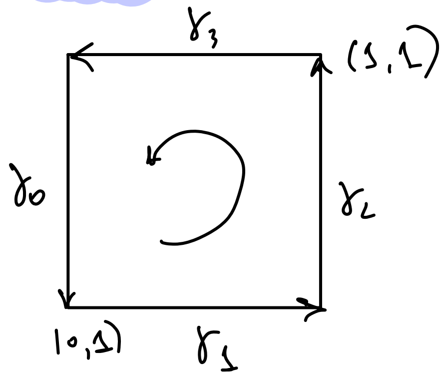
(*) $\gamma_i : I^k \to \mathbb{R}^n$; симп. цепь — это $\sum \underbrace{c_i}_{\in \mathbb{R}} \gamma_i$.

$\partial\gamma_i : \partial I^k \to \mathbb{R}^n$ и прод. по линейности.

Соответственно, по линейности можно полагать, что $c : I^k \to \mathbb{R}^n$.

И также по линейности н.у.о. $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k$

$n=2$: формула Грина: $\int \omega = f(x)\,dx$



интересно интегрировать только по γ_1 и γ_3, т.к.

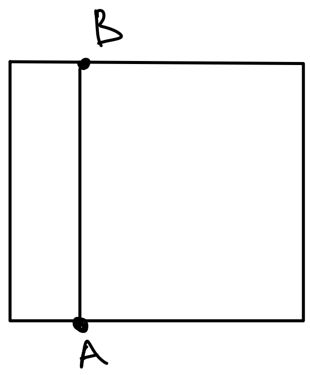
$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = 0$$

$$\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0^*(dx) = 0; \quad \gamma_0^*(dy) = dt$$
$$t \mapsto (0,t)$$

$$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \rightsquigarrow \quad \gamma_1^*(dx) = dt; \qquad \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_3^*(dx) = -dt$$
$$t \mapsto (t,0) \qquad\qquad t \mapsto (1-t,1)$$

по теореме Фубини.

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} f(t)\,dt - \int_{\gamma_2} f(t)\,dt = \int_{[0,1]} \int_A^B f'(s)\,ds\,dt = \int_{[0,1]^2} d\omega$$



$$f(A) - f(B) = \int_A^B f'(s)\,ds$$

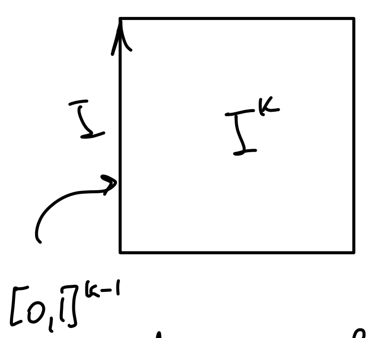
В общем случае: → тоже из теоремы Фубини и ф-лы Ньютона–Лейбница.

$$\int_{[0,1]^{k-1}} I^*\left(f(x_1,\ldots,x_k)\, dx_1 \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k\right) = \begin{cases} 0, & i \text{ вх. в грань} \\ \int_{[0,1]^{k-1}} f(x_1,\ldots,\alpha,\ldots,x_k)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k \end{cases}$$

грань куба I^k

где $\alpha = 0$ или 1

тут знак вылезет из грани.



С другой стороны,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k = (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{I^k} (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = \int_{I^{k-1}} \left(\int_0^1 (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k =$$

$$= \int_{I^{k-1}} \left(f(\ldots,1,\ldots) - f(\ldots,0,\ldots) \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_k$$

Н-Л.