D''_{n-k+1}, \ldots, D'_n$ находятся в общем положении.

Согласно теореме 2

$$\begin{aligned} (D_1, \ldots, D_n) &= (D_1, \ldots, D_{n-k}, D''_{n-k+1}, \ldots, D_n), \\ (D'_1, \ldots, D'_n) &= (D'_1, \ldots, D'_{n-k}, D''_{n-k+1}, \ldots, D'_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Правые части в (2) равны друг другу по индуктивному предположению (в них уже $n - k + 1$ равных дивизоров), что и доказывает лемму 2.

Пользуясь леммами 1 и 2, мы можем определить *индекс пересечения* $(D_1, \ldots, D_n)$ для любых n дивизоров на гладком n-мерном многообразии, не требуя, чтобы они находились в общем положении. Для этого найдем любые дивизоры $D'_1, \ldots, D'_n$, удовлетворяющие условиям леммы 1, так что индекс $(D'_1, \ldots, D'_n)$ определен, и определим $(D_1, \ldots, D_n)$ равенством $(D_1, \ldots, D_n) = (D'_1, \ldots, D'_n)$.

Нужно доказать, что это определение не зависит от выбора вспомогательных дивизоров $D'_1, \ldots, D'_n$, но именно это и гарантирует лемма 2.

Например, теперь мы можем говорить об индексе пересечения (C, C) для кривой C на поверхности X. Это число обозначается также (C^2). Приведем некоторые примеры его вычисления.

Пример 1. $X = \mathbf{P}^2$, C — прямая линия. По определению $(C^2) = (C', C'')$, где $C' \sim C'' \sim C$, а C' и C'' находятся в общем положении. Мы можем взять, например, за C' и C'' две различные прямые. Они пересекаются в единственной точке x и $(C', C'') = (C', C'')_x = 1$, так как они в этой точке трансверсальны. Поэтому $(C^2) = 1$.

Пример 2. Пусть X — n-мерное гладкое проективное многообразие, $X \subset \mathbf{P}^N$. Обозначим через E сечение X гиперплоскостью в $\mathbf{P}^N$. Очевидно, $E \in \mathrm{Div}(X)$. Наша цель — дать интерпретацию числа (E^n) (мы видели, что все гиперплоскости определяют эквивалентные дивизоры и, значит, это число не зависит от выбора гиперплоскости E).

По определению $(E^n) = (E^{(1)}, \ldots, E^{(n)})$, где $E^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — гиперплоские сечения, находящиеся в общем положении: согласно п. 2 § 6 гл. I такие всегда существуют. Точки $x_i \in E^{(1)} \cap \ldots \cap E^{(n)}$ — это точки пересечения X с $(N-n)$-мерным линейным подпространством $\mathscr{L}$, находящимся с X в общем положении. Так как $(E^{(1)}, \ldots, E^{(n)}) = \sum\limits_{x_i \in X \cap \mathscr{L}} (E^{(1)}, \ldots, E^{(n)})_{x_i}$ и $(E^{(1)}, \ldots \ldots, E^{(n)})_{x_i} > 0$, то (E^n) не меньше числа точек в $X \cap \mathscr{L}$. Если же $\mathscr{L}$ трансверсально X во всех их точках пересечения, то $(E^{(1)}, \ldots, E^{(n)})_{x_i} = 1$ и (E^n) равно числу точек в $X \cap \mathscr{L}$. Мы сейчас проверим, что такие подпространства $\mathscr{L}$ существуют, что даст нам интерпретацию числа (E^n) — это максимум чисел точек пересечения X с линейными подпространствами дополнительной размерности, находящимися с X в общем положении. Это число называется *степенью* многообразия X и обозначается через $\deg X$. Для случая гиперповерхности см. пример 1 п. 1 § 2.

Существование нужных подпространств $\mathscr{L}$ устанавливается обычным способом подсчета размерности. Обозначим через G грассманово многообразие линейных подпространств $\mathscr{L} \subset \mathbf{P}^N$, $\dim \mathscr{L} = N - n$. Это $G(N-n+1, V)$, если $\mathbf{P}^N = \mathbf{P}(V)$, т. е. $\dim V = n+1$. В произведении $X \times G$ рассмотрим подмногообразие Γ, состоящее из таких пар $(x, \mathscr{L})$, что подпространство $\mathscr{L}$ не находится в общем положении с $\Theta_{x,X}$. Очевидно, что это замкнутое подмножество (например, можно записать условие необщего положения как равенство 0 произведения разложимых поливекторов, соответствующих подпространствам). При отображении $\Gamma \to X$ слой состоит из подпространств $\mathscr{L} \in G(N-n, \Theta_{x,\mathbf{P}^N})$, находящихся с $\Theta_{x,X}$ в необщем положении. Его размерность не больше $\dim G(N-n, \Theta_{x,\mathbf{P}^N}) - 1 = (N-n)n - 1$. Поэтому $\dim \Gamma \leqslant (N-n)n - 1 + n$. Тем более этого же числа не превосходит размерность проекции Γ в G. Но $\dim G = (N-n+1)n$ и, значит, в G есть точки, не принадлежащие проекции Γ.

Пример 3. Предположим, что на гладкой поверхности $X \subset \mathbf{P}^3$ лежит прямая L, и вычислим (L^2).

Проведем через L плоскость, не касающуюся X хотя бы в одной точке $x \in L$, и обозначим через E соответствующее плоское сечение. Тогда L содержится в E как компонента кратности 1: $E = L + C$, $C = \sum k_i C_i$, $\sum k_i \deg C_i = m - 1$.

Вычислим сначала (C^2). Для этого заметим, что в точках пересечения L и C кривая E имеет особую точку, а это значит, что высекающая ее плоскость совпадает с касательной плоскостью к X в этой точке. Рассмотрим другую плоскость, проходящую через L, но отличную от касательных плоскостей к X в точках $L \cap C$. Эта плоскость определит дивизор $E' = L + C'$, и точки $L \cap C$ и $L \cap C'$ все различны. Это значит, что $C \cap C' = \varnothing$ и $(C^2) = (C, C') = 0$. Мы получили равенства

$$m = (E^2) = (E, L + C) = (E, L) + (E, C) = 1 + (E, C),$$
$$(E, C) = m - 1,$$
$$m - 1 = (E, C) = (L, C) + (C^2) = (L, C),$$
$$1 = (E, L) = (L^2) + (L, C) = (L^2) + m - 1,$$
$$(L^2) = 2 - m.$$

Заметим, что $(L^2) < 0$ при $m > 2$. Прямые действительно могут лежать на поверхности произвольной степени, например прямая $x_0 = x_1$, $x_2 = x_3$ на поверхности $x_0^m - x_1^m + x_2^m - x_3^m = 0$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть X — поверхность, x — ее простая точка, u и v — локальные параметры в x, f — локальное уравнение кривой C в окрестности x. Если $f = (au + bv)(cu + dv) + g$, $g \in \mathfrak{m}_x^3$, и линейные формы $au + bv$ и $cu + dv$ непропорциональны, то x называется *двойной точкой* кривой C *с разделенными касательными*, а прямые в Θ_x с уравнениями $au + bv = 0$ и $cu + dv = 0$ — *касательными* в x. Пусть в этих предположениях C' — гладкая кривая на X, проходящая через точку x. Доказать, что $(C, C')_x > 2$ тогда и только тогда, когда $\Theta_{x,C'}$ совпадает с одной из касательных к C в точке x.

2. Пусть $C = V(F)$, $D = V(G)$ — две плоские кривые в $\mathbf{A}^2$, а x — простая точка на каждой из них. Пусть f — ограничение многочлена F на кривую D, $\nu_x(f)$ — порядок нуля этой функции в точке x на кривой D. Доказать, что это число не изменится, если поменять местами F и C.

3. Пусть Y — гладкое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 n-мерного гладкого многообразия X. Доказать, что для дивизоров $D_1, \ldots, D_{n-1}$, находящихся в общем положении с Y в точке x, $(D_1, \ldots, D_{n-1}, Y)_x = (\rho_Y(D_1), \ldots, \rho_Y(D_{n-1}))_x$, второй индекс пересечения вычисляется на Y.

4. Найти степень поверхности $v_m(\mathbf{P}^2)$ (v_m — отображение Веронезе).

5. Пусть X — гладкая проективная поверхность, содержащаяся в пространстве $\mathbf{P}^n$, L — проективное подпространство пространства $\mathbf{P}^n$ размерности $n - 2$. Предположим, что L и X пересекаются по конечному числу точек, причем в k из этих точек касательная плоскость к X пересекается с L по прямой. Доказать, что число точек пересечения X и L не больше $\deg X - k$.

6. То же, что и в задаче 5, но размерность L есть $n - m$, $m \geqslant 2$. Доказать, что число точек пересечения X и L не больше $\deg X - k - m + 2$. Указание. Провести через L удобное линейное подпространство, удовлетворяющее условиям задачи 5.

7. Доказать, что если эффективные дивизоры $D_1, \ldots, D_{n-1}$ на n-мерном многообразии находятся в общем положении и C — неприводимая компонента пересечения их носителей, то $(D_1, \ldots, D_{n-1})_C = \min(D_1, \ldots, D_{n-1}, D)_x$, где минимум берется по всем точкам $x \in C$ и всем эффективным дивизорам D, для которых $\operatorname{Supp} D \ni x$.

8. Вычислить $(D_1, D_2)_C$, где D_1 и D_2 в $\mathbf{A}^3$ заданы уравнениями $x = 0$ и $x^2 + y^2 + xz = 0$, а C — прямая $x = 0$, $y = 0$.

§ 2. Приложения индексов пересечения

1. Теорема Безу в проективном пространстве и произведении проективных пространств. Теоремы 1 и 2 § 1 дают возможность вычислить индексы пересечения любых дивизоров на многообразии X, если нам достаточно хорошо известна группа $\mathrm{Cl}(X)$. Покажем это на двух примерах.

Пример 1. $X = \mathbf{P}^n$. Мы знаем, что $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbf{Z}$ и за образующую этой группы можно взять дивизор E гиперплоскости. Любой эффективный дивизор D является дивизором формы F, и если $\deg F = m$, то $D \sim mE$. Отсюда следует, что если

$$D_i \sim m_i E \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то

$$(D_1, \ldots, D_n) = m_1 \ldots m_n (E^n) = m_1 \ldots m_n, \qquad (1)$$

так как, очевидно, $(E^n) = 1$.

Если дивизоры D_i эффективны, т. е. соответствуют формам F_i степени m_i и находятся в общем положении, то точки множества $\bigcap \operatorname{Supp} D_i$ совпадают с ненулевыми решениями системы уравнений

$$\begin{gathered} F_1(x_0 : \ldots : x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_0 : \ldots : x_n) = 0. \end{gathered}$$

Для такой точки (или решения) x индекс $(D_1, \ldots, D_n)_x$ естественно называть кратностью решения. Тогда равенство (1) показывает, что число решений системы n однородных уравнений с $n + 1$ неизвестными или бесконечно, или равно произведению степеней уравнений, если решения считаются с их кратностью. При этом рассматриваются только ненулевые решения, а пропорциональные считаются за одно. Этот результат называется *теоремой Безу* в проективном пространстве $\mathbf{P}^n$.

В частности, если $D_2, \ldots, D_n$ — гиперплоскости, то мы видим, что $(D, E^{n-1}) = \deg F$, где $F = 0$ — уравнение D. Если гиперповерхность D — гладкая, то индекс пересечения (D, E^{n-1}) в $\mathbf{P}^n$ по определению совпадает с индексом пересечения (E^{n-1}) на D. Поэтому $\deg F = \deg D$ в смысле определения в примере 2 п. 5 § 1.

Пример 2. $X = \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$. В этом случае $\mathrm{Cl}(X) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Любой эффективный дивизор D определяется многочленом F, однородным отдельно по переменным $x_0, \ldots, x_n$ (координатам в $\mathbf{P}^n$) и $y_0, \ldots, y_m$ (координатам в $\mathbf{P}^m$). Если F имеет степени однородности k и l, то $D \to (k, l)$ определяет изоморфизм $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. В частности, за образующие $\mathrm{Cl}(X)$ можно взять дивизор E, определяемый линейными формами от x_i, и дивизор F, определяемый линейными формами от y_i. Тогда $D \sim kE + lF$.

Пусть $D_i \sim k_iE + l_iF$ $(i = 1, \ldots, n+m)$. Тогда

$$(D_1, \ldots, D_{n+m}) = \sum k_{i_1} \ldots k_{i_r} l_{j_1} \ldots l_{j_s} (\underbrace{E, \ldots, E}_{r}, \underbrace{F, \ldots, F}_{s}),$$

где суммирование распространено на все такие перестановки $(i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s)$ чисел 1, 2, ..., $n+m$, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$; $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$. Вычислим индекс пересечения

$$(\underbrace{E, \ldots, E}_{r}, \underbrace{F, \ldots, F}_{s}). \tag{2}$$

Если $r > n$, то мы можем найти r линейных форм $E_1, \ldots, E_r$, не имеющих общих нулей, и поэтому

$$(\underbrace{E, \ldots, E}_{r}, \underbrace{F, \ldots, F}_{s}) = (E_1, \ldots, E_r, \underbrace{F, \ldots, F}_{s}) = 0.$$

Аналогично обстоит дело, если $s > m$. Так как $r + s = n + m$, то индекс (2) может быть отличен от нуля только при $r = n$, $s = m$. В этом случае мы можем взять за $E_1, \ldots, E_n$, $F_1, \ldots, F_m$ дивизоры, определенные формами $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$. У этих дивизоров есть единственная общая точка $(1: 0: \ldots :0;\ 1: 0: \ldots :0)$. Они пересекаются в ней трансверсально, как легко проверить, перейдя к открытому множеству $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, которое изоморфно аффинному пространству $\mathbf{A}^{n+m}$. Таким образом,

$$(k_1E + l_1F, \ldots, k_{n+m}E + l_{n+m}F) = \sum k_{i_1} \ldots k_{i_n} l_{j_1} \ldots l_{j_m}, \tag{3}$$

где сумма распространена на все перестановки $(i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_m)$ чисел 1, 2, ..., $n+m$, в которых $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$. Это утверждение называется *теоремой Безу* в многообразии $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$.

Общей чертой разобранных примеров является то, что в них группа $\mathrm{Cl}(X)$ имела конечное число образующих. Естественно спросить, не верно ли это для любого проективного гладкого многообразия X. Это не так, и противоречащий пример дает плоская кубическая кривая, у которой $\mathrm{Cl}(X) \supset \mathrm{Cl}^0(X)$, $\mathrm{Cl}(X)/\mathrm{Cl}^0(X) \simeq \mathbf{Z}$, а элементы группы $\mathrm{Cl}^0(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками кривой X. Поэтому, например, если k — поле комплексных чисел, то группа $\mathrm{Cl}^0(X)$ даже несчетна.

Однако эта мощная подгруппа $\mathrm{Cl}^0(X)$ как раз не оказывает влияния на индекс пересечения $(D) = \deg D$ — она состоит из дивизоров степени 0. Аналогичным образом дело обстоит и в случае произвольного проективного гладкого многообразия X. Именно, можно доказать, что если дивизор D алгебраически эквивалентен 0 (определение см. в п. 4 § 4 гл. III), то $(D_1, \ldots, D_{n-1}, D) = 0$ для любых дивизоров $D_1, \ldots, D_{n-1}$. Таким образом, индексы пересечения зависят только от элементов группы $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^a(X)$. Про эту же группу теорема D п. 4 § 4 гл. III утверждает, что она всегда имеет конечное число образующих. Очевидно, что если $E_1, \ldots, E_r$ — образующие этой группы, то для того, чтобы знать любые индексы пересечения дивизоров на X, достаточно знать конечное число чисел $(E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})$, аналогично тому, как мы это видели в примерах 1 и 2. Иными словами, на X имеет место аналог теоремы Безу.

2. Многообразие над полем действительных чисел. Различные варианты теоремы Безу, доказанные в п. 1, имеют некоторые красивые применения к алгебраической геометрии над полем вещественных чисел.

Вернемся к примеру 1 п. 1 и предположим, что уравнения $F_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеют вещественные коэффициенты, а нас интересуют вещественные решения. Если $\deg F_i = m_i$ и дивизоры D_i находятся в общем положении, то, как было доказано в п. 1, $(D_1, \ldots, D_n) = m_1 \ldots m_n$. Согласно определению $(D_1, \ldots, D_n) = \sum (D_1, \ldots, D_n)_x$, где сумма распространена на решения x системы $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$. При этом, конечно, мы должны рассматривать как вещественные, так и комплексные решения. Однако, так как многочлены F_i имеют вещественные коэффициенты, то вместе с любым комплексным решением x система имеет и комплексно сопряженное решение $\bar{x}$. Из определения индекса пересечения сразу же следует, что $(D_1, \ldots, D_n)_x = (D_1, \ldots, D_n)_{\bar{x}}$, и поэтому $(D_1, \ldots, D_n) \equiv \sum (D_1, \ldots, D_n)_y \pmod 2$, где теперь сумма распространена только на вещественные решения. В частности, если $(D_1, \ldots, D_n)$ нечетно (а это равносильно тому, что все $m_i = \deg F_i$ нечетны), то мы видим, что существует хотя бы одно вещественное решение. Это утверждение доказано в предположении, что дивизоры D_i находятся в общем положении. Однако следующее простое соображение дает возможность избавиться от этого ограничения.

Дело в том, что теорема о сдвиге носителя дивизора может быть в нашем случае доказана совсем просто и в более явной форме. Именно, мы можем взять линейную форму l, отличную от нуля во всех точках $x_1, \ldots, x_r$, с которых мы хотим сдвинуть носитель дивизора. Если дивизор D определяется формой F степени m, то дивизор D', определяемый формой $F_\varepsilon = F + \varepsilon l^m$, будет удовлетворять всем условиям теоремы, если $F(x_j) + \varepsilon l(x_j)^m \neq 0$ $(j = 1, \ldots, r)$. Этим условиям можно удовлетворить при сколь угодно малых значениях ε.

Теперь покажем, как избавиться от ограничения об общем положении в доказанном выше утверждении о существовании вещественного решения системы уравнений нечетных степеней. Пусть

$$F_1 = \ldots = F_n = 0 \tag{1}$$

— любая такая система. Согласно сказанному выше можно найти сколь угодно малые значения ε, для которых дивизоры, определенные формами $F_{i,\varepsilon} = F_i + \varepsilon l_i^{m_i}$, находятся в общем положении.

Согласно уже доказанному система $F_{1,\varepsilon} = 0, \ldots, F_{n,\varepsilon} = 0$ имеет вещественное решение x_ε. Ввиду компактности проективного пространства мы можем найти такую последовательность чисел $\varepsilon_m \to 0$, что точки x_{ε_m} сходится в точке $x \in \mathbf{P}^n$. Так как при этом $F_{j,\varepsilon_m} \to F_j$ то x является решением системы (1).

Сформулируем то, что мы доказали.

Теорема 1. *Система n однородных вещественных уравнений от $n+1$ неизвестных имеет ненулевое вещественное решение, если степени всех уравнений нечетны.*

Совершенно аналогичные рассуждения применимы к многообразию $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ (см. пример 2 п. 1). Мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Система вещественных уравнений*

$$F_i(x_0 : \ldots : x_n;\ y_0 : \ldots : y_m) = 0, \quad i = 1, \ldots, n+m,$$

имеет ненулевое вещественное решение, если число $\sum k_{i_1} \ldots k_{i_n} l_{j_1} \ldots l_{j_m}$ нечетно.

Здесь k_i и l_i обозначают степени однородности многочлена F_i по первой и второй системе переменных, а решение называется нулевым, если $x_0 = \ldots = x_n = 0$ или $y_0 = \ldots = y_m = 0$.

Теорема 2 имеет интересные применения в алгебре. Одно из них относится к вопросу об алгебрах с делением над полем действительных чисел $\mathbf{R}$. Если ранг такой алгебры равен n, то она имеет базис $e_1, \ldots, e_n$ и задается таблицей умножения

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Мы не предполагаем алгебру ассоциативной, и поэтому c_{ij}^k могут быть любыми. Алгебра называется *алгеброй с делением*, если уравнение

$$ax = b \tag{3}$$

разрешимо для любого $a \neq 0$ и любого b. Легко видеть, что это равносильно отсутствию делителей нуля в алгебре. Для этого достаточно рассмотреть линейное преобразование φ: $\varphi(x) = ax$ в векторном пространстве, образованном элементами алгебры. Условие (3) означает, что образ φ совпадает со всем пространством. Как известно, это равносильно тому, что ядро φ равно нулю. Последнее условие и означает, что в алгебре нет делителей 0, т. е. из $xy = 0$ следует, что $x = 0$ или $y = 0$. Если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, то из (2) следует, что

$$xy = \sum_{k=1}^{n} z_k e_k, \quad z_k = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^k x_i y_j, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, в алгебре возможно деление, если система уравнений

$$F_k(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^k x_i y_j = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

не имеет вещественных решений, в которых $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ и $(y_1, \ldots, y_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Эти уравнения почти подходят под условия теоремы 2. Отличие заключается в том, что многочлены F_k определяют уравнения в $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$, а число их n не равно размерности $2n-2$ этого пространства. Поэтому выберем любое целое число $1 \leqslant r \leqslant n-1$ и положим $x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$, $y_{n-r+2} = \ldots = y_n = 0$. Уравнения $F_k(x_1, \ldots, x_{r+1}, 0, \ldots, 0;\ y_1, \ldots$

$\ldots, y_{n-r+1}, 0, \ldots, 0)=0 \quad (k=1, \ldots, n)$ теперь заданы в $\mathbf{P}^r\times\mathbf{P}^{n-r}$ и тем более не имеют ненулевых вещественных решений. Согласно теореме 2 это возможно, только если сумма

$$\sum k_{i_1}\ldots k_{i_r}l_{j_1}\ldots l_{j_{n-r}} \tag{5}$$

четна, причем это должно иметь место для всех $r=1, \ldots, n-1$. В нашем случае формы F_k билинейны, так что $k_i=l_i=1$ и сумма (5) равна числу своих членов, т. е. $\binom{r}{n}$. Мы видим, что если система (4) не имеет ненулевых вещественных решений, то все числа $\binom{r}{n}$ четны при $r=1, \ldots, n-1$. Это возможно, только если $n=2^k$. Действительно, наше условие на $\binom{r}{n}$ можно выразить так: в поле $\mathbf{F}_2$ из двух элементов $(T+1)^n=T^n+1$. Если $n=2^l\cdot m$, m нечетно и $m>1$, то в $\mathbf{F}_2$

$$(T+1)^{2^lm}=\left(T^{2^l}+1\right)^m=$$
$$=T^{2^lm}+mT^{2^l(m-1)}+\ldots+1\neq T^n+1.$$

Мы доказали такой результат:

Теорема 3. *Ранг алгебры с делением над полем действительных чисел является степенью двойки.*

Можно доказать, что алгебра с делением существует только при $n=1, 2, 4, 8$. Доказательство этого факта использует довольно тонкие топологические соображения.

Применяя аналогичные рассуждения, можно исследовать, при каких значениях m и n система уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}^k x_i y = 0, \qquad k=1, \ldots, n,$$

не имеет ненулевых вещественных решений. Этот вопрос интересен тем, что он равносилен вопросу об эллиптичности системы дифференциальных уравнений

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}^k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0, \qquad i=1, \ldots, m.$$

3. Род гладкой кривой на поверхности. В геометрии на гладкой проективной поверхности X громадную роль играет следующая формула, выражающая род гладкой кривой $C\subset X$ через некоторые индексы пересечения:

$$g_C=\frac{(C, C+K)}{2}+1; \tag{1}$$

здесь g_C — род кривой C, а K — канонический класс поверхности X.

Можно было бы доказать эту формулу, пользуясь теми средствами, которые нам уже известны. Однако более ясное и геометрически прозрачное доказательство вытекает из простейших свойств векторных расслоений. Оно будет дано в п. 4 § 1 гл. VI. Здесь мы только приведем некоторые ее применения.

1. Если $X=\mathbf{P}^2$, то $\mathrm{Cl}(X)=\mathbf{Z}$ и образующей является класс L, содержащий все прямые. Если $\deg C=n$, то $C\in nL$. Так как $K=-3L$ и $(L^2)=1$, то формула (1) дает в этом случае $g=\dfrac{n(n-3)}{2}+1=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. Этот результат был получен другим способом в п. 4 § 6 гл. III.

2. Пусть X — гладкая поверхность 2-го порядка в $\mathbf{P}^3$. Выясним, как классифицируются гладкие кривые на X по их геометрическим свойствам.

Алгебраическая классификация совершенно ясна. Так как $X\simeq\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$, то любая кривая на X задается уравнением $F(x_0:x_1;\ y_0:y_1)=0$, где F — многочлен, однородный как относительно x_0, x_1, так и относительно y_0, y_1. Обозначим степени однородности через m и n. Число коэффициентов такого многочлена равно $(m+1)(n+1)$, и, значит, все кривые, задаваемые уравнениями степени однородности m и n, соответствуют точкам проективного пространства $\mathbf{P}^{mn+m+n}$. Так как для любых m и n, $m>0$, $n>0$, существуют гладкие неприводимые кривые, например кривая с уравнением

$$2x_0^my_0^n+x_0^my_1^n+x_1^my_0^n+x_1^my_1^n=0,$$

то гладким неприводимым кривым соответствуют точки непустого открытого подмножества в $\mathbf{P}^{mn+m+n}$.

Мы видели в п. 1, что $\mathrm{Cl}(X)=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, и если кривая C задается уравнением со степенями однородности m и n, то

$$C\sim mE+nF, \tag{2}$$

где $E=\mathbf{P}^1\times x$, $F=x\times\mathbf{P}^1$. Таким образом, кривые, соответствующие заданным числам m и n,— это эффективные дивизоры класса $mE+nF$.

Классы E и F соответствуют двум семействам прямолинейных образующих на X. Легко найти индексы пересечения кривых, заданных в виде (2): если

$$C \sim mE+nF, \quad C' \sim m'E+n'F, \tag{3}$$

то

$$(CC') = mn'+nm'. \tag{4}$$

В частности,

$$m=(C, F), \quad n=(C, E). \tag{5}$$

Это указывает на геометрический смысл чисел m и n: аналогично тому, как степень плоской кривой равна числу ее точек пересечения с прямой, m и n являются двумя «степенями» кривой C по отношению к двум системам прямолинейных образующих E и F на X.

Если учитывать вложение $X \subset \mathbf{P}^3$, то кривая приобретает новый геометрический инвариант — степень. Мы знаем, что семейства кривых на X просто классифицируются по инвариантам m и n. Наша цель теперь — получить эту классификацию в терминах инвариантов $\deg C$ и g_C.

Как мы знаем,

$$\deg C = (C, H), \tag{6}$$

где H — плоское сечение X.

Теперь отметим, что

$$H \sim E+F, \tag{7}$$

как сразу видно из (5) и того, что H и E, а также H и F трансверсальны в их точке пересечения. Подставив это выражение в формулу (6) и применив (4), мы получаем, что

$$\deg C = m+n. \tag{8}$$

Заметим, что для любой неприводимой кривой C, $m>0$ и $n>0$, за исключением случая, когда C является прямой. Действительно, если C не принадлежит, например, первому семейству прямолинейных образующих, то, взяв любую точку $x \in C$ и прямую E первого семейства, проходящую через x, мы увидим, что C и E находятся в общем положении и $(C, E)=n \geqslant (C, E)_x > 0$.

Перейдем к вычислению g_C. Чтобы применить формулу (1), нам надо знать канонический класс поверхности X. Этим мы сейчас и займемся. Мы воспользуемся тем, что $X \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Легко решить даже более общую задачу: найти канонический класс поверхности $X = Y_1 \times Y_2$, где Y_1 и Y_2 — гладкие проективные кривые. Обозначив через π_1 и π_2 проекции $\pi_1\colon X \to Y_1$, $\pi_2\colon X \to Y_2$, рассмотрим произвольные одномерные дифференциальные формы $\omega_1 \in \Omega^1(Y_1)$, $\omega_2 \in \Omega^1(Y_2)$ и сопоставим им формы $\pi_1^*(\omega_1)$ и $\pi_2^*(\omega_2)$ на X. Форма $\omega = \pi_1^*(\omega_1) \wedge \pi_2^*(\omega_2)$ двумерна и ее дивизор (ω) принадлежит каноническому классу. Этот дивизор мы и вычислим.

Пусть $x \in X$, $x=(y_1, y_2)$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ и t_1 и t_2 — локальные параметры на Y_1 и Y_2 в окрестности точек y_1 и y_2. Тогда, как показывает очевидная проверка, $\pi_1^*(t_1)$ и $\pi_2^*(t_2)$ образуют систему локальных параметров для точки x на X. Представим ω_1 и ω_2 в виде $\omega_1 = u_1 dt_1$, $\omega_2 = u_2 dt_2$. Тогда $(\omega_1)=(u_1)$ и $(\omega_2)=(u_2)$ в окрестности точек y_1 и y_2. Очевидно, что $\omega = \pi_1^*(u_1)\cdot\pi_2^*(u_2)\, d\pi_1^*(t_1) \wedge d\pi_2^*(t_2)$, откуда следует, что в некоторой окрестности точек x

$$(\omega) = \left(\pi_1^*(u_1)\right) + \left(\pi_2^*(u_2)\right) = \pi_1^*((\omega_1)) + \pi_2^*((\omega_2)).$$

Так как это верно для любой точки $x \in X$, то $(\omega) = \pi_1^*((\omega_1)) + \pi_2^*((\omega_2))$ или, иначе говоря,

$$K_X = \pi_1^*(K_{Y_1}) + \pi_2^*(K_{Y_2}). \tag{9}$$

Вернемся к случаю $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Мы знаем, что $K_{\mathbf{P}^1} \ni -2y$, $y \in \mathbf{P}^1$. Поэтому формула (9) дает в нашем случае $K_X \ni -2\left(\pi_1^*(y_1) + \pi_2^*(y_2)\right)$. Так как $\pi_1^*(y_1)=E$, $\pi_2^*(y_2)=F$, то мы получаем окончательную формулу

$$K_X \ni -2E-2F. \tag{10}$$

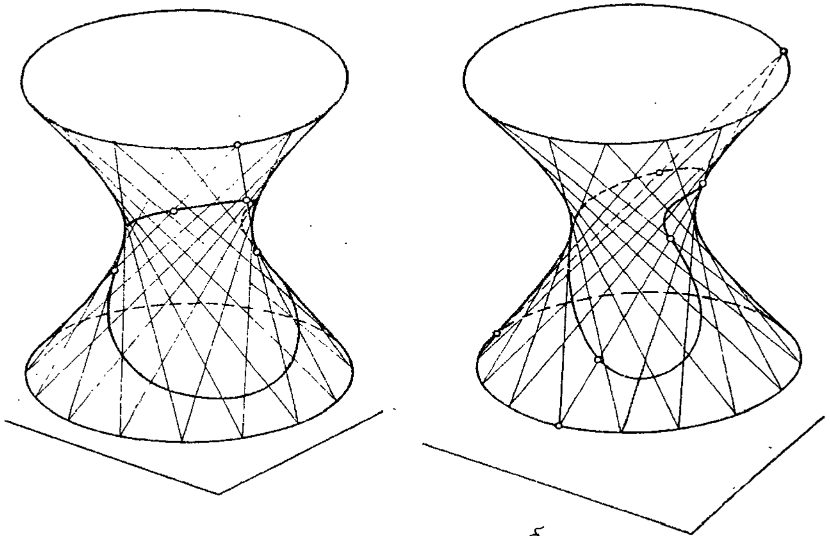
Чтобы получить род кривой $C \sim mE+nF$, надо подставить эту формулу в соотношение (1) и воспользоваться формулами (4). Мы получаем

$$g_C = (m-1)(n-1). \tag{11}$$

Таким образом, числа m и n однозначно с точностью до перестановки определяются степенью и родом кривой C.

Мы видим, что для заданной степени d существует $d+1$ семейств кривых на X: $M_0, M_1, \ldots, M_d$. Род семейства M_k равен $k(d-k)-d+1$, и семейства M_k и M_l имеют один и тот же род, только если $k+l=d$, т. е. если они получаются друг из друга автоморфизмом $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$, который меняет местами сомножители. Размерность семейства M_k равна $(k+1)(d-k+1)-1$ или, выраженная через степень и род: $g+2d$.

Ф. Клейн в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» приводит классификацию кривых 3-й и 4-й



а *б*

Рис. 16

степени на гиперболоиде как пример применения идей бирациональной геометрии. Оттуда и заимствованы чертежи, иллюстрирующие кривые с $d=4$: на рис. 16, *б* с $m=1$, $n=3$, на рис. 16, *а* с $m=n=2$.

3. В качестве еще одного применения формулы (1) выясним, какие отрицательные значения может принимать индекс самопересечения гладкой кривой C на поверхности 3-й степени в $\mathbf{P}^3$. Согласно результату п. 4 § 6 гл. III в этом случае $K=-E$, где E — гиперплоское сечение. Поэтому формула (1) принимает вид

$$(C^2)-\deg C=2g-2.$$

Очевидно, что $(C^2)<0$, только если $g=0$, а $\deg C=1$, т. е. C — прямая, лежащая на поверхности. В этом случае $(C^2)=-1$.

4. Неравенство Римана — Роха на поверхности. Другое фундаментальное соотношение, использующее индексы пересечения,— это неравенство Римана — Роха на гладкой неприводимой проективной поверхности X:

$$l(D)+l(K-D)\geqslant\frac{(D,\,D-K)}{2}+p_a(X), \qquad (1)$$

где D — произвольный дивизор, а $p_a(X)$ — инвариант, зависящий только от поверхности, но не от дивизора. В случае поля характеристики 0, $p_a(X)=1-h^1(X)+h^2(X)$. (Неравенство (1) получается из равенства Римана — Роха, которое мы здесь не приводим, отбрасыванием одного члена. Равенства Римана — Роха для кривой и для поверхности обобщаются на многообразия произвольных размерностей.)

Мы проиллюстрируем полезность неравенства Римана — Роха на одном примере. Как было сказано в п. 1, индекс пересечения дивизоров $D_1, D_2\in\operatorname{Div}(X)$ зависит только от их образа в группе $\operatorname{Div}(X)/\operatorname{Div}^a(X)$, которая имеет конечное число образующих. Мы можем профакторизовать ее по кручению, так как элементы кручения, конечно, дают нулевые индексы пересечения. В результате получится группа, изоморфная $\mathbf{Z}^m$, и если $u_1, \ldots, u_m$ — ее базис, то индекс пересечения задается симметрической целочисленной матрицей $((u_i,\,u_j))$, т. е. целочисленной квадратичной формой. Это — очень важный инвариант поверхности. Мы определим сейчас самый грубый инвариант — индекс инерции этой квадратичной формы. Нам известно, что она заведомо принимает положительные значения, так как $(E\cdot E)=\deg X>0$, где E — гиперплоское сечение. Оказывается, что при приведении к сумме квадратов все ненулевые коэффициенты, кроме одного, отрицательны. Мы докажем этот результат в форме, не использующей то, что группа $\operatorname{Div}(X)/\operatorname{Div}^a(X)$ имеет конечное число образующих.

Т е о р е м а Х о д ж а. *Если D — дивизор на поверхности X и $(D,\,E)=0$ для гиперплоского сечения E, то $(D^2)\leqslant 0$.*

Предположим, что $(D^2)>0$. Мы докажем, что при достаточно большом $n>0$ либо $l(nD)>0$, либо $l(-nD)>0$. Отсюда будет следовать теорема: если, например, $l(nD)>$

>0, т. е. $nD\sim D'>0$, то $(nD,\ E)=(D',\ E)>0$, так как всякая кривая пересекается с гиперплоскостью. Поэтому $n(D,\ E)>0$ и $(D,\ E)>0$, вопреки предположению.

Из того, что $(D^2)>0$, и ввиду (1)

$$\begin{aligned} l(nD)+l(K-nD)&\geqslant c(n),\\ l(-nD)+l(K+nD)&\geqslant c(n), \end{aligned} \tag{2}$$

где $c(n)$ неограниченно растет вместе с n. Если $l(nD)=l(-nD)=0$, то $l(K-nD)\geqslant c(n)$, $l(K+nD)\geqslant c(n)$. Но при $l(D_1)>0$ всегда $l(D_1+D_2)\geqslant l(D_2)$. Поэтому мы получили бы, что $l(2K)\geqslant c(n)$ — очевидное противоречие.

5. Гладкая кубическая поверхность. Пусть $X\subset\mathbf{P}^3$ — гладкая поверхность степени 3. Согласно теореме 10 § 6 гл. I на ней лежит прямая L. Проведем через L две различные плоскости E_1 и E_2 с уравнениями $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=0$ и рассмотрим рациональное отображение $\varphi\colon X\to\mathbf{P}^1$, $\varphi(x)=(\varphi_1(x):\varphi_2(x))$. Линейная система $(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2)$, соответствующая этому отображению, имеет неподвижную компоненту L: $E_{\lambda_1,\lambda_2}=L+F_{\lambda_1,\lambda_2}$, где E_{λ_1,λ_2} — плоское сечение с уравнением $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$, а F_{λ_1,λ_2} — плоская коника. Очевидно, линейная система F_{λ_1,λ_2} задает то же отображение φ. Докажем, что φ регулярно. Для этого достаточно доказать, что $F_{\lambda_1,\lambda_2}\cap F_{\mu_1,\mu_2}\neq\varnothing$, если $(\lambda_1:\lambda_2)\neq(\mu_1:\mu_2)$. Заметим, что F_{λ_1,λ_2} не может содержать L как компоненту: равенства $E_{\lambda_1,\lambda_2}=3L$ или $E_{\lambda_1,\lambda_2}=2L+L'$ противоречат соотношениям $(L^2)=-1$, $(E_{\lambda_1,\lambda_2},\ L)=1$, $(L,\ L')\geqslant 0$. Кроме того, F_{λ_1,λ_2} и F_{μ_1,μ_2} не могут иметь общей компоненты: она была бы прямой, отличной от L, и определяла бы уже плоскость, в которой она лежит. Таким образом, F_{λ_1,λ_2} и F_{μ_1,μ_2} находятся в общем положении, и нам достаточно убедиться, что $(F_{\lambda_1,\lambda_2},\ F_{\mu_1,\mu_2})=0$, т. е. $\left(F^2_{\lambda_1,\lambda_2}\right)=0$. Это следует из того, что $E_{\lambda_1,\lambda_2}=L+F_{\lambda_1,\lambda_2}$, $\left(E^2_{\lambda_1,\lambda_2}\right)=3$, $(L^2)=-1$, $(L,\ F_{\lambda_1,\lambda_2})=2$.

Если уравнения прямой L имеют вид $\xi_0=\xi_1=0$, то уравнение поверхности X записывается в виде

$$\begin{aligned} &A(\xi_0,\ \xi_1)\,\xi_2^2+2B(\xi_0,\ \xi_1)\,\xi_2\xi_3+C(\xi_0,\ \xi_1)\,\xi_3^2+\\ &\qquad+2D(\xi_0,\ \xi_1)\,\xi_2+2E(\xi_0,\ \xi_1)\,\xi_3+F(\xi_0,\ \xi_1)=0, \end{aligned}\tag{1}$$

где A, B, C, D, E, F — формы, $\deg A=\deg B=\deg C=1$, $\deg D=\deg E=2$, $\deg F=3$. Отсюда видно, что наше отображение $\varphi\colon X\to\mathbf{P}^1$ над $\mathbf{A}^1\subset\mathbf{P}^1$, где слой $X\setminus\varphi^{-1}(\mathbf{A}^1)$ невырожден, дает представление открытого множества $\varphi^{-1}(\mathbf{A}^1)\subset X$ в виде пучка коник. Из примера 1 в п. 4 § 6 гл. II следует, что вырожденные слои соответствуют нулям дискриминанта, нули эти — однократные, а вырожденные слои являются парами различных прямых. Если система координат выбрана так, что слой над бесконечной точкой $\mathbf{P}^1\setminus\mathbf{A}^1$ гладок, то число вырожденных слоев равно степени дискриминанта

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & C & D\\ C & B & E\\ D & E & F\end{vmatrix},$$

которая равна 5. Отсюда следует

Предложение 1. *Каждая прямая на гладкой кубической поверхности X пересекает ровно 10 прямых, лежащих на этой поверхности и распадающихся на 5 пар попарно пересекающихся.*

Из следствия 6 предложения в п. 2 § 6 гл. I мы можем заключить, что гладкая кубическая поверхность рациональна: $\Delta\neq 0$ тождественно, так как имеет только простые корни. Рациональность поверхности X можно доказать и другим путем: рассмотрим любую прямую L', пересекающую L, и применим к ней доказанное выше утверждение. Ее пересекают 10 прямых, из которых лишь L и еще одна прямая пересекают L. Следовательно, существует прямая M, не пересекающая L, и рациональность поверхности X вытекает из примера 2 в п. 3 § 3 гл. I.

Для найденной прямой M, очевидно, $(F,\ M)=1$, где F — слой пучка коник, так как $(M,\ E)=1$, $(M,\ L)=0$, $E\sim L+F$. Поэтому M пересекает F ровно в одной точке и, в частности, из каждой пары прямых, пересекающих L, пересекает ровно одну прямую. Обозначим эту прямую через L_i', а другую — через L_i $(i=1,\ \ldots,\ 5)$. Тогда $(L_i,\ M)=0$, $(L_i',\ M)=1$. Полученная конфигурация прямых изображена на рис. 17.

Из теоремы 4 § 1 гл. III мы можем заключить, что группа $\mathrm{Cl}(X)$ имеет в качестве образующих классы, определенные дивизорами L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, F, S, где S — некоторое сечение пучка коник $X\to\mathbf{P}^1$. Покажем, что за S можно взять найденную нами прямую $M\subset X$. Действительно, так как $M \cap L = \varnothing$, то уравнения M можно записать в виде $\xi_2 = a\xi_0 + b\xi_1$, $\xi_3 = c\xi_0 + d\xi_1$, т. е. при переходе к неоднородным координатам $x_2 = \xi_2/\xi_0$ и $x_3 = \xi_3/\xi_0$ рационально выражаются через $x_1 = \xi_1/\xi_0$ — координату на $\mathbf{P}^1$, причем эти выражения удовлетворяют уравнению (1).

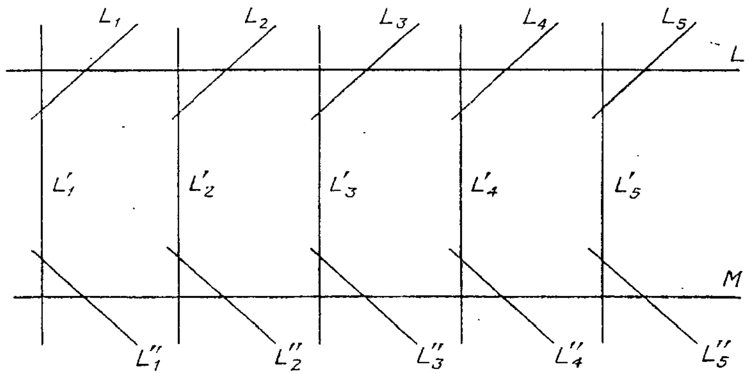


Рис. 17

Таким образом, мы получаем

Предложение 2. *Группа* $\mathrm{Cl}(X)$ *является свободной группой с 7 образующими — классами, определенными кривыми* $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, M, F$.

Индексы пересечений кривых $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, M$ и F легко вычисляются. Они сведены в таблицу:

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	M	F
L_1	−1	0	0	0	0	0	0
L_2	0	−1	0	0	0	0	0
L_3	0	0	−1	0	0	0	0
L_4	0	0	0	−1	0	0	0
L_5	0	0	0	0	−1	0	0
M	0	0	0	0	0	−1	1
F	0	0	0	0	0	1	0

Группа $\mathrm{Cl}(X)$ в значительной мере определяет геометрию поверхности X. В частности, она дает возможность найти все прямые, лежащие на X. Мы знаем, что прямая C на X удовлетворяет условию $(C^2) = -1$. Нам известны прямая L и еще 10 пересекающих ее прямых.

Найдем прямые, не пересекающие L. Для них $(C, L) = 0$ и, значит, $(C, F) = 1$. Пусть $C \sim \left(\sum_1^5 x_i L_i\right) + yM + zF$. Условие $(C, F) = 1$ дает $y = 1$, а $(C^2) = -1$ и $(C, L) = 0$ дают

$$\begin{aligned} -\sum_1^5 x_i^2 + 2z &= 0, \\ \sum_1^5 x_i + 2z &= 0; \end{aligned} \qquad (2)$$

отсюда следует, что $\sum_1^5 (x_i^2 + x_i) = 0$, т. е. $x_i = 0$ или -1. Из (2) следует, что число тех i, для которых $x_i = -1$, четно, т. е. возможны случаи: (а) все $x_i = 0$, (б) все $x_i = -1$, кроме одного, (в) $x_i = x_j = -1$, остальные $x_k = 0$. Случай (а) дает класс прямой M, случаи (б) и (в) — 5 и 10 классов, т. е. всего 16 классов. В каждом классе лежит не более одной прямой: если C и C' — две различные прямые в одном классе, то $(C, C') = 0$ или 1, по $C \sim C'$ и, значит, $(C, C') = (C^2) = -1$. Таким образом, остается в каждом из найденных классов предъявить хотя бы одну прямую. В случае (а) это M. В случае, когда $x_i = 0$, $x_j = -1$ при $j \neq i$, мы получаем класс $C_i = -\sum_{j \neq i} L_j + M + 2F$. Заметим, что прямые L'_i и M лежат в одной плоскости, в которой, значит, должна лежать еще одна прямая L''_i: $L'_i + L''_i + M \sim E$. Полагая $E \sim \sum \alpha_k L_k + \beta M + \gamma F$, мы находим, как ранее, что $E \sim -\sum L_k + 2M + 3F$. Подставляя это выражение для E и $L'_i \sim F - L_i$ для L'_i, мы легко получаем, что $L''_i \sim C_i$. В случае (в) мы имеем класс $D_{ij} = -L_i - L_j + M + F$. Заметим, что $(L''_i, L_j) = (C_i, L_j) = 1$, т. е. прямые L''_i и L_j при $i \neq j$ пересекаются и, значит, в проходящей через них плоскости лежит еще одна прямая L_{ij}. Рассуждение, в точности параллельное предыдущему, показывает, что $L_{ij} \sim D_{ij}$. Таким образом, мы нашли 1 прямую в случае (а), 5 — в случае (б) и 10 — в случае (в). Всего же $1 + 5 + 10 = 16$. Вместе с L и 10 пересекающими ее прямыми это дает 27 прямых. Нами доказана

Теорема. *На гладкой кубической поверхности в* $\mathbf{P}^3$ *лежат ровно 27 прямых.*

6. Кольцо классов циклов. Изложенная нами теория индексов пересечений дивизоров является частным случаем общей теории, относящейся к подмногообразиям любой размерности. Понятие дивизора заменяется здесь понятием *k-мерного цикла*. Так называются элементы свободной абелевой группы, порожденной неприводимыми подмногообразиями размерности k. Два неприводимых подмногообразия Y_1 и Y_2 по определению находятся в общем положении, если все неприводимые компоненты Z_i пересечения $Y_1 \cap Y_2$ имеют одну и ту же размерность и

$$\operatorname{codim} Z_i = \operatorname{codim} Y_1 + \operatorname{codim} Y_2.$$

Основой теории является сопоставление в этом случае компонентам Z_i целых положительных кратностей $n_i(Y_1, Y_2)$. Эти кратности не являются, вообще говоря, длинами тех или иных колец, как в нашей теории. Они определяются как суммы, в которых только первые слагаемые имеют такой вид. Вся теория оказывается гораздо сложнее и требует гораздо большего аппарата коммутативной и гомологической алгебры. Читатель может познакомиться с ней по книге [28].

Цикл $\sum n_i(Y_1, Y_2) Z_i$ называется *произведением подмногообразий* Y_1 и Y_2. По аддитивности это понятие распространяется на два любых цикла, находящихся в общем положении. (Два цикла по определению находятся в общем положении, если каждая компонента одного находится в общем положении с каждой компонентой другого.)

Основное свойство этого умножения — его инвариантность относительно понятия эквивалентности, которое мы сейчас опишем. Оно обобщает алгебраическую эквивалентность дивизоров, введенную в п. 4 § 4 гл. III, и определяется совершенно аналогично. Именно, пусть T — произвольное неприводимое гладкое многообразие и $Z \subset X \times T$ — такой цикл, что Z и $X \times t$ для любой точки $t \in T$ находятся в общем положении. Множество циклов $C_t = Z \cdot (X \times t)$ называется алгебраическим семейством. Два цикла C_1 и C_2 называются *алгебраически эквивалентными*, если существует такое семейство циклов C_t, $t \in T$, что $C_{t_1} = C_1$, $C_{t_2} = C_2$ для двух точек $t_1, t_2 \in T$. Множество классов циклов относительно алгебраической эквивалентности образует группу.

Умножение циклов на проективном многообразии инвариантно относительно алгебраической эквивалентности. Верна теорема о приведении в общее положение, согласно которой для двух циклов C_1 и C_2 существуют такие C_1' и C_2', что цикл C_1' эквивалентен C_1, а C_2' эквивалентен C_2 и C_1', C_2' находится в общем положении. Эти два результата дают возможность определить произведение двух любых классов циклов.

Обозначим через $\mathfrak{A}_r$ группу классов (относительно алгебраической эквивалентности) циклов коразмерности r на гладком проективном многообразии X. Группа

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{r=0}^{n} \mathfrak{A}_r, \quad n = \dim X,$$

является кольцом, если мы определим умножение для отдельных компонент, как мы это сделали выше, а для любых элементов — по аддитивности. Это кольцо коммутативно и ассоциативно. Ввиду формулы для размерности пересечения ((4) п. 2 § 6 гл. I)

$$\mathfrak{A}_r \cdot \mathfrak{A}_s \subset \mathfrak{A}_{r+s}, \quad \mathfrak{A}_m = 0 \text{ при } m > n,$$

т. е. $\mathfrak{A}$ — градуированное кольцо. Легко доказать, что все точки многообразия X, рассмотренные как нульмерные циклы, эквивалентны, и цикл x, $x \in X$, не эквивалентен 0. Поэтому группа $\mathfrak{A}_n = \mathbf{Z} \cdot u$ имеет стандартную образующую u — класс циклов $x \in X$. Классы дивизоров относительно алгебраической эквивалентности образуют группу $\mathfrak{A}_1$. Для n элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{A}_1$ произведение $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathfrak{A}_n = \mathbf{Z}u$:

$$\alpha_1 \ldots \alpha_n = k \cdot u, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Число k совпадает с индексом пересечения $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, который был нами определен в § 1.

Кольцо $\mathfrak{A}$ является очень интересным, но очень мало изученным инвариантом многообразия X. Группа $\mathfrak{A}_0$ изоморфна $\mathbf{Z}$ — ее образующей является само X. Мы уже говорили, что и $\mathfrak{A}_n \simeq \mathbf{Z}$. Группа $\mathfrak{A}_1$ имеет конечное число образующих — это утверждается теоремой D п. 4 § 4 гл. III. Однако уже группа $\mathfrak{A}_2$ может иметь бесконечное число образующих. Строение этих групп является весьма загадочным.

ЗАДАЧИ

1. Определить $\deg v_m(\mathbf{P}^n)$, где v_m — отображение Веронезе.
2. Предположим, что гладкая плоская кривая C степени r лежит на гладкой поверхности степени m в $\mathbf{P}^3$. Определить (C^2) (обобщение примера 3 в п. 5 § 1).
3. Предположим, что на гладкой проективной поверхности степени m в $\mathbf{P}^3$ дивизор формы степени l состоит из одной компоненты с кратностью 1, являющейся гладкой кривой. Найти ее род.
4. Доказать, что число решений системы уравнений

$$f_i\left(x_0^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}; \ldots; x_0^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}\right) = 0,$$

линейных относительно каждой системы переменных $x_0^{(j)}, \ldots$ $\ldots, x_{n_j}^{(j)}$, равно $\dfrac{\left(\sum n_i\right)!}{\prod (n_i!)}$, если число уравнений равно $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$. Число решений, как всегда, понимается в смысле соответствующего индекса пересечения.
5. Доказать, что если на гладкой поверхности X 4-й степени в $\mathbf{P}^3$ лежит гладкая кривая C и $(C^2) < 0$, то $(C^2) = -2$.
6. Доказать, что индексы самопересечения гладких кривых на гладкой поверхности четной степени в $\mathbf{P}^3$ всегда четны.
7. Пусть X — гладкая кривая, D — диагональ в $X \times X$ (множество точек вида (x, x)). Доказать, что $(D^2) = -\deg K_X$. Указание. Воспользоваться тем, что D и X изоморфны.
8. Обобщить результат задачи 7 на случай, когда D — график отображения $\varphi\colon C_1 \to C_2$ степени d, $D \subset C_1 \times C_2$.
9. Для дивизора $D \subset C_1 \times C_2$ доказать неравенство

$$(D^2) \leqslant 2(C_1 \times c_2, D)(D, C_2 \times c_1), \quad c_1 \in C_1, \quad c_2 \in C_2.$$

Указание. Подобрать α и β так, что для $D' = D - \alpha(C_1 \times c_2) - \beta(c_1 \times C_2)$, $(C_1 \times c_2, D') = (D', c_1 \times C_2) = 0$, и применить к D' теорему Ходжа.
10. В условиях задач 8, 9 пусть $C_1 = C_2 = C$, φ — отображение $C \to C$ степени d, Γ_φ — его график. Доказать, что $|(\Gamma_\varphi, \Delta) - d - 1| \leqslant 2g\sqrt{d}$, где g — род кривой C, $\Delta \subset C \times C$ — диагональ. Здесь (Γ_φ, Δ) есть число неподвижных точек отображения φ. Полученное неравенство для случая, когда φ — отображение Фробениуса, обобщает неравенство (3) из п. 4 § 3 гл. III на кривые произвольного рода. Указание. Положить $D = m\Delta + n\Gamma_\varphi$, рассмотреть $(D^2) - 2(C \times c, D)(D, C \times c)$ как квадратичную форму от m и n и выписать условие отрицательной определенности.

§ 3. Бирациональные изоморфизмы поверхностей

В этом параграфе мы изложим применения индексов пересечения к доказательству некоторых основных свойств бирациональных изоморфизмов поверхностей. Мы начнем с того, что выведем некоторые простейшие свойства σ-процесса алгебраической поверхности.

1. σ-процессы поверхностей. Пусть X — алгебраическая поверхность, $\xi \in X$ — простая точка, x и y — локальные параметры в ξ и $\sigma\colon Y \to X$ — σ-процесс с центром в этой точке. Согласно теореме 1 § 4 гл. II существует такая окрестность $U \ni \xi$, что $V = \sigma^{-1}(U)$ может быть описано уравнениями $t_0 y = t_1 x$ в $U \times \mathbf{P}^1$, где $(t_0 : t_1)$ — координаты в $\mathbf{P}^1$. При этом в открытом множестве, где $t_0 \neq 0$, σ-процесс задается простыми уравнениями

$$x = u, \quad y = uv, \tag{1}$$

где $v = \dfrac{t_1}{t_0}$. В любой точке $\eta = \sigma^{-1}(\xi)$ функции u и $v - v(\eta)$ образуют систему локальных параметров. Положим $L = \sigma^{-1}(\xi)$. Локальное уравнение кривой L будет, очевидно, $u = 0$.

Пусть C — неприводимая кривая на X, проходящая через точку ξ. Аналогично теореме 1 § 4 гл. II в нашем случае прообраз $\sigma^{-1}(C)$ кривой C состоит из двух компонент: кривой L и кривой C', которую можно определить как замыкание кривой $\sigma^{-1}(C - \xi)$ в Y. Кривая C' называется *собственным прообразом* кривой C. Мы будем обозначать ее через $\sigma'(C)$. Рассмотрим теперь C как неприводимый дивизор на X. Тогда

$$\sigma^*(C) = \sigma'(C) + kL, \tag{2}$$

где $\sigma'(C)$ входит с коэффициентом 1, так как σ является изоморфизмом $Y - L$ на $X - \xi$. Найдем коэффициент k в формуле (2). Для этого предположим, что C имеет ξ r-кратной точкой. Это значит, что если f — локальное уравнение C в окрестности ξ, то $f \in \mathfrak{m}_\xi^r$, $f \notin \mathfrak{m}_\xi^{r+1}$. Тогда $\sigma^*(C)$ имеет локальное уравнение $\sigma^*(f)$ в окрестности любой точки $\eta \in \sigma^{-1}(\xi)$. Положим

$$f = \varphi(x, y) + \psi, \quad \psi \in \mathfrak{m}_\xi^{r+1}, \tag{3}$$

где φ — форма степени r.

Подставив формулы преобразования (1) в уравнение (3), мы получим, что $(\sigma^* f)(u, v) = \varphi(u, uv) + \sigma^*\psi$. Так как $\psi \in \mathfrak{m}_\xi^{r+1}$, то $\psi = F(x, y)$, где F — форма степени r с коэффициентами из $\mathfrak{m}_\xi$. Поэтому $\sigma^*(\psi) = (\sigma^* F)(u, vu)$ и окончательно

$$(\sigma^* f)(u, v) = u^r(\varphi(1, v) + u(\sigma^* F)(1, v)); \tag{4}$$

так как $\varphi(1, v)$ не делится на u, то отсюда следует, что в формуле (2) k равно r — кратности особой точки ξ на кривой C.

Сформулируем то, что мы доказали.

Теорема 1. *Прообраз простого дивизора C на X, содержащего центр ξ σ-процесса, задается формулой $\sigma^*(C)=\sigma'(C)+kL$, где $\sigma'(C)$ — простой дивизор, $L=\sigma^{-1}(\xi)$ и k — кратность точки ξ на C.*

2. Некоторые индексы пересечения. Начнем с общего свойства бирациональных регулярных отображений $f\colon Y\to X$ гладких проективных поверхностей.

Теорема 2. *Если D_1, D_2 — дивизоры на X, то*

$$(f^*(D_1),\ f^*(D_2))=(D_1,\ D_2). \tag{1}$$

Если $\overline{D}$ — дивизор на Y, все компоненты которого исключительные кривые, то

$$(f^*(D),\ \overline{D})=0 \tag{2}$$

для любого дивизора D на X.

Обозначим через $S\subset X$ то конечное множество точек, в котором отображение f^{-1} нерегулярно, и пусть $T=f^{-1}(S)$ (теоретико-множественно). Тогда f определяет изоморфизм

$$Y-T\to X-S. \tag{3}$$

Если ни $\operatorname{Supp} D_1$, ни $\operatorname{Supp} D_2$ не пересекаются с S и D_1 и D_2 находятся в общем положении, то равенство (1) очевидно ввиду изоморфизма (3). В противном случае мы воспользуемся теоремой о снятии носителя дивизора с точек (теорема 1 п. 3 § 1 гл. III). Пусть $D_1'\sim D_1$ и $D_2'\sim D_2$ — такие дивизоры, что $(\operatorname{Supp} D_1')\cap S=(\operatorname{Supp} D_2')\cap S=\varnothing$ и D_1' и D_2' находятся в общем положении. Тогда $(D_1, D_2)=(D_1', D_2')$, а ввиду сказанного выше $(D_1', D_2')=(f^*(D_1'), f^*(D_2'))$. Так как $f^*(D_i')\sim f^*(D_i)$, то отсюда следует равенство (1).

Равенство (2) также очевидно, если $(\operatorname{Supp} D)\cap S=\varnothing$. Общий случай сводится к этому совершенно аналогичным рассуждением. Теорема доказана.

Введем теперь следствия, относящиеся непосредственно к σ-процессу. Мы будем пользоваться обозначениями п. 1.

Следствие 1.

$$(L^2)=-1. \tag{4}$$

Рассмотрим кривую $C\subset X$ с локальным уравнением y. Согласно теореме 1 $\sigma^*(C)=\sigma'(C)+L$, причем из формул (1) п. 1 ясно, что локальным уравнением $\sigma'(C)$ является v. Так как локальным уравнением L является u, то $(\sigma'(C), L)=1$, и поэтому формула (4) следует из (2).

Следствие 2. *$(\sigma'(C),\ L)=k$, где k — кратность особой точки ξ на C.*

Это сразу следует из формул (2), (4) и формулы (2) п. 1.

Следствие 3.

$$(\sigma'(C_1),\ \sigma'(C_2))=(C_1,\ C_2)-k_1k_2, \tag{5}$$

где k_1 и k_2 — кратности точки ξ на C_1 и C_2 соответственно.

Согласно теоремам 1 и 2

$$\begin{aligned}(C_1,\ C_2)&=(\sigma^*(C_1),\ \sigma^*(C_2))=(\sigma'(C_1)+k_1L,\ \sigma^*(C_2))=\\&=(\sigma'(C_1),\ \sigma^*(C_2))=(\sigma'(C_1),\ \sigma'(C_2)+k_2L)=\\&=(\sigma'(C_1),\ \sigma'(C_2))+k_1k_2,\end{aligned}$$

откуда следует (5).

3. Разрешение точек нерегулярности. Мы можем теперь доказать важное свойство рациональных отображений алгебраических поверхностей.

Теорема 3. *Если $\varphi\colon X\to\mathbf{P}^n$ — рациональное отображение гладкой проективной поверхности, то существует такая последовательность σ-процессов,*

$$\begin{tikzcd}
X_m \arrow[d, "\sigma_m"'] \arrow[dddr] & \\
\vdots \arrow[d, "\sigma_2"'] & \\
X_1 \arrow[d, "\sigma_1"'] & \\
X \arrow[r] & \mathbf{P}^n
\end{tikzcd}$$

что отображение $\psi=\varphi\sigma_1\ldots\sigma_m$ регулярно.

Доказательство. Мы знаем, что φ нерегулярно лишь в конечном числе точек (теорема 3 п. 1 § 3 гл. II) и теорема 2 п. 4 § 1 гл. III дает более подробное описание этого множества, которое мы напомним. Пусть $\varphi=(f_0:\ldots:f_n)$, $\overline{D}=\text{НОД}((f_0),\ \ldots,\ (f_n))$ и $D_i=(f_i)-\overline{D}$. Тогда множество точек нерегулярности φ совпадает с $\bigcap\limits_{i=0}^{m}\operatorname{Supp} D_i$.

Введем следующий инвариант рационального отображения φ. Очевидно, что все дивизоры D_i эквивалентны друг другу. Поэтому мы можем положить

$$d(\varphi) = (D_i^2).$$

Докажем, что $d(\varphi) \geqslant 0$. Для этого положим $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, $D_\lambda = \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i\right) - \overline{D}$. Очевидно, что $D_\lambda \geqslant 0$, $D_\lambda \sim D_i$. Нам надо найти такое λ, что D_0 и D_λ не имеют общей компоненты; тогда $d(\varphi) = (D_0, D_\lambda) \geqslant 0$. По условию все D_i не имеют общей компоненты. Поэтому для любой неприводимой компоненты $C \subset D_0$ существует такое $i \geqslant 1$, что $\nu_C(D_i) = 0$. Условие $\nu_C(D_\lambda) > 0$ означает, что $\sum \lambda_i \cdot g_i |_C = 0$, где g_i — локальные уравнения дивизоров D_i в окрестности некоторой точки $c \in C$. Ввиду этого $\nu_C(D_\lambda) = 0$ для всех λ из некоторого непустого открытого множества в $\mathbf{A}^{n+1}$. Поэтому существует λ, принадлежащее всем открытым множествам, соответствующим всем неприводимым кривым $C \subset D_0$. Для него D_0 и D_λ не имеют общих компонент.

Если $x_0 \in \cap \operatorname{Supp} D_i$, то все $\operatorname{Supp} D_\lambda \ni x_0$. Поэтому $d(\varphi) > 0$, если $\cap \operatorname{Supp} D_i$ не пусто, т. е. если отображение φ нерегулярно. В этом случае обозначим через σ: $X' \to X$ σ-процесс с центром в точке $x_0 \in \cap \operatorname{Supp} D_i$ и положим $\varphi' = \varphi\sigma$. Мы докажем, что $d(\varphi') < d(\varphi)$, откуда конечно будет вытекать теорема 3.

Для дивизора $D = \sum l_i C_i$ назовем кратностью точки ξ на D число $b = \sum k_i l_i$, где k_i — кратности ξ на кривых C_i. Очевидно, что тогда теорема 1 становится верной для любого эффективного дивизора и, если $D \geqslant 0$, то $k \geqslant 0$, причем $k = 0$ означает, что $\xi \notin \operatorname{Supp} D$.

Аналогично положим $\sigma'(D) = \sum l_i \sigma'(C_i)$. Тогда $\sigma^* D = \sigma' D + kL$.

Обозначим через ν_i кратности точки x_0 на дивизорах D_i и положим $\nu = \min \nu_i$. Отображение φ' задается функциями $f_i' = \sigma^* f_i$ и

$$(f_i') = (\sigma^* f_i) = \sigma'(D_i) + (\nu_i - \nu) L + \nu L + \sigma^* \overline{D},$$

причем дивизоры $D_i' = \sigma'(D_i) + (\nu_i - \nu) L, i = 0, \ldots, n$, не имеют в совокупности общих компонент.

Выберем такое i, что $\nu_i = \nu$, и тогда по определению

$$d(\varphi') = (D_i'^2) = ((\sigma' D_i)^2).$$

Из соотношения $\sigma^* D_i = \sigma' D_i + \nu L$ и теоремы 2 следует, что $((\sigma' D_i)) = ((\sigma^* D_i - \nu L)^2) = ((\sigma^* D_i)^2) - \nu^2 = (D_i^2) - \nu^2$, и поэтому $d(\varphi') = d(\varphi) - \nu^2$. Это доказывает теорему 3.

Замечание. В формулировке теоремы 3 нет необходимости предполагать поверхность X проективной. В доказательстве это свойство использовалось при ссылках на то, что $(C, (f)) = 0$ для любой кривой $C \subset X$. Однако это утверждение применялось только к кривым вида $\sigma^{-1}(\xi)$, которые проективны, если даже X и непроективна. Легко видеть, что для таких кривых C нужное свойство имеет место.

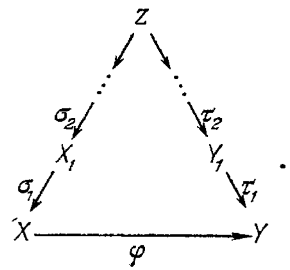
Простейший пример на теорему 3 — это отображение f: $\mathbf{A}^2 \to \mathbf{P}^1$, встречающееся при определении проективной прямой: $f(x, y) = (x : y)$. Отображение f нерегулярно в точке $(0, 0) = \xi$. Подставляя формулы (1) п. 1, мы видим, что в точках, принадлежащих $\sigma^{-1}(\xi)$ и множеству $t_0 \neq 0$, $f(x, y) = (1 : v)$ и поэтому там f_σ регулярно.

4. Разложение на σ-процессы. Теперь в нашем распоряжении есть все для доказательства основного результата о бирациональных изоморфизмах поверхностей.

Теорема 4. *Пусть φ: $X \to Y$ — бирациональный изоморфизм гладких проективных поверхностей. Тогда существует такая поверхность Z и такие поверхности и отображения*

$$\sigma_i\colon X_i \to X_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, k,$$
$$\tau_j\colon Y_j \to Y_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, l,$$

что $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, $X_k = Y_l = Z$, σ_i и τ_j — σ-процессы и $\varphi\sigma_1 \ldots \sigma_k = \tau_1 \ldots \tau_l$. Иными словами, коммутативна диаграмма



Теорема 4 является очевидным следствием теоремы 3 и следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi: X \to Y$ — *регулярное отображение гладких проективных поверхностей, являющееся бирациональным изоморфизмом. Тогда существует такая последовательность поверхностей и отображений* $\sigma_i: Y_i \to Y_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, k)$, *что* σ_i — *σ-процессы*, $Y_0 = Y$, $Y_k = X$ *и*

$$\varphi = \sigma_1 \ldots \sigma_k.$$

Доказательству теоремы 5 предпошлем некоторые общие замечания о бирациональных изоморфизмах поверхностей.

Прежде всего, при произвольном рациональном отображении $\varphi: X \to Y$, где X — гладкая поверхность, а Y — проективное многообразие, можно говорить об образе $\varphi(C)$ кривой $C \subset X$. Действительно, φ регулярно во всех точках C, кроме, быть может, конечного множества точек S. Под $\varphi(C)$ будем понимать замыкание $\varphi(C - S)$ в Y.

При этом теорема о существовании исключительных подмногообразий при регулярном отображении (теорема 2 § 4 гл. II) остается верной.

Лемма. *Если* $\varphi: X \to Y$ — *бирациональный изоморфизм гладких проективных поверхностей и* φ^{-1} *нерегулярно в точке* $y \in Y$, *то существует такая кривая* $C \subset X$, *что* $\varphi(C) = y$.

Доказательство. Рассмотрим открытые множества $U \subset X$ и $V \subset Y$, на которых φ устанавливает изоморфизм, и обозначим через Z замыкание графика изоморфизма $\varphi: U \to V$ в $X \times Y$. Проекции на X и Y определяют регулярные бирациональные изоморфизмы $p: Z \to X$ и $q: Z \to Y$. Очевидно, что $\varphi^{-1} = p \cdot q^{-1}$, и так как φ^{-1} по условию нерегулярно в y, то и q^{-1} нерегулярно в y.

Мы можем теперь применить теорему о существовании исключительных подмногообразий (теорема 2 § 4 гл. II) к регулярному отображению $q: Z \to Y$. Эта теорема показывает, что существует такая кривая $D \subset Z$, что $q(D) = y$. Положим $p(D) = C$ и проверим, что C удовлетворяет условиям леммы. Собственно, нужно только проверить, что $\dim C = 1$, т. е. что $\dim C = \dim D$. Если бы это было не так, то $p(C)$ было бы точкой $x \in X$ и для всех точек $z \in D$ мы получили бы $p(z) = x$, $q(z) = y$, т. е. $z = (x, y)$, а это противоречит тому, что $D \subset X \times Y$ является кривой. Лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 5. Предположим, что φ не является изоморфизмом, т. е. φ^{-1} нерегулярно в точке $y \in Y$. Рассмотрим σ-процесс $\sigma: Y' \to Y$ с центром в точке y и определим $\varphi': X \to Y'$ так,

$$\begin{tikzcd}
 & & L \arrow[dddll] \arrow[dddrr] & & \\
 & & Y' \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[dr, "\sigma"] & & \\
 & X \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[rr, "\varphi"] & & Y & \\
x \in Z \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[rrrr] & & & & y \arrow[ul, phantom, "\in"]
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

чтобы диаграмма была коммутативной.

Теорема будет доказана, если мы покажем, что φ' — регулярное отображение. Действительно, из коммутативности диаграммы (1) тогда следует, что подмногообразие $\varphi^{-1}(y)$ при помощи φ' отображается в $\sigma^{-1}(y) = L \approx \mathbf{P}^1$. При этом из того, что φ' отображает X на все Y', следует, что $\varphi^{-1}(y)$ отображается на все L. Поэтому не все компоненты $\varphi^{-1}(y)$ отображаются в одну точку. Значит, для $y' \in L$ число компонент $(\varphi')^{-1}(y')$ меньше, чем число компонент $\varphi^{-1}(y)$.

Следовательно, производя конечное число σ-процессов, мы добьемся того, что на X не будет исключительных подмногообразий, т. е. наше отображение станет изоморфизмом.

Остается доказать регулярность φ'. Пусть это не так. Тогда $\psi = (\varphi')^{-1}$ отображает, согласно лемме, некоторую кривую, лежащую на Y', в точку $x \in X$. Из коммутативности диаграммы (1) следует, что эта кривая может быть только L, т. е. $\psi(L) = x$.

Согласно теореме 3 § 3 гл. II существует такое конечное множество $E \subset L$, что ψ регулярно во всех точках $y' \in L - E$. Так как $\sigma(y') = y$, то из коммутативности диаграммы (1) следует, что и $\varphi(x) = y$.

Докажем, что отображение

$$d_x\varphi: \Theta_{x, X} \to \Theta_{y, Y} \qquad (2)$$

является изоморфизмом. Для этого достаточно доказать его эпиморфность. Пусть $d_x\varphi\Theta_{x, X} \subseteq l \subset \Theta_{x, Y}$, где l — некоторая прямая в плоскости $\Theta_{y,Y}$. Тогда из коммутативности диаграммы (1) следует, что

$$(d_{y'}\sigma)(\Theta_{y',Y'}) \subset l \tag{3}$$

для всех точек $y' \in L - E$. Это, однако, противоречит простейшим свойствам σ-процесса. Действительно, пусть C — гладкая кривая на Y, $C \ni y$ и $\Theta_{y,C} \neq l$, например $C = V(\alpha u + \beta v)$, где u и v — локальные параметры в точке y. Тогда, согласно формуле (2) п. 1, $\sigma(\sigma'(C)) = C$, причем $\sigma'(C)$ пересекает L в одной точке y', которая имеет на L координаты $(-\beta:\alpha)$, $\sigma'(C)$ гладкая в этой точке и σ: $\sigma'(C) \to C$ — изоморфизм. Мы можем выбрать α и β так, что $y' \notin E$, а тогда уже $(d_{y'}\sigma)(\Theta_{y',\sigma'(C)}) \not\subset l$.

Изоморфность отображения (2) противоречит тому, что φ^{-1} нерегулярно в точке y. Действительно, применяя теорему об исключительных подмногообразиях (п. 2 § 4 гл. II), мы найдем такую кривую $Z \subset X$, $Z \ni x$, что $\varphi(Z) = y$. Тогда $\Theta_{x,Z} \subset \Theta_{x,X}$ (напомним, что касательное пространство определено и для случая, когда x — особая точка на Z). Так как $\varphi(Z) = y$, то $(d_x\varphi)\Theta_{x,Z} = 0$, и, значит, отображение (2) имеет ядро. Это противоречие доказывает теорему 5.

5. Замечания и примеры. Рассмотрим бирациональный изоморфизм f: $X \to Y$ гладких проективных поверхностей, являющийся регулярным отображением. Предположим, что f^{-1} нерегулярен только в одной точке $\eta \in Y$ и что кривая $C = f^{-1}(\eta)$ неприводима. Согласно теореме 5, f является произведением σ-процессов: $f = \sigma_1 \ldots \sigma_k$, а так как при любом σ-процессе возникает своя кривая, стягиваемая им в точку, то C неприводимо, только если $k = 1$ и f само является σ-процессом. Тогда C совпадает с кривой L, про которую в пп. 1 и 2 было доказано, что

$$L \simeq \mathbf{P}^1, \quad (L^2) = -1. \tag{1}$$

Такие кривые называются -1-кривыми.

Верно и обратное: если на гладкой проективной поверхности X лежит -1-кривая C, то существует такое регулярное отображение f: $X \to Y$, являющееся бирациональным изоморфизмом, что Y гладко, $f(C) = \eta \in Y$, причем f совпадает с σ-процессом. Таким образом, условия (1) необходимы и достаточны для того, чтобы кривую C можно было сжать в точку в указанном выше смысле. Этот результат доказал Кастельнуово. Мы не будем проводить его доказательства, которое можно найти в книгах [1], гл. II, и [29], § 5 гл. V.

В заключение мы построим, в согласии с теоремой 4, разложение на σ-процессы для одного простого бирационального изоморфизма. Это — бирациональный автоморфизм f проективной плоскости $\mathbf{P}^2$, называемый *квадратичным преобразованием* и задаваемый формулами

$$\begin{gathered} f(x_0:x_1:x_2) = (y_0:y_1:y_2), \\ y_0 = x_1x_2, \quad y_1 = x_0x_2, \quad y_2 = x_0x_1. \end{gathered} \tag{2}$$

Мы будем рассматривать f как бирациональный изоморфизм двух экземпляров: $\mathbf{P}^2$ и $\overline{\mathbf{P}}^2$ плоскости $\mathbf{P}^2$, в одном из которых координаты обозначены через $(x_0:x_1:x_2)$, а в другом — через $(y_0:y_1:y_2)$. Очевидно, что f нерегулярен в трех точках $\xi_0 = (1:0,\ 0)$, $\xi_1 = (0:1:0)$, $\xi_2 = (0:0:1)$. Согласно теореме 3 нам необходимо начать с того, чтобы произвести σ-процессы σ_0, σ_1 и σ_2 в этих точках. Мы придем к поверхности X и регулярному отображению φ: $X \to \mathbf{P}^2$, $\varphi = \sigma_2\sigma_1\sigma_0$. Докажем, что отображение $\psi = f\varphi$: $X \to \overline{\mathbf{P}}^2$ уже регулярно. Действительно, ψ регулярно в точке z, если $\varphi(z) \neq \xi_i$. В точках $\zeta \in \sigma_1^{-1}\xi_0$ отображение $f\sigma_1$ уже регулярно. Чтобы это проверить, достаточно положить $x = \dfrac{x_1}{x_0}$, $y = \dfrac{x_2}{x_0}$ и подставить формулы (1) п. 1 в (2). Мы увидим, что

$$f(x,\ y) = (x^2 : x : y), \quad f(u,\ v) = (u : 1 : v). \tag{3}$$

Так как σ_1 и σ_2 индуцируют изоморфизм в окрестностях точек ζ, то и ψ регулярно в точках z, для которых $\varphi(z) = \xi_0$. Аналогично дело обстоит с ξ_1 и ξ_2.

Согласно теореме 4 отображение ψ есть произведение σ-процессов: $\psi = \tau_1 \ldots \tau_k$. Выясним, какие кривые $C \subset X$ могут отображаться в точки при помощи ψ. Очевидно, это могут быть только или кривые $M_i' = \sigma_i^{-1}(\xi_i)$ $(i = 0,\ 1,\ 2)$, или собственные прообразы таких кривых $L \subset \mathbf{P}^2$, которые f отображает в точки. Легко видеть, что f определяет изоморфизм $\mathbf{P}^2 - L_0 - L_1 - L_2$ и $\overline{\mathbf{P}}^2 - M_0 - M_1 - M_2$, где L_i — прямая в $\mathbf{P}^2$, определенная уравнением $x_i = 0$, а M_i — прямая в $\mathbf{P}^2$ с уравнением $y_i = 0$. Поэтому ψ может стягивать в точку только кривые M_0', M_1', M_2', L_0', L_1', L_2', где L_i' — собственные прообразы кривых L_i в X. Но из (3) мы видим, что, например,

M_0' (задаваемое локальным уравнением $u=0$) отображается на всю кривую $y_0=0$. Аналогично M_i' отображается на кривые M_i при $i=1, 2$. Таким образом, ψ может стягивать в точки только кривые L_i'. Далее, ψ^{-1} нерегулярно в точках $\eta_0=(1:0:0)$, $\eta_1=(0:1:0)$, $\eta_2=(0:0:1)$, иначе f^{-1} было бы регулярно в одной из

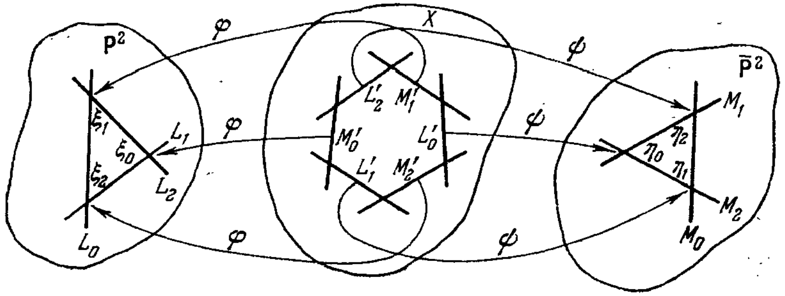


Рис. 18

этих точек, а f^{-1} задается теми же формулами, что и f, как видно из (2). Таким образом, с одной стороны, в разложение $\psi=\tau_1\ldots\tau_k$ не может входить больше трех σ-процессов и, с другой стороны, должны входить σ-процессы в точках η_0, η_1, η_2. Мы видим, что

$$f=\tau_2\tau_1\tau_0\sigma_0^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}.$$

Легко представить себе расположение кривых M_0', M_1', M_2', L_0', L_1', L_2' на поверхности X. Стрелки на рис. 18 указывают, в какие точки стягиваются кривые.

Конечно, квадратичное преобразование зависит от того, как выбрана система координат в $\mathbf{P}^2$, или, что то же самое, от выбора точек ξ_0, ξ_1, ξ_2. Перемножая различные такие преобразования, мы получаем уже новые бирациональные автоморфизмы плоскости. Нётером доказана теорема о том, что любой бирациональный автоморфизм плоскости представляется как произведение квадратичных преобразований и проективного преобразования. Мы не будем приводить весьма тонкое доказательство этой теоремы. Его можно найти в книге [1], гл. V. Описание соотношений, связывающих эти образующие, получено сравнительно недавно: см. [11].

ЗАДАЧИ

1. Для любого целого числа k (положительного, отрицательного или 0) построить гладкую проективную поверхность X и на ней такую неприводимую кривую C, что $(C^2)=k$. Указание. Получить X, раздувая несколько точек на $\mathbf{P}^2$.

2. Пусть X — гладкая проективная поверхность, C_1 и C_2 — две кривые на ней. $C_1 \ni x \in C_2$ и x — неособая точка на C_1 и C_2. Пусть $\sigma\colon Y\to X$ — σ-процесс в точке x, C_1' и C_2' — собственные прообразы C_1 и C_2. Доказать, что C_1' и C_2' тогда и только тогда пересекаются в точках $y\in\sigma^{-1}(x)$, когда C_1 и C_2 касаются в точке x. При этом $\sigma^{-1}(x)\cap C_1'\cap C_2'=y$ — одна точка и порядок касания C_1' и C_2' в y на единицу меньше порядка касания C_1 и C_2 в x.

3. Пусть отображение $f\colon \mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^1$ задается формулой

$$f(x_0:x_1:x_2)=(P(x_0, x_1, x_2):Q(x_0, x_1, x_2)),$$

где P и Q — формы степени n. Сколько надо сделать σ-процессов, чтобы получить поверхность $\varphi\colon X\to\mathbf{P}^2$, для которой $f\varphi$ регулярно?

4. Пусть $X\subset\mathbf{P}^3$ — гладкая поверхность 2-го порядка и $f\colon X\to\mathbf{P}^2$ — бирациональный изоморфизм, состоящий в проектировании X из точки $x\in X$. Разложить f на произведение σ-процессов.

5. Пусть f — бирациональный автоморфизм $\mathbf{P}^2$, задаваемый в неоднородных координатах формулами $x'=x$, $y'=y+x^2$. Разложить f на произведение σ-процессов.

6. Пусть $L\subset\mathbf{P}^2$ — прямая, x и y — две ее точки, $X\to\mathbf{P}^2$ — произведение σ-процессов в точках x и y и L' — собственный прообраз L. Доказать, что $(L')^2=-1$. Согласно теореме Кастельнуово, сформулированной в п. 6, существует регулярное отображение $f\colon X\to Y$, являющееся бирациональным изоморфизмом и стягивающее L' в точку. Построить его в данном случае. Указание. Поискать его среди предшествующих задач.

7. Пусть $f\colon X\to Y$ — регулярное отображение гладких проективных многообразий, являющееся бирациональным изоморфизмом. Доказать, что для $D_1, \ldots, D_n\in\operatorname{Div}(Y)$ имеем $(f^*(D_1), \ldots, f^*(D_n))=(D_1, \ldots, D_n)$.

8. Пусть $\sigma\colon X\to Y$ — σ-процесс с центром в точке $y\in Y$, $\Gamma=\sigma^{-1}(y)$, $D_1, \ldots, D_{n-1}\in\operatorname{Div}(Y)$. Доказать, что $(\Gamma, \sigma^*(D_1), \ldots, \sigma^*(D_{n-1}))=0$.

9. В обозначениях задачи 7 найти Γ^n при любом $n>1$.

10. Доказать, что если кривая степени n проходит через k ($k=0$, 1 или 2) из точек ξ_0, ξ_1 и ξ_2, определяющих квадратичное преобразование, и не имеет в этих точках особенностей, то ее образ при квадратичном преобразовании имеет степень $2n-k$.

11. Пусть φ — преобразование инверсии относительно окружности с центром в точке O радиуса 1, т. е. $\varphi(P)=Q$, где P, Q и O лежат на одной прямой и $|OP|\cdot|OQ|=1$. Выбрав начало координат в точке O, выписать формулы для φ в координатах x, y и $u=x+iy$, $v=x-iy$. Доказать, что φ после умножения на отражение $(u, v)\to(u, -v)$ переходит в квадратичное преобразование, определенное точкой O и двумя циклическими бесконечно удаленными точками. Вывести отсюда, что при инверсии окружности, проходящие через точку O, переходят в прямые, а остальные окружности — в окружности.

§ 4. Особенности

1. Особые точки кривых. Теорема 1. *Для неприводимой кривой C на гладкой поверхности X существует такая поверхность Y и регулярное отображение $f\colon Y\to X$, разлагающееся в последовательность σ-процессов $Y\to X_1\to X_2\to\ldots\to X_n\to X$, что собственный прообраз C' кривой C в Y гладок.*

Мы можем рассматривать каждую особую точку кривой C в отдельности. Если для точки $x\in C$ мы построим такое отображение $f\colon Y\to X$, разлагающееся в произведение σ-процессов, что собственный прообраз C' кривой C на Y будет иметь простыми все точки из $f^{-1}(x)$, то потом мы сможем применить то же рассуждение к оставшимся особым точкам кривой C' — число их равно числу отличных от x особых точек кривой C.

Итак, пусть $x\in C$ — особая точка. Произведем σ-процесс в этой точке; если среди прообразов точки x будут особые точки собственного прообраза кривой C, то произведем σ-процессы в этих точках и т. д. Нам надо доказать, что через конечное число шагов этот процесс оборвется.

Обозначим через $\mu_x(C)$ кратность особой точки x кривой C. Пусть $\sigma\colon X'\to X$ — σ-процесс, C' — собственный прообраз кривой C и $L=\sigma^{-1}(x)$. По следствию 2 в п. 2 § 3 $\mu_x(C)=(C',L)$. С другой стороны, $(C',L)=\sum_{\sigma(x')=x}(C',L)_{x'}$, где сумма распространена на все точки $x'\in C'$, $\sigma(x')=x$. Так как $(C',L)_{x'}\geqslant\mu_{x'}(C')$, то

$$\mu_x(C)\geqslant\sum_{\sigma(x')=x}\mu_{x'}(C').$$

Поэтому, если точек x' больше, чем одна, то для них $\mu_{x'}(C')<\mu_x(C)$ и через конечное число шагов наш процесс оборвется. Остается рассмотреть случай, когда на C' есть лишь одна точка x', $\sigma(x')=x$ — и так будет при каждом σ-процессе.

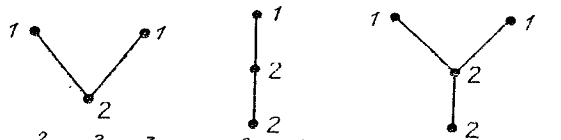
Обозначим через $\mathcal{O}_x$ локальное кольцо точки x на C, а через $\overline{\mathcal{O}}_x$ — его целое замыкание в поле $k(C)$. Оно является модулем конечного типа над $\mathcal{O}_x$. Это следует из того, что для некоторой аффинной окрестности U точки x нормализация $k[U]^\nu$ кольца $k[U]$ является модулем конечного типа над $k[U]$ (теорема 4 § 5 гл. II). Пусть $k[U]^\nu=\alpha_1k[U]+\ldots+\alpha_mk[U]$. Тогда $\overline{\mathcal{O}}_x=\alpha_1\mathcal{O}_x+\ldots+\alpha_m\mathcal{O}_x$.

Действительно, если $f\in\overline{\mathcal{O}}_x$, то $f^n+a_1f^{n-1}+\ldots+a_n=0$ с $a_i\in\mathcal{O}_x$, т. е. $a_i=b_i/c$, b_i, $c\in k[U]$; $c(x)\neq0$. Тогда cf цело над $k[U]$, т. е. $cf=\alpha_1r_1+\ldots+\alpha_mr_m$, где $r_i\in k[U]$ и $f=\alpha_1r_1/c+\ldots+\alpha_mr_m/c$.

Так как α_i лежит в поле частных $\mathcal{O}_x$ (даже меньшего кольца $k[U]$), то существует такое $d\neq0$, $d\in\mathcal{O}_x$, что $d\alpha_i\in\mathcal{O}_x$ и, значит, $d\overline{\mathcal{O}}_x\subset\mathcal{O}_x$. Отсюда следует, что пространство $\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x$ конечномерно. Действительно, его размерность не больше размерности пространства $\overline{\mathcal{O}}_x/d\overline{\mathcal{O}}_x$, которое порождается m подпространствами $\alpha_i(\mathcal{O}_x/d\mathcal{O}_x)$. Но пространство $\mathcal{O}_x/d\mathcal{O}_x$ конечномерно, так как C — кривая, и поэтому $(d)\supset\mathfrak{m}_x^h$ при некотором k для любой функции $d\neq0$.

Очевидно, что после одного σ-процесса $\mathcal{O}_x\subset\mathcal{O}_{x'}$. Кроме того, $\mathcal{O}_{x'}\subset\overline{\mathcal{O}}_x$. Действительно, пусть $\nu'\colon C^\nu\to C'$ — нормализация и $\{y_i\}=(\nu')^{-1}(x')$. Тогда $\nu=\sigma\nu'\colon C^\nu\to C$ совпадает с нормализацией C и $\nu^{-1}(x)=\{y_i\}$. Очевидно, что $\mathcal{O}_{x'}\subset\bigcap\mathcal{O}_{y_i}$ и все будет доказано, если проверить, что $\bigcap\mathcal{O}_{y_i}=\overline{\mathcal{O}}_x$. Опять очевидно, что $\overline{\mathcal{O}}_x\subset\bigcap\mathcal{O}_{y_i}$. Так как отображение ν конечно, то мы можем считать, что C и C^ν аффинны. Если $u\in\bigcap\mathcal{O}_{y_i}$, то все полюса этой функции на C^ν отличны от y_i, откуда следует, что существует функция $v\in k[C]$, для которой $v(x)\neq0$ и $uv\in k[C^\nu]$ (достаточно, чтобы $\nu^*(v)$ имела нули достаточно большой кратности в полюсах u). Тогда uv цело над $k[C]$, откуда легко следует, что u цело над $\mathcal{O}_x$, т. е. $u\in\overline{\mathcal{O}}_x$. Поэтому $l(\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_{x'})\leqslant l(\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x)$. Если $l(\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_{x'})=0$, то $\mathcal{O}_{x'}=\overline{\mathcal{O}}_x$, значит, $\mathcal{O}_{x'}$ целозамкнуто, а тогда точка x' проста и наш процесс закончился. Нам остается проверить, что $l(\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_{x'})<l(\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x)$, тогда наш процесс не может содержать более чем $l(\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x)$ шагов. Если $l(\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_{x'})=l(\overline{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x)$, то $\mathcal{O}_{x'}=\mathcal{O}_x$. Пусть u, v — локальные параметры в точке x на X, а в точке x' на X локальными параметрами будут u и $t=v/u$. Так как t (ограниченное на C) содержится в $\mathcal{O}_{x'}$, то из $\mathcal{O}_{x'}=\mathcal{O}_x$ следует, что $t\in\mathcal{O}_x$ и $\mathfrak{m}_x=(u,v)=(u,ut)=(u)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2=(u)/(u^2)\simeq\mathcal{O}_x/(u)\simeq k$, т. е. точка x уже была простой. Теорема доказана.

Теорема 1 дает возможность определить важную характеристику особой точки кривой, лежащей на поверхности: дерево бесконечно-близких точек. Это чертеж, изображающий особую точку, особые точки, возникающие из нее после одного σ-процесса, точки, возникающие из них после σ-процессов, и т. д. Все эти точки называются бесконечно-близкими к исходной. У каждой точки пишется ее кратность. После того как появилась точка кратности 1, σ-процессы в ней больше не производят. Примеры:



$y^2=x^2+x^3$ $\quad$ $y^2=x^5$ $\quad$ $y^2=x^2y^4+x^4$.

Через эти инварианты выражается род нормализации особой кривой, лежащей на гладкой проективной поверхности. Надо воспользоваться формулой (1) из п. 3 § 2 и выяснить, как изменяется выражение $(C,\ C+K)$ при замене C на $\sigma'(C)$, а K на $K_{X'}$, где $\sigma\colon X'\to X$ — σ-процесс в точке $x\in C$. Согласно теореме 1 § 3 $\sigma'(C)=\sigma^*(C)-kL$. Для вычисления $K_{X'}$ рассмотрим дифференциальную форму $\omega\in\Omega^2(X)$, для которой $\operatorname{Supp}(\omega)\not\ni x$,— она существует согласно теореме о сдвиге носителя дивизора с точки. Тогда в $X'\backslash L$, очевидно, $(\sigma^*\omega)=\sigma^*(\omega)$, поскольку $\sigma\colon X'\backslash L'\to X\backslash x$ — изоморфизм. Если $x,\ y$ — локальные параметры в точке x, то $\omega=f\,dx\wedge dy$, где $f\in\mathcal{O}_x$, $f(x)\neq 0$. Если $x=u,\ y=uv$ (как в (1) п. 1 § 3), то $\sigma^*\omega=\sigma^*(f)\,v\,du\wedge dv$ на X, и так как $\sigma^*(f)\neq 0$ на L, то $(\sigma^*\omega)=\sigma^*(\omega)+L$, а значит, $K_{X'}=\sigma^*K_X+L$. Подставляя в формулу (1) п. 3 § 2, мы получим

$$(\sigma'(C'),\ \ \sigma'(C')+K_{X'})=(\sigma^*(C)-kL,\ \ \sigma^*(C)+\sigma^*K_X-(k-1)L)=(C,\ C+K_X)-k(k-1).$$

Применяя теперь теорему 1, мы получим для неособой кривой $\bar C\subset Y$:

$$(\bar C,\ \bar C+K_Y)=(C,\ C+K_X)-\sum k_i(k_i-1),$$

где k_i — кратности всех бесконечно-близких точек. Из формулы (1) п. 3 § 2 следует, что

$$g(\bar C)=\frac{(C,\ C+K_X)}{2}+1-\sum\frac{k_i(k_i-1)}{2}. \tag{1}$$

В частности, если $X=\mathbf{P}^2$, а C — кривая степени n, то

$$g=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum\frac{k_i(k_i-1)}{2}.$$

Часто используемое следствие равенства (1): так как $g(\bar C)\geqslant 0$, то

$$(C,\ C+K_X)\geqslant -2, \tag{2}$$

причем равенство имеет место, только если кривая C — гладкая (все $k_i=1$) и $g(\bar C)=g(C)=0$, так что $C\simeq\mathbf{P}^1$.

2. Особые точки поверхностей. Для алгебраических поверхностей над полем произвольной характеристики доказана теорема о разрешении особенностей. Мы можем предполагать, что поверхность X нормальна и, следовательно, имеет только конечное число особых точек. Теорема о разрешении особенностей утверждает существование гладкой проективной поверхности Y, бирационально изоморфной X. Применяя теорему о разрешении точек неопределенности, мы можем считать, что задано регулярное отображение $f\colon Y\to X$, являющееся бирациональным изоморфизмом. Часто эту ситуацию удобно рассматривать локально и не предполагать многообразия X и Y проективными, заменяя X на его открытое множество U, а Y на $f^{-1}(U)$. Тогда отображение $f\colon Y\to X$ будет собственным (см. замечание к теореме 2 § 5 гл. I). Можно показать, что теорема 2 § 4 гл. 2 в этой ситуации остается верной и отображение f стягивает в каждую особую точку $x\in X$ некоторую систему проективных кривых $C_1,\ \ldots,\ C_r\in Y$. Более того, используя теорему Кастельнуово, сформулированную в п. 5 § 3, можно доказать, что Y можно выбрать так, чтобы среди кривых $C_1,\ \ldots,\ C_r$ не было -1-кривых. В этом случае Y называется *минимальным разрешением особенностей* поверхности X. Мы не будем доказывать все эти утверждения, но не будем ими и пользоваться: они послужат лишь мотивировкой вопросов, которые будут дальше разобраны.

Система кривых $C_1,\ \ldots,\ C_r$ на неособой поверхности Y, стягиваемых в точку $x\in X$ при регулярном отображении $f\colon Y\to X$, является важной геометрической характеристикой этой точки, и интересно выяснить, что вообще можно сказать о таких системах кривых.

Теорема 2. *Пусть $f\colon Y\to X$ — регулярное отображение алгебраических поверхностей, Y гладко, $C_1,\ \ldots$ $\ldots,\ C_r$ — проективные кривые на Y, x — точка на X, f*

является изоморфизмом: $Y \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_r) \xrightarrow{\sim} X \setminus x$. *Тогда матрица из индексов пересечений* $((C_i,\ C_j))$ *отрицательно определена.*

Доказательство. Рассмотрим кривую E на Y, которая отлична от всех C_i и пересекает каждую из них (например, гиперплоское сечение), положим $f(E) = H$ и возьмем функцию $u \in \mathcal{O}_x$, обращающуюся в 0 на H. Положим $g = f^*(u)$. Тогда $(g) = \sum m_i C_i + F$, где все $m_i > 0$ и $(F,\ C_i) > 0$ для $i = 1, \ldots, r$. Поэтому $\rho_{C_j}(D) \sim \rho_{C_j}(-F)$ для $D = \sum m_i C_i$, где ρ_{C_j} — ограничение на C_j, и поэтому $(D,\ C_j) < 0$ для $j = 1, \ldots, r$. Теорема вытекает теперь из следующего результата линейной алгебры:

Пусть в $\mathbf{Z}$*-модуле* M *определено скалярное произведение* $(a,\ b) \in \mathbf{Z}$ *для* $a,\ b \in M$, *имеется такая система образующих* $e_1, \ldots, e_r$, *что* $(e_i,\ e_j) \geqslant 0$ *для* $i \neq j$, *и существует такой элемент* $d = \sum m_i e_i$, $m_i > 0$, *что* $(d,\ e_i) < 0$ *для* $i = 1, \ldots, r$. *Тогда* $(m^2) < 0$ *для* $m \in M$ *и* $e_1, \ldots, e_r$ *— свободный базис* M.

Доказательство см. в Приложении, п. 1, предложение 2.

Интересно обратить внимание на аналогию теоремы 1 и теоремы Ходжа (п. 3 § 2).

Систему кривых $C_1, \ldots, C_r$, стягивающихся в особую точку x при ее минимальном разрешении, изображают графом, в котором каждую из кривых C_i изображают точкой, пересекающиеся кривые C_i и C_j соединяют отрезком, на отрезке пишут число $(C_i,\ C_j)$, если $(C_i,\ C_j) \neq 1$, и ничего не пишут, если $(C_i,\ C_j) = 1$ (т. е. кривые C_i и C_j пересекаются трансверсально в одной точке), и над точкой, соответствующей C_i, пишут (C_i^2).

Интересные примеры особенностей дают факторы $\mathbf{A}^2/G$ плоскости по конечной группе линейных преобразований G. Напомним, что это нормальные многообразия (пример 1 п. 1 § 5 гл. I), причем точки, являющиеся образами таких точек $x \in \mathbf{A}^2$, что $g(x) \neq x$ при $g \neq e$, являются простыми (пример п. 1 § 2 гл. II).

Пусть, например, $G = \{g\}$ — циклическая группа порядка n и $g(x,\ y) = (\varepsilon x,\ \varepsilon^q y)$, где ε — первообразный корень степени n из 1, $(q,\ n) = 1$. Можно показать, что после отбрасывания некоторых неинтересных случаев к такому виду приводится любое действие циклической группы. В этом случае группа G действует свободно на $\mathbf{A}^2 \setminus (0,\ 0)$ и, значит, $\mathbf{A}^2/G$ имеет единственную особую точку — образ точки $(0,\ 0) \in \mathbf{A}^2$. Она называется особенностью типа $(n,\ q)$.

Например, при $q = -1$ образующими кольца $k[x,\ y]^G$ являются $u = x^n$, $v = y^n$, $w = xy$, связанные соотношением

$$uv = w^n. \tag{1}$$

Это и есть уравнение поверхности $\mathbf{A}^2/G$.

При $q = 1$ образующими кольца $k[x,\ y]^G$ являются $u_i = x^i y^{n-i}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Они связаны теми же соотношениями, что и координаты кривой Веронезе (п. 4 § 5 гл. I). Таким образом, в этом случае $\mathbf{A}^2/G$ — это конус над кривой Веронезе.

Нетрудно проверить, что граф, соответствующий произвольной особенности типа $(n,\ q)$, имеет вид цепочки

$$\overset{-e_1}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!\overset{-e_2}{\bullet}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \overset{-e_{n-1}}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!\overset{-e_n}{\bullet}.$$

Кривые C_i и C_{i+1} пересекаются трансверсально, а $(C_i^2) = -e_i$, где числа $e_i \geqslant 2$ и определяются из разложения, очень близкого к разложению в непрерывную дробь

$$\frac{n}{q} = e_1 - \cfrac{1}{e_2 - \cfrac{1}{e_3 \ddots}}$$

Доказательство см., например, в [15].

3. Особенности Дю Валя. Очень важный тип особенностей характеризуется следующим свойством.

Определение. Точка $x \in X$ нормальной поверхности называется *особой точкой Дю Валя* *), если существует такое минимальное разрешение особенностей $f\colon Y \to X$, стягивающее кривые $C_1, \ldots, C_r$ в точку x, что $(C_i,\ K_Y) = 0$, где K_Y — канонический класс поверхности Y.

Значение особенностей Дю Валя заключается в том, что они (как это формулировал сам Дю Валь) «не влияют на канонический класс». Например, легко показать, что если X — поверхность в $\mathbf{P}^3$ степени n, имеющая только особенности Дю Валя, то инвариант $h^2 = \dim \Omega^2[X]$

---

*) Другие применяемые термины: особенность Клейна, двойная рациональная особая точка, простейшая особенность.

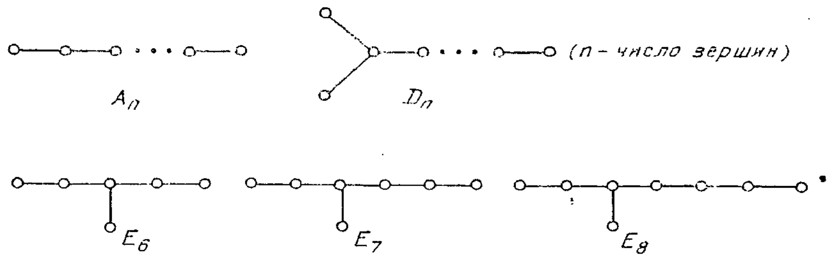
для ее минимального разрешения Y тот же, что и для неособой поверхности степени n. Это резко отличает поверхности от кривых, для которых, согласно формуле (1) п. 1, появление любой особой точки понижает род нормализации кривой.

Можно полностью определить вид графов, соответствующих особым точкам Дю Валя. Действительно, если C_i — одна из неприводимых проективных кривых, стягиваемых в такую точку при разрешении особенностей $f: Y \to X$, то $(C_i, K_Y) = 0$ и, согласно неравенству (2) п. 1,

$$(C_i^2) \geqslant -2.$$

Так как $(C_i^2) < 0$ и даже (ввиду минимальности разрешения) $(C_i^2) < -1$, то отсюда следует, что $(C_i^2) = -2$ и $C_i \simeq \mathbf{P}^1$. Из того, что $(C_i + C_j)^2 < 0$ при $i \neq j$, следует теперь, что $(C_i, C_j) \leqslant 1$, т. е. C_i и C_j или не пересекаются, или пересекаются трансверсально в одной точке.

Чисто алгебраическая задача классификации $\mathbf{Z}$-модулей $\mathbf{Z}e_1 + \ldots + \mathbf{Z}e_r$, в которых определено скалярное произведение (x, y) со свойствами $(x^2) < 0$ при $x \neq 0$, $(e_i^2) = -2$, встречается в ряде вопросов. Впервые с ней столкнулись в так называемой теории корней в связи с классификацией простых алгебр Ли (см. [7]). Ответ следующий. Базис $e_1, \ldots, e_r$ разбивается на «связные компоненты» такие, что $(e_i, e_j) = 0$, если e_i и e_j лежат в разных компонентах, и соответственно модуль разлагается в прямую сумму подмодулей, соответствующих разным компонентам. Тем самым задача сводится к описанию «связных» модулей, которые могут иметь лишь следующие графы:



Здесь над всеми точками надо написать -2.

Можно доказать, что система кривых, возникающая при разрешении особой точки, всегда связна. При $\mathbf{k} = \mathbf{C}$

мы поясним это в гл. VII. Таким образом, особенностям Дю Валя соответствуют лишь графы типов A_n, D_n, E_6, E_7 и E_8.

Доказано, что своим графом особенность Дю Валя определяется однозначно с точностью до формально-аналитической эквивалентности. Их можно задать уравнениями

$$A_n:\ x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0,$$

$$D_n:\ x^2 + y \cdot z^2 + z^{n-1} = 0, \quad n \geqslant 4;$$

$$E_6:\ x^2 + y^3 + z^4 = 0,$$

$$E_7:\ x^2 + y^3 + yz^3 = 0,$$

$$E_8:\ x^2 + y^3 + z^5 = 0.$$

Одна из реализаций этих особенностей такова.

Теорема 3. *Пусть поле* $\mathbf{k}$ *имеет характеристику* 0 *и* G — *конечная группа линейных преобразований плоскости* $\mathbf{A}^2$, *причем* $\det(g) = 1$ *для всех* $g \in G$. *Тогда образ начала координат* $y = \mathbf{A}^2/G$ *является особенностью Дю Валя.*

Доказательство использует следующую конструкцию, которую мы во всей общности обсудим в гл. V. Пусть X, Y и S — три многообразия, а $f: X \to S$ и $h: Y \to S$ — регулярные отображения. *Расслоенным произведением* X и Y над S называется замкнутое подмножество в $X \times Y$, состоящее из точек (x, y), для которых $f(x) = h(y)$. Оно обозначается $X \underset{S}{\times} Y$. Отображения $f: X \to S$ и $h: Y \to S$ определяют отображение $X \underset{S}{\times} Y \to S$, проекции $X \times Y \to X$ и $X \times Y \to Y$ — проекции $X \underset{S}{\times} Y \to X$ и $X \underset{S}{\times} Y \to Y$.

Пусть $h: X \to \mathbf{A}^2/G = S$ — минимальное разрешение особой точки $y_0 \in \mathbf{A}^2/G$. Рассмотрим расслоенное произведение $Z = \mathbf{A}^2 \underset{S}{\times} X$ и его нормализацию Z^ν. (Мы пользуемся здесь существованием нормализации, которое было доказано в гл. II лишь для аффинных многообразий и кривых. В гл. VI нормализация будет построена в общности, достаточной для наших целей.) Мы имеем систему отображений:

$$\begin{tikzcd} & Z^{\nu} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathbf{A}^2 \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "h"] \\ & \mathbf{A}^2/G & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = dx \wedge dy$ на $\mathbf{A}^2$. Из условия $\det g = 1$ следует, что $g^*\omega = \omega$. Запишем ω в виде $h\, ds \wedge dt$, где $s,\ t \in \mathrm{k}(\mathbf{A}^2/G)$, $h \in \mathrm{k}(\mathbf{A}^2)$. Тогда из того, что $g^*\omega = \omega$, следует, что $g^*h = h$. Записав h в виде P/Q, P, $Q \in \mathrm{k}[\mathbf{A}^2]$, мы видим, что $h = P \prod\limits_{g \neq e} g^*Q \Big/ \prod\limits_{g} g^*Q$, откуда следует, что $h \in \mathbf{k}(\mathbf{A}^2/G)$. Таким образом, $\omega = f^*\omega_0$, $\omega_0 \in \Omega^2(\mathbf{A}^2/G)$. Обозначим $h^*\omega_0$ через ω_1, а $q^*\omega_1 = p^*\omega$ — через $\bar{\omega}$. Из того, что $\omega = p^*\omega$, следует, что $\bar{\omega}$ регулярна на множестве простых точек поверхности Z^{ν}. С другой стороны, легко проверить, что для произвольных отображений $f\colon X \to S$, $h\colon Y \to S$ из того, что f конечно, следует, что и отображение $X \underset{S}{\times} Y \to X$ конечно. Поэтому $Z \to X$ конечно, а значит, и $Z^{\nu} \to X$ конечно. Воспользуемся следующим фактом.

Лемма. *Если $\varphi\colon U \to V$ — конечное отображение гладких поверхностей и ω_1 — такая рациональная дифференциальная форма на V, что $\varphi^*\omega_1$ регулярна, то и ω_1 регулярна.*

Доказательство будет приведено после доказательства теоремы. Из леммы следует, что ω_1 регулярна вне образа конечного множества особых точек поверхности Z^{ν}, а значит, регулярна на всем X. Определим дивизор (ω_1) на X. В любой точке $\alpha \in \mathbf{A}^2$, $\alpha \neq (0, 0)$, можно найти локальные параметры вида $f^*(u)$, $f^*(v)$ (см. пример п. 1 § 2 гл. II), откуда следует, что ω_0 регулярна и не равна 0 во всех точках $y \neq y_0 \in \mathbf{A}^2/G$ (а эти точки — простые). Точно так же h является изоморфизмом в $X \setminus f^{-1}(y_0)$ и ω_1 отлична от 0 в $X \setminus f^{-1}(y_0)$. Таким образом, $D = (\omega_1) = \sum r_i C_i$, $r_i \geqslant 0$. Очевидно, что $D \in K_X$. Из неравенства (2) п. 1 ввиду минимальности разрешения мы получаем, что $(C_i, D) = (C_i, K_X) \geqslant 0$. Но тогда $(D^2) = \sum r_i (C_i, D) \geqslant 0$, что возможно, по теореме 1, только при $(C_i, D) = 0$.

Таким образом, $(C_i, K_X) = 0$, т. е. y_0 — особенность Дю Валя. Теорема доказана.

Доказательство леммы. Достаточно проверить для любой неприводимой кривой $C \subset V$, что если $\nu_C((\omega_1)) < 0$, то и $\nu_{C'}(\varphi^*(\omega_1)) < 0$ для любой компоненты C' прообраза C. Это утверждение достаточно проверить на любом открытом подмножестве $V' \subset V$, пересекающем C.

Вся нетривиальность вопроса состоит в том, что, вообще говоря, $\varphi^*((\omega_1)) \neq (\varphi^*(\omega_1))$. Однако, если в точке $\alpha \in U$ дифференциал $d_\alpha\varphi$ является изоморфизмом касательных пространств $\Theta_{\alpha, U}$ и $\Theta_{\varphi(\alpha), V}$, то прообразы $\varphi^*(v_1)$ и $\varphi^*(v_2)$ локальных параметров v_1 и v_2 в точке $\varphi(\alpha)$ являются локальными параметрами в α. Поэтому, если $\omega_1 = f\, dv_1 \wedge dv_2$, то $\varphi^*(\omega_1) = \varphi^*(f)\, d\varphi^*(v_1) \wedge d\varphi^*(v_2)$ имеет в окрестности α дивизор $(\varphi^*(f)) = \varphi^*(f) = \varphi^*((\omega_1))$. Поэтому надо только рассмотреть такую кривую $C' \subset U$, что $d_\alpha\varphi$ вырождено во всех точках $\alpha \in C'$. Пусть $\varphi(C') = C$. Так как на открытом множестве отображение $\varphi\colon C' \to C$ отображает касательное пространство изоморфно, то мы можем предполагать, что в точке α локальное уравнение кривой C' имеет вид $\varphi^*(v_1)$, где v_1, v_2 — локальные параметры в $\varphi(\alpha)$ и v_1 — локальное уравнение C. Положим $w = v_1$, и пусть (w, t) — локальные параметры в α. Пусть $\varphi^*(v_2) = t^e h$, где $\nu_{C'}(h) = 0$, а $\omega_1 = f\, dv_1 \wedge dv_2$. Тогда

$$\varphi^*(\omega_1) = \varphi^*(f)\, dw \wedge d(\varphi^*(v_2)) =$$
$$= \varphi^*(f)\left(et^{e-1}h\, dw \wedge dt + t^e dw \wedge dh\right),$$

откуда следует, что $\nu_{C'}(\varphi^*(\omega_1)) = \nu_{C'}(\varphi^*(f)) + e - 1$. Но если C входило в дивизор полюсов формы ω_1, то $\nu_C(f) = -l$, $l > 0$. Тогда $\nu_{C'}(\varphi^*(\omega_1)) = -le + e - 1$ и тоже < 0. Иными словами, к дивизору $\varphi^*((\omega_1))$ прибавляется эффективное слагаемое, но не достаточное, чтобы компенсировать возникающий полюс. Лемма доказана.

Группы G, о которых идет речь в теореме 3, хорошо известны. Обозначим через $\mathrm{SL}(2, \mathrm{k})$ группу линейных преобразований с определителем 1 и рассмотрим ее гомоморфизм $\pi\colon \mathrm{SL}(2, \mathrm{k}) \to \mathrm{PSL}(2, \mathrm{k})$ в группу проективных преобразований прямой. Ядро π состоит из ± 1. Тогда конечные подгруппы $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathrm{k})$ таковы: это или циклическая группа порядка n, состоящая из преобразований $(x, y) \to (\varepsilon x, \varepsilon^{-1} y)$, $\varepsilon^n = 1$, или так называемая бинарная группа диэдра, порожденная преобразованиями $(x, y)\to(\varepsilon x, \varepsilon^{-1}y)$, $\varepsilon^{2n}=1$, и $(x, y)\to(iy, ix)$, или прообраз относительно π групп в $\mathrm{PSL}(2, \mathrm{k})$, изоморфных группам тетраэдра, куба и икосаэдра. Порядки соответствующих групп G равны n, $4n$, 24, 48, 120 (см., например, [27]). Нетрудно найти тип соответствующих им особенностей Дю Валя. Он оказывается: A_{n-1} для циклической группы порядка n, D_{n+2} для группы диэдра порядка $4n$, E_6, E_7 и E_8 для групп, связанных с тетраэдром, кубом и икосаэдром (см. [15]).

4. Вырождения кривых. Пусть X — гладкая проективная неприводимая поверхность, S — кривая, $s_0\in S$, f: $X\to S$ — регулярное отображение, причем $f(X)=S$ и $f^{-1}(s)$ для всех точек $s\in S$, $s\neq s_0$, является гладкой кривой. Мы можем рассматривать $\{f^{-1}(s),\ s\in S\backslash s_0\}$ как семейство гладких кривых, а $f^{-1}(s_0)$ — как его вырождение. Согласно теореме Кастельнуово, сформулированной в п. 3 § 3, любую —1-кривую, являющуюся компонентой кривой $f^{-1}(s_0)$, можно сжать в точку, не нарушая гладкости поверхности X. Поэтому дальше предполагается, что таких компонент нет. Кроме того, можно доказать, что кривая $f^{-1}(s_0)$ связна, т. е. не может быть представлена как объединение двух замкнутых непересекающихся кривых. В случае $\mathrm{k}=\mathbf{C}$ это будет доказано в гл. VII.

Теорема 4. *Пусть в предшествующих предположениях $f^*(s_0)$ (как дивизор — прообраз дивизора, состоящего из одной точки s_0) представляется в виде $\sum r_iC_i$, $r_i>0$, где C_i — неприводимые компоненты. Тогда для $D=\sum l_iC_i$ всегда $(D^2)\leqslant 0$ и $(D^2)=0$, только если D пропорционален $\sum r_iC_i$.*

Очевидно, что $\sum r_iC_i=f^*(s_0)\sim f^*(\Delta)$, где Δ — дивизор на C, не содержащий точки s_0. Поэтому $\rho_{C_i}(f^*(s_0))\sim$ $\sim\rho_{C_i}(f^*(\Delta))=0$, где ρ_{C_i} — ограничение на компоненту C_i. Отсюда следует, что $(C_i, f^*(s_0))=0$, т. е. $(\xi, \sum r_iC_i)=$ $=0$ для любого $\xi=\sum l_iC_i$. В частности, $(f^*(s_0)^2)=0$. Теорема 4 вытекает теперь из следующего результата линейной алгебры:

Пусть в свободном $\mathbf{Z}$-модуле M определено скалярное произведение $(a, b)\subset\mathbf{Z}$ для a, $b\in M$ и имеется такой базис $e_1, \ldots, e_r$, что $(e_i, e_j)\geqslant 0$, причем $e_1, \ldots, e_r$ нельзя разбить на две части так, что $(e_i, e_j)=0$ для e_i и e_j из разных частей и существует такой элемент $d=\sum l_ie_i$, $l_i>0$, что $(d, e_i)=0$ $(i=1, \ldots, r)$. Тогда $(m^2)\leqslant 0$ для $m\in M$ и $(m^2)=0$ только для m, пропорционального d.

Доказательство см. в Приложении, п. 1, предложение 3.

Интересно отметить промежуточное положение теоремы 4 между теоремой Ходжа из § 2 и теоремой 2 этого параграфа: теорема 4 касается кривых, лежащих в слое отображения f: $X\to C$, где C — кривая, теорема 2 — отображения $X\to Y$, где Y — поверхность, а теорема Ходжа — отображения $X\to z$, где z — точка.

Исследуем простейшие примеры ситуации, описанной в теореме 4. Если род кривых $f^*(s)$, $s\neq s_0$, равен 0, т. е. они изоморфны $\mathbf{P}^1$, то можно доказать, что вырождения не будет, т. е. и кривая $f^{-1}(s_0)$ — гладкая и изоморфна $\mathbf{P}^1$. См., например, [1], гл. V, и [12], гл. IV, § 5.

Следующий по сложности случай — когда род кривых $f^{-1}(s)$, $s\neq s_0$, равен 1, т. е. они изоморфны неособой плоской кубике. Рассмотрим пучок эллиптических кривых X (пример 2 в § 6 гл. II). Он задается уравнением $\xi_2^2\xi_0=\xi_1^3+a(t)\,\xi_1\xi_0^2+b(t)\,\xi_0^3$ в $\mathbf{P}^2\times\mathbf{A}^1$. В аффинной части $\mathbf{A}^2\times\mathbf{A}^1$ это уравнение приобретает вид $y^2=x^3+$ $+a(t)x+b(t)$. Слой отображения f: $X\to\mathbf{A}^1$ над точкой $a\in\mathbf{A}^1$ будет гладким, когда $\Delta(a)\neq 0$, где $\Delta=4a^3+27b^2$. Мы предположим, что $\Delta\neq 0$ тождественно на $\mathbf{A}^1$, но $\Delta(0)=0$, и исследуем слой $f^{-1}(0)$. Чтобы иметь дело с проективной поверхностью, мы рассмотрим замыкание X в $\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^1\supset\mathbf{P}^2\times\mathbf{A}^1$. Полученная поверхность, вообще говоря, негладкая: точки слоя $f^{-1}(a)$ будут простыми, если $\Delta(a)\neq 0$, но при $\Delta(a)=0$ это будет так, лишь если a — простой корень (см. § 6 гл. II). Мы рассмотрим минимальное разрешение φ: $Y\to X$, которое будет отображаться на $\mathbf{P}^1$, g: $Y\to\mathbf{P}^1$, $g=f\cdot\varphi$, причем в точках с $\Delta(a)\neq 0$ слои будут те же, что и у исходного пучка.

На поверхности Y рассмотрим дифференциальную форму $\omega=y^{-1}\,dx\wedge dy$. Легко видеть, что в точках $a\in\mathbf{A}^1$, где $\Delta(a)\neq 0$, эта форма регулярна и не обращается в 0. (Это связано с тем, что форма $y^{-1}dx$ регулярна и не равна 0 на кривой $f^{-1}(a)$.) Отсюда следует, что канонический класс K_Y содержит дивизор, состоящий лишь из компонент слоев. Пусть $g^*(0)=\sum r_iC_i$, $r_i>0$, C_i — компоненты слоя $g^{-1}(0)$. Мы запишем K_Y в виде $\sum n_iC_i+D$, где D состоит из компонент слоев, отличных от $g^{-1}(0)$. Так как $g^*(0) \sim g^*(b)$, где $b \neq 0$, то, прибавляя $g^*(0) - g^*(b)$, можно добиться того, что все $n_i > 0$. Так как все слои $f^*(b)$ эквивалентны, то $(f^*(b), K_Y) = 0$. Разберем два случая.

А. Слой $f^{-1}(0)$ неприводим. Пусть это кривая C. Так как в этом случае $(C^2) = 0$ и $(C, K_Y) = 0$, то из соотношения (1) п. 1 и того, что $g(C) > 0$, мы получаем, что $\sum \frac{k_i(k_i-1)}{2} \leqslant 1$, т. е. равна 0 или 1. Если эта сумма равна 0, то C — гладкая кривая. Если она равна 1, то C имеет одну особую точку кратности 2, которая разрешается одним σ-процессом. Отсюда следует, что особая точка формально-аналитически эквивалентна особой точке $y^2 = x^2$ или $y^2 = x^3$ (ср. задачу 12 к § 3 гл. II). Именно такие особые точки возникают у плоских кубик.

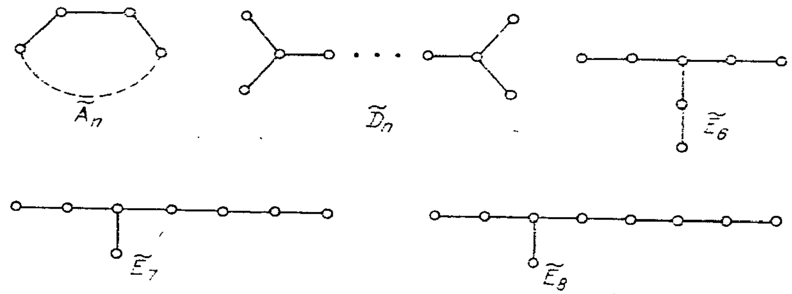
В. Слой $f^{-1}(0)$ приводим. Тогда по теореме 4 $(C_i^2) < 0$ для любой компоненты слоя. Если $(K^2) < 0$, то, записывая K в виде $K_X = \sum n_j C_j + D$, $\operatorname{Supp} D \cap f^{-1}(0) = \varnothing$, мы видим, что $(C_i, K) < 0$ хоть для одной компоненты C_i. Неравенство (9) п. 1 дает тогда $(C_i^2) = -1$, $g = 0$, $k_i = 1$, т. е. C_i является -1-кривой (ср. п. 5 § 3), а мы предположили, что таких компонент в слое нет. Поэтому $(K^2) = 0$, а значит, по теореме 4 K пропорционален слою $f^*(0)$ и, следовательно, $(C_i, K) = 0$. Теперь неравенство (2) п. 1 дает, что $g = 0$, $k_j = 1$, т. е. все компоненты слоев изоморфны $\mathbf{P}^1$ и для них $(C_i^2) = -2$.

Если в слое всего две компоненты и $f^*(0) = n_1C_1 + n_2C_2$, то $(n_1C_1 + n_2C_2)^2 = 0$ и $(C_1, C_2) = \frac{n_1^2 + n}{n_1 n_2} \leqslant 2$, что для целых n_1 и n_2 возможно лишь при $(C_1, C_2) = 2$. Кривые C_1 и C_2 могут пересекаться в двух точках трансверсально или иметь одну точку касания.

Если число компонент в слое больше 2, то $(C_i + C_j)^2 < 0$, откуда $(C_i, C_j) = 0$ или 1. Таким образом, кривые C_i и C_j или не пересекаются, или пересекаются трансверсально. Систему кривых $C_1, \ldots, C_r$ изображают в виде графа, принимая те же соглашения, что и в связи с разрешением изолированных особых точек.

Мы видим, что они определяют базис $\mathbf{Z}$-модуля $\oplus \mathbf{Z}C_i$, удовлетворяющего условиям теоремы 5 и дополнительному условию $(C_i^2) = -2$. Все такие $\mathbf{Z}$-модули

были найдены в связи с теорией корней. Их графы таковы:



См. [7].

Связь с теорией особенностей Дю Валя такова. Пусть эллиптический пучок задан уравнением

$$y^2 = x^3 + a(t)x + b(t), \qquad (1)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены. Мы будем предполагать, что они не делятся одновременно на 4-ю и 6-ю степень одного многочлена $c(t)$ — иначе бирациональным преобразованием $y = y_1c^3$, $x = x_1c^2$ можно было бы от этого множителя избавиться. Тогда поверхность (1) имеет на каждом слое $f^{-1}(a)$, где $\Delta(a) = 0$, особую точку Дю Валя, а ее минимальное разрешение и дает слой неособой поверхности, который состоит, таким образом, из кривых, возникающих при разрешении, и прообраза слоя. При этом из особой точки типа A_n возникает слой типа $\tilde{A}_n$, из D_n — слой $\tilde{D}_n$, из E_i — слой $\tilde{E}_i$ $(i = 6, 7, 8)$.

ЗАДАЧИ

1. Найти граф бесконечно-близких точек для особенности вида $y^2 = x^n$.

2. Обобщить понятие класса (задача 20 к § 5 гл. III) на кривые с особыми точками. Доказать, что класс плоской проективной кривой степени n с d простейшими особыми точками равен $n(n-1) - d$.

3. Какие особые точки кривой, лежащей на поверхности, разрешаются одним σ-процессом? Дать их характеристику в терминах локального уравнения кривой: совокупности его членов степени r и $r+1$, если r — кратность особой точки.

4. Доказать, что для плоской неприводимой кривой степени n $\sum r_i(r_i - 1) \leqslant (n-1)(n-2)$, где r_i — кратности особых точек. Проанализировать случаи, когда это неравенство превращается в равенство.

5. Для особенности Дю Валя вида $\mathbf{A}^2/G$, $G = \{g\}$, типа $(n, -1)$ найти соответствующий ей граф, производя последовательно

σ-процессы в точке $(0, 0, 0)$ трехмерного пространства, содержащего поверхность $\mathbf{A}^2/G$, и в особых точках, возникающих после σ-процессов.

6. Предположим, что для гладкой проективной поверхности X и некоторого $n > 0$ рациональное отображение φ, соответствующее классу nK_X, регулярно и является бирациональным изоморфизмом. Доказать, что поверхность $\varphi(X)$ имеет только особенности Дю Валя.

7. Найти все типы вырожденных слоев пучка эллиптических кривых в вейерштрассовой форме, для которых $D = 4a^3 + 27b^2$ имеет в точке вырождения двукратный корень.

8. Разрешить особенность поверхности $y^2 = x^3 + \alpha t^2 x + \beta t^3$, где $\alpha, \beta \in \mathrm{k}$, $4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$. Для этого произвести σ-процесс в точке $(0, 0, 0)$ объемлющего пространства, потом σ-процессы во вновь возникающих особых точках и т. д. Доказать, что особая точка является особенностью Дю Валя типа D_4, а особый слой пучка эллиптических кривых, возникающего после ее разрешения, имеет тип $\tilde{D}_4$.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Линейная алгебра

Напомним, что скалярным произведением на абелевой группе $\mathfrak{a}$ со значениями в абелевой группе $\mathfrak{B}$ называется функция (a, b) для $a, b \in \mathfrak{a}$ со значениями в $\mathfrak{B}$, удовлетворяющая условиям

$$(b, a) = (a, b), \tag{1}$$

$$(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b). \tag{2}$$

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольная абелева группа, $\mathfrak{B}$ — абелева группа, в которой возможно и однозначно деление на 2. Функция $f(a)$ на $\mathfrak{a}$ со значениями в $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда может быть представлена в виде (a, a), где (a, b) — некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{a}$ со значениями в $\mathfrak{B}$, когда*

$$f(a+b) + f(a-b) = 2(f(a) + f(b)). \tag{3}$$

Доказательство. Из (1) и (2) сразу следует (3) при $f(a) = (a, a)$. Предположим, что выполнено (3), и положим

$$(a, b) = \frac{1}{2}(f(a+b) - f(a) - f(b)). \tag{4}$$

Тогда (1) очевидно, а (2) означает, что

$$(a+b, c) - (a, c) - (b, c) = 0. \tag{5}$$

Обозначим левую часть этого выражения через (a, b, c). Из (4) следует, что $2(a, b, c) = f(a+b+c) - f(a+b) - f(a+c) - f(b+c) + f(a) + f(b) + f(c)$, а поэтому (a, b, c) симметрично относительно a, b и c. Из (3) при $a = b = 0$ следует, что $f(0) = 0$, а при $a = 0$ — что $f(-b) = f(b)$. Отсюда и из (3) и (4) получаем, что $(a, -b) = -(a, b)$, а значит, ввиду (1) $(-a, b) = -(a, b)$. Все это вместе дает нам, что $(a, b, -c) = -(a, b, c)$ и по симметрии такое же равенство для b и a. Но из (5) мы так-

σ-процессы в точке (0, 0, 0) трехмерного пространства, содержащего поверхность $\mathbf{A}^2/G$, и в особых точках, возникающих после σ-процессов.

6. Предположим, что для гладкой проективной поверхности X и некоторого $n > 0$ рациональное отображение φ, соответствующее классу nK_X, регулярно и является бирациональным изоморфизмом. Доказать, что поверхность $\varphi(X)$ имеет только особенности Дю Валя.

7. Найти все типы вырожденных слоев пучка эллиптических кривых в вейерштрассовой форме, для которых $D = 4a^3 + 27b^2$ имеет в точке вырождения двукратный корень.

8. Разрешить особенность поверхности $y^2 = x^3 + \alpha t^2 x + \beta t^3$, где $\alpha, \beta \in \mathrm{k}$, $4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$. Для этого произвести σ-процесс в точке (0, 0, 0) объемлющего пространства, потом σ-процессы во вновь возникающих особых точках и т. д. Доказать, что особая точка является особенностью Дю Валя типа D_4, а особый слой пучка эллиптических кривых, возникающего после ее разрешения, имеет тип $\tilde{D}_4$.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Линейная алгебра

Напомним, что скалярным произведением на абелевой группе $\mathfrak{a}$ со значениями в абелевой группе $\mathfrak{B}$ называется функция (a, b) для $a, b \in \mathfrak{a}$ со значениями в $\mathfrak{B}$, удовлетворяющая условиям

$$(b, a) = (a, b), \tag{1}$$

$$(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b). \tag{2}$$

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольная абелева группа, $\mathfrak{B}$ — абелева группа, в которой возможно и однозначно деление на 2. Функция $f(a)$ на $\mathfrak{a}$ со значениями в $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда может быть представлена в виде (a, a), где (a, b) — некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{a}$ со значениями в $\mathfrak{B}$, когда*

$$f(a+b) + f(a-b) = 2(f(a) + f(b)). \tag{3}$$

Доказательство. Из (1) и (2) сразу следует (3) при $f(a) = (a, a)$. Предположим, что выполнено (3), и положим

$$(a, b) = \frac{1}{2}(f(a+b) - f(a) - f(b)). \tag{4}$$

Тогда (1) очевидно, а (2) означает, что

$$(a+b, c) - (a, c) - (b, c) = 0. \tag{5}$$

Обозначим левую часть этого выражения через (a, b, c). Из (4) следует, что $2(a, b, c) = f(a+b+c) - f(a+b) - f(a+c) - f(b+c) + f(a) + f(b) + f(c)$, а поэтому (a, b, c) симметрично относительно a, b и c. Из (3) при $a = b = 0$ следует, что $f(0) = 0$, а при $a = 0$ — что $f(-b) = f(b)$. Отсюда и из (3) и (4) получаем, что $(a, -b) = -(a, b)$, а значит, ввиду (1) $(-a, b) = -(a, b)$. Все это вместе дает нам, что $(a, b, -c) = -(a, b, c)$ и по симметрии такое же равенство для b и a. Но из (5) мы также получаем, что $(-a, -b, c) = -(a, b, c)$, в то время как по доказанному ранее $(-a, -b, c) = (a, b, c)$. Поэтому $(a, b, c) = 0$.

Предложение 2. *Пусть в* $\mathbf{Z}$*-модуле* M *определено скалярное произведение* $(a, b) \in \mathbf{Z}$ *для* $a, b \in M$, *причем имеется такая система образующих* $e_1, \ldots, e_r$, *что* $(e_i, e_j) \geqslant 0$ *для* $i \neq j$ *и существует элемент* $d = \sum_1^r m_i e_i$, *для которого* $m_i > 0$ *и* $(d, e_i) < 0$ *для* $i = 1, \ldots, r$. *Тогда* $(m, m) < 0$ *для* $m \in M$, $m \neq 0$, *и* $e_1, \ldots, e_r$ *независимы в* M.

Доказательство. Построим модуль $\widetilde{M}$ со свободным базисом $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r$ над $\mathbf{Z}$ и определим в нем скалярное произведение $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$ условием $\varphi(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = (e_i, e_j)$. Положим $\tilde{d} = \sum m_i \tilde{e}_i$, тогда $\varphi(\tilde{d}, \tilde{e}_i) < 0$. Мы докажем, что $\varphi(\tilde{x}, \tilde{x}) < 0$ для $\tilde{x} \neq 0$. Отсюда уже будет следовать, что отображение $\widetilde{M} \to M$, определенное условием $\tilde{e}_i \to e_i$, является изометрией, а значит — изоморфизмом, и поэтому $e_1, \ldots, e_r$ независимы в M.

Очевидно, можно вложить $\widetilde{M}$ в пространство $L = \oplus \tilde{e}^i \mathbf{R}$ с сохранением произведения φ. Определим скалярное произведение φ_0 тем, что в нем базис $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r$ — ортонормированный. Тогда $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varphi_0(A\tilde{x}, \tilde{y})$ для некоторого симметрического линейного преобразования A. Если φ не является отрицательно определенным, то максимальное собственное значение λ преобразования A неотрицательно. Пусть $A\tilde{x} = \lambda\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — вектор с неотрицательными координатами в базисе $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r$, получающийся изменением знаков координат вектора $\tilde{x}$. Тогда $\lambda = \sup \frac{\varphi(\tilde{u}, \tilde{u})}{\varphi_0(\tilde{u}, \tilde{u})}$, $\frac{\varphi(\tilde{x}, \tilde{x})}{\varphi_0(\tilde{x}, \tilde{x})} = \lambda$, $\varphi_0(\tilde{y}, \tilde{y}) = \varphi_0(\tilde{x}, \tilde{x})$ и $\varphi(\tilde{x}, \tilde{x}) = \varphi_0(A\tilde{x}, \tilde{x}) \leqslant \varphi(\tilde{y}, \tilde{y})$ ввиду положительности чисел $\varphi_0(A\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$ при $i \neq j$. Поэтому $\varphi(\tilde{y}, \tilde{y}) = \lambda\varphi_0(\tilde{y}, \tilde{y})$, откуда $A\tilde{y} = \lambda\tilde{y}$, с $\lambda \geqslant 0$. Очевидно,

$$\lambda\varphi_0(\tilde{y}, \tilde{d}) = \varphi_0(A\tilde{y}, \tilde{d}) = \varphi_0(\tilde{y}, A\tilde{d}).$$

Число слева $\geqslant 0$, так как $\tilde{y}$ имеет неотрицательные, а $\tilde{d}$ — положительные координаты. Число же справа отрицательно, так как координаты $A\tilde{d}$ отрицательны. Полученное противоречие доказывает предложение.

Предложение 3. *Пусть в* $\mathbf{Z}$*-модуле* M *задано скалярное произведение* $(a, b) \in \mathbf{Z}$ *для* $a, b \in M$, *причем имеется система образующих* $e_1, \ldots, e_r$, *для которой* $(e_i, e_j) \geqslant 0$ *при* $i \neq j$, *и элемент* $d = \sum_1^r l_i e_i$, *для которого* $l_i > 0$, $(d, e_i) = 0$ *для* $i = 1, \ldots, r$. *Тогда* $(m, m) \leqslant 0$ *для* $m \in M$. *Если элементы* $e_1, \ldots, e_r$ *нельзя разбить на две группы так, что* $(e_i, e_j) = 0$, *если* e_i *и* e_j *принадлежат разным группам, то* $(m, m) = 0$ *только при* m, *пропорциональном* d.

Доказательство почти то же, что и для предложения 2. Рассуждая от противного, мы находим такое $\tilde{y}$, все координаты которого неотрицательны, что $A\tilde{y} = \lambda\tilde{y}$, $\lambda \geqslant 0$. Отсюда $0 = \varphi_0(A\tilde{d}, \tilde{y}) = \varphi_0(\tilde{d}, A\tilde{y}) = \lambda\varphi_0(\tilde{d}, \tilde{y})$, а это возможно только при $\lambda = 0$. Этим доказано, что $\varphi(\tilde{m}, \tilde{m}) \leqslant 0$. Предположим, что существуют два линейно независимых вектора $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, для которых $\varphi(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i) = 0$, т. е. $A\tilde{x}_i = 0$. Тогда из них можно составить линейную комбинацию $\tilde{x} \neq 0$, у которой часть коэффициентов равна 0. Рассуждая как при доказательстве предложения 2, мы получим вектор $\tilde{y}$, координаты которого отличаются только знаками от координат вектора $\tilde{x}$, причем некоторые из них положительны, а некоторые равны 0, и опять $A(\tilde{x}) = 0$, т. е. $\varphi(\tilde{x}, \tilde{e}_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$. Пусть $\tilde{x} = \sum_1^s \alpha_i \tilde{e}_i$, $\alpha_i > 0$, $s < r$. Тогда для $j > s$, $\varphi(\tilde{x}, \tilde{e}_j) = \sum_1^s \alpha_i \varphi(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$, а так как $\varphi(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) > 0$ $(i \leqslant s, j > s)$ и $\alpha_i > 0$, то $\varphi(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = 0$. Это и значит, что система векторов распалась на две части $(e_1, \ldots, e_s)$ и $(e_{s+1}, \ldots, e_r)$, состоящие из попарно ортогональных векторов.

2. Многочлены

Предложение 1. *Пусть для последовательности чисел* $a_n \in \mathbf{Q}$ *существует такой многочлен* $g(T) \in \mathbf{Q}[T]$, *что* $a_{n+1} - a_n = g(n)$ *для достаточно больших* n. *Тогда существует такой многочлен* $f(T) \in \mathbf{Q}[T]$, *что* $a_n = f(n)$ *для достаточно больших* n.

Для любого $g(T) \in \mathbf{Q}[T]$ существует такой многочлен $h(T) \in \mathbf{Q}[T]$, что $h(T+1) - h(T) = g(T)$. Это утверждение можно доказать индукцией по степени n многочлена g. Если старший член этого многочлена равен aT^n, то, положив $h_0(T) = \frac{a}{n+1}T^{n+1}$, мы получим, что многочлен $h_0(T+1) - h_0(T) - g(T)$ имеет степень, меньшую n, а дальше можно применять индукцию. Заметим, что многочлен h определен с точностью до аддитивной константы.

Для любого выбора многочлена h мы получаем, что

$$a_{n+1} - a_n = h(n+1) - h(n),$$

т. е.

$$h(n+1) - a_{n+1} = h(n) - a_n$$

для всех достаточно больших n, т. е. $h(n) - a_n = c$. Многочлен $f = h - c$ удовлетворяет требованиям предложения.

3. Полулинейные преобразования

Преобразование φ векторного пространства L над полем K называется *полулинейным*, если $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для $x, y \in L$ и существует такой автоморфизм g поля K, что $\varphi(\alpha x) = g(\alpha)\varphi(x)$ для $\alpha \in K$, $x \in L$. Автоморфизм g называется *сопутствующим* полулинейному преобразованию A.

Предложение 1. *Пусть L — конечномерное векторное пространство над полем K, G — конечная группа его полулинейных преобразований, причем автоморфизм, соответствующий неединичному преобразованию из G, неединичен. Тогда в L существует базис, состоящий из векторов, инвариантных относительно G.*

Замечание. В этом базисе, очевидно, все преобразования из G имеют единичную матрицу, откуда, конечно, не следует, что они единичные — они действуют на координаты при помощи сопутствующих автоморфизмов.

I. Пусть $|G| = n$ и G^K — пространство функций на G со значениями в K. Определим отображение φ: $K \to G^K$ тем, что $\varphi(\alpha) = f_\alpha$, где $f_\alpha(g) = g(\alpha)$. Тогда $\varphi(K)$ порождает все G^K как векторное пространство над K. Действительно, если бы это было не так, то существовала бы ненулевая линейная форма λ: $G^K \to K$, тождественно равная 0 на $\varphi(K)$, т. е.

$$\sum \lambda_g g(\xi) = 0 \tag{1}$$

для всех $\xi \in K$. Выберем из этих соотношений то, в котором наименьшее число $\lambda_g \neq 0$. Очевидно, что таких λ_g по крайней мере два: пусть $\lambda_u \neq 0$, $\lambda_v \neq 0$. Так как $u \neq v$, то им соответствуют различные сопутствующие автоморфизмы и, значит, существует α, для которого $u(\alpha) \neq v(\alpha)$. Подставив в (1) $\alpha\xi$ вместо ξ, получим

$$\sum \lambda_g g(\alpha) g(\xi) = 0 \tag{2}$$

тоже для всех $\xi \in K$. Вычтем из (2) соотношение (1), умноженное на $u(\alpha)$. В полученном соотношении

$$\sum \lambda_g (g(\alpha) - u(\alpha)) g(\xi) = 0$$

коэффициент при $u(\xi)$ будет равен 0, но при $v(\xi)$ — нет, что противоречит минимальности выбора соотношения (1).

Доказанный результат можно переформулировать так: существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, что $\det(g(\alpha_i)) \neq 0$.

II. По условию предложения разные преобразования, входящие в G, имеют разные сопутствующие автоморфизмы. Поэтому мы можем занумеровать эти преобразования сопутствующими им автоморфизмами.

Обозначим через $A_g \in G$ преобразование с сопутствующим автоморфизмом g. Обозначим через L^G пространство векторов $x \in L$, инвариантных относительно всех $A_g \in G$, и докажем, что оно порождает L над K. Для этого положим $B(x) = \sum A_g(x)$. Очевидно, что $B(x) \in L^G$ для любого $x \in L$. Докажем, что уже все векторы $B(x)$, $x \in L$, порождают L над K. Для этого заметим, что вместе с $B(x)$ в пространство, порожденное всеми $B(x)$, входит и $B(\alpha x) = \sum g(\alpha) A_g(x)$. Беря элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, существование которых доказано в части I доказательства, мы видим, что $A_g(x)$ линейно выражаются через $B(\alpha_i x)$. В частности, при $g = e$ мы получаем выражение для самого вектора x. Это и требовалось доказать.

Теперь достаточно взять векторы $y_1, \ldots, y_r \in L^G$, порождающие все L, и из них выбрать максимальную линейно независимую систему. Это и будет искомый базис.

4. Поля

Предложение 1. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле, K — расширение k, порожденное конечным числом элементов. Тогда существуют такие элементы*

$z_1, \ldots, z_{d+1} \in K$, *что* $K = \mathrm{k}(z_1, \ldots, z_{d+1})$, $z_1, \ldots, z_d$ *алгебраически независимы над* k, *а* z_{d+1} *сепарабельно над* $\mathrm{k}(z_1, \ldots, z_d)$.

Доказательство. Поле K порождено над k конечным числом элементов $t_1, \ldots, t_n$.

Пусть d — максимальное число алгебраически независимых над k среди $t_1, \ldots, t_n$ и пусть алгебраически независимы $t_1, \ldots, t_d$. Тогда любой элемент $y \in K$ алгебраически зависит от $t_1, \ldots, t_d$, причем существует и такое соотношение $f(t_1, \ldots, t_d, y) = 0$, что многочлен $f(T_1, \ldots, T_d, T_{d+1})$ неприводим над k.

Пусть $f(T_1, \ldots, T_{d+1})$ — такой многочлен для $t_1, \ldots, t_{d+1}$. Мы утверждаем, что $f'_{T_i}(T_1, \ldots, T_{d+1}) \neq 0$ хоть для одного $i = 1, \ldots, d+1$. Действительно, если бы это было не так, то все T_i входили бы в f в степенях, кратных характеристике p поля k, т. е. f имел бы вид $f = \sum a_{i_1 \ldots i_{d+1}} T_1^{pi_1} \ldots T_{d+1}^{pi_{d+1}}$. Положим $a_{i_1 \ldots i_{d+1}} = b^p_{i_1 \ldots i_{d+1}}$, $g = \sum b_{i_1 \ldots i_{d+1}} T_1^{i_1} \ldots T_{d+1}^{i_{d+1}}$. Мы получим, что $f = g^p$, а это противоречит неприводимости f.

Если $f'_{T_i} \neq 0$, то d элементов $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1}$ алгебраически независимы над k. Действительно, элемент t_i алгебраичен над полем $\mathrm{k}(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1})$, так как $f'_{T_i} \neq 0$ и, значит, T_i входит в многочлен f. Поэтому, если бы элементы $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1}$ были зависимы, то степень трансцендентности поля $\mathrm{k}(t_1, \ldots, t_{d+1})$ была бы меньше d, а это противоречит независимости элементов $t_1, \ldots, t_d$.

Таким образом, мы можем всегда так перенумеровать $T_1, \ldots, T_n$, что $t_1, \ldots, t_d$ будут независимы над k, а в многочлене f, $f'_{T_{d+1}} \neq 0$. Это показывает, что элемент t_{d+1} сепарабелен над полем $\mathrm{k}(t_1, \ldots, t_d)$. Так как элемент t_{d+2} алгебраичен над этим полем, то по теореме о примитивном элементе мы можем найти такой элемент y, что $\mathrm{k}(t_1, \ldots, t_{d+2}) = \mathrm{k}(t_1, \ldots, t_d, y)$. Повторяя процесс присоединения элементов $t_{d+1}, \ldots, t_n$, мы представим поле K в виде $\mathrm{k}(z_1, \ldots, z_{d+1})$, где $z_1, \ldots, z_d$ алгебраически независимы над k и

$$f(z_1, \ldots, z_d, z_{d+1}) = 0,$$

причем многочлен f неприводим над k и $f'_{T_{d+1}} \neq 0$.

Предложение 2. *Пусть* k — *алгебраически замкнутое поле характеристики* 0, K — *поле, порожденное над* k *конечным числом элементов и имеющее над* k *степень трансцендентности* 1, $K^{(p)}$ — *подполе, состоящее из элементов вида* α^p, $\alpha \in K$. *Тогда* $[K : K^{(p)}] = p$. *Если* $L \subset K$ — *такое подполе, что расширение* K/L *не сепарабельно, то* $L \subset K^{(p)}$.

Пусть $t \in K$ трансцендентно над k. Первое утверждение следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd} & K & \\ \mathrm{k}(t) \arrow[ur, hook] & & K^{(p)} \arrow[ul, hook] \\ & \mathrm{k}(t)^{(p)} \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

откуда мы видим, что

$$[K : \mathrm{k}(t)^{(p)}] = [K : \mathrm{k}(t)]\,[\mathrm{k}(t) : \mathrm{k}(t)^{(p)}] = [K : K^{(p)}]\,[K^{(p)} : \mathrm{k}(t)^{(p)}].$$

Так как $\alpha \to \alpha^p$ — это вложение, то $[K : \mathrm{k}(t)] = [K^{(p)} : \mathrm{k}(t)^{(p)}]$, и поэтому $[K : K^{(p)}] = [\mathrm{k}(t) : k(t)^{(p)}]$. Наконец, очевидно, что $\mathrm{k}(t)^{(p)} = \mathrm{k}(t^p)$, значит,

$$[\mathrm{k}(t) : \mathrm{k}(t)^{(p)}] = p \quad \text{и} \quad [K : K^{(p)}] = p.$$

Для доказательства второго утверждения обозначим через L' совокупность всех элементов поля K, сепарабельных над L. Очень просто доказывается, что это — поле. Очевидно, мы можем заменить L на L' и, значит, предполагать, что любой элемент из K, сепарабельный над L, содержится в L. Пусть $\alpha \in K$ и $a_0 T^{p^m r} + a_1 T^{p^m(r-1)} + \ldots + a_r$ — его минимальный многочлен, причем для $P(T) = a_0 T^r + a_1 T^{r-1} + \ldots + a_r$ $P'(T) \neq 0$. Тогда $P(\beta) = 0$ для $\alpha^{p^m} = \beta$, т. е. β сепарабельно над L и, значит, принадлежит L. Из этого следует, что K может быть получено из L при помощи последовательного присоединения корней степени p: $L = K_1 \subset \ldots \subset K_i \subset \ldots \subset K_m = K$, $K_i = K_{i-1}\left(\sqrt[p]{\alpha_i}\right)$, $\alpha_i \in K_{i-1}$. Положим $K_{m-1} = K'$, $\alpha_{m-1} = \alpha$, тогда $K = K'\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)$. Мы докажем, что $K' = K^{(p)}$, и именно здесь используем, что степень трансцендентности K/k равна 1.

Любой элемент $\beta \in K$ записывается в виде $\beta = a_0 + a_1\sqrt[p]{\alpha} + \ldots + a_{p-1}\sqrt[p]{\alpha^{p-1}}$, $a_i \in K'$, и, значит, $\beta^p = a_0^p + a_1^p\alpha + \ldots + a_{p-1}^p\alpha^{p-1} \in K'$, т. е. $K' \supset K^{(p)}$. Но $[K:K'] = p$, а в первой части доказательства мы установили, что и $[K:K^{(p)}] = p$. Поэтому $K' = K^{(p)}$ и $K^{(p)} \supset L$.

5. Инварианты

Предложение 1. *Пусть A — алгебра с конечным числом образующих над полем k и G — конечная группа ее автоморфизмов. Предположим, что порядок N группы G не делится на характеристику поля k. Пусть A^G — подалгебра, состоящая из элементов $a \in A$, для которых $g(a) = a$ для всех $g \in G$. Тогда алгебра A^G имеет конечное число образующих.*

Обозначим через S оператор усреднения: $Sa = \frac{1}{N}\sum_{g \in G} g^*(a)$. Для любого элемента $a \in A$ коэффициенты многочлена $T^N + a_1T^{N-1} + \ldots + a_N = \prod_{g \in G}(T - g^*a) = P_a(T)$ принадлежат алгебре A^G — это элементарные симметрические функции от $g^*(a)$, выражающиеся, как известно, через суммы Ньютона $S(a^i)$ $(i = 1, \ldots, N)$. Пусть $u_1, \ldots, u_m$ — система образующих алгебры A. Обозначим через B подалгебру алгебры A^G, порожденную элементами $S(u_i^j)$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N)$. Тогда $P_{u_i}(u_i) = 0$ и, значит, u_i^N выражается линейно через $1, u_i, \ldots, u_i^{N-1}$ с коэффициентами из B. Отсюда по индукции следует, что любой одночлен $u_1^{a_1} \ldots u_m^{a_m}$ выражается через одночлены такого же вида с $a_1 < N, \ldots, a_m < N$. Тем самым аналогичное представление имеется для любого элемента $a \in A$:

$$a = \sum_{a_i < N} \varphi_{a_1, \ldots, a_m} u_1^{a_1} \ldots u_m^{a_m}, \quad \varphi_{a_1, \ldots, a_m} \in B.$$

Пусть, в частности, $a \in A^G$. Применяя к этому равенству оператор S, мы получим

$$a = S(a) = \sum \varphi_{a_1, \ldots, a_m} S(u_1^{a_1} \ldots u_m^{a_m}).$$

Отсюда и следует, что алгебра A^G порождается элементами $S(u_1^{a_1} \ldots u_m^{a_m})$, $a_i < N$, и $S(u_i^N)$.

6. Кольца

Предложение 1 (теорема Гильберта о корнях). *Пусть k — алгебраически замкнутое поле, $F_1, \ldots, F_m \in \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n]$. Если идеал $(F_1, \ldots, F_n) \neq (1)$, то система уравнений $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$ имеет решение в k.*

Лемма. *Если система уравнений $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$, $F_i \in \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n]$, имеет решение в поле K, порожденном конечным числом элементов над k, то она имеет решение и в k.*

Доказательство. Согласно предложению 1 в п. 3 поле K имеет вид $\mathrm{k}(x_1, \ldots, x_r, \theta)$, где $x_1, \ldots, x_r$ алгебраически независимы над k, а θ является корнем уравнения

$$P(X, U) = p_0(X)U^d + \ldots + p_d(X),$$
$$X = (x_1, \ldots, x_r), \quad p_i(X) \in \mathrm{k}(X),$$

неприводимого над $\mathrm{k}(X) = \mathrm{k}(x_1, \ldots, x_r)$. Пусть $F_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, $\xi_i \in K$. Запишем элементы ξ_i в виде $C_i(X, \theta)$, где $C(X, U) \in \mathrm{k}(X)[U]$. Соотношения $F_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ означают, что тождественно по $X = (x_1, \ldots, x_r)$ и U

$$F_i(C_1(X, U), \ldots, C_n(X, U)) = P(X, U)Q_i(X, U), \quad (1)$$

где $Q_i(X, U) \in \mathrm{k}(X)[U]$. Выберем значения $x_i = \alpha_i \in \mathrm{k}$ $(i = 1, \ldots, n)$ так, чтобы они не обращали в 0 знаменателей коэффициентов ни одного из коэффициентов многочленов $P, Q_i, C_1, \ldots, C_n$ и старший коэффициент многочлена P. Выберем $U = \tau \in \mathrm{k}$ из условия $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \tau) = 0$ и положим $C_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \tau) = \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда из (1) следует, что $F_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$, т. е. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — решение системы $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$.

Доказательство предложения 1. Если $(F_1, \ldots, F_m) \neq 1$, то идеал $(F_1, \ldots, F_m)$ содержится в некотором максимальном идеале $M \subset \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n]$ и $K = \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n]/M$ является полем. Обозначим через ξ_i образы T_i в K. Очевидно, что $K = \mathrm{k}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — решение системы $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$ в K. Применяя лемму, мы получаем решение в k.

Следствие. *Если $G, F_1, \ldots, F_m \in \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n]$ и G обращается в 0 во всех решениях системы $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$, то $G^\rho \in (F_1, \ldots, F_m)$ при некотором $\rho \geqslant 0$.*

Достаточно рассмотреть случай $G \neq 0$. Введем новую переменную U и в $\mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n, U]$ рассмотрим многочлены $F_1, \ldots, F_m$, $UG-1$. По условию они не имеют общих корней в k и, значит, существуют такие многочлены $P_1, \ldots, P_m, Q \in \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n, U]$, что

$$P_1F_1+\ldots+P_mF_m+Q(UG-1)=1.$$

Это тождество сохранится, если положить в нем $U=1/G$. Освобождаясь от G в знаменателе, мы получим, что

$$G^\rho \equiv 0(F_1, \ldots, F_m).$$

Предложение 2. *Элемент a кольца A тогда и только тогда нильпотентен (т. е. $a^n=0$ при некотором $n>0$), когда a принадлежит всем простым идеалам кольца.*

Очевидно, что нильпотентный элемент содержится в любом простом идеале. Наоборот, пусть элемент a не нильпотентен. Построим простой идеал, его не содержащий. Рассмотрим идеалы $I \subset A$, не содержащие ни одной степени элемента a. По условию $I=(0)$ является таким идеалом. Пусть $\mathfrak{a}$ — максимальный элемент этого множества идеалов. Докажем, что $\mathfrak{a}$ прост — тогда это и будет нужный нам идеал. Для этого положим $B=A/\mathfrak{a}$ и докажем, что B целостно. По условию любой идеал $\mathfrak{b} \subset B$, $\mathfrak{b} \neq 0$, содержит некоторую степень образа b элемента a, но сам b не нильпотентен. Пусть $b_1 \in B$, $b_2 \in B$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Тогда по условию при некоторых $n_1>0$ и $n_2>0$ $b^{n_1} \in (b_1)$, $b^{n_2} \in (b_2)$. Поэтому $b^{n_1+n_2} \in (b_1 \cdot b_2)$, а значит, $b_1 \cdot b_2 \neq 0$.

Предложение 3 (лемма Накаяма). *Пусть M — модуль конечного типа над кольцом A и $\mathfrak{a} \in A$ — такой идеал, что если для элемента $a \in 1+\mathfrak{a}$, $aM=0$, то $M=0$. Тогда из $\mathfrak{a}M=M$ следует, что $M=0$.*

Доказательство. Пусть $M=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Условие $\mathfrak{a}M=M$ означает, что имеют место равенства

$$\mu_i=\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\mu_j, \quad \alpha_{ij} \in \mathfrak{a}.$$

Отсюда $\sum\limits_{j=1}^n (\alpha_{ij}-\delta_{ij})\mu_j=0$ $(i=1, \ldots, n)$ и по «правилу Крамера» $d\mu_j=0$, т. е. $dM=0$, где $d=\det(\delta_{ij}-\alpha_{ij})$. Так как $d \in 1+\mathfrak{a}$, то по условию отсюда следует, что $M=0$.

Следствие 1. *Если B и A — кольца, $B \supset A$ и является модулем конечного типа над A, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал, $A \neq \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}B \neq B$.*

Так как B содержит единицу, то $aB=0$ только при $a=0$. Так как $\mathfrak{a} \neq (1)$, то $1+\mathfrak{a} \not\ni 0$.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{a} \subset A$ — такой идеал, что все элементы множества $1+\mathfrak{a}$ обратимы, M — модуль конечного типа над A и $M' \subset M$ — любой подмодуль, то из $M'+\mathfrak{a}M=M$ следует, что $M'=M$.*

Надо применить предложение 3 к модулю M/M'.

Замечание. Легко видеть, что условие, наложенное в следствии 2 на идеал $\mathfrak{a}$, равносильно тому, что кольцо $A/\mathfrak{a}$ локально.

Следствие 3. *В предположениях следствия 2 элементы $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M$ тогда и только тогда порождают M, когда их образы порождают $M/\mathfrak{a}M$.*

Надо применить следствие 2 к подмодулю $M'=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Предложение 4. *Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{a} \subset A$ — такой идеал, что все элементы множества $1+\mathfrak{a}$ обратимы в A. Тогда $\bigcap\limits_{n>0}(\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^n)=\mathfrak{b}$ для любого идеала $\mathfrak{b} \subset A$.*

1) Случай $\mathfrak{b}=0$. Надо применить предложение 3 к модулю $M=\bigcap \mathfrak{a}^n$.

2) **Общий случай.** Положим $B=A/\mathfrak{b}$, и $\overline{\mathfrak{a}}=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ — образ $\mathfrak{a}$ в B. Тогда $\overline{\mathfrak{a}}^n=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^n/\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$ есть образ $\mathfrak{a}^n$ в B. Согласно случаю 1) $\bigcap\limits_{n>0}\overline{\mathfrak{a}}^n=0$, значит, $\bigcap\limits_{n>0}(\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^n)=\mathfrak{b}$.

Предложение 5. *Пусть идеал $\mathfrak{a}$ нётерова кольца A таков, что все элементы множества $1+\mathfrak{a}$ обратимы в A. Тогда свойство последовательности $f_1, \ldots, f_m$ элементов из $\mathfrak{a}$ быть простой сохраняется при ее перестановке.*

Достаточно доказать, что после перестановки двух соседних членов f_i, f_{i+1} простой последовательности мы опять получим простую последовательность. Положим $(f_1, \ldots, f_{i-1})=\mathfrak{b}$, $A/\mathfrak{b}=B$ и обозначим через a и b образы f_i и f_{i+1} в B. Все сводится к доказательству леммы 2 для простой последовательности a, b в B. Нам надо доказать, что 1) b не делитель 0 в B и 2) a не делитель $0(\operatorname{mod} b)$.

1) Пусть $xb=0$. Мы докажем, что тогда

$$x \in (a)^k \tag{1}$$

для всех k. Из того, что A нётерово, и предложения 4 будет следовать, что $x=0$.

Равенство (1) проверяется по индукции. Если уже $x = x_1a^k$, то $x_1a^kb = 0$. Так как a, b — простая последовательность, то a не делитель 0 и, значит, $x_1b = 0$. Опять из простоты последовательности a, b вытекает, что $x_1 \in (a)$, т. е. $x \in (a)^{k+1}$.

2) Пусть $xa = yb$. Из простоты последовательности a, b следует, что $y = az$, $z \in A$, и, значит, $x = zb$.

7. Однозначность разложения на простые множители

Предложение 1. *Пусть нётерово локальное кольцо A содержится в локальном кольце $\hat{A}$, в котором разложение на простые множители однозначно. Предположим, что максимальные идеалы $\mathfrak{m} \in A$ и $\widehat{\mathfrak{m}} \subset \hat{A}$ удовлетворяют условиям:*

(а) $\mathfrak{m}\hat{A} = \widehat{\mathfrak{m}}$;

(б) $(\mathfrak{m}^n\hat{A}) \cap A = \mathfrak{m}^n$ *для* $n > 0$;

(в) *для любого* $\alpha \in \hat{A}$ *и любого целого* $n > 0$ *существует такое* $a_n \in A$, *что* $\alpha - a_n \in \mathfrak{m}^n\hat{A}$.

Тогда и в A разложение на простые множители однозначно.

Доказательство. (Заимствовано из книги [25].) Обычное доказательство однозначности разложения на простые множители выводит его из того, что если a делит bc и a взаимно просто с b, то a делит c. Нам нужно установить этот результат в A, зная, что он верен в $\hat{A}$. Для этого достаточно доказать:

1) если для a, $b \in A$, a делит b в $\hat{A}$, то a делит b в A;

2) если a и b взаимно просты в A, то они взаимно просты в $\hat{A}$.

Оба утверждения опираются на лемму.

Лемма. *Для любого идеала* $\mathfrak{a} \subset A$ $(\mathfrak{a}\hat{A}) \cap A = \mathfrak{a}$.

Достаточно доказать, что $(\mathfrak{a}\hat{A}) \cap A \subset \mathfrak{a}$. Пусть $x \in A \cap (\mathfrak{a}\hat{A})$ и пусть $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Тогда $x = \sum a_i\alpha_i$, $\alpha_i \in \hat{A}$. По условию (в) существуют такие $a_i^{(n)} \in A$, что $\alpha_i = a_i^{(n)} + \xi_i^{(n)}$, $a_i \in A$, $\xi_i^{(n)} \in \widehat{\mathfrak{m}}^n$. Тогда $x = \sum a_i^{(n)}a_i + \sum \xi_i^{(n)}a_i = a + \xi$, $a \in \mathfrak{a}$, $\xi \in \widehat{\mathfrak{m}}^n$. Значит, $\xi = x - a \in A \cap \widehat{\mathfrak{m}}^n = \mathfrak{m}^n$. Поэтому $x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n$ для всех $n > 0$ и $x \in \mathfrak{a}$ по предложению 4.

Доказательство свойства 1). Если b делит a в $\hat{A}$, то $a \in A \cap (b)\hat{A} = (b)$ (по лемме). Это и значит, что a делит b в A.

Доказательство свойства 2). Если бы a и b не были взаимно просты в $\hat{A}$, то они представлялись бы в виде $a = \gamma\alpha$, $b = \gamma\beta$, где α и β — взаимно простые собственные делители a и b в $\hat{A}$. Тогда $a\beta - b\alpha = 0$. Ввиду условия (в) существуют такие x_n, $y_n \in A$ и u_n, $v_n \in \mathfrak{m}^n$, что $\alpha = x_n + u_n$, $\beta = y_n + v_n$. Поэтому $ay_n - bx_n \in (a, b)\widehat{\mathfrak{m}}^n = (a, b)\mathfrak{m}^n\hat{A}$. По лемме $ay_n - bx_n \in (a, b)\mathfrak{m}^n$, т. е. $ay_n - bx_n = at_n + bs_n$, s_n, $t_n \in \mathfrak{m}^n$. Отсюда $a(y_n - t_n) = b(x_n + s_n)$ и, значит, $\alpha(y_n - t_n) = \beta(x_n + s_n)$. Из взаимной простоты α и β в $\hat{A}$ вытекает, что $x_n + s_n$ делится на α: $x_n + s_n = \alpha\lambda$. Так как $\bigcap \widehat{\mathfrak{m}}^k = 0$, то при достаточно большом n $\alpha, \beta \notin \widehat{\mathfrak{m}}^{n-1}$. Тогда и $x_n + s_n \notin \mathfrak{m}^{n-1}$ и, значит, $\lambda \notin \mathfrak{m}$, т. е. λ обратим в $\hat{A}$. Поэтому $\hat{A}(x_n + s_n) = (\alpha)\hat{A}$ и $x_n + s_n$ делит α, а значит, делит a в $\hat{A}$. По свойству 1) он делит a и в A: $a = (x_n + s_n)h$. Но $a(y_n - t_n) = b(x_n + s_n)$ и, значит, $b = (y_n - t_n)h$. Из взаимной простоты a и b в A следует, что h обратим в A, $(a) = (x_n + s_n) = (\alpha)$, а это противоречит тому, что α — собственный делитель a в $\hat{A}$.

8. Целые элементы

Предложение 1. *Пусть $B = \mathrm{k}[T_1, \ldots, T_n]$ — кольцо многочленов, $L = \mathrm{k}(T_1, \ldots, T_n)$ — его поле частных, K — конечное расширение поля L, A — целое замыкание B в K. Тогда A является B-модулем конечного типа.*

Для случая, когда расширение K/L сепарабельно, очень простое доказательство (не зависящее от вида поля L) содержится в [3], гл. V. Мы не будем его здесь повторять, а покажем, как свести все к случаю сепарабельного расширения.

Пусть $K = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Если α_1 не сепарабельно над L, то его минимальный многочлен имеет вид $\alpha_1^{p^lm} + a_1\alpha_1^{p^l(m-1)} + \ldots + a_m = 0$, где $a_i \in \mathrm{k}(T_1, \ldots, T_r)$ и $\alpha_1^{p^l}$ сепарабельно над L. Положим $a_i = b_i^{p^l}$, где $b_i \in \mathrm{k}\left(T_1^{1/p^l}, \ldots, T_r^{1/p^l}\right)$, $L' = \mathrm{k}\left(T_1^{1/p^l}, \ldots, T_r^{1/p^l}\right)$, $K' = K\left(T_1^{1/p^l}, \ldots, T_r^{1/p^l}\right)$, $B' = \mathrm{k}\left[T_1^{1/p^l}, \ldots, T_r^{1/p^l}\right]$, A' — целое замыкание B' в K'. Тогда $K' = L'(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

и $\alpha_1^m + b_1\alpha_1^{m-1} + \ldots + b_m = 0$, так что α_1 сепарабельно над L'. С другой стороны, $A \subset A'$, и если предложение доказано для A', то A' — модуль конечного типа над B'. Но само B' — модуль конечного типа над B; его базис состоит из одночленов $T_1^{i_1} \ldots T_r^{i_r}$, $0 \leqslant i_1, \ldots, i_r < p$. Поэтому тогда A', а значит и A, будет модулем конечного типа и над B.

Мы видим, что доказательство предложения свелось к случаю, когда α_1 сепарабельно. По теореме о примитивном элементе тогда $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = L(\alpha_2', \alpha_3, \ldots, \alpha_r)$. Повторив те же рассуждения $r-1$ раз, мы сведем доказательство к случаю сепарабельного расширения.

9. Длины модулей

Определение. Модуль M над кольцом A имеет конечную длину, если существует такая последовательность подмодулей

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n = 0, \quad M_i \neq M_{i+1}, \tag{1}$$

что фактормодули M_i/M_{i+1} просты, т. е. не содержат собственных подмодулей. По теореме Жордана — Гельдера длины n всех таких последовательностей одинаковы. Их общая длина называется *длиной* модуля M и обозначается $l(M)$.

Если нужно подчеркнуть роль кольца A, то вместо $l(M)$ пишут $l_A(M)$.

Очевидно, модули M_i/M_{i+1} в последовательности (1) изоморфны $A/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — максимальные идеалы кольца A.

Если длина модуля M конечна, то это верно для его подмодулей и фактормодулей.

Если модуль M обладает такой последовательностью подмодулей (1), что $l(M_i/M_{i+1}) < \infty$, то $l(M) < \infty$ и

$$l(M) = \sum l(M_i/M_{i+1}).$$

Предложение 1. *Если $\mathcal{O}$ — нётерово локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$ — такой идеал, что $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}^k$ при некотором $k > 0$, то длина модуля $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ конечна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что длина модуля $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^k$ конечна.

Рассматривая последовательность подмодулей $M_i = \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^k$, мы видим, что достаточно убедиться в конечности длины модулей $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$. Но при действии кольца $\mathcal{O}$ на этот модуль идеал $\mathfrak{m}$ аннулирует все элементы. Поэтому на модуль действует $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathrm{k}$, так что $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ есть векторное пространство над полем k и его длина совпадает с размерностью над этим полем. Так как кольцо $\mathcal{O}$ нётерово, то этот модуль имеет конечное число образующих, т. е. является конечномерным векторным пространством, что и доказывает предложение.

Если M — модуль над кольцом A, а $\mathfrak{p}$ — простой идеал этого кольца, то через $M_\mathfrak{p}$ обозначается локализация модуля M по $\mathfrak{p}$, т. е. модуль $M \otimes_A A_\mathfrak{p}$, где $A_\mathfrak{p}$ — локальное кольцо простого идеала $\mathfrak{p}$.

Пример. Если $M = A/\mathfrak{p}$, то $M_\mathfrak{q} = 0$ при $\mathfrak{q} \not\supset \mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$, то $M_\mathfrak{q} \simeq (A/\mathfrak{p})_{\bar{\mathfrak{q}}}$, где $\bar{\mathfrak{q}}$ — образ $\mathfrak{q}$ в $A/\mathfrak{p}$.

Лемма. *Модуль M конечного типа над нётеровым кольцом A обладает такой последовательностью подмодулей (1), что $M_i/M_{i+1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i \subset A$ — простой идеал.*

Доказательство. Для элемента $m \in M$, $m \neq 0$, обозначим через $\mathrm{Ann}(m)$ идеал, состоящий из таких элементов $a \in A$, что $am = 0$. Ввиду нётеровости модуля M последовательность вида $\mathrm{Ann}(m_1) \subset \mathrm{Ann}(m_2) \subset \ldots$ обрывается. Поэтому мы можем выбрать m обладающим свойством: если $\mathrm{Ann}(m) \subseteq \mathrm{Ann}(m')$, $m' \neq 0$, то $\mathrm{Ann}(m) = \mathrm{Ann}(m')$. Докажем, что тогда идеал $\mathrm{Ann}(m)$ прост. Пусть $ab \in \mathrm{Ann}(m)$, $b \notin \mathrm{Ann}(m)$. Тогда $\mathrm{Ann}(m) \subset \mathrm{Ann}(bm)$, $bm \neq 0$, и по условию $\mathrm{Ann}(m) = \mathrm{Ann}(bm)$. Но $a \in \mathrm{Ann}(bm)$ и, значит, $a \in \mathrm{Ann}(m)$. Положим $\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p}$. Подмодуль $Am \subset M$ изоморфен $A/\mathfrak{p}$. В модуле $M' = M/Am$ мы можем опять найти подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}'$, где $\mathfrak{p}'$ — простой идеал кольца A. Так мы построим последовательность подмодулей $M^{(1)} \subset M^{(2)} \subset \ldots$ таких, что $M^{(i-1)}/M^{(i)} \simeq A/\mathfrak{p}_i$. Ввиду нётеровости модуля M эта последовательность оборвется. Лемма доказана.

Локальное кольцо называется *одномерным*, если любой его простой идеал, отличный от максимального, минимален, т. е. не содержит простых идеалов, отличных от него.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{O}$ — одномерное локальное кольцо с конечным числом простых минимальных идеалов $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, $a \in A$ — не делитель нуля в A и a не* *содержится ни в одном из* $\mathfrak{p}_i$. *Тогда*

$$l(\mathcal{O}/(a)) = \sum_{i=1}^{n} l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i})\, l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_i + a\mathcal{O})). \qquad (2)$$

Доказательство. (Взято из книги [28].) Вместо соотношения (2) доказывается его обобщение для произвольного модуля M конечного типа над $\mathcal{O}$. Для этого полагают $e(M, a) = l_A(M/aM) - l_A(\mathrm{Ann}_M a)$, где $\mathrm{Ann}_M a$ означает модуль (над A) $\{m \in M,\ am = 0\}$. Обобщение соотношения (2) таково:

$$e(M, a) = \sum_{i=1}^{n} l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i})\, l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_i + a\mathcal{O})). \qquad (3)$$

Преимущество инварианта $e(M, a)$ в его аддитивности: для точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ и элемента $a \in \mathcal{O}$ $e(M, a) = e(M', a) + e(M'', a)$, причем левая часть конечна, если конечны оба слагаемые справа. Это сразу следует из точности (тривиально проверяемой) последовательности

$$0 \to \mathrm{Ann}_{M'} a \to \mathrm{Ann}_M a \to \mathrm{Ann}_{M''} a \to M'/aM' \to M/aM \to M''/aM'' \to 0.$$

Индукцией мы получаем, что для любой последовательности вида (1)

$$e(M, a) = \sum e(M_i/M_{i+1}, a).$$

Из этих соображений и леммы следует, что формулу (3) достаточно проверить для модулей M, изоморфных $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $\mathcal{O}$. Если $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ — максимальный идеал, то $M \simeq \mathrm{k}$ (как $\mathcal{O}$-модуль), $e(M, a) = 0$ и $M_{\mathfrak{p}_i} = 0$. Если же $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$, то $M_{\mathfrak{p}_i} = 0$ при $i \neq j$, $M_{\mathfrak{p}_i}$ есть поле отношений кольца $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_i$, $l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) = 1$. Поэтому в обоих случаях формула (3) очевидна.

Наконец, чтобы получить соотношение (2) из (3), надо положить $M = \mathcal{O}$. Действительно, в условиях предложения

$$e(\mathcal{O}, a) = l(\mathcal{O}/(a)), \quad e(\mathcal{O}/\mathfrak{p}_i, a) = l(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_i + a(\mathcal{O}))),$$

так что из (3) вытекает (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебраические поверхности // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова.— Т. 75.— М.: Наука, 1965.
2. Artin M., Mumford D. // Proc. London Math. Soc.— 1972.— V. XXV.— P. 75—95.
3. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру.— М.: Мир, 1972.
4. Богомолов Ф. А. // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— Т. 51, № 3.— С. 485—516.
5. Bombieri E., Husemoller D. // Proc. Symp. Pure Math.— 1975.— V. 29.— P. 329—420.
6. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел.— М.: Наука, 1985.
7. Бурбаки Н. Элементы математики. Группы и алгебры Ли.— М.: Мир, 1972.
8. ван дер Варден Б. Л. Алгебра.— М.: Наука, 1976.
9. Clemens C. H., Griffiths P. A. // Ann. Math.— 1972.— V. 95.— P. 281—356.
10. Esnault H. // Seminaire Bourbaki, 1980/1981, Exp. 586.— Lecture Notes in Math.— № 901.
11. Гизатуллин М. Х. // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982.— Т. 46, № 5.— С. 909—970.
12. Гриффитс Ф., Харрис Д. Принципы алгебраической геометрии: В 2-х т.— М.: Мир, 1982.
13. Grothendieck A. Cohomologie locale des fausceaux cohérentes et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.— Amsterdam, 1968.
14. Гурса Э. Курс математического анализа: Т. I, ч. II.— М.: ГТТИ, 1933.
15. De la Harpe P., Siegfried P. // L'Enseignement Mathématique.— 1979.— T. 25, № 3/4.— P. 207—256.
16. Hironaka H. // Arithmetical Algebraic Geometry.— P. 153—200.— Harper a. Row., 1965.
17. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра: В 2-х т.— М.: ИЛ, 1963.
18. Исковских В. А., Манин Ю. И. // Мат. сб.— 1971.— Т. 15.— С. 141—146.
19. Kawamata Y. // reine angew. Math.— 1985.— S. 1—46.
20. Kawamata Y., Matsuki K., Matsuda K. // Advanced Studies in Pure Mathematics.— 1987.— V. 10,— P. 284—360.
21. Kleiman S., Laksov D. // Amer. Math. Monthly.— 1972.— V. 79, № 10.— P. 1061—1082.

содержится ни в одном из $\mathfrak{p}_i$. *Тогда*

$$l(\mathcal{O}/(a)) = \sum_{i=1}^{n} l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i})\, l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_i + a\mathcal{O})). \tag{2}$$

Доказательство. (Взято из книги [28].) Вместо соотношения (2) доказывается его обобщение для произвольного модуля M конечного типа над $\mathcal{O}$. Для этого полагают $e(M, a) = l_A(M/aM) - l_A(\mathrm{Ann}_M a)$, где $\mathrm{Ann}_M a$ означает модуль (над A) $\{m \in M,\ am = 0\}$. Обобщение соотношения (2) таково:

$$e(M, a) = \sum_{i=1}^{n} l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i})\, l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_i + a\mathcal{O})). \tag{3}$$

Преимущество инварианта $e(M, a)$ в его аддитивности: для точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to \to 0$ и элемента $a \in \mathcal{O}$ $e(M, a) = e(M', a) + e(M'', a)$, причем левая часть конечна, если конечны оба слагаемые справа. Это сразу следует из точности (тривиально проверяемой) последовательности

$$0 \to \mathrm{Ann}_{M'} a \to \mathrm{Ann}_M a \to \mathrm{Ann}_{M''} a \to M'/aM' \to \to M/aM \to M''/aM'' \to 0.$$

Индукцией мы получаем, что для любой последовательности вида (1)

$$e(M, a) = \sum e(M_i/M_{i+1}, a).$$

Из этих соображений и леммы следует, что формулу (3) достаточно проверить для модулей M, изоморфных $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $\mathcal{O}$. Если $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ — максимальный идеал, то $M \simeq \mathrm{k}$ (как $\mathcal{O}$-модуль), $e(M, a) = 0$ и $M_{\mathfrak{p}_i} = 0$. Если же $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$, то $M_{\mathfrak{p}_i} = 0$ при $i \neq j$, $M_{\mathfrak{p}_i}$ есть поле отношений кольца $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_i$, $l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) = 1$. Поэтому в обоих случаях формула (3) очевидна.

Наконец, чтобы получить соотношение (2) из (3), надо положить $M = \mathcal{O}$. Действительно, в условиях предложения

$$e(\mathcal{O}, a) = l(\mathcal{O}/(a)), \quad e(\mathcal{O}/\mathfrak{p}_i, a) = l(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_i + a(\mathcal{O}))),$$

так что из (3) вытекает (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебраические поверхности // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова.— Т. 75.— М.: Наука, 1965.
2. Artin M., Mumford D. // Proc. London Math. Soc.— 1972.— V. XXV.— P. 75—95.
3. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру.— М.: Мир, 1972.
4. Богомолов Ф. А. // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— Т. 51, № 3.— С. 485—516.
5. Bombieri E., Husemoller D. // Proc. Symp. Pure Math.— 1975.— V. 29.— P. 329—420.
6. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел.— М.: Наука, 1985.
7. Бурбаки Н. Элементы математики. Группы и алгебры Ли.— М.: Мир, 1972.
8. ван дер Варден Б. Л. Алгебра.— М.: Наука, 1976.
9. Clemens C. H., Griffiths P. A. // Ann. Math.— 1972.— V. 95.— P. 281—356.
10. Esnault H. // Seminaire Bourbaki, 1980/1981, Exp. 586.— Lecture Notes in Math.— № 901.
11. Гизатуллин М. Х. // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982.— Т. 46, № 5.— С. 909—970.
12. Гриффитс Ф., Харрис Д. Принципы алгебраической геометрии: В 2-х т.— М.: Мир, 1982.
13. Grothendieck A. Cohomologie locale des fausceaux cohérentes et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.— Amsterdam, 1968.
14. Гурса Э. Курс математического анализа: Т. I, ч. II.— М.: ГТТИ, 1933.
15. De la Harpe P., Siegfried P. // L'Enseignement Mathématique.— 1979.— Т. 25, № 3/4.— P. 207—256.
16. Hironaka H. // Arithmetical Algebraic Geometry.— P. 153—200.— Harper a. Row., 1965.
17. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра: В 2-х т.— М.: ИЛ, 1963.
18. Исковских В. А., Манин Ю. И. // Мат. сб.— 1971.— Т. 15.— С. 141—146.
19. Kawamata Y. // reine angew. Math.— 1985.— S. 1—46.
20. Kawamata Y., Matsuki K., Matsuda K. // Advanced Studies in Pure Mathematics.— 1987.— V. 10,— P. 284—360.
21. Kleiman S., Laksov D. // Amer. Math. Monthly.— 1972.— V. 79, № 10.— P. 1061—1082.

22. Коблитц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции.— М.: Мир, 1982.
23. Курош А. Г. Теория групп.— М.: Наука, 1967.
24. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий.— М.: Мир, 1979.
25. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия.— М.: Мир, 1979.
26. Saltman D. J. // Invent. Math.— 1984.— V. 77, № 1.— P. 71—84.
27. Спрингер Т. Теория инвариантов.— М.: Мир, 1981.
28. Fulton W. Intersection Theory.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer Verlag, 1984 (готовится русский перевод).
29. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия.— М.: Мир, 1981.
30. Шокуров В. В. // Intern. Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986.
31. Wilson P. M. H. // Bull. London Math. Soc.— 1987.— № 1.— P. 1—48.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бесконечно-близкие точки 314

Вейерштрасса подготовительная теорема 134
Вейерштрассова нормальная форма плоской кубики 18
Ветвления подмногообразие 177
— точка 177
Ветвь кривой 165

Гиперповерхность в аффинном пространстве 33
— — замкнутом множестве 36
— проективная 55
Грассманово многообразие 55
Группа алгебраическая 228
— классов дивизоров 189
— Пикара 192

Детерминантное многообразие 58
Дзета-функция 39
Дивизор 184
— гиперплоского сечения 192
— дифференциальной формы 252
— локально главный 192
— нулей функции 187
— полюсов функции 187
— простой 184
— формы 191
— функции 187
— эффективный 184
Дискриминант пучка квадрик 179
Дифференциал функции 235
— — в точке 110
Длина модуля 274, 339

Идеал замкнутого подмножества аффинного пространства 34
Идеал замкнутого подмножества в координатном кольце большего множества 36
— — — проективного пространства 55
Изоморфизм бирациональный замкнутых подмножеств аффинного пространства 51
— — квазипроективных многообразий 69
— — плоских алгебраических кривых 17
— замкнутых подмножеств аффинного пространства 40
— квазипроективных многообразий 64
Индекс пересечения дивизоров 279
— — — в общем положении 269
— — — в подмногообразии 275
— — эффективных дивизоров в точке 268

Касание прямой и многообразия 108
Касательная прямая к плоской кривой 22
Квадрика 55
Класс дивизоров 189
— — нулевой степени на кривой 209
— канонический 253
Кольцо координатное замкнутого подмножества аффинного пространства 34
— локальное 106
— — неприводимого подмногообразия 107
— — простого идеала 106
— — точки 105
— — регулярное 125
Коника 5
Конус касательный 120

Кратность особой точки плоской кривой 20
— пересечения плоских кривых 22
— — эффективных дивизоров в подмногообразии 275
— — — — в точке 268
Кривая алгебраическая 88
— — вещественная 8, 136
— — гиперэллиптическая 18
— — плоская аффинная 5
— — — гладкая 19
— — — неприводимая 5
— — — рациональная 10
— — эллиптическая 20
Критерий линейчатости 265
— рациональности 264
Кубика 5

Лемма Накаяма 335
Локальные параметры алгебраического многообразия 122
Локальный параметр плоской кривой 21

Многообразие абелево 229
— аффинное 65
— Веронезе 70
— гладкое 116
— квазипроективное 61
— неособое в коразмерности 1 158
— нормальное 154
— Пикара 234
— проективное 65
— рациональное 257
— унирациональное 257
— факториальное 157
— якобиево 234
Многоугольник Ньютона 166
Множество главное открытое 66
— плотное 32
Модель минимальная 150
— поля 149
Модуль дифференциалов кольца 240

Накрытие неразветвленное 179
Неравенство Римана — Роха для поверхности 293
Нормализация квазипроективного многообразия 159
Нормализация многообразия в расширении поля функций 170
Носитель дивизора 184
— локально главного дивизора 192

Область регулярности рациональной дифференциальной формы 245
Образ замкнутого множества относительно рационального отображения 49
Общее положение дивизоров 267
Ограничение дивизора 192
Окрестность точки 32
— — аффинная 65
Особенность Дю Валя 317
Отображение Веронезе 70
— конечное аффинных многообразий 80
— — квазипроективных многообразий 82
— неразветвленное 177
— рациональное неприводимого многообразия 49, 68
— — плоской кривой 17
— регулярное замкнутого подмножества 36
— — в точке 49
— сепарабельное 177

Поверхность алгебраическая 88
— кубическая 103, 294
— линейчатая 263
— рациональная 263
— типа К3 263
— эллиптическая 264
Подмногообразие ветвления 177
— исключительное 148
— квазипроективного многообразия 61
—, коразмерность 87
—, локальные уравнения 133
Подмножество аффинное открытое замкнутого подмножества проективного пространства 60
— замкнутое аффинного пространства 31
— — квазипроективного многообразия 61
— — неприводимое 45
— — приводимое 45
— — проективного пространства 54

Подмножество открытое аффинного пространства 32
— — квазипроективного многообразия 61
Поле рациональных функций на замкнутом подмножестве аффинного пространства 47
— — — на квазипроективном многообразии 67
— — — на плоской кривой 13
Пополнение локального кольца 129
Последовательность простая 272
Преобразование квадратичное 309
Проблема Люрота 257
Проектирование с центром в подпространстве 69
Произведение замкнутых подмножеств аффинных пространств 33
— проективных пространств 73
— квазипроективных многообразий 73
— циклов 298
Прообраз собственный при σ-процессе 301
Пространство, ассоциированное с дивизором 197
— касательное 108, 112
— проективное 54
Пучок квадрик 179
— коник над проективной прямой 201

Разложение несократимое замкнутого подмножества на неприводимые 45
— Пюизо 166
Размерность дивизора 197
— квазипроективного многообразия 87
Расслоение касательное квазипроективного многообразия 116
Род алгебраической кривой 253
Ряд Тейлора 126

Свойство локальное 65
Семейство алгебраическое дивизоров 232
Система линейная дивизоров 198
— — — полная 198
Сложение точек на плоской кубике 216
Слой отображения 97
Согласованная система функций 189
Степень дивизора на кривой 205
— отображения 176

Теорема Безу на кривой 211
— — в проективном пространстве 283
— — в произведении проективных пространств 284
— Бертини 175
— Гильберта о корнях 333
— Люрота 14
— нормализационная 85
— о замкнутости проективного отображения 76
— о размерности пересечения с гиперповерхностью 94
— — — слоев отображения 97
— Римана — Роха на кривых 260
— — — на поверхности 293
— Тзена 93
— Ходжа об индексе 293
Точка особая 19, 116
— перегиба 23
— простая на алгебраическом многообразии 116
— — на плоской кривой 19
— простейшая 166
— — с разделенными касательными 166
Трансверсальность подмногообразий 123

Фактор по группе 41
Форма дифференциальная 241
— — инвариантная 250
— — рациональная 244
— — регулярная одномерная 235
— — — r-мерная 241
Формально-аналитическая эквивалентность 129
Фробениуса отображение 37
Функция рациональная 47
— —, область определения 48
— —, регулярная в точке 47
— — — на замкнутом подмножестве аффинного пространства 34

Характеристические пары особой точки 167

Центр σ-процесса 141, 147
Цикл на алгебраическом многообразии 298

Эквивалентность дивизоров 189
— — алгебраическая 232
— циклов алгебраическая 298
σ-процесс локальный 143
— с центром в точке проективного пространства 140
— — — квазипроективного многообразия 147