Содержание

1. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию

$\mathfrak{A}^{op} \cong R - Alg.$

2. Основы теории гомологий

2.1 Симплициальные гомологии

Определение 1. *Цепным комплексом* абелевых групп $(C_\bullet, \partial)$ называется последоватеклньость абелевых групп и морфизмов вида

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} \ldots, \quad \text{где } C_i - \text{абелевы группы}$$

при условии $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Если комплекс обрывается с одной из сторон, то мы считаем, что он дополнен нулями.

Элементы группы C_q называют q-мерными цепями, а отображение ∂ называют (граничным) дифференциалом.

Замечание. Ясно, что условие $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ равносильно тому, что $\operatorname{Ker} \partial_q \supset \operatorname{Im} \partial_{q+1}$.

Замечание. Когда комплекс снабжают отображением $C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$, это отображение называют *аугументацией.*

Определение 2. *Гомологиями* комплекса $(C_\bullet, \partial)$ называют абелевы группы

$$H_q(C_\bullet, \partial) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial_q / \operatorname{Im} \partial_{q+1}.$$

Если коплекс снабжен аугументацией и обрывается на нулевом члене, то у него также есть *приведённые гомологии*

$$H_0(C_\bullet, \partial) = C_0 / \operatorname{Im} \partial_1, \quad \widetilde{H_0}(C_\bullet, \partial) = \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1, \quad \widetilde{H}_q = H_q \ \forall q > 0,$$

которые отличаются от обычных только в нулевом члене.

Перед тем как что-то строго определять, посмотрим нестрого на какие-то мотивирующие примеры вычислений. Для этого лучше всего подойдут *симплициальные гомологии.* Неформально, идея состоит в том, что мы разбиваем топологическое пространство X на симплексы всех размерностей и говорим, что $C_q(X, \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа, порожденная всеми q-мерными симплексами (то есть, мы рассматриваем целочисленные формальные линейные комбинации симплексов). Дифференциалом ∂ будет оператор взятия границы (топологической).

Пример 1 (Симплицаильные гомологии отрезка (нестрого))**.** Пусть X — отрезок $[a, b]$ с ориентацией из b в a. В нём две нульмерные клетки, значит $C_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$, одномерная клетка одна — ребро e, то есть $C_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и комплекс устроен следующим образом:

$$\ldots 0 \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z},$$

так как мы можем определить аугументацию следующим образом: $x \in C_0 \Rightarrow x = k_1 a + k_2 b$, положим $\varepsilon(x) = k_1 + k_2$. То есть, на самом деле комплекс выглядит вот так:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow[e \to \partial e = a - b]{} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow[a \to 1,\ b \to 1]{} \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $\varepsilon \circ \partial = 0$.

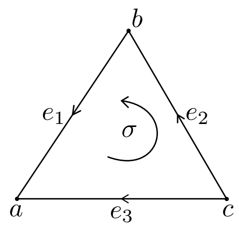
Гомологиями топологического пространства называют гомологии построенного по нему комплекса. В нашем случае

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = 0/0 = 0.$$

$$\widetilde{H_0}(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} \varepsilon / \operatorname{Im}_{\partial_1} = \langle a - b \rangle / \langle a - b \rangle = 0.$$

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) / \operatorname{Im}_{\partial_1} = \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle / \langle a - b \rangle = \langle a \rangle = \mathbb{Z}$$

Пример 2 (Симплицальные гомологии треугольника)**.** Рассмотрим треугольник (abc) с внутренностью σ, ориентированной против часовой стрелки, и рёбрами $b \xrightarrow{e_1} a$, $c \xrightarrow{e_3} a$, $c \xrightarrow{e_2} b$.



Тогда цепной комплекс, построенный по треугольнику будет устроен следующим образом:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow[\sigma \to e_1 + e_2 - e_3]{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Из ориентации σ ясно, что $\partial\sigma = e_1 + e_2 - e_3$, $\partial e_1 = b - c$, $\partial e_2 = a - b, \partial e_3 = a - c$. Ясно, что вторые гомологии нулевые:

$$H_2(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} \partial_2 / 0 = 0$$

Посчитаем теперь первые.

$$\partial(k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3) = k_1(b-c) + k_2(a-b) + k_3(a-c) = a(k_2+k_3) + b(k_1-k_2) + c(-k_1-k_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\partial_1 = \langle (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid k_1 = k_2 = -k_3 \rangle$$

С другой стороны, $\operatorname{Im}\partial_2 = k(e_1+e_2-e_3)$. Тем самым, $H_1(X,\mathbb{Z}) = 0$. Аналогичным вычислением мы получаем, что $H_0(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Пример 3 (Спмилициальные гомологии треугольника без внутренности)**.** Пусть теперь всё также, как в примере 2, но у треугольнка нет внутренности. Тогда цепной комплекс будет иметь вид

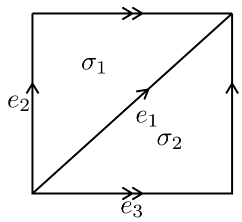
$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$$

Из того, как поменялись отображения, ясно, что поменялись только первые гомологии. Теперь $H_1(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$, а образующая — это цикл $e_1+e_2-e_3$. С другой стороны, $\pi_1(\Delta) = \mathbb{Z}$.

Замечание. Когда-нибудь позже мы докажем, что для любого симплициального пространства X есть отображение

$$\pi_1(X) \to H_1(X) = \pi_1(X)^{ab} = \pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)].$$

Пример 4 (Симплициальные гомологии тора $\mathbb{T}^2$)**.** Рассмотрим двумерный тор $\mathbb{T}^2$, разбитый на симплексы следующим образом:



Из такой триангуляции ясно, что комплекс будет иметь вид:

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Посчитаем дифференциал на двумерных клетках: $\partial\sigma_1 = e_1 - e_3 - e_2,\ \partial\sigma_2 = e_2 + e_3 - e_1$. С другой стороны, ясно, что дифференциал зануляется на любой одномерной клетке, $\partial e_i = a - a = 0$.

$$H_2(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\partial_2/0 = \mathbb{Z}.$$

так как $\partial\sigma_1 = -\partial\sigma_2 \Rightarrow \operatorname{Ker}\partial_2 = \mathbb{Z}$.

Также прямыми вычислениями можно убедиться, что $H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2)^{ab}$. Образующими первых гомологий будут e_2 и e_3.

Упражнения.

1. Посчиать по определению одномерные гомологии связного дерева.
2. Посчитать по определению все гомологии n-мерного симплекса T^n

$$T^n \overset{\text{def}}{=} \left\{ (t_0,\ldots,t_n) \mid t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

3. Покажите, что барицентрическое подразбиение не меняет симплициальных гомологий.

Вообще говоря, далее нужно формально доказывать, что гомологии не зависят от симплициального разбиения пространства (и выяснять, у каких пространств это симплициальное разбиение вообще есть), но мы этим всем заниматься не будем, так как в нашем курсе основной будет другая теория.

2.2 Сигнулярные гомологии

Определение 3. Пусть X — топологическое пространство.

- *Сингулярным q-мерным симплексом* мы будем называть непрерывное отображение $f\colon T^q \to X$.
- Его граница определяется, как формальная линейная комбинация
$$\partial f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \Gamma_i f,$$
где $\Gamma_i f$ — сужение f на грань $t_i = 0$ (сумма именно такая, так как у q-мерного симплекса $q+1$ грань).
- *Сингулярными q-мерными цепями* $C_q(X, \mathbb{Z})$ мы будем называть формальные целочисленные линейные комбинации конечного числа q-мерных сингулярных симплексов (то есть порожденную ими свободную абелеву группу).
- Дифферецниал комплекса[1] $C_\bullet$ определяется, как продолжение по линейности оператора взятия границы q-мерного сингулярного симплекса.
- Комплекс сингулярных цепей может быть снабжен аугументацией $\varepsilon\colon C_0 \to \mathbb{Z},\ \sum k_i f_i \to \sum k_i$.

Замечание. Формально говоря, мы пока не знаем, что комплекс из сингулярных цепей — это комплекс. Для этого нам понадобится следующая техническая

Лемма 1. В контексте определения 3 $\partial^2 = 0$.

Доказательство. Посчитаем $\partial\partial f$:
$$\partial\partial f = \partial\left(\sum_i (-1)^i \Gamma_i f\right) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \Gamma_j \Gamma_i f.$$
Ясно, что любую грань коразмерности 2 можно получить взятием границы двумя способами. Действительно, если $j < i$, то $\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_j \Gamma_{i+1}$ (i-я из оставщихся после выкидывания j-й координаты — $i+1$-я изначально), а в сумме слагаемые $\Gamma_i \Gamma_j$ и $\Gamma_j \Gamma_{i+1}$ будут с разным знаком, значит $\partial\partial f = 0$. □

Определение 4. *Сингулярными гомологиями* топологического пространства X называются гомологии комплекса сингулярных цепей. Мы будем обозначать их, как $H_k(X)$ или $H_{\mathrm{k}}^{\mathrm{sing}}(X)$.

В топологическом контексте группу $Z_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial_q$ часто называют *q-циклами*[2], а группу $B_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im} \partial_{q+1}$ — *q-границами.* В этом смысле $H_q(X)$ — циклы с точностью до границ.

Замечание. Из определения очевидно, что сингулярные гомологии зависят только от класса гомеоморфизма пространства X (их основной плюс и состоит в том, что тут это очевидно).

Теперь попробем посчитать по определению сингулярные гомологии для какого-нибудь пространства. Оказывается, что по определению сделать это возможно разве что для точки.

Теорема 1 (Сингулярные гомологии точки)**.**
$$H_q^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0,\ H_0^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \widetilde{H}_0^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Итак, как мы помним, $C_q(*)$ — все линейные комбинации отображений $f\colon T^q \to *$. Так как отображений из T^n в точку всего одно, $\forall n\ C_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, а значит, наш комплекс сингулярных цепей $(C_\bullet(*, \mathbb{Z}), \partial)$ будет иметь вид:
$$\ldots \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}.$$
Теперь посчитаем дифференциалы комплекса.

Возьмем $f \in C_1$, это какая-то формальная линейная комбинация отображений из $[a, b] \to \{*\}$ Тогда ∂f — это $f|_a - f|_b = 0$. Впрочем, и сразу ясно, что в случае любого n, так как наше отображение действует

[1] формально, мы пока еще не знаем, что это комплекс.

[2] позже мы увидим, какая в этом геометрическая интуиция

в точку (оно постоянно), сужения на все грани будут совпадать и результат в сумме будет зависеть лишь от четности n, то есть дифференциалы комплекса будут иметь вид:

$$\ldots \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \ldots \xrightarrow{\cdot 1 = \mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Иными словами, $\partial_n = 0$, если n — нечетное и тождественно иначе. Теперь, как нетрудно заметить,

$$\forall q > 0 \quad \operatorname{Ker} \partial_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1} \Rightarrow H_q^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0,\ H_0^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \widetilde{H}_0^{\mathrm{sing}}(*, \mathbb{Z}) = 0.$$

Трудности, возникшие при подсчетах, намекают на то, что для отрезка, например, это будет сделать еще гораздо труднее. С другой стороны, если вдруг окажется, что гомологии гомотопически инвариантны, то мы будем знать, какие гомологии у всех стягиваемых пространств (так как для точки мы посчитали).

В дальнейшем, будем использовать для сингулярных гомологий обозначение H_k.

2.3 Немного гомологической алгеры

Рассмотрим категорию цепных комплексов $\mathfrak{Ch}$ (в нашем случае абелевых групп, но в принципе, всё что тут будет сказано справеделиво и в случае $R - \mathfrak{Mod}$). Морфизмом цепных комплексов $(C_\bullet, \partial)$ и $(D_\bullet, \delta)$ называется набор отображений $f = \{f_i\}$, где $f_i \in \operatorname{Hom}(C_i, D_i)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] \arrow[d] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \ldots \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r, "\delta_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\delta_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\delta_{q-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\forall i\ f_i \circ \partial_{i+1} = \delta_{i+1} \circ f_{i+1}$.

Лемма 2. Сопоставление цепному комплексу его k-й группы гомологий функториально, то есть отображение

$$(C_\bullet, \partial) \mapsto H_k(C_\bullet, \delta)$$

задаёт ковариантный функтор $\mathfrak{Ch} \to \mathfrak{Ab}$.

Доказательство. Всё, кроме того, что композиция переходит в композицию — совсем очевидно. Нам надо проверить, что отображение $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta)$ индуцирует отображение $H_k(C_\bullet) \to H_k(D_\bullet)$, и кроме того,

$$(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (D_\bullet, \delta) \xrightarrow{g} (E_\bullet, d) \Rightarrow H_k(f \circ g) = H_k(f) \circ H_k(g).$$

Заметим, что так как $f \in \operatorname{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$, $f_q(\operatorname{Ker} \partial_q) \subset \operatorname{Ker} \delta_q$. Действительно, если $\partial_q(x) = 0$, то $0 = f_{q-1}(\partial_q(x)) = \delta_q(f_q(x)) \Rightarrow f_q(x) \in \operatorname{Ker} \delta_q$. Аналогично $f_{q-1}(\operatorname{Im} \partial_q) \subset \operatorname{Im} \delta_q$. Действительно, если $x = \partial_q(y)$, то

$$f_{q-1}(x) = f_{q-1} \circ \delta_q(x) = \delta_q(f_q(y)) \in \operatorname{Im} \delta_q.$$

Тогда нужная нам стрелка получается просто из универсального свойства факторгруппы:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} \partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[dr, "\rho"'] & \operatorname{Ker} \delta_q \arrow[r, "\pi"] & H_q(D_\bullet) \\
& H_q(C_\bullet) \arrow[ur, dashed, "f_*"] &
\end{tikzcd}$$

Действительно, чтоб она существовала, нам нужно, чтоб $\operatorname{Im} \partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker}(\pi \circ f_q)$. Возьмем $x \in \operatorname{Im} \partial_{q+1}$, тогда $f_q(x) \in \operatorname{Im}_{\delta_{q+1}} \Rightarrow f_q(x) \in \operatorname{Ker} \pi$, то есть $x \in \operatorname{Ker}(\pi \circ f_q)$.

Проверка того, что композиция переходит в композицию тривиальна. $\square$

Замечание. Пусть $X, Y \in \mathfrak{Top}$, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм цепных комплексов $f\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$. Действительно, пусть $g \in C_k(X)$, тогда g — это непрерывное отображение $T_k \to X$ и тогда $f \circ g$ — непрерывное отображение $T_k \to Y$, то есть элемент $C_k(Y)$. Остается проверить, что полученное отоюражение будет коммутировать с дифференциалом.

$$\partial g = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Gamma_i g.$$

Тогда остается заметить, что взятие грани коммутирует с применением отображения:

$$f(\partial g) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Gamma_i f(g) = \partial(fg).$$

Значит, если у нас есть непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, то есть и индуцированный морфизм гомологий $f_*\colon H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$.

Утверждение 1. *Если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то $f_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ — изоморфизм (для всех k).*

Доказательство. Действительно, если f — гомеоморфизм, то все индуцированные отображения между цепями — изоморфизмы, а значит и все индуцированные отображения в гомологиях будут изоморфизмами. □

Замечание. Это утверждение говорит нам о том, что сингулярные гомологии определены для топологических пространств без всякой дополнительной структуры.

Определение 5. Пусть X — топологическое пространство. Тогда, если группа $H_k(X)$ конечнопорождена, то

$$H_k(X) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor}(H^k(X)).$$

Тогда число n (то есть, ранг свободной части) называют k-м числом Бетти b_n. Иными словами, $b_k(X) = \operatorname{rank}(H_k(X))$.

2.4 Гомотопическая инвариантность гомологий

Определение 6. Пусть $(C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta) \in \mathfrak{Ch}$ — два цепных комплекса. Их морфизмы $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Ch}}((C_\bullet, \partial), (D_\bullet, \delta))$ называются *гомотопными* ($f \sim g$), если сущесвует диагональный морфизм $h\colon C_\bullet \to D_{\bullet+1}$ такой, что

$$h_{q-1}\partial_q + \delta_{q+1} h_q = f_q - g_q.$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] \arrow[d] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[dl, "h_{q+1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{q+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dl, "h_q"'] \arrow[d, shift right, "g_q"'] \arrow[d, shift left, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[dl, "h_{q-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{q-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{q-1}"] & \dots \arrow[dl, "h_{q+2}"'] \arrow[d] \\
\dots \arrow[r, "\delta_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\delta_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\delta_{q-1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Кратко это обычно записывают, как $h\partial + \delta h = f - g$.

Если в категории цепных комплексов $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ab})$ отождествить гомотопные морфизмы, получится *гомотопическая категория комплексов*, которую обычно обозначают $\mathfrak{K}(\mathfrak{AB})$ (или просто $\mathfrak{K}$).

Теорема 2. *Если морфизмы цепных комплексов гомотопны, то есть $f \sim g$, то индуцированные гомоморфизмы когомологий $f_* = g_*$. Тем самым, функторы гомологий H_k пропускаются через гомотопическую категорию.*

Доказательство. Если $x \in \operatorname{Ker} \partial_q$, то

$$f_q(x) - g_q(x) = \delta_{q+1} h_q(x) + \underbrace{h_{q-1}\partial_q(x)}_{=0} \in \operatorname{Im} \delta_{q+1},$$

а значит в $H_q(X)$ эти элементы равны. □

Замечание. Гомотопность морфизмов f и g можно определять, как $\delta h \pm h\partial = f - g$, так как при переходе к гомологиям второе слагаемое всё равно обнуляется.

Теорема 3. *Пусть $f, g\colon X \to Y$, $f \sim g$. Тогда $f_* = g_*$.*

Доказательство. У нас есть цепные комплексы сингулярных цепей $(C_\bullet(X), \partial)$ и $(C_\bullet(Y), \partial)$. Так как $f \sim g$, существует непрерывное отображение $H\colon X \times I \to Y$, а тогда $\forall p\colon T_q \to X$ определено непрерывное отображение $H(p(\_),\_)\colon T_q \times I \to Y$, причем $H(p, 0) = f(p)$ и $H(p, 1) = g(p)$. Положим

$$h(p) = \text{сумма симплексов в разбиении призмы } T_q \times I \in C_{q+1}(Y).$$

Взглянув на картинку теперь нетрудно заметить, что

$$f(p) - h(p) = \text{граница всей призмы} - \text{боковые стенки} = \partial h(p) - h\partial(p)$$

Таким образом, мы получили, что индуцированные морфизмы цепных комплексов гомотопны, а значит, по теореме 2, индуцированные гомоморфизмы в гомологиях совпадают. □

Упражнение. Разбить $T_q \times I$ на $q+1$-мерные симплексы формально. А именно, пусть $T_q \times \{0\} = a_0 \dots a_q$. Пусть вершины $T_q \times \{1\}$ — это $a'_0, \dots, a'_q$. Тогда предлагается брать вершины $a_0 \dots a_k a'_k \dots a'_q$.

Следствие 1. *Пусть X — стягиваемое. Тогда $\widetilde{H}_\bullet(X, \mathbb{Z}) = 0$, или, иными словами, $\forall k > 0$ $H_k(X, \mathbb{Z}) = 0$, $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Упражнение. Придумайте пример нестягиваемого X с нулевыми приведёнными гомологиями.

Лемма 3. Если X — линейно связно, то $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Выберем в нашем пространстве некоторую фиксированную точку a, тогда

$$\left(\sum k_i f_i\right) = \left(\sum k_i\right) a \pmod{\operatorname{Im} \partial_1}, \text{ (то есть, в } H_0(X))$$

так как все f_i можно соединить путями (а это отображения $T^1 = [0, 1] \to X$) с a и значит $\operatorname{Im} \partial_1$ будет содержать все разности $f_i - a$. Значит, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. □

Следствие 2. *Пусть у топологического пространства X n компонент линейной связности. Тогда*

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Упражнение. Дркажите, что непрерывное отображение между линейно связными пространствами индуцирует изоморфизм нулевых гомологий.

2.5 Относительные гомологии и гомологически точная последовательность пары

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, тогда $\forall q$ $C_q(A) \subset C_q(X)$ (вложение индуцирует мономорфизм цепей) и мы имеем морфизм цепных комплексов $(C_\bullet(X), \partial)$ и $(C_\bullet(A), \partial)$, то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] \arrow[d] & C_q(A) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "\mathrm{in}"] & C_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{in}"] & \dots \arrow[d] \\
\dots \arrow[r] & C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] & C_{q-1}(A) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Это так просто потому, что если у нас был симплекс $f: T^q \to A$, то его граница тоже целиком лежит в A, то есть $\partial f: T^{q-1} \to A \in C_{q-1}(A)$.

Глядя на это, возникает естественная идея дополнить до короткой точной последовательности

$$0 \to C_q(A) \to C_q(X) \to C_q(X)/C_q(A) \to 0$$

в каждом столбце.

Определение 7. Факторгруппу $C_q(X,A) \overset{\text{def}}{=} C_q(X)/C_q(A)$ называют *относительными цепями.*

Построим цепной комплекс для относительных цепей, для этого надо определить дифференциалы. Это делается стандартно, возьмем $x \in C_q(A)$, тогда $\partial_q(x) \in C_{q-1}(A)$, а значит композиция дифференциала и проекции пропустится через фактор:

$$\begin{tikzcd} C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dr, "\pi_q"'] & C_{q-1}(X) \arrow[r, "\pi_{q-1}"] & C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A) \\ & C_q(X)/C_q(A) \arrow[ur, dashed, "\exists! \delta_q"'] & \end{tikzcd}$$

Проверим теперь, что $\delta^2 = 0$. Действительно, из коммутаивной диаграммы выше мы понимаем, что

$$\delta_q(\overline{x}) = \delta_q(\pi_q(x)) = \pi_{q-1}(\partial_q(x)) \Rightarrow \delta_{q-1}(\delta_q(\overline{x})) = \delta_{q-1}(\pi_{q-1}(\partial_q(x))) = \pi_{q-2}(\partial_{q-1}(\partial_q(x))) = 0.$$

Теперь мы построили цепной комплекс и можем определить относительные гомологии.

Определение 8. Пусть $X \subset A$, тогда относительными гомологиями мы будем называть гомологии комплекса относительных цепей, то есть

$$H_q(X,A) \overset{\text{def}}{=} \ker \delta_q / \operatorname{Im} \delta_{q+1}.$$

Теперь, попробуем получить для гомологий аппарат, идеологически похожий на теорему Зейферта-Ван-Кампена.

Итак, мы имеем *короткую точную последовательность комплексов*

$$0 \to C_\bullet(A) \to C_\bullet(X) \to C_\bullet(X,A) \to 0$$

В развёрнутом виде она представляет собой коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & C_{q+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_{q+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_{q+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_q(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_q(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_{q-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \end{tikzcd}$$

в которой строки точны, а стлобцы — наши комплексы.

Теорема 4 (Точная последовательность пары)**.** *Существует* связывающий гомоморфизм $\varphi\colon H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$*, и соответственно, имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий:*

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \xrightarrow{\varphi} H_{q-1}(A) \to H_{q-1}(X) \to \ldots$$

Доказательство. На самом деле, это утверждение верно для любой точной последовательности комплексов. А именно, если последовательность цепных комплексов

$$0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$$

точна, то имеет место следующая длинная точность последовательность гомологий:

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(B) \to H_q(C) \to H_{q-1}(A) \to H_{q-1}(B) \to \ldots$$

Это можно без труда вывести из леммы о змее, проверив точность строк[3] □

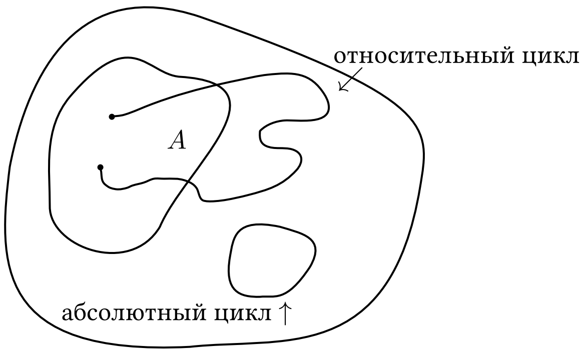
Упражнение. Докажите, что для $X \supset A \supset B$ имеет место следующая длинная точная последовательность групп гомологий

$$\ldots \to H_q(A,B) \to H_q(X,B) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A,B) \to \ldots$$

Посмотрим, что всё это означает геометрически. Относительные циклы — это элементы

$$\mathrm{Ker}(C_q(X)/X_q(A) \to C_{q-1}(X)/C_{q-1}(A)).$$

Мы взяли представителя в $C_q(X)$, взяли границу и после факторизации по $C_{q-1}(A)$ получили 0, а значит граница нашего цикла полностью лежит в $C_{q-1}(A)$, то есть картинка имеет вид:



С другой стороны, ясно, что $x \in C_q(X)/C_q(A)$ — относительная граница, если $x + a = \partial(\ldots)$.

Замечание. У связывающего гомоморфизма $H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$ есть очень естественная интерпретация.

Элементы $H_q(X,A)$ — относительные циклы с точностью до относительных границ. Так как это относительные q-мерные циклы, их граница лежит в A, а значит, при взятии границы, мы получим как раз элемент $H_{q-1}(A)$. То есть, связывающий гомоморфизм $H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$ — взятие границы.

Рассмотрим также еще несколько важных следствий длинной точной последовательности пары.

Следствие 3. *Для любого топологического пространства x и любой его точки $x_0 \in X$ мы имеем*

$$H_n(X, x_0) = \widetilde{H}_n(X)\ \forall n.$$

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность приведенных гомологий пары (X, x_0)

$$\ldots \to \widetilde{H}_q(x_0) \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(X, x_0) \to \widetilde{H}_{q-1}(x_0) \to \ldots$$

Действительно, так как $\widetilde{H}_n(x_0) = 0\ \forall n$, мы на самом деле имеем

$$\ldots \to 0 \to \widetilde{H}_q(X) \to \widetilde{H}_q(X, x_0) \to 0 \to \ldots,$$

и из точности следует $\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_q(X, x_0) = H_q(X, x_0)$. □

Следствие 4. *Группы $H_q(X,A)$ измеряют различие между $H_q(X)$ и $H_q(A)$, а именно,*

$$H_q(X,A) = 0 \quad \forall q \Rightarrow H_q(A) = H_q(X) \quad \forall q.$$

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность пары (X,A) :

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A) \to \ldots$$

В нашем случае она имеет вид:

$$\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A) \to \ldots$$

и из точности следует, что $H_q(A) \cong H_q(X)$. □

Упражнение. Убедитесь, что верно и обратное утверждение.

[3] а так как это делается в абсолютно любом курсе гомологической алгебры, мне лень это сюда писать.

2.6 Пары Боруска

Определение 9. Пусть X – топологическое пространство, а $A \subset X$ с индуцированной топологией. Тогда говорят, что (X, A) – *пара Борсука* (или, *корасслоение*)[4], если $\forall f \colon X \to Y$, $\forall F \colon A \times I \to Y$ такой, что $F|_{A\times 0} = f|_A$ существует $G \colon X \times I \to Y$, причем такое, что $G|_{X\times 0} = f,\ G|_{A\times I} = F$.

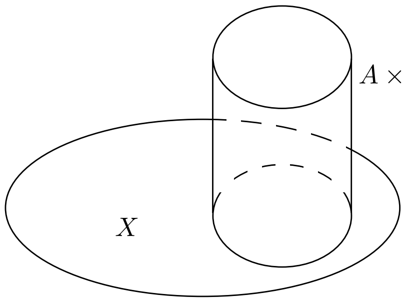
Определение 10. Пара (X, A) называется *клеточной парой*, если X — клеточное пространство, A — клеточное подпространство X.

Замечание. Так как очевидно, что $(D^n, \partial D^n)$ — пара Борсука, клеточная пара является парой Борсука.

Нам от пар Борсука понадобится несколько базовых утверждений.

Теорема 5 (Характеризация пар Борсука)**.** *Если (X, A) — пара Борсука, то деформационная ретракция $X \times I$ на $X \cup (A \times I)$. Кроме того, если A — замкнуто, то верно и обратное.*

Доказательство. На картинке это выглядит следующим образом:



Положим $Y = X \cup (A \times I)$, $f \colon X \to Y$ — вложение. Рассмотрим теперь гомотопию $F_t(A) = A \times t$. Так как (X, A) — пара Борсука, существует $G \colon X \times I \to Y : G|_{A\times I} = F$.

Докажем теперь в другую сторону: пусть для $f \colon X \to Y$ есть гомотопия $F_t \colon A \to Y$, то есть отображение $F \colon X \cup (A \times I) \to Y$. Тогда искомое продолжение гомотопии — композиция F и деформационной ретракции $X \times I \to X \cup (A \times I)$[5]. □

Следствие 5. *Пара $(D^n, \mathrm{Int}(D^n))$ — не пара Борсука.*

Вообще говоря, эта теорема показывает, что было бы хорошо, чтоб A было замкнутым.

Замечание. В нехаусдорфовом случае бывает, что и с незамкнутым A пара (X, A) будет парой Борсука.

Упражнение. Если (X, A) — пара Борсука и X — Хаусдорфово, то A замкнуто.

Утверждение 2. *Пусть (X, A) — пара Борсука. Тогда*

$$X \cup CA \sim (X \cup CA)/CA = X/A.$$

Доказательство. Рассмотрим вложение $X \to X \cup CA$. Прогомотопируем A в вершину конуса a. Так как (X, A) — пара Борсука, эта гомотопия продолжается до гомотопии на X. Тогда финальный элемент гомотопии отображает $X \to X \cup CA$ так, что $A \mapsto a$, значит, это отображение пропускается через фактор X/A. С другой стороны ясно, как устроено обратное отображение $X \cup CA \to X/A$ (стягиваем конус в точку). Нетрудно заметить, что два построенных отображения задают гомотопическую эквивалентность. □

Следствие 6. *Если (X, A) — пара Боруска и A — стягиваемо, то $X \sim X/A$.*

Утверждение 3. *Пара (CX, X) — всегда пара Борсука.*

[4]Еще говорят «обладает свойством продолжения гомотопии», но это совсем уж длинно.
[5]вот тут мы пользуемся замкнутостью A, так как нам нужно, чтоб покрытие было фундаментальным.

2.7 Относительные гомологии как абсолютные (факторизация)

Итак, в этом параграфе нас будет интересовать следующее (весьма полезное в вычислениях утверждение):

Теорема 6. *В общем случае отображение $X \to X \cup CA$ индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X, A) \to H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \widetilde{H}_q(X \cup CA),$$

где a — вершина конуса.

Если (X, A) — пара Борсука, то отображение проекции $p\colon X \to X/A,\ A \mapsto a$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \widetilde{H}_q(X/A).$$

Вообще говоря, условие на A во второй части теоремы часто опускают и говорят, что это верно для «хороших пар». Мы доказываем для пар Борсука, можно доказывать для случая, когда A — *окрестностный деформационынй ретракт.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько важных (в общем контексте) лемм.

Сначала посмотрим на геометрическую конструкцию **барицентрического подразбиения**, чтоб иметь геометрическую интуицию в контексте сингулярных симплексов.

Рассмотрим симплекс $[v_0, \dots, v_n]$. его точки — линейные комбинации вида

$$\sum_{i=0}^{n} t_i v_i, \quad \text{где} \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0.$$

Определение 11. *Барицентр (центр тяжести)* симплекса — это точка $b \in [v_0, \dots, v_n]$, у которой все барицентрические аоординаты t_i равны, а именно, $t_i = \frac{1}{n+1}\ \forall i$.

Барицентрическое подразбиение (подразделение) симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ — это разбиение симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ на n-мерные симплексы $[b, w_0, \dots, wn-1]$, где по индукции $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ — $(n-1)$-мерный симплекс барицентрического подразбиения грани $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$.

- Индукция начинается с $n = 0$, когда барицентрическое подразбиение точки $[v_0]$ определяется просто, как сама точка $[v_0]$.
- В случае $n = 1$ отрезок $[v_0 v_1]$ бьется на два отрезка $[v_0 b]$, $[b v_1]$, где b — середина отрезка $[v_0, v_1]$.
- В случае $n = 2$ треугольник $[v_0 v_1 v_2]$ бьется на 6 труегольников, образуемых его вершинами и точкой пересечения медиан b.

Из такого индуктивного определения следует, что вершины симплексов в барицентрическом подразбиении симплекса $[v_0 \dots v_n]$ — в точности барицентры всех k-мерных граней $[v_{i_0} \dots v_{i_k}]$ симплекса $[v_0 \dots v_n]$ для $0 \leq k \leq n$.

При $k = 0$ это даёт нам просто набор вершин v_i. Барицентр симплекса $[v_{i_0} \dots v_{i_k}]$ имеет барицентрические координаты $t_i = \frac{1}{k+1}$ при $i = i_0, \dots, i_k$ и $t_i = 0$ во всех остальных случаях.

Замечание. Далее нам это не потребуется, но симплексы барицентрического подразбиения задают на симплексе T структуру симплициального комплекса.

Лемма 4 (О барицентрическом подразбиении)**.** Пусть $f\colon T^q \to X$ — сингулярный симплекс. Тогда его барицентрическое поразбиение — это

$$\beta\colon C_q(X) \to C_q(X), \quad \beta f = \sum_{\tau \in S_{q+1}} \operatorname{sign}(\tau) f_\tau,$$

где f_τ определяется следующим образом: исходный симплекс T^q мы можем барицентрически подразбить на симплексы $T'_q = \{x \mid x_{\tau(0)} \leq x_{\tau(1)} \leq \dots \leq x_{\tau(q)}\}$, в которых вершины нумеруются согласно размерностям граней. Тогда мы полагаем $f_\tau \overset{\text{def}}{=} f|_{T'_q}$.

Тогда $\partial\beta = \beta\partial$ и $\beta_*([\alpha]) = [\alpha]\ \forall[\alpha] \in H_q(X)$. Иными словами, барицентрическое подразбиение не влияет на гомологический класс.

Доказательство. Для первого утверждения достаточно проверить, что в сумме все внутренние грани встречаются с противоположным знаком, это ясно из картинки. Первое утверждение даёт нам, что $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ch}}(C_\bullet, C_\bullet)$.

Для доказательства второго утверждения мы построим цепную гомотопию $D\colon C_q(X) \to C_{q+1}(X)$ между β и постоянным отображением.

Пусть $f\colon T^q \to X$, тогда $D(f)$ определяется следующим образом: барицентрически разобьем призму $I \times T^q$ на симплексы и рассмотрим проекцию

$$p\colon I \times T^q \to T^q.$$

Тогда $D(f)$ — это $(q+1)$-мерный сингулярный симплекс, являющийся суммой композиций f и проекции p, суженной на симплексы в разбиении $I \times T^q$.

можно нарисовать картинку для отрезка, в принципе.

Из того, как устроена нумерация в барицентрическом разбиении призмы, нетрудно видеть, что D — гомотопия между β и id, то есть

$$f - \beta(f) = D\partial(f) + \partial D(f).$$

Чтоб понять всё это, надо опять позалипать на эту картиночку с призмой, как в теореме 3.[6] □

Следующая лемма говорит нам, что для вычисления сингулярных гомологий достаточно рассматривать лишь *маленькие* сингулярные симплексы. В случае симплициальных гомологий это можно было бы формулировать в терминах диаметров, а в случае сингулярных мы будем говорить об этом в терминах покрытий.

Лемма 5 (Об измельчении)**.** Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие X. Пусть $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ порождено сингулярными симплексами $f \in C_q(X)$ такими, что $\exists \alpha\colon f(T_q) \subset U_\alpha$.

Тогда вложение $i\colon C_q^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} C_q(X)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_\bullet(X) \cong H_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$.

Доказательство. Заметим, что для достаточно большого n по лемме Лебега $c \in C_q(X) \Rightarrow \beta^n(c) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$. Кроме того, по лемме 4 c и $\beta^n(c)$ гомологичны (то есть, представляют один м тот же класс гомологий). Это даёт нам, что любой гомологический класс мз $H_q(C_\bullet)$ имеет представителя в $C_q^{\mathcal{U}}(X)$, то есть, что отображение $H_q^{\mathcal{U}}(X) \to H_q(X)$ сюръективно.

Кроме того, также по лемме 4, если c — цикл из $C_q^{\mathcal{U}}$, то $c - \beta^n(c)$ — граница цепи из C_{q+1}^{U}, так как

$$c - \beta^n(c) = \underbrace{D\partial c}_{=0,\text{ так как } c \text{ — цикл}} - \partial Dc = \partial(-Dc) \in B_q\big(C_q^{\mathcal{U}}(X)\big).$$

С другой стороны, так как c и $\beta^n(c)$ гомологичны, их разность — граница (элемент $B_q(C_q(X))$). Таким образом, если цепь из $C_q^{\mathcal{U}}$ лежит в $B_q(C_q(X))$, то она лежит и в $B_q\big(C_q^{\mathcal{U}}(X)\big)$. Это даёт нам инъективность отображения $H_q^{\mathcal{U}}(X) \to H_q(X)$. □

Замечание. Заметим, что построенные в доказательстве отображения переводят цепи в A в цепи в A, а значит, выдерживают факторизацию по A. Этот факт даёт нам версию леммы об измельчении для относительных гомологий, которым мы и будем пользоваться.

Обзаведемся еще одним полезным фактом: Посмотрим на такой факт из гомологической алгебры:

Лемма 6 (5-лемма)**.** Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & B \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & D \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & E \arrow[d, "f_5"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

[6] Возможно, всё это место стоит строго формально переписать из Хачтера.

в которой строки точны, f_2, f_4 — изоморфизмы, f_1 — эпиморфизм, f_5 — мономорфизм. Тогда f_3 — изоморфизм.

Доказательство. Есть в любом курсе гомологической алгебры. □

Из неё немедленно следует следующий простой факт:

Лемма 7. Если пара (X, A) гомотопически эквивалентна паре (Y, B), то $H_\bullet(X, A) = H_\bullet(Y, B)$.

Доказательство. Запишем длинную точную последовательность для обоих пар:

$$\begin{tikzcd}
H_k(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{k-1}(X) \arrow[d, equal] \\
H_k(B) \arrow[r] & H_k(Y) \arrow[r] & H_k(Y,B) \arrow[r] & H_{k-1}(B) \arrow[r] & H_{k-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

Тогда всё следует из 5-леммы 6 □

Наконец, мы можем доказать интересующую нас теорему:

Теорема 7. *В общем случае отображение $X \to X \cup CA$ индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X, A) \to H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup CA, a) = \widetilde{H}_q(X \cup CA),$$

где a — вершина конуса.

Если (X, A) — пара Борсука, то отображение проекции $p\colon X \to X/A,\ A \mapsto a$ индуцирует изоморфизм

$$H_q(X, A) \xrightarrow{p_*} H_q(X/A, a) = \widetilde{H}_q(X/A).$$

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $X \cup CA$ вида:

$$X \cup CA \subset ((X \cup CA) \setminus X) \cup (X \cup \overline{C}A), \quad \mathcal{U} \overset{\text{def}}{=} \{(X \cup CA) \setminus X, (X \cup \overline{C}A)\}$$

где $\overline{C}A$ — нижняя открытая половина конуса CA.

По лемме 5 об измельчении мы вместо $H_q(X \cup CA, CA)$ можем рассматривать $H_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA)$.

А теперь, заметим, что по тому, как мы взяли покрытие,

$$C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA, CA) = C_q^{\mathcal{U}}(X \cup CA)/C_q^{\mathcal{U}}(CA) = C_q\big(X \cup \overline{C}A\big)/C_q\big(\overline{C}A\big) = C_q\big(X \cup \overline{C}A, \overline{C}A\big).$$

А значит, из гомотопической эквивалентности и леммы 7 мы имеем

$$H_q(X \cup CA, CA) = H_q(X \cup \overline{C}A, \overline{C}A) = H_q(X, A).$$

Вторая часть первого равенства из условия теоремы следует из следствия 3.

Пусть теперь (X, A) — пара Борсука. Тогда по утверждению 2 $X \cup CA \sim X/A$, а значит, $H_q(X, A) \cong \widetilde{H}_q(X/A)$. □

2.8 Вырезание

Рассмотрим тройку $B \subset A \subset X$. Тогда вложение индуцирует отображение

$$H_k(X - B, A - B) \to H_k(X, A).$$

Вообще говоря, вырезание даёт хорошую технику вычисления относительных гомологий:

Теорема 8 (О вырезании). *Пусть даны пространства $Z \subset A \subset X$, причем $\mathrm{Cl}(Z) \subset \mathrm{Int}(A)$. Тогда вложение $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(X - Z, A - Z) \cong H_n(X, A)$$

для всех n. Или, что эквивалентно: для подпространств $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X, включение $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A) \quad \forall n.$$

Доказательство. Докажем сначала эквивалентность формулировок. Положим $B = X - Z$, $Z = X - B$. Тогда $A \cap B = A - Z$, а условие $\mathrm{Cl}(Z) \subset \mathrm{Int}(A)$ эквивалентно тому, что $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$, так как $X - \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Cl}(Z)$. Теперь докажем вторую формулировку.

Пусть $X = A \cup B$, обозначим соотвествующее покрытие $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Для краткости будем обозначать группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, как $C_n(A + B)$[7].

Тогда, как мы помним из леммы об измельчении 5 включение

$$C_n(A + B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

индуцирует изоморфизм групп гомологий $H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A)$.

Теперь рассмотрим включение

$$C_n(B)/C_n(A \cap B) \hookrightarrow C_n(A + B, A).$$

Оно очевидно индуцирует изоморфизм гомологий, так как обе факторгруппы свободные, а их базис — n-мерные сингулярные симплексы в B, не лежащие в A. Значит, мы получили требуемый изоморфизм

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(A + B, A) \cong H_n(X, A).$$

□

2.9 Точная последовательность Майера-Вьеториса

Кроме длинной точной последовательности пары (теорема 4) для вычисления гомологий пары (X, A) есть и другая мощная техника для вычисления гомологий пространства X, тоже представляющая собой длинную точную последовательность.

Теорема 9 (Точная последовательность Майера-Вьеториса, простая версия). *Пусть $X = A \cup B$, где A, B — открытые и $A \cap B = C \neq \varnothing$. Тогда имеет место следующая точная последовательность:*

$$\ldots H_q(A \cap B) \to H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X) \to H_{q-1}(A \cap B) \to H_{q-1}(A) \oplus H_{q-1}(B) \to \ldots$$

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \to C_\bullet(A \cap B) \xrightarrow[\varphi]{c \to (c, -c)} C_\bullet(A) \oplus C_\bullet(B) \xrightarrow[\psi]{(a,b) \to a+b} C_\bullet(A + B) \to 0$$

Во-первых, заметим, что $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, так как цепь в $A \cap B$, которая является нулевой в A (или в B) должна быть нулевой цепью. Во-вторых, очевидно, что $\psi\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$. Заметим, что для $(x, y) \in C_n(A) \oplus C_n(B)$ имеем $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$, а значит $x \in C_n(A \cap B)$ и $(x, y) \in \operatorname{Im}\varphi$. Это означает, что $\operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Im}\varphi$. Точность в последнем члене следует просто из определения $C_n(A + B)$.

Тогда эта короткая точная последовательность комплексов даёт нам точную последовательность гомологий. Остается лишь заметить, что также, как и в теореме о вырезании, $H_\bullet(A + B) = H_\bullet(A \cup B)$. □

Замечание. Эта не самая хорошая версия точной последовательности Майера-Вьеториса, так как условие на открытое покрытие серьезно мешает.

[7] что на самом деле логично, так как цепи оттуда состоят из суммы цепей из A и цепей из B

2.10 Гомологии сфер

Теорема 10. *Для* $n \neq 0$ *гомологии сферы устроены следующим образом:*

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \text{ или } i = n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Или, иными словами,

$$\widetilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим пару $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, тогда $X/A \cong S^n$. Запишем для этой пары точную послеоватнльность приведенных гомологий:

$$\ldots \to \widetilde{H}_q(D^n) \to \widetilde{H}_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \to \widetilde{H}_{q-1}\big(S^{n-1}\big) \to \widetilde{H}_{q-1}(D^n) \to \ldots$$

Так как D^n стягиваем, $\widetilde{H}_q(D^n) = 0$, а значит, $H_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \cong H_{q-1}(S^n)$. С другой строны, так как $(D^n, \partial D^n) = (D^n, S^{n-1})$ — пара Борсука, по теореме о факторизации 7

$$H_q\big(D^n, S^{n-1}\big) \cong \widetilde{H}_q\big(D^n/S^{n-1}\big) \cong \widetilde{H}_q(S^n).$$

Остается замеить, что мы знаем, что утверждение верно для S^0. Таким образом, мы доказали утверждение по индукции. □

Следствие 7. *Сферы разных размерностей негомеоморфны.*

2.11 Гомологии букета и надстройки

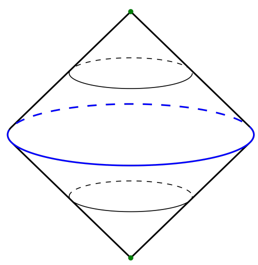
Из стягиваемости конуса сразу следует, что $H_q(CX, X) \cong \widetilde{H}_q(X)$ (достаточно написать точную последовательнность для приведенных гомологий).

Определение 12. Пусть X — топологическое пространство. Тогда *надстройкой* над X называется пространство ΣX, определённое, как

$$\Sigma X \cong X \times I/\sim, \text{ где } (x, 0) \sim (y, 0)\ \forall x, y \in X \text{ и } (x, 1) \sim (y, 1)\ \forall x, y \in X.$$

Иными словами, мы взяли $X \times I$ и стянули $X \times 1$ и $X \times 0$ в точку.

Пример 5. Надстройка над окружностью выглядит следующим образом:



Так как надстройка получается факторизацией конуса по нижнему основанию, из теоремы о факторизации 7 следует, что $H_{q+1}(CX, X) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$. Таким образом, мы получили такое утверждение:

Теорема 11 (Гомологии надстройки)**.** *Справедливо следующее равенство групп гомологий:*

$$\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$$

Замечание. Так как $\Sigma S^n = S^{n+1}$, мы таким образом получили другое доказательство теоремы 10.

Теорема 12 (Гомологии букета)**.** *Для букета пространств $\bigvee_\alpha X_\alpha$ включения $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ индуцируют изоморфизм гомологий*

$$\bigoplus_\alpha \widetilde{H}_q \cong \widetilde{H}_q\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right).$$

при условии, что если в букете отождествляются точки $\{x_\alpha\}$, то пары (X_α, x_α) — пары Борсука.

Доказательство. Достаточно рассмотреть пару

$$(X, A) = \left(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha x_\alpha\right),$$

тогда по тривиальным причинам

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(X_\alpha)$$

и по теореме о факторизации

$$H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right).$$

□

2.12 Гомологии с коэффициентами

У рассматриваемой нами до сих пор теории гомологий есть простое обобщение, котрое иногда даёт техническое преимущество.

Обобщение состоит в рассмотрении цепей $\sum n_i f_i$, где f_i — сингулярные симплексы, а коэффициенты n_i берутся в фиксированной абелевой группе G. Такие n-мерные цепи образуют абелеву группу $C_n(X; G)$ и у неё также есть относительная версия $C_n(X, A; G) \overset{\text{def}}{=} C_n(X; G)/C_n(A; G)$.

Дифференциал δ строится также, как и раньше:

$$\partial\left(\sum_i n_i f_i\right) = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \Gamma_j f_i.$$

Соотвественно, группы $C_n(X; G)$ и $C_n(X, A; G)$ образуют цепные комплексы и их гомологии обозначают $H_n(X; G)$ и $H_n(X, A; G)$ и называют *гомологиями с коэффициентами в группе G*.

Приведённые группы гомологий $\widetilde{H}(X; G)$ определяются аналогично, аугументация задаётся, как

$$\ldots \to C_0(X; G) \xrightarrow{\varepsilon} G \to 0, \quad \varepsilon\left(\sum_i n_i f_i\right) = \sum_i n_i.$$

Замечание. Часто полезно рассматривать гоиологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, так как нужно считать суммы сингулярных симплексов с коэффициентами 0 и 1, поэтому, отбрасывая члены с коэффициентами 0, можно представлять себе цепи, как конечные «объединения» сингулярных симплексов.

Кроме того, можно больше не заботиться о знаках в формуле для границы, а так как знаки являются алгебраическим выражением ориентации, мы можем игнорировать и ориентации. Это означает, что гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — наиболее естественный инструмент для вычислений в неориентируемом случае.

Отметим, что вся доказанная выше теория переносится на гомологии с коэффициентами в G без проблем и различия между $H_n(X; G)$ и $H_n(X)$ появляются только, когда начинаются вычисления.

Пример 6. Если $X = *$ — точка, то нетрудно заметить, что

$$H_n(*; G) \cong \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Аналогично и в случае сфер S^k мы имеем

$$\widetilde{H}_n(S^k; G) \cong \begin{cases} G, & n = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

2.13 Приложения теории гомологий

Теорема 13 (Борсук)**.** *Не существует ретракции диска на граничную сферу.*

Доказательство. Предположим, что ретракция $f\colon D^n \to S^{n-1}$: f — непрерывное и $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ существет. Рассмотрим отображение $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$, тогда в гомологиях у нас есть отображение

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D^n) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

или, подставляя известные нам результаты:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}.$$

Так как $f \circ i = \mathrm{id}$, $f_* \circ i_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ и мы приходим к противоречию. □

Теорема 14 (Брауэр, о неподвижной точке)**.** *Пусть $f\colon D^n \to D^n$ — непрерывное отображение. Тогда у него существует неподвижная точка.*

Доказательство. Предположим противное, пусть существует непрерывное $f\colon D^n \to D^n$, не имеющее неподвижных точек. Рассмотрим отображение g, которое переводит $x \in D^n$ в точку пересечения $[f(x), x)$ и ∂D^n. То есть, $g\colon D^n \to \partial D^n$ и $g|_{\partial D^n} = \mathrm{id}$. Тогда g — ретракция D^n на граничную сферу, а этого не бывает по теореме 13. □

Теорема 15 (Брауэр, инвариантность размерности)**.** *Если непустые открытые $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ открытые и они гомеоморфны, то $m = n$.*

Доказательство. Пусть h — гомеоморфизм $U \to V$, тогда

$$H_k(U, U - x) \cong H_k(V, V - h(x)).$$

По теореме о вырезании 8 для $(X, A) = (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$ и $Z = \mathbb{R}^m - U$:

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(U, U - x).$$

Тогда мы имеем, что

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - h(x)).$$

Из точной последовательности пары для $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x)$ мы имеем:

$$\ldots \to H_k(\mathbb{R}^m) \to H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m) \to \ldots$$

$$\ldots 0 \to H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \to H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \to 0 \to \ldots,$$

а значит, $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(\mathbb{R}^m - x) \cong H_{k-1}(S^{m-1})$, так как $\mathbb{R}^m - x$ деформационно ретрагируется на S^{m-1}. Значит, мы получили

$$H_{k-1}(S^{m-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1}),$$

откуда ясно, что $m = n$. □

2.14 Симплициальные комплексы

Этот парагарф надо написать из Хатчера.

2.15 Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий

Образующая $H_n(S^n)$:

В этом параграфе будем обозначать n-мерный симплекс, как Δ^n. Заметим, что так как $\Delta^n/\partial\Delta^n \cong S^n$, по теореме о факторизации 7 мы имеем изоморфизм

$$H_n(S^n) \cong H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n).$$

Покажем, что образующая $H^n(S^n)$ — это отображение $\Delta^n \xrightarrow{\mathrm{id}} \Delta^n$. Нетрудно заметить, что $\mathrm{Im}(\partial f) \subset \partial\Delta^n$, что дает нам, что id вообще представляет какой-то гомологический класс в $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Рассмотрим тройку $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$, где Λ — это $\partial\Delta^n$ без одной из граней (например, запоолненный треугольник, граница треугольника и граница треугольника без стороны). Напишем точную последовательность тройки:

$$\ldots \to H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \to H_n(\Delta^n, \Lambda) \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \to H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \to \ldots$$

Заметим, что так как Δ^n деформационно ретрагируется на Λ, $H_n(\Delta^n, \Lambda) \cong H_n(\Lambda, \Lambda) = 0$ и то же самое справедливо для $(n-1)$-х гомологий. То есть, наша последовательность на самом деле имеет вид

$$\ldots \to 0 \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \to 0 \to \ldots$$

Теперь заметим, что если грань, которую мы выкинули, мы обозначим за Δ', то $H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$.

Это ценно, так как далее мы можем рассуждать по индукции, ведь если образующая $H_{n-1}(\Delta', \partial\Delta')$ — вложение выкинутой нижней грани Δ', то её прообраз в $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ —- нужное нам тождественное отображение (мы тут пользуемся тем, что мы знаем, что связывающий гомоморфизм в длинной точной последовательности пары/тройки – это просто взятие границы). А для S^0 это утверждение очевидно.

Обозначим симплиаицлные гомологии пространства X за $H_k^{\Delta}(X)$.

Теорема 16. *Пусть X — конечный симплициальный комплекс. Тогда*

$$H_k^{\mathrm{sing}}(X) \cong H_k^{\Delta}(X).$$

Доказательство. Пусть X^k — объединение всех симплексов в симплициальном комплексе до размерности k (обозначение аналогично обозначению для CW-комплексов). Напишем точную последовательность пары:

$$\ldots \to H_{n+1}^{\Delta}\left(X^k, X^{k-1}\right) \to H_n^{\Delta}\left(X^k\right) \to H_n^{\Delta}\left(X^k\right) \to H_n^{\Delta}\left(X^k, X^{k-1}\right) \to \ldots$$

и заметим, что $H_{n+1}^{\Delta}\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong H_{n+1}\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong H_{n+1}\big(\bigvee S^k\big)$. Действительно, ясно, что

$$H_{n+1}\left(X^k, X^{k-1}\right) \cong H_{n+1}\left(\bigvee_{\alpha} S^k\right),$$

где α пробегает k-мерные симплексы в X. Далее,

$$H_{n+1}\left(\bigvee_{\alpha} S^k\right) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } n+1 \neq k \\ \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}, & n+1 = k \end{cases}$$

С другой стороны, из определения симплициальных гомологий ясно, что при $n+1 \neq k$ мы имеем $H_{n+1}^{\Delta}\big(X^k, X^{k-1}\big) \cong 0$, а при $n+1 = k$ эта группа — свободная абелева группа, порожденная всеми k-мерными симплексами в X, то есть, как и в предыдущем случае

$$H_k^{\Delta}\left(X^k, X^{k-1}\right) \cong \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}.$$

Остается заметить, что по доказанному в начале параграфа, мы знаем, что у $H_k\big(\bigvee_{\alpha} S^k\big)$ такой же набор порождающих.

Теперь будем вести индукцию по размерности симплициального комплекса. По индукционному предположению мы имеем $H_n^{\Delta}(X^{k-1}) \cong H_n(X^{k-1})$ и тогда мы получаем диаграмму из 5-леммы:

$$\begin{tikzcd}
H^{\Delta}_{n+1}\left(X^k, X^{k-1}\right) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{\Delta}_{n}\left(X^{k-1}\right) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{\Delta}_{n}\left(X^{k}\right) \arrow[r] \arrow[d] & H_n\left(X^k, X^{k-1}\right) \arrow[d, equal] \\
H_{n+1}\left(X^k, X^{k-1}\right) \arrow[r] & H_{n}\left(X^{k-1}\right) \arrow[r] & H_{n}\left(X^{k}\right) \arrow[r] & H_n\left(X^k, X^{k-1}\right)
\end{tikzcd}$$

□

2.16 Степень отображения

Определение 13. Пусть $f\colon S^n \to S^n$ — непрерывное отображение. Тогда оно индуцирует морфизм в гомологиях:

$$f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n).$$

Так как f_* — гомоморфизм бесконечной циклической группы в себя, он должен иметь вид

$$f_*(\alpha) = d \cdot \alpha$$

для некоторого фиксированного $d \in \mathbb{Z}$, зависящего только от f. Это число называют *степенью отображения* f и обозначают $\deg f$.

Базовые свойства степени.

1. $\deg \mathrm{id}_{S^n} = 1$.
2. Если f — не сюръекция, то $\deg f = 0$, так как мы можем выбрать $x \in S^n \setminus f(S^n)$ и представить f в виде композиции
$$S^n \to S^n \setminus \{x\} \hookrightarrow S^n,$$
а пространство $S^n \setminus \{x\}$ — стягиваемо, значит $H_n(S^n \setminus \{x\}) = 0$, а значит и $f_* = 0$.
3. Если $f \sim g$, то $\deg f = \deg g$.
4. $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$.
5. Если f — гомотопическая эквивалентность, то существует g такое, что $f \circ g \sim \mathrm{id} \Rightarrow \deg f \deg g = 1 \Rightarrow \deg f = \pm 1$.
6. Рассмотрим f, которое тождественно действует на первых n координатах и отправляет x_{n+1} в $-x_{n+1}$. Тогда $\deg f = -1$. Действительно, мы модем реализовать сферу, как склейку двух симплексов Δ_1^n и Δ_2^n по границе. Тогда n-мерная цепь $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ являются образующей n-мерных гомологий, а отображение f переставляет местами Δ_1^n и Δ_2^n, то есть действует на образующую умножением на -1.
7. Степень антиподального отображения: $\deg(x \mapsto -x) = (-1)^{n+1}$
8. Если $f\colon S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, то $f \sim (x \mapsto -x)$ и соответственно $\deg f = (-1)^{n+1}$. Действительно, если $f(x) \neq x$, то отрезок с концами $f(x)$ и $-x$, который задаётся, как
$$t \mapsto (1-t)f(x) - tx,\ 0 \le t \le 1,$$
не проходит через начало координат и формула
$$H(t,x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$
определяет гомотопию $f(x)$ в постоянное отображение.

Теорема 17 (О причёсывании ежа). *S^n допускает непрерывное ненулевое (касательное) векторное поле тогда и только тогда, когда n — нечетно.*

Доказательство. Предположим, что $x \mapsto V(x)$ — непрерывное поле касательных векторов к сфере. Тогда, если рассматривать вектор $V(x)$, как вектор в начале координат, а не в точке касания, то условие касания означает просто, что $x \perp V(x)$. Если $V(x) \neq 0$, то мы можем нормализовать веторное поле так, что $\|V(X)\| = 1 \; \forall x$, тогда векторы

$$(\cos t)x + (\sin t)V(x)$$

лежат на единичной окружности в $\operatorname{span}(x, V(x))$. Соотвественно, при $t \in [0, \pi]$ мы получаем гомотопию тождественного отображения id_{S^n} в антиподальное отображение:

$$H(t, x) = (\cos t)x + (\sin t)V(x).$$

Отсюда следует, что $(-1)^{n+1} = 1$, а значит, n должно быть нечетно. С другой стороны, когда $n = 2k-1$, мы можем положить

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, 2k) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k+1})$$

и это даст нам искомое векторное поле. □

Опишем теперь метод вычисления, который чаще всего применим на практике. Пусть $f\colon S^n \to S^n$ и существует $y \in S^n$ такое, что $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $U_1, \ldots, U_k$ — непересекающиеся окрестности этих точек, которые f переводит в окрестность V точки y. Тогда $f(U_i \setminus x_i) \subset V \setminus y$ и мы имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "k_i"] \arrow[dl, equal] & H_n(V, V \setminus \{y\}) \arrow[d, equal] \\
H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\}) & H_n\big(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)\big) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n \setminus \{y\}) \\
 & H_n(S^n) \arrow[r, "f_*"] \arrow[u, "j"] \arrow[ul, equal] & H_n(S^n) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Все отображения на ней индуцируются включениями. Два ихоморфизма в верхней части диаграммы получаются из теоремы о вырезании 8, а два в нижней — из точной последовательности пары 4.

Посредством этих четырех гомоморфизмов две верхние группы можно отождествить с $\mathbb{Z}$, тогда верхний гомоморфизм f_* становится умножением на число и это число мы будем называть *локальной степенью* отображения f и обозначать $\deg f|_{x_i}$.

Теорема 18 (Локальность степени). *Пусть $f\colon S^n \to S^n$ и $y \in S^n$ таково, что $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда*

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

Доказательство. По теореме о выразении 8, группа $H_n\big(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)\big)$ — прямая сумма групп $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$, причем k_i — отображение включения i-го слагаемого, а p_i — проекция на i-е слагаемое. Из коммутативности нижнего треугольника мы получаем, что

$$p_i \circ j(1) = 1,$$

а значит, $j(1) = (1, \ldots, 1) = \sum_i k_i(1)$. Коммутативность верхнего квадрата говорит, что f_* отображает $k_i(1)$ в $\deg f|_{x_i}$, а коммутативность нижнего квадрата уже дает нам формулу

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

□

2.17 Клеточные гомологии

Лемма 8. Пусть X — конечный CW-комплекс. Тогда:

a) $H_k\big(X^n, X^{n-1}\big) = 0$, если $k \neq n$ и изоморфно мвободной абелевой группе, если $k = n$. Образующие этой группы — клетки размерности n.
b) $H_k(X^n) = 0$, если $k > n$. В частности, если комплекс конечномерен, то $H_k(X) = 0\ \forall k > \dim X$.
c) Вложение $i\colon X^n \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм $i_*\colon H_k(X^n) \to H_k(X)$ при $k < n$ и эпиморфизм при $k = n$.

Доказательство. Во-первых, мы знаем, что $\big(X^n, X^{n-1}\big)$ — пара Борсука. Кроме того, $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_\alpha S^n$, где α пробегает все n-мерные клетки. Тогда факт a) следует из теоремы о факторизации 7 и теоремы 12.

Теперь рассмотрим длинную точную последовательность пары

$$\ldots \to H_{k+1}\big(X^n, X^{n-1}\big) \to H_k\big(X^{n-1}\big) \to H_k(X^n) \to H_k\big(X^n, X^{n-1}\big) \to \ldots.$$

Если $k \neq n$ или $n-1$, то обе внешние группы равны нулю, как группы гомологий букета n-мерных сфер, поэтому мы получаем изоморфизм

$$H_k\big(X^{n-1}\big) \cong H_k(X^n), \quad k \neq n, n-1.$$

Тогда, если $k > n$, то

$$H_k(X^n) \cong H_k\big(X^{n-1}\big) \cong \ldots H_k\big(X^0\big) = 0,$$

что доказывает пункт b). Если же $k < m$, то тогда

$$H_k(X^n) \cong H_k\big(X^{n+1}\big) \cong \ldots \cong H_k\big(X^{n+m}\big)\ \forall m \geq 0,$$

что доказывает c) в случае конечномерного комплекса. □

Замечание. Утверждение c) верно и для бесконечномерных CW-комплкесов (идея состоит в том, что каждая сингулярная цепь имеет компактный образ, а значит пересекается лишь с конечным числом клеток). (Доказательство можно посмотреть в Хатчере).

Теперь мы определим клеточные гомологи — более продвинутый способ вычислять гомологии клеточных пространств. Начнем с такой коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \\
 & 0 \arrow[dr] & & H_n\left(X^{n+1}\right) \cong H_n(X) \arrow[ur] & \\
 & & H_n\left(X^n\right) \arrow[ur] \arrow[d, "j_n"] & & \\
\ldots \arrow[r] & H_{n+1}\left(X^{n+1}, X^n\right) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] & H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \arrow[r] & \ldots \\
 & & H_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \arrow[ur, "j_{n-1}"] & & \\
 & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Её мы получили из точных последовательностей для пар $\big(X^{n+1}, X^n\big)$, $\big(X^n, X^{n-1}\big)$, $\big(X^{n-1}, X^{n-2}\big)$. Морфизмы в нижней строчке определяются, как $d_{n+1} \overset{\text{def}}{=} j_n \circ \partial_{n+1}$. Нетрудно заметить, что из точности мы получаем $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Таким образом, средняя строчка диаграммы является цепным комплексом (его называют *клеточным цепным комплексом для* X). Как мы уже замечали в доказательстве леммы выше, группа $H_n\big(X^n, X^{n-1}\big)$ — свободная абелева группа с базисом из n-мерных клеток в X.

Определение 14. Рассмотрим построенный выше цепной комлекс с группой k-мерных цепей $C_k^{\mathrm{CW}}(X) \overset{\mathrm{def}}{=} H_k\big(X^k, X^{k-1}\big)$. Гомологии этого комплекса называют *клеточным гомологиями пространства* X и обозначают $H_n^{\mathrm{CW}}(X)$.

Замечание. В самом деле, всё происходящее вполне логично — в случае симплициальных гомологий мы рассматриваем свободные абелевы группы, порожденные симплексами всех размерностей, а тут — клетками всех размерностей.

Теорема 19. *Пусть X — CW-комплекс. Тогда имеет место изоморфизм $H_n^{\mathrm{CW}}(X) \cong H_n(X)$.*

Доказательство. Из точности и теоремы о гомоморфимзе мы имеем изоморфизм

$$H_n(X) \cong H_n(X^n)/\operatorname{Im}\partial_{n+1}.$$

Так как j_n — инъекция, $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \cong \operatorname{Im} j_n \circ \partial_{n+1} = \operatorname{Im} d_{n+1}$. С другой стороны, $\operatorname{Im} j_n \cong \operatorname{Ker}\partial_n$. Из инъективности j_{n-1} мы имеем $\operatorname{Ker}\partial_n \cong \operatorname{Ker} d_n$. Значит, j_n индуцирует изоморфизм факторгруппы:

$$H_n(X) \cong H_n(X^n)/\operatorname{Im}\partial_{n+1} \cong \operatorname{Ker} d_n/\operatorname{Im} d_{n+1}.$$

□

Следствие 8. *Пусть X — CW-комплекс, тогда:*

1. *$H_n(X) \cong 0$, если в X нет n-мерных клеток.*
2. *Если X — CW-комплекс с k клетками размерности n, то группа $H_n(X)$ порождена не более чем k элементами. В самом деле, так как $H_n\big(X^n, X^{n-1}\big)$ — группа с k образующими, у подгруппы $\operatorname{Ker} d_n$ никак не может быть больше образующих, а значит и в факторгруппе $\operatorname{Ker} d_n/\operatorname{Im} d_{n+1}$ тоже.*
3. *Если X — CW-комплекс, у которого нет пар клеток в соседних размерностях, то $H_n(X)$ — свободная абелева группа с базисом из n-мерных клеток.*

Пример 7. Последний пункт следствия 8 применим, например, к $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, так как клеточная структура для $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ имеет по одной клетке каждой четной размерности до $2n$ (действительно, это заметно из того, что $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$). Значит, клеточный цепной комплекс для $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ имеет вид:

$$\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

Также при помощи этого же факта можно посчитать гомологии $S^n \times S^n$.

Рассмотрим теперь подробнее клеточный оператор границы d_n. При $n = 1$ это легко, так как

$$d_1\colon H_1\big(X^1, X^0\big) \to H_0\big(X^0\big)$$

и это просто обычное граничное отображение.

В случае, когда комплекс X связен и имеет лишь одну нульмерную клетку, $d_1 = 0$, так как иначе $H_0(X) \neq \mathbb{Z}$. В общем случае формула для клеточного оператора границы имеет следующий вид:

Утверждение 4. *Имеет место равенство:*

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

где $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения $S_\alpha^{n-1} \to X^{n-1} \to S_\beta^{n-1}$, которое является композицией отображения приклеивания клетки e_α^n по границе и отображения фаткоризации, стягивающего $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$ в точку.

Доказательство. Для получения этой формулы рассмотрим такую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_n\left(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha\right) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Phi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(\partial D^n_\alpha\right) \arrow[r, "\Delta_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(S^{n-1}_\beta\right) \arrow[d, "q_{\beta*}"] \\
H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(X^{n-1}/X^{n-2}\right) \arrow[d, "\cong"] \\
& H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \arrow[r, "\cong"] & H_{n-1}\left(X^{n-2}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}\right)
\end{tikzcd}$$

Проясним, что за стрелки на ней:

- Φ_α — характеристическое отображение клетки e^n_α, φ_α — её отображение приклеивания.
- $q\colon X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2}$ — отображение факторизации.
- $q_\beta\colon X^{n-1}/X^{n-2} \to S^{n-2}_\beta$ — стягивание дополнения клетки e^{n-1}_β в точку и отождествление получившейся сферы с $S^{n-1}_\beta = D^{n-1}_\beta/\partial D^{n-1}_\beta$.
- $\Delta_{\alpha\beta} = q_\beta q \varphi_\alpha$.

Отображение Φ_{α_*} переводит образующую $[D^n_\alpha] \in H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$ в образующую слагаемого $\mathbb{Z}$ группы $H_n\bigl(X^n, X^{n-1}\bigr)$, соответствующего клетке e^n_α (действительно, такие клетки образуют базис $H_n\bigl(X^n, X^{n-1}\bigr)$). Коммутативность левой половины диаграммы даёт нам, что

$$d_n(e^n_\alpha) = j_{n-1}\varphi_{\alpha_*}\partial[D^n_\alpha].$$

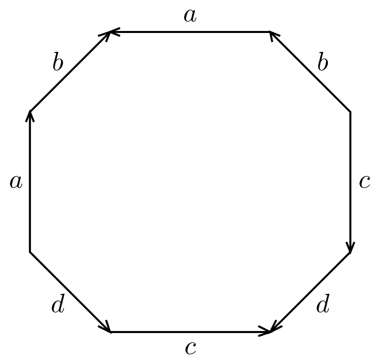
Базис группы $H_{n-1}\bigl(X^{n-1}, X^{n-2}\bigr)$ состоит из $(n-1)$-мерных клеток, а отображение q_{β_*} — это проекция группы $\widetilde{H}_{n-1}\bigl(X^{n-1}/X^{n-2}\bigr)$ (которая, как группа гомологий букета окружностей суть прямая сумма $\mathbb{Z}$, где каждое слагаемое соотвествует $(n-1)$-мерной клетке) на её слагаемое $\mathbb{Z}$, соответсвующее e^{n-1}_β.

Теперь формула следует непосредственно из коммутативности правой верхней части диаграммы7 □

2.18 Гомологии поверхностей

В данном параграфе, пользуясь клеточными гомологиями, мы вычислим гомологии поверхностей.

Пусть M_g — компактная ориентируемая поверхность с g ручками. Реализуем её, как склейку $4g$-угольника:



Тогда в её клеточном разбиении:

- 1 двумерная клетка, приклеенная по произведению коммутаторов $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$.
- $2g$ одномерных клеток.
- 1 нульмерная клетка.

Значит, цепной клеточный комплекс для M_g будет иметь вид:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

Так как комплекс связен и имеет лишь одну нульмерную клетку, $d_1 = 0$. Кроме того, каждое ребро $[a_1, a_2]$, $[a_g, b_g]$ появляется в произведении коммутаторов вместе со своим обратным, а значит, $\Delta_{\alpha\beta}$ гомотопны постоянным отображениям, из чего следует, что $d_2 = 0$.

Таким образом, мы имеем

$$H_k(M_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \text{ или } k = 2, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & k = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь вычислим гомологии неориентируемой замкнутой поверхности рода g. Она имеет такую клеточную структуру:

- Одна нульмерная клетка.
- g одномерных клеток.
- Одна двумерная клетка, приклеенная по слову $a_1^2 \dots a_g^2$.

Тогда клеточный цепной комплекс имеет вид:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^g \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

Аналогично предыдущему разу, $d_1 = 0$, а вот d_2 задаётся уравнением

$$d_2(1) = (2, \dots, 2),$$

так как каждое ребро a_i появляется в слове приклеивания двумерной клетки со степенью 2, а это значит, что каждое отображение $\Delta_{\alpha\beta}$ гомотопно отображению степени 2. Значит, d_2 инъективно и

$$H_2(N_g) = 0.$$

Выберем в $\mathbb{Z}^g$ такой базис: $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, 0), (1, 1, \dots 1)$. Тогда нетрудно заметить, что

$$H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

2.19 Пространства Мура

Допишу позже вместе с пространствами Эйленберга-Маклейна.

2.20 Теорема о вложении дисков и сфер

Напомним, что топологическое вложение — гомеоморфизм на образ.

Теорема 20. *Пусть $h\colon D^k \to S^n$ — вложение. Тогда*

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(D^k\Big)\Big) = 0 \;\forall i.$$

Кроме того, если $h\colon S^k \to S^n$ — вложение (и $k < n$), то

$$\widetilde{H}_i\Big(S^n \setminus h\Big(S^k\Big)\Big) = \mathbb{Z},\; i = n - k - 1 \text{ и } 0 \text{ иначе.}$$

Доказательство. Проведём индукцию по k. Случай $k = 0$ тривиален:

$$S^n \setminus h\big(D^0\big) = \mathbb{R}^n.$$

Теперь докажем индукционный переход от противного. Рассмотрим покрытие нашего пространства двумя множествами:

$$A = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad B = S^n \setminus h\left(I^k \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Заметим, что $A \cup B = S^n \setminus \left(h\left(I^k \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \cap h\left(I^k \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)\right) = S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)$ и

$$\widetilde{H}_i(A \cup B) \cong \widetilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right) = 0,$$

по индукционному предположению. Напишем теперь точную последовательность Майера-Вьеториса (9):

$$\ldots \to H_n(A \cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \ldots$$

$$\ldots \to H_n\left(S^n \setminus h\left(I^{k+1}\right)\right) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to \underbrace{H_n\left(S^n \setminus h\left(I^k \times \frac{1}{2}\right)\right)}_{\cong 0} \to H_{n-1}\left(S^n \setminus h\left(I^{k+1}\right)\right) \to \ldots$$

значит если в $\widetilde{H}_i(A \cap B) = \widetilde{H}_i\left(S^n \setminus \left(I^k \times I\right)\right)$ есть ненулевой класс a, его образ $(a, -a)$ в $\widetilde{H}_n(A) \oplus \widetilde{H}_n(B)$ будет ненулевым, а значит, в $\widetilde{H}_i(A)$ или $\widetilde{H}_i(B)$ тоже будет ненулевым. Далее мы можем также разбить на две части интервал в A или в B (в зависимости от того, где не ноль) и проделать всё полностью аналогично. Таким образом мы получим последовательность вложенных интервалов I_n таких, что

$$\widetilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^k \times I_n\right)\right) \neq 0,\ a \in \widetilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^k \times I_n\right)\right).$$

Тогда, если $p = \bigcap I_n$, то по индукционному предположению

$$\widetilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^k \times p\right)\right),$$

то есть a представляет ноль в этих гомологиях. Но это означает, что он является чьей-то границей, но тогда он является границей и в допредельном случае, что даёт нам противоречие.

Докажем теперь второй пункт. Представим сферу ввиде объединения двух дисков (полусфер):

$$S^k = D^k_+ \cup D^k_-, \quad D^k_- \cap D^k_+ = S^{k-1}.$$

тогда $S^n \setminus h(S^k) = S^n \setminus h(D^k_+ \cup D^k_-) = S^n \setminus h(D^k_-) \cap S^n \setminus h(D^k_+)$. Запишем опять точную последовательность Майера-Вьеториса 9, полагая

$$A = S^n \setminus h\left(D^k_+\right), \quad B = S^n \setminus h\left(D^k_+\right).$$

:

$$\ldots \to H_i\left(S^n \setminus h\left(S^k\right)\right) \to \underbrace{H_i\left(S^n \setminus h\left(D^k_-\right)\right)}_{=0} \oplus \underbrace{H_i\left(S^n \setminus h\left(D^k_+\right)\right)}_{=0} \to H_i\left(S^n \setminus h\left(S^{k-1}\right)\right) \to \ldots$$

Нулевые элементы в точной последовательности у нас их первого утверждения теоремы. Теперь видно, что мы можем вести индукцию по k. □

2.21 Когомологии

Итак, рассмотрим цепной комплекс абелевых групп $(C_\bullet, \partial)$

$$\ldots \to C_k \to C_{k-1} \to C_{k-2} \to \ldots$$

Тогда мы можем рассмотреть группы $C^k \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(C_k, G)$, где G — фиксированная абелева группа.[8] Тогда мы получаем цепной комплекс

$$\ldots \leftarrow C^{k+1} \overset{\delta}{\leftarrow} C^k \overset{\delta}{\leftarrow} C^{k-1} \overset{\delta}{\leftarrow} \ldots$$

Естественно, стрелки развернулись, так как мы подействовали на комплекс контравариантным функтором $\mathrm{Hom}(\_, G)$. Действие оператора δ определяется естественным образом:

$$\varphi \in C^k,\ \delta\varphi \colon C_{k+1} \overset{\partial}{\to} C_k \overset{\varphi}{\to} G,\ \delta\varphi = \varphi \circ \partial.$$

[8]В нашем, топологическом контексте, это группа коэффициентов.

Замечание. Сразу же нетрудно заметить, что $\delta^2 = 0$, то есть построенный комплекс действительно будет комплексом. Действительно,

$$\delta_k \circ \delta_{k-1}(\varphi(c)) = \delta_k(\varphi(\partial_{k-1}c)) = \varphi(\partial_k\partial_{k-1}c) = 0.$$

Определение 15. Группы гомологий коцепного комплекса $(C^\bullet, \delta) = (\mathrm{Hom}(C_\bullet), G), \delta)$ называют *группами когомологий* комплекса $(C_\bullet, \partial)$ с коэффициентами в группе G и обозначаются $H^k(C_\bullet; G)$. Как и в случае с гомологиями, $\mathrm{Im}\,\delta_k$ называют k-мерными кограницами, $\mathrm{Ker}\,\delta_k$ — k-мерными коциклами, а C^k — k-мерными коцепями.

Таким образом, мы определили и *сингулярные когомологии* пространства X (так как они строятся по сингулярным гомологиям). Заметим, что так как функтор Hom контравариантен, логично ожидать, что и когомологии будут контраваринатным функтором. Действительно, если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то у нас есть индуцированный морфизм

$$f_*\colon C_k(X) \to C_k(Y)$$

и действием функтора Hom мы получаем индуцированный морфизм $f^*\colon C^k(Y) \to C^k(X)$:

$$\varphi \in C^k(Y),\ \varphi\colon C^k(Y) \to G,\ f^*(\varphi) \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi \circ f\colon C^k(X) \to G,\ f^*(\varphi) \in C^k(X).$$

Покажем теперь, что у нас будет и индуцированный морфизм в когомологиях:

$$f^*\colon H^k(Y) \to H^k(X)$$

Для этого надо проверить, что отображение уважает добавление кограницы, то есть, если мы выберем другого представителя того же когомологического класса, мы полужем тот же образ, что и до этого. Действительно,

$$f^*(c_k + \delta c_{k-1}) = f^*(c_k) + \delta f^*(c_{k-1})$$

Замечание. Формально, как и в гомологиях, нам надо проверить, что $f^*\delta = \delta f^*$. Действительно, пусть $\varphi \in C^k(X)$, тогда

$$f^*(\delta\varphi) = f^*(\varphi\partial) = \varphi\partial f = \varphi f\partial = \delta f^*(\varphi).$$

В третьем равенстве мы пользуемся тем, что в начале курса мы уже проверяли, что граничный оператор коммутирует с непрерывными отображениями.

2.22 Формула универсальных коэффициентов для когомологий

Пример 8. Рассмотрим следующий комплекс:

$$0 \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_3} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_2} \xrightarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_1} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C_0} \to 0$$

После применения функтора $\mathrm{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ мы получим такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Посмотрим, какие в новом комплексе отображения. Действительно, пусть $\varphi\colon C_1 \to \mathbb{Z}, \psi\colon C_2 \to C_1, \psi(x) = 2x$, тогда $\varphi\psi\colon C_2 \to \mathbb{Z} \in C^2$. Нетрудно заметить, что $\varphi(\psi(x)) = \varphi(2x) = 2\varphi(x)$. Значит, мы получили вот такой комплекс:

$$0 \leftarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^3} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^2} \xleftarrow{\cdot 2} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^1} \xleftarrow{\cdot 0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{C^0} \leftarrow 0$$

Вычислим сначала гомологии:

$$H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z},\ H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ H_2(C_\bullet) = 0,\ H_3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

Теперь вычислим когомологии:

$$H^0(C_\bullet) = \mathbb{Z},\ H^1(C_\bullet) = 0, H_2(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_3(C_\bullet) = \mathbb{Z}.$$

То есть, сами группы не изменились, но изменилась градуировка.

Это вполне естественно, так как, на самом деле, любой цепной комплекс конечно-порожденных свободных абелевых групп является прямой суммой комплексов

$$0 \to \mathbb{Z} \to 0 \text{ и } 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to 0$$

и в силу того, что функтор Hom аддитивен на конечных копроизведениях, применяя $\operatorname{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ к исходному комплексу, мы получаем прямую сумму комплексов

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \text{ и } 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

Таким образом, мораль всего этого дела в том, что группы когомологий — тоже самое, что группы гомологий, за исключением того, что кручение смещается на олну размерность.

Утверждение 5. *Пусть $(C_\bullet, \partial)$ — цепной комплекс. Тогда существует гомоморфизм*

$$h\colon H^n(C;G) \to \operatorname{Hom}(H_n(C), G).$$

Доказательство. Рассмотрим когомологический класс $[\varphi] \in H^n(C_\bullet; G)$, $\varphi\colon C_n \to G$, $\delta\varphi = 0$.

$$\delta\varphi = \varphi\partial \Leftrightarrow \varphi|_{\operatorname{Im}\partial_{n+1}} = 0$$

Ограничение $\varphi_0 = \varphi|_{\operatorname{Ker}\partial_n}\colon \operatorname{Ker}\partial_n \to G$ индуцирует гомоморфизм факторизации

$$\overline{\varphi_0}\colon \operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1} \to G, \quad \overline{\varphi_0} \in \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G).$$

Таким образом, полагая $h(\varphi) = \overline{\varphi}_0$, мы получаем нужное. □

Упражнение. h — эпиморфизм.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$0 \to Z_{n+1} \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial} B_n \to 0$$

Применяя функтор $\operatorname{Hom}(-, G)$ мы получаем точную последовательность

$$0 \leftarrow Z^{n+1} \leftarrow C^{n+1} \leftarrow B^{n+1} \leftarrow 0$$

На самом деле, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & Z^{n+1} \arrow[l] & C^{n+1} \arrow[l] & B^n \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & Z^n \arrow[l] \arrow[u, "0"] & C^n \arrow[l] \arrow[u, "\delta"] & B^{n-1} \arrow[l] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Видно, что эта диаграмма — часть короткой точной последовательности комплексов. Она даёт нам длинную точную последовательность:

$$\ldots \leftarrow B^n \leftarrow Z^n \leftarrow H^n(C_\bullet, G) \leftarrow B^{n-1} \leftarrow Z^{n-1} \leftarrow \ldots$$

Разбивая длинную точную последовательность на короткие точные последовательности мы получаем:

$$0 \leftarrow \operatorname{Ker}(Z^n \to B^n) \xleftarrow{h} H^n(C_\bullet; G) \leftarrow \operatorname{Coker}\bigl(Z^{n-1} \to B^{n-1}\bigr) \leftarrow 0$$

А теперь заметим, что $\operatorname{Ker}(Z^n \to B^n) = \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$. Таким образом, мы получаем расщепимую точную последовательность:

$$0 \to \operatorname{Coker}\bigl(Z^{n-1} \to B^{n-1}\bigr) \to H^n(C_\bullet; G) \to \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \to 0.$$

Определение 16. Пусть H — абелева группа. Тогда её *свободная резольвента* — это точная последовательность

$$\ldots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0,$$

в которой каждая группа F_n свободная.

Применяя к этой точной последовательности функтор $\mathrm{Hom}(-, G)$ мы можем потерять точность, но во всяком случае, получим цепной комплекс:

$$\leftarrow F_2^* \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Будем обозначать группы когомологий свободной резольвенты, как $H^n(F, G)$. Нам понадобится следующее утверждение из гомологической алгебры:

Лемма 9. Пусть даны свободные резольвенты F и F' абелевых групп H и H'. Тогда любой гомоморфизм $\alpha\colon H \to H'$ можно продолжить до цепного отображения $F \to F'$. Кроме того, любые два таких цепных отображения, продолжающие гомоморфизм α, цепно гомотопны.

Для любых двух свободных резольвент F и F' группы H существуют канонические изоморфизмы

$$H^n(F; G) \cong H^n(F'; G).$$

У любой абелевой группы H есть свободная резольвента вида

$$0 \to F_1 \to F_0 \to H \to 0$$

с $F_i = 0$ при $i > 1$, которую мы сейчас построим.

Выберем в H набор образующих и пусть F_0 — группа, свободно порожденная этими образующими. Тогда у нас есть сюръективный гомоморфизм $f_0\colon F_0 \to H$, переводящий элементы базиса в образующие H. Его ядро будет свободно, как подгруппа свободной группы, поэтому мы можем положить $F_1 = \mathrm{Ker}\, f_0$, а в качестве f_1 взять включение $\mathrm{Ker}\, f_0 \hookrightarrow F_0$.

Для этой свободной резольвенты мы имеем $H^n(F; G) = 0\ \forall n > 1$, поэтому, из леммы 9 мы получаем, что это должно быть верно для всех свободных резольвент.

Таким образом, единственная интересная группа из $H^n(F; G)$ — это $H^1(F; G)$. Эта группа зависит лишь от H и G, поэтому обычно её обозначают $\mathrm{Ext}(H, G)$[9].

Так вот, из построения свободной резольвенты для группы H и определения когомологий мы теперь наконец можем заметить, что

$$\mathrm{Coker}\big(Z^{n-1} \to B^{n-1}\big) = \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G).$$

Теперь мы наконец можем заключить, что мы доказали формулу универсальных коэффициентов для когомологий:

Теорема 21 (Об универсальных коээфициентах для когомологий)**.** *Пусть $C_\bullet$ — цепной комплекс. Тогда его группы когомологий определяются расщепимыми короткими точными последовательностями*

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G) \to H^n(C; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(C), G) \to 0$$

Вообще говоря, это утверждение достаточно полезно, потому что на конечнопорожденных абелевых группах функтор Ext несложно посчитать:

- $\mathrm{Ext}(H \oplus H', G) \cong \mathrm{Ext}(H, G) \oplus \mathrm{Ext}(H', G)$.
- $\mathrm{Ext}(H, G) = 0$, если H — свободна.
- $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$.

[9] Вообще говоря, в гомологической алгебре функтор Ext обычно интерпретируют, как множество классов эквивалентности расширений G посредством H, но в алгебраической топологии такая интерпретация редко нужна.

- Если H конечно порождена, то имеет место изоморфизм

$$\operatorname{Ext}(H, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Tor}(H).$$

Кроме того, теорема об универсальных коэффициентов позволяет вычислять когомологии, зная только гомологии.

Следствие 9. *Если группы гомологий $H_n(C)$ и $H_{n-1}(C)$ комплекса C, состоящего из свободных абелевых групп, конечно порождены и $T_n \subset H_n$ и $T_{n-1} \subset H_{n-1}$ — подгруппы кручения, то*

$$H^n(C; \mathbb{Z}) \cong (H_{n-1}(C)/T_n) \oplus T_{n-1}.$$

Это следствие даёт нам обобщение и формализацию примера 8.

Кроме того, из всего этого дела есть еще одно замечательное следствие:

Следствие 10. *Если $f\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ индуцирует изоморфизм всех групп гомологий $H_k(C_\bullet) \cong H_k(C'_\bullet)$. Тогда отображения $f^*\colon H^k(C_\bullet; G) \cong H^k(C'_\bullet; G)$.*

Доказательство. Действительно, достаточно заметить, что из свойств свободной резольвенты мы знаем, что отобрежение цепных комплексов индуцирует такую вот диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G) & \longrightarrow & H^n(C; G) & \xrightarrow{h} & \operatorname{Hom}(H_{n-1}(C), G) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C'), G) & \longrightarrow & H^n(C'; G) & \xrightarrow{h} & \operatorname{Hom}(H_{n-1}(C'), G) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Применяя 5-лемму и индукцию, мы получаем нужное. □

2.23 Умножение в когомологиях

Пусть R — коммутативное и ассоциативное кольцо.

Пусть $\varphi \in C^k(X; R)$, $\psi \in C^\ell(X; R)$. Тогда их произведением определяется таким образом:

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+\ell}, \quad (\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots v_k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_k \dots v_{k+\ell}]}),$$

где $\sigma\colon \Delta^{k+\ell} \to X$ — сингулярный симплекс.

Лемма 10. Для кограницы $\smile$-произвения справедлива следующая формула:

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi.$$

Доказательство. Пусть $\sigma\colon \Delta^{k+\ell} \to X$ — сингулярный симплекс. Тогда

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]}) \psi(\sigma|_{[v_{k+1} \dots v_{k+\ell+1}]})$$

Распишем теперь второй кусок:

$$(-1)^k (\varphi \smile \delta\psi) = \sum_{i=k}^{k+\ell+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0 \dots v_k]}) \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+\ell+1}]})$$

Когда мы сложим эти две суммы, последнее слагаемое первой суммы сократится с первым слагаемым второй, а всё, что останется — как раз $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$. □

Замечание. Таким образом, $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi \pm \delta\psi \smile \varphi$. Из этого следует, что произведение коциклов — коцикл. Также это сразу даёт нам, что произведение коцикла и кограницы (в любом порядке) — кограница:

$$\varphi \smile \delta\psi = \pm\delta(\varphi \smile \psi)$$

Это даёт нам ассоциативное дистрибутивное умножение

$$\smile\colon H^k(X; R) \times H^\ell \to H^{k+\ell}(X; R).$$

Таким образом, при помощи $\smile$-произведения, мы наделили

$$H^*(X; R) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X; R)$$

структурой кольца (а на самом деле, градуированной алгебры).

Если в кольце R есть единица, то единицей относительно $\smile$-произведения будет нольмерный коцикл $1 \in H^0(X; R)$, принимающий значение 1 на любом нульмерном сингулярном симплексе.

Замечание. Это показывает нам отдельную пользу когомологий: например, у $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ и $S^4 \vee S^2$ все группы гомологий и группы когомлогий совпадают, а кольца когомологий отличаются.

3. Комплексные многообразия

3.1 Комплексные многообразия

Определение 17. *Комплексным многообразием M* называется гладкое многообразие, допускающее такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и такие координатные отображения $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, что все функции перехода $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ голоморфны на $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Функция f на открытом подмножестве $U \subset M$ называется *голоморфной*, если $\forall \alpha \in I$ функция $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфна в $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$.

Набор $z = (z_1, \dots, z_n)$ функций на $U \subset M$ называется *голоморфной системой координат*, если $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$ и $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфны на $z(U \cap U_\alpha)$ и $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ для всех α.

Отображение $f\colon M \to N$, где M и N — комплексные многообразия, называется *голоморфным*, если в голоморфных локальных координатах оно задаётся голоморфными функциями.

Пример 9 (Примеры комплексных многообразий)**.** Приведём какие-нибудь примеры комплексных многообразий:

1. Одномерное комплексное многообразие называют **римановой поверхностью**.
2. $P\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\{z \sim \lambda z\} = \mathbb{P}^n$ — комплексное проективное пространство. Это пространство компактно, так как есть непрерывное сюръективное отображение $S^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n$.
3. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^k \subset \mathbb{C}^n$ — дискретная решётка. Факторгруппа $\mathbb{C}^n/\Lambda$ обладает структурой комплексного многообразия, которую индуцирует проекция $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda$. Это многообразие компактно тогда и только тогда, когда $k = 2n$ и в этом случае $\mathbb{C}^n/\Lambda$ называется **комплексным тором**.
4. Тут был еще пример, что при неразветвлённом накрытии структура комплексного многообразия наследуется, но я хз, что такое разветвлённое накрытие.

Касательное пространство к комплексному многообразию.

Пусть M — комплексное многообразие, $p \in M$, а $z = (z_1, \dots, z_n)$ — система голоморфных координат в окрестности p. В случае комплексного многообразия имеются три различных понятия *касательного пространства* к M в точке $p \in M$.

1. Рассмотрим M, как вещественное $2n$-многообразие. Тогда $T_{\mathbb{R},p}M$ — пространство $\mathbb{R}$-линейных дифференцирований кольца $C^\infty(M, \mathbb{R})$ (с носителем в окрестности p). Если мы представим голоморфные координаты в виде $z_j = x_j + iy_j$, то $T_{\mathbb{R},p}M$ будет иметь базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$, как векторное пространство над $\mathbb{R}$.
2. Пространство $T_{\mathbb{R},p}M$ можно комплексифицировать при помощи расширения скаляров, то есть рассмотреть
$$T_{\mathbb{C},p}M \overset{\text{def}}{=} T_{\mathbb{R},p}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$
$T_{\mathbb{C},p}M$ называют *комплексифицированным касательным пространством* к M в точке p. Его можно реализовать, как пространство $\mathbb{C}$-линейных дифференцирований кольца $C^\infty(M, \mathbb{C})$ (опять же, функции с носителем в окрестности p). Соотвественно, там можно выбрать базис $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$, а при замене базиса на комлпексные обозначения
$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\ \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$
«более стандартный» базис $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$.
3. Подпространство $T'_pM = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial z_j}\} \le T_{\mathbb{C},p}M$ называется *голоморфным касательным пространством* к M в точке p. Оно может быть реализовано, как подпространство в $T_{\mathbb{C},p}M$, состоящее из дифференцирований, обращающихся в ноль на антиголоморфных функциях (таких f, что $\overline{f}$ — голоморфна). Соответственно, подпространство $T''_pM = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$ называется *антиголоморфным касательным пространством* к M в точке p. Ясно, что
$$T_{\mathbb{C},p}M = T'_pM \oplus T''_pM.$$

Заметим, что для комплексных многообразий M, N любое $f \in C^\infty(M,N)$ индуцирует линейное отображение
$$f_*\colon T_{\mathbb{R},p}M \to T_{\mathbb{R},f(p)}N$$
а значит и линейное отображение
$$f_*\colon T_{\mathbb{C},p}M \to T_{\mathbb{C},f(p)}N,$$
но не отображение $T'_pM \to T'_{f'(p)}N$ для всех $p \in M$.

На самом деле, отображение $f\colon M \to N$ голоморфно тогда и только тогда, когда
$$f_*(T'_pM) \subset T'_{f(p)}N \quad \forall p \in M.$$
То есть, когда голоморфное касательное пространство отображается в голоморфное.

Заметим, что также, поскольку $T_{\mathbb{C},p}M = T_{\mathbb{R},p}M \otimes \mathbb{C}$, операция сопряжения, переводящая
$$\frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$$
корректно определена на $T_{\mathbb{C},p}M$ и, как нетрудно заметить, $T''_pM = \overline{T'_pM}$. Отсюда следует, что проекция
$$T_{\mathbb{R},p}M \to T_{\mathbb{C},p}M \to T'_pM$$
есть $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм.

Это обстоятельство позволяет заниматься геометрией исключительно в голоморфном касательном пространстве.

Пример 10. Пусть $z(t)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ — гладкая кривая. Тогда $z(t) = x(t) + iy(t)$ и в качестве касательной мы можем взять
$$x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y} \text{ в } T_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \text{ либо } z'(t)\frac{\partial}{\partial z} \text{ в } T'\mathbb{C}.$$

Определение 18. Пусть теперь M, N — комплексные многообразия, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — голомрфные координаты в окрестности точки $p \in M$, а $(w_1, \ldots, w_n)$ — голоморфные координаты в окрестности точки $q = f(p)$, где $f\colon M \to N$ — голоморфное отображение. В связи с различными понятиями касательных пространств, мы имеем и различные понятия *якобиана* f.

1. Пусть $z_j = x_j + iy_j,\ w_k = u_k + iv_k$. Тогда в базисах $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial v_k}\}$ пространств $T_{\mathbb{R},p}M$ и $T_{\mathbb{R},q}N$ линейное отображение f_* задаётся $2m \times 2n$-матрицей
$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} & \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j} & \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$
В базисах $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial w_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\}$ пространств $T_{\mathbb{C},p}M$ и $T_{\mathbb{C},q}N$ отображение f_* задаётся матрицей
$$\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(f) & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{J}(f)} \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}(f) = \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_j}\right)_{k,j}.$$

Замечание. В частности, отметим, что $\operatorname{rank} \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = 2 \operatorname{rank} \mathcal{J}(f)$ и в случае $m = n$
$$\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f) = \det \mathcal{J}(f) \det \overline{\mathcal{J}(f)} = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \geq 0,$$
то есть голоморфные отображения **сохраняют ориентацию**.

Мы будем считать, что пространство $\mathbb{C}^n$ естественно ориентированно $2n$-формой
$$\left(\frac{i}{2}\right)^n (\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z_1}) \wedge (\mathrm{d}z_2 \wedge \mathrm{d}\overline{z_2}) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z_n}) = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}y_n.$$

Ясно, что если $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ и $\varphi_\beta\colon U_\beta \to \mathbb{C}^n$ — голоморфные координатные отображения на комплексном многообразии M, то прообразы при φ_α и φ_β естественной ориентации на $\mathbb{C}^n$ согласованы на $U_\alpha \cap U_\beta$.

Соотвественно, любое комплексное многообразие **имеет естественную ориентацию**, которая сохраняется при голоморфных отображениях.

3.2 Подмногообразия и аналитические подмножества

Докажем теперь несколько классических теорем для случая комплексных многообразий.

Теорема 22 (Об обратном отображении). *Пусть U, V — открытые подмножества в $\mathbb{C}^n$, $0 \in U$ и $f\colon U \to V$ — такое голоморфное отображение, что матрица $\mathcal{J}(f) = (\partial f_i/\partial z_j)$ невырождена в 0.*

Тогда отображение f взаимно однозначно в окрестности точки 0 и обратное отображение f^{-1} голоморфно в некоторой окрестности $f(0)$.

Доказательство. Как мы уже отмечали в 3.1, $|\det \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(f)| = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \neq 0$ в точке 0, а значит, по обычной теореме об обратном отображении, функция f имеет в окрестности точки 0 обратную $C^\infty(U, V)$ функцию f^{-1}. Заметим, что $f^{-1}(f(z)) = z$, так что, дифференцируя это равенство в нуле мы имеем

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(f^{-1}(f(z)))_j = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial z_k}\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z_i}} + \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \overline{z_k}}\left(\frac{\partial \overline{f_k}}{\partial \overline{z_i}}\right) = \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \overline{z_k}}\left(\frac{\partial \overline{f_k}}{\partial z_i}\right) \quad \forall i, j.$$

Так как матрица $(\partial f_k/\partial z_j)$ была невырождена, отсюда следует, что $\partial f_j^{-1}/\partial \overline{z_k} = 0\ \forall j, k$, что и означает голоморфность функции f. $\square$

Теорема 23 (О неявной функции). *Пусть заданы функции $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}_n$, удовлетворяющие условию*

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)_{1\le i,\ j\le k} \neq 0.$$

Тогда существуют такие функции $w_1, \ldots, w_k \in \mathcal{O}_{n-k}$, что в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$

$$f_1(z) = \ldots f_k(z) = 0 \Leftrightarrow z_i = w_i(z_{k+1}, \ldots, z_n),\ 1 \le i \le k.$$

Доказательство. Как обычно, по обычной теореме о неявной функции в случае C^∞ существуют функции $\omega_1, \ldots, \omega_k$ с нужным свойством. Остается показать голоморфность. Это делается непосредственно вот таким стандартным вычислением вычислением:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z_\alpha}}(f_j(\omega(z), z)) = \ldots = \sum \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \overline{z_\alpha}}\frac{\partial f_j}{\partial \omega_\ell} \Rightarrow \frac{\partial \omega_\ell}{\partial \overline{z_\alpha}} = 0\ \forall \alpha, \ell,$$

$\square$

Замечание. Видимо почти всегда, когда мы хотим показать голоморфность, мы тупо считаем в локальных производных антиголоморфную производную.

Теперь мы увидим, что комлексные многообразия в смысле их морфизмов таки имеют свою, отличную от вещественной, специфику:

Утверждение 6. *Если $f\colon U \to V$ — взаимно однозначное голоморфное отображение открытых множеств в $\mathbb{C}^n$, то $\det \mathcal{J}(f) \neq 0$, то есть f^{-1} голоморфно.*

Замечание. Мы видели этот факт в обычном комплексном анализе (доказывали, что производная однолистной функции не обнуляется).

Определение 19. *Комплексным подмногообразием* S комплексного многообразия M называется подмножество $S \subset M$, которое локально задается либо как множество нулей совокупности голоморфных функций $f_1, \ldots f_k$ с условием $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = k$, либо как образ открытого подмножества $U \subset \mathbb{C}^{n-k}$ при отображении $f\colon U \to M$ с условием $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = n - k$.

Эквивалентность этих определений следует из теоремы о неявной функции 23.

Определение 20. Аналитическим подмножеством V комплексного многообразия M называется подмножество, являющееся локально множеством нулей конечного набора голоморфных функций.

Точка $p \in V$ называется *гладкой*[10] точкой V, если V в некоторой её окрестности задаётся набором голоморфных функций $f_1, \dots, f_k$, причем таким, что $\operatorname{rank} \mathcal{J}(f) = k$.

Множество гладких точек V обозначается V^*, а все точки из $V \setminus V^*$ называются *особыми*. Они формируют *множество особенностей* аналитического подмножества V, которое мы будем обозначать, как V_s.

В частности, если p — точка аналитической гиперповерхности $V \subset M$, задаваемой в локальных координатах z функцией f, определим *кратность* $\operatorname{mult}_p(V)$, как порядок обращения f в нуль в точке p, то есть наибольшее такое m, что

$$\frac{\partial^k f}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = 0 \; \forall k \le m - 1.$$

Утверждение 7. *Множество V_s содержится в аналитическом подмножестве многообразия M, не совпадающем с V.*

Замечание. А на самом деле, при аккуратном выборе функций, несложно показать, что V_s — аналитическое подмножество в M.

Запомним также полезный нам в будущем факт:

Утверждение 8. *Аналитическое множество V неприводимо тогда и только тогда, когда V^* связно.*

Тут было еще что-то про касательные конусы, пока что забьем на это, лень читать.

3.3 Когомологии де Рама и Дольбо

Пусть M — гладкое многообразие. Обозначим за $A^p(M; \mathbb{R})$ пространство дифференциальных форм степени p на M, а через $Z^p(M; \mathbb{R})$ подпространство замкнутых p-форм.

Так как $d^2 = 0$, у нас есть (ко)цепной комплекс

$$A^0(M; \mathbb{R}) \to \dots \to A^p(M; \mathbb{R}) \to A^{p+1}(M; \mathbb{R}) \to \dots$$

а его группы когомологий называются группами *когомологий де Рама* многообразия M.

Иными словами, группы когомологий де Рама — это факторгруппы замкнутых форм по модулю точных

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M; \mathbb{R}) = Z^p(M; \mathbb{R}) / dA^{p-1}(M).$$

Совершенно также мы можем рассматривать комплекснозначные формы и давать все соотвествующие определения (используя обозначения $A^p(M)$ и аналогичные, то есть без коэффициентов):

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) = Z^p(M) / dA^{p-1}(M)$$

Замечание. Нетрудно заметить, что как и всегда с коэффициентами,

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) = H^p_{\mathrm{DR}}(M; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}.$$

Как мы заметили в самом первом параграфе, комплексифицированное кокасательное пространство раскладывается в голоморфную и антиголоморфную часть:

$$T^*_{\mathbb{C},z} M = T^{*'}_z M \oplus T^{*''}_z M,$$

что дает нам разложение

$$\Lambda^n T^*_{\mathbb{C},z} M = \bigoplus_{p+q=n} \Big(\Lambda^p T^{*'}_z(M) \otimes \Lambda^q T^{*''}_z(M) \Big),$$

а это (по определению внешних форм) даёт нам

$$A^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M), \text{ где}$$

[10] возможно, корректнее использовать слово регулярная?

$$A^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^n(M) \mid \varphi(z) \in \Lambda^p T_z^{*'}(M) \otimes \Lambda^q T_z^{*''}(M)\ \forall z \in M\}.$$

Соотвественно, форму $\varphi \in A^{p,q}$ называют формой типа (p, q). Обозначим за $\pi^{(p,q)}$ проекцию

$$A^*(M) \to A^{p,q}(M),$$

так что для $\varphi \in A^*(M)$ имеем $\varphi = \sum \pi^{(p,q)}\varphi$.

Если $\varphi A^{p,q}(M)$, то для любого $z \in M$

$$\mathrm{d}\varphi(z) \in \left(\Lambda^p T_z^{*'} M \otimes \Lambda^q T_z^{*''} M\right) \wedge T^*_{\mathbb{C},z} M,$$

$$\mathrm{d}\varphi \in A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M).$$

Определоим теперь для этих замечательных дифференциальных форма операторы

$$\overline{\partial}\colon A^{p,q}(M) \to A^{p,q+1}, \quad \partial\colon A^{p,q}(M) \to A^{p+1,q}(M)$$

$$\overline{\partial} = \pi^{(p,q+1)} \circ \mathrm{d}, \quad \partial = \pi^{(p+1,q)} \circ \mathrm{d}, \text{ то есть } d = \partial + \overline{\partial}.$$

В локальных координатах $z = (z_1, \dots, z_n)$ форма $\varphi \in A^n(M)$ имеет тип (p, q), если она имеет представление в виде

$$\varphi(z) = \sum_{I,J} \varphi_{I,J}(z) \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$$

Замечание. Короче говоря, вся эта страшная белиберда была, чтоб сказать, что бывают не только голоморфные дифференциальные формы, но и такие, где один кусок голоморфный, а другой антиголоморфный.

Дифференцировать эти формы можно так:

$$\overline{\partial}\varphi(z) = \sum_{I,J,j} -\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \varphi_{IJ}$$