Содержание

1. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию

1.1 Предварительные сведения и напоминания

Определение 1. Собственный идеал I в кольце R называется *простым*, если $ab \in I \implies a \in I$ или $b \in I$.

Собственный идеал I в кольце R называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале.

Простейшие свойства:

1. Для любого собственного идеала существует максимальный идеал, содержащий его.
2. Любой максимальный идеал является простым.
3. Собственный идеал I является простым тогда и только тогда, когда R/I — область целостности.
4. Собственный идеал I является максимальным тогда и только тогда, когда R/I — поле.

Определение 2. Элементы a и b называются *ассоциированными*, если $aR = bR$.

Необратимый элемент $a \in R$ называется *неприводимым*, если из равенства $a = bc$ следует, что или b или c ассоциирован с a.

Элемент называется *простым*, если главный идеал (a) простой.

Замечание. Простой $\implies$ неприводимый. Обратное, вообще гооворя, неверно.

Определение 3. Кольцо R называется *нётеровым*, если оно удовлетворяет условию обрыва **возрастающих** цепочек (ACC) для идеалов. Модуль называется *нётеровым*, если он удовлетворяет ACC для подмодулей.

Лемма 1. Следующие условия на кольцо R эквивалентны:

1. R нетерово.
2. Любой идеал в R конечнопорожден.
3. Любой подмодуль коненчопрожденного R-модуля конечнопрожден.
4. Любой конечнопорожденный R-модуль нетеров.

Теорема 1 (Гильберта, о базисе)**.** *Кольцо многочленов от конечного числа переменных над нётеровым кольцом нётерово. Иными словами, если R — нётерово кольцо, то любой идеал в кольцо $R[x_1, \dots, x_n]$ порожден конечным числом многочленов.*

1.2 Аффинные алгебраические многообразия

Я думаю, что как только я нормально послушаю курс алгебриаческой, этот параграф будет переписан.

Пусть F — поле, $\mathbb{A}^n_F = F^n$ — аффинное пространство над ним.

Пусть $J \subset A = F[t_1, \dots, t_n]$, обозначим через $V(J)$ множество всех общих нулей всех многочленов из идеала J, то есть

$$V(J) = \{x \in \mathbb{A}^n_F \mid f(x) = 0 \,\forall f \in J\}.$$

Определение 4. Пусть I — идеал в кольце R. *Радикал* идеала I определяется, как

$$\sqrt{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon f^n \in I\}.$$

Идеал I называется *радикальным*, если он совпадает со своим радикалом.

Замечание. Другими словами, I — радикальный идеал $\Leftrightarrow R/I$ — редуцированное кольцо (т.е. без нильпотентных элементов).

Несложно заметить, что $V(J) = V(AJ)$, где $AJ = \sum_{f \in J} Af$. Действительно, если $f(x) = 0, g(x) = 0$, то $\forall q, p \in F[t_1, \dots, t_n]$ $fq + pg = 0 \Rightarrow V(J) = V(AJ)$. Соотвественно, так как $f^m(x) = 0 \implies f(x) = 0$, мы имеем $V(J) = V(\sqrt{AJ})$, а это говорит нам, что имеет смысл рассматривать только радикальные идеалы.

Определение 5 (Топология зарисского)**.** Определим на $\mathbb{A}^n_F$ *топологию Зарисского*: набором замкнутых множеств будет

$$\{V(J) \subset \mathbb{A}^n_F \mid J - \text{радикальный идеал в } F[t_1, \dots, t_n]\}.$$

Замкнутые подмножества $\mathbb{A}^n_F$ в этой топологии называют *аффинными алгебраическими многообразиями (affine algebraic variety)*.[1]

Замечание. Проверим, что это удовлетворяет аксиомам топологии:

- $V(1) = \varnothing$.
- $V(0) = \mathbb{A}^n_F$.
- $V(\bigcup_k J_k) = \bigcap_k V(J_k)$, то есть пересечение замкнутых замкнуто.

Для подмножества $X \subset \mathbb{A}^n_F$ определим $I(X) = \{f \in F[t_1, \dots, t_n] \mid f(x) = 0 \; \forall x \in X\}$. Легко видеть, что $V(I(X)) = \mathrm{Cl}(X)$ в топологии Зарисского. Совершенно ясно, что $I(X)$ — идеал в кольце $F[t_1, \dots, t_n]$.

Определение 6. *Морфизмом* аффинных алгебраических многообразий $X \subset \mathbb{A}^n_f, Y \subset \mathbb{A}^n_F$ называется полиномиальное отображение $X \to Y$.

Аффинные многообразия с таким набором морфизмов образуют категорию $\mathfrak{Aff}$.

Определение 7. Так как $\mathbb{A}^1_F = F$, морфизмы $X \to \mathbb{A}^1_F$ — просто какие-то элементы $F[x_1, \dots, x_n]$. Соотвественно, морфизмы f и g совпадают, если $f - g \in I(X)$, то есть $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(X, \mathbb{A}^1_F) \cong F[t_1, \dots, t_n]/I(X)$. Это кольцо называется *аффинной алгерой* многообразия X и обозначается $F[X]$.

Так как $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(\_, \mathbb{A}^1_F)$ является контравариантным функтором, а кольцевые операции определяются на $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(X, \mathbb{A}^1_F)$ естественным образом, отображение $X \mapsto F[X]$ определяет контравариантный функтор $\mathfrak{Aff} \to F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ — конечнопорожденные редуцированные алгебры.

Построим функтор в обратную сторону. Рассмотрим $R \in F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ и выберем в ней набор образующих (то есть, выберем эпиморфизм $\pi_R\colon F[t_1, \dots, t_n]$). Рассмотрим функтор $\mathcal{X} = \mathrm{Hom}_{F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}}(\_, F)\colon F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.} \to \mathfrak{Set}$.

Множество $\mathcal{X}(A)$ мы можем отождествить с $\mathbb{A}_{F^n}$ по формуле

$$\varphi \mapsto (\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)).$$

Таким образом, $\mathcal{X}(R)$ вкладывается в $\mathbb{A}^n_F$ при помощи отображения $\psi \mapsto \psi \circ \pi_R$. Кроме того, множество $\mathcal{X}(R) = V(\mathrm{Ker}\, \pi_R)$ является аффинным алгебраическим многообразием с аффинной алгеброй $F[t_1, \dots, t_n]/I(V(\mathrm{Ker}\, \pi_R))$. Так мы имеем:

$$\mathcal{X}(F[X]) = \mathcal{X}(A/I(X)) = V(I(X)) = X \quad F[X(R)] = A/I(V(\mathrm{Ker}\, \pi_R)).$$

Последняя алгебра изоморфна R тогда и только тогда, когда $I(V(J)) = J$, где $R \cong A/J$.

[1] вообще говоря, кажется, что это не вполне правильное определение, так как тут это просто алгебраическое множество, а вот аффинное многообразие — окольцованное пространство. Поговорим об этом позже.

Теорема 2 (Теорема Гильберта о нулях). *Пусть $F = F^{alg}$, $J \subset F[t_1, \dots, t_n]$, а $f \in F[t_1, \dots, t_n]$. Тогда $f(V(J)) = 0 \Leftrightarrow f \in \sqrt{RJ}$. Иными словами, $f \in I(V(J)) \Leftrightarrow f \in \sqrt{RJ}$.*

Другими словами, теорема Гильберта о нулях говорит нам, что над алгебраически замнутым полем F аффинные алгебраические многообразия (замкнутые подмножества $\mathbb{A}_F^n$) взаимно однозначно соотвеству-ют радикальным идеалам в $F[t_1, \dots, t_n]$ и категории $\mathfrak{Aff}$ и $F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ антиэквивалентны.

Аналогичные рассуждения можно провести и для замкнутых подмножеств аффинного многообразия X и радикальных идеалов его аффинной алгебры $F[X]$. При этом точкам аффинного многообразия X соотвествуют максимальные идеалы $F[X]$, то есть, элементы $\operatorname{Specm}(F[X])$.

1.3 Топология Зарисского на спектре кольца

Пусть R — кольцо, $\operatorname{Specm} R$ — его максимальный спектр (множество его максимальных идеалов). Зададим на $\operatorname{Specm} R$ набор замкнутых множеств

$$\widetilde{V}(J) \overset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \mid \mathfrak{m} \supset J\},\ J \subset R.$$

При таком определении топологии X будет гомеоморфно $\operatorname{Specm}(F[X])$ (как мы и отмечали выше, точки соотвествуют максимальным идеалам).

В случае незамкнутого поля или бесконечнопорожденных алгебр правильно вместо максимального спектра рассматривать простой спектр. Топология Зарисского на нём определяется следующим образом;

$$J \subset R, \quad V(J) \overset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid J \subset \mathfrak{p}\}.$$

1.4 Словарик алгебраической геометрии

Геометрия	Алгебра
Замкнутые подмножества X	Идеалы в $F[X]$
Точки X	Максимальные идеалы в $F[X]$
Неприводимые замкныте подмножества в X	Простые идеалы в $F[X]$
will be upd	will be upd.

1.5 Локализация. Поведение спектра при локализации.

Напомним основные примеры локализаций:

1. Для $s \in R$ можно рассмотреть мультипликативное подмножество $\langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Локализация $\langle s \rangle^{-1} R$ называется *главной локализацией* и обозначается R_s.
2. Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца R, то $R \setminus \mathfrak{p}$ — мультипликативное подмножество. В этом случае локализация $R_\mathfrak{p} \overset{\text{def}}{=} (R \setminus \mathfrak{p})^{-1} R$ называется локализацией кольца R в простом идеале $\mathfrak{p}$.

Определение 8. Кольцо называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал и *полулокальным*, если максимальных идеалов конечное число.

Если $\mathfrak{p}$ — прсотой идеал, то $R_\mathfrak{p}$ — локальное кольцо с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

Пусть теперь $\varphi\colon R \to A$ — гомоморфизм коолец, тогда он индуцирует следующие отображения на идеалах:

- $\varphi^*\colon \operatorname{Ideals} A \to \operatorname{Ideals} R,\ \varphi^*(J) \overset{\text{def}}{=} \varphi^{-1}(J)$.
- $\varphi_*\colon \operatorname{Ideals} R \to \operatorname{Ideals} A,\ \varphi_*(I) \overset{\text{def}}{=} \varphi(I)A$.

Заметим, что так как прообраз простоого идеала прост, φ^* можно сузить до отображения $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R$.

Лемма 2. Если $I \in \operatorname{Im} \varphi^*$, то $I = \varphi^*(\varphi_*(I))$.

Доказательство. Пусть $I = \varphi^*(J) = \varphi^{-1}(J)$, тогда $\varphi(I) \subseteq J \implies \varphi_*(I) = \varphi(I)A \subseteq JA \subseteq J$. Но тогда $\varphi^*(\varphi_*(I)) \subseteq \varphi^{-1}(J) = I$. С другой стороны, $I \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(I)) \subseteq \varphi^*(\varphi_*(I))$. □

Предыдущее утверждение можно *сузить* на простые идеалы:

Лемма 3. Пусть $\varphi\colon R \to A$ — произвольный гомоморфизм колец. Тогда $\mathfrak{p} \in \varphi^*(\operatorname{Spec} A)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p} = \varphi^*(\varphi_*(\mathfrak{p}))$.

Теперь посмотрим на поведение спектра кольца при локализации. Пусть $\lambda\colon R \to S^{-1}R$ — локализационный гомоморфизм.

Лемма 4. $\lambda_* \circ \lambda^* = \mathrm{id}$. Следовательно, λ^* инъективно, а λ_* — сюръективно.

Доказательство. Пусть $I \trianglelefteq S^{-1}R$, тогда ясно, что $\lambda_*(\lambda^*(I)) \subset I$. Действительно,

$$\lambda_*(\lambda^*(I)) = \lambda(\lambda^{-1}(I))S^{-1}R \subset IS^{-1}R \subset I.$$

Теперь докажем включение в другую сторону. Пусть $\frac{r}{s} \in I$, тогда $s \cdot \frac{r}{s} = \frac{r}{1} \in I \supset \lambda(\lambda^{-1}(I)) \implies \frac{r}{1} \in \lambda(\lambda^{-1}(I)) \implies \frac{r}{1} \cdot \frac{1}{s} \in \lambda(\lambda^{-1}(I))S^{-1}R = \lambda_*(\lambda^*(I))$. □

Следствие 1. *Локализация нётерова кольца нётерова.*

Доказательство. Действительно, по предыдущей лемме $J = \lambda_*(\lambda^*(J)) = \lambda_*(I) = \lambda^(I)S^{-1}R$, а так как I — конечнопорождён, $\lambda^(I)S^{-1}R$ — конечнопорождён. □

Лемма 5. Идеал $I \trianglelefteq R$ лежит в образе λ^* (т.е. является прообразом какого-то идеала из локализации) тогда и только тогда, когда образ S в R/I не содержит делителей нуля.

Доказательство. Итак, как мы помни, $I \in \operatorname{Im}\lambda^* \Leftrightarrow I = \lambda^*(\lambda_*(I))$. Пусть ρ — гомоморфизм факторизации $R \to R/I$. Пусть для некоторых $r \in R,\ s \in S$ $\rho(r)\rho(s) = 0$. Тогда $\rho(rs) = 0 \implies rs = j \in I$. Тогда $\frac{r}{1} = \frac{\lambda(j)}{s} \in \lambda_*(I) \implies r \in \lambda^*(\lambda_*(I)) = I \implies \rho(r) = 0$, то есть $\rho(s)$ — не делитель нуля.

Пусть $r \in \lambda^*(\lambda_*(I)) \setminus I$. Тогда мы можем его представить в виде $\lambda(r) = \lambda(j)\frac{t}{s}, t \in R, s \in S, j \in I$. Но тогда $\exists s' \in S\colon rss' = jts' \implies \rho(r)\rho(ss') = \rho(j)\rho(ts') = 0$, а так как $\rho(r) \neq 0$ по предположению, $\rho(ss')$ — делитель нуля. □

Отсюда мы получаем такое следствие.

Следствие 2. *Отображение* $\lambda^*\colon \operatorname{Spec} S^{-1}R \to \operatorname{Spec} R$ *инъективно, а его образ равен множеству простых идеалов, не пересекающихся с* S.

Сужение λ_* *на множество простых идеалов* R*, не пересекающихся с* S*, инъективно.*

Таким образом, λ^* *и* λ^* *— взаимнообратные биекции между* $\operatorname{Spec} S^{-1}R$ *и множеством простых иедалов кольца* R*, не пересекающихся с* S*.*

Применяя это к главной локализации $\langle s\rangle$, мы получаем, что $\operatorname{Im}\lambda^* = \operatorname{Spec} R \setminus V(s)$ — отркытое подмножество, а $\{\operatorname{Spec} R_s \mid s \in R\}$ — база топологиии Зарисского.

Определение 9. Пусть $I \trianglelefteq R$ — идеал в кольце R. Его *радикалом* называется

$$\sqrt{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R \,|\, \exists n\colon x^n \in I\}.$$

Нильпотентным радикалом кольца R называется $\operatorname{NRad}(R) = \sqrt{0}$ — множество всех нильпотентных элементов кольца R.

Теорема 3. *Пусть* $I \trianglelefteq R$*. Тогда* $\sqrt{I}$ *равен пересечению всех простых идеалов, содержащих* I*, то есть*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} R,\ \mathfrak{p}\supset I} \mathfrak{p}.$$

В частности, нильпотентный радикал равен пересечению всех простых идеалов кольца R*.*

Доказательство. Начнём с того, что если $\mathfrak{p} \supset I$, то $\mathfrak{p} \supset \sqrt{I}$, так как если $x \in \sqrt{I}$, то для некоторого n мы имеем $x^n \in I \implies x^n = x \cdot \ldots \cdot x \in \mathfrak{p} \implies x \in \mathfrak{p}$. То есть, радикал $\sqrt{I}$ идеала I содержится в любом простом идеале $\mathfrak{p}$, содержащем сам I.

Пусть сначала $I = 0$, т.е. Возьмём

$$f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{p}$$

Тогда из предыдещего следствия $\operatorname{Spec} R_f = \varnothing$, так как с $\langle f \rangle$ пересекаются все простые идеалы. Отсюда $R_f = 0$. Но тогда мы имеем равенство

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \implies \exists n\colon f^n = 0.$$

Теперь рассмотрим для произвольного идеала I каноническую проекцию $\rho\colon R \to R/I$. Заметим, что

$$\rho^{-1}(\mathrm{NRad}(R/I)) = \sqrt{I}.$$

В самом деле, $\rho(y) = x \in \mathrm{NRad}(R/I) \Leftrightarrow \exists n\colon \rho(y^n) = x^n = 0$ в $R/I \Leftrightarrow \rho^{-1}(y)^n \in I$.

Теперь вспомним, что при эпиморфизме проораз простого идеала прост, то есть $\rho^{-1}(\mathfrak{p})$ — простой идеал $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R/I)$. Ну и кроме того, он содержит I (так как содержит 0). Тогда мы имеем такую цепочку включений:

$$\sqrt{I} \subset \bigcap_{I \subset \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{q} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R/I} \rho^{-1}(\mathfrak{p}) = \rho^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R/I} \mathfrak{p}\right) = \rho^{-1}(\mathrm{NRad}(R/I)) = \sqrt{I}.$$

□

1.6 Локализация модуля и плоские модули. Локальный принцип.

Пусть M — R-модуль, а S — мультипликативное подмножество в R.

Определение 10. Множество $M \times S/\sim$, где $(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \exists s'' \in S\colon ms's'' = m'ss''$ с еcтественно заданными операциями называется *локализацией* модуля M в S.

Лемма 6. $S^{-1}M \cong M \otimes_R S^{-1}R$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi\colon S^{-1}M \to M \otimes_R S^{-1}R$, заданное как

$$\frac{m}{s} \mapsto m \otimes \frac{1}{s}.$$

Ясно, что это сюръективный и инъективный гомоморфизм модулей. □

Определение 11. Модуль называется *плоским*, если тензорное домножение на него — точный функтор.

Предложение 1. *Локализация $S^{-1}R$ плоска, как R-модуль.*

Доказательство. Ясно, что достаточно показать, что оно переводит мономорфизмы в мономорфизмы (т.к. точность справа есть всегда).

Пусть $\varphi\colon M \to N$ — мономорфизм R-модулей. Рассмотрим

$$\varphi_S\colon S^{-1}M = M \otimes S^{-1}R \to N \otimes S^{-1}R = S^1 N.$$

Тогда $\varphi_S\left(\frac{m}{s}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(m)}{s} = 0 \Leftrightarrow \exists s' \in S\colon s'\varphi(m) = 0$. Тогда $\varphi(s'm) = 0$, а так как φ инъективен, отсюда $s'm = 0 \implies \frac{m}{s} = 0$. □

Следствие 3. *Локализация модуля сохраняет ядра, коядря и конечные пересечения пдодмодулей.*

Доказательство. Тензорное умножение на $S^{-1}R$ является точным функтором, а точный функтор всегда сохраняет ядра и коядра.

Рассмотрим пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \subset M$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i = \operatorname{Ker}\left(M \to \bigoplus_{i=1}^{n} M/M_i\right),$$

а ядра, как мы уже убедились, локализация сохраняет. □

Лемма 7. Отображение

$$M \to \prod_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R} M_{\mathfrak{m}}$$

инъективно.

Доказательство. Пусть есть $m \in M$ такой, что $m \mapsto 0$. Это означает, что $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \; \exists s \in S = R \setminus \mathfrak{m}$ (т.е. $s \notin \mathfrak{m}$): $sr = 0$. Напомним такое определение:

Определение 12. Пусть M — R-модуль, $N \subset M$. Тогда *аннулятор* N определяется как

$$\operatorname{Ann}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{r \in R \mid rn = 0 \; \forall n \in N\}.$$

Замечание. Если $N \leq M$, то $\operatorname{Ann}(N)$ — идеал в R.

Так вот, предыдущее равенство означает, что $s \in \operatorname{Ann}(r) \setminus \mathfrak{m}$. Но так как $\operatorname{Ann}(r)$ — идеал, а мы имеем такое для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$, это означает, что $\operatorname{Ann}(r) = R$, откуда $r = 0$. □

Свойство $\mathfrak{P}$ для R-модулей называется *локальным*, если

$$\mathfrak{P}(M) \Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \quad \mathfrak{P}(M_{\mathfrak{m}}).$$

Теорема 4. *Следующие свойства модулей и их гомоморфизмов являются локальными:*

1. $M = 0$.
2. φ — *инъективен,* φ — *сюръективен.*
3. M — *плоский.*
4. M — *проективный.*

Доказательство. Вообще говоря, во всех этих свойствах достаточно пользоваться $\operatorname{Specm} R$.

(1.) В одну сторону очевидно, докажем в другую. Пусть $M_{\mathfrak{m}} = 0 \; \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$. Тогда нужно сделать примерно то же самое, что мы уже делали в доказательстве предыдущего утверждения. Условие выше означает, что $\forall x \in M \; \exists s \in R \setminus \mathfrak{m}$: $sx = 0$, откуда следует, что $\operatorname{Ann}(x) \not\subset \mathfrak{m} \; \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$, а аннулятор элемента — идеал кольца R. Значит, $\operatorname{Ann}(x) = R \implies x = 0$.

(2.) В одну сторону это будет выполнено просто в силу того, что локализация плоская. Докажем теперь в другую сторону. Пусть $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \; \varphi_{\mathfrak{m}} \colon M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ инъекьивен. Так как локализация сохраняет ядра, это означает, что

$$\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \quad \operatorname{Ker}(\varphi_{\mathfrak{m}}) = \operatorname{Ker}(\varphi)_{\mathfrak{m}} = 0.$$

Т.е. $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \; \operatorname{Ker}(\varphi)_{fm} = 0$. Тогда по пункту **(1.)** мы имеем $\operatorname{Ker}(\varphi) = 0$. Для сюръектвности нужно совершенно аналогично доказать, что коядро будет нулевым.

(3.) Заметим, что если M — плоский, то так как $R_{\mathfrak{m}}$ — плоскй,

$$M \otimes R_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}}$$

тоже будет плоским.

Теперь докажем в обратную сторону. Надо доказать, что если функтор $\_ \otimes M_{\mathfrak{m}}$ точен $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$, то функтор $\_ \otimes M$ будет точным. Так как достаточно проверять, что моно переходит в моно, можно просто воспользоваться пунктом **(2)**. □

Лемма 8. Для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \; M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ann}(M) \leq \mathfrak{p}$.

1.7 Лемма Накаямы

Пусть $I \subset R$ — идеал, M — конечнопорожденный R-модуль.

Из базового курса алгебры мы знаем такой факт:

Теорема 5 (Гамильтона-Кэли). *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(R)$, где R — коммутативное кольцо. Тогда $\chi_A(A) = 0$.*

Докажем теперь некоторое его обобщение.

Теорема 6 (Гамильтона-Кэли). *Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(M)$ такой, что $\mathrm{Im}\,\varphi \subset IM$. Тогда существует многочлен $p(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ такой что:*

- $\alpha_i \in I^{n-i}$.
- $p(\varphi) = 0$.

Доказательство. Пусть у модуля M есть n образующих, тогда есть сюръективное отображение $R^n \twoheadrightarrow M$ (а значит и $IR^n \twoheadrightarrow IM$) и вообще есть следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, two heads, "f"] & IR^n \arrow[d, two heads, "g"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & IM \end{tikzcd}$$

Верхняя стрелка ψ есть из универсального свойства свободного модуля. Так как каждый базисный элемент переходит в элемент с коэффициентами из I, $\psi \in M_n(I)$. Положим $p = \chi_\psi$. Тогда, так как f — сюръективно, $\forall m \in M\ \exists x\colon f(x) = m$. Тогда:

$$p(\varphi)(m) = p(\varphi)(f(x)) = p(\psi)(g(x)) = 0 \implies p(\varphi) = 0.$$

□

Теорема 7 (Лемма Накаямы). *Пусть $M = IM$. Тогда $\exists a \in M\colon \forall m \in I\ am = m$*

Доказательство. $\mathrm{id}_M(M) = IM \implies$, а значит, по теореме Гамильтона-Кэли $\exists p(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_0,\ \alpha_i \in I\colon p(\mathrm{id}_M) = 0$. Тогда

$$\mathrm{id}_M(1 + \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_0) = 0 \implies \mathrm{id}_M(-(\alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_0)) = 1.$$

Тогда $a = -(\alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_0)$ подходит. В самом деле,

$$am = \mathrm{id}_M(m) = m \quad \forall m \in M.$$

□

Следствие 4. *Если $\varphi \in \mathrm{End}(M)$ и φ — эпиморфизм, то φ — изоморфизм.*

Доказательство. Определим действие $R[t]$ на M при помощи гомоморфизма θ:

$$\theta\colon R[t] \to \mathrm{End}(M) \quad \theta(t) = \varphi.$$

Так как φ — эпиморфизм, $tR[t]M = M$.

Тогда по лемме Накаямы существует $f \in (t) = tR[t]$ такой, что $fm = m\ \forall m \in M$. Запишем $f = tg$ для некоторого $g \in R[t]$ и спроектируем результат в $\mathrm{End}(M)$:

$$tg(t) \cdot m = m \implies \varphi(g(\varphi)(m)) = m \Leftrightarrow \varphi \circ g(\varphi) = \mathrm{id}\,.$$

Но, по определению, $g(\varphi) = \varphi(g)$, тогда

$$g(\varphi)(\varphi(m)) = m,$$

$g(\varphi)$ — обратный к φ. □

1.8 Радикал Джекобсона

Кольцо R, рассматриваемое, как модуль над собой, называется *регулярным* R-модулем.

Определение 13. Аннулятором R-модуля M называется множество $\{r \in R \mid rM = 0\}$.

Лемма 9. Ненулевой простой R-модуль M изоморфен $R/\mathfrak{m}$ для некоторого $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$. Таким образом, $\operatorname{Ann} M$ является максимальным идеалом кольца R.

Доказательство. □

1.9 Кольца нормирования, кольца дискретного нормирования и Дедекиндовы области

Определение 14. Пусть R — область целостности, F — её поле частных. R называется *кольцом нормирования*, если $R \cup (R \setminus 0)^{-1} = F$. То есть, $\forall x \in F$ либо $x \in R$, либо $x^{-1} \in R$.

Пример 1. Например, кольцами нормирования являются $\mathbb{Z}_{(p)},\ \mathbb{Z}_p,\ F[[x]]$.

Определение 15. Пусть F — поле, а функция $\upsilon\colon F^* \to \Gamma$, где Γ — линейно упорядоченная абелева группа, гомоморфизм, т.е. $\upsilon(ab) = \upsilon(a) + \upsilon(b)$, причём выполнено $\upsilon(a+b) \geq \min(\upsilon(a), \upsilon(b))$ называется *нормированием.*

Если υ действует в $\mathbb{Z}$ и сюръективна, то её называют *дискретным нормированием* на F.

Следующая теорема устанавливает связь между нормированием на поле и кольцами нормирования.

Теорема 8.
1. *Пусть υ — нормирование на F, тогда $R \overset{\text{def}}{=} \{x \in F \mid \upsilon(x) \geq 0\}$ — кольцо нормирования.*
2. *Если R — кольцо нормирования с полем частных F, то можно положить $\Gamma = F^*/R^{*2}$ и задать на ней порядок следующим образом:*
$$aR^* \geq bR^* \Leftrightarrow ab^{-1} \in R.$$
и задать $\upsilon\colon F^* \to F^*/R^*$. Тогда такое υ будет нормированием.
3. *Процедуры из пунктов (1) и (2) взаимнообратны с точностью до изоморфизма на $\operatorname{Im} \upsilon$ (как упорядоченных групп).*

Доказательство. Докажем сначала (1):
$$\upsilon(x) + \upsilon(x^{-1}) = 0 \implies \upsilon(x) \geq 0 \text{ или } \upsilon(x^{-1}) \geq 0 \Leftrightarrow x \in R \text{ или } x^{-1} \in R.$$

Теперь докажем (2). Действительно, если R — кольцо номрирования, то либо $ab^{-1} \in R$, откуда $\upsilon(a) \geq \upsilon(b)$, либо $a^{-1}b \in R$, откуда $\upsilon(b) \geq \upsilon(a)$, то есть на $\Gamma = F^*/R^*$ порядок будет линейным. Кроме того,
$$\begin{cases} \upsilon(a) \geq \upsilon(b) \\ \upsilon(b) \geq \upsilon(a) \end{cases} \Leftrightarrow ab^{-1} \in R^* \Leftrightarrow aR^* = bR^* \Leftrightarrow \upsilon(a) = \upsilon(b),$$
что показывает антисимметричность.

Кроме того, $\upsilon(a+b) \geq \upsilon(a)$, либо $\upsilon(a+b) \geq \upsilon(b)$, откуда
$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} \in R, \text{ либо } \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b} \in R.$$

Доказательство взаимной обратности остается в качестве простого **упражнения**. □

[2] в аддитивной записи...

Предложение 2. *Пусть R — кольцо нормирования, тогда R —- локально и целозамкнуто.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{m} \overset{\mathrm{def}}{=} \{a \in R \mid \upsilon(a) > 0\}$. Ясно, что $\forall x \in R, a \in \mathfrak{m}\ \upsilon(ax) = \upsilon(a) + \upsilon(x) \geq \upsilon(a) > 0$ и $\forall a, b \in \mathfrak{m}\ \upsilon(a+b) \geq \min(\upsilon(a), \upsilon(b)) > 0$, что показывает нам, что $\mathfrak{m}$ — идеал. Все остальные элементы имеют нормирвоание, равное нулю, и поэтому они обратимы (просто по определению), значит $\mathfrak{m}$ — единственный максимальный идеал кольца R.

Теперь докажем целозамкнутость. Действительно, пусть $a \in F$

$$a^n + r_{n-1}a^{n-1} + \ldots + r_0 = 0,\ r_i \in R \implies a^n = r'_{n-1}a^{n-1} + \ldots + r'_0 \implies \upsilon\left(\sum_{i=1}^{n-1} r'_i a^i\right) \geq$$
$$\geq \min \upsilon\big(r'_i a^i\big) \geq \min \upsilon\big(a^i\big) = \min(i \cdot \upsilon(a)) \implies \upsilon(a) \geq 0 \implies a \in R.$$

□

Предложение 3. *Пусть R — кольцо дискретного нормирования с нормированием R. Тогда*

1. $R \setminus \{0\} \cong R^* \times \langle \pi \rangle$[3]
2. $\mathrm{Ideals}(R) = \{0, R, \pi^n R,$ *где* $n \in \mathbb{N}\}$.
3. $\mathrm{Spec}\, R = \{0, \pi R\}$.
4. $\mathrm{Specm}\, R = \{\pi R\}$.

Доказательство. Докажем сначала (1). Возьмём $\pi\colon \upsilon(\pi) = 1$ (мы можем так сделать, так как дискретное нормирование сюръективно). Возьмём $a \in R, \upsilon(a) = n \in \mathbb{Z} \implies \upsilon(a\pi^{-n}) = 0 \Leftrightarrow a\pi^{-n} \in R^* \Leftrightarrow a \in \pi^n R$ (причем очевидно, что такое представление единственно.

Рассмотрим $I \in \mathrm{Ideals}(R)$, возьмём $n = \min_{a \in I} \upsilon(a) = \upsilon(b) = \upsilon(\pi^n \alpha)$, где $\alpha \in R^*$, а значит, $\forall c \in I\colon c = \pi^k \beta,\ k \geq n \implies c \in \pi^n R$. □

Лемма 10. Пусть R — нётерова область целостности, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}\, R,\ \mathfrak{m} \neq 0$, тогда $\mathfrak{m}^k \neq \mathfrak{m}^{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ — векторное пространство над $R/\mathfrak{m}$. Тогда

$$\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1} \otimes_R R_\mathfrak{m} \cong (\mathfrak{m}R_\mathfrak{m})^k/(\mathfrak{m}R_\mathfrak{m})^{k+1} = 0 \implies \mathfrak{m}R_\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^k R) = (\mathfrak{m}^k R_\mathfrak{m}) \implies \mathfrak{m}^k R_\mathfrak{m} = 0 \implies \mathfrak{m} = 0.$$

В предпоследнем переходе мы используем лемму Накаямы (там конечнопорожденный модуль $\mathfrak{m}^k R_\mathfrak{m}$ умножается на $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m} = \mathrm{Rad}(R_\mathfrak{m})$). □

Теорема 9. *Пусть R — область целостности. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *R — кольцо дискретного нормирования.*
2. *R — нётерово локальное целозамкнутое кольцо размерности Крулля 1.*
3. *R — локальное нётерово неполе, в котором максимальный идеал главный.*
4. *R — факториальное кольцо с единственным (с точностью до ассоциированности) неприводимым элементом.*
5. *Локальное неполе, идеалы которого имеют вид* $\mathrm{Ideals}(R) = \{0, \mathfrak{m}^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство. (1) $\implies$ (2) мы уже по сути доказали в утверждении 3. Докажем теперь (2) $\implies$ (3). Мы знаем, что $\mathrm{Specm}\, R = \{\mathfrak{m}\}$, возьмём $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ по лемме 10. Рассмотрим $aR \subset \mathfrak{m}$. Из примарного разложения aR следует, что aR — $\mathfrak{m}$-примарный. Тогда существует $k\colon \mathfrak{m}^k \subset aR \subset \mathfrak{m}$, выберем наименьшее из таких k. Теперь заметим, что

$$b \in \mathfrak{m}^{k-1} \setminus aR \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \frac{\mathfrak{m}^{k-1}}{a}$$

Дописать этот кусок.

(3) $\implies$ (4) : Возьмём $\pi \in R$ — неприводимый, тогда $\pi \in \mathfrak{m} = aR$, а значит, π — ассоциирован с a.

□

[3] тут имеется в виду изоморфизм моноидов.

1.10 Дедекиндовы кольца

Предложение 4. *Пусть R — нётерова одномерная область целостности. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *R целозамкнуто.*
2. *Любой примарный идеал имеет вид $\mathfrak{m}^k$ для некоторого $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$.*
3. *$\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$ кольцо $R_\mathfrak{m}$ — кольцо дискретного нормирования.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (3) просто в силу того, что целозамкнутость — локальное свойство и теоремы 9. Ну и, в силу того, что $R_\mathfrak{m}$ — нётеровы одномерные локальные.

(3) $\implies$ (2) : В таком кольце любой ненулевой примарный идеал I является $\mathfrak{m}$-примарным, а такие однозначно соотвествуют примарным идеалам локализации $R_\mathfrak{m}$. Так как $R_\mathfrak{m}$ — DVR, там все примарные идеалы имеют вид $\mathfrak{m}^n R_\mathfrak{m}$ (так как $R_\mathfrak{m}$ — локальное кольцо с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$), а λ_* — биекция на множестве примарных идеалов, не пересекающихся с мультипликативным подмножеством (которое тут $R \setminus \mathfrak{m}$, да), мы имеем $\lambda_*(I) = \lambda_*(\mathfrak{m}^n) \implies I = \mathfrak{m}^n$.

(2) $\implies$ (3) : Любой идеал в $R_\mathfrak{m}$ имеет примарное разложение $\implies$ является примарным. $\lambda^*(J)$ — $\mathfrak{m}$-примарный $\implies \lambda^*(J) = \mathfrak{m}^n \implies \lambda_*(\lambda^*(J)) = \lambda_*(\mathfrak{m}^n) = (\mathfrak{m}R_\mathfrak{m})^n$, откуда по теореме 9 $R_\mathfrak{m}$ — кольцо дискретного нормирования. □

Определение 16. Кольца, удовлетворяющие условию 4 называют *дедекиндовыми.*

Теорема 10. *Пусть Z — Дедекиндово кольцо, Q — его поле частных, F/Q — конечное расщирение (полей), а $R = \operatorname{Int}_F Z$. Тогда R — дедекиндово.*

Доказательство. Так как R — целое замыкание, $\dim R = 1$. Так как F — конечное расширение, $\forall \alpha \in F$ является корнем многочлена

$$\alpha^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\alpha^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{b_0} = 0, \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z} \implies b\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + c_0 = 0 \implies (b\alpha)^n + d_{n-1}(b\alpha)^{n-1} + \ldots + d_0 = 0$$

Значит, $b\alpha \in R$, откуда $\alpha \in (Z \setminus 0)^{-1}R$.

Так как F — поле частных R, R целозамкнуто. Для дедекиндовости нам не хватает Нётеровости.

Рассмотрим F, как векторное пространство над Q. Рассмотрим оператор

$$m_\alpha \in \operatorname{End}_{Q-\mathfrak{mod}}(F),\ m_\alpha(x) = \alpha x.$$

Далее доказательство приводится только для случая сепарабельного расширения. Так вот, если расширение сепарабельно, $\exists \alpha \in F\colon \operatorname{Tr} m_\alpha \neq 0$. Рассмотрим невырожденную билинейную форму $B(x, y) = \operatorname{Tr} m_{xy}\colon F \times F \to Q$.

Возьмём базис $u_1, \ldots, u_n$ — базис F над Q (можно полагать, что $u_i \in R$) и $v_1, \ldots, v_n$ — двойственный базис относительно B. Возьмём $x \in F$, тогда

$$x = \sum_{k=1}^{n} B(x, u_k) v_k.$$

$x \in R,\ u_k \in R$, тогда $xu_k \in R$, а значит, его минимальный многочлен над Q имеет коэффициенты из Z (была такая теорема, надо найти и вставить ссылку). В то же время ясно, что минимальный многочлен xu_k равен минимальному многочлену эндоморфизма m_{xu_k}. Собственные числа m_{xu_k} — это корни минимального многочлена, а они являются целыми над Z, следовательно и их сумма (с учетом кратности) — целая над Z, а это в точности след. Значит, R — подмодуль конечнопорожденного Z-модуля, а значит, так как Z — дедекиндово, R конечнопорождено, как Z-модуль $\implies R$ — нётерово. □

В случае $Z = \mathbb{Z}$, кольцо R называется дедекиндовым кольцом *арифметического типа* или *кольцом целых числового поля.* В случае $Z = K[t]$ кольцо R называется дедекиндовым кольцом *функционального* типа.

1.11 Hauptidealsatz

Определение 17. Пусть I — идеал. Тогда его *высота* $h(I)$ — длина наибольшей цепочки вложенных в него простых идеалов.

Теорема 11 (Крулль, о высоте)**.** *Пусть $x \in R$ — нётерово коммутативное кольцо с единицей, $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал, содержащий $(x) = xR$. Тогда $h(\mathfrak{p}) \leq 1$.*

Доказательство. Во-первых, условие теоремы располагает к замене R на $R_\mathfrak{p}$, т.е. далее будем считать, что R — локально с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{p}$. Так что $\mathfrak{p}$ — единственный минимальный простой, содержащий xR, а xR — $\mathfrak{p}$-примарным, откуда $\dim(R/xR) = 0$. Значит, R/xR — нульмерное нётерово, то есть Артиново. Действительтно, $\sqrt{xR} = \mathfrak{p} \implies \exists n \in \mathbb{N}\colon \mathfrak{p}^n = xR$, откуда $(\mathfrak{p}/xR)^n = 0$. Значит, если $p' \in \operatorname{Spec} R/xR$, то

$$(\mathfrak{p}/xR)^n \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}/xR \implies \mathfrak{p}/xR \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}/xR.$$

Определение 18. Пусть $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R,\ \lambda = \lambda_\mathfrak{q} \colon R \to R_\mathfrak{q}$. Тогда *символическая степень* идеала $\mathfrak{q}$ используется, как

$$\mathfrak{q}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^*(\lambda_*(\mathfrak{q}^n)).$$

Лемма 11. Идеал $\mathfrak{q}^{(n)}$ — примарный.

Доказательство. $\lambda_*(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} R_\mathfrak{q} \implies \lambda_*(\mathfrak{q}^n) = \lambda_*(\mathfrak{q})^n$ — примарный, а λ^* отображает примарные в примарные. □

Пусть $\bar{\cdot}\colon R \to R/xR$ — канонический гомоморфизм. Рассмотрим в R/xR такую убывающую цепочку идеалов:

$$\overline{q} \supset \overline{\mathfrak{q}^{(2)}} \supset \ldots \supset \overline{\mathfrak{q}}^{(n)} = \overline{\mathfrak{q}}^{n+1},$$

так как R/xR — артиново. Возьмём $q^{(n)} \ni z = y + xr,\ y \in \mathfrak{q}^{(n+1)}, r \in R$. Тогда $xr\mathfrak{q}^{(n)}$ и $x \notin \mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{q}^{(n)}}$. Тогда отсюда следует, что $r \in q^{(n)}$

Теперь $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + x \cdot \mathfrak{q}^{(n)}$. Тогда в $R/\mathfrak{q}^{(n+1)}$ мы имеем $\widetilde{x}\widetilde{q^{(n)}} = \widetilde{\mathfrak{q}^{(n)}},\ \widetilde{x} \in \operatorname{Rad} R/\mathfrak{q}^{(n+1)}$ и тогда по лемме Накаямы $\mathfrak{q}^{(n)} = 0$.

Значит, $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} \implies \lambda^*(\lambda_*(\mathfrak{q}^n)) = \lambda^*(\lambda_*(\mathfrak{q}^{n+1})) \implies \lambda_*(\mathfrak{q})^n = \lambda_*(\mathfrak{q})^n \cdot \lambda_*(\mathfrak{q})$, а $\lambda_*(\mathfrak{q}) \subset \operatorname{Rad}(R_\mathfrak{q})$ и тогда опять же по лемме Накаямы мы имеем $\lambda^*(\mathfrak{q}^n) = 0$.

Значит, $\operatorname{Spec} R_\mathfrak{q} = \{\mathfrak{q}\} \implies$ в R нет простых, содержащихся в $\mathfrak{q} \implies h(\mathfrak{q}) = 0 \implies h(\mathfrak{p}) \leq 1$. □

1.12 Пополнения

Пусть A — абелева группа с убывающей фильтрацией

$$A \supset A_0 \supset A_1 \supset \ldots A_n \supset$$

A можно сделать топологической группой, взяв в качестве базы окрестностей нуля $\{A_n\}$. В нашем случае A обычно будет кольцом или модулем, а фильтрация будет степенями идеала.

Ясно, что если $0 \neq a \in \bigcap A_i$, то её отделить от остальных не получится. Соотвественно, можно просто декларировать, что топология, заданная этой фильтрацией Хаусдорфова тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_i A_i = 0.$$

Также заметим, что в этой топологии каждая A_i будет не только открытой, но и замкнутой, так как все их сдвиги $x + A_i$ открыты, значит все смежные классы открыты и достаточно перейти к дополнению всех, кроме одного, откуда мы получим, что этот один смежный класс $y + A_j$ замкнут, следовательно A_j замкнуто.

Возьмём теперь пополнение по этой топологии. А именно, возьмём прямой предел по следующей последовательности:

$$\ldots \xrightarrow{\theta_2} A/A_2 \xrightarrow{\theta_1} A/A_1 \xrightarrow{\theta_0} A/A_0, \quad \widehat{A} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim A/A_n.$$

Определение 19. Соотвественно, *пополнением* A в топологии, связанной с фильтрацией $\{A_n\}$ называется определённое выше $\widehat{A}$.

Пример 2. Например, $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ или $F[[t]] = \varprojlim F[t]/(t)^n$.

Говорят, что фильтрации (A_n) и (B_n) имеют ограниченую разность, если

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon A_{n+n_0} \subset B_n \text{ и } B_{n+n_0} \subset A_n\ \forall \mathbb{N}.$$

Ясно, что такие фильтрации задают одну и ту же топологию, но, на самом деле это условие сильнее (это мы поймём чуть попозже).

Напомним лемму о змее:

сюда диаграмму про лемму о змее

Лемма 12. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to A' \to A \to A'' \xrightarrow{p} 0,$$

(A_n) — фильтрация на A, $((A_n) \cap A')$ — фильтрация на A' и $(p(A_n))$ на A". Тогда после перехода к пополнениям мы также получим точную последовательность

$$0 \to \widehat{A'} \to \widehat{A} \to \widehat{A''} \to 0.$$

Рабоче крестьянское доказательство. Перейдём к точной последовательности:

$$0 \to A'/A_n \cap A' \to A/A_n \to A''/p(A_n)$$

Определим теперь $\widetilde{A}$ и гомоморфизм d, как

$$\widetilde{A} = \prod_{n=0}^{\infty} A/A_n \xrightarrow{d} \widetilde{A}, \quad d((c_n)) = (c_n - \theta(c_{n+1})).$$

Несложно заметить, что $\operatorname{Ker} d = \widehat{A}$. Соотвественно, надо рассмотреть диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{A'} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{A''} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \widetilde{A'} \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & \widetilde{A} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & \widetilde{A''} \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{A'} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{A} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{A''} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \operatorname{Coker}(d') \arrow[r] & \operatorname{Coker}(d) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(d'') &
\end{tikzcd}$$

и применить лемму о змее. Засчет сюръективности θ' $\forall (b_n)$ мы сможем подобрать (c_n) такие, что $d'(c_n) = (b_n)$. А если d' сюръективен, то $\operatorname{Coker} d' = 0$ и из леммы о змее мы получаем нужную диаграмму:

$$0 \to \widehat{A'} \to \widehat{A} \to \widehat{A''} \to \operatorname{Coker} d' = 0.$$

□

Умновое доказательство. Оказывается, если существуют пределы $\lim X_n, \lim Y_n, \lim Z_n$ (где речь идет об объектах абелевой категории), то последовательность

$$0 \to \lim X_n \to \lim Y_n \to \lim Z_n$$

точна вообще всегегда, так как ядро — это предел, а пределы коммутируют, так как предельный функтор сопряжен к диагональному, а значит, сохраняет пределы. □

Следствие 5. $\widehat{A}/\widehat{A_n} \cong A/A_n$.

Доказательство. Из прошлой леммы, полагая $A' = A_n$, мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \widehat{A_n} \to \widehat{A} \to \widehat{A/A_n} \to 0$$

А теперь заметим, что

$$(A/A_n) \supset A_1/A_n \supset \ldots \supset A_n/A_n \supset 0 \supset \ldots,$$

откуда $\widehat{A/A_n} = A/A_n$ и из точности последоватльности выше мы получаем нужное. □

Следствие 6. *Переходя в предыдущем следствии к пределу, мы получаем, что*

$$\widehat{\widehat{A}} = \varprojlim \widehat{A}/\widehat{A_n} \cong \widehat{A},$$

то есть пополение полно[4]

Пример 3. На простых примерах видна некоторая эвристика: $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p,\ F[t] \hookrightarrow F[[t]]$.

На самом деле, верно такое общее утверждение

Теорема 12. $\operatorname{Ker}\Big(A \to \widehat{A}\Big) = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

1.13 Градуированные алгебры и модули

Определение 20. Пусть R_i — A-модули. R называют $\mathbb{N}$-*градуированной* A-*алгеброй*, если

$$R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i, \quad R_i \cdot R_j \subset R_{i+j}.$$

Градуированным R-модулем называют $M = \bigoplus M_i$ с условием $R_i M_j \subset M_{i+j}$.

Предложение 5. *Градуированное кольцо R является Нётеровым тогда и только тогда, когда R_0 — нётерово и R — конечнопорожденная R_0-алгебра.*

Доказательство. В обратную сторону это почти очевидно: достаточно применить теорему Гильберта о Базисе и то, что нётеровость сохраняется при эпиморфизме.

Теперь докажем в обратную сторону. Положим

$$R_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n \trianglelefteq R,$$

пусть R_+ порождён $\{x_1, \ldots, x_s\}$ над R. Эти x_i можно считать однородными, т.к. иначе разобьем на однородные компоненты, которые всё еще будут порождать. Таким образом, $x_i \in R_{k_i}$ для некоторого k_i. Возмём $y \in R_n$,

$$y = \sum_{j=1}^{m} x_j z_j, \quad z_j \in R_{n-k_j}.$$

По индукционному предположению $z_j \in R_0[x_1, \ldots, x_s] \implies y \in R_0[x_1, \ldots, x_s]$. □

Пусть $I \trianglelefteq R$, расммотрим *алгебру раздутия*:

$$\mathrm{Bl}_I(R) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n.$$

[4] что вполне логично.

2. Алгебраическая теория чисел

2.1 Разложение идеалов в произведение простых в кольцах целых числовых полей

Лемма 13. Пусть A — нётерово, $I \subset A$ — ненулевой идеал. Тогда существуют такие простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$, что $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \subset I$.

Доказательство. Предположим противное, то есть, что существуют идеаы, для которых не выполнено условие леммы. Выберем среди таких максимальный (мы можем так сделать в силу нётеровости кольца), назовём его I. Заметим, что I — не простой идеал, что означает, что $\exists x, y \colon \notin I \colon xy \in I$. Кроме того, I — собственный идеал. Значит,

$$I + (x) \supset (x), \quad I + (y) \supset I,$$

причем включение строгое. Тогда для идеалов $I + (x)$ и $I + (y)$ условие леммы уже выполняется, то есть $\exists \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ и $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ такие, что $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \subset I + (x)$, $\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_m \subset I + (y)$. Но тогда мы имеем

$$\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_m \subset (I + (x))(I + (y)) \subset I, \text{ так как } xy \in I,$$

что даёт нам противоречие. □

Определение 21. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, $0 \neq I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда введём

$$I^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{x \in K \mid xI \subset \mathcal{O}_K\}.$$

Свойства:

1. $x, y \in I^{-1} \implies x + y \in I^{-1}$.
2. Если $x \in I^{-1}$, а $a \in \mathcal{O}_K$, то $ax \in I^{-1}$.

Доказательство. Действительно, $(x + y)I \subset xI + yI \subset \mathcal{O}_K$. Если $xI \subset \mathcal{O}_K$, то для $a \in \mathcal{O}_K$ мы получим $axI = xaI = xI$, так как I — идеал в $\mathcal{O}_K$. □

Замечание. Заметим, что I^{-1} — $\mathcal{O}_K$-модуль. Кроме того, если $a \in I$, то aI^{-1} — идеал в $\mathcal{O}_K$. В частности, aI^{-1} конечнопорожден, а значит, aI^{-1} — конечнопорожденный $\mathcal{O}_K$-модуль.

Пример 4. Пусть $K = \mathbb{Q}$, тогда $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ и любой идеал $I \subset \mathbb{Z}$ имеет вид $I = (a)$. Тогда $(a)^{-1} = a^{-1}\mathbb{Z}$.

Лемма 14. Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — ненулевой собственный идеал. тогда $I^{-1} \neq \emptyset_K$.

Доказательство. Докажем, что существует $x \in K$ такой, что $x \notin \mathcal{O}_K$ и при этом $xI \in \mathcal{O}_K$. Выберем в I ненулевой элемент a. Рассмотрим $(a) \subset I$, по лемме 13 найдутся такие ненулевые $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, что $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \subset (a)$.

Так как I — собственный, а кольцо $\mathcal{O}_K$ одномерно, I лежит в некотором простом идеале $\mathfrak{p}$. Так мы получаем цепочку включений

$$\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \subset (a) \subset \mathfrak{p} \implies \exists i \colon \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}.$$

Так как оба идеала максимальны, это не включение, а равенство. Не умаляя общности, пусть $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$. Теперь, пусть $k = 1$. Тогда мы имеем $\mathfrak{p} \subset (a) \subset I \subset \mathfrak{p} \implies I = \mathfrak{p} = (a) \implies I^{-1} = a^{-1}\mathcal{O}_K$. Значит, $x = a^{-1} \notin \mathcal{O}_K$, так как иначе $I = \mathcal{O}_K$.

Теперь пусть $k \geq 2$, выберем k минимально возможным. Тогда

$$\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \not\subset (a) \implies \exists b \in \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \setminus (a).$$

Тогда мы можем взять $x = \frac{b}{a}$ и тогда $xI = \frac{b}{a}I \subset \frac{b}{a}\mathfrak{p}_1 \subset \frac{\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k}{a} \subset \frac{(a)}{a} = \mathcal{O}_K$. Остаётся проверить, что $\frac{b}{a} \notin \mathcal{O}_K$.В самом деле, если $\frac{b}{a} \in \mathcal{O}_K$, то $b \in (a)$, что противоречит выбору b. □

Замечание. Ясно, что включение $\mathcal{O}_K \subset I^{-1}$ верно всегда, так как просто по определению идеала $\forall x \in \mathcal{O}_K \; xI \subset \mathcal{O}_K$

Возьмём $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ и рассмотрим $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}$. С одной стороны, это идеал в $\mathcal{O}_K$, причём он содержит $\mathfrak{p}$.

Лемма 15. Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \emptyset_K$, тогда $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = (1) = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Предположим противное, тогда в силу максимальности идеала $\mathfrak{p}$ мы имеем $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{p} = (u_1, \ldots, u_n)$, тогда если $\alpha \in \mathfrak{p}^{-1} \setminus \mathcal{O}_K$ (тут мы пользуемся леммой 14), то $\alpha u_1 \in \mathfrak{p}$ и мы можем написать систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha u_1 = \sum\limits_{u=1}^{n} a_{1i} u_i \\ \alpha u_2 = \sum\limits_{u=1}^{n} a_{2i} u_i \\ \vdots \\ \alpha u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni} u_i \end{cases}$$

В матричной форме эта система будет иметь вид

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \alpha - a_{22} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \alpha - a_{nn} \end{pmatrix}}_{=B} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0.$$

Значит, $\det B = 0$, что даёт нам унитарный многочлен с коэффициентами из $\mathcal{O}_K$, обнуляющий α. Тогда, так как $\mathcal{O}_K$ — целозамкнуто, $\alpha \in \mathcal{O}_K$, противоречие. $\square$

Теперь мы достаточно подготовились, чтоб доказать, что в кольце $\mathcal{O}_K$ любой идеал раскладывается в произведение простых единственным образом.

Теорема 13 (О разложении идеалов в произведение простых)**.** *Пусть $0 \neq I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда I однозначно (с точностью до перестановки сомножителей) раскладывается в произведение простых идеалов.*

Доказательство. Как обычно, проходит в два этапа.
Существование: Предположим, что существуют идеалы, не раскладывающиеся в произведение простых. Среди таких идеалов возьмём максимальный, обозанчим его I (мы можем так сделать, потому что $\mathcal{O}_K$ — нётерово кольцо). Он содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{p} \in \operatorname{Specm} \mathcal{O}_K$. Тогда $I\mathfrak{p}^{-1} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}_K$ — идеал. Значит, нам остаётся показать, что $I\mathfrak{p}^{-1} \neq I$. Покажем, что $II^{-1} = \mathcal{O}_K$, тогда мы сможем просто домножить и всё получистя.

Лемма 16. Для любого идеала $I \subset \mathcal{O}_K$ мы имеем $II^{-1} = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Пусть это не так, тогда $II^{-1} \subset \mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q}$ — максимальный идеал. Тогда $II^{-1}\mathfrak{q}^{-1} \subset \mathfrak{q}\mathfrak{q}^{-1} = \mathcal{O}_K \implies I^{-1}\mathfrak{q}^{-1} \subset I^{-1}$. Так как $\mathfrak{q}^{-1}$ не совпадает с $\mathcal{O}_K$, мы можем выбрать $\alpha \in \mathfrak{q}^{-1} \setminus \mathcal{O}_K$. Проделывая рассуждение, аналогичное лемме 15 мы получаем, что $\alpha \in \mathcal{O}_K$, что даёт нам противоречие. $\square$

Итак, если $I\mathfrak{p}^{-1} = I$, то $\mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}_K$, что противоречит лемме 14. Значит, $I \subset I\mathfrak{p}^{-1}$, следовательно мы можем разложить $I\mathfrak{p}^{-1}$ в произведение простых:

$$I\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \implies I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k \cdot \mathfrak{p},$$

что и требовалось.
Единственность: Пусть $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n$, тогда $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_m \subset \mathfrak{q}_1 \implies \exists i \colon \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}_i$, а так как они максимальны, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_1$, что даёт нам противоречие. $\square$

Определение 22. Пусть $I \subset K$. I называется *дробным идеалом*, если $\exists x \neq 0 \colon xI \subset \mathcal{O}_K$ — идеал.

Пример 5. I^{-1} — дробный идеал.

Предложение 6. *Ненулевые дробные идеалы образуют группу по умножению.*

Доказательство. Легко заметить, что произведение дробных идеалов — дробный идеал. Обратный определяется как и раньше:

$$I^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{x \in K \mid xI \subset \mathcal{O}_K\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $II^{-1} = \mathcal{O}_K$. □

Из теоремы 13 следует, что любой дробный идеал раскладывается в произведение простых идеалов (возможно, с отрицательными степенями). Действительно, пусть J — дробный идеал, тогда для некоторого $x \in K$ $xJ = I$ — идеал в $\mathcal{O}_K$, тогда

$$J = (x)^{-1} I = \mathfrak{p}_1^{-1} \dots \mathfrak{p}_k^{-1} \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_m.$$

Значит, группа дробных идеалов — свободная абелева группа, образующие которой — элементы $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

Пример 6. Для кольца $\mathbb{Z}$ дробные идеалы соотвествуют рациональным числам.

Домашнее задание 1. Задачи:

1. Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_K$ факториально тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_K$ — кольцо главных идеалов.
2. Разложите число $33 + 11\sqrt{-7}$ на неприводимые в кольце $\mathcal{O}_K$, где $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$.
3. Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Specm} \mathcal{O}_K$. Введём на группе дробных идеалов *нормирование* следующим образом: $\upsilon_\mathfrak{p}(I) =$ степень, с которой $\mathfrak{p}$ входит в разложение дробного идеала I. Иными словами,

$$I = \mathfrak{p}^{\upsilon_\mathfrak{p}(I)} \cdot \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_m.$$

Для $a \in K^*$ определим $\upsilon_\mathfrak{p}(a) \overset{\text{def}}{=} \upsilon_\mathfrak{p}((a))$. Так вот, докажите, что:

- $\upsilon_\mathfrak{p}(I + J) = \min(\upsilon_p(I), \upsilon_\mathfrak{p}(J))$.
- $\upsilon_\mathfrak{p}(I \cap J) = \max(\upsilon_p(I), \upsilon_\mathfrak{p}(J))$.
- $\upsilon_\mathfrak{p}(a + b) \geq \min(\upsilon_\mathfrak{p}(a), \upsilon_\mathfrak{p}(b))$ и равенство достигается в случае $\upsilon_\mathfrak{p}(a) \neq \upsilon_\mathfrak{p}(b)$.
- $\upsilon_\mathfrak{p}(IJ) = \upsilon_\mathfrak{p}(I) + \upsilon_\mathfrak{p}(J)$.
- $\upsilon_\mathfrak{p}(ab) = \upsilon_\mathfrak{p}(a) + \upsilon_\mathfrak{p}(b)$.

Таким образом, $\upsilon_\mathfrak{p}$ — гомоморфизм $K^* \to \mathbb{Z}$. Этот гомоморфизм называют *дисретным нормированием, соотвествующим идеалу* $\mathfrak{p}$.

2.2 Дискриминант

Определение 23. Пусть K/F — конечное сепарабельное расширение, $[K : F] = n$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда *дискриминант* набора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — это

$$\operatorname{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\text{def}}{=} \det\big(\operatorname{Tr}_{K/F}(\alpha_i \alpha_j)\big).$$

Так как расширение K/F сепарабельно, у нас есть ровно $n = [K : F]$ вложений $\sigma_1, \dots, \sigma_n \colon K \to \mathbb{C}$ (на самом деле, мы знаем, что в $\mathbb{Q}^{alg}$).

Предложение 7. $\operatorname{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\det(\sigma_i(\alpha_j))^2$.

Доказательство. Положим $\sigma_i(\alpha_j) = A$ и рассмотрим $A^t A$, тогда

$$(A^t A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma(\alpha_i) \sigma_k(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\alpha_i \alpha_j) = \operatorname{Tr}_{K/F}(\alpha_i \alpha_j).$$

□

Посмотрим теперь, как след меняется при линейном преобразовании. Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)M,\ M \in M_n(F)$.

Предложение 8. $\operatorname{disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \operatorname{disc}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \cdot (\det M)^2$.

Доказательство. Действительно, это напрямую следует из предложения 7:

$$\operatorname{disc}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \det(\sigma_i(\alpha_j))^2 = \det\left(\sigma_i(\alpha_j)\right)M^2 = \operatorname{disc}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \cdot (\det M)^2.$$

□

Предложение 9. $\operatorname{disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *— линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно зависимы, $e_1, \ldots, e_n$ — базис K/F.

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (e_1, \ldots, e_n)M, \quad \det M = 0.$$

Значит, по предложению 8 мы имеем $\operatorname{disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Теперь докажем в обратную сторону. Предположим, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно независимы, но $\operatorname{disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det\big(\operatorname{Tr}_{K/F}(\alpha_i\alpha_j)\big) = 0$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\operatorname{Tr}_{K/F}((x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n)\alpha_j) = 0, \ldots 1 \leq j \leq n.$$

Так как матрица коэффициентов этой системы — $\operatorname{Tr}_{K/F}(\alpha_i\alpha_j)$, а она вырождена, система имеет нетривиальное решение $(x_1, \ldots, x_n)$. Так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно независимы,

$$y = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \neq 0.$$

С другой стороны, $\operatorname{Tr}_{K/F}(y\alpha_j) = 0\,\forall j$. Так как α_i образуют базис K/F, по линейности мы получаем, что $\operatorname{Tr}_{K/F}(yu) = 0\ \forall u \in K$. Но, так как расширение K/F сепарабельно, $\operatorname{Tr}_{K/F}$ должен быть невырожденной формой[5].

□

Лемма 17. Пусть $B \subset A$ — свободные абелевы группы ранга n. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — базис A, а $\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j\right\}$ — базис B, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда $|A/B| = |\det(a_{ij})|$.

Доказательство. Приведём матрицу (a_{ij}) нормальной форме Смита. Перечислим теперь элементы A/B: это в точности элементы $x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n,\ 0 \leq x_i \leq a_{ii} - 1$. Если мы докажем, что это в точности все попарно-различные элементы группы A/B, то утверждение будет ясно.

Пусть $\sum_{i=1}^n x_i\omega_i = \sum_{i=1}^n y_i\omega_i$, тогда $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)\omega_i \in B$. Посмотрим на коэффициент при ω_{11}, он может получаться только из первой строки матрицы (так как матрица верхнетреугольная), тогда $\ell a_{11} = x_1 - y_1$, но это равенство возможно только в случае, когда $x_1 = y_1$ (так как есть ограничения на x_i и y_i). Далее мы проделаем аналогичное рассуждение $\sum_{i=2}^n (x_i - y_i)\omega_i \in B$ и в итоге получим, что все такие элементы разлчины.

Теперь рассмотрим $a = x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n,\ x_i \in \mathbb{Z}$. Поделим с остатком: $x_1 = a_{11}q + r,\ 0 \leq r < a_{11}$, и рассмотрим $x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n - q(a_{11}\omega_1 + \ldots + a_{1n}\omega_n) = r\omega_1 + x_2'\omega_2 + \ldots$. Так как мы вычли из a элемент из B, класс $\overline{a} \in A/B$ не изменился, а старшим коэффициентом стал r, лежащий в нужном диапазоне. Продолжая в том же духе, мы полчми, что все коэффициенты лежат в нужном диапазоне. □

Как мы помним, $\mathcal{O}_K$ — свободная абелева группа ранга $n = [K : \mathbb{Q}]$ и $\mathcal{O}_K = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i$, а базис $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ мы называем *целым базисом.*

Определение 24. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — расширение степени n, $\mathcal{O}_K = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i$. Тогда

$$\operatorname{disc}(K) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{disc}(\omega_1, \ldots, \omega_k).$$

[5] Этим утверждением из теорией полей мы пользуемся без доказательств. Доказательство этого утверждения можно прочитать в S. Lang “Algebra”.

Замечание. Дискриминант поля не зависит от выбора целого базиса. Действительно, если у нас есть какой-то другой целый базис $(u_1, \dots, u_n)$, то

$$(\omega_1, \dots, \omega_n)M = (u_1, \dots, u_n), \quad M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}).$$
$$(u_1, \dots, u_n)M^{-1} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$$
$$\mathrm{disc}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{disc}(\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot \underbrace{(\det M)^2}_{=1}$$

Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$, положим $\mathrm{ind}(\theta) = [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]] = |\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}[\theta]|$.

Предложение 10. *В описанной выше сиутации* $\mathrm{disc}(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = \mathrm{ind}(\theta)^2 \cdot \mathrm{disc}(K)$.

Доказательство. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — целый базис. Тогда

$$(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = (\omega_1, \dots, \omega_n)M \implies \mathrm{disc}(1, \dots, \theta^{n-1}) = \mathrm{disc}(K)(\det M)^2.$$

Нетрудно заметить, что по лемме 17 мы имеем $|\det M| = \mathrm{ind}(\theta)$.

□

Пример 7. Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^3 - \theta - 1 = 0$. Как мы помним из домашнего задания, $\mathrm{disc}(1, \theta, \theta^2) = -23$. Пользуясь предложением 10 мы получаем, что $-23 = (\mathrm{ind}(\theta))^2 \cdot \mathrm{disc}\, K \implies \mathrm{ind}\, \theta = 1$, из чего следует, что $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

Пример 8. Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^3 - \theta - 4 = 0$. Как мы помним, $\mathrm{disc}(1, \theta, \theta^2) = -4 \cdot 107 = (\mathrm{ind}\, \theta)^2 \cdot \mathrm{disc}\, K$, Тогда $\mathrm{ind}\, \theta = 1$ или $\mathrm{ind}\, \theta = 2$. С другой стороны, так как $\frac{\theta+\theta^2}{2} \in \mathcal{O}_K, \notin \mathbb{Z}[\theta]$, $\mathrm{ind}(\theta) \neq 1$. Значит, $\mathrm{ind}\, \theta = 2$, из чего мы имеем разложение

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta \oplus \mathbb{Z}\frac{\theta + \theta^2}{2}.$$

Домашнее задание 2. Задачи:

1. Предположим, что K/F — расширение Галуа, $[K : F]$ — нечётна. Докажите, что тогда для любого базиса $e_1, \dots, e_n$ расширения K/F будет выполнено $\mathrm{disc}(e_1, \dots, e_n) \in {F^*}^2$.
2. Рассмотрим $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$. Тогда $\zeta, \zeta^2, \dots \zeta^{p-1}$ образуют базис $K/\mathbb{Q}$. Докажите, что $|\,\mathrm{disc}(\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-1})| = p^{p-2}$. *Hint:* тут можно действовать строго согласно определению 23.
3. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — расширение степени n, $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ и пусть p — такое простое число, что $v_p(a_0) = 1$ и $v_p(a_i) \geq 1$. Докажите, что тогда $p \not| \,\mathrm{ind}(\theta)$.
4. Докажите, что если $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$, где p — простое, то $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$, где $\zeta^p = 1$.
5. Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ — максимальные идеалы кольца $\mathcal{O}_K$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует $\alpha \in K^* \colon v_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = n_i\ \forall 1 \leq i \leq n_k$.
6. Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал, J — дробный идеал. Докажите, что $\exists x \in K^* \colon xJ + I = \mathcal{O}_K$.
7. Докажите, что любой дробный идеалпорождается двумя элементами.

Приведём сейчас другое, конструктивное доказательство того, что $\mathcal{O}_K$ — конечнопорожденная абелева группа.

Возьмем $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \mathcal{O}_K$, где $\omega_1, \dots, \omega_n$ — базис K на $\mathbb{Q}$. Тогда $\mathrm{disc}(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{Z}$, возьмем набор $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ с минимальным модулем дискриминанта. Докажем, что тогда он и будет целым базисом.

Возьмем $x \in \mathcal{O}_K$, $x = \sum a_i\omega_i$, $a_i \in \mathbb{Q}$ и покажем, что $a_i \in \mathbb{Z}$. Предположим противное, не умаляя общности $a_1 \notin \mathbb{Z}$.

$$x \in \mathcal{O}_K \implies \sum \{a_i\}\omega_i = x - \sum [a_i]\omega_i \in \mathcal{O}_K.$$

Перейдём к набору $(\sum\{a_i\}\omega_i, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Покажем, что модуль его дискриминанта уменьшился. Действительно,

$$(\sum\{a_i\}\omega_i, \omega_2, \dots, \omega_n) = (\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot \begin{pmatrix} \{a_1\} & \dots & \dots & \dots \\ \{a_2\} & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{a_n\} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

а определитель матрицы, написаной справа равен $\{a_1\} \leq 1$.

Напоминание про нормальную форму Смитта:
Пусть $B \subset A$ — свободные абелевы группы ранга n, причем $A = \bigoplus \mathbb{Z}x_i$, $B = \langle \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,\ 1 \le i \le n\rangle$. Тогда мы можем явно вычислить задание факторгруппы A/B образующими и соотношениями.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим автоморфизм группы A, который переводит x_1 в $x_1 + cx_2,\ c \in \mathbb{Z}$, а остальные образующие переводит в себя. Что произойдет с матрцией в результате этого изоморфизма? Ко второму столбцу прибавится первый, умноженный на c. Аналогично мы можем делать для любых столбцов. Кроме того, мы можем менять их местами посредством изоморфизмов вида $x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto x_1$. При таких преобразованиях факторгруппа B/A будет оставаться такой же, так как: $A/B \cong A/f(B)$. Соотвественно, с помощью таких операций матрицу мы можем диагонализовать. В итоге мы получим диагональную матрциу

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

2.3 Норма идеала

Определение 25. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, $0 \ne I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда, как мы знаем, $|\mathcal{O}_K/I| < \infty$. *Нормой идеала I* мы будем называть целое число

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(I) \overset{\text{def}}{=} |\mathcal{O}_K/I|$$

Замечание. Вообще говоря, норма идеала определяется для любого дедекиндова кольца, соответствующего некоторому расширению и обычно является идеалом. В нашем случае мы рассматриваем кольцо целых, где для любого идеала можно выбрать наименьшую по модулю неотрицательную порождающую, поэтому у нас норма — число.

Хотелось бы, чтоб норма главного идеала была равна норме порождающего его элемента (в смысле нормы для расширения полей).

Предложение 11. *Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — целый базис $\mathcal{O}_K$. Тогда* $\mathrm{N}((a)) = \left|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a)\right|$.

Доказательство. Пусть $a\omega_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\omega_j,\ b_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда $\mathrm{N}(a) = \det(b_{ij})$. С другой стороны, мы доказали, что $|\det(b_{ij})| = |\mathcal{O}_K/a\mathcal{O}_K|$. □

Заметим, что тогда мы получаем и мультипликативность для главных идеалов:

$$\mathrm{N}((a))\,\mathrm{N}((b)) = |\,\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a)||\,\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(b)| = |\,\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(ab)| = \mathrm{N}((ab)).$$

Хотелось бы теперь обобщить это на произвольные идеалы. Для этого нам понадобятся задачи из ДЗ 2.

Лемма 18 (Задача 5 из ДЗ 2)**.** Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ — максимальные идеалы кольца $\mathcal{O}_K, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует $\alpha \in K^*\colon v_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = n_i\ \forall 1 \le i \le n_k$.

Доказательство. Заметим, что идеалы $\mathfrak{p}_i^{n_i}$ попарно взаимнопросты. Выберем $x_i \in \mathfrak{p}_i^{n_i} \setminus \mathfrak{p}_i^{n_i+1}$. Тогда по КТО существует $x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{n_i+1}}$. Тогда

$$v_{\mathfrak{p}_i}(x) = v_{\mathfrak{p}_i}((x - x_i) + x_i) = n_i.$$

□

Лемма 19 (Задача 6 из ДЗ 2)**.** Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал, J — дробный идеал. Докажите, что $\exists x \in K^*\colon xJ + I = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Во-первых, J сразу можно полагать целым, так как мы можем сначала домножить его на элемент, превращающий его в целый, а потом уже что-то с ним делать. Разложим I в произведение простых:

$$I = \mathfrak{p}_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_m^{k_m}.$$

Соотвественно, легко найти $y \in K^*\colon v_{\mathfrak{p}_i}(yJ) = 0$. Проблема в том, что yJ может оказаться не целым идеалом. Предположим, что это так.

$$yJ = \prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{q}_i^{-r_i} \cdot \prod_{j=1}^{r} \mathfrak{r}_j^{\ell_i}, \text{ где } \ell_i \geq 0,\ r_i \geq 0.$$

Выберем $\widetilde{y} \in \mathcal{O}_K\colon v_{\mathfrak{q}_i}(\widetilde{y}) = r_i,\ v_{\mathfrak{p}_i}(\widetilde{y}) = 0$, тогда ясно, что $y\widetilde{y}J$ — целый идеал, который не делится на $\mathfrak{p}_i$, следовательно он взаимнопрост с I, что и требовалось. □

Теорема 14 (Задача 7 из ДЗ 2)**.** *Любой дробный идеал I порождается двумя элементами.*

Доказательство. Возьмем $x \in \mathcal{O}_K$ такой, что $xI^{-1} \subset \mathcal{O}_K$ — целый идеал. Тогда по лемме 19 (тут у нас xI^{-1} — целый идеал, I^{-1} — дробный) найдётся $y \in K^*$ такой, что

$$xI^{-1} + yI^{-1} = \mathcal{O}_K \implies xI^{-1}I + yI^{-1}I = I \implies I = (x) + (y) = (x, y).$$

□

Домашнее задание 3 (Осторожно, открытая задача)**.** Существует ли кольцо, в котором каждый идеал порождается тремя элементами, причём, есть идеал, который не порождается двумя элементами.

Теорема 15 (Мультипликативность нормы идеала)**.** *Если I, J — два ненулевых идеала в $\mathcal{O}_K$, то для их норм верно равенство* $\mathrm{N}(IJ) = \mathrm{N}(I)\,\mathrm{N}(J)$.

Доказательство. Сравним индексы: $|\mathcal{O}_K/IJ| = |\mathcal{O}_K/I| \cdot |I/IJ|$. Значит, остаётся показать, что $|\mathcal{O}_K/J| = |I/IJ|$. По лемме 19 найдём $x \in K^*\colon xI + J = \mathcal{O}_K$. Тогда воспользуемся теоремой о гомоморфизме и взаимной простотой:

$$|\mathcal{O}_K/J| = |(xI + J)/J| = |xI/xI \cap J| = |xI/xIJ| = |I/IJ|\,.$$

□

2.4 Индекс ветвления и степень инерции

Возьмем простое число $p \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим главный идеал $(p) = p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Этот же идеал мы можем рассматривать, как главный идеал в коьлце $\mathcal{O}_K$. Там он уже не обязательно будет простым, но будет раскладываться в произведение простых:

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k},$$

причем набор идеалов $\mathfrak{p}_i$ будет своим для каждого простого числа p (т.е. для различных простых чисел эти наборы не будут пересекаться). Кроме того, если $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ — простой идеал, то $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ будет идеалом в $\mathbb{Z}$, причем простым, значит для некоторого простого p мы получим $(p) \subset \mathfrak{p}$. Тогда $(p)\mathfrak{p}^{-1} \subset \mathcal{O}_K$, следовательно мы можем разложить его на простые:

$$(p) = \mathfrak{p} \cdot \ldots.$$

Таким образом, простые идеалы в $\mathcal{O}_K$ находятся в соотвествии с простыми числами.

Иными словами, над каждым простым числом $p, q, \ldots \in \mathbb{Z}$ находится сколько то идеалов $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_2, \ldots, \}$, $\{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\}$. Эти наборы не будут пересекаться и, кроме того, будут покрывать все простые идеалы в $\mathcal{O}_K$.

Определение 26. Степень e_i называется *индексом ветвления* идеала $\mathfrak{p}_i$.

Определение 27. Как известно, для $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ факторкольцо $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ будет полем. Это поле — конечное расширение $\mathbb{F}_p$ так как у нас есть естественное вложение $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Значит, $|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}| = p^f$. Число f называется *степенью инерции* идеала $\mathfrak{p}$. Иными словами, *степень инерции* — это $[\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} : \mathbb{F}_p]$.

Заметим, что $|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}| = \mathrm{N}(\mathfrak{p})$. Возьмем простое число p и рассмотрим главный идеал $p\mathcal{O}_K$. Тогда если $n = [K : \mathbb{Q}]$, то

$$p^n = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(p) = \mathrm{N}(p\mathcal{O}_K) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{N}(\mathfrak{p}_i)^{e_i} = \prod_{i=1}^{k} \left(p^{f_i}\right)^{e_i}.$$

Тогда, приравнивая степени, мы получаем формулу, устанавливающую соотношение между *индексом ветвления*, *степенью инерции* и степенью расширения:

$$\sum_{i=1}^{k} e_i f_i = n. \tag{1}$$

Нетрудно заметить, что случае квадратичного расширения индекс ветвления, как и степень инерции, будут равны единице. Таакэе ясно, что $1 \leq e_i f_i \leq n$, то есть, эти числа не могут быть произвольными.

Ветвление при расширении Галуа:

Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение. Тогда группа Галуа $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ действует и на идеалах кольца $\mathcal{O}_K$. Кроме того, она оставляет на месте $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, так как $\forall \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \cong \sigma\mathcal{O}_K/\sigma\mathfrak{p} \cong \mathcal{O}_K/\sigma\mathfrak{p}$.

Теорема 16. *Действие* $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ *на множестве простых идеалов, висящих над простым числом* p.

Доказательство. Предположим, что есть два простых идеала $\mathfrak{p}, \widetilde{\mathfrak{p}}$: $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p) = \widetilde{\mathfrak{p}} \cap \mathbb{Z}$, для которых утверждение теоремы не верно. Тогда

$$\{\sigma\mathfrak{p} \mid \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})\} \cap \{\sigma\widetilde{\mathfrak{p}} \mid \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})\} = \varnothing.$$

По КТО мы можем выбрать такой элемент $x \in \mathcal{O}_K$, что

$$x \equiv 0 \pmod{\sigma\mathfrak{p}} \quad x \equiv 1 \pmod{\sigma\widetilde{\mathfrak{p}}} \quad \forall \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

Применим теперь норму:

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x) = \prod_{\tau \in \operatorname{Gal}(K/Q)} \tau x \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z} = \widetilde{p} \cap \mathbb{Z} \implies \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x) \in \widetilde{\mathfrak{p}}.$$

Значит, так как $\widetilde{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $\exists \tau \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$: $\tau x \in \widetilde{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow x \in \tau^{-1}\widetilde{\mathfrak{p}}$. Но, с дугой стороны, ранее мы отметили, что $\forall \tau \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ $\tau x \equiv 1 \pmod{\widetilde{\mathfrak{p}}}$. $\square$

Так как действие транзитивно, $\exists \sigma \in \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$: $\sigma\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \mathfrak{p}_k^{e_k} = \sigma(\mathfrak{p}\mathcal{O}_K) = \sigma(\mathfrak{p}_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot \sigma(\mathfrak{p}_k)^{e_k} = \mathfrak{p}_2^{e_1} \cdot \ldots .$$

Значит, в силу единственности разложения, мы получаем $e_1 = e_2$. В силу транзитивности, мы можем сделать так для любой пары индексов, из чего следует нужное нам. Тогда в случае расширения галуа все индексы ветвления равны. Аналогично мы можем сделать и для степеней инерции. Тогда равенство (1) примет весьма простой вид: $efk = n$.

Ветвление при квадратичном расширении:

Пусть $p \neq 2$ — простое число, рассмотрим расширение $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)/\mathbb{Q}$, где d — целое и свободно от квадратов. Тогда в силу формулы $\sum e_i f_i = 2$ мы получаем, что возможны такие варианты разложения:

$$(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2, \quad (p) = \mathfrak{p}, \quad (p) = \mathfrak{p}^2.$$

Пусть $p \mid d$, тогда $(p) = (p, \sqrt{d})^2$. Действительно, нам надо проверить

$$(p) = (p^2, p\sqrt{d}, d) \Leftrightarrow (1) = \left(p, \sqrt{d}, \frac{d}{p}\right),$$

а это так, потому что $(p, \frac{d}{p}) = 1$. Кроме того, заметим, что отсюда в частности следует, что идеал $(p, \sqrt{d})^2$ — простой.

Теперь рассмотрим случай, когда $p \not| d$. Начнём со случая, когда $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$. Тогда $x^2 - d = pm$. Тогда

$$(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \text{ где } \mathfrak{p}_1 = (p, x + \sqrt{d}), \ \mathfrak{p}_2 = (p, x - \sqrt{d}).$$

Действительно, перемножим эти идеалы:

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = (p^2, p(x - \sqrt{d}), p(x + \sqrt{d}), pm) = (p) \Leftrightarrow (p, x - \sqrt{d}, x + \sqrt{d}, m) = (1).$$

Идеал слева не будет единичным тогда и только тогда все образующие делятся на p. На m здесь вообще можно не смотреть. Но, $p \not| x \implies (p, 2x) = (1)$.

Остаётся случай, когда $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$. Предположим, что $d \not\equiv 1 \pmod 4$. Тогда

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - d) \implies \mathcal{O}_K/(p) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 - d, p) = \mathbb{F}_p[x]/(x^2 - d) - \text{поле}$$

откуда следует, что идеал (p) максимален. Тепеь, если $d \equiv 1 \pmod 4$,

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1 + \sqrt{d}}{2}\right] \implies \mathcal{O}_K \Big/ (p) \cong \mathbb{Z}[x] \Big/ \left(x^2 - x + \frac{1 - d}{4}, p\right) \cong \mathbb{F}_p \Big/ \left(x^2 - x + \frac{1 - d}{4}\right) - \text{поле},$$

так как дискриминант многочлена $x^2 - x + \frac{1-d}{4}$ равен d, а d — невычет по модулю p.

Домашнее задание 4. Задачи:

1. Разобрать случай $p = 2$ в выкладках выше.
2. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — расширение степени n, $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ и пусть p — такое простое число, что $v_p(a_0) = 1$ и $v_p(a_i) \geq 1$. Докажите, что тогда $p \not| \operatorname{ind}(\theta)$. *Hint 1:* рассмотрите $x \in \mathcal{O}_K \colon px \in \mathbb{Z}[\theta]$. Покажите, что достаточно доказать, что в этом случае $x \in \mathbb{Z}[\theta]$. *Hint 2:* докажите, что если $\mathfrak{p} \mid (p)$, то $v_{\mathfrak{p}}(\theta) = 1$ и индекс ветвления числа p равен n. *Hint 3:* $px = b_0 + b_1\theta + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}$. Предположите, что не все b_i делятся на p и прийдите к противоречию.
3. Исследуйте разложение идеала $2\mathcal{O}_K$, где $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$.
4. Пусть K/F — конечное сепарабельное расширение, $K = F(\theta)$, $[K : F] = n$. Докажите, что

$$\operatorname{disc}(1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}) = \prod_{i \neq j}(\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)) = \mathrm{N}_{K/F}(f'(\theta)), \text{ где}$$

f — минимальный многочлен θ.
5. Докажите, что для $\zeta = \sqrt[p^n]{1}$ и $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ будет справедлив результат, аналогичный 2, то есть $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$.
6. Пусть $f, g \in \mathcal{O}_K[x]$, то $\operatorname{cont}(fg) = \operatorname{cont}(f) \cdot \operatorname{cont}(g)$. *Hint:* применить локальный принцип.

2.5 Группа классов идеалов и её элементарное вычисление

Понятие нормы легко распространить на дробнгые идеалы: если $I, J \subset \mathcal{O}_K$ — целые идеалы, то мы можем положить

$$\mathrm{N}(IJ^{-1}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{N}(I)}{\mathrm{N}(J)}$$

Проверим, что это определение корректно. Действительно, пусть $I_1J_1^{-1} = I_2J_2^{-1}$, тогда $I_1J_2 = I_2J_1$, что означает, что

$$\mathrm{N}(I_1)\,\mathrm{N}(J_2) = \mathrm{N}(I_2)\,\mathrm{N}(J_1) \implies \mathrm{N}(I_1)\,\mathrm{N}(J_1)^{-1} = \mathrm{N}(I_2)\,\mathrm{N}(J_2)^{-1}.$$

Как мы помним, у нас есть понятие группы дробных идеалов $\mathrm{I}(K)$ — свободная абелева группа, порожденная $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$.В ней есть подгруппа из *главных дробных идеалов* $a\mathcal{O}_K,\ a \in K^*$. Эту подгруппу мы будем обозначать, как $\mathrm{PI}(K)$. Факторгруппу $\mathrm{I}(K)/\mathrm{PI}(K)$ называют *группой классов идеалов* и обозначают

$$\mathcal{C}\mathrm{l}(K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{I}(K)/\mathrm{PI}(K).$$

Теорема 17. *Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение. Тогда группа $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$ конечна.*

Доказательство. Итак, пусть $n = [K : \mathbb{Q}], \omega_1, \ldots, \omega_n$ — целый базис. Пусть $\sigma_i \colon K \to \mathbb{C}$ — все вложения K в $\mathbb{C}$, а $C = \max|\sigma_i(\omega_j)| > 0$. Возьмём произвольный элемент $\alpha \in \mathcal{C}\mathrm{l}(K)$, тогда

$$\alpha^{-1} = [J],\ J \text{ — целый идеал в кольце } \mathcal{O}_K.$$

Тогда $\alpha = [J^{-1}]$. Рассмотрим множество

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i\omega_i \;\middle|\; 0 \le x_i \le \left[\mathrm{N}(J)^{\frac{1}{n}}\right] \right\}, \quad |S| > \mathrm{N}(J) = |\mathcal{O}_K/J|.$$

Из оценки на порядок следует, что найдутся $\sum_{i=1}^{n} x_i\omega_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_i\omega_i \in S$ такие, что

$$z = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\omega_i \in J.$$

Рассмотрим идеал $I = zJ^{-1}$, это целый идеал кольца $\mathcal{O}_K$, $[I] = [J^{-1}]$, так как они отличаются на главный идеал. Рассмотрим $[I]\cdot[J] = (z) = z\mathcal{O}_K$ и оценим норму этого главного идеала:

$$\mathrm{N}(I)\,\mathrm{N}(J) = \mathrm{N}(IJ) = \mathrm{N}((z)) = |\mathrm{N}(z)| = \prod_{j=1}^{n}\left|\sigma_j\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\omega_i\right)\right| \le \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\,|\sigma_j(\omega_i)|\right) \le$$
$$\le \prod_{j=1}^{n}\Big(n\cdot\mathrm{N}(J)^{\frac{1}{n}}\cdot C\Big) = n^nC^n\,\mathrm{N}(J) \implies \mathrm{N}(I) \le n^n\cdot C^n.$$

Таким образом мы показали, что для любого класса из $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$ мы можем выбрать представителя с ограниченной нормой. Кроме того, I — целый идеал, а есть лишь конечное число целых идеалов, нормы которых ограничены некоторой фиксированной константой, так как любой идеал раскладывается в произведение простых, а значит,

$$I = \mathfrak{p}_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_m^{k_m} \implies \mathrm{N}(I) = \prod_{i=1}^{m}\mathrm{N}(\mathfrak{p}_k)^{k_i} \le n^nC^n.$$

Тогда для выполнения неравенства возможностей подобрать $\mathfrak{p}_i$ лишь конечное число, так как $\mathrm{N}(\mathfrak{p}_i) = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i| \ge p$ (так как это векторное пространство над $\mathbb{F}_p$, где $p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\cap\mathfrak{p}_i$). Это даёт нам, что у нас конечное число классов идеалов.

□

Пример 9. Вычислим группу классов идеалов для поля $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt{-14}\big)$.

Основной факт состоит в том, что произвольный $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ выражается через максимальные идеалы, висящие над (2) и (3). Пока что поверим в этом и посчитаем при помощи этого факта группу $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$2\mathcal{O}_K = (2) = (2, \sqrt{-14})^2 = \mathfrak{p}_2^2, \quad \mathrm{N}(\mathfrak{p}_2) = 2.$$

Так как $\left(\frac{-14}{3}\right) = 1$, $3\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_3'$. Как мы знаем, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$, а в этом кольце

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a + b\sqrt{-14}) = a^2 + 14b^2 \ne 2 \implies \mathfrak{p}_2 \text{ — не может быть главным идеалом,}$$

из чего следует, что образ $\mathfrak{p}_2$ нетривиален в группе $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$. Кроме того, так как $\mathrm{N}((3)) = 9, \mathrm{N}(\mathfrak{p}^3) = \mathrm{N}(\mathfrak{p}_3') = 3$, что даёт нам то же самое. Заметим, что $\mathfrak{p}_3^2$ не является глаынм идеалом, но $[\mathfrak{p}_3^2] = [\mathfrak{p}_2]$. Действительно, возьмем $(2+\sqrt{-14}),\ \mathrm{N}((2+\sqrt{-14}) = 18$, но идеал $(2+\sqrt{-14})$ раскладывается в произведение максимальных, лежащих либо над (2), либо над (3), так $\mathrm{N}(2+\sqrt{-14}) = 18 = 2\cdot 3^2$. Это даёт нам, что

$$(2+\sqrt{-14}) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3^{(?)}\mathfrak{p}_3^{(?)}.$$

Так как $(1+\sqrt{-14})(1-\sqrt{-14}) = 15$, мы можем положить $\mathfrak{p}_3 = (3, 1+\sqrt{-14})$, а $\mathfrak{p}_3' = (3, 1-\sqrt{-14})$. Так как $(2+\sqrt{-14}) \in (3, 1-\sqrt{-14})$, мы можем заключить, что $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3^{(?)}\mathfrak{p}_3^{(?)} \subset \mathfrak{p}_3'$, что даёт нам

$$[\mathfrak{p}_2][\mathfrak{p}_3']^2 = [1], \quad [\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}_3]^2$$

Теперь докажем озвученное в начале примера утверждение индукцией по p: $p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\cap\mathfrak{p}$.

$$\mathfrak{p}_2^2 = (2), \quad \mathfrak{p}_7^2 = (7), \quad \mathfrak{p}_2^2\mathfrak{p}_7^2 = (14) = (\sqrt{-14})^2 \implies \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7 = (\sqrt{-14}) \implies [\mathfrak{p}_2]^{-1} = [\mathfrak{p}_7] \implies [\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}_2]^{-1} = [\mathfrak{p}_7].$$

Теперь рассмотрим остальыне простые числа. Все они делятся на две группы: по модулю которых -14 — квадратичный вычет или невычет.

Пусть сначала -14 — невычет по модулю p. Тогда идеал $p\mathbb{Z}$ остаётся простым в $\mathcal{O}_K$, таким образом, мы имеем единственный простой идеал, сидящий над p и этот идеал главный, что даёт нам что $[\mathfrak{p}]$ тривиален в $\mathcal{C}\mathrm{l}(K)$.

Теперь пусть -14 — квадратичный вычет по модулю p. Тогда $\exists x\in\mathbb{Z}\colon p \mid x^2+14$. Можно считать, что $0 \le x \le \frac{p-1}{2}$. Тогда мы имееем, что $x^2+14 = pm \le \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + 14$. Кроме того, в этом случае

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \quad \mathrm{N}(\mathfrak{p}_1) = \mathrm{N}(\mathfrak{p}_2) = p, \quad \mathfrak{p}_1' = (p, x+\sqrt{-14}),\ \mathfrak{p}_2' = (p, x-\sqrt{-14}).$$

Если $p \ge 5$, то $m < p$, так как будут справделивы такие неравенства:

$$m < \frac{\frac{p^2}{4}+14}{p} < p.$$

Кроме того, $(x+\sqrt{-14}) \subset \mathfrak{p}_1' \implies (x+\sqrt{-14}) \subset \mathfrak{p}_1' I$. Заметим, что $pm = \mathrm{N}(x+\sqrt{-14}) = \mathbb{N}(\mathfrak{p}_1')\,\mathrm{N}(I)$, а $\mathrm{N}(\mathfrak{p}_1') = p$, то есть $\mathrm{N}(I) = m < p$. Это даёьт нам, что в разложении I на максимальные лежат только идеалы, лежащие над меньшими простыми числами. Иными словами, если

$$I = \mathfrak{q}_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_s^{k_s},\ \mathfrak{q}_i\cap\mathbb{Z} = q_i\mathbb{Z},\ q_i \le p, q_i - \text{простое}.$$

Это даёт нам возможность применить индукционное предположение: $[\mathfrak{q}_i]$ выражаются только через $\mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{p}_3$. Теперь заметим, что $[\mathfrak{p}_1'] = [I^{-1}]$, из чего следует, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2'$ тоже выражается через $\mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{p}_3$, что и требовалось.

Группа классов идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$

1. Если $d = -1, -2, -3, -7$, то $\mathcal{O}_K$ — еклидово, а значит, кольцо главных идеалов, то есть $\mathcal{C}\mathrm{l}(K) = e$.
2. Если $d = -11, -19$, то справедлив аналогичный результат. Кольцо $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-11}\right]$ также евклидово, но установить это сложнее. Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$ уже не является евклиовым, но является кольцом главных идеалов. Аналогичное верно и для $d = -43, -67, -163$.
3. Невероятно, но выполняется следующий факт:

$$\frac{\log\left|\mathcal{C}\mathrm{l}(\mathbb{Q}\sqrt{-d})\right|}{\log\sqrt{\operatorname{disc} K}} \xrightarrow{d\to\infty} 1.$$

4. Табличку с группами классов идеалов мнимых квадратичных полей можно найти в конце книжки Боревич-Шафаревич.

Следствия из теоремы о конечности групп классов идеалов:

1. Если $h = |\mathcal{C}\mathrm{l}(K)|$, то для любого дробного идеала I: I^h является главным.

2. Если $(\ell, h) = (1)$ и I^ℓ главный, то I — главный. Действительно,

$$a\ell + bh = 1 \implies I = I^{a\ell+bh} = \left(I^\ell\right)^a \left(I^h\right)^b.$$

3. Существует такое конечное расщирение L/K, что любой дробный идеал I кольца $\mathcal{O}_K$ идеал $I\mathcal{O}_L$ будет главным. (см. *проблема башни полей классов*).

Доказательство. Итак, пусть $I_1, \ldots, I_m$ — представители группы классов идеалов. Пусть $I_i^h = (x_i)$. В качестве поля L мы возьмём:

$$L = K(\sqrt[h]{x_1}, \ldots, \sqrt[h]{x_m}).$$

$$I_j^h \mathcal{O}_L = \left(\sqrt[h]{x_j}\right)^h \mathcal{O}_L \implies I_j \mathcal{O}_L = (\sqrt[h]{x_j})\mathcal{O}_L.$$

Кроме того, $\exists j:\ II_j^{-1}$ — главный. Тогда $I\mathcal{O}_L(I_j\mathcal{O}_L)^{-1}$ — главный, из чего следует, что $I\mathcal{O}_L$ — главный. □

Домашнее задание 5. Задачи:

1. Вычислите группу классов идеалов для $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{-6}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{10}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$.
2. Положим $\mathcal{O}_K^* = \{x \in K \mid \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(xy) \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathcal{O}_K\}$.
   (a) Доказать, что $\mathcal{O}_K^*$ — дробный идеал и $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K^*$.
   (b) Доказать, что $|\mathrm{disc}(K)| = |\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K|$.
   (c) Доказать, что $|\mathrm{disc}(K)|$ есть норма некоторого идеала в $\mathcal{O}_K$.
3. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F, $A \in \mathrm{End}(V)$, причём A — нильпотентный. Докажите, что тогда $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
4. Пусть I — дробный идеал. Докажите, что как абелева группа $d(\mathrm{N}(I))$ (дробный идеал в $\mathbb{Z}$) порождается элементами $\mathrm{N}(x), x \in I$.

2.6 Дифферента и ветвление

Определение 28. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение. Простое число p называется *неразветвлённым* в числовом поле K, если

$$p\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j \text{ — максимальные.}$$

Кроме того, пусть

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots$$

Если $e_1 > 1$, то идеал $\mathfrak{p}_1$ называется *разветвлённым.*

Этот микрокусок надо переписать!!!

Как мы помним из домашней задачи, $\mathcal{O}_K^* = \{x \in K \mid \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(xy) \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathcal{O}_K\}$ — дробный идеал. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — целый базис, а $\omega_1^*, \ldots, \omega_n^*$ — взаимный базис. Тогда

$$\mathrm{Tr}(\omega_i\omega_j^*) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Разложим $x \in \mathcal{O}_K^*$ по взаимному базису:

$$x = a_1\omega_1^* + \ldots + a_n\omega_n^*,\ a_i \in \mathbb{Q}.$$

Тогда $\mathrm{Tr}(x\omega_i) = a_i \in \mathbb{Z}$ по определению $\mathcal{O}_K^*$. По линейности мы получаем, что $\forall y \in \mathcal{O}_K\ \ \mathrm{Tr}(xy) \in \mathbb{Z}$ из чего следует, что $x \in \mathcal{O}_K^*$.

Таким образом, $\mathcal{O}_K^*$ — просто свободная абелева группа, порожденная взаимным базисом.

Определение 29. *Дифферентой* числового поля K называют идеал $\mathcal{D} = \mathcal{O}_K^{*^{-1}}$.

Как мы помним, дискриминант числового поля K — это

$$\operatorname{disc}(K) = \operatorname{disc}(\mathcal{O}_K) = \det(\operatorname{Tr}(\omega_i \omega_j)),\ \text{где } \{\omega_i\} - \text{ целый базис.}$$

Предложение 12. $\mathrm{N}(\mathcal{D}) = |\operatorname{disc}(K)|$.

Доказательство. Будем действовать строго по определению:

$$\mathrm{N}(\mathcal{D}) = |\mathcal{O}_K/\mathcal{D}| = \left|\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_K^{*^{-1}}\right| = |\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K|$$

$\mathcal{O}_K = \bigoplus \omega_i\mathbb{Z} \subset \bigoplus \mathbb{Z}\omega_i^* = \mathcal{O}_K^*$. Разложим элемент целого базиса по взаимному базису:

$$\omega_i = \sum_j a_{ij}\omega_j^*,$$

домножая это равенство и применяя след, мы получаем, что $a_{ij} = \operatorname{Tr}(\omega_i\omega_j)$, а значит, применяя лемму о вычислении индекса подгруппы, мы получаем, что

$$|\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K| = |\operatorname{disc}(K)|\,.$$

□

Теорема 18. *Максимальный идеал $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ разветвлён тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} \subset \mathfrak{p}$.*

Доказательство. В процессе доказательства нам понадобиться несколько лемм. Докажем сначала импликацию ($\Rightarrow$):

Лемма 20 (Задача 3 ДЗ 5)**.** Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F, $A \in \operatorname{End}(V)$, причём A — нильпотентный. Докажите, что тогда $\operatorname{Tr}(A) = 0$.

Доказательство леммы. Приведём, например, доказательство без Жордановой формы. Ясно, что достаточно показать, что характеристический многочлен является чистой степенью переменной t.

$$t^m E - A^m = (tE - A)((tE)^{m-1} + (tE)^{m-2}A + \ldots) = (tE - A)\cdot B.$$

Применим к этом равенству $\det$:

$$t^{mn} = \det\left(t^m E - A^m\right) = \det(tE - A)\det(B) \implies \det(tE - A) = t^n.$$

Пусть p — простое число. Факторгруппа $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ — векторное пространство над $\mathbb{F}_p$. Возьмем $x \in \mathcal{O}_K$, рассмотрим его образ $\overline{x}$ в факторгруппе и рассмотрим линейный оператор умножения на него:

$$\mathcal{O}_K/p \xrightarrow{\cdot x} \mathcal{O}_L,\ y \mapsto xy.$$

След этого оператора — элемент $\mathbb{F}_p$. С другой стороны, мы можем рассмотреть $\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x)$, который является целым числом. Нетрудно заметить, что $\overline{\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}}(x) = \operatorname{Tr}(\overline{x})$.

Предположим, что элемент x делится на какую-то степень p, т.е. лежит в $p\mathcal{O}_K$. Тогда мы получаем такое следствие из леммы:

Следствие 7. *Пусть $x \in \mathcal{O}_K$, $x^m \in p\mathcal{O}_K$. Тогда $\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x) \in p\mathbb{Z}$.*

□

Перейдём теперь к доказательству теоремы. Пусть $\mathfrak{p}$ разветвлён, то есть

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1}\cdot\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_k^{e_k}, e_1 > 1.$$

Докажем, что $\forall x \in \mathfrak{p}_1^{-1}$ выполнено $\operatorname{Tr}(x) \in \mathbb{Z}$. Если мы покажем это, то всё будет доказано. Действительно, это так, потому что

$$y \in \mathcal{O}_K \implies xy \in \mathfrak{p}_1^{-1} \implies \operatorname{Tr}(xy) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathcal{O}_K^* \implies \mathfrak{p}_1^{-1} \subset \mathcal{O}_K^* = \mathcal{D}^{-1}.$$

Докажем теперь само утверддение. Заметим, что $px \in \mathfrak{p}_1^{e_1-1}\mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k}$. Тогда

$$(px)^2 \in \mathfrak{p}_1^{2(e_1-1)}\mathfrak{p}_2^{2e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{2e_k}$$

Так как $2(e_1-1) \geq e_1$, мы получаем, что

$$(px)^2 \in \mathfrak{p}_1^{2(e_1-1)}\mathfrak{p}_2^{2e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{2e_k} \subset p\mathcal{O}_K.$$

Тогда, по следствию 7 мы получаем, что $\mathrm{Tr}(px) \in p\mathbb{Z} \implies \mathrm{Tr}(x) \in \mathbb{Z}$.

Докажем теперь импликацию ($\Leftarrow$). Вспомним для начала такое утверждение:

Предложение 13. *Если F — конечное поле, а L/F — конечное расширение, то* $\mathrm{Tr}_{L/F} \neq 0$.

Замечание. В случае характеристики 0 это утверждение очевидно, так как можно рассматривать след единицы.

Доказательство утверждения 13. Если $|F| = q$, то $\mathrm{Gal}(L/F) = \langle\sigma\rangle$ — циклическая и она порождена автоморфизмом Фробениуса $\sigma(x) = x^q$ (множество неподвижных элементов — как раз поле). Предположим, что $[L\colon F] = m$. Тогда Группа Галуа будет иметь вид

$$\mathrm{Gal}(L/F) = \langle \mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{m-1}\rangle,$$

а значит, след будет иметь вид

$$\mathrm{Tr}(x) = x + \sigma x + \sigma^2 x = \ldots + \sigma^{m-1}x = x + x^q + x^{q^2} + \ldots + x^{q^{m-1}}.$$

Заметим, что многочлен выше не может быть тождественно нулём. Действительно, он имеет не больше, чем q^{m-1} корней, а $|L| = q^m > q^{m-1}$. □

Итак, вернёмся к доказательству теоремы.

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k}.$$

По китайской теореме об остатках:

$$\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \cong \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_1 \oplus \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_2^{e_2} \oplus \cdot \ldots \cdot \oplus \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_k^{e_k}.$$

Пусть $x \in \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \mathfrak{p}_3^{e_3} \cdot \ldots \mathfrak{p}_k^{e_k} \setminus \mathfrak{p}_2$. Тогда в разложении в прямую сумму такой x будет иметь лишь одну ненулевую координату (первую). Значит, достаточно посчитать след в первом прямом слагаемом, которое является полем (так как мы факторизуем по максимальному в первой степени), причём, конечным расширением конечного поля. По утверждению 13 мы можем выбрать x так, что $\mathrm{Tr}(\overline{x}) \neq 0 \in \mathbb{F}_p \implies \mathrm{Tr}(x) \notin p\mathbb{Z}$. Тогда $\mathrm{Tr}(\frac{x}{p}) \notin \mathbb{Z}$, но

$$\frac{x}{p} \in \mathfrak{p}_1^{-1},\ \mathrm{Tr}\left(\frac{x}{p}\right) \notin \mathbb{Z} \implies \frac{x}{p} \notin \mathcal{O}_K^* \implies \mathfrak{p}_1^{-1} \not\subset \mathcal{O}_K^* \implies \mathcal{D} \not\subset \mathfrak{p}_1,$$

что мы и хотели доказать. □

Теорема 19. *Простое число p разветвлено тогда и только тогда, когда $p \mid \mathrm{disc}(K)$.*

Доказательство. Так как p разветвлено, по определению

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k}, e_1 > 1.$$

Тогда $\mathcal{D} \subset \mathfrak{p}_1 \implies (\mathrm{N}(\mathcal{D})) = (\mathrm{disc}(K)) \subset (\mathrm{N}(\mathfrak{p}_1)) = (p^{f_1}) \subset (p)$, где f_1 — степень инерции.

Теперь пусть p неравзеветвлено, то есть

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k,\ \mathcal{D} \not\subset \mathfrak{p}_1.$$

В то же время, дифферента то же раскладывается в произведение простых

$$\mathcal{D} = \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_m,\ p \notin \mathfrak{q}_i$$

Тогда, применим норму мы получим, что

$$|\mathrm{disc}(K)| = \mathrm{N}(\mathcal{D}) = \mathrm{N}(\mathfrak{q}_1) \cdot \mathrm{N}(\mathfrak{q}_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{N}(\mathfrak{q}_m) = p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{f_m},\ p_i \neq p - \text{простые.}$$

$\square$

Отсюда ясно, что для каджого расщирение разветвлённых простых чисел только конечное число — простые делители дискриминанта.

2.7 Кольцо целых композита расширений

В общем случае о вычислении кольца целых композита расширений сказать что-то сложно. Мы будем рассматривать один из частых случаев, который также весьма полезен при вычислении колец целых числовых полей.

А именно, рассмотрим композит расщирений $K_1/\mathbb{Q}$ степени m и $K_2/\mathbb{Q}$ степени n, причем таких, что $[K_1K_2\colon \mathbb{Q}] = mn$, а также $(\mathrm{disc}(K_1), \mathrm{disc}(K_2)) = 1$.

Пусть $\{u_i\}$ — целый базис $\mathcal{O}_{K_1}$, а $\{v_i\}$ — целый базис $\mathcal{O}_{K_2}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & K_1K_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & \\
K_1 \arrow[dr, dash, "m"'] & & K_2 \arrow[dl, dash, "n"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Как мы помним из курса теории полей, в этом случае

$$K_1 \otimes_{\mathbb{Q}} K_2 \cong K_1K_2$$

Пусть $\tau_i,\ 1 \le i \le m$ — вложения K_1 в $\mathbb{Q}^{alg}$, а $\sigma_i,\ 1 \le i \le n$ — вложения K_2 в $\mathbb{Q}^{alg}$. Во-первых, заметим, что $\{u_iv_j\}$ — базис композита K_1K_2 над $\mathbb{Q}$. Тогда элементы

$$\tau_i \otimes \sigma_j(u_kv_\ell) = \sigma_j(u_k)\tau_i(v_\ell)$$

будут попапрно различными, а $\tau_i \otimes \sigma_j$ будут давать все вложения $K_1K_2 \to \mathbb{Q}^{alg}$. Рассмотрим $\alpha \in \mathcal{O}_{K_1K_2}$, разложим его по базису:

$$\alpha = \sum a_{ij}u_iv_j \in \mathcal{O}_{K_1K_2},\ a_{ij} \in \mathbb{Q}.$$

Рассмотрим $\beta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}u_j$. Тогда выполняется следующее матричное тождество (которое мы преобразовываем далее, домножая на транспонированную, а после на взаимную к A^tA):

$$\underbrace{(\sigma_iv_j)}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \otimes \sigma_1)(\alpha) \\ (1 \otimes \sigma_2)(\alpha) \\ \vdots \\ (1 \otimes \sigma_n)(\alpha) \end{pmatrix} \implies A^tA \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} (1 \otimes \sigma_1)(\alpha) \\ (1 \otimes \sigma_2)(\alpha) \\ \vdots \\ (1 \otimes \sigma_n)(\alpha) \end{pmatrix} \implies \mathrm{disc}(K_2) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

где $\gamma_i \in \mathcal{O}_{K_1}$. Тогда $\mathrm{disc}(K_1) \cdot a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Заметим, что такое же рассуждение мы могли проделать, заменив u_i на v_j в определении β_j, и получить, что $\mathrm{disc}(K_1)a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда, так как $(\mathrm{disc}(K_1), \mathrm{disc}(K_2)) = 1$, мы имеем $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, мы только что доказали такое утверждение:

Предложение 14. *А именно, рассмотрим композит расщирений $K_1/\mathbb{Q}$ степени m и $K_2/\mathbb{Q}$ степени n, причем таких, что $[K_1K_2\colon \mathbb{Q}] = mn$, а также $(\operatorname{disc}(K_1), \operatorname{disc}(K_2)) = 1$.*

Пусть $\{u_i\}$ — целый базис $\mathcal{O}_{K_1}$, а $\{v_i\}$ — целый базис $\mathcal{O}_{K_2}$. Тогда $\{u_iv_j\}$ — целый базис для $\mathcal{O}_{K_1K_2}$.

Домашнее задание 6. Задачи:

1. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — расширение степени n, $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ и пусть p — такое простое число, что $v_p(a_0) = 1$ и $v_p(a_i) \geq 1$. Докажите, что тогда $p \not| \operatorname{ind}(\theta)$. *Hint 1:* рассмотрите $x \in \mathcal{O}_K\colon px \in \mathbb{Z}[\theta]$. Покажите, что достаточно доказать, что в этом случае $x \in \mathbb{Z}[\theta]$. *Hint 2:* докажите, что если $\mathfrak{p} \mid (p)$, то $v_{\mathfrak{p}}(\theta) = 1$ и индекс ветвления числа p равен n. *Hint 3:* $px = b_0 + b_1\theta + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}$. Предположите, что не все b_i делятся на p и прийдите к противоречию.

2.8 Теорема Куммера

Начнём с вот такой полезной леммы:

Лемма 21. Следующие условия равносильны:

1. $p \not| \operatorname{ind}(\theta)$.
2. $\mathbb{Z}[\theta]/(p) \to \mathcal{O}_K/(p)$ — изоморфизм.

Доказательство. Это я допишу с записи. □

Теорема 20 (Куммер)**.** *Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$, а p — такое простое число, что $p \not| \operatorname{ind}(\theta)$. Пусть f — минимальный многочлен θ, причем над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ его редукция раскладывается в неприводимыке, как*

$$\overline{f} = \prod_i \overline{g_i}^{a_i} \in \mathbb{F}_p[t],\ \deg g_i = d_i,\ g_i - \textit{унитальные.}$$

Тогда:

1. *Идеалы $\mathfrak{p}_i = (g_i(\theta), p)$ — все простые идеалы, висящие над простым числом p. Причём, они попарно различны.*
2. *$|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i| = p^{d_i}$, а значит, d_i — степень инерции идеала $\mathfrak{p}_i$.*
3. *$p\mathcal{O}_K = \prod \mathfrak{p}_i^{a_i}$, то есть a_i есть индексы ветвления идеалов $\mathfrak{p}_i$.*

Доказательство. Во-первых, покажем, что $\mathfrak{p}_i$ максимальны. Для этого достаточно проверить, что фактор — поле. Действительно, это простое вычисление:

$$\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i = \mathcal{O}_K/(g_i(\theta), p) = \mathbb{Z}[\theta]/(g_i(\theta), p) \cong \mathbb{Z}[t]/(f(t), p, g_i(t)) \cong \mathbb{F}_p[t]/\overline{g_i},$$

которое является полем, так как многочлен g_i неприводим над $\mathbb{F}_p$.

Теперь покажем, что $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ при $i \neq j$. Предположим противное. Тогда

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j = (g_i(\theta), p, g_j(\theta)).$$

Но, $\overline{g_i}$ и $\overline{g_j}$ —- различные неприводимые многлчлены над $\mathbb{F}_p$, а мы можем линейно представить их НОД:

$$\exists \overline{h_i}, \overline{h_j}\colon \overline{h_i}\overline{g_i} + \overline{h_j}\overline{g_j} = \overline{1} \implies h_ig_i + h_j + g_j = 1 + pq(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Подставляя в последнее равенство θ, мы получаем, что $1 \in (g_i(\theta), g_j(\theta), p) = \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j$, что противоречит тому, что $\mathfrak{p}_i$ и $\mathfrak{p}_j$ — в частнсоти, собственные идеалы.

Теперь провреим, что d_i — степень инерции. Действительно,

$$\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i \cong \mathbb{F}_p[t]/(\overline{g_i}) \implies |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i| = d_i.$$

Из условия теоремы мы знаем, что

$$f(t) = \prod g_i(t)^{a_i} + ph(t) \implies 0 = f(\theta) = \prod g_i(\theta)^{a_i} + ph(\theta) \implies \prod g_i(\theta)^{a_i} \in p\mathcal{O}_K \implies \prod \mathfrak{p}_i^{a_i} \subset p\mathcal{O}_K.$$

Отсюда уже видно, что над p не висит никаких других идеалов. Действительно,

$$p\mathcal{O}_K \subset \mathfrak{q} \implies \prod \mathfrak{p}_i^{a_i} \subset \mathfrak{q} \implies \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q} \implies \mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}.$$

Значит, $\prod \mathfrak{p}_i^{a_i} = (p)I$. Из этого следует, что $a_i \geq e_i$. Остается заметить, что

$$\sum a_i e_i = n, \text{ но } \sum a_i e_i \geq \sum e_i d_i = n \implies a_i = e_i \; \forall i.$$

□

Имеет смысл разобрать полезный частный случай этой теоремы: когда все a_i равны 1.

Теорема 21. *Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta),\ \theta \in \mathcal{O}_K$, f — минимальный многочлен θ, а p — простое число. Предположим, что*

$$\overline{f} = \overline{g_1} \cdot \overline{g_2} \cdot \ldots \cdot \overline{g_k} \in \mathbb{F}_p[t], \text{ причем}$$

$\overline{g_i}$ — попарно различные и унитальные. Тогда $p \nmid \operatorname{ind}(\theta)$.

Доказательство. Рассмотрим идеалы $(p, g_i(\theta)) \subset \mathcal{O}_K$. Пусть $I = (p, g_i(\theta)) = I \subset \mathbb{Z}[\theta]$ — идеал. Покажем, что $I\mathcal{O}_K \neq \mathcal{O}_K$. Предположим противное и выберем в $\mathcal{O}_K$ целый базис $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Тогда мы можем записать каждый элемент базиса с коэффициентами из идеала:

$$\omega_i = \sum a_{ij}\omega_j$$

Перенося всё в одну часть и обозначая $A = (a_{ij})$, мы имеем такую систему уравнений:

$$(E - A) \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

В таком случае $\det(E - A) = 0$, из чего следует, что $1 \in I$, а это даёт нам противоречие.

Значит, он содержится в некотром максимальном идеале, $(p, g_i(\theta)) \subset \mathfrak{p}_i \subset \mathcal{O}_K$. Теперь нам достаточно показать, что (по лемме 21)

$$\mathbb{Z}[\theta]/(p) \cong \mathcal{O}_K/(p).$$

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[\theta]/(p) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{O}_K/(p) \arrow[d] \\ \mathbb{Z}[\theta]/(p, g_i(\theta)) \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i \end{tikzcd}$$

Достаточно проверить, что $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Действительно, пусть $\overline{\alpha} \in \operatorname{Ker}\varphi$, тогда $\psi(\overline{\alpha}) = 0$, а значит, $\alpha \in (p, g_i(\theta))\ \forall i$, из чего следует, что

$$\alpha^k \in \prod_i (p, g_i(\theta)) \in p\mathbb{Z}[\theta] \implies \overline{\alpha}^k = \overline{0} \text{ в } \mathbb{Z}[\theta]/(p),$$

то есть мы нашли нильпотентный элемент. С другой стороны,

$$\mathbb{Z}[\theta]/(p) \cong \mathbb{F}_p[t]/\big(\overline{f}\big),$$

а так как f свободно от квадратов; то, что написано справа — прямое произведение полей. Значит, $\overline{\alpha} = 0$ и ядро тривиально. □

Пример 10. Посмотрим на конкретное применение теоремы Куммера. Пусть $p \nmid m,\ K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Как мы знаем, минимальный многочлен первообразного корня степени m — это круговой многочлен Φ_m, $\deg \Phi_m = \varphi(m)$. Нетрудно заметить, что $\Phi_m \nmid x^m - 1$. Заметим, что $\overline{x^m - 1} \in \mathbb{F}_p[x]$ имеет попарно различные корни (так как он взимнопрост со своей производной), то есть свободен от квадратов. Тогда Φ_m также свободен от квадратов, а по теореме 21 это даёт нам, что $p \nmid \operatorname{ind}(\theta)$, а это уже даёт нам применять теорему Куммера. Разложим его в неприводимые множители

$$\overline{\Phi_m} = \overline{g_1} \cdot \ldots \cdot \overline{g_k},\ \overline{g_i} \text{ — попарно различны.}$$

Кроме того, как мы знаем,

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_i = (p, g_i(\theta)).$$

Так как $K/\mathbb{Q}$ —расширение Галуа, нам достаточно найти хоть какую-нибудь степень инерции.

Предложение 15. *Степень инерции идеалов $\mathfrak{p}_i$ есть минимальное число f такое, что $m \mid p^f - 1$.*

Доказательство. Как мы знаем, корни $\overline{x^m - 1}$ образубт циклическую группу. Пусть θ — образующая этой группы, $\theta \in \mathbb{F}_p^{alg}$.

$$x^m - 1 = \Phi_m(x)\cdot$$

Доказательство утверждения надо бы переписать!!!!

Отсюда мы получаем, что $\overline{g_1(\theta)} = 0$. □

Домашнее задание 7. Задачи:

1. Рассмотрим кубическое расщирение $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{15}) = \mathbb{Q}(\rho)$.
   0) Посчитать кольцо $\mathcal{O}_K$.
   а) Вычислить $\mathrm{N}(\rho),\ \mathrm{N}(\rho - 1),\ \mathrm{N}(\rho + 1), \mathrm{N}(\rho - 3)$.
   б) Докажите, что над простым числом 3 лежит ровно один простой идеал ρ_3.
   в) Докажите, что ρ_3 — главный. Найдите его образующую с помощью разложений $(\rho - 3)$ и $(\rho + 3)$.
   г) Докажите, что $\frac{9(\rho+1)^3}{(\rho-3)^6} \in \mathcal{O}_K^*$.
2. Вычислить $\mathcal{O}_K$, где $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_k})$, если p_i — простые и $p_i \equiv 1 \pmod 4$.
3. Доказать, что $v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}) \geq e - 1$, где $e = e(\mathfrak{p})$ — индекс ветвления.

2.9 Первый случай Last Fermat's theorem

Мы можем полагать, что показатель n — простое число, а также рассматривать уравнение в виде

$$x^p + y^p + z^p = 0, \quad (x, y = z) = 1. \tag{2}$$

Теорема 22 (Первый случай Большой теоремы Ферма). *Уравнение 2 не имеет целых решений, если $p \not| xyz$.*

Теорема 23 (Софи Жермен). *Если простое число p таково, что $2p + 1 = q$ — простое число, то имеет место первый случай Большой теоремы Ферма.*

Доказательство. Перепишем уравнение в виде

$$y^p + z^p = (-x)^p \Leftrightarrow (y + z)(y^{p-1} + y^{p-2}z + \ldots + z^{p-1}) = (-x)^p.$$

Покажем, что $(y + z, y^{p-1} + y^{p-2}z + \ldots + z^{p-1}) = 1$. Пусть r — простое ($r \neq p$) и такое, что $r \mid y + z,\ r \mid y^{p-1} + y^{p-2}z + \ldots + z^{p-1}$. Тогда

$$y \equiv -z \pmod r, \quad py^{p-1} \equiv 0 \pmod r \implies py^{p-1} \equiv 0 \pmod r,$$

что противоречит взаимной простоте. Тогда мы имеем

$$\begin{cases} y + z = A^p \\ y^{p-1} + y^{p-2}z + \ldots + z^{p-1} = T^p \end{cases}$$

Так как наше условие симметрично относительно переменных, $x + y = B^p,\ x + z = C^p$, откуда

$$x^{\frac{q-1}{2}} + y^{\frac{q-1}{2}} + z^{\frac{q-1}{2}} = 0. \tag{3}$$

Заметим, что если $q \not| x$, то по малой теореме Ферма:

$$x^{q-1} \equiv 1 \pmod q \implies x^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod q.$$

Ясно, что отсюдо следует протвиоерчие (3). Значит, $q \mid xyz$. Не умаляя общности, $q \mid x$. Тогда

$$2x = B^p + C^p - A^p = B^{\frac{q-1}{2}} + C^{\frac{q-1}{2}} - A^{\frac{q-1}{2}} \vdots\, q.$$

Заметим, что $q \not| B,\ q \not| C$, значит $q \not| BC \implies q \mid A$. Тогда $q \mid y + z$.

Заметим, что $T^p \equiv py^{p-1} \pmod q$. Так как $(A, T) = 1$, $q \not| T$. Тогда $T^{\frac{q-1}{2}} \equiv py^{p-1} \pmod q$, тогда по малой теореме Ферма $\pm 1 = py^{p-1} \pmod q$. Так как $q \mid x$, $B^p = x + y \equiv y \pmod q$. Значит,

$$y \equiv B^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod 1, \text{ так как } q \not| B.$$

Знчит, $\pm 1 \equiv \pm p \pmod q$, а этого быть не может, так как $q = 2p + 1$.

□

Домашнее задание 8. Получите элементарное доказательство случая $p = 5$ в первом случае большой теоремы Ферма.

Как мы знаем, если мы рассматриваем расширение $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ над $\mathbb{Q}$ и простое число $q \not| m$, число q не равзетвлено.

В частности для $m = p$ — простого, $q \neq p \implies q$ неразветвлено в $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Предложение 16. *Простое число p полностью разветвлено в $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.*

Доказательство.

$$x^p - 1 = (x - 1)(x - \zeta)(x - \zeta^2)\ldots(x - \zeta^{p-1})$$
$$x^{p-1} + \ldots + x + 1 = (x - \zeta)(x - \zeta^2)\ldots(x - \zeta^{p-1})$$

Подставим $x = 1$ и от числового равенства перейдём к равенству идеалов:

$$p = ((1 - \zeta))((1 - \zeta^2))\ldots((1 - \zeta^{p-1})),$$

отсюда, так как $\zeta = \left(\zeta^i\right)^j$, все идеалы в правой части совпадают, а значит, $(p) = ((1 - \zeta))^{p-1}$, а это означает, что p полностью разветвлено. Действительно, пусть

$$1 - \zeta = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_k \implies (1 - \zeta)^{p-1} = \mathfrak{p}_1^{p-1}\mathfrak{p}_2^{p-1}\ldots\mathfrak{p}_k^{p-1},$$

из чего следует, что степень ветвления каждого $\mathfrak{p}_i$ хотя бы $p - 1$. С другой стороны, $\sum e_j f_j = p - 1$, то есть $(p) = \mathfrak{p}^{p-1}$. □

Лемма 22. Пусть p — простое число, не равное двум. Множество корней из единицы[6] в поле $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ равно $\{\pm\zeta_p^i\}$.

Доказательство. Возьмем $\zeta_n \in \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Предположим, что $n \equiv 0 \pmod 4$. Тогда $i = \zeta_4 \in \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Заметим, что $2i = (1 + i)^2$ а значит, $(2) = ((1 + i))^2$. Значит, двойка разветвлена в $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ (а это противоречит предыдущему утверждению). Значит $n \not\equiv 0 \pmod 4$.

Теперь рассмотрим случай $n = 2n_0$, $n \equiv 1 \pmod 2$. Тогда $\{\zeta_n^i\} = \{\pm\zeta_{n_0}^i\}$ и нам достаточно рассматривать n_0. Предположим, что существует простое $p' \neq p\colon p \mid n_0$. Тогда $\zeta_{p'} \in \mathbb{Q}(\zeta_p)$, но $\zeta_{p'} \in \mathbb{Q}(\zeta_{p'})$, а так как $p' \mid n_0$, $\mathbb{Q}(\zeta_{p'}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{n_0}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Простое число p' будет полностью разветвлено в $\mathbb{Q}(\zeta_{p'})$, а значит, оно будет полностью разветвлено и $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, но это противоречит утверждению 16.

Значит, $n_0 = p^a$, а тогда $\zeta_{p^a} \in \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Но это приводит нас к тому, что $n_0 = p$, ведь

$$[\mathbb{Q}(\zeta_{p^a}) : \mathbb{Q}] = p^a - p^{a-1} \leq [\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1 \implies a - 1 \implies n_0 = p$$

□

[6] не обязательно степени p

Лемма 23. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, $\sigma_i\colon K \to \mathbb{Q}^{alg}$ — все вложения ($1 \le i \le n$, $n = [K : \mathbb{Q}]$). Предположим, что $\alpha \in \mathcal{O}_K$ и $\forall i\ |\sigma_i\alpha| = 1$. Тогда α является корнем из единицы какой-то степени. [7]

Доказательство. Выпишем многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является α:

$$\prod_i (x - \sigma_i\alpha) \in \mathbb{Z}[x].$$

В силу предположения теоремы, его коэффиценты ограничены, так как они являются симметрическими функциями от $\sigma_i\alpha$. Заметим теперь, что из условия следует, что $|\sigma_i(\alpha^k)| \le 1$, а значит, для α^k мы также получим многочлен с ограниченными коэффициентами. Заметим, что k — произвольное натуральное, а значит, мы получаем бесконечное число α^k, которые являются корнями коненого набора многочленов над $\mathbb{Z}$ (так как коэффициенты каждого мы можем ограничить одной и той же константой). Значит, $\exists m, n\colon \alpha^m = \alpha^n$, что и даёт нам, что α — корень из 1. $\square$

Лемма 24. Пусть $u \in \mathcal{O}_K^* = \mathbb{Z}[\zeta_p]$ для $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Тогда $\exists s\colon u\zeta^s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассомтрим $v = u/\overline{u}$ и возьмем $\rho \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Тогда по лемме 23:

$$\rho(v) = \frac{\rho(u)}{\rho(\overline{u})} = \frac{\rho(u)}{\overline{\rho(u)}} \implies |\rho(v)| = 1 \implies v = \pm\zeta_p^n.$$

Рассмотрим $\lambda = 1 - \zeta$, тогда

$$\rho(\zeta) \equiv \zeta^k \equiv \zeta \pmod{\lambda} \implies \rho(\zeta^i) \equiv \zeta^i \pmod{\lambda},$$

а так как $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_p]$, мы имеем такое сравнение для всеё элементов $\mathcal{O}_K$. В частности, из этого следует, что $\rho(u) \equiv u \pmod{\lambda}$. В частности, мы можем положить $\rho(\cdot) = \bar{\cdot}$ и отсюда получить, что $\overline{u} \equiv u \pmod{\lambda}$. Из этого следует, что

$$\begin{aligned}\pm\zeta_p^n\overline{u} \equiv u \equiv \overline{u} \pmod{\lambda}, \text{пусть } &-\zeta_p^n u \equiv u \pmod{\lambda},\\ &-\zeta_p^n\overline{u} \equiv \overline{u} \pmod{\lambda} \implies -u \equiv u \pmod{\lambda} \implies 2u \equiv 0 \pmod{\lambda},\end{aligned}$$

но если $2u \,\vdots\, (1-\zeta)$, то так как u обратим, $2 \,\vdots\, (1-\zeta)$. Но, если $2 \in (1-\zeta)$, то $2^{p-1} \in ((1-\zeta))^{p-1} = (p)$. Значит, знак минус невозможен и реализуется случай

$$\zeta_p^n\overline{u} \equiv \overline{u} \equiv u \pmod{\lambda}.$$

Так как $u - v\overline{u}$, $u = \zeta_p^n\overline{u}$, тогда $u\zeta_p^s = \zeta_p^{n+s}\overline{u}$. Найдём такое s, что $\overline{\zeta_p^{n+s}\overline{u}} = u$. То есть, такое s, что $\overline{\zeta^{n+s}} = \zeta^s \implies 2s + n \equiv 0 \pmod{p}$, что вполне возможно реализовать. $\square$

Лемма 25. Пусть $x^p + y^p = z^p,\ p \nmid xyz,\ (x,y,z) = 1$, разложим левую часть в линейные множители:

$$(x+y)(x+\zeta y)\dots(x+\zeta^{p-1}y)$$

Тогда эти сомножители взаимнопросты.

Доказательство. Предположим противное, тогда $x+\zeta^i y,\ x+\zeta^j y \in \mathfrak{q}$ для некоторых i, j. Тогда $\zeta^i(1-\zeta^{j-i})y \in \mathfrak{q}$, но $((1-\zeta^{j-i}))^{p-1} = (p)$ и если $\mathfrak{q} \ne (1-\zeta)$, мы получаем, что $y \in \mathfrak{q}$, но тогда и $x \in \mathfrak{q}$, а это противоречит взаимной простоте x и y. Если же $\mathfrak{q} = (1-\zeta)$, мы получаем, что $x + y = x + \zeta^i y + (y - \zeta^i)y \in \mathfrak{q}$, откуда следует, что $z \in \mathfrak{q}$, а значит, $z^{p-1} \,\vdots\, p$, а этого не может быть по предположению. $\square$

Теорема 24. *Пусть $p \nmid |\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}_{\zeta_p})|$[8]. Тогда имеет место первый случай Великой теоремы Ферма.*

[7] Обратное утверждение очевидно.

[8] такие простые числа называются регуярными

Доказательство. Пусть $x^p + y^p = z^p$, разложим левую часть на множители:

$$\prod_{i=0}^{p-1}(x+\zeta^i y) = z^p,$$

а так как все сомножители в левой части равенства взаимнопросты по лемме 25. Значит, все они являются p-ми степенями, в частности для $i = 1$. То есть

$$(x+\zeta y) = I^p,$$

значит I находится в p-кручении $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}_{\zeta_p})$, но так как p не делит порядок группы классов, оно тривиально, значит I— главный, то есть $I = (\alpha)$. Значит,

$$(x+\zeta y) = (\alpha^p) \implies x+\zeta y = \varepsilon\alpha^p,\ \varepsilon \in \mathbb{Z}[\zeta]^*,\ \varepsilon = \zeta^s u \implies x+\zeta y = \zeta^s u\alpha^p.$$

С другой стороны, $\alpha = a_0 + a_1\zeta_p + \ldots + a_{p-2}\zeta^{p-2}$. Тогда

$$\alpha^p \equiv \underbrace{a_0^p + a_1^p + \ldots + a_{p-2}^p}_{\overset{\text{def}}{=} n} \pmod p.$$

Тогда $x + \zeta y \equiv \zeta^s un \pmod p$. Переходя в этом сравнении к сопряженным, мы получаем

$$x+\zeta y \equiv \zeta^s un \pmod p, \quad x+\zeta^{-1}y \equiv \zeta^{-s}\overline{u}n = \zeta^{-s}un \pmod p,\ \text{так как } u \in \mathbb{R}.$$

Отсюда мы получаем, что $\zeta^{-s}(x+\zeta y) \equiv \zeta^s(x+\zeta^{-1}y) \pmod p$. Значит, $x+\zeta y - \zeta^{2s}x - \zeta^{2s-1}y \in p\mathbb{Z}[\zeta]$. Теперь рассмотрим несколько случаев:

1. Элементы $S = \{1, \zeta, \zeta^{2s}, \zeta^{2s-1}\}$ — попарно различны.
   (a) Если $\zeta^{p-1} \notin S$, то $p \mid x, p \mid y$.
   (b) Если $\zeta^{p-1} \in S$, то $p = 2s-1$ и тогда $s \,\vdots\, p$, а значит $(\zeta - \zeta^{-1})y \in p\mathbb{Z}[\zeta]$ откуда следует, что $p \mid 1-\zeta^2$, что даёт нам противоречие.
   (c) Если $\zeta^{p-1} = -(1+\zeta+\ldots+\zeta^{p-2}) = \zeta^{2s}$, то $x+\zeta y - \zeta^{-1}x - \zeta^{-2}y \in \mathbb{Z}[\zeta]$, а тогда

   $$x+\zeta y + ((1+\zeta+\ldots+\zeta^{p-2}))x - \zeta^{p-2}y \,\vdots\, p \implies x+y \,\vdots\, p \implies z \,\vdots\, p,$$

   что даёт нам противоречие.

2. Некоторые из этих степеней совпадают.
   (a) $\zeta^{2s} = 1$. В этом случае $(\zeta - \zeta^{-1})y \,\vdots\, p$, а мы уже видели, что это невозможно.
   (b) $\zeta^{2s-1} = 1$. В этом случае $x - y + \zeta y - \zeta x \,\vdots\, p \implies (x-y)(1-\zeta) \,\vdots\, p \implies x - y \,\vdots\, p$, то есть $x \equiv y \pmod p$. Исходное уравнение мы можем записать в виде

   $$z^p + (-y)^p = x^p,$$

   и рассуждая аналогично, мы можем получить, что $z \equiv -y \pmod p$. Тогда

   $$x^p + x^p \equiv (-x)^p \pmod p \implies 3x^- \equiv 0 \pmod p.$$

   Значит, либо $p = 3$ (в этом случае мы полностью разобрали вообще всю теорему Ферма), либо $p \mid x$, что даёт нам противоречие.
   (c) $\zeta = \zeta^{2s-2}$. Тогда $x - \zeta^2 x \,\vdots\, p$, откуда следует, что $1-\zeta^2 \,\vdots\, p$, а это, как мы уже видели, противоречие.

Дадим теперь хороший критерий для проверки условия теоремы. Этот критерий мы дадим без доказательства, так как он доказывается методами аналитической теории чисел.

Как мы помним, числа Бернулли можно начинать через экспоненциальную производящую функцию:

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!}.$$

Подставим $-t$:

$$\frac{-t}{\frac{1}{e^t}-1} = \frac{te^t}{e^t-1} = \frac{t(e^t-1)+t}{e^t-1} = t + \frac{t}{e^t-1}.$$

Отсюда мы можем понять, чему равны коэффициенты:

$$m > 1,\ m \equiv_2 1 \implies B_m = -B_m \implies B_m = 0.$$

$$-(n+1)B_n = \binom{n+1}{n-1}B_{n-1} + \ldots + \binom{n+1}{k}B_k + \ldots + \binom{n+1}{1}B_1 + 1.$$

Так как все нечётные коэффициенты равны нулю, авторы часто используют обозначение B_n для $2n$-го числа Бернулли. Например, известно, что

$$B_n = -n\zeta(1-n), n > 1.$$

Теорема 25. *Простое число p — регулярно тогда и только тогда, когда числители всех чисел Бернулли $B_2, B_3, \ldots, B_{p-3}$ не делятся на p.*

Из этого рекуррентного соотношения следует, что знаменатели B_n не делятся на p при $n \leq p-3$, так как

$$v_p((n+1)B_n) \geq 0 \implies v_p(B_n) \geq 0.$$

Пример 11. Например, таким образом нетрудно показать, что число 7 является регулярным.

□

Теперь, немного отвлечёмся и приведём алгоритм построение целого базиса.

2.10 Алгоритм построения целого базиса

Итак, для $d = \mathrm{disc}(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$ мы наем, что $d\mathcal{O}_k \subset \mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathcal{O}_k$, откуда

$$\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathcal{O}_K \subset d^{-1}\mathbb{Z}[\alpha].$$

Тогда, как мы помним, $\bigcup(\omega_i + \mathbb{Z}[\alpha]) = d^{-1}\mathbb{Z}[\alpha]$, причем, каждый класс, либо вообще не содержит целых алгебраических чисел, либо целиком из них состоит. То есть, отсюда мы имеем

$$\mathcal{O}_K = \bigcup_{i \in I}(\omega_i + \mathbb{Z}[\alpha]),$$

откуда следует, что $\mathcal{O}_K$ порождена ω_i и α^s при $0 \leq s \leq n-1$. Значит, $d\mathcal{O}_K$ будет порождена $d\omega_i$ и $d\alpha^s$. С другой стороны, $d\mathcal{O}_K$ — подгруппа свободной абелевой группы $\mathbb{Z}[\alpha]$, значит мы попадаем в контекст нормальной формы Смита.

Домашнее задание 9. 1.

Теорема 26 (Штикельберг). *Дискриминант конечного расширения $K/\mathbb{Q}$ сравним с нулём или единицей по модулю 4.*

Hint: Можно действовать так: $\mathrm{disc}(K) = (\det(\sigma_i))^2$, и раскрывая определитель, мы получаем $\det(\sigma_j\omega_j) = P - N$, где P — сумма произведений со знаком +, а N — сумма произведений со знаком минус. Тогда $\mathrm{disc}(K) = (P-N)^2 = (P+N)^2 - 4PN$. Значит, достаточно показать, что числа $P+N$ и PN — целые. *Hint:* Целое число — это рациональное число, которое еще и целое алгебраическое.

2.

2.11 Геометрия чисел

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и выберем в нём набор из k линейно независимых векторов $e_1, \dots, e_k$ и рассмотрим порожденную ими свободную абелеву группу:

$$L = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}e_i$$

Тогда L мы будем называть *решёткой*, натянутой на вектора $e_1, \dots, e_k$. В случае $k = n$ решётка L называется *полной.*

Пример 12. Картинка для $L \subset \mathbb{R}^2$.

Предложение 17. *В любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^n$ лежит конечное число точек решётки.*

Доказательство. Очевидно. □

Оказывается, верно и обратное утверждение.

Предложение 18. *Пусть $A \leq \mathbb{R}^n$ — подгруппа (как абелевой группы), причем такая, что в любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^n$ лежит конечное число элементов из A. Тогда A — решётка.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство $\operatorname{span}(A)$ в $\mathbb{R}^n$. Оно прождено некоторым линейно независимым набором векторов:

$$\operatorname{span}(A) = \langle e_1, \dots, e_m \rangle, \ e_i \in A - \text{линейно независимы.}$$

Рассмотрим свободную абелеву группу, порожденную этими векторами:

$$A_0 = \mathbb{Z}e_1 + \ldots + \mathbb{Z}e_m.$$

Покажем, что A/A_0 конечна. Расммотрим *фундаментальную область*

$$\Delta = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \,\middle|\, 0 \leq x_i < 1 \right\}$$

Ясно, что $\forall a \in A \ \exists a_0 \in A_0 \colon a - a_0 \in \Delta$. Но так как Δ ограничено, в нём может лежать только конечное число элементов решётки, значит количество значений, которые может принимать $a - a_0$ конечно и A/A_0 конечна.

Значит, $\exists s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \colon sA \subset A_0$. Тогда $A \subset \frac{1}{s}A_0 = \mathbb{Z}\frac{e_1}{s} \oplus \mathbb{Z}\frac{e_2}{s} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\frac{e_m}{s} = A'$. Значит, $A_0 \subset A \subset A'$ и A_0 и A' — свободные абелевы группы одного и того же ранга. Значит и A — свободная абелева группа,

$$A = \mathbb{Z}u_1 \oplus \mathbb{Z}u_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}u_m.$$

Кроме того, $\dim\langle u_1, \dots, u_m \rangle \geq m$, откуда следует, что $u_1, \dots, u_m$ — линейно независимы над $\mathbb{R}$, откуда A — решётка. □

Это предложение даёт хороший критерий для проверки, является ли какое-то подпространство решёткой.

Определение 30. Если $L \leq \mathbb{R}^n$ — решётка с порождающим набором $e_1, \dots, e_m$, то множество

$$\Delta = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \,\middle|\, 0 \leq x_i < 1 \right\}$$

называют *основным параллелипипедом* решётки или же *фундаментальной областью* решётки.

Если $e_1, \ldots, e_m$ — порождающий набор решётки L, то $\mathbb{R}^m = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$ и тогда мы можем вычислить объем фундаментальной области, как

$$\operatorname{Vol}(\Delta) = \det |(a_{ij})|\,,$$

где $e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$.

Лемма 26. Пусть T — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, L — решётка ранга m в $\mathbb{R}^m$, Δ — её фундаментальная область. Предположим, что $\forall \ell_1, \ell_2 \in L$ множества $T + \ell_1$ и $T + \ell_2$ не пересекаются. Тогда

$$\operatorname{Vol}(T) \leq \operatorname{Vol}(\Delta).$$

Доказательство. В самом деле, так как множества $T + \ell$ дизъюнктны,

$$\operatorname{Vol}(\Delta) \geq \sum_{\ell \in L} \operatorname{Vol}(\Delta \cap T_\ell) = \sum_{\ell \in L} \operatorname{Vol}(\Delta_{-\ell} \cap T) = \operatorname{Vol}\left(\bigcup_{\ell \in L} \Delta_\ell \cap T\right) = \operatorname{Vol}(\mathbb{R}^m \cap T) = \operatorname{Vol}(T).$$

□

Лемма 27 (Г. Минковский, О выпуклом теле)**.** Пусть T — ограниченное выпуклое центрально-симметричное (относительно нуля) измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, L — решётка ранга n в $\mathbb{R}^n$, Δ — её фундаментальная область. Предположим, что выполнена следующая оценка на объемы:

$$\operatorname{Vol}(T) > 2^n \operatorname{Vol}(\Delta).$$

Тогда $\exists 0 \neq \ell \in L \colon \ell \in T$. Кроме того, если T компактно, то это будет верно и в случае нестрогого неравенства $\operatorname{Vol}(T) \geq 2^n \operatorname{Vol}(\Delta)$.

Доказательство. Рассмотрим тело $\frac{1}{2}T$, тогда $\operatorname{Vol}\bigl(\frac{1}{2}T\bigr) = \frac{1}{2^n} \operatorname{Vol}(T) > \operatorname{Vol}(\Delta)$. Тогда по предыдущей лемме 26 $\exists \ell_1, \ell_2 \in L \colon \frac{1}{2}T_{\ell_1} \cap \frac{1}{2}T_{\ell_2} \neq \varnothing$. Это означает, что

$$\exists t_1, t_2 \in T \colon \frac{x_1}{2} + \ell_1 = \frac{x_2}{2} + \ell_2 \implies 0 \neq \frac{x_1 - x_2}{2} = \ell_1 - \ell_2 \in L \cap T.$$

В последнем равенстве $\frac{x_1 - x_2}{2} \in T$ так как T — выпукло и центрально симметрично.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Рассмотрим $T_\varepsilon = (1 + \varepsilon)T$, для него неравенство уже будет строгим и по первой части теоремы мы получим $0 \neq \ell \in L \cap T_\varepsilon$. Понятно, что если $\ell \in T$, всё доказано. Пусть теперь $\ell \in T_\varepsilon \setminus T$. Вообще говоря, в $T_\varepsilon \setminus T$ лежит лишь конечное число точек из L. Так как T_ε замкнуто, мы можем уменьшить ε так, чтоб все точки из ℓ, лежащие в $T_\varepsilon \setminus T$ уже не лежали там. □

Рассмотрим теперь конечное расширение $K/\mathbb{Q}$, $[K : \mathbb{Q}] = n$. Тогда у нас есть n вложений $\sigma_i \colon K \to \mathbb{Q}^{alg}$. Среди них есть *вещественные* вложения, то есть такие, что $\operatorname{Im}(\sigma_i) \subset \mathbb{R}$. Остальные вложения называют *невещественными.* С каждым невещественным вложением σ_i связано вложение $\overline{\sigma_i} \neq \sigma_i$. Пронумеруем наши вложения следующим образом: $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ — вещественные вложения, $\sigma_{s+1}, \overline{\sigma_{s+1}}, \sigma_{s+2}, \overline{\sigma_{s+2}}, \ldots, \sigma_{s+t}, \overline{\sigma_{s+t}}$ — невещественные вложения. Так как количество вложений равно степени расширения, $s + 2t = n$.

Рассмотрим отображение $\varphi \colon K \to \mathbb{R}^n$, которое действует так:

$$\alpha \in K,\ \alpha \mapsto (\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \ldots, \sigma_s(\alpha), \Re(\sigma_{s+1}(\alpha)), \operatorname{Im}(\sigma_{s+1}(\alpha)), \ldots, \Re(\sigma_{s+t}(\alpha)), \operatorname{Im}(\sigma_{s+t}(\alpha))) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть I — ненулевой идеал в $\mathcal{O}_K$. Возьмём его базис как абелевой группы — $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тогда $\varphi(I)$ — решётка в $\mathbb{R}^n$ с базисом $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$. Нужно проверить равзе что линейную независимость.

Пусть $\sigma_{s+1}(\alpha) = a + bi$, будем делать слудеющие преобразование: $(a, b) \mapsto (a, bi) \mapsto (a + bi, bi) \mapsto (a + bi, 2bi) \mapsto (a + bi, -a + bi) \mapsto (a + bi, a - bi)$. Посмотрим, что будет происходить с определителем при проделывании этих операций. Нетрудно проследить, что по итогу определитель умножится на $-2i$. В итоге мы получим, что

$$\det\left(\begin{pmatrix}\varphi(\alpha_1)\\ \varphi(\alpha_2)\\ \vdots\\ \varphi(\alpha_n)\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{(2i)^t}\det\begin{pmatrix}\sigma_1(\alpha_1) & \dots & \sigma_{s+1}(\alpha) & \sigma_{s+1}(\alpha_1) & \dots\overline{\sigma_{s+t}(\alpha)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} = \pm\sqrt{\operatorname{disc}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}.$$

А теперь заметим, что

$$\operatorname{Vol}(\Delta) = \det(M) = \frac{1}{2^t}\sqrt{\operatorname{disc}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = \frac{1}{2^t}\sqrt{\operatorname{disc}(K)\cdot[\mathcal{O}_K : I]^2} = \frac{1}{2^t}\operatorname{N}(I)\sqrt{\operatorname{disc}(K)}.$$

Рассмотрим теперь для некоторого фиксированного $a > 0$.

$$T = \{(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, z_1, \dots, y_t, z_t),\ |x_1| + \dots + |x_1| + 2\sqrt{y_1^2 + z_1^2} + \dots + 2\sqrt{y_t^2 + z_t^2} \le a\}.$$

T — выпуклое, центрально-симметричное и $\operatorname{Vol}(T) = 2^s\left(\frac{\pi}{2}\right)^t\frac{a^n}{n!}$. Пусть I — ненулевой идеал в $\mathcal{O}_K$. Подберём a так, что будет выполнено неравенство

$$2^s\left(\frac{\pi}{2}\right)^t\frac{a^n}{n!} > 2^n\frac{\sqrt{\operatorname{disc}(K)}}{2^t}\operatorname{N}(I). \tag{4}$$

Тогда по лемме Минковского $\exists 0 \ne \alpha \in I:$

$$|\sigma_1(\alpha)| + \dots + |\sigma_s(\alpha)| + 2|\sigma_{s+1}(\alpha)| + \dots + 2|\sigma_{s+t}(\alpha)| \le a.$$

Это неравенство мы можем переписать в виде:

$$|\sigma_1(\alpha)| + \dots + |\sigma_s(\alpha)| + |\sigma_{s+1}(\alpha)| + |\overline{\sigma_{s+1}}(\alpha)| + \dots + |\sigma_{s+t}(\alpha)| + |\overline{\sigma_{s+t}}(\alpha)| \le a.$$

Тогда по неравенству о среднем мы имеем

$$\left|\sigma_1(\alpha)\cdot\ldots\cdot\sigma_s(\alpha)\overline{\sigma_{s+1}(\alpha)}\cdot\ldots\cdot\sigma_{s+t}(\alpha)\overline{\sigma_{s+t}}(\alpha)\right| \le \left(\frac{a}{n}\right)^n \Leftrightarrow \operatorname{N}(\alpha) \le \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

Заметим, что в неравенстве (4) равенство будет достигаться при

$$a^n = \frac{2^n\sqrt{\operatorname{disc}(K)}\operatorname{N}(I)n!}{2^t2^s}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^t = \left(\frac{4}{\pi}\right)^t n!\operatorname{N}(\alpha)\sqrt{\operatorname{disc}K}.$$

В этом случае будет выполняться неравенство

$$\operatorname{N}(\alpha) \le \left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{4}{\pi}\right)^t\frac{n!}{n^n}\operatorname{N}(I)\sqrt{\operatorname{disc}K}.$$

Подставим в этом неравенство, например, единичный идеал. Тогда мы получим неравенство

$$1 \le \left(\frac{4}{\pi}\right)^t\frac{n!}{n^n}\sqrt{\operatorname{disc}K}.$$

Например, из этого неравенства следует, что $\operatorname{disc}(K) \ne 1$ (в случае нетривиального расширения).

Теорема 27. *Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, $[K:\mathbb{Q}] = n > 1$. Тогда $\operatorname{disc}(K) \ne 1$. Кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{disc}(K) = \infty.$$

Получим теперь при помощи новых методов некоторые результаты, связанные с группой классов идеалов числового поля.

Мы доказали, что для ненулевого идеала I в $\mathcal{O}_K$ существует $\alpha \in I$:

$$\mathrm{N}(\alpha) \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n}\,\mathrm{N}(I)\sqrt{\operatorname{disc} K}.$$

Возьмём класс $[I^{-1}] \in \mathrm{Cl}(K)$ и представим его идеалом $I \subset \mathcal{O}_K$. С одной стороны, αI^{-1} представляет тот же класс в группе классов, а с другой стороны,

$$\mathrm{N}(\underbrace{\alpha I^{-1}}_{\text{целый}}) = \mathrm{N}(\alpha)\,\mathrm{N}\big(I^{-1}\big) \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n}\sqrt{|\operatorname{disc}(K)|}.$$

Но, как мы уже замечали, существует лишь конечное число целых идеалов с ограниченной нормой.

Пример 13. Рассмотрим $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{6}\big)$. Посмотрим сначала на количество вложений. Нетрудно убедиться в том, что $n = 3, t = 1$. Сосчитаем теперь дискриминант K. Для этого покажем, что $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{6}]$. Обозначим $\theta = \sqrt[3]{6}$ и посчитаем $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$. Заметим, что минимальный многочлен θ — это $x^3 - 6$, а минимальный многочлен θ^2 — это $x^2 - 36$, а тогда

$$\operatorname{disc}(K)\cdot(\operatorname{ind}(\theta))^2 = \operatorname{disc}(1,\theta,\theta^2) = \det\begin{pmatrix}\mathrm{Tr}(1) & \mathrm{Tr}(\theta) & \mathrm{Tr}(\theta^2)\\ \mathrm{Tr}(\theta) & \mathrm{Tr}(\theta^2) & \mathrm{Tr}(\theta^3)\\ \mathrm{Tr}(\theta^2) & \mathrm{Tr}(\theta^3) & \mathrm{Tr}(\theta^4)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 18\\ 0 & 18 & 0\end{pmatrix} = -2^2 3^5.$$

Заметим, что многочлен $x^3 - 6$ является многочленом Эйзенштейна относительно и двойки и тройки, а значит, $\operatorname{ind}(\theta)$ не может делиться на 2 и 3, откуда $\operatorname{ind}(\theta) = 1$. Значит, $\operatorname{disc}(K) = -2^5 \cdot 3^5$. Подставим это в неравенство выше:

$$\mathrm{N}(\underbrace{\alpha I^{-1}}_{\text{целый}}) = \mathrm{N}(\alpha)\,\mathrm{N}\big(I^{-1}\big) \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n}\sqrt{|\operatorname{disc}(K)|} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{6}{27}\cdot\sqrt{2^5\cdot 3^5} < \frac{16}{\sqrt{3}} < 10.$$

То есть, в любом классе есть целый представитель, норма которого меньше 10. Значит, чтоб показать, что группа классов тривиальна, нам достаточно показать, что любой идеал, висящий над 2, 3, 5, 7 — главный.

Из теоремы Куммера 20 легко понять, что

$$2\mathcal{O}_K = (2,\theta)^3 = \mathfrak{p}^3.$$

С другой стороны, $\mathrm{N}(\theta - 2) = -2$ — простой и он тоже висит над двойкой, откуда $(2,\theta) = (\theta - 2)$.

Аналогичное явление будет и с тройкой:

$$3\mathcal{O}_K = (3,\theta)^3$$

$\mathrm{N}(\theta) = 6,\ \mathrm{N}(\theta - 2) = -2$, откуда $\mathrm{N}\Big(\frac{\theta}{\theta-2}\Big) = -3$ и по аналогичным соображениям,

$$3\mathcal{O}_K = (3,\theta)^3 = \left(\frac{\theta}{\theta-2}\right)^3$$

Теперь, опять же из теооремы Куммера 20, мы получаем, что

$$5 = (5,\theta-1)(5,\theta^2+\theta+1)^2$$

и остается показать, что эти идеалы главные.$\mathrm{N}(\theta - 1) = 5$ и при этом

$$\frac{5}{\theta - 1} = \theta^2 + \theta + 1,$$

откуда $(5, \theta^2+\theta+1) = (\theta^2+\theta+1),\ (5, \theta-1) = (\theta-1)$. Теперь, делаем то же самое над семёркой:

$$x^3 - 6 = x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x-3)(x-5)$$

Тогда семёрка будет раскладываться, как

$$7\mathcal{O}_K = (7, \theta+1)(7, \theta-3)(7, \theta-5).$$

Во-первых, заметим, что $\frac{7}{\theta+1} = \frac{7(\theta^2-\theta+1)}{\theta^3+1}$, откуда перывй идеал порожден $\theta+1$. С другой стороны, $\mathrm{N}(\theta-3) = 21$, $\mathrm{N}\left(\frac{\theta}{\theta-2}\right)$, откуда $\mathrm{N}\left(\frac{(\theta-3)(\theta-2)}{\theta}\right) = 7$. Этот элемент даёт нам максимальный главный идеал, висящий над семёркой. Нетрудно заметить, что $(7, \theta-3) \subset \left(\frac{(\theta-3)(\theta-2)}{\theta}\right)$, а так как оба идеала максимальные, значит совпадают. Значит и третий идеал главный.

Таким образом, мы показали, что любой идеал кольца $\mathcal{O}_K$ является главным, то есть, что $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})) = 0$.

Домашнее задание 10. Задачи:

1. Докажите, что для любого простого p уравнение

$$3x^2 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

имеет ненулевое решение над $\mathbb{F}_p$.
2. Докажите, что $1 - 6\theta + 3\theta^2 \in \mathcal{O}_K^*$, где $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$.
3. Докажите, что $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\sqrt{-23})) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2.12 Мультипликативная группа кольца целых числового поля

Пусть числа s и t, связанные с количеством вложений числового поля $K \to \mathbb{Q}^{alg}$ определены как в . Сегодня мы докажем, что мультипликативная группа кольца целых числового поля имеет вид

$$\mathcal{O}_K^* \cong \mu \oplus \mathbb{Z}^{s+t-1},$$

где μ — группа корней из единицы. Этот факт будет иметь множество приложений. Этот факт обычно называют *сильной формой теоремы Дирихле о единицах.*

Пример 14. Рассмотрим квадратичное расширение $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Если $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subset\in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, то $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] \leq 2$, но с другой стороны $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, откуда $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Если $n = 3$, то $d = -3$, если $n = 4$, то $d = -1$, если $n = 6$, то $d = -3$, но $\mathbb{Q}(\zeta_6) = \mathbb{Q}(\zeta_3)$, так как $\zeta_6 = -\zeta_3$, а в остальных случаях нетривиальных корней из единицы в этом поле нет.

Пусть s и t опредедлены как тут. Соотвественно, если $d > 0$, то $s = 2, t = 0 \implies s + t - 1 = 1 \implies \mathcal{O}_K^* = \{\pm\theta \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $d > 0$ и $d \not\equiv 1 \pmod 4 \implies \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Как мы помним, $u \in \mathcal{O}_K^* \Leftrightarrow \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(u) = \pm 1$. В нашем случае

$$\mathrm{N}(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 = \pm 1 \tag{5}$$

и из другого описания $\mathcal{O}_K^*$ мы получаем, что все решения уравнения (5) имеют вид $\{\pm\theta^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Из этого, например, следует, что решений уравнения (5) бесконечно много.

Вообще говоря, этот самый элемент $\theta = \theta_d$ может иметь очень неприятный вид. Например, $\theta_2 = 1 + \sqrt{2},\ \theta_3 = 2 + \sqrt{3},\ \theta_{94} = 2143295 + 221064\sqrt{94}$.

Если же $d < 0$, то вполне ясно, что $s = 0,\ t = 1 \implies s + t - 1 = 0$, откуда следует, что $\mathcal{O}_K^* = \mu$, откуда, в частности, следует, что уравнение (5) имеет конечно число решение.

Теорема 28 (Дирихле, о единицах, *слабая форма*). *Мультипликативная группа кольца целых $\mathcal{O}_K$ числового поля K имеет вид*

$$\mathcal{O}_K^* \cong \mu \oplus \mathbb{Z}^m,\ \text{где}\ m \leq s + t - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\ell\colon K^* \to \mathbb{R}^{s+t}$, действующее следующим образом

$$\ell(\alpha) = \big(\log|\sigma_1\alpha|, \log|\sigma_2\alpha|, \ldots, \log|\sigma_s\alpha|, \log|\sigma_{s+1}\alpha|^2, \ldots, \log|\sigma_{s+t}\alpha|^2\big).$$

Заметим, что это гомомоморфизм групп, $\ell(\alpha\beta) = \ell(\alpha)+\ell(\beta)$. Рассмотрим сужение $\ell\colon \mathcal{O}_K^* \to \mathbb{R}^{s+t}$. Посчитаем ядро этого отображения:

$$\alpha \in \operatorname{Ker}\ell \Leftrightarrow |\sigma_i\alpha| = 1 \implies \operatorname{Ker}\ell = \mu.$$

Для $\alpha \in \mathcal{O}_K$ мы знаем, что $\mathrm{N}(\alpha) = \pm1$, откуда

$$\log|\sigma_1\alpha| + \ldots + \log|\sigma_{s+1}\alpha| + \log|\overline{\sigma}_{s+1}\alpha| + \ldots = \log|\mathrm{N}(\alpha)| = 0,$$

что даёт нам, что образы всех обратимых элементов лежат в гиперплоскости

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{s+t} = 0.$$

Лемма 28. $\operatorname{Im}\ell$ — решётка[9] в $\mathbb{R}^{s+t}$.

Доказательство. Надо проверить, что $\operatorname{Im}\ell$ — это дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^{s+t}$ (то, что это подгруппа — очевидно). Возьмём $r > 0$ и рассмотрим α такие, что все координаты не превосходят r. Нам надо показать, что таких α конечное число.

Ясно, что неравенства $\log|\sigma_j\alpha| \le r$ $\forall j$ означают, что $|\sigma_j\alpha| \le e^r$ $\forall j = 1,\ldots,s$ и $|\sigma_j\alpha| < e^{\frac{r}{2}}$ $\forall j = s+1,\ldots,s+t$, откуда мы имеем $-e^r \le \sigma_j\alpha \le e^r$ при $1 \le j \le s$ и $-e^{\frac{r}{2}} \le \Re(\sigma_j\alpha)$ или $\operatorname{Im}(\sigma_j\alpha) \le e^{\frac{r}{2}}$ при $s+1 \le j \le s+t$, а таких конечное число, так как мы это уже показывали вот тут. $\square$

Значит, мы имеем расщепимую короткую точную последовательность

$$0 \to \mu \to \mathcal{O}_K^* \to \mathbb{Z}^m \to 0,$$

откуда $\mathcal{O}_K^* \cong \mu \oplus \mathbb{Z}^m$, где $m \le s+t-1$, что и требовалось. $\square$

Даже слабая форма теоремы Дирихле о единицах позволяет успешно вычислять мультипликативные группы колец целых числовых полей.

Пример 15. Из 2.13 мы знаем, что в $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^3 = 6$ мы имеем

$$\frac{1}{1-6\theta+3\theta^2} = 109 + 60\theta + 33\theta^2$$

В данном случае $s = 1, t = 1 \implies s+t-1 = 1$, откуда $m = 1$, так как ясно, что $m \le 1$, так как если $m = 0$, то никаких обратимых элементов, кроме μ в $\mathcal{O}_K$ нет, а из корней из единицы в этом кольце есть только ±1, так как если $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$, то $\varphi(n) = 1$ или 2 (но ±1 там всё-таки лежит, откуда $n = 2$). Таким образом, мы имеем

$$\mathcal{O}_K^* \cong \mu_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Предложение 19. *Элемент* $1-6\theta+3\theta^2$ *— основная единица в* $\mathcal{O}_K^*$.

Доказательство. **Дописать! Тут было много всякой мути.** $\square$

Домашнее задание 11.
- Рассмотрим $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$. Докажите, что $\mathcal{O}_K$ — евклидово.
- Приведите пример неизоморфных расширений K_1, K_2 над $\mathbb{Q}$ одинаковой степени и таких, что $\operatorname{disc}(K_1) = \operatorname{disc}(K_2)$.
  Рассмотрим $K_1 = \mathbb{Q}(\theta),\ \theta^3 - 18\theta - 6 = 0$, $K_2 = K(\xi),\ \xi^3 - 36\xi - 78 = 0$, $K_3 = \theta^3 - 54\theta - 150 = 0$.
- Тут была еще задача, её надо с фотки переписать.

[9] ранга $s+t-1$.

Вернёмся к доказательству сильной теоремы Дирихле о единицах. Ясно, что для этого нам достаточно доказать оценку $m \geq s+t-1$, а это равносильно тому, что $\operatorname{Im} \ell$ — полная решётка в гиперплоскости

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{s+t} = 0.$$

Для этого необходимо найти систему из $(s+t-1)$-го линейно независимого над $\mathbb{R}$ элемента $\ell(\mathcal{O}_K^*)$.

Соотвественно, надо найти $s+t$ элементов $u_1, \ldots, u_{s+t} \in \mathcal{O}_K^*$, которые дадут нам $s+t-1$ линейно независимый над $\mathbb{R}$ вектор в образе. Мы постараемся найти такие u, что их образы имеют вид

$$u_1 \mapsto (+, -, -, \ldots, -), u_2 \mapsto (-, +, -, \ldots, -), \ldots u_n \mapsto (-, -, \ldots, +).$$

Обозначение выше означает, что на соовтествующей координате стоит число соотвествующего знака. Покажем сначала, что такие векторы нам подойдут. Обозначим матрицу, полученную из первых $(s+t-1)$ координат $\ell(u_i)$ где $i = 1, \ldots, s+t-1$, как строк за (a_{ij}). Ясно, что достаточно доказать, что эта матрица имеет полный ранг. Заметим, что так каак сумма сумма всех элементов в строке и мы вычеркнули один отрицательный, в каждой усеченной строке сумма по строке будет положительной. Докажем теперь такую лемму:

Лемма 29. Пусть $A \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{R})$ такая, что $\forall i\ a_{ii} > 0, \forall i \neq j\ a_{ij} < 0,\ \forall i\ \sum_{j=1}^m a_{ij} > 0$. Тогда $\operatorname{rank} A = m$.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, то есть система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m = 0 \end{cases}.$$

имеет нетривиальное решение.

В силу симметрии относительно переменных, мы можем полагать, что x_1 — максимальная по модулю координата. Тогда

$$0 = |a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m| \geq |a_{11}x_1| - |a_{12}x_2| - \ldots - |a_{1m}||x_m| \geq |x_1|(a_{11} - |a_{12}| - \ldots - |a_{1m}|) \geq 0,$$

откуда $|x_1| = 0 \implies |x_i| = 0\ \forall i.$ □

Остаётся найти систему $u_1, \ldots, u_{s+t}$, которые в образе дадут нужные знаки координат. Пусть $n = s+2t$, рассмотрим множество

$$Y = (x_1, \ldots, x_s, y_1, z_1, \ldots y_t, z_t), \quad |x_i| < C_i \forall 1 \leq i \leq s, y_i^2 + z_i^2 < C_{s+i}.$$

Нетрудно проверить, что Y — ограниченное, выпуклое и центрально-симметричное. Кроме того,

$$\operatorname{Vol}(Y) = 2^s \prod_{i=1}^{s} C_i \cdot \pi^t \cdot \prod_{i=1}^{t} C_{s+i} = 2^s \pi^t \cdot \prod_{i=1}^{s+t} C_i.$$

Пусть Γ — полная решётка, Δ — объем фундаментальной области. Тогда, если

$$2^s \pi^t \prod_{i=1}^{s+t} C_i > 2^n \Delta,$$

то эта поверхность будет содержать точкк из решетки (по теореме о выпуклом теле). Заметим, что неравенство выше равносильно тоиу, что

$$\prod_{i=1}^{s+t} C_i > \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \cdot \Delta.$$

Возьмём $C > \left(\frac{4}{\pi}\right)^t\Delta$. Рассмотрим все $a_i\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K$: $\mathrm{N}(a_i\mathcal{O}_K) < C$. Пусть $\varepsilon = \min\left(|\sigma_i a_j|, |\sigma_{s+} aj|^2\right) > 0$. Выберем некоторый σ_k и зафиксируем его. Положим

$$C_i = \begin{cases} \varepsilon, i \neq k \\ C \cdot \varepsilon^{-(s+t-1)}, i = k \end{cases}.$$

Тогда мы имеем

$$\prod_i C_i > \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \Delta.$$

Заметим, что $\exists 0 \neq x \in \mathcal{O}_K:$

$$|\sigma_s x| < C_1, \ldots, |\sigma_s x| < C_s, |\sigma_{s+1}x|^2 < C_{s+1}, \ldots, |\sigma_{s+t}x|^2 < C_{s+t}.$$

Тогда оценка, нужная нам для теоремы Минковского будет выполнятся и Y будет содержать ненулевую точку x решётки. Вычислим норму этого элемента:

$$\mathrm{N}(x\mathcal{O}_K) = |\,\mathrm{N}(x)| < \prod_i C_i = C \implies x\mathcal{O}_K = a_i\mathcal{O}_K \text{ для некоторого } i \implies u = \frac{x}{a} \in \mathcal{O}_K^*.$$

Так как мы для каждого σ_k нашли такой обратимый элемент, проделывая такую операцию для каждого $\sigma_i \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, мы получим искомую систему из $s+t$ обратимых элементов. Поймём, почему мы получили систему с нужной расстановкой знаков. Ясно, что так как там в координатах стоят логарифмы, достаточно сравнивать модули того, что под логарифмами,с единицами.

Возьмём некоторыы $\tau \in \{\sigma_1, \ldots \sigma_s, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{s+t}\}$. Тогда

$$|\tau u| = \frac{|\tau x|}{|\tau a_i|} =$$

Проверим, что если $\tau \neq \sigma_k$, то $|\tau u| < 1$ (этого достатчно, так как если мы покажем, что все координаты отрицательны, то, так как их сумма равна нулю, оставшаяся автоматически будет положительной). Если $\tau \neq \sigma_k$ и τ — вещественно, то

$$|\tau u| = \frac{|\tau x|}{|\tau a_i|} < \frac{C_i}{\varepsilon} = 1.$$

Аналогично будет разбираться случай, когда τ — комплексное:

$$|\tau u| < \frac{|\tau x|}{|\tau a_i|} < \frac{\sqrt{C_{s+i}}}{\sqrt{\varepsilon}} = 1.$$

Значит, наша система будет действительно искомой: $+$ будет в k-й координате, а в остальных — минусы.

Итак, таким образом, мы наконец доказали сильную теорему Дирихле о единицах:

Теорема 29 (Дирихле, о единицах, сильная форма)**.** *Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, а числа s и t, связанные с количеством вложений числового поля $K \to \mathbb{Q}^{alg}$ определены как в . Тогда мультипликативная группа кольца целых числового поля K имеет вид:*

$$\mathcal{O}_K^* \cong \mu \oplus \mathbb{Z}^{s+t-1},$$

где μ — группа корней из единицы.

2.13 Контпример к локально-глобальному принципу для кубических форм.

Локально-глобальным принципом в теории чисел называют рассуждения примерно такого вида:

Уравнение разрешимо над $\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ уравнение разрешимо по модулю всех простых p.

Для линейных уравнения это утверждение очевидно выполняется. Также оно выполнено для квадратичных форм: это уже весьма нетривиальное утверждение, доказанное Минковским и Хассе:

Теорема 30 (Принцип Минковского-Хассе). *Рациональная квадратичная форма представляет ноль над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда она представляет 0 над $\mathbb{R}$, а также представляет 0 над $\mathbb{Q}_p$ для всех простых p.*

Для кубических форм локально-глобальный принцип уже не верен. В ДЗ мы показывали, что уравнение $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ разрешимо над любым $\mathbb{F}_p$ для любого простого p. Из этого совсем несложно получить, что это уравнение разрешимо над $\mathbb{Q}_p$ (при помощи леммы Гензеля). Так вот, оказывается, что это уравнение не. разрешимо над $\mathbb{Z}$.

Проделаем сначала некоторую подготовительную работу.

Предложение 20 (ДЗ 11, задача 3). *Пусть $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha^3 + a\alpha + \beta$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Пусть $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ и $\alpha \in \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Тогда $\alpha \in \mathfrak{p}_3$.*

Доказательство. Перепишем данное равенство, как $\alpha(\alpha^2 + a) = -b$ и возьмём норму от обеих частей:

$$\mathrm{N}(\alpha)\,\mathrm{N}(\alpha^2 + a) = -b^3 \implies \mathrm{N}(\alpha) = -b,\ \mathrm{N}(\alpha^2 + a) = b^2.$$

Далее разберём несколько случаев:

1. Если $a \in p\mathbb{Z}$, несложно убедиться, что $p \mid b$ а тогда $\alpha^3 \in p\mathcal{O}_K \subset \mathfrak{p}_3 \implies \alpha \in \mathfrak{p}_3$, так как идеал простой.
2. Пусть теперь $a \notin p\mathbb{Z}$. Положим $v_p(b) = n \geq 1$. Тогда $\alpha^2 + a \notin \mathfrak{p}_1, \notin \mathfrak{p}_2$, но с другой стороны $\mathrm{N}(\alpha^2 + a) \vdots p \implies \alpha^2 + a \in \mathfrak{p}_3$. Заметим, что $\mathrm{N}(\mathfrak{p}_3) = p$, $\alpha^2 + a = \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}$, откуда

$$b^2 = \mathrm{N}(\alpha^2 + a) = p^s \underbrace{\mathrm{N}(\mathfrak{q})}_{\nmid p}, v_p(b) = 2n \implies s = 2n.$$

Тогда $\alpha(\alpha^2 + a) = -b$, откуда $v_{\mathfrak{p}_3}(\alpha(\alpha^2 + a)) = 2n$, а с другой стороны

$$\alpha(\alpha^2 + a) = p^n \cdot d,\ (d, p) = 1 \implies \alpha(\alpha^2 + a) = \mathfrak{p}_1^n \cdot \mathfrak{p}_2^n \cdot \mathfrak{p}_3^n,$$

что даёт нам противоречие.

Итак, в качестве контрпримера мы будем рассматривать кубическое уравнение

$$3x_1^3 + 4y_1^3 + 5z_1^3 = 0.$$

Сделаем такие замены переменных:

$$z = -z_1, \quad x = 2y_1, y = x_1.$$

В результате мы получим уравнение

$$x^3 + 6y^3 = 10z^3.$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы доказать, что оно не имеет нетривиальных целых решений. Предположим противное и выберем решение с минимальным $|z|$. Заметим, что в таком случае мы работаем в кольце целых поля $\mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^3 = 6$ и тогда

$$\mathrm{N}(x + \theta y) = 10z^3.$$

Положм $\alpha = x + \theta y$, $(\alpha) = \mathfrak{p}_1^m\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{p}_1 \nmid 2$, $\mathfrak{p}_1 \nmid 5$, но $\mathfrak{p}_1 \mid p \neq 2, 5$.

Далее рассмотрим два случая:

1. $\mathfrak{q} \nmid p$: применяя норму к равенству выше, получаем

$$(10z^3) = (\mathrm{N}(\mathfrak{p}_1))^m\,\mathrm{N}(q).$$

В левую часть p входит в кратной трём степени, посмотрим на правую часть. $\mathrm{N}(\mathfrak{p}_1)$ — некоторая степень p от единицы до тройки, пусть $\mathrm{N}\,\mathfrak{p}_1 = p^s$. Тогда мы получаем, что $sm \vdots 3$, откуда или s, или p делится на 3. Пусть $s \vdots 3$, тогда $\mathrm{N}\,\mathfrak{p}_1 = p^3 \implies \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ (так как эта степень — степень инерции), но тогда $\alpha \vdots p \implies p \mid x,\ p \mid y$ и мы сможем перейти к аналогичному решению с меньшим модулем, просто поделив на p.

Значит $m \vdots 3 \implies$.

2. Пусть $(\mathfrak{q},(p)) \neq 1 \implies (\alpha) = \mathfrak{p}_1^m\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}'$ (где $\mathfrak{p}_2$ — еще один простой идеал над p). Если $p = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ и мы можем применить задачу 20 для

$$\alpha\theta = (x+y\theta)\theta = x\theta + y\theta^2 \implies \mathrm{Tr}(\alpha\theta) = 0 \implies \alpha\theta \notin \mathbb{Q}.$$

Т.е. α — порождающий элемент нашего расширения. Так вот, по предыдущей задаче $\alpha\theta \in (p)$.
В противном случае $(p) = \mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2$ или $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ или $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^2$. В любом из этих случаев мы получаем, что $\alpha^2 \vdots p$, но в то же время

$$\alpha^2 = (x+y\theta)^2 = x^2 + 2xy\theta + y^2\theta^2 \implies p \mid x, p \mid y$$

и мы снова можем сделать спуск.

Теперь мы можем заключить, что $\alpha^3 = I^3 \cdot \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — произведение максимальных идеалов над 2 и над 5.

Совершенно ясно, что z нечётно. Посмотрим, какие идеалы висят над двойкой: по модулю два урванение имеет вид $x^3-6=0$, откуда над двойкой висит единственный максимальный идеал $\mathfrak{p}_2 = (2,\theta) = (\theta-2)$ и двойка является его кубом. В то же время, $\mathrm{N}(\theta-2) = 2$, откуда $v_{\mathfrak{p}_2}(\alpha) = 1$. Теперь посмотрим на идеалы, висяшие над пятеркой:

$$x^3 - 6 = (x-1)(x^2+x+1) \pmod 5 \implies \mathfrak{p}_5 = (5,\theta-1) = (\theta-1), \quad \mathfrak{p}' = (5,\theta^2+\theta+1) = (\theta^2+\theta+1).$$

$\mathrm{N}(\theta-1) = 6$, а так как норма пятёрки — это 5^3, мы имеем $\mathrm{N}(\theta^2+\theta+1) = 5^2$.

Значит, в α входит либо $\mathfrak{p}_5$, либо $\mathfrak{p}_5'$, но не одновременно, так как иначе α делится на 5 и можно сделать спуск.

Проанализируем по отдельности эти два случая:

1. $(\alpha) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5^? \cdot \ldots$, возьмём норму в этом равенстве:

$$10z^3 = \mathrm{N}((\alpha)) = \mathrm{N}(\mathfrak{p}_5)^{3s+1} \cdot \ldots$$

2. В этом случае $(\alpha) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5^{3r+2} \cdot \ldots$.

Тогда $(\alpha) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5 J^3 = (\theta-2)(\theta-1)J^3 = (\theta-2)(\theta^2+\theta+1)^2 J^3 = ((\theta-2)(\theta-1)t^3) = ((\theta-2)(\theta^2+\theta+1)^2 t^3)$. Значит, идеалы отличаются на обратимый элемент, а из теоремы Дирихле о единицах, мы знаем все обратимые элементы, то есть

$$(\alpha) = \alpha_0 t_0^3, \quad \alpha_0 \in \{(\theta-2)(\theta-1), (\theta-2)(\theta^2+\theta+1)^2, x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

где x_i — результат домножения первых двух элементов на первую и вторую степени основной единицы $\varepsilon = 1 - 6\theta + 3\theta^2$ (кратную трём степень основной единицы мы можем заносить в t_0^3). Итак, пусть

$$\alpha = (\theta-2)(\theta-1)(u+v\theta+w\theta^2)^3 = (\theta^2-3\theta+2)(u+v\theta+w\theta^2)^3 = x + y\theta.$$

Посмотрим на это равенство по модулю 3 и приравнеяем коэффициенты при θ^2: Собка с кубом (так как $\theta^3 = 6$) по модулю 3 равна u^3, откуда при θ^2 коэффициент по модулю три в левой части равенства будет равен u^3 в левой части и 0 в правой части. Значит, $u \equiv 0 \pmod 3$. Тогда $(u+v\theta+w\theta^2)^3 \equiv 0 \pmod 3$, откуда $\alpha \vdots 3 \implies x, y \vdots 3$ и мы можем сделать спуск. Так как $\varepsilon \equiv 1 \pmod 3$, при домножении на ε и ε^2 ничего существенно нового не происходит (а оставшийся случай разбирается аналогично).

□

2.14 Поле p-адических чисел и лемма Гензеля

Напомним вкратце определение поля $\mathbb{Q}_p$. Как мы помним из курса алгебры, *кольцо целых p-адических чисел* определяется как

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z}$$

Соотвественно, его элементы имеют вид $\sum_{k=1}^{\infty} a_k p^k$, а операции определяются покоординатно по модулю p. Кроме того ясно, что элемент $\mathbb{Z}_p$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0 \pmod p$. Отсюда в частности следует, что кольцо $\mathbb{Z}_p$ локальное с единственным максимальным идеалом (p).

Кольцо $\mathbb{Z}_p$ целостное и его поле частных мы называем полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Кроме того, в данном случае оно совпадает с локализацией $\mathbb{Z}_p$ в идеале (p).

Отметим также, что кольцо $\mathbb{Z}_p$ является кольцом DVR (со всеми вытекающими из этого хорошими свойствами), нормирование на него естественно продолжается с $\mathbb{Z}$, как

$$x = p^n u, \quad u \in \mathbb{Z}_p^* \rightsquigarrow \upsilon_p(x) = n.$$

и с него оно также естественно продолжается на $\mathbb{Q}_p$.

Полагая $\mathcal{U} = \mathbb{Z}_p^*$ мы имеем такую точную последовательность

$$1 \to \mathcal{U} \to \mathbb{Q}_p^* \xrightarrow{\upsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Кроме того, на $\mathbb{Q}_p$ при помощи этой метрики можно определить *неархимедову p-адическую норму*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\upsilon_p(x)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Она удовлетворяет всем аксиомам нормы, но вместо неравенства треугольника имеет место более сильное *ультраметрическое неравенство*:

$$\upsilon_p(x+y) \geq \min(\upsilon_p(x), \upsilon_p(y)) \rightsquigarrow |x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Соотвественно, нетрудно убедиться в том, что $\mathbb{Q}_p$ — пополнение $\mathbb{Q}$ по p-адической норме (и это даёт другую конструкцию этого поля). Одним из самых частых применений p-адических чисел является следующая известаня многим со школьных лет лемма:

Лемма 30 (Лемма Гензеля). Пусть $f \in \mathbb{Z}_p[x]$, причём для некоторого $x_0 \in \mathbb{Z}_p$

$$f(x_0) \equiv 0 \pmod{p^{2a+1}}, \quad f'(x_0) \equiv 0 \pmod{p^a}, \quad f'(x_0) \not\equiv 0 \pmod{p^{a+1}}.$$

Тогда $\exists x \in \mathbb{Z}_p$ такое, что

$$x \equiv x_0 \pmod{p^{a+1}}, \quad f(x) = 0.$$

Доказательство. Метод касательных Ньютона:

Пусть $x_0 = x_0$, построим далее индуктивно последовательность $\{x_n\}$, предел которой даст нам нужный корень. Положим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

и докажем, что $x_n \in \mathbb{Z}_p$ и они удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{cases} f(\alpha_n) \equiv 0 \pmod{2a+1+n}, n \geq 0 \\ x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^{a+n}}, n \geq 1 \end{cases}.$$

Докажем это по индукции, мне лень писать сейчас перепишу потом из боревича чесслово. это и так база и все всё это знают зачем вообще я это техаю???? да и вообще как-то многовато вопросов к жизни в последнее время. :(□

Итак, мы знаем, что уравнение

$$3x^3 + 4x^3 + 5z^3 = 0$$

имеет корни над любым $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Рассмотрим случаи $p \neq 2, 3, 5$. Существуют числа x_0, y_0, z_0 такие, что

$$3x_0^3 + 3y_0^3 + 4z_0^3 \equiv 0 \pmod p.$$

Тогда по лемме Гензеля с $a = 0$ для многочлена

$$f(x) = 3x^3 + 4y^3 + 5z^3, \quad f'(x) = 9x^2.$$

мы получаем, что существует корень в $\mathbb{Z}_p$. Случаи $p = 2, 3, 5$ разбираютяс отдельно. Для $p = 2$ достаточно рассмотреть набор $(1, 0, 1)$ и применить лемму Гензеля с $a = 0$. Для $p = 3$ с $(0, 2, -1)$ достаточно применить лемму Гензеля с $a = 1$, а для $p = 5$ достаточно рассмотреть набор $(2, -1, 0)$ с $a = 0$.

2.15 Локально-глобальный принцип для квадратичных форм

Предложение 21. *При* $p \neq 2$ $\mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Q}_p^{*2} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \varepsilon, p, \varepsilon p\}$.

Доказательство. тоже лучщше написать из боревича, а предварительно написать про квадратичные формы оттуда же!!! □

Предложение 22. *В случае* $p = 2$ *предыдущий результат имеет такой вид*

$$\mathbb{Q}_2^*/\mathbb{Q}_2^{*2} \cong \{1, 3, 5, 7, 2, 6, 10, 14\}$$

Доказательство.

Лемма 31. Если $x \in \mathbb{Z}_2$ и $x \equiv 1 \pmod 8$, то x является квадратом.

Доказательство. Рассмотрим многочлен $t^2 - x$ и применим лемму Гензеля для $a = 1$. Так как $x \in \mathbb{Z}_2$. □

Запишем $x \in \mathbb{Z}_2$ в виде

$$x = a_0 + 2a_2 + 2^2a_2 + 8y.$$

Если $a_0 = 1$, то мы можем рассмотреть

$$\frac{x}{a_0 + 2a_1 + 2^2a_2} \equiv 1 \pmod 8,$$

а тогда по лемме это число является квадратом, откуда мы получаем конечное число вариантов на a_i (тут реализуются $1, 3, 5, 7$) . Аналогично разбирается случай $a_0 = 0$.

Кроме того, ясно, что все эти числа не равны по модулю квадратов. □

Рассмотрим поле $\mathbb{Q}_p$ и $a \in \mathbb{Q}_p^* \setminus \mathbb{Q}_p^{*2}$, такое a задаёт квадратичное расширение $\mathbb{Q}_p(\sqrt{a})$ с соотвествующей нормой. Тогда возникает *группа норм*

$$\mathrm{N} \overset{\text{def}}{=} \{0 \neq x^2 - ay^2 \in \mathbb{Q}_p \,| x, y \in \mathbb{Q}_p\}.$$

Ясно, что $\mathbb{Q}_p^{*2} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_p^*$. Индекс подгруппы

$$[\mathbb{Q}_p^* : N] = 2,$$

независимо от четности p.

Доказательство. Для этого достаточно проверить, что $\mathrm{N} \neq \mathbb{Q}_p^*$ и $\mathrm{N} \neq \mathbb{Q}_p^{*2}$. Если $-a \not\in \mathbb{Q}_p^{*2}$, то ясно, что $\mathrm{N} \neq \mathbb{Q}_p^{*2}$. Если же $-a \in \mathbb{Q}_p^{*2}$, то $\mathrm{N} = \{0 \neq x^2 + y^2\}$, а форма $x^2 + y^2$ представляет все элементы конечного поля $\mathbb{F}_p$. Тогда, взяв квадратичный невычет, мы можем поднять его до нужного нам элемента $\mathbb{Q}_p$.

Также нетрудно показать, что она не совпадает со всей группой $\mathbb{Q}_p^*$.

В случае $p = 2$ ситуация заметно сложнее.

Докажем сначала для нечётного p. □

Определение 31. Определим *символ Гильберта*, для простого p и $a, b \in \mathbb{Q}_p^*$, как

$$(a, b)_p = \Big\{ x^2 - ay^2 - bz^2 \text{ представляет нуль}$$

3. Основы теории гомологий

3.1 Симплициальные гомологии

Определение 32. *Цепным комплексом* абелевых групп $(C_\bullet, \partial)$ называется последоватекльность абелевых групп и морфизмов вида

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} \ldots, \qquad \text{где } C_i \text{ — абелевы группы}$$

при условии $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Если комплекс обрывается с одной из сторон, то мы считаем, что он дополнен нулями.

Элементы группы C_q называют q-мерными цепями, а отображение ∂ называют (граничным) дифференциалом.

Замечание. Ясно, что условие $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ равносильно тому, что $\operatorname{Ker}\partial_q \supset \operatorname{Im}\partial_{q+1}$.

Замечание. Когда комплекс снабжают отображением $C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$, это отображение называют *аугументацией*.

Определение 33. *Гомологиями* комплекса $(C_\bullet, \partial)$ называют абелевы группы

$$H_q(C_\bullet, \partial) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}\partial_q / \operatorname{Im}\partial_{q+1}.$$

Если коплекс снабжен аугументацией и обрывается на нулевом члене, то у него также есть *приведённые гомологии*

$$H_0(C_\bullet, \partial) = C_0/\operatorname{Im}\partial_1, \quad \widetilde{H_0}(C_\bullet, \partial) = \operatorname{Ker}\partial_0/\operatorname{Im}\partial_1, \quad \widetilde{H}_q = H_q \; \forall q > 0,$$

которые отличаются от обычных только в нулевом члене.

Перед тем как что-то строго определять, посмотрим нестрого на какие-то мотивирующие примеры вычислений. Для этого лучше всего подойдут *симплициальные гомологии*. Неформально, идея состоит в том, что мы разбиваем топологическое пространство X на симплексы всех размерностей и говорим, что $C_q(X, \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа, порожденная всеми q-мерными симплексами (то есть, мы рассматриваем целочисленные формальные линейные комбинации симплексов). Дифференциалом ∂ будет оператор взятия границы (топологической).

Пример 16 (Симплицаильные гомологии отрезка (нестрого))**.** Пусть X — отрезок $[a, b]$ с ориентацией из b в a. В нём две нульмерные клетки, значит $C_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$, одномерная клетка одна — ребро e, то есть $C_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и комплекс устроен следующим образом:

$$\ldots 0 \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z},$$

так как мы можем определить аугументацию следующим образом: $x \in C_0 \Rightarrow x = k_1 a + k_2 b$, положим $\varepsilon(x) = k_1 + k_2$. То есть, на самом деле комплекс выглядит вот так:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow[e \to \partial e = a - b]{} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow[a \to 1,\; b \to 1]{} \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $\varepsilon \circ \partial = 0$.

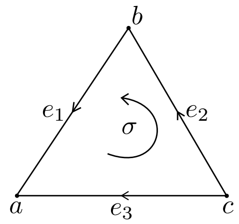
Гомологиями топологического пространства называют гомологии построенного по нему комплекса. В нашем случае

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\partial_1/\operatorname{Im}\partial_2 = 0/0 = 0.$$

$$\widetilde{H_0}(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\varepsilon/\operatorname{Im}_{\partial_1} = \langle a - b\rangle/\langle a - b\rangle = 0.$$

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z})/\operatorname{Im}_{\partial_1} = \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z} = \langle a, b\rangle/\langle a - b\rangle = \langle a\rangle = \mathbb{Z}$$

Пример 17 (Симплицальные гомологии треугольника)**.** Рассмотрим треугольник (abc) с внутренностью σ, ориентированной против часовой стрелки, и рёбрами $b \xrightarrow{e_1} a$, $c \xrightarrow{e_3} a$, $c \xrightarrow{e_2} b$.



Тогда цепной комплекс, построенный по треугольнику будет устроен следующим образом:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow[\sigma\to e_1+e_2-e_3]{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Из ориентации σ ясно, что $\partial\sigma = e_1 + e_2 - e_3,\ \partial e_1 = b - c,\ \partial e_2 = a - b, \partial e_3 = a - c$. Ясно, что вторые гомологии нулевые:

$$H_2(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\partial_2/0 = 0$$

Посчитаем теперь первые.

$$\partial(k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3) = k_1(b - c) + k_2(a - b) + k_3(a - c) = a(k_2 + k_3) + b(k_1 - k_2) + c(-k_1 - k_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\partial_1 = \langle (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid k_1 = k_2 = -k_3 \rangle$$

С другой стороны, $\operatorname{Im}\partial_2 = k(e_1 + e_2 - e_3)$. Тем самым, $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$. Аналогичным вычислением мы получаем, что $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Пример 18 (Спмилициальные гомологии треугольника без внутренности)**.** Пусть теперь всё также, как в примере 17, но у треугольнка нет внутренности. Тогда цепной комплекс будет иметь вид

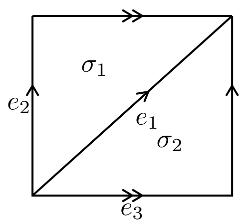
$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$$

Из того, как поменялись отображения, ясно, что поменялись только первые гомологии. Теперь $H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$, а образующая — это цикл $e_1 + e_2 - e_3$. С другой стороны, $\pi_1(\Delta) = \mathbb{Z}$.

Замечание. Когда-нибудь позже мы докажем, что для любого симплициального пространства X есть отображение

$$\pi_1(X) \to H_1(X) = \pi_1(X)^{ab} = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Пример 19 (Симплициальные гомологии тора $\mathbb{T}^2$)**.** Рассмотрим двумерный тор $\mathbb{T}^2$, разбитый на симплексы следующим образом:



Из такой триангуляции ясно, что комплекс будет иметь вид:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Посчитаем дифференциал на двумерных клетках: $\partial\sigma_1 = e_1 - e_3 - e_2,\ \partial\sigma_2 = e_2 + e_3 - e_1$. С другой стороны, ясно, что дифференциал зануляется на любой одномерной клетке, $\partial e_i = a - a = 0$.

$$H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\partial_2/0 = \mathbb{Z}.$$

так как $\partial\sigma_1 = -\partial\sigma_2 \Rightarrow \operatorname{Ker}\partial_2 = \mathbb{Z}$.

Также прямыми вычислениями можно убедиться, что $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2)^{ab}$. Образующими первых гомологий будут e_2 и e_3.

Упражнения.

1. Посчиать по определению одномерные гомологии связного дерева.
2. Посчитать по определению все гомологии n-мерного симплекса T^n

$$T^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(t_0, \ldots, t_n) \mid t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\right\}.$$

3. Покажите, что барицентрическое подразбиение не меняет симплициальных гомологий.

Вообще говоря, далее нужно формально доказывать, что гомологии не зависят от симплициального разбиения пространства (и выяснять, у каких пространств это симплициальное разбиение вообще есть), но мы этим всем заниматься не будем, так как в нашем курсе основной будет другая теория.

3.2 Сигнулярные гомологии

Определение 34. Пусть X — топологическое пространство.

- *Сингулярным q-мерным симплексом* мы будем называть непрерывное отображение $f\colon T^q \to X$.
- Его граница определяется, как формальная линейная комбинация

$$\partial f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \Gamma_i f,$$

  где $\Gamma_i f$ — сужение f на грань $t_i = 0$ (сумма именно такая, так как у q-мерного симплекса $q+1$ грань).
- *Сингулярными q-мерными цепями* $C_q(X, \mathbb{Z})$ мы будем называть формальные целочисленные линейные комбинации конечного числа q-мерных сингулярных симплексов (то есть порожденную ими свободную абелеву группу).
- Дифферецниал комплекса[10] $C_\bullet$ определяется, как продолжение по линейности оператора взятия границы q-мерного сингулярного симплекса.
- Комплекс сингулярных цепей может быть снабжен аугументацией $\varepsilon\colon C_0 \to \mathbb{Z},\ \sum k_i f_i \to \sum k_i$.

Замечание. Формально говоря, мы пока не знаем, что комплекс из сингулярных цепей — это комплекс. Для этого нам понадобится следующая техническая

Лемма 32. В контексте определения 34 $\partial^2 = 0$.

Доказательство. Посчитаем $\partial\partial f$:

$$\partial\partial f = \partial\left(\sum_i (-1)^i \Gamma_i f\right) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \Gamma_j \Gamma_i f.$$

Ясно, что любую грань коразмерности 2 можно получить взятием границы двумя способами. Действительно, если $j < i$, то $\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_j \Gamma_{i+1}$ (i-я из оставщихся после выкидывания j-й координаты — $i+1$-я изначально), а в сумме слагаемые $\Gamma_i \Gamma_j$ и $\Gamma_j \Gamma_{i+1}$ будут с разным знаком, значит $\partial\partial f = 0$. □

Определение 35. *Сингулярными гомологиями* топологического пространства X называются гомологии комплекса сингулярных цепей. Мы будем обозначать их, как $H_k(X)$ или $H_{\mathrm{k}}^{\mathrm{sing}}(X)$.

В топологическом контексте группу $Z_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial_q$ часто называют *q-циклами*[11], а группу $B_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im} \partial_{q+1}$ — *q-границами.* В этом смысле $H_q(X)$ — циклы с точностью до границ.

Замечание. Из определения очевидно, что сингулярные гомологии зависят только от класса гомеоморфизма пространства X (их основной плюс и состоит в том, что тут это очевидно).

Теперь попробем посчитать по определению сингулярные гомологии для какого-нибудь пространства. Оказывается, что по определению сделать это возможно разве что для точки.

[10] формально, мы пока еще не знаем, что это комплекс.

[11] позже мы увидим, какая в этом геометрическая интуиция

Теорема 31 (Сингулярные гомологии точки).

$$H_q^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0,\ H_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \widetilde{H}_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Итак, как мы помним, $C_q(*)$ — все линейные комбинации отображений $f\colon T^q \to *$. Так как отображений из T^n в точку всего одно, $\forall n\ C_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, а значит, наш комплекс сингулярных цепей $(C_\bullet(*, \mathbb{Z}), \partial)$ будет иметь вид:

$$\ldots \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}.$$

Теперь посчитаем дифференциалы комплекса.

Возьмем $f \in C_1$, это какая-то формальная линейная комбинация отображений из $[a, b] \to \{*\}$ Тогда ∂f — это $f|_a - f|_b = 0$. Впрочем, и сразу ясно, что в случае любого n, так как наше отображение действует в точку (оно постоянно), сужения на все грани будут совпадать и результат в сумме будет зависеть лишь от четности n, то есть дифференциалы комплекса будут иметь вид:

$$\ldots \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \ldots \xrightarrow{\cdot 1 = \mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Иными словами, $\partial_n = 0$, если n — нечетное и тождественно иначе. Теперь, как нетрудно заметить,

$$\forall q > 0 \quad \operatorname{Ker} \partial_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1} \Rightarrow H_q^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0,\ H_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \widetilde{H}_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Трудности, возникшие при подсчетах, намекают на то, что для отрезка, например, это будет сделать еще гораздо труднее. С другой стороны, если вдруг окажется, что гомологии гомотопически инвариантны, то мы будем знать, какие гомологии у всех стягиваемых пространств (так как для точки мы посчитали).

В дальнейшем, будем использовать для сингулярных гомологий обозначение H_k.

3.3 Немного гомологической алгеры

Рассмотрим категорию цепных комплексов $\mathfrak{Ch}$ (в нашем случае абелевых групп, но в принципе, всё что тут будет сказано справедливо и в случае $R - \mathfrak{Mod}$). Морфизмом цепных комплексов $(C_\bullet, \partial)$ и $(D_\bullet, \delta)$ называется набор отображений $f = \{f_i\}$, где $f_i \in \operatorname{Hom}(C_i, D_i)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] \arrow[d] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \ldots \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r, "\delta_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\delta_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\delta_{q-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\forall i\ f_i \circ \partial_{i+1} = \delta_{i+1} \circ f_{i+1}$.

Лемма 33. Сопоставление цепному комплексу его k-й группы гомологий функториально, то есть отображение

$$(C_\bullet, \partial) \mapsto H_k(C_\bullet, \delta)$$

задаёт ковариантный функтор $\mathfrak{Ch} \to \mathfrak{Ab}$.

Доказательство. Всё, кроме того, что композиция переходит в композицию — совсем очевидно. Нам надо проверить, что отображение $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta)$ индуцирует отображение $H_k(C_\bullet) \to H_k(D_\bullet)$, и кроме того,

$$(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta) \xrightarrow{g} (E_\bullet, d) \Rightarrow H_k(f \circ g) = H_k(f) \circ H_k(g).$$

Заметим, что так как $f \in \operatorname{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$, $f_q(\operatorname{Ker} \partial_q) \subset \operatorname{Ker} \delta_q$. Действительно, если $\partial_q(x) = 0$, то $0 = f_{q-1}(\partial_q(x)) = \delta_q(f_q(x)) \Rightarrow f_q(x) \in \operatorname{Ker} \delta_q$. Аналогично $f_{q-1}(\operatorname{Im} \partial_q) \subset \operatorname{Im} \delta_q$. Действительно, если $x = \partial_q(y)$, то

$$f_{q-1}(x) = f_{q-1} \circ \delta_q(x) = \delta_q(f_q(y)) \in \operatorname{Im} \delta_q.$$

Тогда нужная нам стрелка получается просто из универсального свойства факторгруппы:

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[dr, "\rho"'] & \operatorname{Ker}\delta_q \arrow[r, "\pi"] & H_q(D_\bullet) \\
 & H_q(C_\bullet) \arrow[ur, dashed, "f_*"] &
\end{tikzcd}
$$

Действительно, чтоб она существовала, нам нужно, чтоб $\operatorname{Im}\partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker}(\pi \circ f_q)$. Возьмем $x \in \operatorname{Im}\partial_{q+1}$, тогда $f_q(x) \in \operatorname{Im}_{\delta_{q+1}} \Rightarrow f_q(x) \in \operatorname{Ker}\pi$, то есть $x \in \operatorname{Ker}(\pi \circ f_q)$.

Проверка того, что композиция переходит в композицию тривиальна. □

Замечание. Пусть $X, Y \in \mathfrak{Top}$, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм цепных комплексов $f\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$. Действительно, пусть $g \in C_k(X)$, тогда g — это непрерывное отображение $T_k \to X$ и тогда $f \circ g$ — непрерывное отображение $T_k \to Y$, то есть элемент $C_k(Y)$. Остается проверить, что полученное отоюражение будет коммутировать с дифференциалом.

$$
\partial g = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Gamma_i g.
$$

Тогда остается заметить, что взятие грани коммутирует с применением отображения:

$$
f(\partial g) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Gamma_i f(g) = \partial(fg).
$$

Значит, если у нас есть непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, то есть и индуцированный морфизм гомологий $f_*\colon H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$.

Предложение 23. *Если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то $f_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ — изоморфизм (для всех k).*

Доказательство. Действительно, если f — гомеоморфизм, то все индуцированные отображения между цепями — изоморфизмы, а значит и все индуцированные отображения в гомологиях будут изоморфизмами. □

Замечание. Это утверждение говорит нам о том, что сингулярные гомологии определены для топологических пространств без всякой дополнительной структуры.

Определение 36. Пусть X — топологическое пространство. Тогда, если группа $H_k(X)$ конечнопорождена, то

$$
H_k(X) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor}(H^k(X)).
$$

Тогда число n (то есть, ранг свободной части) называют k-м числом Бетти b_n. Иными словами, $b_k(X) = \operatorname{rank}(H_k(X))$.

3.4 Гомотопическая инвариантность гомологий

Определение 37. Пусть $(C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta) \in \mathfrak{Ch}$ — два цепных комплекса. Их морфизмы $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ch}}((C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta))$ называются *гомотопными* ($f \sim g$), если сущесвует диагональный морфизм $h\colon C_\bullet \to D_{\bullet+1}$ такой, что

$$
h_{q-1}\partial_q + \delta_{q+1}h_q = f_q - g_q.
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] \arrow[d] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[dl, "h_{q+1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{q+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dl, "h_q"'] \arrow[d, shift right, "g_q"'] \arrow[d, shift left, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[dl, "h_{q-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{q-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{q-1}"] & \cdots \arrow[dl, "h_{q+2}"'] \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\delta_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\delta_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Кратко это обычно записывают, как $h\partial + \delta h = f - g$.

Если в категории цепных комплексов $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ab})$ отождествить гомотопные морфизмы, получится *гомотопическая категория комплексов*, которую обычно обозначают $\mathfrak{K}(\mathfrak{AB})$ (или просто $\mathfrak{K}$).

Теорема 32. *Если морфизмы цепных комплексов гомотопны, то есть $f \sim g$, то индуцированные гомоморфизмы когомологий $f_* = g_*$. Тем самым, функторы гомологий H_k пропускаются через гомотопическую категорию.*

Доказательство. Если $x \in \operatorname{Ker} \partial_q$, то

$$f_q(x) - g_q(x) = \delta_{q+1} h_q(x) + \underbrace{h_{q-1}\partial_q(x)}_{=0} \in \operatorname{Im} \delta_{q+1},$$

а значит в $H_q(X)$ эти элементы равны. □

Замечание. Гомотопность морфизмов f и g можно определять, как $\delta h \pm h\partial = f - g$, так как при переходе к гомологиям второе слагаемое всё равно обнуляется.

Теорема 33. *Пусть $f, g\colon X \to Y$, $f \sim g$. Тогда $f_* = g_*$.*

Доказательство. У нас есть цепные комплексы сингулярных цепей $(C_\bullet(X), \partial)$ и $(C_\bullet(Y), \partial)$. Так как $f \sim g$, существует непрерывное отображение $H\colon X \times I \to Y$, а тогда $\forall p\colon T_q \to X$ определено непрерывное отобрежение $H(p(\_),\_)\colon T_q \times I \to Y$, причем $H(p, 0) = f(p)$ и $H(p, 1) = g(p)$. Положим

$$h(p) = \text{сумма симплексов в разбиении призмы } T_q \times I \in C_{q+1}(Y).$$

Взглянув на картинку теперь нетрудно заметить, что

$$f(p) - h(p) = \text{граница всей призмы} - \text{боковые стенки} = \partial h(p) - h\partial(p)$$

Таким образом, мы получили, что индуцированные морфизмы цепных комплексов гомотопны, а значит, по теореме 32, индуцированные гомоморфизмы в гомологиях совпадают. □

Упражнение. Разбить $T_q \times I$ на $q+1$-мерные симплексы формально. А именно, пусть $T_q \times \{0\} = a_0 \dots a_q$. Пусть вершины $T_q \times \{1\}$ — это $a_0', \dots, a_q'$. Тогда предлагается брать вершины $a_0 \dots a_k a_k' \dots a_q'$.

Следствие 8. *Пусть X — стягиваемое. Тогда $\widetilde{H}_\bullet(X, \mathbb{Z}) = 0$, или, иными словами, $\forall k > 0$ $H_k(X, \mathbb{Z}) = 0$, $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Упражнение. Придумайте пример нестягиваемого X с нулевыми приведёнными гомологиями.

Лемма 34. Если X — линейно связно, то $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Выберем в нашем пространстве некоторую фиксированную точку a, тогда

$$\left(\sum k_i f_i\right) = \left(\sum k_i\right) a \pmod{\operatorname{Im} \partial_1}, \text{ (то есть, в } H_0(X))$$

так как все f_i можно соединить путями (а это отображения $T^1 = [0, 1] \to X$) с a и значит $\operatorname{Im} \partial_1$ будет содержать все разности $f_i - a$. Значит, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. □

Следствие 9. *Пусть у топологического пространства X n компонент линейной связности. Тогда*

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Упражнение. Дркажите, что непрерывное отображение между линейно связными пространствами индуцирует изоморфизм нулевых гомологий.

3.5 Относительные гомологии и гомологически точная последовательность пары

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, тогда $\forall q\ C_q(A) \subset C_q(X)$ (вложение индуцирует мономорфизм цепей) и мы имеем морфизм цепных комплексов $(C_\bullet(X), \partial)$ и $(C_\bullet(A), \partial)$, то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] \arrow[d] & C_q(A) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "\mathrm{in}"] & C_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{in}"] & \dots \arrow[d] \\
\dots \arrow[r] & C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] & C_{q-1}(A) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Это так просто потому, что если у нас был симплекс $f\colon T^q \to A$, то его граница тоже целиком лежит в A, то есть $\partial f\colon T^{q-1} \to A \in C_{q-1}(A)$.

Глядя на это, возникает естественная идея дополнить до короткой точной последовательности

$$0 \to C_q(A) \to C_q(X) \to C_q(X)/C_q(A) \to 0$$

в каждом столбце.

Определение 38. Факторгруппу $C_q(X, A) \overset{\text{def}}{=} C_q(X)/C_q(A)$ называют *относительными цепями.*

Построим цепной комплекс для относительных цепей, для этого надо определить дифференциалы. Это делается стандартно, возьмем $x \in C_q(A)$, тогда $\partial_q(x) \in C_{q-1}(A)$, а значит композиция дифференциала и проекции пропустится через фактор:

$$\begin{tikzcd}
C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dr, "\pi_q"'] & C_{q-1}(X) \arrow[r, "\pi_{q-1}"] & C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A) \\
& C_q(X)/C_q(A) \arrow[ur, dashed, "\exists!\delta_q"] &
\end{tikzcd}$$

Проверим теперь, что $\delta^2 = 0$. Действительно, из коммутаивной диаграммы выше мы понимаем, что

$$\delta_q(\overline{x}) = \delta_q(\pi_q(x)) = \pi_{q-1}(\partial_q(x)) \Rightarrow \delta_{q-1}(\delta_q(\overline{x})) = \delta_{q-1}(\pi_{q-1}(\partial_q(x))) = \pi_{q-2}(\partial_{q-1}(\partial_q(x))) = 0.$$

Теперь мы построили цепной комплекс и можем определить относительные гомологии.

Определение 39. Пусть $X \subset A$, тогда относительными гомологиями мы будем называть гомологии комплекса относительных цепей, то есть

$$H_q(X, A) \overset{\text{def}}{=} \ker \delta_q / \operatorname{Im} \delta_{q+1}.$$

Теперь, попробуем получить для гомологий аппарат, идеологически похожий на теорему Зейферта-Ван-Кампена.

Итак, мы имеем *короткую точную последовательность комплексов*

$$0 \to C_\bullet(A) \to C_\bullet(X) \to C_\bullet(X, A) \to 0$$

В развёрнутом виде она представляет собой коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{q+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_{q+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_{q+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_q(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_{q-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \dots & \dots & \dots &
\end{tikzcd}
$$

в которой строки точны, а стлобцы — наши комплексы.

Теорема 34 (Точная последовательность пары)**.** *Существует* связывающий гомоморфизм $\varphi\colon H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$*, и соответственно, имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий:*

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \xrightarrow{\varphi} H_{q-1}(A) \to H_{q-1}(X) \to \ldots$$

Доказательство. На самом деле, это утверждение верно для любой точной последовательности комплексов. А именно, если последовательность цепных комплексов

$$0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$$

точна, то имеет место следующая длинная точность последовательность гомологий:

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(B) \to H_q(C) \to H_{q-1}(A) \to H_{q-1}(B) \to \ldots$$

Это можно без труда вывести из леммы о змее, проверив точность строк[12] □

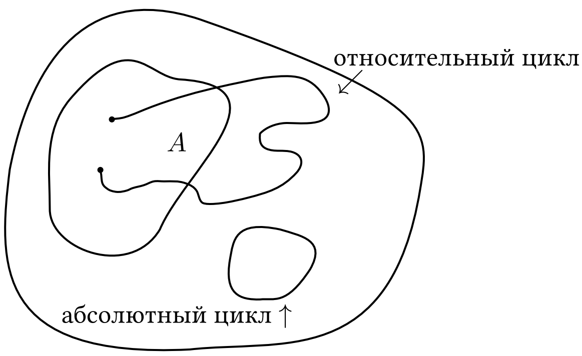
Упражнение. Докажите, что для $X \supset A \supset B$ имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий

$$\ldots \to H_q(A,B) \to H_q(X,B) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A,B) \to \ldots$$

Посмотрим, что всё это означает геометрически. Относительные циклы — это элементы

$$\mathrm{Ker}(C_q(X)/X_q(A) \to C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A)).$$

Мы взяли представителя в $C_q(X)$, взяли границу и после факторизации по $C_{q-1}(A)$ получили 0, а значит граница нашего цикла полностью лежит в $C_{q-1}(A)$, то есть картинка имеет вид:



С другой стороны, ясно, что $x \in C_q(X)/C_q(A)$ — относительная граница, если $x + a = \partial(\ldots)$.

[12] а так как это делается в абсолютно любом курсе гомологической алгебры, мне лень это сюда писать.

Замечание. У связывающего гомоморфизма $H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$ есть очень естественная интерпретация.

Элементы $H_q(X,A)$ — относительные циклы с точностью до относительных границ. Так как это оносительные q-мерные циклы, их граница лежит в A, а значит, при взятии границы, мы получим как раз элемент $H_{q-1}(A)$. То есть, связывающий гомоморфизм $H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$ — взятие границы.

Рассмотрим также еще несколько важных следствий длинной точной последовательности пары.

Следствие 10. *Для любого топологического пространства x и любой его точки $x_0 \in X$ мы имеем*

$$H_n(X, x_0) = \widetilde{H}_n(X)\ \forall n.$$

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность приведенных гомологий пары (X, x_0)

$$\ldots \to \widetilde{H}_q(x_0) \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(X, x_0) \to \widetilde{H}_{q-1}(x_0) \to \ldots$$

Действительно, так как $\widetilde{H}_n(x_0) = 0\ \forall n$, мы на самом деле имеем

$$\ldots \to 0 \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(X, x_0) \to 0 \to \ldots,$$

и из точности следует $\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_q(X, x_0) = H_q(X, x_0)$. □

Следствие 11. *Группы $H_q(X,A)$ измеряют различие между $H_q(X)$ и $H_q(A)$, а именно,*

$$H_q(X,A) = 0 \quad \forall q \Rightarrow H_q(A) = H_q(X) \quad \forall q.$$

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность пары (X, A) :

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A) \to \ldots$$

В нашем случае она имеет вид:

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A) \to \ldots$$

и из точности следует, что $H_q(A) \cong H_q(X)$. □

Упражнение. Убедитесь, что верно и обратное утверждение.

3.6 Пары Боруска

Определение 40. Пусть X – топологическое пространство, а $A \subset X$ с индуцированной топологией. Тогда говорят, что (X, A) – *пара Борсука* (или, *корасслоение*)[13], если $\forall f\colon X \to Y$, $\forall F\colon A \times I \to Y$ такой, что $F|_{A\times 0} = f|_A$ существует $G\colon X \times I \to Y$, причем такое, что $G|_{X\times 0} = f,\ G|_{A\times I} = F$.

Определение 41. Пара (X, A) называется *клеточной парой*, если X — клеточное пространство, A — клеточное подпространство X.

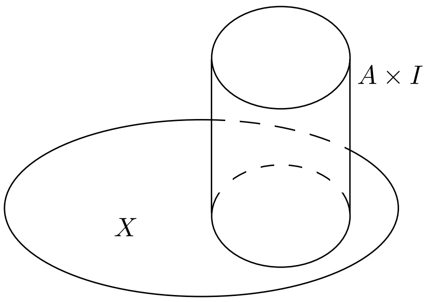
Замечание. Так как очевидно, что $(D^n, \partial D^n)$ — пара Борсука, клеточная пара является парой Борсука.

Нам от пар Борсука понадобится несколько базовых утверждений.

Теорема 35 (Характеризация пар Борсука). *Если (X, A) — пара Борсука, то деформационная ретракция $X \times I$ на $X \cup (A \times I)$. Кроме того, если A — замкнуто, то верно и обратное.*

Доказательство. На картинке это выглядит следующим образом:

[13] Еще говорят «обладает свойством продолжения гомотопии», но это совсем уж длинно.



Положим $Y = X \cup (A \times I)$, $f\colon X \to Y$ — вложение. Рассмотрим теперь гомотопию $F_t(A) = A \times t$. Так как (X, A) — пара Борсука, существует $G\colon X \times I \to Y : G|_{A\times I} = F$.

Докажем теперь в другую сторону: пусть для $f\colon X \to Y$ есть гомотопия $F_t\colon A \to Y$, то есть отображение $F\colon X \cup (A \times I) \to Y$. Тогда искомое продолжение гомотопии — композиция F и деформационной ретракции $X \times I \to X \cup (A \times I)$[14]. □

Следствие 12. *Пара $(D^n, \mathrm{Int}(D^n))$ — не пара Борсука.*

Вообще говоря, эта теорема показывает, что было бы хорошо, чтоб A было замкнутым.

Замечание. В нехаусдорфовом случае бывает, что и с незамкнутым A пара (X, A) будет парой Борсука.

Упражнение. Если (X, A) — пара Борсука и X — Хаусдорфово, то A замкнуто.

Предложение 24. *Пусть (X, A) — пара Борсука. Тогда*

$$X \cup CA \sim (X \cup CA)/CA = X/A.$$

Доказательство. Рассмотрим вложение $X \to X \cup CA$. Прогомотопируем A в вершину конуса a. Так как (X, A) — пара Борсука, эта гомотопия продолжается до гомотопии на X. Тогда финальный элемент гомотопии отображает $X \to X \cup CA$ так, что $A \mapsto a$, значит, это отображение пропускается через фактор X/A. С другой стороны ясно, как устроено обратное отображение $X \cup CA \to X/A$ (стягиваем конус в точку). Нетрудно заметить, что два построенных отображения задают гомотопическую эквивалентность. □

Следствие 13. *Если (X, A) — пара Боруска и A — стягиваемо, то $X \sim X/A$.*

Предложение 25. *Пара (CX, X) — всегда пара Борсука.*

3.7 Относительные гомологии как абсолютные (факторизация)

Итак, в этом параграфе нас будет интересовать следующее (весьма полезное в вычислениях утверждение):

Теорема 36. *В общем случае отображение $X \to X \cup CA$ индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X, A) \to H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \widetilde{H}_q(X \cup CA),$$

где a — вершина конуса.

Если (X, A) — пара Борсука, то отображение проекции $p\colon X \to X/A,\ A \mapsto a$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \widetilde{H}_q(X/A).$$

Вообще говоря, условие на A во второй части теоремы часто опускают и говорят, что это верно для «хороших пар». Мы доказываем для пар Борсука, можно доказывать для случая, когда A — *окрестностный деформационынй ретракт.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько важных (в общем контексте) лемм.

Сначала посмотрим на геометрическую конструкцию **барицентрического подразбиения**, чтоб иметь геометрическую интуицию в контексте сингулярных симплексов.

Рассмотрим симплекс $[v_0, \ldots, v_n]$. его точки — линейные комбинации вида

$$\sum_{i=0}^{n} t_i v_i, \quad \text{где} \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0.$$

[14]вот тут мы пользуемся замкнутостью A, так как нам нужно, чтоб покрытие было фундаментальным.

Определение 42. *Барицентр (центр тяжести)* симплекса — это точка $b \in [v_0, \ldots, v_n]$, у которой все барицентрические аоординаты t_i равны, а именно, $t_i = \frac{1}{n+1}\ \forall i$.

Барицентрическое подразбиение (подразделение) симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ — это разбиение симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ на n-мерные симплексы $[b, w_0, \ldots, wn-1]$, где по индукции $[w_0, \ldots, w_{n-1}]$ — $(n-1)$-мерный симплекс барицентрического подразбиения грани $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$.

- Индукция начинается с $n = 0$, когда барицентрическое подразбиение точки $[v_0]$ определяется просто, как сама точка $[v_0]$.
- В случае $n = 1$ отрезок $[v_0 v_1]$ бьется на два отрезка $[v_0 b]$, $[b v_1]$, где b — середина отрезка $[v_0, v_1]$.
- В случае $n = 2$ треугольник $[v_0 v_1 v_2]$ бьется на 6 труегольников, образуемых его вершинами и точкой пересечения медиан b.

Из такого индуктивного определения следует, что вершины симплексов в барицентрическом подразбиении симплекса $[v_0 \ldots v_n]$ — в точности барицентры всех k-мерных граней $[v_{i_0} \ldots v_{i_k}]$ симплекса $[v_0 \ldots v_n]$ для $0 \le k \le n$.

При $k = 0$ это даёт нам просто набор вершин v_i. Барицентр симплекса $[v_{i_0} \ldots v_{i_k}]$ имеет барицентрические координаты $t_i = \frac{1}{k+1}$ при $i = i_0, \ldots, i_k$ и $t_i = 0$ во всех остальных случаях.

Замечание. Далее нам это не потребуется, но симплексы барицентрического подразбиения задают на симплексе T структуру симплициального комплекса.

Лемма 35 (О барицентрическом подразбиении)**.** Пусть $f\colon T^q \to X$ — сингулярный симплекс. Тогда его барицентрическое поразбиение — это

$$\beta\colon C_q(X) \to C_q(X), \quad \beta f = \sum_{\tau \in S_{q+1}} \operatorname{sign}(\tau) f_\tau,$$

где f_τ определяется следующим образом: исходный симплекс T^q мы можем барицентрически подразбить на симплексы $T'_q = \{x \mid x_{\tau(0)} \le x_{\tau(1)} \le \ldots \le x_{\tau(q)}\}$, в которых вершины нумеруются согласно размерностям граней. Тогда мы полагаем $f_\tau \overset{\text{def}}{=} f|_{T'_q}$.

Тогда $\partial\beta = \beta\partial$ и $\beta_*([\alpha]) = [\alpha]\ \forall[\alpha] \in H_q(X)$. Иными словами, барицентрическое подразбиение не влияет на гомологический класс.

Доказательство. Для первого утверждения достаточно проверить, что в сумме все внутренние грани встречаются с противоположным знаком, это ясно из картинки. Первое утверждение даёт нам, что $\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ch}}(C_\bullet, C_\bullet)$.

Для доказательства второго утверждения мы построим цепную гомотопию $D\colon C_q(X) \to C_{q+1}(X)$ между β и постоянным отображением.

Пусть $f\colon T^q \to X$, тогда $D(f)$ определяется следующим образом: барицентрически разобьем призму $I \times T^q$ на симплексы и рассмотрим проекцию

$$p\colon I \times T^q \to T^q.$$

Тогда $D(f)$ — это $(q+1)$-мерный сингулярный симплекс, являющийся суммой композиций f и проекции p, суженной на симплексы в разбиении $I \times T^q$.

можно нарисовать картинку для отрезка, в принципе.

Из того, как устроена нумерация в барицентрическом разбиении призмы, нетрудно видеть, что D — гомотопия между β и id, то есть

$$f - \beta(f) = D\partial(f) + \partial D(f).$$

Чтоб понять всё это, надо опять позалипать на эту картиночку с призмой, как в теореме 33.[15] □

[15] Возможно, всё это место стоит строго формально переписать из Хачтера.

Следующая лемма говорит нам, что для вычисления сингулярных гомологий достаточно рассматривать лишь *маленькие* сингулярные симплексы. В случае симплициальных гомологий это можно было бы формулировать в терминах диаметров, а в случае сингулярных мы будем говорить об этом в терминах покрытий.

Лемма 36 (Об измельчении)**.** Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие X. Пусть $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ порождено сингулярными симплексами $f \in C_q(X)$ такими, что $\exists \alpha \colon f(T_q) \subset U_\alpha$.

Тогда вложение $i \colon C_q^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} C_q(X)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_\bullet(X) \cong H_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$.

Доказательство. Заметим, что для достаточно большого n по лемме Лебега $c \in C_q(X) \Rightarrow \beta^n(c) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$. Кроме того, по лемме 35 c и $\beta^n(c)$ гомологичны (то есть, представляют один м тот же класс гомологий). Это даёт нам, что любой гомологический класс мз $H_q(C_\bullet)$ имеет представителя в $C_q^{\mathcal{U}}(X)$, то есть, что отображение $H_q^{\mathcal{U}}(X) \to H_q(X)$ сюръективно.

Кроме того, также по лемме 35, если c — цикл из $C_q^{\mathcal{U}}$, то $c - \beta^n(c)$ — граница цепи из C_{q+1}^U, так как

$$c - \beta^n(c) = \underbrace{D\partial c}_{=0,\ \text{так как } c \text{ — цикл}} - \partial Dc = \partial(-Dc) \in B_q\big(C_q^{\mathcal{U}}(X)\big).$$

С другой стороны, так как c и $\beta^n(c)$ гомологичны, их разность — граница (элемент $B_q(C_q(X))$). Таким образом, если цепь из $C_q^{\mathcal{U}}$ лежит в $B_q(C_q(X))$, то она лежит и в $B_q\big(C_q^{\mathcal{U}}(X)\big)$. Это даёт нам инъективность отображения $H_q^{\mathcal{U}}(X) \to H_q(X)$. □

Замечание. Заметим, что построенные в доказательстве отображения переводят цепи в A в цепи в A, а значит, выдерживают факторизацию по A. Этот факт даёт нам версию леммы об измельчении для относительных гомологий, которым мы и будем пользоваться.

Обзаведемся еще одним полезным фактом: Посмотрим на такой факт из гомологической алгебры:

Лемма 37 (5-лемма)**.** Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & B \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & D \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & E \arrow[d, "f_5"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

в которой строки точны, f_2, f_4 — изоморфизмы, f_1 — эпиморфизм, f_5 — мономорфизм. Тогда f_3 — изоморфизм.

Доказательство. Есть в любом курсе гомологической алгебры. □

Из неё немедленно следует следующий простой факт:

Лемма 38. Если пара (X, A) гомотопически эквивалентна паре (Y, B), то $H_\bullet(X, A) = H_\bullet(Y, B)$.

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность для обоих пар:

$$\begin{tikzcd}
H_k(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{k-1}(X) \arrow[d, equal] \\
H_k(B) \arrow[r] & H_k(Y) \arrow[r] & H_k(Y, B) \arrow[r] & H_{k-1}(B) \arrow[r] & H_{k-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

Тогда всё следует из 5-леммы 37 □

Наконец, мы можем доказать интересующую нас теорему:

Теорема 37. *В общем случае отображение $X \to X \cup CA$ индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X, A) \to H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \widetilde{H}_q(X \cup CA),$$

где a — вершина конуса.

Если (X, A) — пара Борсука, то отображение проекции $p\colon X \to X/A,\ A \mapsto a$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \widetilde{H}_q(X/A).$$

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $X \cup CA$ вида:

$$X \cup CA \subset ((X \cup CA) \setminus X) \cup (X \cup \overline{C}A), \quad \mathcal{U} \overset{\text{def}}{=} \{(X \cup CA) \setminus X, (X \cup \overline{C}A)\}$$

где $\overline{C}A$ — нижняя открытая половина конуса CA.

По лемме 36 об измельчении мы вместо $H_q(X \cup CA, CA)$ можем рассматривать $H_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA)$.

А теперь, заметим, что по тому, как мы взяли покрытие,

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA) = C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA) = C_q\big(X \cup \overline{C}A\big)/C_q\big(\overline{C}A\big) = C_q\big(X \cup \overline{C}A, \overline{C}A\big).$$

А значит, из гомотопической эквивалентности и леммы 38 мы имеем

$$H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup \overline{C}A, \overline{C}A) = H_q(X, A).$$

Вторая часть первого равенства из условия теоремы следует из следствия 10.

Пусть теперь (X, A) — пара Борсука. Тогда по утверждению 24 $X \cup CA \sim X/A$, а значит, $H_q(X, A) \cong \widetilde{H}_q(X/A)$. □

3.8 Вырезание

Рассмотрим тройку $B \subset A \subset X$. Тогда вложение индуцирует отображение

$$H_k(X - B, A - B) \to H_k(X, A).$$

Вообще говоря, вырезание даёт хорошую технику вычисления относительных гомологий:

Теорема 38 (О вырезании)**.** *Пусть даны пространства $Z \subset A \subset X$, причем $\mathrm{Cl}(Z) \subset \mathrm{Int}(A)$. Тогда вложение $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(X - Z, A - Z) \cong H_n(X, A)$$

для всех n. Или, что эквивалентно: для подпространств $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X, включение $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A) \quad \forall n.$$

Доказательство. Докажем сначала эквивалентность формулировок. Положим $B = X - Z,\ Z = X - B$. Тогда $A \cap B = A - Z$, а условие $\mathrm{Cl}(Z) \subset \mathrm{Int}(A)$ эквивалентно тому, что $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$, так как $X - \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Cl}(Z)$. Теперь докажем вторую формулировку.

Пусть $X = A \cup B$, обозначим соотвествующее покрытие $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Для краткости будем обозначать группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, как $C_n(A + B)$[16].

Тогда, как мы помним из леммы об измельчении 36 включение

$$C_n(A + B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A)$.

Теперь рассмотрим включение

$$C_n(B)/C_n(A \cap B) \hookrightarrow C_n(A + B, A).$$

Оно очевидно индуцирует изоморфизм гомологий, так как обе факторгруппы свободные, а их базис — n-мерные сингулярные симплексы в B, не лежащие в A. Значит, мы получили требуемый изоморфизм

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A).$$

□

[16]что на самом деле логично, так как цепи оттуда состоят из суммы цепей из A и цепей из B

3.9 Точная последовательность Майера-Вьеториса

Кроме длинной точной последовательности пары (теорема 34) для вычисления гомологий пары (X, A) есть и другая мощная техника для вычисления гомологий пространства X, тоже представляющая собой длинную точную последовательность.

Теорема 39 (Точная последовательность Майера-Вьеториса, простая версия). *Пусть $X = A \cup B$, где A, B — открытые и $A \cap B = C \neq \varnothing$. Тогда имеет место следующая точная последовательность:*

$$\ldots H_q(A \cap B) \to H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X) \to H_{q-1}(A \cap B) \to H_{q-1}(A) \oplus H_{q-1}(B) \to \ldots$$

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \to C_\bullet(A \cap B) \xrightarrow[\varphi]{c \to (c,-c)} C_\bullet(A) \oplus C_\bullet(B) \xrightarrow[\psi]{(a,b) \to a+b} C_\bullet(A + B) \to 0$$

Во-первых, заметим, что $\operatorname{Ker} \varphi = 0$, так как цепь в $A \cap B$, которая является нулевой в A (или в B) должна быть нулевой цепью. Во-вторых, очевидно, что $\psi\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Ker} \psi$. Заметим, что для $(x, y) \in C_n(A) \oplus C_n(B)$ имеем $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$, а значит $x \in C_n(A \cap B)$ и $(x, y) \in \operatorname{Im} \varphi$. Это означает, что $\operatorname{Ker} \psi \subset \operatorname{Im} \varphi$. Точность в последнем члене следует просто из определения $C_n(A + B)$.

Тогда эта короткая точная последовательность комплексов даёт нам точную последовательность гомологий. Остается лишь заметить, что также, как и в теореме о вырезании, $H_\bullet(A + B) = H_\bullet(A \cup B)$. □

Замечание. Эта не самая хорошая версия точной последовательности Майера-Вьеториса, так как условие на открытое покрытие серьезно мешает.

3.10 Гомологии сфер

Теорема 40. *Для $n \neq 0$ гомологии сферы устроены следующим образом:*

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \text{ или } i = n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Или, иными словами,

$$\widetilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим пару $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, тогда $X/A \cong S^n$. Запишем для этой пары точную послеоватнллность приведенных гомологий:

$$\ldots \to \widetilde{H}_q(D^n) \to \widetilde{H}_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \to \widetilde{H}_{q-1}\big(S^{n-1}\big) \to \widetilde{H}_{q-1}(D^n) \to \ldots$$

Так как D^n стягиваем, $\widetilde{H}_q(D^n) = 0$, а значит, $H_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \cong H_{q-1}(S^n)$. С другой строны, так как $(D^n, \partial D^n) = (D^n, S^{n-1})$ — пара Борсука, по теореме о факторизации 37

$$H_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \cong \widetilde{H}_q\big(D^n/S^{n-1}\big) \cong \widetilde{H}_q(S^n).$$

Остается замеить, что мы знаем, что утверждение верно для S^0. Таким образом, мы доказали утверждение по индукции. □

Следствие 14. *Сферы разных размерностей негомеоморфны.*

3.11 Гомологии букета и надстройки

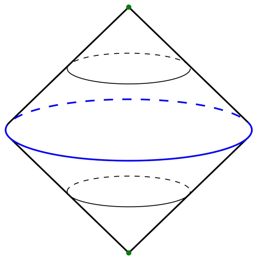
Из стягиваемости конуса сразу следует, что $H_q(CX, X) \cong \widetilde{H}_q(X)$ (достаточно написать точную последовательность для приведенных гомологий).

Определение 43. Пусть X — топологическое пространство. Тогда *надстройкой* над X называется пространство ΣX, определённое, как

$$\Sigma X \cong X \times I/\sim, \text{ где } (x,0) \sim (y,0)\ \forall x, y \in X \text{ и } (x,1) \sim (y,1)\ \forall x, y \in X.$$

Иными словами, мы взяли $X \times I$ и стянули $X \times 1$ и $X \times 0$ в точку.

Пример 20. Надстройка над окружностью выглядит следующим образом:



Так как надстройка получается факторизацией конуса по нижнему основанию, из теоремы о факторизации 37 следует, что $H_{q+1}(CX, X) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$. Таким образом, мы получили такое утверждение:

Теорема 41 (Гомологии надстройки)**.** *Справедливо следующее равенство групп гомологий:*

$$\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$$

Замечание. Так как $\Sigma S^n = S^{n+1}$, мы таким образом получили другое доказательство теоремы 40.

Теорема 42 (Гомологии букета)**.** *Для букета пространств $\bigvee_\alpha X_\alpha$ включения $i_\alpha \colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ индуцируют изоморфизм гомологий*

$$\bigoplus_\alpha \widetilde{H}_q \cong \widetilde{H}_q\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right).$$

при условии, что если в букете отождествляются точки $\{x_\alpha\}$, то пары (X_α, x_α) — пары Борсука.

Доказательство. Достаточно рассмотреть пару

$$(X, A) = \left(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha x_\alpha\right),$$

тогда по тривиальным причинам

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(X_\alpha)$$

и по теореме о факторизации

$$H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right).$$

□

3.12 Гомологии с коэффициентами

У рассматриваемой нами до сих пор теории гомологий есть простое обобщение, котрое иногда даёт техническое преимущество.

Обобщение состоит в рассмотрении цепей $\sum n_i f_i$, где f_i — сингулярные симплексы, а коэффициенты n_i берутся в фиксированной абелевой группе G. Такие n-мерные цепи образуют абелеву группу $C_n(X;G)$ и у неё также есть относительная версия $C_n(X,A;G) \stackrel{\text{def}}{=} C_n(X;G)/C_n(A;G)$.

Дифференциал δ строится также, как и раньше:

$$\partial\left(\sum_i n_i f_i\right) = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \Gamma_j f_i.$$

Соотвественно, группы $C_n(X;G)$ и $C_n(X,A;G)$ образуют цепные комплексы и их гомологии обозначают $H_n(X;G)$ и $H_n(X,A;G)$ и называют *гомологиями с коэффициентами в группе* G.

Приведённые группы гомологий $\widetilde{H}(X;G)$ определяются аналогично, аугументация задаётся, как

$$\ldots \to C_0(X;G) \xrightarrow{\varepsilon} G \to 0, \quad \varepsilon\left(\sum_i n_i f_i\right) = \sum_i n_i.$$

Замечание. Часто полезно рассматривать гоиологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, так как нужно считать суммы сингулярных симплексов с коэффициентами 0 и 1, поэтому, отбрасывая члены с коэффициентами 0, можно представлять себе цепи, как конечные «объединения» сингулярных симплексов.

Кроме того, можно больше не заботиться о знаках в формуле для границы, а так как знаки являются алгебраическим выражением ориентации, мы можем игнорировать и ориентации. Это означает, что гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — наиболее естественный инструмент для вычислений в неориентируемом случае.

Отметим, что вся доказанная выше теория переносится на гомологии с коэффициентами в G без проблем и различия между $H_n(X;G)$ и $H_n(X)$ появляются только, когда начинаются вычисления.

Пример 21. Если $X = *$ — точка, то нетрудно заметить, что

$$H_n(*;G) \cong \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Аналогично и в случае сфер S^k мы имеем

$$\widetilde{H}_n(S^k;G) \cong \begin{cases} G, & n = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

3.13 Приложения теории гомологий

Теорема 43 (Борсук). *Не существует ретракции диска на граничную сферу.*

Доказательство. Предположим, что ретракция $f\colon D^n \to S^{n-1}\colon f$ — непрерывное и $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ существет. Рассмотрим отображение $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$, тогда в гомологиях у нас есть отображение

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D^n) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

или, подставляя известные нам результаты:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}.$$

Так как $f \circ i = \mathrm{id}$, $f_* \circ i_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ и мы приходим к противоречию. □

Теорема 44 (Брауэр, о неподвижной точке)**.** *Пусть $f\colon D^n \to D^n$ — непрерывное отображение. Тогда у него существует неподвижная точка.*

Доказательство. Предположим противное, пусть существует непрерывное $f\colon D^n \to D^n$, не имеющее неподвижных точек. Рассмотрим отображение g, которое переводит $x \in D^n$ в точку пересечения $[f(x), x)$ и ∂D^n. То есть, $g\colon D^n \to \partial D^n$ и $g|_{\partial D^n} = \mathrm{id}$. Тогда g — ретракция D^n на граничную сферу, а этого не бывает по теореме 43. □

Теорема 45 (Брауэр, инвариантность размерности)**.** *Если непустые открытые $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ открытые и они гомеоморфны, то $m = n$.*

Доказательство. Пусть h — гомеоморфизм $U \to V$, тогда

$$H_k(U, U - x) \cong H_k(V, V - h(x)).$$

По теореме о вырезании 38 для $(X, A) = (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$ и $Z = \mathbb{R}^m - U$:

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(U, U - x).$$

Тогда мы имеем, что

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - h(x)).$$

Из точной последовательности пары для $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$ мы имеем:

$$\ldots \to H_k(\mathbb{R}^m) \to H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m) \to \ldots$$

$$\ldots 0 \to H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \to 0 \to \ldots,$$

а значит, $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(S^{m-1})$, так как $\mathbb{R}^m - x$ деформационно ретрагируется на S^{m-1}. Значит, мы получили

$$H_{k-1}(S^{m-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1}),$$

откуда ясно, что $m = n$. □

3.14 Симплициальные комплексы

Этот парагарф надо написать из Хатчера.

3.15 Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий

Образующая $H_n(S^n)$:

В этом параграфе будем обозначать n-мерный симплекс, как Δ^n. Заметим, что так как $\Delta^n/\partial\Delta^n \cong S^n$, по теореме о факторизации 37 мы имеем изоморфизм

$$H_n(S^n) \cong H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n).$$

Покажем, что образующая $H^n(S^n)$ — это отображение $\Delta^n \xrightarrow{\mathrm{id}} \Delta^n$. Нетрудно заметить, что $\mathrm{Im}(\partial f) \subset \partial\Delta^n$, что дает нам, что id вообще представляет какой-то гомологический класс в $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Рассмотрим тройку $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$, где Λ — это $\partial\Delta^n$ без одной из граней (например, запоолненный треугольник, граница треугольника и граница треугольника без стороны). Напишем точную последовательность тройки:

$$\ldots \to H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \to H_n(\Delta^n, \Lambda) \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \to H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \to \ldots$$

Заметим, что так как Δ^n деформационно ретрагируется на Λ, $H_n(\Delta^n, \Lambda) \cong H_n(\Lambda, \Lambda) = 0$ и то же самое справедливо для $(n-1)$-х гомологий. То есть, наша последовательность на самом деле имеет вид

$$\ldots \to 0 \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \to 0 \to \ldots$$

Теперь заметим, что если грань, которую мы выкинули, мы обозначим за Δ', то $H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$.

Это ценно, так как далее мы можем рассуждать по индукции, ведь если образующая $H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$ — вложение выкинутой нижней грани Δ', то её прообраз в $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ —- нужное нам тождественное отображение (мы тут пользуемся тем, что мы знаем, что связывающий гомоморфизм в длинной точной последовательности пары/тройки – это просто взятие границы). А для S^0 это утверждение очевидно.

Обозначим симплиаицльные гомологии пространства X за $H_k^\Delta(X)$.

Теорема 46. *Пусть X — конечный симплициальный комплекс. Тогда*

$$H_k^{\text{sing}}(X) \cong H_k^\Delta(X).$$

Доказательство. Пусть X^k — объединение всех симплексов в симплициальном комплексе до размерности k (обозначение аналогично обозначению для CW-комплексов). Напишем точную последовательность пары:

$$\ldots \to H_{n+1}^\Delta\left(X^k, X^{k-1}\right) \to H_n^\Delta\left(X^k\right) \to H_n^\Delta\left(X^k\right) \to H_n^\Delta\left(X^k, X^{k-1}\right) \to \ldots$$

и заметим, что $H_{n+1}^\Delta\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong H_{n+1}\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong H_{n+1}\big(\bigvee S^k\big)$. Действительно, ясно, что

$$H_{n+1}\left(X^k, X^{k-1}\right) \cong H_{n+1}\left(\bigvee_\alpha S^k\right),$$

где α пробегает k-мерные симплексы в X. Далее,

$$H_{n+1}\left(\bigvee_\alpha S^k\right) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } n+1 \neq k \\ \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}, & n+1 = k \end{cases}$$

С другой стороны, из определения симплициальных гомологий ясно, что при $n+1 \neq k$ мы имеем $H_{n+1}^\Delta\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong 0$, а при $n+1 = k$ эта группа — свободная абелева группа, порожденная всеми k-мерными симплексами в X, то есть, как и в предыдущем случае

$$H_k^\Delta\left(X^k, X^{k-1}\right) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}.$$

Остается заметить, что по доказанному в начале параграфа, мы знаем, что у $H_k\big(\bigvee_\alpha S^k\big)$ такой же набор порождающих.

Теперь будем вести индукцию по размерности симплициального комплекса. По индукционному предположению мы имеем $H_n^\Delta(X^{k-1}) \cong H_n(X^{k-1})$ и тогда мы получаем диаграмму из 5-леммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}^\Delta\left(X^k, X^{k-1}\right) & \longrightarrow & H_n^\Delta\left(X^{k-1}\right) & \longrightarrow & H_n^\Delta\left(X^k\right) & \longrightarrow & H_n\left(X^k, X^{k-1}\right) \\
\Vert & & \Vert & & \downarrow & & \Vert \\
H_{n+1}\left(X^k, X^{k-1}\right) & \longrightarrow & H_n\left(X^{k-1}\right) & \longrightarrow & H_n\left(X^k\right) & \longrightarrow & H_n\left(X^k, X^{k-1}\right)
\end{array}$$

□

3.16 Степень отображения

Определение 44. Пусть $f\colon S^n \to S^n$ — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм в гомологиях:

$$f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n).$$

Так как f_* — гомоморфизм бесконечной циклической группы в себя, он должен иметь вид

$$f_*(\alpha) = d \cdot \alpha$$

для некоторого фиксированного $d \in \mathbb{Z}$, зависящего только от f. Это число называют *степенью отображения* f и обозначают $\deg f$.

Базовые свойства степени.

1. $\deg \mathrm{id}_{S^n} = 1$.
2. Если f — не сюръекция, то $\deg f = 0$, так как мы можем выбрать $x \in S^n \setminus f(S^n)$ и представить f в виде композиции
$$S^n \to S^n \setminus \{x\} \hookrightarrow S^n,$$
а пространство $S^n \setminus \{x\}$ — стягиваемо, значит $H_n(S^n \setminus \{x\}) = 0$, а значит и $f_* = 0$.
3. Если $f \sim g$, то $\deg f = \deg g$.
4. $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$.
5. Если f — гомотопическая эквивалентность, то существует g такое, что $f \circ g \sim \mathrm{id} \Rightarrow \deg f \deg g = 1 \Rightarrow \deg f = \pm 1$.
6. Рассмотрим f, которое тождественно действует на первых n координатах и отправляет x_{n+1} в $-x_{n+1}$. Тогда $\deg f = -1$. Действительно, мы модем реализовать сферу, как склейку двух симплексов Δ_1^n и Δ_2^n по границе. Тогда n-мерная цепь $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ являются образующей n-мерных гомологий, а отображение f переставляет местами Δ_1^n и Δ_2^n, то есть действует на образующую умножением на -1.
7. Степень антиподального отображения: $\deg(x \mapsto -x) = (-1)^{n+1}$
8. Если $f\colon S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, то $f \sim (x \mapsto -x)$ и соответственно $\deg f = (-1)^{n+1}$. Действительно, если $f(x) \neq x$, то отрезок с концами $f(x)$ и $-x$, который задаётся, как
$$t \mapsto (1-t)f(x) - tx,\ 0 \le t \le 1,$$
не проходит через начало координат и формула
$$H(t,x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$
определяет гомотопию $f(x)$ в постоянное отображение.

Теорема 47 (О причёсывании ежа). *S^n допускает непрерывное ненулевое (касательное) векторное поле тогда и только тогда, когда n — нечетно.*

Доказательство. Предположим, что $x \mapsto V(x)$ — непрерывное поле касательных векторов к сфере. Тогда, если рассматривать вектор $V(x)$, как вектор в начале координат, а не в точке касания, то условие касания означает просто, что $x \perp V(x)$. Если $V(x) \neq 0$, то мы можем нормализовать веторное поле так, что $\|V(X)\| = 1\ \forall x$, тогда векторы
$$(\cos t)x + (\sin t)V(x)$$
лежат на единичной окружности в $\mathrm{span}(x, V(x))$. Соотвественно, при $t \in [0, \pi]$ мы получаем гомотопию тождественного отображения id_{S^n} в антиподальное отображение:
$$H(t,x) = (\cos t)x + (\sin t)V(x).$$
Отсюда следует, что $(-1)^{n+1} = 1$, а значит, n должно быть нечетно. С другой стороны, когда $n = 2k-1$, мы можем положить
$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, 2k) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k+1})$$
и это даст нам искомое векторное поле. $\square$

Опишем теперь метод вычисления, который чаще всего применим на практике. Пусть $f\colon S^n \to S^n$ и существует $y \in S^n$ такое, что $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $U_1, \ldots, U_k$ — непересекающиеся окрестности этих точек, которые f переводит в окрестность V точки y. Тогда $f(U_i \setminus x_i) \subset V \setminus y$ и мы имеем коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
& H_n\left(U_i, U_i \setminus \{x_i\}\right) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "k_i"] \arrow[dl, equal] & H_n(V, V \setminus \{y\}) \arrow[d, equal] \\
H_n\left(S^n, S^n \setminus \{x_i\}\right) & H_n\left(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)\right) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n\left(S^n, S^n \setminus \{y\}\right) \\
& H_n\left(S^n\right) \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f_*"] \arrow[ul, equal] & H_n\left(S^n\right) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
$$

Все отображения на ней индуцируются включениями. Два ихоморфизма в верхней части диаграммы получаются из теоремы о вырезании 38, а два в нижней — из точной последовательности пары 34.

Посредством этих четырех гомоморфизмов две верхние группы можно отождествить с $\mathbb{Z}$, тогда верхний гомоморфизм f_* становится умножением на число и это число мы будем называть *локальной степенью* отображения f и обозначать $\deg f|_{x_i}$.

Теорема 48 (Локальность степени). *Пусть $f\colon S^n \to S^n$ и $y \in S^n$ таково, что $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда*

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

Доказательство. По теореме о выразении 38, группа $H_n\left(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)\right)$ — прямая сумма групп $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$, причем k_i — отображение включения i-го слагаемого, а p_i — проекция на i-е слагаемое. Из коммутативности нижнего треугольника мы получаем, что

$$p_i \circ j(1) = 1,$$

а значит, $j(1) = (1, \ldots, 1) = \sum_i k_i(1)$. Коммутативность верхнего квадрата говорит, что f_* отображает $k_i(1)$ в $\deg f|_{x_i}$, а коммутативность нижнего квадрата уже дает нам формулу

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

$\square$

3.17 Клеточные гомологии

Лемма 39. Пусть X — конечный CW-комплекс. Тогда:

a) $H_k\left(X^n, X^{n-1}\right) = 0$, если $k \neq n$ и изоморфно мвободной абелевой группе, если $k = n$. Образующие этой группы — клетки размерности n.
b) $H_k(X^n) = 0$, если $k > n$. В частности, если комплекс конечномерен, то $H_k(X) = 0\ \forall k > \dim X$.
c) Вложение $i\colon X^n \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм $i_*\colon H_k(X^n) \to H_k(X)$ при $k < n$ и эпиморфизм при $k = n$.

Доказательство. Во-первых, мы знаем, что $\left(X^n, X^{n-1}\right)$ — пара Борсука. Кроме того, $X^n / X^{n-1} \cong \bigvee_\alpha S^n$, где α пробегает все n-мерные клетки. Тогда факт a) следует из теоремы о факторизации 37 и теоремы 42.

Теперь рассмотрим длинную точную последовательность пары

$$\ldots \to H_{k+1}\left(X^n, X^{n-1}\right) \to H_k\left(X^{n-1}\right) \to H_k(X^n) \to H_k\left(X^n, X^{n-1}\right) \to \ldots.$$

Если $k \neq n$ или $n-1$, то обе внешние группы равны нулю, как группы гомологий букета n-мерных сфер, поэтому мы получаем изоморфизм

$$H_k\left(X^{n-1}\right) \cong H_k(X^n), \quad k \neq n, n-1.$$

Тогда, если $k > n$, то

$$H_k(X^n) \cong H_k\left(X^{n-1}\right) \cong \ldots H_k\left(X^0\right) = 0,$$

что доказывает пункт b). Если же $k < m$, то тогда

$$H_k(X^n) \cong H_k\left(X^{n+1}\right) \cong \ldots \cong H_k\left(X^{n+m}\right)\ \forall m \geq 0,$$

что доказывает c) в случае конечномерного комплекса. $\square$

Замечание. Утверждение c) верно и для бесконечномерных CW-комплкесов (идея состоит в том, что каждая сингулярная цепь имеет компактный образ, а значит пересекается лишь с конечным числом клеток). (Доказательство можно посмотреть в Хатчере).

Теперь мы определим клеточные гомологи — более продвинутый способ вычислять гомологии клеточных пространств. Начнем с такой коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \\
 & 0 \arrow[dr] & & H_n\left(X^{n+1}\right) \cong H_n(X) \arrow[ur] & \\
 & & H_n\left(X^n\right) \arrow[ur] \arrow[d, "j_n"] & & \\
\ldots \arrow[r] & H_{n+1}\left(X^{n+1}, X^n\right) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[r, "d_{n+1}"] & H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \arrow[r] & \ldots \\
 & & H_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \arrow[ur, "j_{n-1}"] & & \\
 & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Её мы получили из точных последовательностей для пар $\left(X^{n+1}, X^n\right)$, $\left(X^n, X^{n-1}\right)$, $\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right)$. Морфизмы в нижней строчке определяются, как $d_{n+1} \overset{\text{def}}{=} j_n \circ \partial_{n+1}$. Нетрудно заметить, что из точности мы получаем $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Таким образом, средняя строчка диаграммы является цепным комплексом (его называют *клеточным цепным комплексом для* X). Как мы уже замечали в доказательстве леммы выше, группа $H_n\big(X^n, X^{n-1}\big)$ — свободная абелева группа с базисом из n-мерных клеток в X.

Определение 45. Рассмотрим построенный выше цепной комлекс с группой k-мерных цепей $C_k^{\mathrm{CW}}(X) \overset{\text{def}}{=} H_k\big(X^k, X^{k-1}\big)$. Гомологии этого комплекса называют *клеточным гомологиями пространства* X и обозначают $H_n^{\mathrm{CW}}(X)$.

Замечание. В самом деле, всё происходящее вполне логично — в случае симплициальных гомологий мы рассматриваем свободные абелевы группы, порожденные симплексами всех размерностей, а тут — клетками всех размерностей.

Теорема 49. *Пусть X — CW-комплекс. Тогда имеет место изоморфизм $H_n^{\mathrm{CW}}(X) \cong H_n(X)$.*

Доказательство. Из точности и теоремы о гомоморфимзе мы имеем изоморфизм

$$H_n(X) \cong H_n(X^n)/\operatorname{Im}\partial_{n+1}.$$

Так как j_n — инъекция, $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \cong \operatorname{Im} j_n \circ \partial_{n+1} = \operatorname{Im} d_{n+1}$. С другой стороны, $\operatorname{Im} j_n \cong \operatorname{Ker}\partial_n$. Из инъективности j_{n-1} мы имеем $\operatorname{Ker}\partial_n \cong \operatorname{Ker} d_n$. Значит, j_n индуцирует изоморфизм факторгруппы:

$$H_n(X) \cong H_n(X^n)/\operatorname{Im}\partial_{n+1} \cong \operatorname{Ker} d_n/\operatorname{Im} d_{n+1}.$$

□

Следствие 15. *Пусть X — CW-комплекс, тогда:*

1. *$H_n(X) \cong 0$, если в X нет n-мерных клеток.*
2. *Если X — CW-комплекс с k клетками размерности n, то группа $H_n(X)$ порождена не более чем k элементами. В самом деле, так как $H_n\big(X^n, X^{n-1}\big)$ — группа с k образующими, у подгруппы $\operatorname{Ker} d_n$ никак не может быть больше образующих, а значит и в факторгруппе $\operatorname{Ker} d_n/\operatorname{Im} d_{n+1}$ тоже.*

3. *Если X — CW-комплекс, у которого нет пар клеток в соседних размерностях, то $H_n(X)$ — свободная абелева группа с базисом из n-мерных клеток.*

Пример 22. Последний пункт следствия 15 применим, например, к $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, так как клеточная структура для $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ имеет по одной клетке каждой четной размерности до $2n$ (действительно, это заметно из того, что $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$). Значит, клеточный цепной комплекс для $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ имеет вид:

$$\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

Также при помощи этого же факта можно посчитать гомологии $S^n \times S^n$.

Рассмотрим теперь подробнее клеточный оператор границы d_n. При $n = 1$ это легко, так как

$$d_1 \colon H_1\big(X^1, X^0\big) \to H_0\big(X^0\big)$$

и это просто обычное граничное отображение.

В случае, когда комплекс X связен и имеет лишь одну нульмерную клетку, $d_1 = 0$, так как иначе $H_0(X) \neq \mathbb{Z}$. В общем случае формула для клеточного оператора границы имеет следующий вид:

Предложение 26. *Имеет место равенство:*

$$d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta,$$

где $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения $S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$, которое является композицией отображения приклеивания клетки e^n_α по границе и отображения фаткоризации, стягивающего $X^{n-1} \setminus e^{n-1}_\beta$ в точку.

Доказательство. Для получения этой формулы рассмотрим такую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_n\left(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha\right) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Phi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(\partial D^n_\alpha\right) \arrow[r, "\Delta_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(S^{n-1}_\beta\right) \arrow[d, "q_{\beta*}"] \\
H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(X^{n-1}/X^{n-2}\right) \arrow[d, "\cong"] \\
& H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \arrow[r, "\cong"] & H_{n-1}\left(X^{n-2}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}\right)
\end{tikzcd}$$

Проясним, что за стрелки на ней:

- Φ_α — характеристическое отображение клетки e^n_α, φ_α — её отображение приклеивания.
- $q \colon X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2}$ — отображение факторизации.
- $q_\beta \colon X^{n-1}/X^{n-2} \to S^{n-2}_\beta$ — стягивание дополнения клетки e^{n-1}_β в точку и отождествление получившейся сферы с $S^{n-1}_\beta = D^{n-1}_\beta / \partial D^{n-1}_\beta$.
- $\Delta_{\alpha\beta} = q_\beta q \varphi_\alpha$.

Отображение $\Phi_{\alpha*}$ переводит образующую $[D^n_\alpha] \in H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$ в образующую слагаемого $\mathbb{Z}$ группы $H_n\big(X^n, X^{n-1}\big)$, соответствующего клетке e^n_α (действительно, такие клетки образуют базис $H_n\big(X^n, X^{n-1}\big)$). Коммутативность левой половины диаграммы даёт нам, что

$$d_n(e^n_\alpha) = j_{n-1}\varphi_{\alpha*}\partial[D^n_\alpha].$$

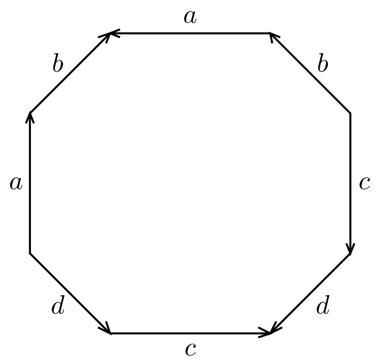
Базис группы $H_{n-1}\big(X^{n-1}, X^{n-2}\big)$ состоит из $(n-1)$-мерных клеток, а отображение $q_{\beta*}$ — это проекция группы $\widetilde{H}_{n-1}\big(X^{n-1}/X^{n-2}\big)$ (которая, как группа гомологий букета окружностей суть прямая сумма $\mathbb{Z}$, где каждое слагаемое соотвествует $(n-1)$-мерной клетке) на её слагаемое $\mathbb{Z}$, соответсвующее e^{n-1}_β.

Теперь формула следует непосредственно из коммутативности правой верхней части диаграммы7 $\square$

3.18 Гомологии поверхностей

В данном параграфе, пользуясь клеточными гомологиями, мы вычислим гомологии поверхностей.

Пусть M_g — компактная ориентируемая поверхность с g ручками. Реализуем её, как склейку $4g$-угольника:



Тогда в её клеточном разбиении:

- 1 двумерная клетка, приклеенная по произведению коммутаторов $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$.
- $2g$ одномерных клеток.
- 1 нульмерная клетка.

Значит, цепной клеточный комплекс для M_g будет иметь вид:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

Так как комплекс связен и имеет лишь одну нульмерную клетку, $d_1 = 0$. Кроме того, каждое ребро $[a_1, a_2]$, $[a_g, b_g]$ появляется в произведении коммутаторов вместе со своим обратным, а значит, $\Delta_{\alpha\beta}$ гомотопны постоянным отображениям, из чего следует, что $d_2 = 0$.

Таким образом, мы имеем

$$H_k(M_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \text{ или } k = 2, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & k = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь вычислим гомологии неориентируемой замкнутой поверхности рода g. Она имеет такую клеточную структуру:

- Одна нульмерная клетка.
- g одномерных клеток.
- Одна двумерная клетка, приклеенная по слову $a_1^2 \dots a_g^2$.

Тогда клеточный цепной комплекс имеет вид:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

Аналогично предыдущему разу, $d_1 = 0$, а вот d_2 задаётся уравнением

$$d_2(1) = (2, \dots, 2),$$

так как каждое ребро a_i появляется в слове приклеивания двумерной клетки со степенью 2, а это значит, что каждое отображение $\Delta_{\alpha\beta}$ гомотопно отображению степени 2. Значит, d_2 инъективно и

$$H_2(N_g) = 0.$$

Выберем в $\mathbb{Z}^g$ такой базис: $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, 0), (1, 1, \dots 1)$. Тогда нетрудно заметить, что

$$H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3.19 Пространства Мура

Допишу позже вместе с пространствами Эйленберга-Маклейна.

3.20 Теорема о вложении дисков и сфер

Напомним, что топологическое вложение — гомеоморфизм на образ.

Теорема 50. *Пусть* $h\colon D^k \to S^n$ *— вложение. Тогда*

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(D^k\Big)\Big) = 0 \;\forall i.$$

Кроме того, если $h\colon S^k \to S^n$ *— вложение (и* $k < n$*), то*

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(S^k\Big)\Big) = \mathbb{Z},\ i = n-k-1 \text{ и } 0 \text{ иначе.}$$

Доказательство. Проведём индукцию по k. Случай $k=0$ тривиален:

$$S^n \setminus h\big(D^0\big) = \mathbb{R}^n.$$

Теперь докажем индукционный переход от противного. Рассмотрим покрытие нашего пространства двумя множествами:

$$A = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad B = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Заметим, что $A \cup B = S^n \setminus \big(h\big(I^k \times \big[0, \frac{1}{2}\big]\big) \cap h\big(I^k \times \big[\frac{1}{2}, 1\big]\big)\big) = S^n \setminus h\big(I^k \times \frac{1}{2}\big)$ и

$$\widetilde{H}_i(A \cup B) \cong \widetilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right) = 0,$$

по индукционному предположению. Напишем теперь точную последовательность Майера-Вьеториса (39):

$$\ldots \to H_n(A \cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \ldots$$

$$\ldots \to H_n\Big(S^n \setminus h\Big(I^{k+1}\Big)\Big) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to \underbrace{H_n\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right)}_{\cong 0} \to H_{n-1}\Big(S^n \setminus h\Big(I^{k+1}\Big)\Big) \to \ldots$$

значит если в $\widetilde{H}_i(A \cap B) = \widetilde{H}_i\big(S^n \setminus \big(I^k \times I\big)\big)$ есть ненулевой класс a, его образ $(a, -a)$ в $\widetilde{H}_n(A) \oplus \widetilde{H}_n(B)$ будет ненулевым, а значит, в $\widetilde{H}_i(A)$ или $\widetilde{H}_i(B)$ тоже будет ненулевым. Далее мы можем также разбить на две части интервал в A или в B (в зависимости от того, где не ноль) и проделать всё полностью аналогично. Таким образом мы получим последовательность вложенных интервалов I_n таких, что

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(I^k \times I_n\Big)\Big) \neq 0,\ a \in \widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(I^k \times I_n\Big)\Big).$$

Тогда, если $p = \bigcap I_n$, то по индукционному предположению

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(I^k \times p\Big)\Big),$$

то есть a представляет ноль в этих гомологиях. Но это означает, что он является чьей-то границей, но тогда он является границей и в допредельном случае, что даёт нам противоречие.

Докажем теперь второй пункт. Представим сферу ввиде объединения двух дисков (полусфер):

$$S^k = D^k_+ \cup D^k_-, \quad D^k_- \cap D^k_+ = S^{k-1}.$$

тогда $S^n \backslash h(S^k) = S^n \backslash h(D_+^k \cup D_-^k) = S^n \backslash h(D_-^k) \cap S^n \backslash h(D_+^k)$. Запишем опять точную последовательность Майера-Вьеториса 39, полагая

$$A = S^n \setminus h\Big(D_+^k\Big), \quad B = S^n \setminus h\Big(D_+^k\Big).$$

:

$$\ldots \to H_i\Big(S^n \setminus h\Big(S^k\Big)\Big) \to \underbrace{H_i\Big(S^n \setminus h\Big(D_-^k\Big)\Big)}_{=0} \oplus \underbrace{H_i\Big(S^n \setminus h\Big(D_+^k\Big)\Big)}_{=0} \to H_i\Big(S^n \setminus h\Big(S^{k-1}\Big)\Big) \to \ldots$$

Нулевые элементы в точной последовательности у нас их первого утверждения теоремы. Теперь видно, что мы можем вести индукцию по k. □

3.21 Когомологии

Итак, рассмотрим цепной комплекс абелевых групп $(C_\bullet, \partial)$

$$\ldots \to C_k \to C_{k-1} \to C_{k-2} \to \ldots$$

Тогда мы можем рассмотреть группы $C^k \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(C_k, G)$, где G — фиксированная абелева группа.[17] Тогда мы получаем цепной комплекс

$$\ldots \leftarrow C^{k+1} \overset{\delta}{\leftarrow} C^k \overset{\delta}{\leftarrow} C^{k-1} \overset{\delta}{\leftarrow} \ldots$$

Естественно, стрелки развернулись, так как мы подействовали на комплекс контравариантным функтором $\operatorname{Hom}(\_, G)$. Действие оператора δ определяется естественным образом:

$$\varphi \in C^k,\ \delta\varphi\colon C_{k+1} \overset{\partial}{\to} C_k \overset{\varphi}{\to} G,\ \delta\varphi = \varphi \circ \partial.$$

Замечание. Сразу же нетрудно заметить, что $\delta^2 = 0$, то есть построенный комплекс действительно будет комплексом. Действительно,

$$\delta_k \circ \delta_{k-1}(\varphi(c)) = \delta_k(\varphi(\partial_{k-1}c)) = \varphi(\partial_k \partial_{k-1} c) = 0.$$

Определение 46. Группы гомологий коцепного комплекса $(C^\bullet, \delta) = (\operatorname{Hom}(C_\bullet), G), \delta)$ называют *группами когомологий* комплекса $(C_\bullet, \partial)$ с коэффициентами в группе G и обозначаются $H^k(C_\bullet; G)$. Как и в случае с гомологиями, $\operatorname{Im} \delta_k$ называют k-мерными кограницами, $\operatorname{Ker} \delta_k$ — k-мерными коциклами, а C^k — k-мерными коцепями.

Таким образом, мы определили и *сингулярные когомологии* пространства X (так как они строятся по сингулярным гомологиям). Заметим, что так как функтор Hom контравариантен, логично ожидать, что и когомологии будут контраваринатным функтором. Действительно, если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то у нас есть индуцированный морфизм

$$f_*\colon C_k(X) \to C_k(Y)$$

и действием функтора Hom мы получаем индуцированный морфизм $f^*\colon C^k(Y) \to C^k(X)$:

$$\varphi \in C^k(Y),\ \varphi\colon C^k(Y) \to G,\ f^*(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \varphi \circ f\colon C^k(X) \to G,\ f^*(\varphi) \in C^k(X).$$

Покажем теперь, что у нас будет и индуцированный морфизм в когомологиях:

$$f^*\colon H^k(Y) \to H^k(X)$$

Для этого надо проверить, что отображение уважает добавление кограницы, то есть, если мы выберем другого представителя того же когомологического класса, мы полужем тот же образ, что и до этого. Действительно,

$$f^*(c_k + \delta c_{k-1}) = f^*(c_k) + \delta f^*(c_{k-1})$$

Замечание. Формально, как и в гомологиях, нам надо проверить, что $f^*\delta = \delta f^*$. Действительно, пусть $\varphi \in C^k(X)$, тогда

$$f^*(\delta\varphi) = f^*(\varphi\partial) = \varphi\partial f = \varphi f \partial = \delta f^*(\varphi).$$

В третьем равенстве мы пользуемся тем, что в начале курса мы уже проверяли, что граничный оператор коммутирует с непрерывными отображениями.

[17] В нашем, топологическом контексте, это группа коэффициентов.

3.22 Формула универсальных коэффициентов для когомологий

Пример 23. Рассмотрим следующий комплекс:

$$0 \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_3} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_2} \xrightarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_1} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_0} \to 0$$

После применения функтора $\operatorname{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ мы получим такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Посмотрим, какие в новом комплексе отображения. Действительно, пусть $\varphi\colon C_1 \to \mathbb{Z}$, $\psi\colon C_2 \to C_1, \psi(x) = 2x$, тогда $\varphi\psi\colon C_2 \to \mathbb{Z} \in C^2$. Нетрудно заметить, что $\varphi(\psi(x)) = \varphi(2x) = 2\varphi(x)$. Значит, мы получили вот такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \xleftarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Вычислим сначала гомологии:

$$H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z},\ H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ H_2(C_\bullet) = 0,\ H_3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

Теперь вычислим когомологии:

$$H^0(C_\bullet) = \mathbb{Z},\ H^1(C_\bullet) = 0, H_2(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

То есть, сами группы не изменились, но изменилась градуировка.

Это вполне естественно, так как, на самом деле, любой цепной комплекс конечно-порожденных свободных абелевых групп является прямой суммой комплексов

$$0 \to \mathbb{Z} \to 0 \text{ и } 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to 0$$

и в силу того, что функтор Hom аддитивен на конечных копроизведениях, применяя $\operatorname{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ к исходному комплексу, мы получаем прямую сумму комплексов

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \text{ и } 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

Таким образом, мораль всего этого дела в том, что группы когомологий — тоже самое, что группы гомологий, за исключением того, что кручение смещается на олну размерность.

Предложение 27. *Пусть $(C_\bullet, \partial)$ — цепной комплекс. Тогда существует гомоморфизм*

$$h\colon H^n(C; G) \to \operatorname{Hom}(H_n(C), G).$$

Доказательство. Рассмотрим когомологический класс $[\varphi] \in H^n(C_\bullet; G)$, $\varphi\colon C_n \to G$, $\delta\varphi = 0$.

$$\delta\varphi = \varphi\partial \Leftrightarrow \varphi|_{\operatorname{Im}\partial_{n+1}} = 0$$

Ограничение $\varphi_0 = \varphi|_{\operatorname{Ker}\partial_n}\colon \operatorname{Ker}\partial_n \to G$ индуцирует гомоморфизм факторизации

$$\overline{\varphi_0}\colon \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1} \to G, \quad \overline{\varphi_0} \in \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G).$$

Таким образом, полагая $h(\varphi) = \overline{\varphi}_0$, мы получаем нужное. □

Упражнение. h — эпиморфизм.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$0 \to Z_{n+1} \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial} B_n \to 0$$

Применяя функтор $\operatorname{Hom}(-, G)$ мы получаем точную последовательность

$$0 \leftarrow Z^{n+1} \leftarrow C^{n+1} \leftarrow B^{n+1} \leftarrow 0$$

На самом деле, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & Z^{n+1} & \longleftarrow & C^{n+1} & \longleftarrow & B^n & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle 0}\Big\uparrow & & {\scriptstyle \delta}\Big\uparrow & & {\scriptstyle 0}\Big\uparrow & & \\
0 & \longleftarrow & Z^n & \longleftarrow & C^n & \longleftarrow & B^{n-1} & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Видно, что эта диаграмма — часть короткой точной последовательности комплексов. Она даёт нам длинную точную последовательность:

$$\ldots \leftarrow B^n \leftarrow Z^n \leftarrow H^n(C_\bullet, G) \leftarrow B^{n-1} \leftarrow Z^{n-1} \leftarrow \ldots$$

Разбивая длинную точную последовательность на короткие точные последовательности мы получаем:

$$0 \leftarrow \operatorname{Ker}(Z^n \to B^n) \xleftarrow{h} H^n(C_\bullet; G) \leftarrow \operatorname{Coker}\bigl(Z^{n-1} \to B^{n-1}\bigr) \leftarrow 0$$

А теперь заметим, что $\operatorname{Ker}(Z^n \to B^n) = \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$. Таким образом, мы получаем расщепимую точную последовательность:

$$0 \to \operatorname{Coker}\bigl(Z^{n-1} \to B^{n-1}\bigr) \to H^n(C_\bullet; G) \to \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \to 0.$$

Определение 47. Пусть H — абелева группа. Тогда её *свободная резольвента* — это точная последовательность

$$\ldots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0,$$

в которой каждая группа F_n свободная.

Применяя к этой точной последовательности функтор $\operatorname{Hom}(-, G)$ мы можем потерять точность, но во всяком случае, получим цепной комплекс:

$$\leftarrow F_2^* \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Будем обозначать группы когомологий свободной резольвенты, как $H^n(F, G)$. Нам понадобится следующее утверждение из гомологической алгебры:

Лемма 40. Пусть даны свободные резольвенты F и F' абелевых групп H и H'. Тогда любой гомоморфизм $\alpha\colon H \to H'$ можно продолжить до цепного отображения $F \to F'$. Кроме того, любые два таких цепных отображения, продолжающие гомоморфизм α, цепно гомотопны.

Для любых двух свободных резольвент F и F' группы H существуют канонические изоморфизмы

$$H^n(F; G) \cong H^n(F'; G).$$

У любой абелевой группы H есть свободная резольвента вида

$$0 \to F_1 \to F_0 \to H \to 0$$

с $F_i = 0$ при $i > 1$, которую мы сейчас построим.

Выберем в H набор образующих и пусть F_0 — группа, свободно порожденная этими образующими. Тогда у нас есть сюръективный гомоморфизм $f_0\colon F_0 \to H$, переводящий элементы базиса в образующие H. Его ядро будет свободно, как подгруппа свободной группы, поэтому мы можем положить $F_1 = \operatorname{Ker} f_0$, а в качестве f_1 взять включение $\operatorname{Ker} f_0 \hookrightarrow F_0$.

Для этой свободной резольвенты мы имеем $H^n(F; G) = 0\ \forall n > 1$, поэтому, из леммы 40 мы получаем, что это должно быть верно для всех свободных резольвент.

Таким образом, единственная интересная группа из $H^n(F; G)$ — это $H^1(F; G)$. Эта группа зависит лишь от H и G, поэтому обычно её обозначают $\operatorname{Ext}(H, G)$[18].

[18]Вообще говоря, в гомологической алгебре функтор Ext обычно интерпретируют, как множество классов эквивалентности расширений G посредством H, но в алгебраической топологии такая интерпретация редко нужна.

Так вот, из построения свободной резольвенты для группы H и определения когомологий мы теперь наконец можем заметить, что

$$\operatorname{Coker}\bigl(Z^{n-1} \to B^{n-1}\bigr) = \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G).$$

Теперь мы наконец можем заключить, что мы доказали формулу универсальных коэффициентов для когомологий:

Теорема 51 (Об универсальных коээфициентах для когомологий)**.** *Пусть $C_\bullet$ — цепной комплекс. Тогда его группы когомологий определяются расщепимыми короткими точными последовательностями*

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G) \to H^n(C; G) \to \operatorname{Hom}(H_n(C), G) \to 0$$

Вообще говоря, это утверждение достаточно полезно, потому что на конечнопорожденных абелевых группах функтор Ext несложно посчитать:

- $\operatorname{Ext}(H \oplus H', G) \cong \operatorname{Ext}(H, G) \oplus \operatorname{Ext}(H', G)$.
- $\operatorname{Ext}(H, G) = 0$, если H — свободна.
- $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$.
- Если H конечно порождена, то имеет место изоморфизм

$$\operatorname{Ext}(H, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Tor}(H).$$

Кроме того, теорема об универсальных коэффициентов позволяет вычислять когомологии, зная только гомологии.

Следствие 16. *Если группы гомологий $H_n(C)$ и $H_{n-1}(C)$ комплекса C, состоящего из свободных абелевых групп, конечно порождены и $T_n \subset H_n$ и $T_{n-1} \subset H_{n-1}$ — подгруппы кручения, то*

$$H^n(C; \mathbb{Z}) \cong (H_{n-1}(C)/T_n) \oplus T_{n-1}.$$

Это следствие даёт нам обобщение и формализацию примера 23.

Кроме того, из всего этого дела есть еще одно замечательное следствие:

Следствие 17. *Если $f\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ индуцирует изоморфизм всех групп гомологий $H_k(C_\bullet) \cong H_k(C'_\bullet)$. Тогда отображения $f^*\colon H^k(C_\bullet; G) \cong H^k(C'_\bullet; G)$.*

Доказательство. Действительно, достаточно заметить, что из свойств свободной резольвенты мы знаем, что отображение цепных комплексов индуцирует такую вот диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}\left(H_{n-1}(C), G\right) \arrow[r] & H^n\left(C; G\right) \arrow[r, "h"] & \operatorname{Hom}\left(H_{n-1}(C), G\right) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}\left(H_{n-1}(C'), G\right) \arrow[r] \arrow[u] & H^n\left(C'; G\right) \arrow[r, "h"] \arrow[u] & \operatorname{Hom}\left(H_{n-1}(C'), G\right) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Применяя 5-лемму и индукцию, мы получаем нужное. □

3.23 Умножение в когомологиях

Пусть R — коммутативное и ассоциативное кольцо.

Пусть $\varphi \in C^k(X; R),\ \psi \in C^\ell(X; R)$. Тогда их произведением определяется таким образом:

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+\ell}, \quad (\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots v_k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_k \dots v_{k+\ell}]}),$$

где $\sigma\colon \Delta^{k+\ell} \to X$ — сингулярный симплекс.

Лемма 41. Для кограницы $\smile$-произвения справедлива следующая формула:

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi.$$

Доказательство. Пусть $\sigma\colon \Delta^{k+\ell} \to X$ — сингулярный симплекс. Тогда

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v_i},\ldots,v_{k+1}]})\psi(\sigma|_{[v_{k+1}\ldots v_{k+\ell+1}]})$$

Распишем теперь второй кусок:

$$(-1)^k(\varphi \smile \delta\psi) = \sum_{i=k}^{k+\ell+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0\ldots v_k]})\psi(\sigma|_{[v_k,\ldots,\hat{v_i},\ldots,v_{k+\ell+1}]})$$

Когда мы сложим эти две суммы, последнее слагаемое первой суммы сократится с первым слагаемым второй, а всё, что останется — как раз $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$. □

Замечание. Таким образом, $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi \pm \delta\psi \smile \varphi$. Из этого следует, что произведение коциклов — коцикл. Также это сразу даёт нам, что произведение коцикла и кограницы (в любом порядке) — кограница:

$$\varphi \smile \delta\psi = \pm\delta(\varphi \smile \psi)$$

Это даёт нам ассоциативное дистрибутивное умножение

$$\smile\colon H^k(X;R) \times H^\ell \to H^{k+\ell}(X;R).$$

Таким образом, при помощи $\smile$-произведения, мы наделили

$$H^*(X;R) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X;R)$$

структурой кольца (а на самом деле, градуированной алгебры).

Если в кольце R есть единица, то единицей относительно $\smile$-произведения будет нольмерный коцикл $1 \in H^0(X;R)$, принимающий значение 1 на любом нульмерном сингулярном симплексе.

Замечание. Это показывает нам отдельную пользу когомологий: например, у $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ и $S^4 \vee S^2$ все группы гомологий и группы когомлогий совпадают, а кольца когомологий отличаются.

4. Комплексная алгебраическая геометрия

4.1 Комплексные многообразия

Определение 48. *Комплексным многообразием M* называется гладкое многообразие, допускающее такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и такие координатные отображения $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, что все функции перехода $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ голоморфны на $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Функция f на открытом подмножестве $U \subset M$ называется *голоморфной*, если $\forall \alpha \in I$ функция $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфна в $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$.

Набор $z = (z_1, \ldots, z_n)$ функций на $U \subset M$ называется *голоморфной системой координат*, если $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$ и $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфны на $z(U \cap U_\alpha)$ и $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ для всех α.

Отображение $f\colon M \to N$, где M и N — комплексные многообразия, называется *голоморфным*, если в голоморфных локальных координатах оно задаётся голоморфными функциями.

Пример 24 (Примеры комплексных многообразий)**.** Приведём какие-нибудь примеры комплексных многообразий:

1. Одномерное комплексное многообразие называют **римановой поверхностью**.
2. $P\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\{z \sim \lambda z\} = \mathbb{P}^n$ — комплексное проективное пространство. Это пространство компактно, так как есть непрерывное сюръективное отображение $S^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n$.
3. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^k \subset \mathbb{C}^n$ — дискретная решётка. Факторгруппа $\mathbb{C}^n/\Lambda$ обладает структурой комплексного многообразия, которую индуцирует проекция $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda$. Это многообразие компактно тогда и только тогда, когда $k = 2n$ и в этом случае $\mathbb{C}^n/\Lambda$ называется **комплексным тором**.
4. Тут был еще пример, что при неразветвлённом накрытии структура комплексного многообразия наследуется, но я хз, что такое разветвлённое накрытие.

Касательное пространство к комплексному многообразию.

Пусть M — комплексное многообразие, $p \in M$, а $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — система голоморфных координат в окрестности p. В случае комплексного многообразия имеются три различных понятия *касательного пространства* к M в точке $p \in M$.

1. Рассмотрим M, как вещественное $2n$-многообразие. Тогда $T_{\mathbb{R},p}M$ — пространство $\mathbb{R}$-линейных дифференцирований кольца $C^\infty(M, \mathbb{R})$ (с носителем в окрестности p). Если мы представим голоморфные координаты в виде $z_j = x_j + iy_j$, то $T_{\mathbb{R},p}M$ будет иметь базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$, как векторное пространство над $\mathbb{R}$.
2. Пространство $T_{\mathbb{R},p}M$ можно комплексифицировать при помощи расширения скаляров, то есть рассмотреть
$$T_{\mathbb{C},p}M \overset{\text{def}}{=} T_{\mathbb{R},p}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$
$T_{\mathbb{C},p}M$ называют *комплексифицированным касательным пространством* к M в точке p. Его можно реализовать, как пространство $\mathbb{C}$-линейных дифференцирований кольца $C^\infty(M, \mathbb{C})$ (опять же, фукнции с носителем в окрестности p). Соотвественно, там можно выбрать базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$, а при замене базиса на комлпексные обозначения
$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\ \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$
«более стандартный» базис $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$.
3. Подпространство $T'_pM = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial z_j}\} \le T_{\mathbb{C},p}M$ называется *голоморфным касательным пространством* к M в точке p. Оно может быть реализовано, как подпространство в $T_{\mathbb{C},p}M$, состоящее из дифференцирований, обращающихся в ноль на антиголоморфных функциях (таких f, что $\overline{f}$ — голоморфна). Соответственно, подпространство $T''_pM = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$ называется *антиголоморфным касательным пространством* к M в точке p. Ясно, что
$$T_{\mathbb{C},p}M = T'_pM \oplus T''_pM.$$

Заметим, что для комплексных многообразий M, N любое $f \in C^\infty(M,N)$ индуцирует линейное отображение

$$f_*\colon T_{\mathbb{R},p}M \to T_{\mathbb{R},f(p)}N$$

а значит и линейное отображение

$$f_*\colon T_{\mathbb{C},p}M \to T_{\mathbb{C},f(p)}N,$$

но не отображение $T'_pM \to T'_{f'(p)}N$ для всех $p \in M$.

На самом деле, отображение $f\colon M \to N$ голоморфно тогда и только тогда, когда

$$f_*(T'_pM) \subset T'_{f(p)}N \quad \forall p \in M.$$

То есть, когда голоморфное касательное пространство отображается в голоморфное.

Заметим, что также, поскольку $T_{\mathbb{C},p}M = T_{\mathbb{R},p}M \otimes \mathbb{C}$, операция сопряжения, переводящая

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$$

корректно определена на $T_{\mathbb{C},p}M$ и, как нетрудно заметить, $T''_pM = \overline{T'_pM}$. Отсюда следует, что проекция

$$T_{\mathbb{R},p}M \to T_{\mathbb{C},p}M \to T'_pM$$

есть $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм.

Это обстоятельство позволяет заниматься геометрией исключительно в голоморфном касательном пространстве.

Пример 25. Пусть $z(t)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ — гладкая кривая. Тогда $z(t) = x(t) + iy(t)$ и в качестве касательной мы можем взять

$$x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y} \text{ в } T_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \text{ либо } z'(t)\frac{\partial}{\partial z} \text{ в } T'\mathbb{C}.$$

Определение 49. Пусть теперь M, N — комплексные многообразия, $z = (z_1, \dots, z_n)$ — голомрфные координаты в окрестности точки $p \in M$, а $(w_1, \dots, w_n)$ — голоморфные координаты в окрестности точки $q = f(p)$, где $f\colon M \to N$ — голоморфное отображение. В связи с различными понятиями касательных пространств, мы имеем и различные понятия *якобиана* f.

1. Пусть $z_j = x_j + iy_j,\ w_k = u_k + iv_k$. Тогда в базисах $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial v_k}\}$ пространств $T_{\mathbb{R},p}M$ и $T_{\mathbb{R},q}N$ линейное отображение f_* задаётся $2m \times 2n$-матрицей

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} & \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j} & \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$

В базисах $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial w_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\}$ пространств $T_{\mathbb{C},p}M$ и $T_{\mathbb{C},q}N$ отображение f_* задаётся матрицей

$$\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(f) & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{J}(f)} \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}(f) = \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_j}\right)_{k,j}.$$

Замечание. В частности, отметим, что $\operatorname{rank} \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = 2 \operatorname{rank} \mathcal{J}(f)$ и в случае $m = n$

$$\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \det \mathcal{J}(f) \det \overline{\mathcal{J}(f)} = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \geq 0,$$

то есть голоморфные отображения **сохраняют ориентацию**.

Мы будем считать, что пространство $\mathbb{C}^n$ естественно ориентированно $2n$-формой

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n (\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1}) \wedge (\mathrm{d}z_2 \wedge \mathrm{d}\overline{z_2}) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z_n}) = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}y_n.$$

Ясно, что если $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ и $\varphi_\beta\colon U_\beta \to \mathbb{C}^n$ — голоморфные координатные отображения на комплексном многообразии M, то прообразы при φ_α и φ_β естественной ориентации на $\mathbb{C}^n$ согласованы на $U_\alpha \cap U_\beta$.

Соотвественно, любое комплексное многообразие **имеет естественную ориентацию**, которая сохраняется при голоморфных отображениях.

4.2 Векторные рассоления

Определение 50. Пусть M — гладкое многообразие. Комплексным C^∞-расслоением на M называется семейство $\{E_X\}_{x\in M}$ комплексных векторных пространств E_x, параметризованных точками многообразия M, со структурой C^∞ многообразия на

$$E = \bigcup_{x\in M} E_x$$

такой, что выполняются следующие условия:

1. отображение проектирования $\pi\colon E \to M$, переводящее E_x в x принадлежит классу C^∞.
2. $\forall x_0 \in M$ найдутся открытое множество $U \subset M : U \ni x_0$ и диффеоморфизм

   $$\varphi_U \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k,$$

   который отображает вектоорное пространство E_x изоморфно на $\{x\} \times \mathbb{C}^k$ для всех $x \in U$. Такое отображение φ_U называется *тривиализацей*.

Размерность слоёв E_x расслоения E называется *рангом* E. Расслоение ранга 1 называется *линейным*.

Замечание. Для любой пары тривиализаций φ_U, φ_V *отображение* перехода $g_{uv}(x) = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})|_{\{x\}\times\mathbb{C}^k\}} \colon U \cap V \to \mathrm{GL}(k)$ принадлежит классу C^∞. Кроме того, они удовлетворяют тождествам:

$$g_{UV}(x) \cdot g_{VU}(x) = I \quad \forall x \in U \cap V$$

$$g_{UV}(x) g_{VW}(X) \cdot g_{WU}(x) = I \quad \forall x \in U \cap V \cap W$$

Обратно, если задано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ многообразия M и C^∞ отображения $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k)$, удовлетворяющие тождествам выше, то найдётся едиснвтенное комплексное векторное расслоение $E \to M$ с такими функциями перехода.

Действительно, мы можем положить $E = \bigsqcup_\alpha \big(U_\alpha \times C^k\big)$, в котором мы отождествляем точки $(x, \lambda) \in U_\beta \times \mathbb{C}^k$ и $(x, \lambda g_{\alpha\beta}(x))$, а структура многообразия на E определяется вложениями $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \to E$.

Обычно операции над векторными пространствами переносятся и на векторные расслоения:

- Если $E \to M$ — векторное расслоение, то можно определить двойственное раслоение $E^* \to M$, взяв в качесвте слоёв $E_x^* \overset{\mathrm{def}}{=} (E_x)^*$. Тривиализации $\varphi_u \colon E_U \to U \times \mathbb{C}^k$ (где $E_u = \pi^{-1}(U)$) индуцируют отображения

  $$\varphi_U^* \colon E_U^* \to U \times (\mathbb{C}^k)^* \cong U \times \mathbb{C}^k,$$

  которые наделяют E^* структурой многообразия. Эту конструкцию проще получить при помощи функций перехода: $E^* \to M$ будет векторным расслоением с функциями перехода $j_{\alpha\beta}(x) =^i g_{\alpha\beta}(x)^{-1}$.
- Пусть $E \to M$ и $F \to M$ — комплексные векторные расслоения рангов k и ℓ с функциями перехода $\{g_{\alpha\beta}\}$ и $\{h_{\alpha\beta}\}$. Тогда мы можем определить $E \oplus F$, как векторное расслоение, заданное функциями перехода

  $$j_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^\ell).$$

- Также мы можем определить расслоение $E \otimes F$, как расслоение, заданное функциями перехода

  $$j_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{GL}\Big(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^\ell\Big).$$

- Аналогично, $\Lambda^r E$ — векторное расслоение, заданное формулами

  $$j_{\alpha\beta} = \Lambda^r(g_{\alpha\beta}(x)) \in \mathrm{GL}\Big(\Lambda^r \mathbb{C}^k\Big).$$

  В частности, $\Lambda^k E$ будет линейным расслоением с функциями перехода

  $$j_{\alpha\beta}(x) = \det g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*.$$

Для векторных расслоений можно также определить подрасслоения и прообразы.[19]

Определение 51. Веторные расслоения $E \to M$ и $F \to M$ *изоморфны*, если существует отображение $f\colon E \to F$ такое, что $f_x\colon E_x \to F_x$ — изоморфизмы $\forall x \in M$.

Векторное расслоение $E \to M$ называется *тривиальным*, если оно изоморфно $M \times \mathbb{C}^k$.

Сечением σ векторного расслоения $E \xrightarrow{\pi} M$ над $U \subset M$ называется C^∞ отображение

$$\sigma\colon U \to E\colon \sigma(x) \in E_x \;\forall x \in U.$$

Репером для E над $U \subset M$ называется набор $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ сечений E над U таких, что $(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x))$ является базисом пространства E_x $\forall x \in U$.

Репер для E над U, по существу, то же самое, что тривиализация расслоения E над U: при заданной тривиализации $\varphi_U\colon E_U \to U \times \mathbb{C}^k$, то сечения $\sigma_i(x) = \varphi_U^{-1}(x, e_i)$ образуют базис. И обратно, если задан репер $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, то можно определить тривиализацию $\varphi_U(\lambda) = (x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_k))$ для $\lambda = \sum \lambda_i \sigma_i(x)$ в E_x.

Заметим, что при заданной тривиализации φ_U расслоения E над U любое его сечение σ можно единственным образом представить, как векторзначную C^∞-функцию $f = (f_1, \ldots, f_k)$, раскладывая $\sigma(x)$ по базису:

$$\sigma(x) = \sum f_i(x) \sigma_U^{-1}(x, e_i).$$

Если же φ_V — тривиализация расслоения E над V и $f' = (f'_1, \ldots, f'_k)$ — соотвествуующие представления $\sigma|_{U \cap V}$, то

$$\sum f_i(x) \varphi_U^{-1}(x, e_i) = \sum f'_i(x) \varphi_V^{-1}(x, e_i),$$

так что

$$\sum f_i(x) e_i = \sum f'_i(x) \varphi_U \varphi_V^{-1}(x, e_i) \implies f = g_{UV} f'.$$

Таким образом, при заданных тривиализациях

$$\{\varphi_\alpha\colon E_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$$

сечения расслоения E над $\bigcup U_\alpha$ в точности соотвествуют наборам

$$\{f_\alpha = (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_k})\}_\alpha$$

векторзначных C^∞ функций, удовлетворяющих $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$.

Пример 26 (Векторные расслоения)**.** Рассмотрим некоторые базовые примеры векторных расслоений:

1. **Касательные и кокасательные расслоения:**
   Комплексным касательным расслоением к комплексному многообразию M мы будем называть

   $$TM = \bigsqcup_{z \in M} T_Z M, \text{ где}$$

   $T_z M$ — комплексное касательное пространство к M в точке x. В расслоении TM есть подрасслоения $T'M$ и $T''M$ определяющиеся естественным образом.
2. **Дифференциальные формы:**

   Определение 52. *Дифференциальной формой* степени k называется сечение расслоения $\Lambda^k(TM)^*$. Расслоение комплексных дифференциальных форма степени k мы будет обозначать $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M)$ или $\Omega^k_{\mathbb{C},M}$.
   Пусть M — вещественное многообразие. Тогда легко видеть, что если $f \in C^{k-1}(M)$, то $\mathrm{d}f$ — C^{k-1}-гладкое сечение расслоения $\Omega^1_{\mathbb{R}}(M)$. Кроме того, нетрудно видеть, что если $x_1, \ldots, x_n$ — локальные координаты в карте $U \subset M$, то k-формы $\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, $1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n$ образуют базис слоя $\Omega^k_{\mathbb{R}}(X)$ в каждой точке отркытого множества U. В самом деле, локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ задают локальную тривиализацию каательного расслоения TM: соотвествующий локальный базис в слое задаётся в каждой точке дифференцированиями $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$. Тогда 1-формы $\mathrm{d}x_i$ образуют двойственный базис в расслоении $\Omega^1_{\mathbb{R}}(X)$.

[19] но делать этого мы пока что не будем.

4.3 Подмногообразия и аналитические подмножества

Докажем теперь несколько классических теорем для случая комплексных многообразий.

Теорема 52 (Об обратном отображении). *Пусть U, V — открытые подмножества в $\mathbb{C}^n$, $0 \in U$ и $f\colon U \to V$ — такое голоморфное отображение, что матрица $\mathcal{J}(f) = (\partial f_i/\partial z_j)$ невырождена в 0.*

Тогда отображение f взаимно однозначно в окрестности точки 0 и обратное отображение f^{-1} голоморфно в некоторой окрестности $f(0)$.

Доказательство. Как мы уже отмечали в 4.1, $|\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f)| = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \neq 0$ в точке 0, а значит, по обычной теореме об обратном отображении, функция f имеет в окрестности точки 0 обратную $C^\infty(U, V)$ функцию f^{-1}. Заметим, что $f^{-1}(f(z)) = z$, так что, дифференцируя это равенство в нуле мы имеем

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(f^{-1}(f(z)))_j = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial z_k}\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z_i}} + \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \overline{z_k}}\left(\frac{\partial \overline{f_k}}{\partial \overline{z_i}}\right) = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \overline{z_k}}\left(\frac{\partial \overline{f_k}}{\partial z_i}\right) \quad \forall i, j.$$

Так как матрица $(\partial f_k/\partial z_j)$ была невырождена, отсюда следует, что $\partial f_j^{-1}/\partial \overline{z_k} = 0\ \forall j, k$, что и означает голоморфность функции f. □

Теорема 53 (О неявной функции). *Пусть заданы функции $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_n$, удовлетворяющие условию*

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)_{1 \le i,\, j \le k} \neq 0.$$

Тогда существуют такие функции $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{O}_{n-k}$, что в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$

$$f_1(z) = \dots f_k(z) = 0 \Leftrightarrow z_i = w_i(z_{k+1}, \dots, z_n),\ 1 \le i \le k.$$

Доказательство. Как обычно, по обычной теореме о неявной функции в случае C^∞ существуют функции $\omega_1, \dots, \omega_k$ с нужным свойством. Остается показать голоморфность. Это делается непосредственно вот таким стандартным вычислением вычислением:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z_\alpha}}(f_j(\omega(z), z)) = \dots = \sum \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \overline{z_\alpha}}\frac{\partial f_j}{\partial \omega_\ell} \Rightarrow \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \overline{z_\alpha}} = 0\ \forall \alpha, \ell,$$

□

Замечание. Видимо почти всегда, когда мы хотим показать голоморфность, мы тупо считаем в локальных производных антиголоморфную производную.

Теперь мы увидим, что комлексные многообразия в смысле их морфизмов таки имеют свою, отличную от вещественной, специфику:

Предложение 28. *Если $f\colon U \to V$ — взаимно однозначное голоморфное отображение открытых множеств в $\mathbb{C}^n$, то $\det \mathcal{J}(f) \neq 0$, то есть f^{-1} голоморфно.*

Замечание. Мы видели этот факт в обычном комплексном анализе (доказывали, что производная однолистной функции не обнуляется).

Определение 53. *Комплексным подмногообразием S* комплексного многообразия M называется подмножество $S \subset M$, которое локально задается либо как множество нулей совокупности голоморфных функций $f_1, \dots f_k$ с условием $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = k$, либо как образ открытого подмножества $U \subset \mathbb{C}^{n-k}$ при отображении $f\colon U \to M$ с условием $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = n - k$.

Эквивалентность этих определений следует из теоремы о неявной функции 53.

Определение 54. Аналитическим подмножеством V комплексного многообразия M называется подмножество, являющееся локально множеством нулей конечного набора голоморфных функций.

Точка $p \in V$ называется *гладкой*[20] точкой V, если V в некоторой её окрестности задаётся набором голоморфных функций $f_1, \dots, f_k$, причем таким, что $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = k$.

Множество гладких точек V обозначается V^*, а все точки из $V \setminus V^*$ называются *особыми*. Они формируют *множество особенностей* аналитического подмножества V, которое мы будем обозначать, как V_s.

В частности, если p — точка аналитической гиперповерхности $V \subset M$, задаваемой в локальных координатах z функцией f, определим *кратность* $\operatorname{mult}_p(V)$, как порядок обращения f в нуль в точке p, то есть наибольшее такое m, что

$$\frac{\partial^k f}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = 0 \; \forall k \leq m - 1.$$

Предложение 29. *Множество V_s содержится в аналитическом подмножестве многообразия M, не совпадающем с V.*

Замечание. А на самом деле, при аккуратном выборе функций, несложно показать, что V_s — аналитическое подмножество в M.

Запомним также полезный нам в будущем факт:

Предложение 30. *Аналитическое множество V неприводимо тогда и только тогда, когда V^* связно.*

Тут было еще что-то про касательные конусы, пока что забьем на это, лень читать.

4.4 Когомологии де Рама и Дольбо

Пусть M — гладкое многообразие. Обозначим за $A^p(M;\mathbb{R})$ пространство дифференциальных форм степени p на M, а через $Z^p(M;\mathbb{R})$ подпространство замкнутых p-форм.

Так как $d^2 = 0$, у нас есть (ко)цепной комплекс

$$A^0(M;\mathbb{R}) \to \dots \to A^p(M;\mathbb{R}) \to A^{p+1}(M;\mathbb{R}) \to \dots$$

а его группы когомологий называются группами *когомологий де Рама* многообразия M.

Иными словами, группы когомологий де Рама — это факторгруппы замкнутых форм по модулю точных

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M;\mathbb{R}) = Z^p(M;\mathbb{R})/dA^{p-1}(M).$$

Совершенно также мы можем рассматривать комплекснозначные формы и давать все соотвествующие определения (используя обозначения $A^p(M)$ и аналогичные, то есть без коэффициентов):

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) = Z^p(M)/dA^{p-1}(M)$$

Замечание. Нетрудно заметить, что как и всегда с коэффициентами,

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) = H^p_{\mathrm{DR}}(M;\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}.$$

Как мы заметили в самом первом параграфе, комплексифицированное кокасательное пространство раскладывается в голоморфную и антиголоморфную часть:

$$T^*_{\mathbb{C},z}M = T^{*'}_z M \oplus T^{*''}_z M,$$

что дает нам разложение

$$\Lambda^n T^*_{\mathbb{C},z}M = \bigoplus_{p+q=n} \Big(\Lambda^p T^{*'}_z(M) \otimes \Lambda^q T^{*''}_z(M)\Big),$$

а это (по определению внешних форм) даёт нам

$$A^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M), \text{где}$$

[20] возможно, корректнее использовать слово регулярная?

$$A^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^n(M) \mid \varphi(z) \in \Lambda^p T_z^{*'}(M) \otimes \Lambda^q T_z^{*''}(M)\ \forall z \in M\}.$$

Соотвественно, форму $\varphi \in A^{p,q}$ называют формой типа (p,q). Обозначим за $\pi^{(p,q)}$ проекцию

$$A^*(M) \to A^{p,q}(M),$$

так что для $\varphi \in A^*(M)$ имеем $\varphi = \sum \pi^{(p,q)}\varphi$.

Если $\varphi A^{p,q}(M)$, то для любого $z \in M$

$$\mathrm{d}\varphi(z) \in \left(\Lambda^p T_z^{*'} M \otimes \Lambda^q T_z^{*''} M\right) \wedge T^*_{\mathbb{C},z}M,$$

$$\mathrm{d}\varphi \in A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M).$$

Определоим теперь для этих замечательных дифференциальных форма операторы

$$\overline{\partial}\colon A^{p,q}(M) \to A^{p,q+1}, \quad \partial\colon A^{p,q}(M) \to A^{p+1,q}(M)$$

$$\overline{\partial} = \pi^{(p,q+1)} \circ \mathrm{d}, \quad \partial = \pi^{(p+1,q)} \circ \mathrm{d},\ \text{то есть } d = \partial + \overline{\partial}.$$

В локальных координатах $z = (z_1, \ldots, z_n)$ форма $\varphi \in A^n(M)$ имеет тип (p,q), если она имеет представление в виде

$$\varphi(z) = \sum_{I,J} \varphi_{I,J}(z)\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$$

Замечание. Короче говоря, вся эта страшная белиберда была, чтоб сказать, что бывают не только голоморфные дифференциальные формы, но и такие, где один кусок голоморфный, а другой антиголоморфный.

Дифференцировать эти формы можно вполне естественным образом:

$$\overline{\partial}\varphi(z) = \sum_{I,J,j} \frac{\partial}{\partial\overline{z_j}}\varphi_{IJ}(z)\mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J, \quad \partial\varphi(z) = \sum_{I,J,i} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\varphi_{IJ}(z)\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J.$$

В частности, форма типа $(q,0)$ называется *голоморфной*, если $\overline{\partial}\varphi = 0$. Ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\varphi(z) = \sum_{I\colon |I|=q} \varphi_I(z)\mathrm{d}z_I,\ \text{где}$$

функции $\varphi_I(z)$ голоморфны.

Отметим, что поскольку разложение $T^*_{\mathbb{C},z} = T_z^{*'} \oplus T_z^{*''}$ сохраняется при голоморфных отображениях, тоже самое будет верно и для $A^\bullet = \bigoplus_{(p,q)} A^{(p,q)}$. Действительно, если $f\colon M \to N$ — голоморфное отображение комплексных многообразий, то $f^*(A^{p,q}(N)) \subset A^{p,q}(M)$ и $\overline{\partial} \circ f^* = f^* \circ \overline{\partial}$.

Пусть $Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$ — пространство ∂-замкнутых форм типа (p,q). Тогда, так как

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_i}\partial\overline{z_j}} = \frac{\partial^2}{\partial\overline{z_j}\partial\overline{z_i}}$$

мы будем иметь $\overline{\partial}^2 = 0$ на $A^{(p,q)}$, откуда мы получим

$$\overline{\partial}(A^{p,q}(M)) \subset Z^{p,q+1}_{\overline{\partial}}(M),$$

что позволяет определить *группы когомологий Дольбо* как

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) = Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)/\overline{\partial}\big(A^{p,q-1}(M)\big)$$

Теорема 54 ($\overline{\partial}$-лемма Пуанкаре)**.** *Для полидиска $\Delta = \Delta(r) \subset \mathbb{C}^n$ имеет место равенство*

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\Delta) = 0, q \geq 1.$$

Доказательство. Какое-то очень уж неприятное. Лучше сначала узнать, как обычная лемма Пуанкаре про то, что в односвязной области замкнутая форма точна, доказыватся. □

4.5 Пучки и когомологии

Определение 55. Пусть X — топологическое пространство. *Пучок* $\mathcal{F}$ на X сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ группу (или кольцо) $\mathcal{F}(U)$ (которое мы будем называть группой *сечений* $\mathcal{F}$ над U) и каждой паре $U \subset V$ открытых подмножеств X гомоморфизм $r_{VU} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$[21], называемый *гомоморфизмом ограничения*, причём так, что

1. Для любой тройки $U \subset V \subset W$ открытых множеств выполняется
$$r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}.$$
В силу этого соотношения по аналогии с ограничениями функций принято писать $r_{WU}(\sigma) = \sigma|_U$ (в общем r_{WU} — гомомрфизм сужения с V на U).
2. $r_{UU} = \mathrm{id},\ \mathcal{F}(\varnothing) = 0.$
3. Для любой пары открытых множеств $U, V \subset M$ и сечений $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, $\tau \in \mathcal{F}(V)$, таких что $\sigma|_{U\cap V} = \tau|_{U\cap V}$ найдётся такое сечение $\rho \in \mathcal{F}(U \cup V)$, что
$$\rho|_U = \sigma, \quad \rho|_V = \tau.$$
4. Если $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$ и $\sigma|_U = \sigma|_V = 0$, то $\sigma = 0$.

Очень хорошие пучки, которые мы будем часто встречать:

1.

[21] тут буква r от слова *restriction*.