

Содержание

1. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию	1
1.1 Предварительные сведения и напоминания	1
1.2 Аффинные алгебраические многообразия	2
1.3 Топология Зарисского на спектре кольца	3
1.4 Словарик алгебраической геометрии	4
2. Алгебраическая теория чисел	5
2.1 Разложение идеалов в произведение простых в кольцах целых числовых полей	5
2.2 Дискриминант	7
2.3 Норма идеала	10
2.4 Индекс ветвления и степень инерции	11
3. Основы теории гомологий	14
3.1 Симплициальные гомологии	14
3.2 Сигнулярные гомологии	16
3.3 Немного гомологической алгебры	17
3.4 Гомотопическая инвариантность гомологий	18
3.5 Относительные гомологии и гомологически точная последовательность пары	20
3.6 Пары Боруска	22
3.7 Относительные гомологии как абсолютные (факторизация)	23
3.8 Вырезание	26
3.9 Точная последовательность Майера-Вьеториса	27
3.10 Гомологии сфер	27
3.11 Гомологии букета и надстройки	28
3.12 Гомологии с коэффициентами	29
3.13 Приложения теории гомологий	29
3.14 Симплициальные комплексы	30
3.15 Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий	30
3.16 Степень отображения	31
3.17 Клеточные гомологии	33
3.18 Гомологии поверхностей	36
3.19 Пространства Мура	37
3.20 Теорема о вложении дисков и сфер	37
3.21 Когомологии	38
3.22 Формула универсальных коэффициентов для когомологий	39
3.23 Умножение в когомологиях	41
4. Комплексная алгебраическая геометрия	43
4.1 Комплексные многообразия	43
4.2 Векторные расслоения	45
4.3 Подмногообразия и аналитические подмножества	47
4.4 Когомологии де Рама и Дольбо	48

1. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию

1.1 Предварительные сведения и напоминания

Определение 1. Собственный идеал I в кольце R называется *простым*, если $ab \in I \implies a \in I$ или $b \in I$.

Собственный идеал I в кольце R называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале.

Простейшие свойства:

1. Для любого собственного идеала существует максимальный идеал, содержащий его.
2. Любой максимальный идеал является простым.
3. Собственный идеал I является простым тогда и только тогда, когда R/I — область целостности.
4. Собственный идеал I является максимальным тогда и только тогда, когда R/I — поле.

Определение 2. Элементы a и b называются *ассоциированными*, если $aR = bR$.

Необратимый элемент $a \in R$ называется *неприводимым*, если из равенства $a = bc$ следует, что или b или c ассоциирован с a .

Элемент называется *простым*, если главный идеал (a) простой.

Замечание. Простой \implies неприводимый. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 3. Кольцо R называется *нётеровым*, если оно удовлетворяет условию обрыва **возрастающих** цепочек (АСС) для идеалов. Модуль называется *нётеровым*, если он удовлетворяет АСС для подмодулей.

Лемма 1. Следующие условия на кольцо R эквивалентны:

1. R нетерово.
2. Любой идеал в R конечнопорожден.
3. Любой подмодуль конечнопорожденного R -модуля конечнопорожден.
4. Любой конечнопорожденный R -модуль нетеров.

Теорема 1 (Гильберта, о базисе). *Кольцо многочленов от конечного числа переменных над нётеровым кольцом нётерово. Иными словами, если R — нётерово кольцо, то любой идеал в кольцо $R[x_1, \dots, x_n]$ порожден конечным числом многочленов.*

1.2 Аффинные алгебраические многообразия

Я думаю, что как только я нормально послушаю курс алгебраической, этот параграф будет переписан.

Пусть F — поле, $\mathbb{A}_F^n = F^n$ — аффинное пространство над ним.

Пусть $J \subset A = F[t_1, \dots, t_n]$, обозначим через $V(J)$ множество всех общих нулей всех многочленов из идеала J , то есть

$$V(J) = \{x \in \mathbb{A}_F^n \mid f(x) = 0 \forall f \in J\}.$$

Определение 4. Пусть I — идеал в кольце R . *Радикал идеала I* определяется, как

$$\sqrt{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I\}.$$

Идеал I называется *радикальным*, если он совпадает со своим радикалом.

Замечание. Другими словами, I — радикальный идеал $\Leftrightarrow R/I$ — редуцированное кольцо (т.е. без нильпотентных элементов).

Несложно заметить, что $V(J) = V(AJ)$, где $AJ = \sum_{f \in J} Af$. Действительно, если $f(x) = 0, g(x) = 0$, то $\forall q, p \in F[t_1, \dots, t_n] \quad fq + pg = 0 \Rightarrow V(J) = V(AJ)$. Соответственно, так как $f^m(x) = 0 \implies f(x) = 0$, мы имеем $V(J) = V(\sqrt{AJ})$, а это говорит нам, что имеет смысл рассматривать только радикальные идеалы.

Определение 5 (Топология зарисского). Определим на \mathbb{A}_F^n *топологию Зарисского*: набором замкнутых множеств будет

$$\{V(J) \subset \mathbb{A}_F^n \mid J \text{ — радикальный идеал в } F[t_1, \dots, t_n]\}.$$

Замкнутые подмножества \mathbb{A}_F^n в этой топологии называют *аффинными алгебраическими многообразиями* (*affine algebraic variety*).¹

¹вообще говоря, кажется, что это не вполне правильное определение, так как тут это просто алгебраическое множество, а вот аффинное многообразие — окольцованное пространство. Поговорим об этом позже.

Замечание. Проверим, что это удовлетворяет аксиомам топологии:

- $V(1) = \emptyset$.
- $V(0) = \mathbb{A}_F^n$.
- $V(\bigcup_k J_k) = \bigcap_k V(J_k)$, то есть пересечение замкнутых замкнуто.

Для подмножества $X \subset \mathbb{A}_F^n$ определим $I(X) = \{f \in F[t_1, \dots, t_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in X\}$. Легко видеть, что $V(I(X)) = \text{Cl}(X)$ в топологии Зарисского. Совершенно ясно, что $I(X)$ — идеал в кольце $F[t_1, \dots, t_n]$.

Определение 6. Морфизмом аффинных алгебраических многообразий $X \subset \mathbb{A}_F^n$, $Y \subset \mathbb{A}_F^n$ называется полиномиальное отображение $X \rightarrow Y$.

Аффинные многообразия с таким набором морфизмов образуют категорию \mathfrak{Aff} .

Определение 7. Так как $\mathbb{A}_F^1 = F$, морфизмы $X \rightarrow \mathbb{A}_F^1$ — просто какие-то элементы $F[x_1, \dots, x_n]$. Соответственно, морфизмы f и g совпадают, если $f - g \in I(X)$, то есть $\text{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(X, \mathbb{A}_F^1) \cong F[t_1, \dots, t_n]/I(X)$. Это кольцо называется *аффинной алгеброй* многообразия X и обозначается $F[X]$.

Так как $\text{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(-, \mathbb{A}_F^1)$ является контравариантным функтором, а кольцевые операции определяются на $\text{Hom}_{\mathfrak{Aff}}(X, \mathbb{A}_F^1)$ естественным образом, отображение $X \mapsto F[X]$ определяет контравариантный функтор $\mathfrak{Aff} \rightarrow F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ — конечнопорожденные редуцированные алгебры.

Построим функтор в обратную сторону. Рассмотрим $R \in F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ и выберем в ней набор образующих (то есть, выберем эпиморфизм $\pi_R: F[t_1, \dots, t_n] \rightarrow R$). Рассмотрим функтор $\mathcal{X} = \text{Hom}_{F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}}(-, R): F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.} \rightarrow \mathfrak{Set}$.

Множество $\mathcal{X}(A)$ мы можем отождествить с \mathbb{A}_F^n по формуле

$$\varphi \mapsto (\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)).$$

Таким образом, $\mathcal{X}(R)$ вкладывается в \mathbb{A}_F^n при помощи отображения $\psi \mapsto \psi \circ \pi_R$. Кроме того, множество $\mathcal{X}(R) = V(\text{Ker } \pi_R)$ является аффинным алгебраическим многообразием с аффинной алгеброй $F[t_1, \dots, t_n]/I(V(\text{Ker } \pi_R))$. Так мы имеем:

$$\mathcal{X}(F[X]) = \mathcal{X}(A/I(X)) = V(I(X)) = X \quad F[X(R)] = A/I(V(\text{Ker } \pi_R)).$$

Последняя алгебра изоморфна R тогда и только тогда, когда $I(V(J)) = J$, где $R \cong A/J$.

Теорема 2 (Теорема Гильберта о нулях). Пусть $F = F^{alg}$, $J \subset F[t_1, \dots, t_n]$, а $f \in F[t_1, \dots, t_n]$. Тогда $f(V(J)) = 0 \Leftrightarrow f \in \sqrt{RJ}$. Иными словами, $f \in I(V(J)) \Leftrightarrow f \in \sqrt{RJ}$.

Другими словами, теорема Гильберта о нулях говорит нам, что над алгебраически замкнутым полем F аффинные алгебраические многообразия (замкнутые подмножества \mathbb{A}_F^n) взаимно однозначно соответствуют радикальным идеалам в $F[t_1, \dots, t_n]$ и категории \mathfrak{Aff} и $F - \mathfrak{Alg}_{fin.gen.}$ антиэквивалентны.

Аналогичные рассуждения можно провести и для замкнутых подмножеств аффинного многообразия X и радикальных идеалов его аффинной алгебры $F[X]$. При этом точкам аффинного многообразия X соответствуют максимальные идеалы $F[X]$, то есть, элементы $\text{Specm}(F[X])$.

1.3 Топология Зарисского на спектре кольца

Пусть R — кольцо, $\text{Specm } R$ — его максимальный спектр (множество его максимальных идеалов). Зададим на $\text{Specm } R$ набор замкнутых множеств

$$\tilde{V}(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{m} \in \text{Specm } R \mid \mathfrak{m} \supset J\}, \quad J \subset R.$$

При таком определении топологии X будет гомеоморфно $\text{Specm}(F[X])$ (как мы и отмечали выше, точки соответствуют максимальным идеалам).

В случае незамкнутого поля или бесконечнопорожденных алгебр правильно вместо максимального спектра рассматривать простой спектр. Топология Зарисского на нём определяется следующим образом;

$$J \subset R, \quad V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid J \subset \mathfrak{p}\}.$$

1.4 Словарик алгебраической геометрии

Геометрия	Алгебра
Замкнутые подмножества X	Идеалы в $F[X]$
Точки X	Максимальные идеалы в $F[X]$
Неприводимые замкнутые подмножества в X	Простые идеалы в $F[X]$
will be upd	will be upd.

2. Алгебраическая теория чисел

2.1 Разложение идеалов в произведение простых в кольцах целых числовых полей

Лемма 2. Пусть A — нётерово, $I \subset A$ — ненулевой идеал. Тогда существуют такие простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$, что $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_k \subset I$.

Доказательство. Предположим противное, то есть, что существуют идеалы, для которых не выполнено условие леммы. Выберем среди таких максимальный (мы можем так сделать в силу нётеровости кольца), назовём его I . Заметим, что I — не простой идеал, что означает, что $\exists x, y: \notin I: xy \in I$. Кроме того, I — собственный идеал. Значит,

$$I + (x) \supset (x), \quad I + (y) \supset I,$$

причем включение строгое. Тогда для идеалов $I + (x)$ и $I + (y)$ условие леммы уже выполняется, то есть $\exists \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ и $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$ такие, что $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k \subset I + (x)$, $\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_m \subset I + (y)$. Но тогда мы имеем

$$\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_m \subset (I + (x))(I + (y)) \subset I, \text{ так как } xy \in I,$$

что даёт нам противоречие. □

Определение 8. Пусть K/\mathbb{Q} — конечное расширение, $0 \neq I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда введём

$$I^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K \mid xI \subset \mathcal{O}_K\}.$$

Свойства:

1. $x, y \in I^{-1} \implies x + y \in I^{-1}$.
2. Если $x \in I^{-1}$, а $a \in \mathcal{O}_K$, то $ax \in I^{-1}$.

Доказательство. Действительно, $(x + y)I \subset xI + yI \subset \mathcal{O}_K$. Если $xI \subset \mathcal{O}_K$, то для $a \in \mathcal{O}_K$ мы получим $axI = xaI = xI$, так как I — идеал в \mathcal{O}_K . □

Замечание. Заметим, что $I^{-1} - \mathcal{O}_K$ -модуль. Кроме того, если $a \in I$, то aI^{-1} — идеал в \mathcal{O}_K . В частности, aI^{-1} конечнопорожден, а значит, aI^{-1} — конечнопорожденный \mathcal{O}_K -модуль.

Пример 1. Пусть $K = \mathbb{Q}$, тогда $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ и любой идеал $I \subset \mathbb{Z}$ имеет вид $I = (a)$. Тогда $(a)^{-1} = a^{-1}\mathbb{Z}$.

Лемма 3. Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — ненулевой собственный идеал. тогда $I^{-1} \neq \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Докажем, что существует $x \in K$ такой, что $x \notin \mathcal{O}_K$ и при этом $xI \in \mathcal{O}_K$. Выберем в I ненулевой элемент a . Рассмотрим $(a) \subset I$, по лемме 2 найдутся такие ненулевые $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$, что $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k \subset (a)$.

Так как I — собственный, а кольцо \mathcal{O}_K одномерно, I лежит в некотором простом идеале \mathfrak{p} . Так мы получаем цепочку включений

$$\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k \subset (a) \subset \mathfrak{p} \implies \exists i: \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}.$$

Так как оба идеала максимальны, это не включение, а равенство. Не умаляя общности, пусть $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$. Теперь, пусть $k = 1$. Тогда мы имеем $\mathfrak{p} \subset (a) \subset I \subset \mathfrak{p} \implies I = \mathfrak{p} = (a) \implies I^{-1} = a^{-1}\mathcal{O}_K$. Значит, $x = a^{-1} \notin \mathcal{O}_K$, так как иначе $I = \mathcal{O}_K$.

Теперь пусть $k \geq 2$, выберем k минимально возможным. Тогда

$$\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_k \not\subset (a) \implies \exists b \in \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_k \setminus (a).$$

Тогда мы можем взять $x = \frac{b}{a}$ и тогда $xI = \frac{b}{a}I \subset \frac{b}{a}\mathfrak{p}_1 \subset \frac{\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k}{a} \subset \frac{(a)}{a} = \mathcal{O}_K$. Остаётся проверить, что $\frac{b}{a} \notin \mathcal{O}_K$. В самом деле, если $\frac{b}{a} \in \mathcal{O}_K$, то $b \in (a)$, что противоречит выбору b . □

Замечание. Ясно, что включение $\mathcal{O}_K \subset I^{-1}$ верно всегда, так как просто по определению идеала $\forall x \in \mathcal{O}_K$ $xI \subset \mathcal{O}_K$

Возьмём $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$ и рассмотрим $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}$. С одной стороны, это идеал в \mathcal{O}_K , причём он содержит \mathfrak{p} .

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$, тогда $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = (1) = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Предположим противное, тогда в силу максимальности идеала \mathfrak{p} мы имеем $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{p} = (u_1, \dots, u_n)$, тогда если $\alpha \in \mathfrak{p}^{-1} \setminus \mathcal{O}_K$ (тут мы пользуемся леммой 3), то $\alpha u_1 \in \mathfrak{p}$ и мы можем написать систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha u_1 = \sum_{i=1}^n a_{1i} u_i \\ \alpha u_2 = \sum_{i=1}^n a_{2i} u_i \\ \vdots \\ \alpha u_n = \sum_{i=1}^n a_{ni} u_i \end{cases}$$

В матричной форме эта система будет иметь вид

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \alpha - a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha - a_{nn} \end{pmatrix}}_{=B} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0.$$

Значит, $\det B = 0$, что даёт нам унитарный многочлен с коэффициентами из \mathcal{O}_K , обнуляющий α . Тогда, так как \mathcal{O}_K — целостно, $\alpha \in \mathcal{O}_K$, противоречие. \square

Теперь мы достаточно подготовились, чтоб доказать, что в кольце \mathcal{O}_K любой идеал раскладывается в произведение простых единственным образом.

Теорема 3 (О разложении идеалов в произведение простых). Пусть $0 \neq I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда I однозначно (с точностью до перестановки сомножителей) раскладывается в произведение простых идеалов.

Доказательство. Как обычно, проходит в два этапа.

Существование: Предположим, что существуют идеалы, не раскладывающиеся в произведение простых. Среди таких идеалов возьмём максимальный, обозначим его I (мы можем так сделать, потому что \mathcal{O}_K — нётерово кольцо). Он содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$. Тогда $I\mathfrak{p}^{-1} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}_K$ — идеал. Значит, нам остаётся показать, что $I\mathfrak{p}^{-1} \neq I$. Покажем, что $II^{-1} = \mathcal{O}_K$, тогда мы сможем просто домножить и всё получится.

Лемма 5. Для любого идеала $I \subset \mathcal{O}_K$ мы имеем $II^{-1} = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Пусть это не так, тогда $II^{-1} \subset \mathfrak{q}$, где \mathfrak{q} — максимальный идеал. Тогда $II^{-1}\mathfrak{q}^{-1} \subset \mathfrak{q}\mathfrak{q}^{-1} = \mathcal{O}_K \implies I^{-1}\mathfrak{q}^{-1} \subset I^{-1}$. Так как \mathfrak{q}^{-1} не совпадает с \mathcal{O}_K , мы можем выбрать $\alpha \in \mathfrak{q}^{-1} \setminus \mathcal{O}_K$. Прodelывая рассуждение, аналогичное лемме 4 мы получаем, что $\alpha \in \mathcal{O}_K$, что даёт нам противоречие. \square

Итак, если $I\mathfrak{p}^{-1} = I$, то $\mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}_K$, что противоречит лемме 3. Значит, $I \subset I\mathfrak{p}^{-1}$, следовательно мы можем разложить $I\mathfrak{p}^{-1}$ в произведение простых:

$$I\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_k \implies I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_k \cdot \mathfrak{p},$$

что и требовалось.

Единственность: Пусть $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_n$, тогда $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_m \subset \mathfrak{q}_1 \implies \exists i: \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}_i$, а так как они максимальны, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$, что даёт нам противоречие. \square

Определение 9. Пусть $I \subset K$. I называется *дробным идеалом*, если $\exists x \neq 0: xI \subset \mathcal{O}_K$ — идеал.

Пример 2. I^{-1} — дробный идеал.

Утверждение 1. Ненулевые дробные идеалы образуют группу по умножению.

Доказательство. Легко заметить, что произведение дробных идеалов — дробный идеал. Обратный определяется как и раньше:

$$I^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K \mid xI \subset \mathcal{O}_K\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $II^{-1} = \mathcal{O}_K$. □

Из теоремы 3 следует, что любой дробный идеал раскладывается в произведение простых идеалов (возможно, с отрицательными степенями). Действительно, пусть J — дробный идеал, тогда для некоторого $x \in K$ $xJ = I$ — идеал в \mathcal{O}_K , тогда

$$J = (x)^{-1}I = \mathfrak{p}_1^{-1} \dots \mathfrak{p}_k^{-1} \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_m.$$

Значит, группа дробных идеалов — свободная абелева группа, образующие которой — элементы $\text{Срес } \mathcal{O}_K$.

Пример 3. Для кольца \mathbb{Z} дробные идеалы соответствуют рациональным числам.

Домашнее задание 1. Задачи:

1. Докажите, что кольцо \mathcal{O}_K факториально тогда и только тогда, когда \mathcal{O}_K — кольцо главных идеалов.
2. Разложите число $33 + 11\sqrt{-7}$ на неприводимые в кольце \mathcal{O}_K , где $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$.
3. Пусть $\mathfrak{p} \in \text{Срес } \mathcal{O}_K$. Введём на группе дробных идеалов *нормирование* следующим образом: $v_{\mathfrak{p}}(I) =$ степень, с которой \mathfrak{p} входит в разложение дробного идеала I . Иными словами,

$$I = \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(I)} \cdot \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m.$$

Для $a \in K^*$ определим $v_{\mathfrak{p}}(a) \stackrel{\text{def}}{=} v_{\mathfrak{p}}((a))$. Так вот, докажите, что:

- $v_{\mathfrak{p}}(I + J) = \min(v_{\mathfrak{p}}(I), v_{\mathfrak{p}}(J))$.
- $v_{\mathfrak{p}}(I \cap J) = \max(v_{\mathfrak{p}}(I), v_{\mathfrak{p}}(J))$.
- $v_{\mathfrak{p}}(a + b) \geq \min(v_{\mathfrak{p}}(a), v_{\mathfrak{p}}(b))$ и равенство достигается в случае $v_{\mathfrak{p}}(a) \neq v_{\mathfrak{p}}(b)$.
- $v_{\mathfrak{p}}(IJ) = v_{\mathfrak{p}}(I) + v_{\mathfrak{p}}(J)$.
- $v_{\mathfrak{p}}(ab) = v_{\mathfrak{p}}(a) + v_{\mathfrak{p}}(b)$.

Таким образом, $v_{\mathfrak{p}}$ — гомоморфизм $K^* \rightarrow \mathbb{Z}$. Этот гомоморфизм называют *дискретным нормированием*, соответствующим идеалу \mathfrak{p} .

2.2 Дискриминант

Определение 10. Пусть K/F — конечное сепарабельное расширение, $[K : F] = n$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда *дискриминант* набора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — это

$$\text{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\text{Tr}_{K/F}(\alpha_i \alpha_j)).$$

Так как расширение K/F сепарабельно, у нас есть ровно $n = [K : F]$ вложений $\sigma_1, \dots, \sigma_n: K \rightarrow \mathbb{C}$ (на самом деле, мы знаем, что в \mathbb{Q}^{alg}).

Утверждение 2. $\text{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\det(\sigma_i(\alpha_j)))^2$.

Доказательство. Положим $\sigma_i(\alpha_j) = A$ и рассмотрим $A^t A$, тогда

$$(A^t A)_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma(\alpha_i) \sigma_k(\alpha_j) = \sum_{k=1}^n \sigma_k(\alpha_i \alpha_j) = \text{Tr}_{K/F}(\alpha_i \alpha_j).$$

□

Посмотрим теперь, как след меняется при линейном преобразовании. Пусть $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)M$, $M \in M_n(F)$.

Утверждение 3. $\text{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{disc}(\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot (\det M)^2$.

Доказательство. Действительно, это напрямую следует из предложения 2:

$$\text{disc}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \det(\sigma_i(\alpha_j))^2 = \det(\sigma_i(\alpha_j))M^2 = \text{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot (\det M)^2.$$

□

Утверждение 4. $\text{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — линейно зависимы, e_1, \dots, e_n — базис K/F .

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (e_1, \dots, e_n)M, \quad \det M = 0.$$

Значит, по предложению 3 мы имеем $\text{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. Теперь докажем в обратную сторону. Предположим, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — линейно независимы, но $\text{disc}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\text{Tr}_{K/F}(\alpha_i \alpha_j)) = 0$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\text{Tr}_{K/F}((x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n) \alpha_j) = 0, \dots, 1 \leq j \leq n.$$

Так как матрица коэффициентов этой системы — $\text{Tr}_{K/F}(\alpha_i \alpha_j)$, а она вырождена, система имеет нетривиальное решение (x_1, \dots, x_n) . Так как $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — линейно независимы,

$$y = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n \neq 0.$$

С другой стороны, $\text{Tr}_{K/F}(y \alpha_j) = 0 \forall j$. Так как α_i образуют базис K/F , по линейности мы получаем, что $\text{Tr}_{K/F}(yu) = 0 \forall u \in K$. Но, так как расширение K/F сепарабельно, $\text{Tr}_{K/F}$ должен быть невырожденной формой².

□

Лемма 6. Пусть $B \subset A$ — свободные абелевы группы ранга n . Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — базис A , а $\left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j \right\}$ — базис B , $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда $|A/B| = |\det(a_{ij})|$.

Доказательство. Приведём матрицу (a_{ij}) нормальной форме Смита. Перечислим теперь элементы A/B : это в точности элементы $x_1 \omega_1 + \dots + x_n \omega_n$, $0 \leq x_i \leq a_{ii} - 1$. Если мы докажем, что это в точности все попарно-различные элементы группы A/B , то утверждение будет ясно.

Пусть $\sum_{i=1}^n x_i \omega_i = \sum_{i=1}^n y_i \omega_i$, тогда $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \omega_i \in B$. Посмотрим на коэффициент при ω_{11} , он может получаться только из первой строки матрицы (так как матрица верхнетреугольная), тогда $\ell a_{11} = x_1 - y_1$, но это равенство возможно только в случае, когда $x_1 = y_1$ (так как есть ограничения на x_i и y_i). Далее мы проделаем аналогичное рассуждение $\sum_{i=2}^n (x_i - y_i) \omega_i \in B$ и в итоге получим, что все такие элементы различны.

Теперь рассмотрим $a = x_1 \omega_1 + \dots + x_n \omega_n$, $x_i \in \mathbb{Z}$. Поделим с остатком: $x_1 = a_{11}q + r$, $0 \leq r < a_{11}$, и рассмотрим $x_1 \omega_1 + \dots + x_n \omega_n - q(a_{11} \omega_1 + \dots + a_{1n} \omega_n) = r \omega_1 + x'_2 \omega_2 + \dots$. Так как мы вычли из a элемент из B , класс $\bar{a} \in A/B$ не изменился, а старшим коэффициентом стал r , лежащий в нужном диапазоне. Продолжая в том же духе, мы получим, что все коэффициенты лежат в нужном диапазоне. □

Как мы помним, \mathcal{O}_K — свободная абелева группа ранга $n = [K : \mathbb{Q}]$ и $\mathcal{O}_K = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \omega_i$, а базис $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ мы называем *целым базисом*.

Определение 11. Пусть K/\mathbb{Q} — расширение степени n , $\mathcal{O}_K = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \omega_i$. Тогда

$$\text{disc}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \text{disc}(\omega_1, \dots, \omega_n).$$

²Этим утверждением из теории полей мы пользуемся без доказательств. Доказательство этого утверждения можно прочитать в S. Lang “Algebra”.

Замечание. Дискриминант поля не зависит от выбора целого базиса. Действительно, если у нас есть какой-то другой целый базис (u_1, \dots, u_n) , то

$$\begin{aligned}(\omega_1, \dots, \omega_n)M &= (u_1, \dots, u_n), \quad M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}). \\(u_1, \dots, u_n)M^{-1} &= (\omega_1, \dots, \omega_n) \\ \mathrm{disc}(u_1, \dots, u_n) &= \mathrm{disc}(\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot \underbrace{(\det M)^2}_{=1}\end{aligned}$$

Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$, положим $\mathrm{ind}(\theta) = [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]] = |\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}[\theta]|$.

Утверждение 5. В описанной выше ситуации $\mathrm{disc}(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = \mathrm{ind}(\theta)^2 \cdot \mathrm{disc}(K)$.

Доказательство. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — целый базис. Тогда

$$(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = (\omega_1, \dots, \omega_n)M \implies \mathrm{disc}(1, \dots, \theta^{n-1}) = \mathrm{disc}(K)(\det M)^2.$$

Нетрудно заметить, что по лемме 6 мы имеем $|\det M| = \mathrm{ind}(\theta)$. □

Пример 4. Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^3 - \theta - 1 = 0$. Как мы помним из домашнего задания, $\mathrm{disc}(1, \theta, \theta^2) = -23$. Пользуясь предложением 5 мы получаем, что $-23 = (\mathrm{ind}(\theta))^2 \cdot \mathrm{disc} K \implies \mathrm{ind} \theta = 1$, из чего следует, что $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

Пример 5. Пусть $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^3 - \theta - 4 = 0$. Как мы помним, $\mathrm{disc}(1, \theta, \theta^2) = -4 \cdot 107 = (\mathrm{ind} \theta)^2 \cdot \mathrm{disc} K$. Тогда $\mathrm{ind} \theta = 1$ или $\mathrm{ind} \theta = 2$. С другой стороны, так как $\frac{\theta + \theta^2}{2} \in \mathcal{O}_K$, $\notin \mathbb{Z}[\theta]$, $\mathrm{ind}(\theta) \neq 1$. Значит, $\mathrm{ind} \theta = 2$, из чего мы имеем разложение

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta \oplus \mathbb{Z}\frac{\theta + \theta^2}{2}.$$

Домашнее задание 2. Задачи:

1. Предположим, что K/F — расширение Галуа, $[K : F]$ — нечётна. Докажите, что тогда для любого базиса e_1, \dots, e_n расширения K/F будет выполнено $\mathrm{disc}(e_1, \dots, e_n) \in F^{*2}$.
2. Рассмотрим $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$. Тогда $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-1}$ образуют базис K/\mathbb{Q} . Докажите, что $|\mathrm{disc}(\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-1})| = p^{p-2}$. *Hint:* тут можно действовать строго согласно определению 10.
3. Пусть K/\mathbb{Q} — расширение степени n , $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ и пусть p — такое простое число, что $v_p(a_0) = 1$ и $v_p(a_i) \geq 1$. Докажите, что тогда $p \nmid \mathrm{ind}(\theta)$.
4. Докажите, что если $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$, где p — простое, то $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$, где $\zeta^p = 1$.
5. Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ — максимальные идеалы кольца \mathcal{O}_K , $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует $\alpha \in K^*$: $v_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = n_i \forall 1 \leq i \leq k$.
6. Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал, J — дробный идеал. Докажите, что $\exists x \in K^*$: $xJ + I = \mathcal{O}_K$.
7. Докажите, что любой дробный идеал порождается двумя элементами.

Приведём сейчас другое, конструктивное доказательство того, что \mathcal{O}_K — конечнопорожденная абелева группа.

Возьмем $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \mathcal{O}_K$, где $\omega_1, \dots, \omega_n$ — базис K на \mathbb{Q} . Тогда $\mathrm{disc}(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{Z}$, возьмем набор $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ с минимальным модулем дискриминанта. Докажем, что тогда он и будет целым базисом.

Возьмем $x \in \mathcal{O}_K$, $x = \sum a_i \omega_i$, $a_i \in \mathbb{Q}$ и покажем, что $a_i \in \mathbb{Z}$. Предположим противное, не умаляя общности $a_1 \notin \mathbb{Z}$.

$$x \in \mathcal{O}_K \implies \sum \{a_i\} \omega_i = x - \sum [a_i] \omega_i \in \mathcal{O}_K.$$

Перейдём к набору $(\sum \{a_i\} \omega_i, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Покажем, что модуль его дискриминанта уменьшился. Действительно,

$$(\sum \{a_i\} \omega_i, \omega_2, \dots, \omega_n) = (\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot \begin{pmatrix} \{a_1\} & \dots & \dots & \dots \\ \{a_2\} & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{a_n\} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

а определитель матрицы, написанной справа равен $\{a_1\} \leq 1$.

Напоминание про нормальную форму Смитта:

Пусть $B \subset A$ — свободные абелевы группы ранга n , причем $A = \bigoplus \mathbb{Z}x_i$, $B = \langle \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, 1 \leq i \leq n \rangle$. Тогда мы можем явно вычислить задание факторгруппы A/B образующими и соотношениями.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим автоморфизм группы A , который переводит x_1 в $x_1 + cx_2$, $c \in \mathbb{Z}$, а остальные образующие переводит в себя. Что произойдет с матрицей в результате этого изоморфизма? Ко второму столбцу прибавится первый, умноженный на c . Аналогично мы можем делать для любых столбцов. Кроме того, мы можем менять их местами посредством изоморфизмов вида $x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto x_1$. При таких преобразованиях факторгруппа B/A будет оставаться такой же, так как: $A/B \cong A/f(B)$. Соответственно, с помощью таких операций матрицу мы можем диагонализировать. В итоге мы получим диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

2.3 Норма идеала

Определение 12. Пусть K/\mathbb{Q} — конечное расширение, $0 \neq I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Тогда, как мы знаем, $|\mathcal{O}_K/I| < \infty$. *Нормой идеала I* мы будем называть целое число

$$N_{K/\mathbb{Q}}(I) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathcal{O}_K/I|$$

Замечание. Вообще говоря, норма идеала определяется для любого дедекиндова кольца, соответствующего некоторому расширению и обычно является идеалом. В нашем случае мы рассматриваем кольцо целых, где для любого идеала можно выбрать наименьшую по модулю неотрицательную порождающую, поэтому у нас норма — число.

Хотелось бы, чтоб норма главного идеала была равна норме порождающего его элемента (в смысле нормы для расширения полей).

Утверждение 6. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — целый базис \mathcal{O}_K . Тогда $N((a)) = |N_{K/\mathbb{Q}}(a)|$.

Доказательство. Пусть $a\omega_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}\omega_j$, $b_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда $N(a) = \det(b_{ij})$. С другой стороны, мы доказали, что $|\det(b_{ij})| = |\mathcal{O}_K/a\mathcal{O}_K|$. □

Заметим, что тогда мы получаем и мультипликативность для главных идеалов:

$$N((a))N((b)) = |N_{K/\mathbb{Q}}(a)||N_{K/\mathbb{Q}}(b)| = |N_{K/\mathbb{Q}}(ab)| = N((ab)).$$

Хотелось бы теперь обобщить это на произвольные идеалы. Для этого нам понадобятся задачи из ДЗ 2.

Лемма 7 (Задача 5 из ДЗ 2). Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ — максимальные идеалы кольца \mathcal{O}_K , $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует $\alpha \in K^*$: $v_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = n_i \forall 1 \leq i \leq k$.

Доказательство. Заметим, что идеалы $\mathfrak{p}_i^{n_i}$ попарно взаимнопросты. Выберем $x_i \in \mathfrak{p}_i^{n_i} \setminus \mathfrak{p}_i^{n_i+1}$. Тогда по КТО существует $x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{n_i+1}}$. Тогда

$$v_{\mathfrak{p}_i}(x) = v_{\mathfrak{p}_i}((x - x_i) + x_i) = n_i.$$

□

Лемма 8 (Задача 6 из ДЗ 2). Пусть $I \subset \mathcal{O}_K$ — идеал, J — дробный идеал. Докажите, что $\exists x \in K^*: xJ + I = \mathcal{O}_K$.

Доказательство. Во-первых, J сразу можно полагать целым, так как мы можем сначала домножить его на элемент, превращающий его в целый, а потом уже что-то с ним делать. Разложим I в произведение простых:

$$I = \mathfrak{p}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_m^{k_m}.$$

Соответственно, легко найти $y \in K^*: v_{\mathfrak{p}_i}(yJ) = 0$. Проблема в том, что yJ может оказаться не целым идеалом. Предположим, что это так.

$$yJ = \prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{q}_i^{-r_i} \cdot \prod_{j=1}^r \mathfrak{r}_j^{\ell_j}, \text{ где } \ell_i \geq 0, r_i \geq 0.$$

Выберем $\tilde{y} \in \mathcal{O}_K: v_{\mathfrak{q}_i}(\tilde{y}) = r_i, v_{\mathfrak{p}_i}(\tilde{y}) = 0$, тогда ясно, что $y\tilde{y}J$ — целый идеал, который не делится на \mathfrak{p}_i , следовательно он взаимнопрост с I , что и требовалось. \square

Теорема 4 (Задача 7 из ДЗ 2). Любой дробный идеал I порождается двумя элементами.

Доказательство. Возьмем $x \in \mathcal{O}_K$ такой, что $xI^{-1} \subset \mathcal{O}_K$ — целый идеал. Тогда по лемме 8 (тут у нас xI^{-1} — целый идеал, I^{-1} — дробный) найдётся $y \in K^*$ такой, что

$$xI^{-1} + yI^{-1} = \mathcal{O}_K \implies xI^{-1}I + yI^{-1}I = I \implies I = (x) + (y) = (x, y).$$

\square

Домашнее задание 3 (Осторожно, открытая задача). Существует ли кольцо, в котором каждый идеал порождается тремя элементами, причём, есть идеал, который не порождается двумя элементами.

Теорема 5 (Мультипликативность нормы идеала). Если I, J — два ненулевых идеала в \mathcal{O}_K , то для их норм верно равенство $N(IJ) = N(I)N(J)$.

Доказательство. Сравним индексы: $|\mathcal{O}_K/IJ| = |\mathcal{O}_K/I| \cdot |I/IJ|$. Значит, остаётся показать, что $|\mathcal{O}_K/J| = |I/IJ|$. По лемме 8 найдём $x \in K^*: xI + J = \mathcal{O}_K$. Тогда воспользуемся теоремой о гомоморфизме и взаимной простотой:

$$|\mathcal{O}_K/J| = |(xI + J)/J| = |xI/xI \cap J| = |xI/xIJ| = |I/IJ|.$$

\square

2.4 Индекс ветвления и степень инерции

Возьмем простое число $p \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим главный идеал $(p) = p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Этот же идеал мы можем рассматривать, как главный идеал в кольце \mathcal{O}_K . Там он уже не обязательно будет простым, но будет раскладываться в произведение простых:

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_k^{e_k},$$

причем набор идеалов \mathfrak{p}_i будет своим для каждого простого числа p (т.е. для различных простых чисел эти наборы не будут пересекаться). Кроме того, если $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ — простой идеал, то $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ будет идеалом в \mathbb{Z} , причем простым, значит для некоторого простого p мы получим $(p) \subset \mathfrak{p}$. Тогда $(p)\mathfrak{p}^{-1} \subset \mathcal{O}_K$, следовательно мы можем разложить его на простые:

$$(p) = \mathfrak{p} \cdot \dots$$

Таким образом, простые идеалы в \mathcal{O}_K находятся в соответствии с простыми числами.

Иными словами, над каждым простым числом $p, q, \dots \in \mathbb{Z}$ находится сколько то идеалов $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_2, \dots\}$, $\{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots\}$. Эти наборы не будут пересекаться и, кроме того, будут покрывать все простые идеалы в \mathcal{O}_K .

Определение 13. Степень e_i называется *индексом ветвления* идеала \mathfrak{p}_i .

Определение 14. Как известно, для $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$ факторкольцо $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ будет полем. Это поле — конечное расширение \mathbb{F}_p так как у нас есть естественное вложение $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Значит, $|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}| = p^f$. Число f называется *степенью инерции* идеала \mathfrak{p} . Иными словами, *степень инерции* — это $[\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} : \mathbb{F}_p]$.

Заметим, что $|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}| = N(\mathfrak{p})$. Возьмем простое число p и рассмотрим главный идеал $p\mathcal{O}_K$. Тогда если $n = [K : \mathbb{Q}]$, то

$$p^n = N_{K/\mathbb{Q}}(p) = N(p\mathcal{O}_K) = \prod_{i=1}^k N(\mathfrak{p}_i)^{e_i} = \prod_{i=1}^k (p^{f_i})^{e_i}.$$

Тогда, приравнявая степени, мы получаем формулу, устанавливающую соотношение между *индексом ветвления*, *степенью инерции* и *степенью расширения*:

$$\sum_{i=1}^k e_i f_i = n. \quad (1)$$

Нетрудно заметить, что случае квадратичного расширения индекс ветвления, как и степень инерции, будут равны единице. Таакэе ясно, что $1 \leq e_i f_i \leq n$, то есть, эти числа не могут быть произвольными.

Ветвление при расширении Галуа:

Пусть K/\mathbb{Q} — конечное расширение. Тогда группа Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ действует и на идеалах кольца \mathcal{O}_K . Кроме того, она оставляет на месте $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, так как $\forall \sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \cong \sigma\mathcal{O}_K/\sigma\mathfrak{p} \cong \mathcal{O}_K/\sigma\mathfrak{p}$.

Теорема 6. Действие $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ на множестве простых идеалов, висящих над простым числом p .

Доказательство. Предположим, что есть два простых идеала $\mathfrak{p}, \tilde{\mathfrak{p}}: \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p) = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathbb{Z}$, для которых утверждение теоремы не верно. Тогда

$$\{\sigma\mathfrak{p} \mid \sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})\} \cap \{\sigma\tilde{\mathfrak{p}} \mid \sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})\} = \emptyset.$$

По КТО мы можем выбрать такой элемент $x \in \mathcal{O}_K$, что

$$x \equiv 0 \pmod{\sigma\mathfrak{p}} \quad x \equiv 1 \pmod{\sigma\tilde{\mathfrak{p}}} \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

Применим теперь норму:

$$N_{K/\mathbb{Q}}(x) = \prod_{\tau \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})} \tau x \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathbb{Z} \implies N_{K/\mathbb{Q}}(x) \in \tilde{\mathfrak{p}}.$$

Значит, так как $\tilde{\mathfrak{p}} \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$, $\exists \tau \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q}): \tau x \in \tilde{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow x \in \tau^{-1}\tilde{\mathfrak{p}}$. Но, с другой стороны, ранее мы отметили, что $\forall \tau \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \tau x \equiv 1 \pmod{\tilde{\mathfrak{p}}}$. \square

Так как действие транзитивно, $\exists \sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q}): \sigma\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_k^{e_k} = \sigma(\mathfrak{p}\mathcal{O}_K) = \sigma(\mathfrak{p}_1)^{e_1} \cdots \sigma(\mathfrak{p}_k)^{e_k} = \mathfrak{p}_2^{e_1} \cdots$$

Значит, в силу единственности разложения, мы получаем $e_1 = e_2$. В силу транзитивности, мы можем сделать так для любой пары индексов, из чего следует нужное нам. Тогда в случае расширения галуа все индексы ветвления равны. Аналогично мы можем сделать и для степеней инерции. Тогда равенство (1) примет весьма простой вид: $efk = n$.

Ветвление при квадратичном расширении:

Пусть $p \neq 2$ — простое число, рассмотрим расширение $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$, где d — целое и свободно от квадратов. Тогда в силу формулы $\sum e_i f_i = 2$ мы получаем, что возможны такие варианты разложения:

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2, \quad (p) = \mathfrak{p}, \quad (p) = \mathfrak{p}^2.$$

Пусть $p \mid d$, тогда $(p) = (p, \sqrt{d})^2$. Действительно, нам надо проверить

$$(p) = (p^2, p\sqrt{d}, d) \Leftrightarrow (1) = \left(p, \sqrt{d}, \frac{d}{p}\right),$$

а это так, потому что $(p, \frac{d}{p}) = 1$. Кроме того, заметим, что отсюда в частности следует, что идеал $(p, \sqrt{d})^2$ — простой.

Теперь рассмотрим случай, когда $p \nmid d$. Начнём со случая, когда $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$. Тогда $x^2 - d = pm$. Тогда

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, \text{ где } \mathfrak{p}_1 = (p, x + \sqrt{d}), \mathfrak{p}_2 = (p, x - \sqrt{d}).$$

Действительно, перемножим эти идеалы:

$$\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 = (p^2, p(x - \sqrt{d}), p(x + \sqrt{d}), pm) = (p) \Leftrightarrow (p, x - \sqrt{d}, x + \sqrt{d}, m) = (1).$$

Идеал слева не будет единичным тогда и только тогда все образующие делятся на p . На m здесь вообще можно не смотреть. Но, $p \nmid x \Rightarrow (p, 2x) = (1)$.

Остаётся случай, когда $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$. Предположим, что $d \not\equiv 1 \pmod{4}$. Тогда

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - d) \Rightarrow \mathcal{O}_K/(p) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 - d, p) = \mathbb{F}_p[x]/(x^2 - d) - \text{поле}$$

откуда следует, что идеал (p) максимален. Тепеь, если $d \equiv 1 \pmod{4}$,

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1 + \sqrt{d}}{2}\right] \Rightarrow \mathcal{O}_K/(p) \cong \mathbb{Z}[x]/\left(x^2 - x + \frac{1-d}{4}, p\right) \cong \mathbb{F}_p/\left(x^2 - x + \frac{1-d}{4}\right) - \text{поле},$$

так как дискриминант многочлена $x^2 - x + \frac{1-d}{4}$ равен d , а d — невычет по модулю p .

Домашнее задание 4. Задачи:

1. Разобрать случай $p = 2$ в выкладках выше.
2. Пусть K/\mathbb{Q} — расширение степени n , $K = \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ и пусть p — такое простое число, что $v_p(a_0) = 1$ и $v_p(a_i) \geq 1$. Докажите, что тогда $p \nmid \text{ind}(\theta)$.

3. Основы теории гомологий

3.1 Симплициальные гомологии

Определение 15. Цепным комплексом абелевых групп (C_\bullet, ∂) называется последовательность абелевых групп и морфизмов вида

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} \dots, \quad \text{где } C_i \text{ — абелевы группы}$$

при условии $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Если комплекс обрывается с одной из сторон, то мы считаем, что он дополнен нулями.

Элементы группы C_q называют q -мерными цепями, а отображение ∂ называют (граничным) дифференциалом.

Замечание. Ясно, что условие $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ равносильно тому, что $\text{Ker } \partial_q \supset \text{Im } \partial_{q+1}$.

Замечание. Когда комплекс снабжают отображением $C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$, это отображение называют *аугументацией*.

Определение 16. Гомологиями комплекса (C_\bullet, ∂) называют абелевы группы

$$H_q(C_\bullet, \partial) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \partial_q / \text{Im } \partial_{q+1}.$$

Если комплекс снабжен аугументацией и обрывается на нулевом члене, то у него также есть *приведённые гомологии*

$$H_0(C_\bullet, \partial) = C_0 / \text{Im } \partial_1, \quad \widetilde{H}_0(C_\bullet, \partial) = \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1, \quad \widetilde{H}_q = H_q \quad \forall q > 0,$$

которые отличаются от обычных только в нулевом члене.

Перед тем как что-то строго определять, посмотрим нестрого на какие-то мотивирующие примеры вычислений. Для этого лучше всего подойдут *симплициальные гомологии*. Неформально, идея состоит в том, что мы разбиваем топологическое пространство X на симплексы всех размерностей и говорим, что $C_q(X, \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа, порожденная всеми q -мерными симплексами (то есть, мы рассматриваем целочисленные формальные линейные комбинации симплексов). Дифференциалом ∂ будет оператор взятия границы (топологической).

Пример 6 (Симплициальные гомологии отрезка (нестрого)). Пусть X — отрезок $[a, b]$ с ориентацией из b в a . В нём две нульмерные клетки, значит $C_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$, одномерная клетка одна — ребро e , то есть $C_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и комплекс устроен следующим образом:

$$\dots 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z},$$

так как мы можем определить аугументацию следующим образом: $x \in C_0 \Rightarrow x = k_1 a + k_2 b$, положим $\varepsilon(x) = k_1 + k_2$. То есть, на самом деле комплекс выглядит вот так:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[e \rightarrow \partial e = a - b]{} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow[a \rightarrow 1, b \rightarrow 1]{} \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $\varepsilon \circ \partial = 0$.

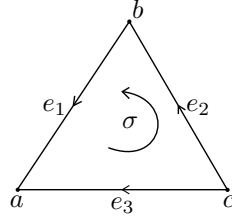
Гомологиями топологического пространства называют гомологии построенного по нему комплекса. В нашем случае

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = 0/0 = 0.$$

$$\widetilde{H}_0(X, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \varepsilon / \text{Im } \partial_1 = \langle a - b \rangle / \langle a - b \rangle = 0.$$

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) / \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle / \langle a - b \rangle = \langle a \rangle = \mathbb{Z}$$

Пример 7 (Симплициальные гомологии треугольника). Рассмотрим треугольник (abc) с внутренностью σ , ориентированной против часовой стрелки, и рёбрами $b \xrightarrow{e_1} a$, $c \xrightarrow{e_3} a$, $c \xrightarrow{e_2} b$.



Тогда цепной комплекс, построенный по треугольнику будет устроен следующим образом:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[\sigma \rightarrow e_1 + e_2 - e_3]{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Из ориентации σ ясно, что $\partial\sigma = e_1 + e_2 - e_3$, $\partial e_1 = b - c$, $\partial e_2 = a - b$, $\partial e_3 = a - c$. Ясно, что вторые гомологии нулевые:

$$H_2(X, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_2 / 0 = 0$$

Посчитаем теперь первые.

$$\begin{aligned} \partial(k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3) &= k_1(b - c) + k_2(a - b) + k_3(a - c) = a(k_2 + k_3) + b(k_1 - k_2) + c(-k_1 - k_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Ker } \partial_1 = \langle (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid k_1 = k_2 = -k_3 \rangle \end{aligned}$$

С другой стороны, $\text{Im } \partial_2 = k(e_1 + e_2 - e_3)$. Тем самым, $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$. Аналогичным вычислением мы получаем, что $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Пример 8 (Симплициальные гомологии треугольника без внутренности). Пусть теперь всё также, как в примере 7, но у треугольника нет внутренности. Тогда цепной комплекс будет иметь вид

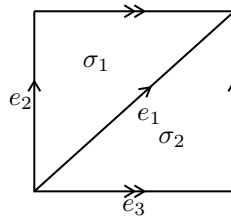
$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$$

Из того, как поменялись отображения, ясно, что поменялись только первые гомологии. Теперь $H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$, а образующая — это цикл $e_1 + e_2 - e_3$. С другой стороны, $\pi_1(\Delta) = \mathbb{Z}$.

Замечание. Когда-нибудь позже мы докажем, что для любого симплициального пространства X есть отображение

$$\pi_1(X) \rightarrow H_1(X) = \pi_1(X)^{ab} = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Пример 9 (Симплициальные гомологии тора \mathbb{T}^2). Рассмотрим двумерный тор \mathbb{T}^2 , разбитый на симплексы следующим образом:



Из такой триангуляции ясно, что комплекс будет иметь вид:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Посчитаем дифференциал на двумерных клетках: $\partial\sigma_1 = e_1 - e_3 - e_2$, $\partial\sigma_2 = e_2 + e_3 - e_1$. С другой стороны, ясно, что дифференциал зануляется на любой одномерной клетке, $\partial e_i = a - a = 0$.

$$H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_2 / 0 = \mathbb{Z}.$$

так как $\partial\sigma_1 = -\partial\sigma_2 \Rightarrow \text{Ker } \partial_2 = \mathbb{Z}$.

Также прямыми вычислениями можно убедиться, что $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2)^{ab}$. Образующими первых гомологий будут e_2 и e_3 .

Упражнения.

1. Посчитать по определению одномерные гомологии связного дерева.
2. Посчитать по определению все гомологии n -мерного симплекса T^n

$$T^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (t_0, \dots, t_n) \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

3. Покажите, что барицентрическое подразбиение не меняет симплициальных гомологий.

Вообще говоря, далее нужно формально доказывать, что гомологии не зависят от симплициального разбиения пространства (и выяснять, у каких пространств это симплициальное разбиение вообще есть), но мы этим всем заниматься не будем, так как в нашем курсе основной будет другая теория.

3.2 Сигнулярные гомологии

Определение 17. Пусть X — топологическое пространство.

- *Сингулярным q -мерным симплексом* мы будем называть непрерывное отображение $f: T^q \rightarrow X$.
- Его граница определяется, как формальная линейная комбинация

$$\partial f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^q (-1)^i \Gamma_i f,$$

где $\Gamma_i f$ — сужение f на грань $t_i = 0$ (сумма именно такая, так как у q -мерного симплекса $q+1$ грань).

- *Сингулярными q -мерными цепями $C_q(X, \mathbb{Z})$* мы будем называть формальные целочисленные линейные комбинации конечного числа q -мерных сингулярных симплексов (то есть порожденную ими свободную абелеву группу).
- Дифференциал комплекса³ C_\bullet определяется, как продолжение по линейности оператора взятия границы q -мерного сингулярного симплекса.
- Комплекс сингулярных цепей может быть снабжен аугументацией $\varepsilon: C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, $\sum k_i f_i \rightarrow \sum k_i$.

Замечание. Формально говоря, мы пока не знаем, что комплекс из сингулярных цепей — это комплекс. Для этого нам понадобится следующая техническая

Лемма 9. В контексте определения 17 $\partial^2 = 0$.

Доказательство. Посчитаем $\partial \partial f$:

$$\partial \partial f = \partial \left(\sum_i (-1)^i \Gamma_i f \right) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \Gamma_j \Gamma_i f.$$

Ясно, что любую грань коразмерности 2 можно получить взятием границы двумя способами. Действительно, если $j < i$, то $\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_j \Gamma_{i+1}$ (i -я из оставшихся после выкидывания j -й координаты — $i+1$ -я изначально), а в сумме слагаемые $\Gamma_i \Gamma_j$ и $\Gamma_j \Gamma_{i+1}$ будут с разным знаком, значит $\partial \partial f = 0$. \square

Определение 18. *Сингулярными гомологиями* топологического пространства X называются гомологии комплекса сингулярных цепей. Мы будем обозначать их, как $H_k(X)$ или $H_k^{\text{sing}}(X)$.

В топологическом контексте группу $Z_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \partial_q$ часто называют *q -циклами*⁴, а группу $B_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im } \partial_{q+1}$ — *q -границами*. В этом смысле $H_q(X)$ — циклы с точностью до границ.

Замечание. Из определения очевидно, что сингулярные гомологии зависят только от класса гомеоморфизма пространства X (их основной плюс и состоит в том, что тут это очевидно).

Теперь попробем посчитать по определению сингулярные гомологии для какого-нибудь пространства. Оказывается, что по определению сделать это возможно разве что для точки.

³формально, мы пока еще не знаем, что это комплекс.

⁴позже мы увидим, какая в этом геометрическая интуиция

Теорема 7 (Сингулярные гомологии точки).

$$H_q^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad \tilde{H}_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Итак, как мы помним, $C_q(*)$ — все линейные комбинации отображений $f: T^q \rightarrow *$. Так как отображений из T^n в точку всего одно, $\forall n \ C_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, а значит, наш комплекс сингулярных цепей $(C_\bullet(*, \mathbb{Z}), \partial)$ будет иметь вид:

$$\dots \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}.$$

Теперь посчитаем дифференциалы комплекса.

Возьмем $f \in C_1$, это какая-то формальная линейная комбинация отображений из $[a, b] \rightarrow \{*\}$. Тогда ∂f — это $f|_a - f|_b = 0$. Впрочем, и сразу ясно, что в случае любого n , так как наше отображение действует в точку (оно постоянно), сужения на все грани будут совпадать и результат в сумме будет зависеть лишь от четности n , то есть дифференциалы комплекса будут иметь вид:

$$\dots \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \dots \xrightarrow{\cdot 1 = \text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Иными словами, $\partial_n = 0$, если n — нечетное и тождественно иначе. Теперь, как нетрудно заметить,

$$\forall q > 0 \quad \text{Ker } \partial_q = \text{Im } \partial_{q+1} \Rightarrow H_q^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad \tilde{H}_0^{\text{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Трудности, возникшие при подсчетах, намекают на то, что для отрезка, например, это будет сделать еще гораздо труднее. С другой стороны, если вдруг окажется, что гомологии гомотопически инвариантны, то мы будем знать, какие гомологии у всех стягиваемых пространств (так как для точки мы посчитали).

В дальнейшем, будем использовать для сингулярных гомологий обозначение H_k .

3.3 Немного гомологической алгебры

Рассмотрим категорию цепных комплексов \mathfrak{Ch} (в нашем случае абелевых групп, но в принципе, всё что тут будет сказано справедливо и в случае $R - \mathfrak{Mod}$). Морфизмом цепных комплексов (C_\bullet, ∂) и (D_\bullet, δ) называется набор отображений $f = \{f_i\}$, где $f_i \in \text{Hom}(C_i, D_i)$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots \\ \downarrow & & \downarrow f_{q+1} & & \downarrow f_q & & \downarrow f_{q-1} \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{q+2}} & D_{q+1} & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\delta_q} & D_{q-1} \xrightarrow{\delta_{q-1}} \dots \end{array}$$

коммутативна, то есть $\forall i \ f_i \circ \partial_{i+1} = \delta_{i+1} \circ f_{i+1}$.

Лемма 10. Сопоставление цепному комплексу его k -й группы гомологий функториально, то есть отображение

$$(C_\bullet, \partial) \mapsto H_k(C_\bullet, \delta)$$

задаёт ковариантный функтор $\mathfrak{Ch} \rightarrow \mathfrak{Ab}$.

Доказательство. Всё, кроме того, что композиция переходит в композицию — совсем очевидно. Нам надо проверить, что отображение $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta)$ индуцирует отображение $H_k(C_\bullet) \rightarrow H_k(D_\bullet)$, и кроме того,

$$(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta) \xrightarrow{g} (E_\bullet, d) \Rightarrow H_k(f \circ g) = H_k(f) \circ H_k(g).$$

Заметим, что так как $f \in \text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$, $f_q(\text{Ker } \partial_q) \subset \text{Ker } \delta_q$. Действительно, если $\partial_q(x) = 0$, то $0 = f_{q-1}(\partial_q(x)) = \delta_q(f_q(x)) \Rightarrow f_q(x) \in \text{Ker } \delta_q$. Аналогично $f_{q-1}(\text{Im } \partial_q) \subset \text{Im } \delta_q$. Действительно, если $x = \partial_q(y)$, то

$$f_{q-1}(x) = f_{q-1} \circ \partial_q(y) = \delta_q(f_q(y)) \in \text{Im } \delta_q.$$

Тогда нужная нам стрелка получается просто из универсального свойства факторгруппы:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Ker } \partial_q & \xrightarrow{f_q} & \text{Ker } \delta_q & \xrightarrow{\pi} & H_q(D_\bullet) \\
& \searrow \rho & & \nearrow f_* & \\
& & H_q(C_\bullet) & &
\end{array}$$

Действительно, чтоб она существовала, нам нужно, чтоб $\text{Im } \partial_{q+1} \subset \text{Ker}(\pi \circ f_q)$. Возьмем $x \in \text{Im } \partial_{q+1}$, тогда $f_q(x) \in \text{Im } \delta_{q+1} \Rightarrow f_q(x) \in \text{Ker } \pi$, то есть $x \in \text{Ker}(\pi \circ f_q)$.

Проверка того, что композиция переходит в композицию тривиальна. \square

Замечание. Пусть $X, Y \in \mathfrak{Top}$, $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм цепных комплексов $f: C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$. Действительно, пусть $g \in C_k(X)$, тогда g — это непрерывное отображение $T_k \rightarrow X$ и тогда $f \circ g$ — непрерывное отображение $T_k \rightarrow Y$, то есть элемент $C_k(Y)$. Остается проверить, что полученное отображение будет коммутировать с дифференциалом.

$$\partial g = \sum_{i=0}^k (-1)^i \Gamma_i g.$$

Тогда остается заметить, что взятие грани коммутирует с применением отображения:

$$f(\partial g) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \Gamma_i f(g) = \partial(fg).$$

Значит, если у нас есть непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, то есть и индуцированный морфизм гомологий $f_*: H_\bullet(X) \rightarrow H_\bullet(Y)$.

Утверждение 7. Если $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, то $f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ — изоморфизм (для всех k).

Доказательство. Действительно, если f — гомеоморфизм, то все индуцированные отображения между цепями — изоморфизмы, а значит и все индуцированные отображения в гомологиях будут изоморфизмами. \square

Замечание. Это утверждение говорит нам о том, что сингулярные гомологии определены для топологических пространств без всякой дополнительной структуры.

Определение 19. Пусть X — топологическое пространство. Тогда, если группа $H_k(X)$ конечнопорождена, то

$$H_k(X) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \text{Tor}(H^k(X)).$$

Тогда число n (то есть, ранг свободной части) называют k -м числом Бетти b_n . Иными словами, $b_k(X) = \text{rank}(H_k(X))$.

3.4 Гомотопическая инвариантность гомологий

Определение 20. Пусть $(C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta) \in \mathfrak{Ch}$ — два цепных комплекса. Их морфизмы $f, g \in \text{Hom}_{\mathfrak{Ch}}((C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta))$ называются *гомотопными* ($f \sim g$), если существует диагональный морфизм $h: C_\bullet \rightarrow D_{\bullet+1}$ такой, что

$$h_{q-1} \partial_q + \delta_{q+1} h_q = f_q - g_q.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & \cdots \\
& \searrow h_{q+1} & \downarrow g_{q+1} & \searrow h_q & \downarrow g_q & \searrow h_{q-1} & \downarrow g_{q-1} & \searrow h_{q-2} & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta_{q+2}} & D_{q+1} & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\delta_q} & D_{q-1} & \xrightarrow{\delta_{q-1}} & \cdots
\end{array}$$

Кратко это обычно записывают, как $h\partial + \delta h = f - g$.

Если в категории цепных комплексов $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ab})$ отождествить гомотопные морфизмы, получится *гомотопическая категория комплексов*, которую обычно обозначают $\mathfrak{K}(\mathfrak{Ab})$ (или просто \mathfrak{K}).

Теорема 8. Если морфизмы цепных комплексов гомотопны, то есть $f \sim g$, то индуцированные гомоморфизмы когомологий $f_* = g_*$. Тем самым, функторы гомологий H_k пропускаются через гомотопическую категорию.

Доказательство. Если $x \in \text{Ker } \partial_q$, то

$$f_q(x) - g_q(x) = \delta_{q+1}h_q(x) + \underbrace{h_{q-1}\partial_q(x)}_{=0} \in \text{Im } \delta_{q+1},$$

а значит в $H_q(X)$ эти элементы равны. □

Замечание. Гомотопность морфизмов f и g можно определять, как $\delta h \pm h\partial = f - g$, так как при переходе к гомологиям второе слагаемое всё равно обнуляется.

Теорема 9. Пусть $f, g: X \rightarrow Y$, $f \sim g$. Тогда $f_* = g_*$.

Доказательство. У нас есть цепные комплексы сингулярных цепей $(C_\bullet(X), \partial)$ и $(C_\bullet(Y), \partial)$. Так как $f \sim g$, существует непрерывное отображение $H: X \times I \rightarrow Y$, а тогда $\forall p: T_q \rightarrow X$ определено непрерывное отображение $H(p(_), _): T_q \times I \rightarrow Y$, причем $H(p, 0) = f(p)$ и $H(p, 1) = g(p)$. Положим

$$h(p) = \text{сумма симплексов в разбиении призмы } T_q \times I \in C_{q+1}(Y).$$

Взглянув на картинку теперь нетрудно заметить, что

$$f(p) - h(p) = \text{граница всей призмы} - \text{боковые стенки} = \partial h(p) - h\partial(p)$$

Таким образом, мы получили, что индуцированные морфизмы цепных комплексов гомотопны, а значит, по теореме 8, индуцированные гомоморфизмы в гомологиях совпадают. □

Упражнение. Разбить $T_q \times I$ на $q+1$ -мерные симплексы формально. А именно, пусть $T_q \times \{0\} = a_0 \dots a_q$. Пусть вершины $T_q \times \{1\}$ — это a'_0, \dots, a'_q . Тогда предлагается брать вершины $a_0 \dots a_k a'_k \dots a'_q$.

Следствие 1. Пусть X — стягиваемое. Тогда $\tilde{H}_\bullet(X, \mathbb{Z}) = 0$, или, иными словами, $\forall k > 0$ $H_k(X, \mathbb{Z}) = 0$, $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Упражнение. Придумайте пример нестягиваемого X с нулевыми приведёнными гомологиями.

Лемма 11. Если X — линейно связно, то $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Выберем в нашем пространстве некоторую фиксированную точку a , тогда

$$\left(\sum k_i f_i \right) = \left(\sum k_i \right) a \pmod{\text{Im } \partial_1}, \text{ (то есть, в } H_0(X))$$

так как все f_i можно соединить путями (а это отображения $T^1 = [0, 1] \rightarrow X$) с a и значит $\text{Im } \partial_1$ будет содержать все разности $f_i - a$. Значит, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. □

Следствие 2. Пусть у топологического пространства X n компонент линейной связности. Тогда

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Упражнение. Држайте, что непрерывное отображение между линейно связными пространствами индуцирует изоморфизм нулевых гомологий.

3.5 Относительные гомологии и гомологически точная последовательность пары

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, тогда $\forall q \ C_q(A) \subset C_q(X)$ (вложение индуцирует мономорфизм цепей) и мы имеем морфизм цепных комплексов $(C_\bullet(X), \partial)$ и $(C_\bullet(A), \partial)$, то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_q(A) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow \text{in} & & \downarrow \text{in} & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Это так просто потому, что если у нас был симплекс $f: T^q \rightarrow A$, то его граница тоже целиком лежит в A , то есть $\partial f: T^{q-1} \rightarrow A \in C_{q-1}(A)$.

Глядя на это, возникает естественная идея дополнить до короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow C_q(A) \rightarrow C_q(X) \rightarrow C_q(X)/C_q(A) \rightarrow 0$$

в каждом столбце.

Определение 21. Факторгруппу $C_q(X, A) \stackrel{\text{def}}{=} C_q(X)/C_q(A)$ называют *относительными цепями*.

Построим цепной комплекс для относительных цепей, для этого надо определить дифференциалы. Это делается стандартно, возьмем $x \in C_q(A)$, тогда $\partial_q(x) \in C_{q-1}(A)$, а значит композиция дифференциала и проекции пропустится через фактор:

$$\begin{array}{ccccc} C_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) & \xrightarrow{\pi_{q-1}} & C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A) \\ & \searrow \pi_q & & \swarrow \exists! \delta_q & \\ & & C_q(X)/C_q(A) & & \end{array}$$

Проверим теперь, что $\delta^2 = 0$. Действительно, из коммутативной диаграммы выше мы понимаем, что

$$\delta_q(\bar{x}) = \delta_q(\pi_q(x)) = \pi_{q-1}(\partial_q(x)) \Rightarrow \delta_{q-1}(\delta_q(\bar{x})) = \delta_{q-1}(\pi_{q-1}(\partial_q(x))) = \pi_{q-2}(\partial_{q-1}(\partial_q(x))) = 0.$$

Теперь мы построили цепной комплекс и можем определить относительные гомологии.

Определение 22. Пусть $X \subset A$, тогда относительными гомологиями мы будем называть гомологии комплекса относительных цепей, то есть

$$H_q(X, A) \stackrel{\text{def}}{=} \ker \delta_q / \text{Im } \delta_{q+1}.$$

Теперь, попробуем получить для гомологий аппарат, идеологически похожий на теорему Зейферта-Ван-Кампена.

Итак, мы имеем короткую точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow 0$$

В развёрнутом виде она представляет собой коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
& \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & C_{q+1}(A) & \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \longrightarrow & C_{q+1}(X, A) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & C_q(A) & \longrightarrow & C_q(X) & \longrightarrow & C_q(X, A) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & C_{q-1}(A) & \longrightarrow & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & C_{q-1}(X, A) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

в которой строки точны, а столбцы — наши комплексы.

Теорема 10 (Точная последовательность пары). *Существует связывающий гомоморфизм $\varphi: H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$, и соответственно, имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий:*

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \xrightarrow{\varphi} H_{q-1}(A) \rightarrow H_{q-1}(X) \rightarrow \dots$$

Доказательство. На самом деле, это утверждение верно для любой точной последовательности комплексов. А именно, если последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$$

точна, то имеет место следующая длинная точность последовательность гомологий:

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(B) \rightarrow H_q(C) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow H_{q-1}(B) \rightarrow \dots$$

Это можно без труда вывести из леммы о змее, проверив точность строк⁵

□

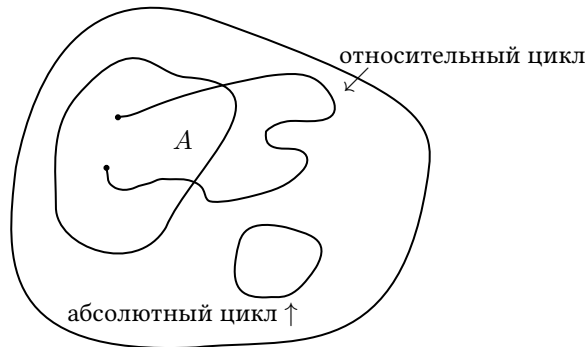
Упражнение. Докажите, что для $X \supset A \supset B$ имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий

$$\dots \rightarrow H_q(A, B) \rightarrow H_q(X, B) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

Посмотрим, что всё это означает геометрически. Относительные циклы — это элементы

$$\text{Ker}(C_q(X)/C_q(A) \rightarrow C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A)).$$

Мы взяли представителя в $C_q(X)$, взяли границу и после факторизации по $C_{q-1}(A)$ получили 0, а значит граница нашего цикла полностью лежит в $C_{q-1}(A)$, то есть картинка имеет вид:



С другой стороны, ясно, что $x \in C_q(X)/C_q(A)$ — относительная граница, если $x + a = \partial(\dots)$.

⁵ а так как это делается в абсолютно любом курсе гомологической алгебры, мне лень это сюда писать.

Замечание. У связывающего гомоморфизма $H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ есть очень естественная интерпретация.

Элементы $H_q(X, A)$ — относительные циклы с точностью до относительных границ. Так как это относительные q -мерные циклы, их граница лежит в A , а значит, при взятии границы, мы получим как раз элемент $H_{q-1}(A)$. То есть, связывающий гомоморфизм $H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ — взятие границы.

Рассмотрим также еще несколько важных следствий длинной точной последовательности пары.

Следствие 3. Для любого топологического пространства X и любой его точки $x_0 \in X$ мы имеем

$$H_n(X, x_0) = \tilde{H}_n(X) \quad \forall n.$$

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность приведенных гомологий пары (X, x_0)

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(x_0) \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(x_0) \rightarrow \dots$$

Действительно, так как $\tilde{H}_n(x_0) = 0 \quad \forall n$, мы на самом деле имеем

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X, x_0) \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

и из точности следует $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_q(X, x_0) = H_q(X, x_0)$. □

Следствие 4. Группы $H_q(X, A)$ измеряют различие между $H_q(X)$ и $H_q(A)$, а именно,

$$H_q(X, A) = 0 \quad \forall q \Rightarrow H_q(A) = H_q(X) \quad \forall q.$$

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность пары (X, A) :

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

В нашем случае она имеет вид:

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

и из точности следует, что $H_q(A) \cong H_q(X)$. □

Упражнение. Убедитесь, что верно и обратное утверждение.

3.6 Пары Боруска

Определение 23. Пусть X — топологическое пространство, а $A \subset X$ с индуцированной топологией. Тогда говорят, что (X, A) — пара Борсука (или, корасслоение)⁶, если $\forall f: X \rightarrow Y, \forall F: A \times I \rightarrow Y$ такой, что $F|_{A \times 0} = f|_A$ существует $G: X \times I \rightarrow Y$, причем такое, что $G|_{X \times 0} = f, G|_{A \times I} = F$.

Определение 24. Пара (X, A) называется клеточной парой, если X — клеточное пространство, A — клеточное подпространство X .

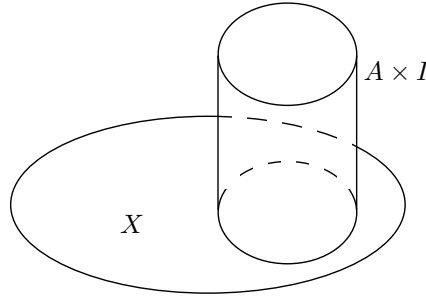
Замечание. Так как очевидно, что $(D^n, \partial D^n)$ — пара Борсука, клеточная пара является парой Борсука.

Нам от пар Борсука понадобится несколько базовых утверждений.

Теорема 11 (Характеризация пар Борсука). Если (X, A) — пара Борсука, то деформационная ретракция $X \times I$ на $X \cup (A \times I)$. Кроме того, если A — замкнуто, то верно и обратное.

Доказательство. На картинке это выглядит следующим образом:

⁶Еще говорят «обладает свойством продолжения гомотопии», но это совсем уж длинно.



Положим $Y = X \cup (A \times I)$, $f: X \rightarrow Y$ — вложение. Рассмотрим теперь гомотопию $F_t(A) = A \times t$. Так как (X, A) — пара Борсука, существует $G: X \times I \rightarrow Y: G|_{A \times I} = F$.

Докажем теперь в другую сторону: пусть для $f: X \rightarrow Y$ есть гомотопия $F_t: A \rightarrow Y$, то есть отображение $F: X \cup (A \times I) \rightarrow Y$. Тогда искомое продолжение гомотопии — композиция F и деформационной ретракции $X \times I \rightarrow X \cup (A \times I)$ ⁷. \square

Следствие 5. Пара $(D^n, \text{Int}(D^n))$ — не пара Борсука.

Вообще говоря, эта теорема показывает, что было бы хорошо, чтоб A было замкнутым.

Замечание. В нехаусдорфовом случае бывает, что и с незамкнутым A пара (X, A) будет парой Борсука.

Упражнение. Если (X, A) — пара Борсука и X — Хаусдорфово, то A замкнуто.

Утверждение 8. Пусть (X, A) — пара Борсука. Тогда

$$X \cup CA \sim (X \cup CA)/CA = X/A.$$

Доказательство. Рассмотрим вложение $X \rightarrow X \cup CA$. Прогомотопируем A в вершину конуса a . Так как (X, A) — пара Борсука, эта гомотопия продолжается до гомотопии на X . Тогда финальный элемент гомотопии отображает $X \rightarrow X \cup CA$ так, что $A \mapsto a$, значит, это отображение пропускается через фактор X/A . С другой стороны ясно, как устроено обратное отображение $X \cup CA \rightarrow X/A$ (стягиваем конус в точку). Нетрудно заметить, что два построенных отображения задают гомотопическую эквивалентность. \square

Следствие 6. Если (X, A) — пара Борсука и A — стягиваемо, то $X \sim X/A$.

Утверждение 9. Пара (CX, X) — всегда пара Борсука.

3.7 Относительные гомологии как абсолютные (факторизация)

Итак, в этом параграфе нас будет интересовать следующее (весьма полезное в вычислениях утверждение):

Теорема 12. В общем случае отображение $X \rightarrow X \cup CA$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \rightarrow H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \tilde{H}_q(X \cup CA),$$

где a — вершина конуса.

Если (X, A) — пара Борсука, то отображение проекции $p: X \rightarrow X/A$, $A \mapsto a$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \tilde{H}_q(X/A).$$

Вообще говоря, условие на A во второй части теоремы часто опускают и говорят, что это верно для «хороших пар». Мы доказываем для пар Борсука, можно доказывать для случая, когда A — окрестностный деформационный ретракт.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько важных (в общем контексте) лемм.

Сначала посмотрим на геометрическую конструкцию **барицентрического подразбиения**, чтоб иметь геометрическую интуицию в контексте сингулярных симплексов.

Рассмотрим симплекс $[v_0, \dots, v_n]$. его точки — линейные комбинации вида

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i, \quad \text{где } \sum_{i=0}^n t_i = 1, \quad t_i \geq 0.$$

⁷ вот тут мы пользуемся замкнутостью A , так как нам нужно, чтоб покрытие было фундаментальным.

Определение 25. *Барицентр (центр тяжести)* симплекса — это точка $b \in [v_0, \dots, v_n]$, у которой все барицентрические аординаты t_i равны, а именно, $t_i = \frac{1}{n+1} \forall i$.

Барицентрическое подразбиение (подразделение) симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ — это разбиение симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ на n -мерные симплексы $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$, где по индукции $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ — $(n-1)$ -мерный симплекс барицентрического подразбиения грани $[v_0, \dots, v_i, \dots, v_n]$.

- Индукция начинается с $n = 0$, когда барицентрическое подразбиение точки $[v_0]$ определяется просто, как сама точка $[v_0]$.
- В случае $n = 1$ отрезок $[v_0v_1]$ бьется на два отрезка $[v_0b]$, $[bv_1]$, где b — середина отрезка $[v_0, v_1]$.
- В случае $n = 2$ треугольник $[v_0v_1v_2]$ бьется на 6 треугольников, образуемых его вершинами и точкой пересечения медиан b .

Из такого индуктивного определения следует, что вершины симплексов в барицентрическом подразбиении симплекса $[v_0 \dots v_n]$ — в точности барицентры всех k -мерных граней $[v_{i_0} \dots v_{i_k}]$ симплекса $[v_0 \dots v_n]$ для $0 \leq k \leq n$.

При $k = 0$ это даёт нам просто набор вершин v_i . Барицентр симплекса $[v_{i_0} \dots v_{i_k}]$ имеет барицентрические координаты $t_i = \frac{1}{k+1}$ при $i = i_0, \dots, i_k$ и $t_i = 0$ во всех остальных случаях.

Замечание. Далее нам это не потребуется, но симплексы барицентрического подразбиения задают на симплексе T структуру симплициального комплекса.

Лемма 12 (О барицентрическом подразбиении). Пусть $f: T^q \rightarrow X$ — сингулярный симплекс. Тогда его барицентрическое подразбиение — это

$$\beta: C_q(X) \rightarrow C_q(X), \quad \beta f = \sum_{\tau \in S_{q+1}} \text{sign}(\tau) f_\tau,$$

где f_τ определяется следующим образом: исходный симплекс T^q мы можем барицентрически подразбить на симплексы $T'_q = \{x \mid x_{\tau(0)} \leq x_{\tau(1)} \leq \dots \leq x_{\tau(q)}\}$, в которых вершины нумеруются согласно размерностям граней. Тогда мы полагаем $f_\tau \stackrel{\text{def}}{=} f|_{T'_q}$.

Тогда $\partial\beta = \beta\partial$ и $\beta_*([\alpha]) = [\alpha] \forall [\alpha] \in H_q(X)$. Иными словами, барицентрическое подразбиение не влияет на гомологический класс.

Доказательство. Для первого утверждения достаточно проверить, что в сумме все внутренние грани встречаются с противоположным знаком, это ясно из картинки. Первое утверждение даёт нам, что $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{CH}}(C_\bullet, C_\bullet)$.

Для доказательства второго утверждения мы построим цепную гомотопию $D: C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$ между β и постоянным отображением.

Пусть $f: T^q \rightarrow X$, тогда $D(f)$ определяется следующим образом: барицентрически разобьём призму $I \times T^q$ на симплексы и рассмотрим проекцию

$$p: I \times T^q \rightarrow T^q.$$

Тогда $D(f)$ — это $(q+1)$ -мерный сингулярный симплекс, являющийся суммой композиций f и проекции p , суженной на симплексы в разбиении $I \times T^q$.

можно нарисовать картинку для отрезка, в принципе.

Из того, как устроена нумерация в барицентрическом разбиении призмы, нетрудно видеть, что D — гомотопия между β и id , то есть

$$f - \beta(f) = D\partial(f) + \partial D(f).$$

Чтоб понять всё это, надо опять позалипать на эту картиночку с призмой, как в теореме 9.⁸

□

⁸Возможно, всё это место стоит строго формально переписать из Хатчера.

Следующая лемма говорит нам, что для вычисления сингулярных гомологий достаточно рассматривать лишь *маленькие* сингулярные симплексы. В случае симплицальных гомологий это можно было бы формулировать в терминах диаметров, а в случае сингулярных мы будем говорить об этом в терминах покрытий.

Лемма 13 (Об измельчении). Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие X . Пусть $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ порождено сингулярными симплексами $f \in C_q(X)$ такими, что $\exists \alpha: f(T_q) \subset U_\alpha$.

Тогда вложение $i: C_q^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} C_q(X)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_\bullet(X) \cong H_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$.

Доказательство. Заметим, что для достаточно большого n по лемме Лебега $c \in C_q(X) \Rightarrow \beta^n(c) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$. Кроме того, по лемме 12 c и $\beta^n(c)$ гомологичны (то есть, представляют один и тот же класс гомологий). Это даёт нам, что любой гомологический класс из $H_q(C_\bullet)$ имеет представителя в $C_q^{\mathcal{U}}(X)$, то есть, что отображение $H_q^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_q(X)$ сюръективно.

Кроме того, также по лемме 12, если c — цикл из $C_q^{\mathcal{U}}$, то $c - \beta^n(c)$ — граница цепи из $C_{q+1}^{\mathcal{U}}$, так как

$$c - \beta^n(c) = \underbrace{D\partial c}_{=0, \text{ так как } c - \text{цикл}} - \partial Dc = \partial(-Dc) \in B_q(C_q^{\mathcal{U}}(X)).$$

С другой стороны, так как c и $\beta^n(c)$ гомологичны, их разность — граница (элемент $B_q(C_q(X))$). Таким образом, если цепь из $C_q^{\mathcal{U}}$ лежит в $B_q(C_q(X))$, то она лежит и в $B_q(C_q^{\mathcal{U}}(X))$. Это даёт нам инъективность отображения $H_q^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_q(X)$. \square

Замечание. Заметим, что построенные в доказательстве отображения переводят цепи в A в цепи в A , а значит, выдерживают факторизацию по A . Этот факт даёт нам версию леммы об измельчении для относительных гомологий, которым мы и будем пользоваться.

Обозаведемся еще одним полезным фактом: Посмотрим на такой факт из гомологической алгебры:

Лемма 14 (5-лемма). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

в которой строки точны, f_2, f_4 — изоморфизмы, f_1 — эпиморфизм, f_5 — мономорфизм. Тогда f_3 — изоморфизм.

Доказательство. Есть в любом курсе гомологической алгебры. \square

Из неё немедленно следует следующий простой факт:

Лемма 15. Если пара (X, A) гомотопически эквивалентна паре (Y, B) , то $H_\bullet(X, A) = H_\bullet(Y, B)$.

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность для обеих пар:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ H_k(B) & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_k(Y, B) & \longrightarrow & H_{k-1}(B) & \longrightarrow & H_{k-1}(Y) \end{array}$$

Тогда всё следует из 5-леммы 14 \square

Наконец, мы можем доказать интересующую нас теорему:

Теорема 13. В общем случае отображение $X \rightarrow X \cup CA$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \rightarrow H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \tilde{H}_q(X \cup CA),$$

где a — вершина конуса.

Если (X, A) — пара Борсука, то отображение проекции $p: X \rightarrow X/A$, $A \mapsto a$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p^*} H_q(X/A, a) = \tilde{H}_q(X/A).$$

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $X \cup CA$ вида:

$$X \cup CA \subset ((X \cup CA) \setminus X) \cup (X \cup \overline{CA}), \quad \text{и} \stackrel{\text{def}}{=} \{(X \cup CA) \setminus X, (X \cup \overline{CA})\}$$

где \overline{CA} — нижняя открытая половина конуса CA .

По лемме 13 об измельчении мы вместо $H_q(X \cup CA, CA)$ можем рассматривать $H_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA)$.

А теперь, заметим, что по тому, как мы взяли покрытие,

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA) = C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA) = C_q(X \cup \overline{CA})/C_q(\overline{CA}) = C_q(X \cup \overline{CA}, \overline{CA}).$$

А значит, из гомотопической эквивалентности и леммы 15 мы имеем

$$H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup \overline{CA}, \overline{CA}) = H_q(X, A).$$

Вторая часть первого равенства из условия теоремы следует из следствия 3.

Пусть теперь (X, A) — пара Борсука. Тогда по утверждению 8 $X \cup CA \sim X/A$, а значит, $H_q(X, A) \cong \tilde{H}_q(X/A)$. \square

3.8 Вырезание

Рассмотрим тройку $B \subset A \subset X$. Тогда вложение индуцирует отображение

$$H_k(X - B, A - B) \rightarrow H_k(X, A).$$

Вообще говоря, вырезание даёт хорошую технику вычисления относительных гомологий:

Теорема 14 (О вырезании). Пусть даны пространства $Z \subset A \subset X$, причем $\text{Cl}(Z) \subset \text{Int}(A)$. Тогда вложение $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы

$$H_n(X - Z, A - Z) \cong H_n(X, A)$$

для всех n . Или, что эквивалентно: для подпространств $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X , включение $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A) \quad \forall n.$$

Доказательство. Докажем сначала эквивалентность формулировок. Положим $B = X - Z$, $Z = X - B$. Тогда $A \cap B = A - Z$, а условие $\text{Cl}(Z) \subset \text{Int}(A)$ эквивалентно тому, что $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$, так как $X - \text{Int}(B) = \text{Cl}(Z)$. Теперь докажем вторую формулировку.

Пусть $X = A \cup B$, обозначим соответствующее покрытие $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Для краткости будем обозначать группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, как $C_n(A + B)$ ⁹.

Тогда, как мы помним из леммы об измельчении 13 включение

$$C_n(A + B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A)$.

Теперь рассмотрим включение

$$C_n(B)/C_n(A \cap B) \hookrightarrow C_n(A + B, A).$$

Оно очевидно индуцирует изоморфизм гомологий, так как обе факторгруппы свободные, а их базис — n -мерные сингулярные симплексы в B , не лежащие в A . Значит, мы получили требуемый изоморфизм

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A).$$

\square

⁹что на самом деле логично, так как цепи оттуда состоят из суммы цепей из A и цепей из B

3.9 Точная последовательность Майера-Вьеториса

Кроме длинной точной последовательности пары (теорема 10) для вычисления гомологий пары (X, A) есть и другая мощная техника для вычисления гомологий пространства X , тоже представляющая собой длинную точную последовательность.

Теорема 15 (Точная последовательность Майера-Вьеториса, простая версия). Пусть $X = A \cup B$, где A, B — открытые и $A \cap B = C \neq \emptyset$. Тогда имеет место следующая точная последовательность:

$$\dots H_q(A \cap B) \rightarrow H_q(A) \oplus H_q(B) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow H_{q-1}(A) \oplus H_{q-1}(B) \rightarrow \dots$$

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \rightarrow C_\bullet(A \cap B) \xrightarrow[\varphi]{c \rightarrow (c, -c)} C_\bullet(A) \oplus C_\bullet(B) \xrightarrow[\psi]{(a, b) \rightarrow a + b} C_\bullet(A + B) \rightarrow 0$$

Во-первых, заметим, что $\text{Ker } \varphi = 0$, так как цепь в $A \cap B$, которая является нулевой в A (или в B) должна быть нулевой цепью. Во-вторых, очевидно, что $\psi\varphi = 0 \Rightarrow \text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \psi$. Заметим, что для $(x, y) \in C_n(A) \oplus C_n(B)$ имеем $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$, а значит $x \in C_n(A \cap B)$ и $(x, y) \in \text{Im } \varphi$. Это означает, что $\text{Ker } \psi \subset \text{Im } \varphi$. Точность в последнем члене следует просто из определения $C_n(A + B)$.

Тогда эта короткая точная последовательность комплексов даёт нам точную последовательность гомологий. Остается лишь заметить, что также, как и в теореме о вырезании, $H_\bullet(A + B) = H_\bullet(A \cup B)$. \square

Замечание. Эта не самая хорошая версия точной последовательности Майера-Вьеториса, так как условие на открытое покрытие серьезно мешает.

3.10 Гомологии сфер

Теорема 16. Для $n \neq 0$ гомологии сферы устроены следующим образом:

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \text{ или } i = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Или, иными словами,

$$\tilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим пару $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, тогда $X/A \cong S^n$. Запишем для этой пары точную последовательность приведенных гомологий:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(D^n) \rightarrow \tilde{H}_q(D^n, S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(D^n) \rightarrow \dots$$

Так как D^n стягиваем, $\tilde{H}_q(D^n) = 0$, а значит, $\tilde{H}_q(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$. С другой стороны, так как $(D^n, \partial D^n) = (D^n, S^{n-1})$ — пара Борсука, по теореме о факторизации 13

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_q(D^n/S^{n-1}) \cong \tilde{H}_q(S^n).$$

Остается заметить, что мы знаем, что утверждение верно для S^0 . Таким образом, мы доказали утверждение по индукции. \square

Следствие 7. Сферы разных размерностей негомеоморфны.

3.11 Гомологии букета и надстройки

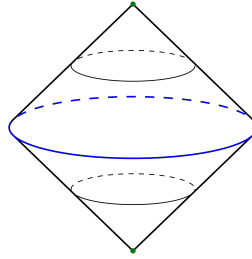
Из стягиваемости конуса сразу следует, что $H_q(CX, X) \cong \tilde{H}_q(X)$ (достаточно написать точную последовательность для приведенных гомологий).

Определение 26. Пусть X — топологическое пространство. Тогда *надстройкой* над X называется пространство ΣX , определённое, как

$$\Sigma X \cong X \times I / \sim, \text{ где } (x, 0) \sim (y, 0) \forall x, y \in X \text{ и } (x, 1) \sim (y, 1) \forall x, y \in X.$$

Иными словами, мы взяли $X \times I$ и стянули $X \times 1$ и $X \times 0$ в точку.

Пример 10. Надстройка над окружностью выглядит следующим образом:



Так как надстройка получается факторизацией конуса по нижнему основанию, из теоремы о факторизации 13 следует, что $H_{q+1}(CX, X) \cong \tilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$. Таким образом, мы получили такое утверждение:

Теорема 17 (Гомологии надстройки). *Справедливо следующее равенство групп гомологий:*

$$\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$$

Замечание. Так как $\Sigma S^n = S^{n+1}$, мы таким образом получили другое доказательство теоремы 16.

Теорема 18 (Гомологии букета). *Для букета пространств $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ включения $i_{\alpha}: X_{\alpha} \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ индуцируют изоморфизм гомологий*

$$\bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_q \cong \tilde{H}_q \left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \right).$$

при условии, что если в букете отождествляются точки $\{x_{\alpha}\}$, то пары (X_{α}, x_{α}) — пары Борсука.

Доказательство. Достаточно рассмотреть пару

$$(X, A) = \left(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}, \bigsqcup_{\alpha} x_{\alpha} \right),$$

тогда по тривиальным причинам

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(X_{\alpha})$$

и по теореме о факторизации

$$H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n \left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \right).$$

□

3.12 Гомологии с коэффициентами

У рассматриваемой нами до сих пор теории гомологий есть простое обобщение, которое иногда даёт техническое преимущество.

Обобщение состоит в рассмотрении цепей $\sum n_i f_i$, где f_i — сингулярные симплексы, а коэффициенты n_i берутся в фиксированной абелевой группе G . Такие n -мерные цепи образуют абелеву группу $C_n(X; G)$ и у неё также есть относительная версия $C_n(X, A; G) \stackrel{\text{def}}{=} C_n(X; G)/C_n(A; G)$.

Дифференциал ∂ строится также, как и раньше:

$$\partial \left(\sum_i n_i f_i \right) = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \Gamma_j f_i.$$

Соответственно, группы $C_n(X; G)$ и $C_n(X, A; G)$ образуют цепные комплексы и их гомологии обозначают $H_n(X; G)$ и $H_n(X, A; G)$ и называют *гомологиями с коэффициентами в группе G* .

Приведённые группы гомологий $\tilde{H}(X; G)$ определяются аналогично, аугументация задаётся, как

$$\dots \rightarrow C_0(X; G) \xrightarrow{\varepsilon} G \rightarrow 0, \quad \varepsilon \left(\sum_i n_i f_i \right) = \sum_i n_i.$$

Замечание. Часто полезно рассматривать гоомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, так как нужно считать суммы сингулярных симплексов с коэффициентами 0 и 1, поэтому, отбрасывая члены с коэффициентами 0, можно представлять себе цепи, как конечные «объединения» сингулярных симплексов.

Кроме того, можно больше не заботиться о знаках в формуле для границы, а так как знаки являются алгебраическим выражением ориентации, мы можем игнорировать и ориентации. Это означает, что гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — наиболее естественный инструмент для вычислений в неориентируемом случае.

Отметим, что вся доказанная выше теория переносится на гомологии с коэффициентами в G без проблем и различия между $H_n(X; G)$ и $H_n(X)$ появляются только, когда начинаются вычисления.

Пример 11. Если $X = *$ — точка, то нетрудно заметить, что

$$H_n(*; G) \cong \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Аналогично и в случае сфер S^k мы имеем

$$\tilde{H}_n(S^k; G) \cong \begin{cases} G, & n = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

3.13 Приложения теории гомологий

Теорема 19 (Борсук). *Не существует ретракции диска на граничную сферу.*

Доказательство. Предположим, что ретракция $f: D^n \rightarrow S^{n-1}$: f — непрерывное и $f|_{S^{n-1}} = \text{id}$ существует. Рассмотрим отображение $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$, тогда в гомологиях у нас есть отображение

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D^n) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

или, подставляя известные нам результаты:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}.$$

Так как $f \circ i = \text{id}$, $f_* \circ i_* = \text{id}_* = \text{id}$ и мы приходим к противоречию. □

Теорема 20 (Брауэр, о неподвижной точке). Пусть $f: D^n \rightarrow D^n$ — непрерывное отображение. Тогда у него существует неподвижная точка.

Доказательство. Предположим противное, пусть существует непрерывное $f: D^n \rightarrow D^n$, не имеющее неподвижных точек. Рассмотрим отображение g , которое переводит $x \in D^n$ в точку пересечения $[f(x), x]$ и ∂D^n . То есть, $g: D^n \rightarrow \partial D^n$ и $g|_{\partial D^n} = \text{id}$. Тогда g — ретракция D^n на граничную сферу, а этого не бывает по теореме 19. \square

Теорема 21 (Брауэр, инвариантность размерности). Если непустые открытые $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ открытые и они гомеоморфны, то $m = n$.

Доказательство. Пусть h — гомеоморфизм $U \rightarrow V$, тогда

$$H_k(U, U - x) \cong H_k(V, V - h(x)).$$

По теореме о вырезании 14 для $(X, A) = (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$ и $Z = \mathbb{R}^m - U$:

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(U, U - x).$$

Тогда мы имеем, что

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - h(x)).$$

Из точной последовательности пары для $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$ мы имеем:

$$\dots \rightarrow H_k(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \dots$$

$$\dots 0 \rightarrow H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

а значит, $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(S^{m-1})$, так как $\mathbb{R}^m - x$ деформационно ретрагируется на S^{m-1} . Значит, мы получили

$$H_{k-1}(S^{m-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1}),$$

откуда ясно, что $m = n$. \square

3.14 Симплициальные комплексы

Этот параграф надо написать из Хатчера.

3.15 Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий

Образующая $H_n(S^n)$:

В этом параграфе будем обозначать n -мерный симплекс, как Δ^n . Заметим, что так как $\Delta^n / \partial \Delta^n \cong S^n$, по теореме о факторизации 13 мы имеем изоморфизм

$$H_n(S^n) \cong H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n).$$

Покажем, что образующая $H^n(S^n)$ — это отображение $\Delta^n \xrightarrow{\text{id}} \Delta^n$. Нетрудно заметить, что $\text{Im}(\partial f) \subset \partial \Delta^n$, что дает нам, что id вообще представляет какой-то гомологический класс в $H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n)$.

Рассмотрим тройку $(\Delta^n, \partial \Delta^n, \Lambda)$, где Λ — это $\partial \Delta^n$ без одной из граней (например, запоолненный треугольник, граница треугольника и граница треугольника без стороны). Напишем точную последовательность тройки:

$$\dots \rightarrow H_n(\partial \Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_n(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow \dots$$

Заметим, что так как Δ^n деформационно ретрагируется на Λ , $H_n(\Delta^n, \Lambda) \cong H_n(\Lambda, \Lambda) = 0$ и то же самое справедливо для $(n-1)$ -х гомологий. То есть, наша последовательность на самом деле имеет вид

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Теперь заметим, что если грань, которую мы выкинули, мы обозначим за Δ' , то $H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$.

Это ценно, так как далее мы можем рассуждать по индукции, ведь если образующая $H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$ — вложение выкинутой нижней грани Δ' , то её прообраз в $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ — нужное нам тождественное отображение (мы тут пользуемся тем, что мы знаем, что связывающий гомоморфизм в длинной точной последовательности пары/тройки — это просто взятие границы). А для S^0 это утверждение очевидно.

Обозначим симплициальные гомологии пространства X за $H_k^\Delta(X)$.

Теорема 22. Пусть X — конечный симплициальный комплекс. Тогда

$$H_k^{\text{sing}}(X) \cong H_k^\Delta(X).$$

Доказательство. Пусть X^k — объединение всех симплексов в симплициальном комплексе до размерности k (обозначение аналогично обозначению для CW-комплексов). Напишем точную последовательность пары:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) \rightarrow \dots$$

и заметим, что $H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) \cong H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) \cong H_{n+1}(\bigvee_\alpha S^k)$. Действительно, ясно, что

$$H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) \cong H_{n+1}\left(\bigvee_\alpha S^k\right),$$

где α пробегает k -мерные симплексы в X . Далее,

$$H_{n+1}\left(\bigvee_\alpha S^k\right) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } n+1 \neq k \\ \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}, & n+1 = k \end{cases}$$

С другой стороны, из определения симплициальных гомологий ясно, что при $n+1 \neq k$ мы имеем $H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) \cong 0$, а при $n+1 = k$ эта группа — свободная абелева группа, порожденная всеми k -мерными симплексами в X , то есть, как и в предыдущем случае

$$H_k^\Delta(X^k, X^{k-1}) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}.$$

Остается заметить, что по доказанному в начале параграфа, мы знаем, что у $H_k(\bigvee_\alpha S^k)$ такой же набор порождающих.

Теперь будем вести индукцию по размерности симплициального комплекса. По индукционному предположению мы имеем $H_n^\Delta(X^{k-1}) \cong H_n(X^{k-1})$ и тогда мы получаем диаграмму из 5-леммы:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) \end{array}$$

□

3.16 Степень отображения

Определение 27. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм в гомологиях:

$$f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n).$$

Так как f_* — гомоморфизм бесконечной циклической группы в себя, он должен иметь вид

$$f_*(\alpha) = d \cdot \alpha$$

для некоторого фиксированного $d \in \mathbb{Z}$, зависящего только от f . Это число называют *степенью отображения* f и обозначают $\deg f$.

Базовые свойства степени.

1. $\deg \text{id}_{S^n} = 1$.
2. Если f — не сюръекция, то $\deg f = 0$, так как мы можем выбрать $x \in S^n \setminus f(S^n)$ и представить f в виде композиции

$$S^n \rightarrow S^n \setminus \{x\} \hookrightarrow S^n,$$

а пространство $S^n \setminus \{x\}$ — стягиваемо, значит $H_n(S^n \setminus \{x\}) = 0$, а значит и $f_* = 0$.

3. Если $f \sim g$, то $\deg f = \deg g$.
4. $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$.
5. Если f — гомотопическая эквивалентность, то существует g такое, что $f \circ g \sim \text{id} \Rightarrow \deg f \deg g = 1 \Rightarrow \deg f = \pm 1$.
6. Рассмотрим f , которое тождественно действует на первых n координатах и отправляет x_{n+1} в $-x_{n+1}$. Тогда $\deg f = -1$. Действительно, мы можем реализовать сферу, как склейку двух симплексов Δ_1^n и Δ_2^n по границе. Тогда n -мерная цепь $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ являются образующей n -мерных гомологий, а отображение f переставляет местами Δ_1^n и Δ_2^n , то есть действует на образующую умножением на -1 .
7. Степень антиподального отображения: $\deg(x \mapsto -x) = (-1)^{n+1}$.
8. Если $f: S^n \rightarrow S^n$ не имеет неподвижных точек, то $f \sim (x \mapsto -x)$ и соответственно $\deg f = (-1)^{n+1}$. Действительно, если $f(x) \neq x$, то отрезок с концами $f(x)$ и $-x$, который задаётся, как

$$t \mapsto (1-t)f(x) - tx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

не проходит через начало координат и формула

$$H(t, x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$

определяет гомотопию $f(x)$ в постоянное отображение.

Теорема 23 (О причёсывании ежа). S^n допускает непрерывное ненулевое (касательное) векторное поле тогда и только тогда, когда n — нечетно.

Доказательство. Предположим, что $x \mapsto V(x)$ — непрерывное поле касательных векторов к сфере. Тогда, если рассматривать вектор $V(x)$, как вектор в начале координат, а не в точке касания, то условие касания означает просто, что $x \perp V(x)$. Если $V(x) \neq 0$, то мы можем нормализовать векторное поле так, что $\|V(x)\| = 1 \forall x$, тогда векторы

$$(\cos t)x + (\sin t)V(x)$$

лежат на единичной окружности в $\text{span}(x, V(x))$. Соответственно, при $t \in [0, \pi]$ мы получаем гомотопию тождественного отображения id_{S^n} в антиподальное отображение:

$$H(t, x) = (\cos t)x + (\sin t)V(x).$$

Отсюда следует, что $(-1)^{n+1} = 1$, а значит, n должно быть нечетно. С другой стороны, когда $n = 2k - 1$, мы можем положить

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k+1})$$

и это даст нам искомое векторное поле. □

Опишем теперь метод вычисления, который чаще всего применим на практике. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ и существует $y \in S^n$ такое, что $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$, U_1, \dots, U_k — непересекающиеся окрестности этих точек, которые f переводит в окрестность V точки y . Тогда $f(U_i \setminus x_i) \subset V \setminus y$ и мы имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus \{y\}) \\
\parallel & \downarrow k_i & \parallel \\
H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\}) & \xleftarrow{p_i} H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n \setminus \{y\}) \\
\parallel & \uparrow j & \parallel \\
H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n)
\end{array}$$

Все отображения на ней индуцируются включениями. Два изоморфизма в верхней части диаграммы получаются из теоремы о вырезании 14, а два в нижней — из точной последовательности пары 10.

Посредством этих четырех гомоморфизмов две верхние группы можно отождествить с \mathbb{Z} , тогда верхний гомоморфизм f_* становится умножением на число и это число мы будем называть *локальной степенью* отображения f и обозначать $\deg f|_{x_i}$.

Теорема 24 (Локальность степени). Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ и $y \in S^n$ таково, что $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Тогда

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

Доказательство. По теореме о выражении 14, группа $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$ — прямая сумма групп $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$, причем k_i — отображение включения i -го слагаемого, а p_i — проекция на i -е слагаемое. Из коммутативности нижнего треугольника мы получаем, что

$$p_i \circ j(1) = 1,$$

а значит, $j(1) = (1, \dots, 1) = \sum_i k_i(1)$. Коммутативность верхнего квадрата говорит, что f_* отображает $k_i(1)$ в $\deg f|_{x_i}$, а коммутативность нижнего квадрата уже дает нам формулу

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

□

3.17 Клеточные гомологии

Лемма 16. Пусть X — конечный CW-комплекс. Тогда:

- а) $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$, если $k \neq n$ и изоморфно свободной абелевой группе, если $k = n$. Образующие этой группы — клетки размерности n .
- б) $H_k(X^n) = 0$, если $k > n$. В частности, если комплекс конечномерен, то $H_k(X) = 0 \forall k > \dim X$.
- с) Вложение $i: X^n \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ при $k < n$ и эпиморфизм при $k = n$.

Доказательство. Во-первых, мы знаем, что (X^n, X^{n-1}) — пара Борсука. Кроме того, $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_\alpha S^n$, где α пробегает все n -мерные клетки. Тогда факт а) следует из теоремы о факторизации 13 и теоремы 18.

Теперь рассмотрим длинную точную последовательность пары

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \dots$$

Если $k \neq n$ или $n - 1$, то обе внешние группы равны нулю, как группы гомологий букета n -мерных сфер, поэтому мы получаем изоморфизм

$$H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n), \quad k \neq n, n - 1.$$

Тогда, если $k > n$, то

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong \dots \cong H_k(X^0) = 0,$$

что доказывает пункт б). Если же $k < n$, то тогда

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong \dots \cong H_k(X^{n+m}) \forall m \geq 0,$$

что доказывает с) в случае конечномерного комплекса.

□

Замечание. Утверждение с) верно и для бесконечномерных CW-комплексов (идея состоит в том, что каждая сингулярная цепь имеет компактный образ, а значит пересекается лишь с конечным числом клеток). (Доказательство можно посмотреть в Хатчере).

Теперь мы определим клеточные гомологи — более продвинутый способ вычислять гомологии клеточных пространств. Начнем с такой коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X) & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \\
 0 & & & & H_n(X^n) & & \\
 & \searrow & \nearrow & \downarrow j_n & & & \\
 & \partial_{n+1} & & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \dots \\
 & & & & \downarrow \partial_n & \nearrow j_{n-1} & \\
 & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) & & \\
 & \nearrow & & & \nearrow & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Её мы получили из точных последовательностей для пар (X^{n+1}, X^n) , (X^n, X^{n-1}) , (X^{n-1}, X^{n-2}) . Морфизмы в нижней строчке определяются, как $d_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} j_n \circ \partial_{n+1}$. Нетрудно заметить, что из точности мы получаем $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Таким образом, средняя строчка диаграммы является цепным комплексом (его называют *клеточным цепным комплексом для X*). Как мы уже замечали в доказательстве леммы выше, группа $H_n(X^n, X^{n-1})$ — свободная абелева группа с базисом из n -мерных клеток в X .

Определение 28. Рассмотрим построенный выше цепной комплекс с группой k -мерных цепей $C_k^{\text{CW}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} H_k(X^k, X^{k-1})$. Гомологии этого комплекса называют *клеточными гомологиями пространства X* и обозначают $H_n^{\text{CW}}(X)$.

Замечание. В самом деле, всё происходящее вполне логично — в случае симплициальных гомологий мы рассматриваем свободные абелевы группы, порожденные симплексами всех размерностей, а тут — клетками всех размерностей.

Теорема 25. Пусть X — CW-комплекс. Тогда имеет место изоморфизм $H_n^{\text{CW}}(X) \cong H_n(X)$.

Доказательство. Из точности и теоремы о гомоморфизме мы имеем изоморфизм

$$H_n(X) \cong H_n(X^n) / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

Так как j_n — инъекция, $\text{Im } \partial_{n+1} \cong \text{Im } j_n \circ \partial_{n+1} = \text{Im } d_{n+1}$. С другой стороны, $\text{Im } j_n \cong \text{Ker } \partial_n$. Из инъективности j_{n-1} мы имеем $\text{Ker } \partial_n \cong \text{Ker } d_n$. Значит, j_n индуцирует изоморфизм факторгруппы:

$$H_n(X) \cong H_n(X^n) / \text{Im } \partial_{n+1} \cong \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}.$$

□

Следствие 8. Пусть X — CW-комплекс, тогда:

1. $H_n(X) \cong 0$, если в X нет n -мерных клеток.
2. Если X — CW-комплекс с k клетками размерности n , то группа $H_n(X)$ порождена не более чем k элементами. В самом деле, так как $H_n(X^n, X^{n-1})$ — группа с k образующими, у подгруппы $\text{Ker } d_n$ никак не может быть больше образующих, а значит и в факторгруппе $\text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$ тоже.

3. Если X — CW-комплекс, у которого нет пар клеток в соседних размерностях, то $H_n(X)$ — свободная абелева группа с базисом из n -мерных клеток.

Пример 12. Последний пункт следствия 8 применим, например, к $\mathbb{C}P^n$, так как клеточная структура для $\mathbb{C}P^n$ имеет по одной клетке каждой четной размерности до $2n$ (действительно, это заметно из того, что $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}P^{n-1}$). Значит, клеточный цепной комплекс для $\mathbb{C}P^n$ имеет вид:

$$\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Также при помощи этого же факта можно посчитать гомологии $S^n \times S^n$.

Рассмотрим теперь подробнее клеточный оператор границы d_n . При $n = 1$ это легко, так как

$$d_1: H_1(X^1, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$$

и это просто обычное граничное отображение.

В случае, когда комплекс X связан и имеет лишь одну нульмерную клетку, $d_1 = 0$, так как иначе $H_0(X) \neq \mathbb{Z}$. В общем случае формула для клеточного оператора границы имеет следующий вид:

Утверждение 10. *Имеет место равенство:*

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

где $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения $S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow S_\beta^{n-1}$, которое является композицией отображения приклеивания клетки e_α^n по границе и отображения факторизации, стягивающего $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$ в точку.

Доказательство. Для получения этой формулы рассмотрим такую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta}} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ \downarrow \Phi_{\alpha*} & & \downarrow \varphi_{\alpha*} & & \downarrow q_{\beta*} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \cong \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(X^{n-2}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}) \end{array}$$

Проясним, что за стрелки на ней:

- Φ_α — характеристическое отображение клетки e_α^n , φ_α — её отображение приклеивания.
- $q: X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ — отображение факторизации.
- $q_\beta: X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow S_\beta^{n-1}$ — стягивание дополнения клетки e_β^{n-1} в точку и отождествление полученной сферы с $S_\beta^{n-1} = D_\beta^{n-1}/\partial D_\beta^{n-1}$.
- $\Delta_{\alpha\beta} = q_\beta q \varphi_\alpha$.

Отображение $\Phi_{\alpha*}$ переводит образующую $[D_\alpha^n] \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n)$ в образующую слагаемого \mathbb{Z} группы $H_n(X^n, X^{n-1})$, соответствующего клетке e_α^n (действительно, такие клетки образуют базис $H_n(X^n, X^{n-1})$). Коммутативность левой половины диаграммы даёт нам, что

$$d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1} \varphi_{\alpha*} \partial[D_\alpha^n].$$

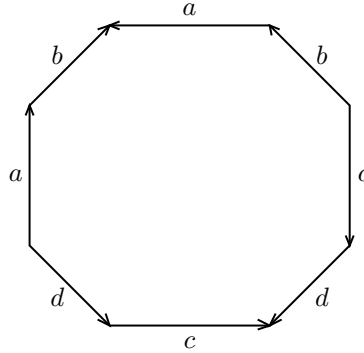
Базис группы $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ состоит из $(n-1)$ -мерных клеток, а отображение $q_{\beta*}$ — это проекция группы $\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$ (которая, как группа гомологий букета окружностей суть прямая сумма \mathbb{Z} , где каждое слагаемое соответствует $(n-1)$ -мерной клетке) на её слагаемое \mathbb{Z} , соответствующее e_β^{n-1} .

Теперь формула следует непосредственно из коммутативности правой верхней части диаграммы \square

3.18 Гомологии поверхностей

В данном параграфе, пользуясь клеточными гомологиями, мы вычислим гомологии поверхностей.

Пусть M_g — компактная ориентируемая поверхность с g ручками. Реализуем её, как склейку $4g$ -угольника:



Тогда в её клеточном разбиении:

- 1 двумерная клетка, приклеенная по произведению коммутаторов $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$.
- $2g$ одномерных клеток.
- 1 нульмерная клетка.

Значит, цепной клеточный комплекс для M_g будет иметь вид:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Так как комплекс связан и имеет лишь одну нульмерную клетку, $d_1 = 0$. Кроме того, каждое ребро $[a_1, a_2]$, $[a_g, b_g]$ появляется в произведении коммутаторов вместе со своим обратным, а значит, $\Delta_{\alpha\beta}$ гомотопны постоянным отображениям, из чего следует, что $d_2 = 0$.

Таким образом, мы имеем

$$H_k(M_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \text{ или } k = 2, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & k = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь вычислим гомологии неориентируемой замкнутой поверхности рода g . Она имеет такую клеточную структуру:

- Одна нульмерная клетка.
- g одномерных клеток.
- Одна двумерная клетка, приклеенная по слову $a_1^2 \dots a_g^2$.

Тогда клеточный цепной комплекс имеет вид:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^g \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Аналогично предыдущему разу, $d_1 = 0$, а вот d_2 задаётся уравнением

$$d_2(1) = (2, \dots, 2),$$

так как каждое ребро a_i появляется в слове приклеивания двумерной клетки со степенью 2, а это значит, что каждое отображение $\Delta_{\alpha\beta}$ гомотопно отображению степени 2. Значит, d_2 инъективно и

$$H_2(N_g) = 0.$$

Выберем в \mathbb{Z}^g такой базис: $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, 0), (1, 1, \dots, 1)$. Тогда нетрудно заметить, что

$$H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3.19 Пространства Мура

Допишу позже вместе с пространствами Эйленберга-Маклейна.

3.20 Теорема о вложении дисков и сфер

Напомним, что топологическое вложение — гомеоморфизм на образ.

Теорема 26. Пусть $h: D^k \rightarrow S^n$ — вложение. Тогда

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(D^k)) = 0 \quad \forall i.$$

Кроме того, если $h: S^k \rightarrow S^n$ — вложение (и $k < n$), то

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) = \mathbb{Z}, \quad i = n - k - 1 \text{ и } 0 \text{ иначе.}$$

Доказательство. Проведём индукцию по k . Случай $k = 0$ тривиален:

$$S^n \setminus h(D^0) = \mathbb{R}^n.$$

Теперь докажем индукционный переход от противного. Рассмотрим покрытие нашего пространства двумя множествами:

$$A = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad B = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Заметим, что $A \cup B = S^n \setminus (h(I^k \times [0, \frac{1}{2}]) \cap h(I^k \times [\frac{1}{2}, 1])) = S^n \setminus h(I^k \times \frac{1}{2})$ и

$$\tilde{H}_i(A \cup B) \cong \tilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right) = 0,$$

по индукционному предположению. Напишем теперь точную последовательность Майера-Вьеториса (15):

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H_n\left(S^n \setminus h\left(I^{k+1}\right)\right) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow \underbrace{H_n\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right)}_{\cong 0} \rightarrow H_{n-1}\left(S^n \setminus h\left(I^{k+1}\right)\right) \rightarrow \dots$$

значит если в $\tilde{H}_i(A \cap B) = \tilde{H}_i(S^n \setminus (I^k \times I))$ есть ненулевой класс a , его образ $(a, -a)$ в $\tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B)$ будет ненулевым, а значит, в $\tilde{H}_i(A)$ или $\tilde{H}_i(B)$ тоже будет ненулевым. Далее мы можем также разбить на две части интервал в A или в B (в зависимости от того, где не ноль) и проделать всё полностью аналогично. Таким образом мы получим последовательность вложенных интервалов I_n таких, что

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k \times I_n)) \neq 0, \quad a \in \tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k \times I_n)).$$

Тогда, если $p = \bigcap I_n$, то по индукционному предположению

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k \times p)),$$

то есть a представляет ноль в этих гомологиях. Но это означает, что он является чьей-то границей, но тогда он является границей и в допредельном случае, что даёт нам противоречие.

Докажем теперь второй пункт. Представим сферу в виде объединения двух дисков (полусфер):

$$S^k = D_+^k \cup D_-^k, \quad D_-^k \cap D_+^k = S^{k-1}.$$

тогда $S^n \setminus h(S^k) = S^n \setminus h(D_+^k \cup D_-^k) = S^n \setminus h(D_-^k) \cap S^n \setminus h(D_+^k)$. Запишем опять точную последовательность Майера-Вьеториса 15, полагая

$$A = S^n \setminus h(D_+^k), \quad B = S^n \setminus h(D_-^k).$$

$$\dots \rightarrow H_i(S^n \setminus h(S^k)) \rightarrow \underbrace{H_i(S^n \setminus h(D_-^k))}_{=0} \oplus \underbrace{H_i(S^n \setminus h(D_+^k))}_{=0} \rightarrow H_i(S^n \setminus h(S^{k-1})) \rightarrow \dots$$

Нулевые элементы в точной последовательности у нас их первого утверждения теоремы. Теперь видно, что мы можем вести индукцию по k . \square

3.21 Когомологии

Итак, рассмотрим цепной комплекс абелевых групп (C_\bullet, ∂)

$$\dots \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow C_{k-2} \rightarrow \dots$$

Тогда мы можем рассмотреть группы $C^k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(C_k, G)$, где G — фиксированная абелева группа.¹⁰ Тогда мы получаем цепной комплекс

$$\dots \leftarrow C^{k+1} \xleftarrow{\delta} C^k \xleftarrow{\delta} C^{k-1} \xleftarrow{\delta} \dots$$

Естественно, стрелки развернулись, так как мы действовали на комплекс контравариантным функтором $\text{Hom}(_, G)$. Действие оператора δ определяется естественным образом:

$$\varphi \in C^k, \quad \delta\varphi: C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\varphi} G, \quad \delta\varphi = \varphi \circ \partial.$$

Замечание. Сразу же нетрудно заметить, что $\delta^2 = 0$, то есть построенный комплекс действительно будет комплексом. Действительно,

$$\delta_k \circ \delta_{k-1}(\varphi(c)) = \delta_k(\varphi(\partial_{k-1}c)) = \varphi(\partial_k \partial_{k-1}c) = 0.$$

Определение 29. Группы гомологий коцепного комплекса $(C^\bullet, \delta) = (\text{Hom}(C_\bullet, G), \delta)$ называют *группами когомологий* комплекса (C_\bullet, ∂) с коэффициентами в группе G и обозначаются $H^k(C_\bullet; G)$. Как и в случае с гомологиями, $\text{Im } \delta_k$ называют k -мерными кограницами, $\text{Ker } \delta_k$ — k -мерными коциклами, а C^k — k -мерными коцепями.

Таким образом, мы определили и *сингулярные когомологии* пространства X (так как они строятся по сингулярным гомологиям). Заметим, что так как функтор Hom контравариантен, логично ожидать, что и когомологии будут контравариантным функтором. Действительно, если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то у нас есть индуцированный морфизм

$$f_*: C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$$

и действием функтора Hom мы получаем индуцированный морфизм $f^*: C^k(Y) \rightarrow C^k(X)$:

$$\varphi \in C^k(Y), \quad \varphi: C^k(Y) \rightarrow G, \quad f^*(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ f: C^k(X) \rightarrow G, \quad f^*(\varphi) \in C^k(X).$$

Покажем теперь, что у нас будет и индуцированный морфизм в когомологиях:

$$f^*: H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$$

Для этого надо проверить, что отображение уважает добавление кограницы, то есть, если мы выберем другого представителя того же когомологического класса, мы получим тот же образ, что и до этого. Действительно,

$$f^*(c_k + \delta c_{k-1}) = f^*(c_k) + \delta f^*(c_{k-1})$$

Замечание. Формально, как и в гомологиях, нам надо проверить, что $f^*\delta = \delta f^*$. Действительно, пусть $\varphi \in C^k(X)$, тогда

$$f^*(\delta\varphi) = f^*(\varphi\partial) = \varphi\partial f = \varphi f\partial = \delta f^*(\varphi).$$

В третьем равенстве мы пользуемся тем, что в начале курса мы уже проверяли, что граничный оператор коммутирует с непрерывными отображениями.

¹⁰В нашем, топологическом контексте, это группа коэффициентов.

3.22 Формула универсальных коэффициентов для когомологий

Пример 13. Рассмотрим следующий комплекс:

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_3} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_2} \xrightarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_1} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_0} \rightarrow 0$$

После применения функтора $\text{Hom}(_, \mathbb{Z})$ мы получим такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Посмотрим, какие в новом комплексе отображения. Действительно, пусть $\varphi: C_1 \rightarrow \mathbb{Z}$, $\psi: C_2 \rightarrow C_1$, $\psi(x) = 2x$, тогда $\varphi\psi: C_2 \rightarrow \mathbb{Z} \in C^2$. Нетрудно заметить, что $\varphi(\psi(x)) = \varphi(2x) = 2\varphi(x)$. Значит, мы получили вот такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \xleftarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Вычислим сначала гомологии:

$$H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}, H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_2(C_\bullet) = 0, H_3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

Теперь вычислим когомологии:

$$H^0(C_\bullet) = \mathbb{Z}, H^1(C_\bullet) = 0, H^2(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H^3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

То есть, сами группы не изменились, но изменилась градуировка.

Это вполне естественно, так как, на самом деле, любой цепной комплекс конечно-порожденных свободных абелевых групп является прямой суммой комплексов

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ и } 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

и в силу того, что функтор Hom аддитивен на конечных копроизведениях, применяя $\text{Hom}(_, \mathbb{Z})$ к исходному комплексу, мы получаем прямую сумму комплексов

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \text{ и } 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

Таким образом, мораль всего этого дела в том, что группы когомологий — тоже самое, что группы гомологий, за исключением того, что кручение смещается на одну размерность.

Утверждение 11. Пусть (C_\bullet, ∂) — цепной комплекс. Тогда существует гомоморфизм

$$h: H^n(C; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C), G).$$

Доказательство. Рассмотрим когомологический класс $[\varphi] \in H^n(C_\bullet; G)$, $\varphi: C_n \rightarrow G$, $\delta\varphi = 0$.

$$\delta\varphi = \varphi\partial \Leftrightarrow \varphi|_{\text{Im } \partial_{n+1}} = 0$$

Ограничение $\varphi_0 = \varphi|_{\text{Ker } \partial_n}: \text{Ker } \partial_n \rightarrow G$ индуцирует гомоморфизм факторизации

$$\overline{\varphi}_0: \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} \rightarrow G, \quad \overline{\varphi}_0 \in \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G).$$

Таким образом, полагая $h(\varphi) = \overline{\varphi}_0$, мы получаем нужное. □

Упражнение. h — эпиморфизм.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow Z_{n+1} \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} B_n \rightarrow 0$$

Применяя функтор $\text{Hom}(-, G)$ мы получаем точную последовательность

$$0 \leftarrow Z^{n+1} \leftarrow C^{n+1} \leftarrow B^{n+1} \leftarrow 0$$

На самом деле, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longleftarrow & Z^{n+1} & \longleftarrow & C^{n+1} & \longleftarrow & B^n \longleftarrow 0 \\
& & \uparrow 0 & & \uparrow \delta & & \uparrow 0 \\
0 & \longleftarrow & Z^n & \longleftarrow & C^n & \longleftarrow & B^{n-1} \longleftarrow 0
\end{array}$$

Видно, что эта диаграмма — часть короткой точной последовательности комплексов. Она даёт нам длинную точную последовательность:

$$\dots \leftarrow B^n \leftarrow Z^n \leftarrow H^n(C_\bullet, G) \leftarrow B^{n-1} \leftarrow Z^{n-1} \leftarrow \dots$$

Разбивая длинную точную последовательность на короткие точные последовательности мы получаем:

$$0 \leftarrow \text{Ker}(Z^n \rightarrow B^n) \xleftarrow{h} H^n(C_\bullet; G) \leftarrow \text{Coker}(Z^{n-1} \rightarrow B^{n-1}) \leftarrow 0$$

А теперь заметим, что $\text{Ker}(Z^n \rightarrow B^n) = \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$. Таким образом, мы получаем расщепимую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \text{Coker}(Z^{n-1} \rightarrow B^{n-1}) \rightarrow H^n(C_\bullet; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \rightarrow 0.$$

Определение 30. Пусть H — абелева группа. Тогда её *свободная резольвента* — это точная последовательность

$$\dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0,$$

в которой каждая группа F_n свободная.

Применяя к этой точной последовательности функтор $\text{Hom}(-, G)$ мы можем потерять точность, но во всяком случае, получим цепной комплекс:

$$\leftarrow F_2^* \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Будем обозначать группы когомологий свободной резольвенты, как $H^n(F, G)$. Нам понадобится следующее утверждение из гомологической алгебры:

Лемма 17. Пусть даны свободные резольвенты F и F' абелевых групп H и H' . Тогда любой гомоморфизм $\alpha: H \rightarrow H'$ можно продолжить до цепного отображения $F \rightarrow F'$. Кроме того, любые два таких цепных отображения, продолжающие гомоморфизм α , цепно гомотопны.

Для любых двух свободных резольвент F и F' группы H существуют канонические изоморфизмы

$$H^n(F; G) \cong H^n(F'; G).$$

У любой абелевой группы H есть свободная резольвента вида

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow H \rightarrow 0$$

с $F_i = 0$ при $i > 1$, которую мы сейчас построим.

Выберем в H набор образующих и пусть F_0 — группа, свободно порожденная этими образующими. Тогда у нас есть сюръективный гомоморфизм $f_0: F_0 \rightarrow H$, переводящий элементы базиса в образующие H . Его ядро будет свободно, как подгруппа свободной группы, поэтому мы можем положить $F_1 = \text{Ker } f_0$, а в качестве f_1 взять включение $\text{Ker } f_0 \hookrightarrow F_0$.

Для этой свободной резольвенты мы имеем $H^n(F; G) = 0 \ \forall n > 1$, поэтому, из леммы 17 мы получаем, что это должно быть верно для всех свободных резольвент.

Таким образом, единственная интересная группа из $H^n(F; G)$ — это $H^1(F; G)$. Эта группа зависит лишь от H и G , поэтому обычно её обозначают $\text{Ext}(H, G)$ ¹¹.

¹¹Вообще говоря, в гомологической алгебре функтор Ext обычно интерпретируют, как множество классов эквивалентности расширений G посредством H , но в алгебраической топологии такая интерпретация редко нужна.

Так вот, из построения свободной резольвенты для группы H и определения когомологий мы теперь наконец можем заметить, что

$$\text{Coker}(Z^{n-1} \rightarrow B^{n-1}) = \text{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G).$$

Теперь мы наконец можем заключить, что мы доказали формулу универсальных коэффициентов для когомологий:

Теорема 27 (Об универсальных коэффициентах для когомологий). Пусть C_\bullet — цепной комплекс. Тогда его группы когомологий определяются расщепимыми короткими точными последовательностями

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G) \rightarrow H^n(C; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C), G) \rightarrow 0$$

Вообще говоря, это утверждение достаточно полезно, потому что на конечнопорожденных абелевых группах функтор Ext несложно посчитать:

- $\text{Ext}(H \oplus H', G) \cong \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$.
- $\text{Ext}(H, G) = 0$, если H — свободна.
- $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$.
- Если H конечно порождена, то имеет место изоморфизм

$$\text{Ext}(H, \mathbb{Z}) \cong \text{Tor}(H).$$

Кроме того, теорема об универсальных коэффициентах позволяет вычислять когомологии, зная только гомологии.

Следствие 9. Если группы гомологий $H_n(C)$ и $H_{n-1}(C)$ комплекса C , состоящего из свободных абелевых групп, конечно порождены и $T_n \subset H_n$ и $T_{n-1} \subset H_{n-1}$ — подгруппы кручения, то

$$H^n(C; \mathbb{Z}) \cong (H_{n-1}(C)/T_n) \oplus T_{n-1}.$$

Это следствие даёт нам обобщение и формализацию примера 13.

Кроме того, из всего этого дела есть еще одно замечательное следствие:

Следствие 10. Если $f: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ индуцирует изоморфизм всех групп гомологий $H_k(C_\bullet) \cong H_k(C'_\bullet)$. Тогда отображения $f^*: H^k(C_\bullet; G) \cong H^k(C'_\bullet; G)$.

Доказательство. Действительно, достаточно заметить, что из свойств свободной резольвенты мы знаем, что отображение цепных комплексов индуцирует такую вот диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) & \longrightarrow & H^n(C; G) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(C'), G) & \longrightarrow & H^n(C'; G) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_{n-1}(C'), G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Применяя 5-лемму и индукцию, мы получаем нужное. □

3.23 Умножение в когомологиях

Пусть R — коммутативное и ассоциативное кольцо.

Пусть $\varphi \in C^k(X; R)$, $\psi \in C^\ell(X; R)$. Тогда их произведением определяется таким образом:

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+\ell}, \quad (\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots v_k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_{k+\ell} \dots v_{k+\ell}]}),$$

где $\sigma: \Delta^{k+\ell} \rightarrow X$ — сингулярный симплекс.

Лемма 18. Для кограницы \smile -произведения справедлива следующая формула:

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi.$$

Доказательство. Пусть $\sigma: \Delta^{k+\ell} \rightarrow X$ — сингулярный симплекс. Тогда

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]}) \psi(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell+1}]}).$$

Распишем теперь второй кусок:

$$(-1)^k (\varphi \smile \delta\psi) = \sum_{i=k}^{k+\ell+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+\ell+1}]}).$$

Когда мы сложим эти две суммы, последнее слагаемое первой суммы сократится с первым слагаемым второй, а всё, что останется — как раз $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$. \square

Замечание. Таким образом, $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi \pm \delta\psi \smile \varphi$. Из этого следует, что произведение коциклов — коцикл. Также это сразу даёт нам, что произведение коцикла и кограницы (в любом порядке) — кограница:

$$\varphi \smile \delta\psi = \pm \delta(\varphi \smile \psi)$$

Это даёт нам ассоциативное дистрибутивное умножение

$$\smile: H^k(X; R) \times H^\ell \rightarrow H^{k+\ell}(X; R).$$

Таким образом, при помощи \smile -произведения, мы наделили

$$H^*(X; R) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X; R)$$

структурой кольца (а на самом деле, градуированной алгебры).

Если в кольце R есть единица, то единицей относительно \smile -произведения будет нульмерный коцикл $1 \in H^0(X; R)$, принимающий значение 1 на любом нульмерном сингулярном симплексе.

Замечание. Это показывает нам отдельную пользу когомологий: например, у \mathbb{CP}^2 и $S^4 \vee S^2$ все группы гомологий и группы когомлогий совпадают, а кольца когомологий отличаются.

4. Комплексная алгебраическая геометрия

4.1 Комплексные многообразия

Определение 31. Комплексным многообразием M называется гладкое многообразие, допускающее такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и такие координатные отображения $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$, что все функции перехода $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ голоморфны на $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Функция f на открытом подмножестве $U \subset M$ называется *голоморфной*, если $\forall \alpha \in I$ функция $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфна в $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$.

Набор $z = (z_1, \dots, z_n)$ функций на $U \subset M$ называется *голоморфной системой координат*, если $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$ и $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфны на $z(U \cap U_\alpha)$ и $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ для всех α .

Отображение $f: M \rightarrow N$, где M и N — комплексные многообразия, называется *голоморфным*, если в голоморфных локальных координатах оно задаётся голоморфными функциями.

Пример 14 (Примеры комплексных многообразий). Приведём какие-нибудь примеры комплексных многообразий:

1. Одномерное комплексное многообразие называют **римановой поверхностью**.
2. $P\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \{z \sim \lambda z\} = \mathbb{P}^n$ — комплексное проективное пространство. Это пространство компактно, так как есть непрерывное сюръективное отображение $S^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$.
3. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^k \subset \mathbb{C}^n$ — дискретная решётка. Факторгруппа \mathbb{C}^n / Λ обладает структурой комплексного многообразия, которую индуцирует проекция $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / \Lambda$. Это многообразие компактно тогда и только тогда, когда $k = 2n$ и в этом случае \mathbb{C}^n / Λ называется **комплексным тором**.
4. Тут был еще пример, что при неразветвлённом накрытии структура комплексного многообразия наследуется, но я хз, что такое разветвлённое накрытие.

Касательное пространство к комплексному многообразию.

Пусть M — комплексное многообразие, $p \in M$, а $z = (z_1, \dots, z_n)$ — система голоморфных координат в окрестности p . В случае комплексного многообразия имеются три различных понятия *касательного пространства* к M в точке $p \in M$.

1. Рассмотрим M , как вещественное $2n$ -многообразие. Тогда $T_{\mathbb{R},p}M$ — пространство \mathbb{R} -линейных дифференцирований кольца $C^\infty(M, \mathbb{R})$ (с носителем в окрестности p). Если мы представим голоморфные координаты в виде $z_j = x_j + iy_j$, то $T_{\mathbb{R},p}M$ будет иметь базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$, как векторное пространство над \mathbb{R} .
2. Пространство $T_{\mathbb{R},p}M$ можно комплексифицировать при помощи расширения скаляров, то есть рассмотреть

$$T_{\mathbb{C},p}M \stackrel{\text{def}}{=} T_{\mathbb{R},p}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

$T_{\mathbb{C},p}M$ называют *комплексифицированным касательным пространством* к M в точке p . Его можно реализовать, как пространство \mathbb{C} -линейных дифференцирований кольца $C^\infty(M, \mathbb{C})$ (опять же, функции с носителем в окрестности p). Соответственно, там можно выбрать базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$, а при замене базиса на комплексные обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

«более стандартный» базис $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\}$.

3. Подпространство $T'_pM = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial z_j}\} \leq T_{\mathbb{C},p}M$ называется *голоморфным касательным пространством* к M в точке p . Оно может быть реализовано, как подпространство в $T_{\mathbb{C},p}M$, состоящее из дифференцирований, обращающихся в ноль на антиголоморфных функциях (таких f , что \bar{f} — голоморфна). Соответственно, подпространство $T''_pM = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\}$ называется *антиголоморфным касательным пространством* к M в точке p . Ясно, что

$$T_{\mathbb{C},p}M = T'_pM \oplus T''_pM.$$

Заметим, что для комплексных многообразий M, N любое $f \in C^\infty(M, N)$ индуцирует линейное отображение

$$f_*: T_{\mathbb{R},p}M \rightarrow T_{\mathbb{R},f(p)}N$$

а значит и линейное отображение

$$f_*: T_{\mathbb{C},p}M \rightarrow T_{\mathbb{C},f(p)}N,$$

но не отображение $T'_pM \rightarrow T'_{f(p)}N$ для всех $p \in M$.

На самом деле, отображение $f: M \rightarrow N$ голоморфно тогда и только тогда, когда

$$f_*(T'_pM) \subset T'_{f(p)}N \quad \forall p \in M.$$

То есть, когда голоморфное касательное пространство отображается в голоморфное.

Заметим, что также, поскольку $T_{\mathbb{C},p}M = T_{\mathbb{R},p}M \otimes \mathbb{C}$, операция сопряжения, переводящая

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

корректно определена на $T_{\mathbb{C},p}M$ и, как нетрудно заметить, $T''_pM = \overline{T'_pM}$. Отсюда следует, что проекция

$$T_{\mathbb{R},p}M \rightarrow T_{\mathbb{C},p}M \rightarrow T'_pM$$

есть \mathbb{R} -линейный изоморфизм.

Это обстоятельство позволяет заниматься геометрией исключительно в голоморфном касательном пространстве.

Пример 15. Пусть $z(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — гладкая кривая. Тогда $z(t) = x(t) + iy(t)$ и в качестве касательной мы можем взять

$$x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y} \text{ в } T_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \text{ либо } z'(t)\frac{\partial}{\partial z} \text{ в } T'\mathbb{C}.$$

Определение 32. Пусть теперь M, N — комплексные многообразия, $z = (z_1, \dots, z_n)$ — голоморфные координаты в окрестности точки $p \in M$, а (w_1, \dots, w_n) — голоморфные координаты в окрестности точки $q = f(p)$, где $f: M \rightarrow N$ — голоморфное отображение. В связи с различными понятиями касательных пространств, мы имеем и различные понятия якобиана f .

1. Пусть $z_j = x_j + iy_j$, $w_k = u_k + iv_k$. Тогда в базисах $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial v_k}\}$ пространств $T_{\mathbb{R},p}M$ и $T_{\mathbb{R},q}N$ линейное отображение f_* задаётся $2m \times 2n$ -матрицей

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} & \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j} & \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$

В базисах $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial w_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k}\}$ пространств $T_{\mathbb{C},p}M$ и $T_{\mathbb{C},q}N$ отображение f_* задаётся матрицей

$$\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(f) & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{J}(f)} \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}(f) = \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_j} \right)_{k,j}.$$

Замечание. В частности, отметим, что $\text{rank } \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = 2 \text{rank } \mathcal{J}(f)$ и в случае $m = n$

$$\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \det \mathcal{J}(f) \det \overline{\mathcal{J}(f)} = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \geq 0,$$

то есть голоморфные отображения **сохраняют ориентацию**.

Мы будем считать, что пространство \mathbb{C}^n естественно ориентированно $2n$ -формой

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge (dz_2 \wedge d\bar{z}_2) \wedge \dots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n) = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n.$$

Ясно, что если $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ и $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^n$ — голоморфные координатные отображения на комплексном многообразии M , то прообразы при φ_α и φ_β естественной ориентации на \mathbb{C}^n согласованы на $U_\alpha \cap U_\beta$.

Соответственно, любое комплексное многообразие **имеет естественную ориентацию**, которая сохраняется при голоморфных отображениях.

4.2 Векторные расслоения

Определение 33. Пусть M — гладкое многообразие. Комплексным C^∞ -расслоением на M называется семейство $\{E_x\}_{x \in M}$ комплексных векторных пространств E_x , параметризованных точками многообразия M , со структурой C^∞ многообразия на

$$E = \bigcup_{x \in M} E_x$$

такой, что выполняются следующие условия:

1. отображение проектирования $\pi: E \rightarrow M$, переводящее E_x в x принадлежит классу C^∞ .
2. $\forall x_0 \in M$ найдутся открытое множество $U \subset M: U \ni x_0$ и диффеоморфизм

$$\varphi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^k,$$

который отображает векторное пространство E_x изоморфно на $\{x\} \times \mathbb{C}^k$ для всех $x \in U$. Такое отображение φ_U называется *тривиализацией*.

Размерность слоёв E_x расслоения E называется *рангом* E . Расслоение ранга 1 называется *линейным*.

Замечание. Для любой пары тривиализаций φ_U, φ_V отображение перехода $g_{uv}(x) = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})|_{\{x\} \times \mathbb{C}^k}: U \cap V \rightarrow \text{GL}(k)$ принадлежит классу C^∞ . Кроме того, они удовлетворяют тождествам:

$$g_{UV}(x) \cdot g_{VU}(x) = I \quad \forall x \in U \cap V$$

$$g_{UV}(x)g_{VW}(x) \cdot g_{WU}(x) = I \quad \forall x \in U \cap V \cap W$$

Обратно, если задано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ многообразия M и C^∞ отображения $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k)$, удовлетворяющие тождествам выше, то найдётся единственное комплексное векторное расслоение $E \rightarrow M$ с такими функциями перехода.

Действительно, мы можем положить $E = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{C}^k)$, в котором мы отождествляем точки $(x, \lambda) \in U_\beta \times \mathbb{C}^k$ и $(x, \lambda g_{\alpha\beta}(x))$, а структура многообразия на E определяется вложениями $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \rightarrow E$.

Обычно операции над векторными пространствами переносятся и на векторные расслоения:

- Если $E \rightarrow M$ — векторное расслоение, то можно определить двойственное расслоение $E^* \rightarrow M$, взяв в качестве слоёв $E_x^* \stackrel{\text{def}}{=} (E_x)^*$. Тривиализации $\varphi_u: E_u \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ (где $E_u = \pi^{-1}(U)$) индуцируют отображения

$$\varphi_U^*: E_U^* \rightarrow U \times (\mathbb{C}^k)^* \cong U \times \mathbb{C}^k,$$

которые наделяют E^* структурой многообразия. Эту конструкцию проще получить при помощи функций перехода: $E^* \rightarrow M$ будет векторным расслоением с функциями перехода $j_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x)^{-1}$.

- Пусть $E \rightarrow M$ и $F \rightarrow M$ — комплексные векторные расслоения рангов k и ℓ с функциями перехода $\{g_{\alpha\beta}\}$ и $\{h_{\alpha\beta}\}$. Тогда мы можем определить $E \oplus F$, как векторное расслоение, заданное функциями перехода

$$j_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix} \in \text{GL}(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^\ell).$$

- Также мы можем определить расслоение $E \otimes F$, как расслоение, заданное функциями перехода

$$j_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta}(x) \in \text{GL}(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^\ell).$$

- Аналогично, $\Lambda^r E$ — векторное расслоение, заданное формулами

$$j_{\alpha\beta} = \Lambda^r(g_{\alpha\beta}(x)) \in \text{GL}(\Lambda^r \mathbb{C}^k).$$

В частности, $\Lambda^k E$ будет линейным расслоением с функциями перехода

$$j_{\alpha\beta}(x) = \det g_{\alpha\beta}(x) \in \text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*.$$

Для векторных расслоений можно также определить подрасслоения и прообразы.¹²

Определение 34. Векторные расслоения $E \rightarrow M$ и $F \rightarrow M$ *изоморфны*, если существует отображение $f: E \rightarrow F$ такое, что $f_x: E_x \rightarrow F_x$ — изоморфизмы $\forall x \in M$.

Векторное расслоение $E \rightarrow M$ называется *тривиальным*, если оно изоморфно $M \times \mathbb{C}^k$.

Сечением σ векторного расслоения $E \xrightarrow{\pi} M$ над $U \subset M$ называется C^∞ отображение

$$\sigma: U \rightarrow E: \sigma(x) \in E_x \forall x \in U.$$

Репером для E над $U \subset M$ называется набор $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ сечений E над U таких, что $(\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x))$ является базисом пространства $E_x \forall x \in U$.

Репер для E над U , по существу, то же самое, что тривиализация расслоения E над U : при заданной тривиализации $\varphi_U: E_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$, то сечения $\sigma_i(x) = \varphi_U^{-1}(x, e_i)$ образуют базис. И обратно, если задан репер $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, то можно определить тривиализацию $\varphi_U(\lambda) = (x, (\lambda_1, \dots, \lambda_k))$ для $\lambda = \sum \lambda_i \sigma_i(x)$ в E_x .

Заметим, что при заданной тривиализации φ_U расслоения E над U любое его сечение σ можно единственным образом представить, как векторзначную C^∞ -функцию $f = (f_1, \dots, f_k)$, раскладывая $\sigma(x)$ по базису:

$$\sigma(x) = \sum f_i(x) \sigma_U^{-1}(x, e_i).$$

Если же φ_V — тривиализация расслоения E над V и $f' = (f'_1, \dots, f'_k)$ — соответствующие представления $\sigma|_{U \cap V}$, то

$$\sum f_i(x) \varphi_U^{-1}(x, e_i) = \sum f'_i(x) \varphi_V^{-1}(x, e_i),$$

так что

$$\sum f_i(x) e_i = \sum f'_i(x) \varphi_U \varphi_V^{-1}(x, e_i) \implies f = g_{UV} f'.$$

Таким образом, при заданных тривиализациях

$$\{\varphi_\alpha: E_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$$

сечения расслоения E над $\bigcup U_\alpha$ в точности соответствуют наборам

$$\{f_\alpha = (f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_k})\}_\alpha$$

векторзначных C^∞ функций, удовлетворяющих $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$.

Пример 16 (Векторные расслоения). Рассмотрим некоторые базовые примеры векторных расслоений:

1. Касательные и кокасательные расслоения:

Комплексным касательным расслоением к комплексному многообразию M мы будем называть

$$TM = \bigsqcup_{z \in M} T_z M, \text{ где}$$

$T_z M$ — комплексное касательное пространство к M в точке x . В расслоении TM есть подрасслоения $T'M$ и $T''M$ определяющиеся естественным образом.

2. Дифференциальные формы:

Определение 35. Дифференциальной формой степени k называется сечение расслоения $\Lambda^k(TM)^*$. Расслоение комплексных дифференциальных форма степени k мы будем обозначать $\Omega_{\mathbb{C}}^k(M)$ или $\Omega_{\mathbb{C},M}^k$.

Пусть M — вещественное многообразие. Тогда легко видеть, что если $f \in C^{k-1}(M)$, то df — C^{k-1} -гладкое сечение расслоения $\Omega_{\mathbb{R}}^1(M)$. Кроме того, нетрудно видеть, что если x_1, \dots, x_n — локальные координаты в карте $U \subset M$, то k -формы $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ образуют базис слоя $\Omega_{\mathbb{R}}^k(X)$ в каждой точке открытого множества U . В самом деле, локальные координаты x_1, \dots, x_n задают локальную тривиализацию касательного расслоения TM : соответствующий локальный базис в слое задаётся в каждой точке дифференцированиями $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x$. Тогда 1-формы dx_i образуют двойственный базис в расслоении $\Omega_{\mathbb{R}}^1(X)$.

¹²но делать этого мы пока что не будем.

4.3 Подмногообразия и аналитические подмножества

Докажем теперь несколько классических теорем для случая комплексных многообразий.

Теорема 28 (Об обратном отображении). Пусть U, V — открытые подмножества в \mathbb{C}^n , $0 \in U$ и $f: U \rightarrow V$ — такое голоморфное отображение, что матрица $\mathcal{J}(f) = (\partial f_i / \partial z_j)$ невырождена в 0.

Тогда отображение f взаимно однозначно в окрестности точки 0 и обратное отображение f^{-1} голоморфно в некоторой окрестности $f(0)$.

Доказательство. Как мы уже отмечали в 4.1, $|\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f)| = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \neq 0$ в точке 0, а значит, по обычной теореме об обратном отображении, функция f имеет в окрестности точки 0 обратную $C^\infty(U, V)$ функцию f^{-1} . Заметим, что $f^{-1}(f(z)) = z$, так что, дифференцируя это равенство в нуле мы имеем

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f^{-1}(f(z)))_j = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial z_k} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} + \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \bar{z}_k} \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_j} \right) = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \bar{z}_k} \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_j} \right) \quad \forall j, k.$$

Так как матрица $(\partial f_k / \partial z_j)$ была невырождена, отсюда следует, что $\partial f_j^{-1} / \partial \bar{z}_k = 0 \quad \forall j, k$, что и означает голоморфность функции f . \square

Теорема 29 (О неявной функции). Пусть заданы функции $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_n$, удовлетворяющие условию

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0.$$

Тогда существуют такие функции $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{O}_{n-k}$, что в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$

$$f_1(z) = \dots f_k(z) = 0 \Leftrightarrow z_i = w_i(z_{k+1}, \dots, z_n), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Доказательство. Как обычно, по обычной теореме о неявной функции в случае C^∞ существуют функции $\omega_1, \dots, \omega_k$ с нужным свойством. Остается показать голоморфность. Это делается непосредственно вот таким стандартным вычислением:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} (f_j(\omega(z), z)) = \dots = \sum \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial f_j}{\partial \omega_\ell} \Rightarrow \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0 \quad \forall \alpha, \ell,$$

\square

Замечание. Видимо почти всегда, когда мы хотим показать голоморфность, мы тупо считаем в локальных производных антиголоморфную производную.

Теперь мы увидим, что комплексные многообразия в смысле их морфизмов таки имеют свою, отличную от вещественной, специфику:

Утверждение 12. Если $f: U \rightarrow V$ — взаимно однозначное голоморфное отображение открытых множеств в \mathbb{C}^n , то $\det \mathcal{J}(f) \neq 0$, то есть f^{-1} голоморфно.

Замечание. Мы видели этот факт в обычном комплексном анализе (доказывали, что производная однолистной функции не обнуляется).

Определение 36. Комплексным подмногообразием S комплексного многообразия M называется подмножество $S \subset M$, которое локально задается либо как множество нулей совокупности голоморфных функций f_1, \dots, f_k с условием $\text{rank } \mathcal{J}(f) = k$, либо как образ открытого подмножества $U \subset \mathbb{C}^{n-k}$ при отображении $f: U \rightarrow M$ с условием $\text{rank } \mathcal{J}(f) = n - k$.

Эквивалентность этих определений следует из теоремы о неявной функции 29.

Определение 37. Аналитическим подмножеством V комплексного многообразия M называется подмножество, являющееся локально множеством нулей конечного набора голоморфных функций.

Точка $p \in V$ называется *гладкой*¹³ точкой V , если V в некоторой её окрестности задаётся набором голоморфных функций f_1, \dots, f_k , причем таким, что $\text{rank } \mathcal{J}(f) = k$.

Множество гладких точек V обозначается V^* , а все точки из $V \setminus V^*$ называются *особыми*. Они формируют множество особенностей аналитического подмножества V , которое мы будем обозначать, как V_s .

В частности, если p — точка аналитической гиперповерхности $V \subset M$, задаваемой в локальных координатах z функцией f , определим *кратность* $\text{mult}_p(V)$, как порядок обращения f в нуль в точке p , то есть наибольшее такое m , что

$$\frac{\partial^k f}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = 0 \quad \forall k \leq m - 1.$$

Утверждение 13. Множество V_s содержится в аналитическом подмножестве многообразия M , не совпадающем с V .

Замечание. А на самом деле, при аккуратном выборе функций, несложно показать, что V_s — аналитическое подмножество в M .

Запомним также полезный нам в будущем факт:

Утверждение 14. Аналитическое множество V неприводимо тогда и только тогда, когда V^* связно.

Тут было еще что-то про касательные конусы, пока что забудем на это, лень читать.

4.4 Когомологии де Рама и Дольбо

Пусть M — гладкое многообразие. Обозначим за $A^p(M; \mathbb{R})$ пространство дифференциальных форм степени p на M , а через $Z^p(M; \mathbb{R})$ подпространство замкнутых p -форм.

Так как $d^2 = 0$, у нас есть (ко)цепной комплекс

$$A^0(M; \mathbb{R}) \rightarrow \dots \rightarrow A^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow A^{p+1}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \dots$$

а его группы когомологий называются группами *когомологий де Рама* многообразия M .

Иными словами, группы когомологий де Рама — это факторгруппы замкнутых форм по модулю точных

$$H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) = Z^p(M; \mathbb{R}) / dA^{p-1}(M).$$

Совершенно также мы можем рассматривать комплекснозначные формы и давать все соответствующие определения (используя обозначения $A^p(M)$ и аналогичные, то есть без коэффициентов):

$$H_{\text{DR}}^p(M) = Z^p(M) / dA^{p-1}(M)$$

Замечание. Нетрудно заметить, что как и всегда с коэффициентами,

$$H_{\text{DR}}^p(M) = H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}.$$

Как мы заметили в самом первом параграфе, комплексифицированное кокасательное пространство раскладывается в голоморфную и антиголоморфную часть:

$$T_{\mathbb{C},z}^* M = T_z^{*'} M \oplus T_z^{*''} M,$$

что дает нам разложение

$$\Lambda^n T_{\mathbb{C},z}^* M = \bigoplus_{p+q=n} \left(\Lambda^p T_z^{*'}(M) \otimes \Lambda^q T_z^{*''}(M) \right),$$

а это (по определению внешних форм) даёт нам

$$A^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M), \text{ где}$$

¹³возможно, корректнее использовать слово регулярная?

$$A^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^n(M) \mid \varphi(z) \in \Lambda^p T_z^{*'}(M) \otimes \Lambda^q T_z^{*''}(M) \forall z \in M\}.$$

Соответственно, форму $\varphi \in A^{p,q}$ называют формой типа (p, q) . Обозначим за $\pi^{(p,q)}$ проекцию

$$A^*(M) \rightarrow A^{p,q}(M),$$

так что для $\varphi \in A^*(M)$ имеем $\varphi = \sum \pi^{(p,q)} \varphi$.

Если $\varphi \in A^{p,q}(M)$, то для любого $z \in M$

$$d\varphi(z) \in \left(\Lambda^p T_z^{*'} M \otimes \Lambda^q T_z^{*''} M \right) \wedge T_{\mathbb{C},z}^* M,$$

$$d\varphi \in A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M).$$

Определим теперь для этих замечательных дифференциальных форм операторы

$$\bar{\partial}: A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p,q+1}, \quad \partial: A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p+1,q}(M)$$

$$\bar{\partial} = \pi^{(p,q+1)} \circ d, \quad \partial = \pi^{(p+1,q)} \circ d, \quad \text{то есть } d = \partial + \bar{\partial}.$$

В локальных координатах $z = (z_1, \dots, z_n)$ форма $\varphi \in A^n(M)$ имеет тип (p, q) , если она имеет представление в виде

$$\varphi(z) = \sum_{I,J} \varphi_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Замечание. Короче говоря, вся эта страшная белиберда была, чтоб сказать, что бывают не только голоморфные дифференциальные формы, но и такие, где один кусок голоморфный, а другой антиголоморфный.

Дифференцировать эти формы можно так:

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \sum_{I,J,j} -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \varphi_{IJ}$$