Graduate Texts in Mathematics 52

ROBIN HARTSHORNE

ALGEBRAIC GEOMETRY

Springer-Verlag
New York Heidelberg Berlin
1977

Р. ХАРТСХОРН

Алгебраическая ГЕОМЕТРИЯ

Перевод с английского
В. А. Исковских

Москва «Мир» 1981

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК 513.6

Монография учебного характера по алгебраической геометрии, написанная с большим педагогическим мастерством известным американским ученым. Материал излагается на современном языке теории схем и когомологий. Представлено более 400 задач и упражнений для самостоятельной работы.

Для математиков, интересующихся алгебраической геометрией, студентов и аспирантов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

1702040000
С $\frac{20204-010}{041(01)-81}$ 10–81, ч. 1

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Началом современного этапа развития алгебраической геометрии принято считать статью Ж.-П. Серра [3], вместе с которой в абстрактную алгебраическую геометрию пришли новые методы теории когерентных пучков и их когомологий. За четвертьвековой промежуток времени, прошедший с тех пор, алгебраическая геометрия превратилась в сильно развитую экспансивную науку, распространившую свое влияние на многие смежные области математики, в том числе на алгебраическую теорию чисел, коммутативную алгебру, комплексный анализ, топологию и дифференциальную геометрию. В последние годы были найдены ее приложения к некоторым задачам теории нелинейных дифференциальных уравнений и теоретической физики.

Настоящий период интенсивного развития алгебраической геометрии в значительной мере связан также с созданием нового языка — теории схем А. Гротендика. Теория схем существенным образом перестроила и укрепила основания предмета и обеспечила гармоничную связь чисто геометрических идей итальянского периода с методами современной коммутативной (и гомологической) алгебры. За последние 10—15 лет появилось много монографий, написанных на языке теории схем [1]), основным источником для которых (как и для многочисленных журнальных статей) был и остается фундаментальный трактат Гротендика и Дьёдонне [EGA].

Но [EGA] ни в какой мере не является учебником — это большая исследовательская монография, в которой заложены основы новой глубокой теории. Со временем специалисты стали думать над тем, какие из аспектов этой теории и в какой общности можно

[1]) Некоторые из них переведены на русский язык: см., например, Мамфорд [1], [2], [5]; в издательстве «Мир» готовится перевод книги Милна «Étale topology».

(и следовало бы) изложить в учебной литературе. С этой целью в различных университетах (у нас в стране и за рубежом) читались специальные курсы и издавались ротапринтным способом и небольшими тиражами их записки [1]). Первым наиболее обстоятельным учебником по современной алгебраической геометрии, содержащим в качестве одной из глав также и начала теории схем (без когомологий), стала книга И. Р. Шафаревича «Основы алгебраической геометрии» (М.: Наука, 1972).

Предлагаемая вниманию читателя книга американского математика Р. Хартсхорна является наиболее полным и последовательным введением в теорию схем и когомологий когерентных пучков. Автор успешно справился со своей сложной задачей, рассчитывая, правда, на трудолюбивого читателя: значительная часть материала изложена в книге в виде упражнений.

Профессор Р. Хартсхорн — представитель того поколения алгебраических геометров, которые, уже не заботясь об основаниях, применяли новую технику к решению классических задач. Это обстоятельство накладывает свой отпечаток и на содержание книги. Автор начинает ее с главы о многообразиях, где вводит основные понятия, приводит массу примеров и настраивает читателя на изучение трудной техники последующих двух глав. В заключительных главах книги (гл. IV и V) он снова обращается к основным объектам изучения алгебраической геометрии — алгебраическим многообразиям — и показывает, как новая техника работает в классической ситуации проективных алгебраических кривых и поверхностей. Особенно замечательна в этом смысле гл. V о поверхностях, где автор, пользуясь техникой, развитой в главах II и III, изящно передоказывает многие классические теоремы, например, знаменитую теорему Кастельнуово о стягиваемости исключительной кривой первого рода на поверхности (5.7 гл. V). Однако, следует отметить, что даже в главах II и III автор не стремится к чрезмерному нагнетанию технических средств: так, например, он не вводит и нигде не пользуется техникой спектральных последовательностей.

[1]) См., например, Манин Ю. И. Лекции по алгебраической геометрии. Часть I. Аффинные схемы.— М.: Изд. МГУ, 1970 (часть II см. Манин Ю. И. [1]), а также Mumford D. Introduction to Algebraic Geometry, plerimіnary version of chapters I—III.—Cambridge: Harvard Univ. Math. Dept., 1970.

В настоящее время имеется несколько хороших учебников по алгебраической геометрии [1]). Все они, не пересекаясь в существенном, охватывают предмет алгебраической геометрии с разных сторон. Книга Р. Хартсхорна особенно нужна для изучения таких сверхтехничных трактатов как [EGA] и [SGA] (см. литературу в конце книги), а также для чтения монографий и статей, написанных на схемном языке.

В качестве несомненного достоинства книги следует отметить четкий стиль изложения материала. Автор предъявляет небольшие требования к читателю, предполагая, в основном, знакомство с элементами коммутативной алгебры. При этом всякий более или менее существенный результат, который используется, но не доказывается в книге, он приводит с полной формулировкой и точными ссылками на литературу. Результаты, составляющие основное содержание книги, излагаются с исчерпывающими доказательствами. Благодаря этому, книга читается довольно легко, несмотря на ее трудное содержание.

Для настоящего русского издания автор любезно прислал исправления ряда опечаток и неточностей. Пользуюсь случаем выразить проф. Р. Хартсхорну искреннюю благодарность.

Являясь введением в наиболее актуальную область современной математики, книга Р. Хартсхорна будет полезна широкому кругу советских читателей.

В. А. Исковских

[1]) Кроме упомянутых выше укажем еще учебник Мамфорда «Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия» (М.: Мир, 1979); в издательстве «Мир» подготовлен перевод замечательной книги: Griffiths P., Harris J. Principles of algebraic geometry.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой введение в абстрактную алгебраическую геометрию, использующее современные методы теории схем и теории когомологий. Основными объектами изучения являются алгебраические многообразия в аффинных и проективных пространствах над алгебраически замкнутым полем. Эти объекты вводятся в гл. I, где выясняются некоторые из их основных свойств и приводятся примеры. Методы схем и когомологий развиваются в главах II и III, причем упор делается на приложения, а не на достижение максимальной общности изложения. В последних двух главах книги (IV и V) эти методы используются для изучения объектов классической теории, а именно алгебраических кривых и поверхностей.

Такой подход к изучению алгебраической геометрии требует знания некоторых результатов из коммутативной алгебры (они формулируются в книге по мере надобности) и элементарных фактов из топологии. Владение методами комплексного анализа и дифференциальной геометрии для изучения этой книги не обязательно. В книге содержится более четырехсот упражнений, в которых обсуждаются некоторые специальные вопросы, не отраженные в основном тексте. В трех добавлениях, помещенных в конце, дается краткий обзор некоторых направлений исследований в современной алгебраической геометрии.

Эту книгу можно использовать в качестве учебного пособия для специальных курсов по алгебраической геометрии для слушателей, которые овладели основным университетским курсом алгебры. Я читал этот материал в Беркли в течение пяти кварталов, примерно одну главу в квартал. Главу I можно также использовать для составления краткого вводного курса в алгебраическую геометрию. Третья возможность — это после изучения гл. I приступить прямо к чтению гл. IV, взяв из глав II и III только неко-

торые определения и *принимая на веру* теорему Римана — Роха для кривых. Этот путь быстро приводит к интересному материалу и может стимулировать последующее изучение глав II и III.

Материал, изложенный в этой книге, следует рассматривать как необходимый минимум для чтения более специальных трудов, таких, как [EGA] и [SGA] Гротендика, лекции Хартсхорна [5], книги Мамфорда [2], [5] и книга «Алгебраические поверхности» Шафаревича и др. [1].

Благодарности

При работе над этой книгой я пытался отобрать самое существенное для основного курса алгебраической геометрии. Я хотел сделать доступной неспециалистам область математики, результаты которой до сих пор были сильно разбросаны и связывал их только неопубликованный «фольклор». Хотя я заново компоновал материал и переделывал доказательства, книга все же, в основном, составлена из того, чему я научился от своих учителей, коллег и студентов. Я обязан им всем очень многим. Особенно я хотел бы поблагодарить за внимание и поддержку Оскара Зарисского, Ж.-П. Серра, Дэвида Мамфорда и Артура Огуза.

За исключением классического материала, происхождение которого может проследить только историк, основополагающими идеями я всецело обязан А. Гротендику, чей трактат [EGA] служит первоисточником по теории схем и когомологий. Его результаты без особых оговорок воспроизводятся в главах II и III. Во всех иных случаях я пытался отметить те источники, о которых я был осведомлен.

На стадии рукописи я ознакомил с книгой многих людей и получил ценные замечания. Всем им я очень признателен. В особенности я благодарен Ж.-П. Серру, Х. Мацумуре и Джо Липману за тщательное прочтение рукописи и конкретные предложения.

На основе материала этой книги мной были прочитаны курсы в университетах Гарварда и Беркли. Я благодарен своим студентам за внимание и стимулирующие вопросы.

Я также рад поблагодарить Рихарда Бассина, который сочетает талант математика с ярким искусством иллюстратора.

В нескольких словах невозможно выразить в полной мере мою глубокую признательность жене Эди Черчиль Хартсхорн. Пока я был занят работой над книгой, она окружала меня и наших сыновей Джонатана и Бенджамина теплом и заботой. Ее постоянная поддержка и дружба создают вокруг меня прекрасную атмосферу.

За финансовую помощь при подготовке этой книги я благодарю Институт математических исследований при университете Киото, Национальный научный фонд и Калифорнийский университет в Беркли.

29 августа 1977 г. *Робин Хартсхорн*

Беркли, Калифорния

ВВЕДЕНИЕ

Перед автором начального курса по алгебраической геометрии стоит трудная двоякая задача — обеспечить запас типичных примеров и выработать геометрическую интуицию, с одной стороны, и развить технический язык современной алгебраической геометрии, с другой. Трудность заключается в том, что в алгебраической геометрии существует большой разрыв между исходными интуитивными идеями и техническими средствами, используемыми в современных исследованиях.

Прежде всего о языке. В развитии алгебраической геометрии можно выделить несколько периодов и подходов, для каждого из которых характерны свой язык и свои идеи. Конец девятнадцатого века был свидетелем трех из них: теоретико-функционального подхода Римана, более геометрического подхода Брилля и Нётера и чисто алгебраического подхода Кронекера, Дедекинда и Вебера. Период наивысшего расцвета итальянской школы во главе с Кастельнуово, Энриквесом и Севери ознаменовался классификацией алгебраических поверхностей. В двадцатом веке американская школа Чжоу, Вейля и Зарисского подвела прочный алгебраический фундамент под геометрическую интуицию итальянских геометров. Уже совсем недавно Серр и Гротендик основали французскую школу, которая пересмотрела основания алгебраической геометрии в терминах схем и когомологий и поставила впечатляющий рекорд в решении старых проблем новыми методами. Что же все-таки лучше для начального курса — старый язык, который ближе к геометрической интуиции, или же техничный язык современных исследований?

Теперь по поводу содержания. Современная математика имеет тенденцию забывать историю: каждая новая школа переделывает основания своего предмета на свой собственный лад, что способствует логическому совершенству, но плохо с точки зрения педагогики. Что толку знать определение схемы, если не знать, что спектр кольца целых в поле алгебраических чисел, алгебраическая кривая и компактная риманова поверхность являются примерами регулярной схемы размерности один! Как автору начального курса дать введение в алгебраическую геометрию, исходя из теории чисел, коммутативной алгебры и комплексного анализа, и вместе с тем подвести читателя к главному объекту изучения, а именно к алгебраическим многообразиям в аффинных и проективных пространствах, развивая одновременно современный язык схем и когомологий? Какой выбор тем может отразить суть алгебраической геометрии и в то же время стать прочным основанием для дальнейшего изучения предмета и научных исследований?

Мои симпатии на стороне классической геометрии. Я считаю, что наиболее важные проблемы в алгебраической геометрии — это те, которые относятся к «старомодным» многообразиям в аффинных и проективных пространствах. Именно на этих объектах вырабатывается геометрическая интуиция, которая является основной движущей силой всего дальнейшего развития предмета.

Эту книгу я начинаю с главы о многообразиях для того, чтобы набрать побольше примеров и изложить основные идеи предмета в их простейшем виде, не заботясь о технических деталях. Только после этого в главах II и III я систематически развиваю язык схем, когерентных пучков и когомологий. Эти главы являются техническим сердцем книги. В них я стараюсь изложить наиболее важные результаты о схемах, пучках и когомологиях, но без чрезмерных обобщений. Так, например, теория когомологий развивается здесь только для квазикогерентных пучков на нётеровых схемах, поскольку это гораздо проще, чем общий случай, и в то же время достаточно для большинства приложений; теорема о когерентности прямых образов пучков доказывается только для проективных, а не для произвольных собственных морфизмов. По тем же соображениям я не включаю в книгу более абстрактные понятия представимых функторов, алгебраических пространств, этальных когомологий и топологий Гротендика.

Четвертая и пятая главы содержат классический материал, а именно теорию неособых проективных кривых и поверхностей, но в них используется техника схем и когомологий. Я надеюсь, что эти главы прикладного характера оправдают усилия, затраченные на овладение техническим аппаратом двух предшествующих глав.

В качестве основного средства изложения я выбрал язык коммутативной алгебры. Его преимущество состоит в том, что он точен, и, кроме того, работая над основным полем произвольной характеристики, что, во всяком случае, необходимо для приложений к теории чисел, можно глубже проникнуть в понимание классического случая основного поля $\mathbb{C}$. Несколько лет назад, когда Зарисский начал писать книгу по алгебраической геометрии, ему понадобилось развить необходимый для этой цели алгебраический аппарат. Эта задача приобрела такой размах, что книгу он написал только по коммутативной алгебре. В настоящее время, к счастью, имеется несколько отличных книг по коммутативной алгебре: Атья и Макдональд [1], Бурбаки [1], Зарисский и Самюэль [1], Мацумура [2], Нагата [7], и, таким образом, моя задача — только привести точные формулировки алгебраических результатов и указать точные ссылки на источники, где они доказаны. Перечень используемых алгебраических результатов помещен в конце книги.

Первоначально я планировал написание целой серии добавлений — кратких обзоров по некоторым из современных направлений исследований, чтобы перебросить мост между основным текстом этой книги и текущей литературой. Однако из-за ограниченности времени и пространства в книгу вошли только три из них. По этому поводу я могу лишь выразить свое сожаление и отослать читателя к аркатскому сборнику статей под моей редакцией (Хартсхорн [1]), написанных специалистами и предназначенных для неспециалистов. По истории развития алгебраической геометрии я рекомендую книгу Дьёдонне [1]. Так как объем настоящей книги не позволяет раскрыть связи алгебраической геометрии со смежными областями математики в той степени, в какой бы мне хотелось, то для восполнения этого пробела рекомендую обзорную статью Касселса [1] по поводу связи с теорией чисел и книгу Шафаревича [1, часть 3] по поводу связи с теорией комплексных многообразий и топологией.

Поскольку я очень рассчитываю на активную работу читателя с книгой, то привел в ней много упражнений. Некоторые из них содержат важные результаты, не включенные в основной текст. Другие являются конкретными примерами, иллюстрирующими общие закономерности. Я полагаю, что разбор частных задач неотделим от изучения общей теории. Серьезный студент должен пытаться сделать как можно больше упражнений, но не должен рассчитывать на то, что все решения получатся сразу. Для того чтобы разобраться по-настоящему во многих из них, потребуются поистине творческие усилия. Наиболее трудные из упражнений отмечены звездочкой, а двумя звездочками отмечены нерешенные задачи.

Продолжение введения к этой книге см. в § 8 гл. I.

Терминология

В основном терминология этой книги согласуется с общепринятой, но есть несколько исключений. *Многообразие* всегда предполагается неприводимым и определенным над алгебраически замкнутым полем. В гл. I все многообразия квазипроективны. В § 4 гл. II это понятие расширяется, включая в себя *абстрактные многообразия*, которые представляют собой не что иное, как целые отделимые схемы конечного типа над алгебраически замкнутым полем. Многообразия размерности 1 и 2 называются *кривыми* и *поверхностями* соответственно. Однако в гл. IV термин «кривая» обозначает только неособую проективную кривую, а в гл. V — любой эффективный дивизор на неособой проективной поверхности. Под поверхностью в гл. V понимается всегда неособая проективная поверхность.

Схема — это то, что в первом издании [EGA] называлось предсхемой, а в новом издании [EGA, гл. I] стало называться просто схемой.

Определения *проективного морфизма* и *очень обильного обратимого пучка*, данные в этой книге, не эквивалентны соответствующим определениям в [EGA] — см. § 4.5 гл. II. Они технически проще, но имеют тот недостаток, что не являются локальными по базе.

Термин «неособый» относится только к многообразиям; в более общем случае схем используются термины «регулярный» и «гладкий».

Результаты из алгебры

Я предполагаю, что читатель знаком с основными результатами о кольцах, идеалах, модулях, нётеровых кольцах и целой зависимости и готов принять на веру или изучить некоторые другие факты, принадлежащие собственно коммутативной или гомологической алгебре, которые будут формулироваться по мере необходимости со ссылкой на литературу. Такие результаты будут отмечаться буквой A, например теорема 3.9A, чтобы отличать их от результатов, доказанных в тексте.

В книге приняты следующие соглашения: все кольца коммутативны и с единицей, все гомоморфизмы колец переводят 1 в 1. В целостном кольце или поле $0 \neq 1$. *Простой идеал* (соответственно *максимальный идеал*) — это идеал $\mathfrak{p}$ в кольце A, такой, что факторкольцо $A/\mathfrak{p}$ является целостным (соответственно полем). Таким образом, сами кольца не считаются простыми или максимальными идеалами.

Мультипликативная система кольца A — это подмножество S, содержащее 1 и замкнутое относительно операции умножения. *Локализация* $S^{-1}A$ определяется как кольцо, образованное классами эквивалентности дробей a/s, $a \in A$, $s \in S$, где a/s и a'/s' считаются *эквивалентными*, если существует элемент $s'' \in S$, такой, что $s''(s'a - sa') = 0$ (см. Атья — Макдональд [1, гл. 3]). Постоянно используются следующие два случая. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, тогда $S = A - \mathfrak{p}$ является мультипликативной системой и соответствующая локализация обозначается через $A_{\mathfrak{p}}$. Пусть f — некоторый элемент из A, тогда $S = \{1\} \cup \{f^n \mid n \geqslant 1\}$ является мультипликативной системой и соответствующая локализация обозначается через A_f. (Отметим, в частности, что если элемент f нильпотентен, то кольцо A_f нулевое.)

Ссылки

Библиографические ссылки даются посредством указания автора с последующим номером, заключенным в квадратные скобки, его произведения, на которое мы ссылаемся, например Серр [3, стр. 416]. Ссылки на теоремы, предложения и леммы внутри одной и той же главы даются указанием соответствующего номера, например 3.5. Ссылки на упражнения даются так: упр. 3.5. В ссылках на результаты из другой главы указывается номер этой главы, например 3.5 гл. II или упр. 3.5 гл. II.

Глава I

МНОГООБРАЗИЯ

Цель этой главы — дать введение в алгебраическую геометрию, используя, по возможности, минимум техники. Основное поле k будет предполагаться алгебраически замкнутым и фиксированным. В этой главе мы определяем основные объекты изучения — алгебраические многообразия в афинных и проективных пространствах. Мы вводим ряд наиболее важных относящихся к ним понятий, таких, как размерность, регулярные функции, рациональные отображения, неособость, степень проективного многообразия. И что важнее всего, мы приводим большое количество конкретных примеров в виде упражнений в конце каждого параграфа. В них иллюстрируются многие интересные и важные положения и факты, не вошедшие в основной текст. Тщательное выполнение упражнений поможет читателю не только лучше овладеть основными классическими понятиями, но и воспринять некоторые более абстрактные положения современной алгебраической геометрии. В то же время это полезная работа для проверки собственной интуиции. К примерам этой главы мы постоянно будем обращаться на протяжении всей книги.

Последний параграф настоящей главы является своего рода вторым введением в книгу. В нем обсуждается проблема классификации, которая в значительной степени обусловила развитие алгебраической геометрии. В нем обсуждается также степень общности, в которой следовало бы развивать основания алгебраической геометрии, и тем самым обуславливается переход к изучению теории схем.

§ 1. Аффинные многообразия

Пусть k — фиксированное алгебраически замкнутое поле. Определим *n-мерное аффинное пространство над k*, которое будем обозначать через $\mathbf{A}_k^n$, или просто $\mathbf{A}^n$, как множество всех наборов из n элементов поля k. Элемент $P = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in k$, будем называть *точкой* P пространства $\mathbf{A}^n$, а a_i — *координатами* точки P.

Пусть $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от n переменных над k. Элементы из A будем интерпретировать как функции на n-мерном аффинном пространстве со значениями в k, полагая $f(P) = f(a_1, \ldots, a_n)$, где $f \in A$ и $P \in \mathbf{A}^n$. Имеет смысл, следовательно, говорить о множестве *нулей* $Z(f) = \{P \in \mathbf{A}^n \mid f(P) = 0\}$ любого многочлена $f \in A$. Более общим образом можно говорить о *множестве нулей*

$$Z(T) = \{P \in \mathbf{A}^n \mid f(P) = 0 \text{ для всех } f \in T\}$$

произвольного подмножества T многочленов из A. Если $\mathfrak{a}$ — идеал в A, порожденный подмножеством T, то, очевидно, $Z(T) = Z(\mathfrak{a})$. Так как кольцо A нётерово, то любой его идеал $\mathfrak{a}$ имеет конечное число образующих, скажем $f_1, \ldots, f_r$. Поэтому $Z(T)$ может быть задано также как множество общих нулей конечного числа многочленов $f_1, \ldots, f_r$.

Определение. Подмножество Y в $\mathbf{A}^n$ называется *(аффинным) алгебраическим множеством*, если существует такое подмножество $T \subset A$, что $Y = Z(T)$.

Предложение 1.1. *Объединение двух алгебраических множеств является алгебраическим множеством. Пересечение любого семейства алгебраических множеств тоже будет алгебраическим множеством. Пустое множество и все пространство являются алгебраическими множествами.*

Доказательство. Если $Y_1 = Z(T_1)$ и $Y_2 = Z(T_2)$, то $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1T_2)$, где T_1T_2 обозначает множество всех попарных произведений элементов из T_1 на элементы из T_2. В самом деле, если $P \in Y_1 \cup Y_2$, то $P \in Y_1$ или $P \in Y_2$, так что P является нулем каждого многочлена из T_1T_2. Обратно, если $P \in Z(T_1T_2)$ и, скажем, $P \notin Y_1$, то существует такой многочлен $f \in T_1$, что $f(P) \neq 0$. Теперь из того, что $(fg)(P) = 0$ для любого $g \in T_2$, следует $g(P) = 0$, так что $P \in Y_2$.

Пусть $Y_\alpha = Z(T_\alpha)$ — произвольное семейство алгебраических множеств, тогда $\bigcap Y_\alpha = Z(\bigcup T_\alpha)$ и, стало быть, $\bigcap Y_\alpha$ тоже является алгебраическим множеством. Наконец, пустое множество представляется в виде $\varnothing = Z(1)$ и все пространство — в виде $\mathbf{A}^n = Z(0)$.

Определение. Зададим на $\mathbf{A}^n$ *топологию Зарисского*, выбрав в качестве открытых подмножеств дополнения к всевозможным алгебраическим множествам. Это действительно топология, поскольку, согласно предложению 1.1, пересечение двух открытых множеств открыто и объединение любого семейства открытых множеств открыто. Кроме того, пустое множество и все пространство тоже являются открытыми множествами.

2—01390

Пример 1.1.1. Выясним, как устроена топология Зарисского на аффинной прямой $\mathbf{A}^1$. Каждый идеал в кольце $A = k[x]$ является главным, поэтому каждое алгебраическое множество — это множество нулей одного многочлена. Так как поле k алгебраически замкнуто, то всякий ненулевой многочлен может быть записан в виде $f(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, где $c, a_1, \dots, a_n \in k$. В таком случае $Z(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Таким образом, алгебраические множества в $\mathbf{A}^1$ — это всевозможные конечные подмножества (включая пустое множество) и вся прямая (соответствующая нулевому многочлену $f \equiv 0$). Следовательно, открытыми множествами в $\mathbf{A}^1$ являются пустое множество и дополнения к конечным подмножествам. Отметим, в частности, что эта топология не хаусдорфова.

Определение. Непустое подмножество Y топологического пространства X называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде объединения $Y = Y_1 \cup Y_2$ двух собственных подмножеств Y_1 и Y_2, каждое из которых замкнуто в Y. Для пустого множества понятие неприводимости не имеет смысла.

Пример 1.1.2. Аффинная прямая $\mathbf{A}^1$ неприводима, потому что ее собственные замкнутые подмножества конечны, а $\mathbf{A}^1$ как множество бесконечно (поскольку поле k алгебраически замкнуто и, следовательно, бесконечно).

Пример 1.1.3. Всякое непустое открытое подмножество неприводимого пространства неприводимо и плотно.

Пример 1.1.4. Если Y — неприводимое подмножество пространства X, то его замыкание $\bar{Y}$ в X также неприводимо.

Определение. Неприводимое замкнутое подмножество пространства $\mathbf{A}^n$ (с индуцированной топологией) называется *аффинным алгебраическим многообразием* (или просто *аффинным многообразием*). *Квазиаффинным многообразием* называется открытое подмножество аффинного многообразия.

Аффинные и квазиаффинные многообразия — это исходные объекты нашего изучения. Но прежде чем мы сможем двигаться дальше и даже прежде чем мы сможем привести какие-либо интересные примеры, нам надо глубже исследовать связь между подмножествами в $\mathbf{A}^n$ и идеалами кольца A. Для любого подмножества $Y \subset \mathbf{A}^n$ определим его *идеал* $I(Y)$ в A, полагая

$$I(Y) = \{f \in A \mid f(P) = 0 \quad \forall P \in Y\}.$$

Мы имеем теперь два отображения, а именно функцию Z, отображающую подмножества из A в алгебраические множества, и функцию I, отображающую подмножества из $\mathbf{A}^n$ в идеалы кольца A. Их свойства описаны в следующем предложении.

Предложение 1.2. (a) *Если $T_1 \subset T_2$ — подмножества в A, то $Z(T_1) \supset Z(T_2)$.*

(b) *Если $Y_1 \subset Y_2$ — подмножества в $\mathbf{A}^n$, то $I(Y_1) \supset I(Y_2)$.*

(c) *Для любых двух подмножеств Y_1, Y_2 из $\mathbf{A}^n$ имеет место соотношение $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.*

(d) *Для любого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ имеем $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, где $\sqrt{\mathfrak{a}}$ — радикал идеала $\mathfrak{a}$.*

(e) *Для любого подмножества $Y \subset \mathbf{A}^n$ имеем $Z(I(Y)) = \bar{Y}$, где $\bar{Y}$ — замыкание Y в $\mathbf{A}^n$.*

Доказательство. Утверждения (a), (b) и (c) очевидны. Утверждение (d) является непосредственным следствием сформулированной ниже теоремы Гильберта о нулях: напомним, что радикал идеала $\mathfrak{a}$ определяется как

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A \mid f^r \in \mathfrak{a} \quad \text{для некоторого целого} \quad r > 0\}.$$

Для доказательства п. (e) заметим, что Y содержится в замкнутом множестве $Z(I(Y))$, поэтому $\bar{Y} \subset Z(I(Y))$. С другой стороны, пусть W — любое замкнутое множество, содержащее Y. Тогда $W = Z(\mathfrak{a})$ для некоторого идеала $\mathfrak{a}$, так что $Z(\mathfrak{a}) \supset Y$ и, согласно (b), $I(Z(\mathfrak{a})) \subset I(Y)$. Но, конечно, $\mathfrak{a} \subset I(Z(\mathfrak{a}))$, стало быть, согласно (a), $W = Z(\mathfrak{a}) \supset Z(I(Y))$. Таким образом, $Z(I(Y)) = \bar{Y}$.

Теорема 1.3A (теорема Гильберта о нулях). *Пусть k — алгебраически замкнутое поле, $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце $A = k[x_1, \dots, x_n]$ и $f \in A$ — многочлен, обращающийся в нуль во всех точках из $Z(\mathfrak{a})$. Тогда $f^r \in \mathfrak{a}$ для некоторого целого числа $r > 0$.*

Доказательство. См. Ленг [2, стр. 290], Атья и Макдональд [1, стр. 105] или Зарисский и Самюэль [1, т. 2, стр. 195].

Следствие 1.4. *Существует взаимно однозначное и обращающее включение соответствие между алгебраическими множествами в $\mathbf{A}^n$ и радикальными идеалами (т. е. идеалами, совпадающими со своим радикалом) кольца A, заданное отображениями $Y \mapsto I(Y)$ и $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$. Кроме того, алгебраическое множество неприводимо тогда и только тогда, когда его идеал прост.*

Доказательство. Здесь новым для нас является только последнее утверждение. Покажем сначала, что если множество Y неприводимо, то идеал $I(Y)$ прост. Для этого заметим, что если $fg \in I(Y)$, то $Y \subset Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. Следовательно, $Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g))$ представляется в виде объединения двух замкнутых подмножеств из Y. Так как Y неприводимо, то либо $Y = Y \cap Z(f)$ и $Y \subset Z(f)$, либо $Y = Y \cap Z(g)$ и $Y \subset Z(g)$.

Значит, или $f \in I(Y)$ или $g \in I(Y)$, что доказывает простоту идеала $I(Y)$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал, и предположим, что $Z(\mathfrak{p}) = Y_1 \cup Y_2$. Тогда $\mathfrak{p} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$, так что либо $\mathfrak{p} = I(Y_1)$, либо $\mathfrak{p} = I(Y_2)$. Следовательно, $Z(\mathfrak{p}) = Y_1$ или $Z(\mathfrak{p}) = Y_2$, стало быть, $Z(\mathfrak{p})$ неприводимо.

Пример 1.4.1. Пространство $\mathbf{A}^n$ неприводимо, так как соответствующий ему нулевой идеал в A является простым.

Пример 1.4.2. Пусть f — неприводимый многочлен в $A = k[x, y]$, тогда он порождает простой идеал в A, поскольку A — факториальное кольцо [1]). Следовательно, множество его нулей $Y = Z(f)$ неприводимо. Будем называть $Z(f)$ *аффинной кривой*, определенной уравнением $f(x, y) = 0$. Если степень f равна d, то будем говорить, что кривая Y имеет *степень* d.

Пример 1.4.3. Более общим образом, если f — неприводимый многочлен в $A = k[x_1, \dots, x_n]$, то множество его нулей $Y = Z(f)$ является аффинным многообразием, которое называется *поверхностью*, если $n = 3$, и *гиперповерхностью*, если $n > 3$.

Пример 1.4.4. Максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A = k[x_1, \dots, x_n]$ соответствует минимальному неприводимому замкнутому подмножеству, которое не может быть ничем иным, кроме некоторой точки, скажем $P = (a_1, \dots, a_n)$. Это показывает, что каждый максимальный идеал кольца A имеет вид $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, где $a_1, \dots, a_n \in k$.

Пример 1.4.5. Если поле k не является алгебраически замкнутым, то предыдущие результаты перестают быть верными. Например, если $k = \mathbf{R}$ — поле вещественных чисел, то кривая $x^2 + y^2 + 1 = 0$ в $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ не имеет точек, так что утверждение 1.2 (d) перестает быть верным. См. также упр. 1.12.

Определение. Пусть $Y \subset \mathbf{A}^n$ — аффинное алгебраическое множество и $I(Y)$ — соответствующий ему идеал. Факторкольцо $A(Y) = A/I(Y)$ будем называть *аффинным координатным кольцом* множества Y.

Замечание 1.4.6. В случае когда Y — аффинное многообразие, кольцо $A(Y)$ является целостным. Более того, $A(Y)$ является конечно порожденной k-алгеброй. Верно и обратное утверждение: всякая целостная конечно порожденная k-алгебра B является аффинным координатным кольцом некоторого аффинного многообразия. В самом деле, представим B как факторкольцо кольца многочленов $A = k[x_1, \dots, x_n]$ по подходящему идеалу $\mathfrak{a}$ и положим $Y = Z(\mathfrak{a})$.

[1]) Здесь и далее авторский термин «unique factorisation domain» мы переводим как «факториальное кольцо», что стало общепринятым в отечественной литературе, см., например, Кострикин А. И. Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.— *Прим. перев.*

Ниже мы будем изучать топологию аффинных многообразий. Для этого введем важный класс топологических пространств, содержащий, в частности, все аффинные и квазиаффинные многообразия.

Определение. Топологическое пространство X называется *нётеровым*, если для его замкнутых подмножеств выполняется *условие обрыва убывающих цепочек*, т. е. для любой последовательности $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ замкнутых подмножеств в X найдется такое целое число r, что $Y_r = Y_{r+1} = \dots$.

Пример 1.4.7. Пространство $\mathbf{A}^n$ нётерово. Действительно, если $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ — убывающая цепочка замкнутых подмножеств, то $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \dots$ является возрастающей цепочкой идеалов в $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Так как кольцо A нётерово, то эта цепочка идеалов обрывается (т. е. становится стационарной). Но $Y_i = Z(I(Y_i))$ для любого i, следовательно, цепочка подмножеств Y_i также обрывается.

Предложение 1.5. *В нётеровом топологическом пространстве X каждое непустое замкнутое подмножество Y может быть представлено в виде конечного объединения $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ неприводимых замкнутых подмножеств Y_i. Если потребовать, кроме того, чтобы $Y_i \not\supseteq Y_j$ для $i \neq j$, то подмножества Y_i определяются однозначно и называются* неприводимыми компонентами *множества Y.*

Доказательство. Докажем сначала существование такого представления для Y. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество непустых замкнутых подмножеств пространства X, которые *не могут* быть представлены в виде конечного объединения неприводимых замкнутых подмножеств. Предположим, что $\mathfrak{S}$ непусто. Тогда, поскольку пространство X нётерово, $\mathfrak{S}$ должно содержать минимальный элемент, скажем Y. Подмножество Y не может быть неприводимым по определению $\mathfrak{S}$, следовательно, его можно записать в виде $Y = Y' \cup Y''$, где Y' и Y'' — собственные замкнутые подмножества в Y. В силу минимальности Y каждое из Y', Y'' можно представить в виде конечного объединения замкнутых неприводимых подмножеств. Следовательно, такое представление существует и для Y, что приводит к противоречию. Стало быть, каждое замкнутое множество Y из X может быть записано в виде объединения $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ неприводимых подмножеств. Выбросив, если нужно, лишние, мы можем считать, что $Y_i \not\supseteq Y_j$ при $i \neq j$.

Предположим теперь, что существует другое такое представление $Y = Y'_1 \cup \ldots \cup Y'_s$. Тогда $Y'_1 \subset Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$, так что $Y'_1 = \bigcup (Y'_1 \cap Y_i)$. Но так как Y'_1 неприводимо, то $Y'_1 \subset Y_i$ для некоторого i, скажем для $i = 1$. Аналогично $Y_1 \subset Y'_j$ для некоторого j. Тогда $Y'_1 \subset Y'_j$, откуда $j = 1$ и $Y_1 = Y'_1$. Положим теперь $Z = \overline{Y - Y_1}$. Тогда $Z = Y_2 \cup \ldots \cup Y_r$, а также $Z = Y'_2 \cup \ldots \cup Y'_s$. Отсюда индукцией по r мы получаем доказательство единственности разложения Y в объединение Y_i.

Следствие 1.6. *Каждое алгебраическое множество в* $\mathbf{A}^n$ *может быть однозначно представлено в виде объединения не содержащихся друг в друге многообразий.*

Определение. Пусть X — топологическое пространство. Определим его *размерность* (и обозначим ее через $\dim X$) как верхнюю грань множества всех целых чисел n, таких, что существует цепочка $Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$ отличающихся друг от друга неприводимых замкнутых подмножеств в X. *Размерностью* аффинного или квазиаффинного многообразия мы назовем его размерность как топологического пространства.

Пример 1.6.1. Размерность $\mathbf{A}^1$ равна 1. Действительно, неприводимыми замкнутыми подмножествами в $\mathbf{A}^1$ являются только всё $\mathbf{A}^1$ и любая из точек в $\mathbf{A}^1$.

Определение. *Высотой* простого идеала $\mathfrak{p}$ (обозначается через $\operatorname{ht}\mathfrak{p}$) в кольце A называется верхняя грань множества всех целых чисел n, таких, что существует цепочка $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ отличающихся друг от друга простых идеалов. *Размерностью* (*Крулля*) *кольца* A называется верхняя грань множества высот всех его простых идеалов.

Предложение 1.7. *Размерность аффинного алгебраического множества* Y *совпадает с размерностью его аффинного координатного кольца* $A(Y)$.

Доказательство. Замкнутые неприводимые подмножества $Y \subset \mathbf{A}^n$ соответствуют простым идеалам кольца $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, содержащим идеал $I(Y)$. Последние в свою очередь соответствуют простым идеалам аффинного координатного кольца $A(Y)$. Следовательно, $\dim Y$ — это наибольшая из длин цепочек отличных друг от друга простых идеалов в $A(Y)$, которая совпадает с размерностью $A(Y)$ по определению.

Это предложение показывает, как результаты из теории размерности нётеровых колец применяются в алгебраической геометрии.

Теорема 1.8A. *Пусть* k — *некоторое поле и* B — *целостное кольцо, являющееся конечно порожденной* k*-алгеброй. Тогда*

(a) *размерность кольца* B *равна степени трансцендентности поля частных* $K(B)$ *кольца* B *над* k;

(b) *для любого простого идеала* $\mathfrak{p}$ *кольца* B *имеет место соотношение*

$$\operatorname{ht}\mathfrak{p} + \dim B/\mathfrak{p} = \dim B.$$

Доказательство. См. Мацумура [2, гл. 5, § 14] или, в случае алгебраически замкнутого поля k, Атья — Макдональд [1, гл. 11].

Предложение 1.9. *Размерность* $\mathbf{A}^n$ *равна* n.

Доказательство. Согласно 1.7, это равносильно утверждению, что размерность кольца $k[x_1, \ldots, x_n]$ равна n, которое немедленно следует из утверждения (a) теоремы 1.8A.

Предложение 1.10. *Если* Y — *квазиаффинное многообразие, то* $\dim Y = \dim \overline{Y}$.

Доказательство. Если $Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$ — цепочка отличных друг от друга замкнутых неприводимых подмножеств в Y, то $\overline{Z}_0 \subset \overline{Z}_1 \subset \ldots \subset \overline{Z}_n$ будет цепочкой отличных друг от друга замкнутых и, согласно 1.1.4, неприводимых подмножеств в $\overline{Y}$. Отсюда $\dim Y \leqslant \dim \overline{Y}$. В частности, размерность Y конечна, так что можно выбрать такую цепочку наибольшей длины $Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$, где $n = \dim Y$. В таком случае Z_0 должно быть точкой, скажем P, и, согласно 1.1.3, цепочка $P = \overline{Z}_0 \subset \ldots \subset \overline{Z}_n$ также будет иметь наибольшую длину в $\overline{Y}$. Точка P соответствует некоторому максимальному идеалу $\mathfrak{m}$ аффинного координатного кольца $A(\overline{Y})$. Подмножества Z_i соответствуют простым идеалам, содержащимся в $\mathfrak{m}$, следовательно, $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = n$. С другой стороны, так как P — точка аффинного пространства, то $A(Y)/\mathfrak{m} \simeq k$ (см. 1.4.4). Следовательно, согласно п. (b) из 1.8A, мы получаем, что $n = \dim A(\overline{Y}) = \dim \overline{Y}$. Таким образом, $\dim Y = \dim \overline{Y}$.

Теорема 1.11A (теорема Крулля о главных идеалах). *Пусть* A — *нётерово кольцо и* $f \in A$ — *элемент, не являющийся ни обратимым элементом, ни делителем нуля. Тогда высота каждого минимального простого идеала* $\mathfrak{p}$, *содержащего* f, *равна* 1.

Доказательство. См. Атья — Макдональд [1, стр. 150].

Предложение 1.12A. *Нётерово целостное кольцо* A *тогда и только тогда факториально, когда каждый его простой идеал высоты* 1 *является главным.*

Доказательство. См. Мацумура [2, стр. 141] или Бурбаки [1, гл. 7, § 3].

Предложение 1.13. *Многообразие Y в $\mathbf{A}^n$ тогда и только тогда имеет размерность $n-1$, когда оно является множеством нулей $Z(f)$ некоторого непостоянного неприводимого многочлена f из $A = k[x_1, \ldots, x_n]$.*

Доказательство. Как мы уже знаем, если f — неприводимый многочлен, то $Z(f)$ является многообразием, соответствующим простому идеалу $\mathfrak{p} = (f)$. Согласно 1.11A, высота идеала $\mathfrak{p}$ равна 1, так что по 1.8A $Z(f)$ имеет размерность $n-1$. Обратно, многообразие размерности $n-1$ соответствует простому идеалу $\mathfrak{p}$ высоты 1. Так как кольцо многочленов является факториальным кольцом, то, согласно 1.12A, идеал $\mathfrak{p}$ — главный идеал, порождаемый некоторым неприводимым многочленом f. Следовательно, $Y = Z(f)$.

Замечание 1.13.1. Простой идеал высоты 2 в кольце многочленов не обязательно порождается двумя элементами (упр. 1.11).

Упражнения

1.1. (a) Пусть Y — плоская кривая $y = x^2$ (т. е. Y есть множество нулей многочлена $f = y - x^2$). Показать, что кольцо $A(Y)$ изоморфно кольцу многочленов от одной переменной над k.

(b) Пусть Z — плоская кривая $xy = 1$. Показать, что кольцо $A(Z)$ не изоморфно кольцу многочленов от одной переменной над k.

*(c) Пусть f — произвольный неприводимый квадратичный многочлен из $k[x, y]$ и W — коника, определяемая f. Показать, что кольцо $A(W)$ изоморфно кольцу $A(Y)$ или кольцу $A(Z)$. В каких случаях какому из них?

1.2. *Скрученная кубическая кривая*[1]. Пусть $Y \subset \mathbf{A}^3$ — множество $\{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}$. Показать, что оно является аффинным многообразием размерности 1. Найти образующие идеала $I(Y)$. Показать, что $A(Y)$ изоморфно кольцу многочленов от одной переменной над k. Задание $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ называется *параметрическим представлением* (или *параметризацией*) кривой Y.

1.3. Пусть Y — алгебраическое множество в $\mathbf{A}^3$, определенное двумя многочленами $x^2 - yz$ и $xz - x$. Показать, что Y является объединением трех неприводимых компонент. Описать эти компоненты и найти их простые идеалы.

1.4. Показать, что при естественном отождествлении $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ топология Зарисского на $\mathbf{A}^2$ не совпадает с произведением топологий Зарисского множителей $\mathbf{A}^1$.

1.5. Показать, что k-алгебра B тогда и только тогда изоморфна аффинному координатному кольцу некоторого алгебраического множества в $\mathbf{A}^n$ для некоторого n, когда B конечно порождена над k и не содержит нильпотентных элементов.

[1] Термин «twisted cubic curve» будет переводиться иногда как пространственная кубическая кривая — это словосочетание более распространено в отечественной литературе.— *Прим. перев.*

1.6. Показать, что любое непустое открытое подмножество неприводимого топологического пространства всюду плотно и неприводимо. Если Y — подмножество топологического пространства X, неприводимое в индуцированной топологии, то его замыкание $\overline{Y}$ тоже неприводимо.

1.7. (a) Показать, что для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

(i) X нётерово;

(ii) каждое непустое семейство замкнутых подмножеств обладает минимальным элементом;

(iii) X удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек открытых подмножеств;

(iv) каждое непустое семейство открытых подмножеств обладает максимальным элементом.

(b) Нётерово топологическое пространство *квазикомпактно*, т. е. из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное.

(c) Любое подмножество нётерова топологического пространства является нётеровым в индуцированной топологии.

(d) Нётерово топологическое пространство может быть хаусдорфовым только в случае, когда оно состоит из конечного множества точек с дискретной топологией.

1.8. Пусть Y — аффинное многообразие размерности r в $\mathbf{A}^n$ и H — гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$, не содержащая Y. Показать, что размерность каждой неприводимой компоненты пересечения $Y \cap H$ равна $r-1$. (Обобщение этого факта см. в 7.1.)

1.9. Пусть $\mathfrak{a} \subset A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал, который может быть порожден r элементами. Показать, что тогда каждая неприводимая компонента множества $Z(\mathfrak{a})$ имеет размерность $\geqslant n - r$.

1.10. Показать, что

(a) если Y — произвольное подмножество топологического пространства X, то $\dim Y \leqslant \dim X$;

(b) если топологическое пространство X покрывается конечным семейством открытых подмножеств $\{U_i\}$, то $\dim X = \operatorname{Sup} \dim U_i$;

(c) если Y — замкнутое подмножество неприводимого конечномерного топологического пространства X и $\dim Y = \dim X$, то $Y = X$.

Привести примеры

(d) топологического пространства X и плотного открытого подмножества $U \subset X$, таких, что $\dim U < \dim X$;

(e) нётерова топологического пространства бесконечной размерности.

* 1.11. Пусть $Y \subset \mathbf{A}^3$ — кривая, заданная параметрически, $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$. Показать, что $I(Y)$ — простой идеал высоты 2 в кольце $k[x, y, z]$, который не может порождаться двумя элементами. В таком случае мы говорим, что Y *не является локально полным пересечением*, ср. упр. 2.17.

1.12. Привести пример неприводимого многочлена $f \in \mathbf{R}[x, y]$, множество нулей $Z(f)$ которого в $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ приводимо (ср. 1.4.2).

§ 2. Проективные многообразия

Проективные многообразия определяются аналогично аффинным с той лишь разницей, что все рассмотрения проводятся в проективном пространстве.

Пусть k — основное алгебраически замкнутое поле. Определим *n-мерное проективное пространство* над k, обозначаемое через $\mathbf{P}^n_k$, или просто через $\mathbf{P}^n$, как множество классов эквивалентных наборов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ из $n+1$ элементов поля k, не равных одновременно нулю, относительно эквивалентности $(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, т. е. относительно умножения всех a_i на любой отличный от нуля элемент $\lambda \in k$. Иначе говоря, $\mathbf{P}^n$ — это фактормножество множества $\mathbf{A}^{n+1} - \{(0, \ldots, 0)\}$ по отношению эквивалентности, отождествляющему точки, лежащие на одной и той же прямой, проходящей через начало координат.

Элементы из $\mathbf{P}^n$ называются *точками*. Любой набор элементов $(a_0, \ldots, a_n)$ из класса эквивалентности, определяющего некоторую точку $P \in \mathbf{P}^n$, называется *множеством однородных координат* точки P.

Пусть S — кольцо многочленов $k[x_0, \ldots, x_n]$. Мы будем рассматривать его как градуированное кольцо; для этого напомним кратко определение градуированного кольца.

Кольцо S называется *градуированным*, если оно обладает разложением в прямую сумму $S = \bigoplus_{d \geqslant 0} S_d$ абелевых групп S_d, таких, что $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$ для любых $d, e \geqslant 0$. Элементы из S_d называются *однородными степени* d. Таким образом, любой элемент из S можно однозначно записать в виде (конечной) суммы однородных элементов. Идеал $\mathfrak{a} \subset S$ называется *однородным*, если он представляется в виде $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geqslant 0} (\mathfrak{a} \cap S_d)$. Нам понадобится несколько основных фактов об однородных идеалах (см., например, Мацумура [2, § 10] или Зарисский — Самюэль [1, т. II, гл. VII, § 2]. Идеал $\mathfrak{a}$ однороден тогда и только тогда, когда он может быть порожден однородными элементами. Сумма, произведение и пересечение однородных идеалов, а также радикал однородного идеала однородны. Для установления простоты однородного идеала $\mathfrak{a}$ достаточно проверить, что для любых двух *однородных* элементов f и g из условия $fg \in \mathfrak{a}$ следует, что либо $f \in \mathfrak{a}$, либо $g \in \mathfrak{a}$.

Превратим кольцо многочленов $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ в градуированное кольцо, взяв за S_d множество всех линейных комбинаций одночленов полной степени d от переменных $x_0, \ldots, x_n$. Многочлены из S мы уже не можем рассматривать как функции на $\mathbf{P}^n$ ввиду неоднозначности координатных представлений точек в $\mathbf{P}^n$. Однако если f — однородный многочлен степени d, то $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n)$, так что свойство f обращаться или не обращаться в нуль зависит только от класса эквивалентности $(a_0, \ldots, a_n)$. Тем самым f определяет функцию из $\mathbf{P}^n$ в $\{0, 1\}$: $f(P) = 0$, если $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$, и $f(P) = 1$, если $f(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$, где $(a_0, \ldots, a_n)$ — однородные координаты точки P.

Таким образом, имеет смысл говорить о множестве $Z(f) = \{P \in \mathbf{P}^n \mid f(P) = 0\}$ *нулей* в $\mathbf{P}^n$ однородного многочлена $f \in S$. Для любого множества T однородных элементов из S также можно определить его *множество нулей* $Z(T)$, полагая

$$Z(T) = \{P \in \mathbf{P}^n \mid f(P) = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in T\}.$$

Если $\mathfrak{a}$ — однородный идеал в S, то определим его множество нулей $Z(\mathfrak{a})$, полагая $Z(\mathfrak{a}) = Z(T)$, где T — множество всех однородных элементов из $\mathfrak{a}$. Поскольку кольцо S нётерово, то любое множество T однородных элементов содержит такое конечное подмножество $f_1, \ldots, f_r$, что $Z(T) = Z(f_1, \ldots, f_r)$.

Определение. Подмножество Y из $\mathbf{P}^n$ называется (*проективным*) *алгебраическим множеством*, если существует множество T однородных элементов из S, такое, что $Y = Z(T)$.

Предложение 2.1. *Объединение двух алгебраических множеств является алгебраическим множеством. Пересечение любого семейства алгебраических множеств тоже будет алгебраическим множеством. Пустое множество и все пространство являются алгебраическими множествами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно аналогично доказательству предложения 1.1, и мы оставляем его читателю.

Определение. Зададим на $\mathbf{P}^n$ *топологию Зарисского*, взяв в качестве открытых множеств дополнения к алгебраическим множествам.

Тем самым $\mathbf{P}$ становится топологическим пространством, и к нему применимы такие определенные в § 1 понятия, как неприводимые подмножества и размерность подмножеств.

Определение. *Проективным алгебраическим многообразием* (или просто *проективным многообразием*) называется неприводимое алгебраическое множество в $\mathbf{P}^n$ с индуцированной топологией. Открытое подмножество проективного многообразия называется *квазипроективным* многообразием. *Размерность* проективного или квазипроективного многообразия определяется как размерность соответствующего топологического пространства.

Для любого подмножества Y в $\mathbf{P}^n$ определим его *однородный идеал* в S, обозначаемый через $I(Y)$, как идеал, порожденный множеством однородных элементов $f \in S$, таких, что $f(P) = 0$ для всех $P \in Y$. *Однородное координатное кольцо* $S(Y)$ алгебраического множества Y определим как факторкольцо $S(Y) = S/I(Y)$. За информацией о различных свойствах алгебраических множеств в проективном пространстве и их однородных идеалов мы отсылаем читателя к упражнениям 2.1—2.7 ниже.

Наша дальнейшая цель — показать, что n-мерное проективное пространство обладает открытым покрытием, состоящим из n-мерных аффинных пространств, и, следовательно, что всякое проективное (соответственно квазипроективное) многообразие обладает открытым покрытием, состоящим из аффинных (соответственно квазиаффинных) многообразий. Введем некоторые новые понятия и обозначения.

Пусть $f \in S$ — линейный однородный многочлен. Тогда множество его нулей будем называть *гиперплоскостью в* $\mathbf{P}^n$. В частности, обозначим через H_i множество нулей многочлена x_i, $i = 0, \ldots, n$. Это координатные гиперплоскости. Пусть U_i обозначает дополнение к H_i, т. е. $U_i = \mathbf{P}^n - H_i$. Тогда $\mathbf{P}^n$, очевидно, покрывается открытыми множествами U_i, поскольку для любой точки $P = (a_0, \ldots, a_n)$ по крайней мере одна из координат a_i отлична от 0 и, следовательно, $P \in U_i$. Определим отображение φ_i: $U_i \to \mathbf{A}^n$, полагая $\varphi_i(P) = Q$, где $P = (a_0, \ldots, a_n) \in U_i$, а Q — точка $\mathbf{A}^n$ с аффинными координатами $(a_0/a_i, \ldots, a_n/a_i)$, где пропущено a_i/a_i. Отметим, что отображение φ_i определено корректно, так как отношения a_j/a_i не зависят от выбора однородных координат точки P.

Продолжение 2.2. *Отображение φ_i является гомеоморфизмом пространства U_i с индуцированной топологией на $\mathbf{A}^n$ с топологией Зарисского.*

Доказательство. Отображение φ_i, очевидно, биективно, так что достаточно показать, что замкнутые множества в U_i соответствуют замкнутым множествам в $\mathbf{A}^n$. Можно считать, что $i = 0$, и положить $U_0 = U$ и $\varphi_0 = \varphi$: $U \to \mathbf{A}^n$.

Пусть $A = k[y_1, \ldots, y_n]$. Определим отображение α из множества S^h однородных элементов кольца S в A и отображение β из A в S^h. Для этого положим $\alpha(f) = f(1, y_1, \ldots, y_n)$ для любого $f \in S^h$. С другой стороны, если $g \in A$ и $\deg g = e$, то $x_0^e g(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$ — однородный многочлен степени e от x_i, и мы обозначим его через $\beta(g)$.

Пусть теперь $Y \subset U$ — замкнутое подмножество. Обозначим через $\overline{Y}$ его замыкание в $\mathbf{P}^n$. Тогда $\overline{Y}$ — алгебраическое множество, т. е. $\overline{Y} = Z(T)$ для некоторого подмножества $T \subset S^h$. Пусть $T' = \alpha(T)$. Тогда непосредственная проверка показывает, что $\varphi(Y) = Z(T')$. Обратно, если W — замкнутое подмножество в $\mathbf{A}^n$, то $W = Z(T')$ для некоторого подмножества T' из A, и легко проверить, что $\varphi^{-1}(W) = Z(\beta(T')) \cap U$. Таким образом, оба отображения φ и φ^{-1} замкнуты и, значит, φ — гомеоморфизм.

Следствие 2.3. *Пусть Y — проективное (соответственно квазипроективное) многообразие. Тогда Y покрывается открытыми множествами $Y \cap U_i$, $i = 0, \ldots, n$, гомеоморфными аффинным (соответственно квазиаффинным) многообразиям, причем гомеоморфизм осуществляется отображением φ_i.*

Упражнения

2.1. Доказать «однородную теорему о нулях», которая утверждает, что если $\mathfrak{a} \subset S$ — однородный идеал и $f \in S$ — однородный многочлен с $\deg f > 0$, такой, что $f(P) = 0$ для всех $P \in Z(\mathfrak{a})$ из $\mathbf{P}^n$, то $f^q \in \mathfrak{a}$ для некоторого целого $q > 0$. [*Указание.* Проинтерпретировать задачу в терминах аффинного $(n+1)$-мерного пространства с аффинным координатным кольцом S и воспользоваться обычной теоремой о нулях 1.3А.]

2.2. Показать, что для однородного идеала $\mathfrak{a} \subset S$ следующие условия эквивалентны:

(i) $Z(\mathfrak{a}) = \varnothing$ (пустое множество);

(ii) $\sqrt{\mathfrak{a}} = S$ или $\sqrt{\mathfrak{a}} = S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$;

(iii) $\mathfrak{a} \supset S_d$ для некоторого $d > 0$.

2.3. Показать, что

(a) если $T_1 \subset T_2$ — подмножества в S^h, то $Z(T_1) \supset Z(T_2)$;

(b) если $Y_1 \subset Y_2$ — подмножества в $\mathbf{P}^n$, то $I(Y_1) \supset I(Y_2)$;

(c) для любых двух подмножеств Y_1, Y_2 из $\mathbf{P}^n$ имеет место соотношение $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$;

(d) если $\mathfrak{a} \subset S$ — однородный идеал, такой, что $Z(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$, то $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$;

(e) для любого подмножества $Y \subset \mathbf{P}^n$ справедливо равенство $Z(I(Y)) = \overline{Y}$.

2.4. (a) Показать, что существует взаимно однозначное обращающее включение соответствие между алгебраическими множествами в $\mathbf{P}^n$ и радикальными идеалами в S, отличными от S_+, задаваемое формулами $Y \mapsto I(Y)$ и $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$. *Замечание.* Так как идеал S_+ не участвует в этом соответствии, то он иногда называется *несущественным* максимальным идеалом кольца S.

(b) Алгебраическое множество $Y \subset \mathbf{P}^n$ неприводимо тогда и только тогда, когда $I(Y)$ — простой идеал.

(c) Показать, что само $\mathbf{P}^n$ неприводимо.

2.5. Показать, что

(a) $\mathbf{P}^n$ как топологическое пространство нётерово;

(b) всякое алгебраическое множество $Y \subset \mathbf{P}^n$ можно однозначно представить в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств, не содержащих друг друга. Они называются *неприводимыми компонентами* этого алгебраического множества.

2.6. Пусть Y — проективное многообразие с однородным координатным кольцом $S(Y)$. Показать, что $\dim S(Y) = \dim Y + 1$. [*Указание.* Пусть φ_i: $U_i \to \mathbf{A}^n$ — гомеоморфизм из п. 2.2, $Y_i = \varphi_i(Y \cap U_i)$ — аффинное многообразие и $A(Y_i)$ — его аффинное координатное кольцо. Показать, что $A(Y_i)$ можно отождествить с подкольцом элементов степени 0 локализованного кольца $S(Y)_{x_i}$. Показать далее, что $S(Y)_{x_i} \simeq A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}]$. Воспользоваться 1.7, 1.8А и упр. 1.10 и сравнить степени трансцендентности полей частных колец $A(Y_i)$, $S(Y)_{x_i}$ и $S(Y)$. Показать также, что $\dim Y = \dim Y_i$, если Y_i непусто.]

2.7. Показать, что

(a) $\dim \mathbf{P}^n = n$;

(b) если $Y \subset \mathbf{P}^n$ — квазипроективное многообразие, то $\dim Y = \dim \overline{Y}$. [*Указание.* Воспользоваться упр. 2.6 и предложением 1.10.]

2.8. Показать, что проективное многообразие $Y \subset \mathbf{P}^n$ тогда и только тогда имеет размерность $n - 1$, когда оно является множеством нулей одного неприводимого однородного многочлена f положительной степени. В этом случае Y называется *гиперповерхностью в* $\mathbf{P}^n$.

2.9. *Проективное замыкание аффинного многообразия.* Пусть $Y \subset \mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие. Отождествим $\mathbf{A}^n$ с открытым множеством $U_0 \subset \mathbf{P}^n$ с помощью гомеоморфизма φ_0. Тогда замыкание $\overline{Y}$ многообразия Y в $\mathbf{P}^n$ называется его *проективным замыканием.*

(a) Используя обозначения из доказательства 2.2, показать, что $I(\overline{Y})$ — идеал, порождаемый $\beta(I(Y))$.

(b) Пусть $Y \subset \mathbf{A}^3$ — скрученная кубика (упр. 1.2). Ее проективное замыкание $\overline{Y} \subset \mathbf{P}^3$ называется *скрученной кубической кривой* в $\mathbf{P}^3$. Найти образующие для $I(Y)$ и $I(\overline{Y})$. Используя этот пример, показать, что если $f_1, \ldots, f_r$ порождают идеал $I(Y)$, то $\beta(f_1), \beta(f_2), \ldots, \beta(f_r)$ не обязательно порождают $I(\overline{Y})$.

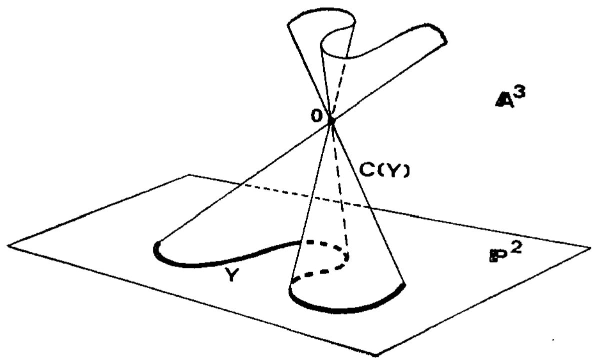


Рис. 1. Конус над кривой в $\mathbf{P}^2$.

2.10. *Конус над проективным многообразием* (рис. 1). Пусть $Y \subset \mathbf{P}^n$ — непустое алгебраическое множество и $\theta\colon \mathbf{A}^{n+1} - \{(0, \ldots, 0)\} \to \mathbf{P}^n$ — отображение, сопоставляющее точке с аффинными координатами $(a_0, \ldots, a_n)$ точку с однородными координатами $(a_0, \ldots, a_n)$. Определим *аффинный конус* $C(Y)$ над Y, полагая

$$C(Y) = \theta^{-1}(Y) \cup \{(0, \ldots, 0)\}.$$

Показать, что

(a) $C(Y)$ является алгебраическим множеством в $\mathbf{A}^{n+1}$, идеал которого совпадает с $I(Y)$, рассматриваемым как обычный идеал в $k[x_0, \ldots, x_n]$;

(b) $C(Y)$ неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо Y;

(c) $\dim C(Y) = \dim Y + 1$.

Иногда мы будем рассматривать замыкание $C(Y)$ конуса $\overline{C(Y)}$ в $\mathbf{P}^{n+1}$ и называть его *проективным конусом* над Y.

2.11. *Линейные многообразия в* $\mathbf{P}^n$. Гиперповерхность, определяемая линейным многочленом, называется *гиперплоскостью*.

(a) Показать, что для многообразия Y в $\mathbf{P}^n$ следующие два условия эквивалентны:

(i) $I(Y)$ может быть порожден линейными многочленами;

(ii) Y может быть задано как пересечение гиперплоскостей.

В этом случае мы будем называть Y *линейным многообразием* в $\mathbf{P}^n$.

(b) Пусть Y — линейное многообразие размерности r в $\mathbf{P}^n$. Показать, что $I(Y)$ порождается, самое меньшее, $n - r$ линейными многочленами.

(c) Пусть Y, Z — линейные многообразия в $\mathbf{P}^n$, $\dim Y = r$, $\dim Z = s$. Показать, что если $r + s - n \geqslant 0$, то $Y \cap Z \neq \varnothing$. Более того, если $Y \cap Z \neq \varnothing$, то $Y \cap Z$ — линейное многообразие размерности $\geqslant r + s - n$. (Рассмотреть $\mathbf{A}^{n+1}$ как векторное пространство над k и работать с его линейными подпространствами.)

***2.12.** *d-кратное вложение*[1]. Пусть $M_0, M_1, \ldots, M_N$ — все одночлены степени d от $n + 1$ переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $N = \binom{n+d}{n} - 1$. Определим отображение $\rho_d\colon \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$, сопоставляя точке $P = (a_0, \ldots, a_n)$ точку $\rho_d(P) = (M_0(a), \ldots, M_N(a))$, полученную подстановкой a_i в одночлены M_j. Это отображение называется *d-кратным вложением* $\mathbf{P}^n$ в $\mathbf{P}^N$. Например, пусть $n = 1$, $d = 2$. Тогда $N = 2$ и образом при 2-кратном вложении $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^2$ является коника.

(a) Пусть $\theta\colon k[y_0, \ldots, y_N] \to k[x_0, \ldots, x_n]$ — гомоморфизм, определенный сопоставлением y_i одночлена M_i, $i = 0, \ldots, N$, и пусть $\mathfrak{a}$ — его ядро. Показать, что тогда $\mathfrak{a}$ является однородным и простым идеалом, так что $Z(\mathfrak{a})$ — проективное многообразие в $\mathbf{P}^N$.

(b) Показать, что образом отображения ρ_d является в точности $Z(\mathfrak{a})$. (Одно из включений очевидно. Другое потребует некоторых вычислений.)

(c) Показать теперь, что ρ_d является гомеоморфизмом пространства $\mathbf{P}^n$ на проективное многообразие $Z(\mathfrak{a})$.

(d) Показать, что скрученная кубическая кривая[2] в $\mathbf{P}^3$ (упр. 2.9) является образом 3-кратного вложения $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^3$ при подходящем выборе систем координат.

2.13. Пусть Y — образ 2-кратного вложения $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}^5$. Это есть так называемая *поверхность Веронезе*. Показать, что если $Z \subset Y$ — замкнутая кривая (*кривая* — это многообразие размерности 1), то существует гиперповерхность $V \subset \mathbf{P}^5$, такая, что $V \cap Y = Z$.

2.14. *Вложение Сегре.* Пусть $\psi\colon \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \to \mathbf{P}^N$ — отображение, определяемое сопоставлением упорядоченной паре $(a_0, \ldots, a_r) \times (b_0, \ldots, b_s)$ точки с однородными координатами $(\ldots, a_ib_j, \ldots)$, расположенными в лексикографическом порядке, где $N = rs + r + s$. Отметим, что отображение ψ корректно определено и инъективно. Оно называется *вложением Сегре*. Показать, что образ ψ является *подмногообразием* в $\mathbf{P}^N$. [*Указание.* Обозначив однородные координаты в $\mathbf{P}^N$ через $\{z_{ij} \mid i = 0, \ldots, r,\ j = 0, \ldots, s\}$, рассмотреть ядро $\mathfrak{a}$ гомоморфизма $k[\{z_{ij}\}] \to k[x_0, \ldots, x_r, y_0, \ldots, y_s]$, заданного соответствием $z_{ij} \mapsto x_iy_j$, и показать тогда, что $\operatorname{Im}\psi = Z(\mathfrak{a})$.]

2.15. *Квадратичная поверхность* (*квадрика*) *в* $\mathbf{P}^3$ (рис. 2). Пусть Q — поверхность (*поверхность* — это многообразие размерности 2) в $\mathbf{P}^3$, определенная уравнением $xy - zw = 0$.

(a) Показать, что Q совпадает с образом вложения Сегре $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^3$ при подходящем выборе систем координат.

(b) Показать, что Q содержит два семейства прямых (*прямая* — это линейное многообразие размерности 1) $\{L_t\}$, $\{M_t\}$, каждое из которых параметризовано параметром $t \in \mathbf{P}^1$, обладающих следующими свойствами: если $L_t \neq L_u$, то $L_t \cap L_u = \varnothing$, если $M_t \neq M_u$, то $M_t \cap M_u = \varnothing$, и $L_t \cap M_u =$ {одна точка} для любых t, u.

(c) Показать, что кроме этих прямых Q содержит также и другие кривые. Вывести отсюда, что топология Зарисского на Q не переходит в произведение топологий на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ при отображении ψ (предполагается, что каждый множитель $\mathbf{P}^1$ снабжен топологией Зарисского).

[1] Часто в литературе это вложение называют *отображением Веронезе* (ср. Шафаревич И. Р. [1, стр. 64]).— *Прим. перев.*

[2] Иногда в тексте она будет называться также *пространственной кубической кривой*, см. примечание к упр. 1.2.— *Прим. перев.*

2.16. (a) Пересечение двух многообразий может не быть многообразием. Например, пусть Q_1 и Q_2 — квадрики в $\mathbf{P}^3$, заданные уравнениями $x^2 - yw = 0$ и $xy - zw = 0$ соответственно. Показать, что $Q_1 \cap Q_2$ является объединением скрученной кубической кривой и прямой.

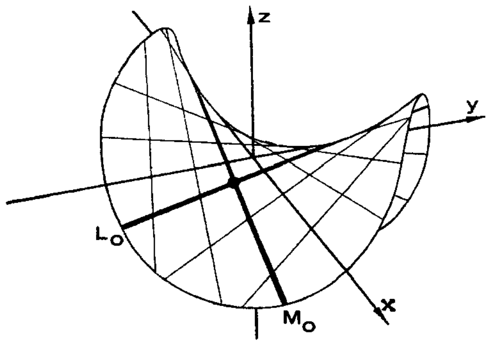


Рис. 2. Квадрика в $\mathbf{P}^3$.

(b) Даже если пересечение двух многообразий является многообразием, идеал пересечения может не совпадать с суммой соответствующих идеалов. Например, пусть C — коника на $\mathbf{P}^2$, заданная уравнением $x^2 - yz = 0$, и L — прямая с уравнением $y = 0$. Показать, что $C \cap L$ состоит из одной точки P, но $I(C) + I(L) \neq I(P)$.

2.17. *Полные пересечения.* Многообразие Y размерности r в $\mathbf{P}^n$ называется (*строго*) *полным пересечением*, если идеал $I(Y)$ может быть порожден $n - r$ элементами; Y называется *теоретико-множественным полным пересечением*, если его можно представить как пересечение $n - r$ гиперповерхностей.

(a) Пусть $Y = Z(\mathfrak{a})$ — многообразие в $\mathbf{P}^n$. Предположим, что идеал $\mathfrak{a}$ может быть порожден q элементами. Показать, что тогда $\dim Y \geqslant n - q$.

(b) Показать, что строго полное пересечение является и теоретико-множественным полным пересечением.

*(c) Обратное к (b) утверждение неверно. Например, пусть Y — скрученная кубическая кривая в $\mathbf{P}^3$ (упр. 2.9). Показать, что ее идеал $I(Y)$ не может быть порожден двумя элементами. С другой стороны, найти гиперповерхности H_1, H_2 степеней 2, 3 соответственно, такие, что $Y = H_1 \cap H_2$.

**(d) Остается открытой следующая проблема: всякая ли замкнутая неприводимая кривая в $\mathbf{P}^3$ является теоретико-множественным полным пересечением двух поверхностей. Комментарии см. Хартсхорн [1] и Хартсхорн [5, III, § 5].

§ 3. Морфизмы

В предыдущих параграфах мы дали определения аффинных и проективных многообразий, но не обсуждали вопрос о том, какие возможны между ними отображения. Пока мы даже не сказали, когда два многообразия считаются изоморфными. В этом параграфе мы введем понятие регулярных функций на многообразии и определим морфизмы многообразий. В результате будет определена категория (категория многообразий), с которой мы и будем в ближайшее время работать.

Пусть Y — квазиаффинное многообразие в $\mathbf{A}^n$. Будем рассматривать функции из Y в k.

Определение. Функция $f\colon Y \to k$ называется *регулярной в точке* $P \in Y$, если существует такая открытая окрестность $U \subset Y$ точки P и такие многочлены $g, h \in A = k[x_1, \ldots, x_n]$, что h не имеет нулей в U и $f = g/h$ на U. (Мы, конечно, интерпретируем многочлены как функции на $\mathbf{A}^n$, а следовательно, и на Y.) Функция f называется *регулярной на* Y, если она регулярна в каждой точке Y.

Лемма 3.1. *Регулярная функция непрерывна, если отождествить k с $\mathbf{A}_k^1$ с топологией Зарисского.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что прообраз замкнутого множества замкнут. Замкнутое множество в $\mathbf{A}_k^1$ — это конечное множество точек, поэтому достаточно показать, что $f^{-1}(a) = \{P \in Y \mid f(P) = a\}$ замкнуто для любого $a \in k$. Это можно проверить локально, учитывая, что подмножество Z в Y замкнуто тогда и только тогда, когда для любого покрытия Y открытыми множествами U пересечение $Z \cap U$ замкнуто в U для каждого U. Итак, пусть U — открытое множество, на котором f можно представить как g/h, где $g, h \in A$ и h не имеет нулей в U. Тогда $f^{-1}(a) \cap U = \{P \in U \mid g(P)/h(P) = a\}$. Но равенство $g(P)/h(P) = a$ равносильно равенству $(g - ah)(P) = 0$, так что $f^{-1}(a) \cap U = Z(g - ah) \cap U$ замкнуто в U. Следовательно, $f^{-1}(a)$ замкнуто в Y.

Теперь рассмотрим квазипроективное многообразие $Y \subset \mathbf{P}^n$.

Определение. Функция $f\colon Y \to k$ называется *регулярной в точке* $P \in Y$, если существует такая открытая окрестность $U \subset Y$ точки P и такие однородные многочлены $g, h \in k[x_0, \ldots, x_n]$ одной и той же степени, что h не имеет нулей в U и $f = g/h$ на U. (Отметим, что в этом случае хотя g и h не являются функциями на $\mathbf{P}^n$, их отношение корректно определено, если $h \neq 0$, поскольку они имеют одинаковую степень однородности.) Функция f *регулярна на* Y, если она регулярна в каждой точке этого многообразия.

Замечание 3.1.1. Так же как и в аффинном случае, регулярная функция на Y обязательно непрерывна (доказательство предоставляется читателю). Важным следствием этого является тот факт, что если f и g — регулярные функции на многообразии X и $f = g$ на некотором непустом открытом подмножестве $U \subset X$, то $f = g$ всюду. В самом деле, множество точек, где $f - g = 0$, замкнуто и плотно в X, следовательно, оно совпадает со всем X.

Определим теперь категорию многообразий.

Определение. Пусть k — фиксированное алгебраически замкнутое поле. *Многообразием над* k (или просто многообразием) мы будем называть любое аффинное, квазиаффинное, проективное или квазипроективное многообразие (они были определены выше). *Морфизмом* $\varphi\colon X \to Y$ многообразий X и Y будем называть такое непрерывное отображение из X в Y, что для каждого открытого множества $V \subset Y$ и каждой регулярной функции $f\colon V \to k$ функция $f \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(V) \to k$ регулярна.

Ясно, что композиция двух морфизмов является морфизмом, так что многообразия образуют категорию. В частности, определено понятие изоморфизма: морфизм $\varphi\colon X \to Y$ называется *изоморфизмом* многообразий X и Y, если существует обратный морфизм $\psi\colon Y \to X$, такой, что $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_X$ и $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_Y$. Отметим, что изоморфизм обязательно является биективным и непрерывным в обе стороны морфизмом, однако биективный и бинепрерывный морфизм может не быть изоморфизмом (упр. 3.2).

Введем некоторые кольца функций, ассоциированные с произвольным многообразием.

Определение. Пусть Y — произвольное многообразие. Обозначим через $\mathcal{O}(Y)$ кольцо всех регулярных функций на Y. Для каждой точки $P \in Y$ определим ее *локальное кольцо* $\mathcal{O}_{P,Y}$ (или просто $\mathcal{O}_P$) как кольцо ростков регулярных функций на Y в окрестности P. Другими словами, элемент кольца $\mathcal{O}_P$ — это пара $\langle U, f\rangle$, где U — открытое подмножество в Y, содержащее P, а f — регулярная функция на U, причем пары $\langle U, f\rangle$ и $\langle V, g\rangle$ отождествляются, если $f = g$ на $U \cap V$. (Используя 3.1.1, проверить, что это действительно есть отношение эквивалентности.)

Отметим, что кольцо $\mathcal{O}_P$ на самом деле является локальным кольцом: его единственный максимальный идеал $\mathfrak{m}$ состоит из всех ростков регулярных функций, обращающихся в нуль в точке P. Действительно, если $f(P) \neq 0$. то $1/f$ регулярна в некоторой окрестности точки P. Поле вычетов $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}$ изоморфно полю k.

Определение. Для каждого многообразия Y определим его *поле функций* $K(Y)$: элемент из $K(Y)$ — это класс эквивалентности пар $\langle U, f\rangle$, где U — непустое открытое подмножество в Y, f — регулярная функция на U и две пары $\langle U, f\rangle$ и $\langle V, g\rangle$ отождествляются, если $f = g$ на $U \cap V$. Элементы из $K(Y)$ называются *рациональными функциями* на Y.

Отметим, что $K(Y)$ на самом деле является полем. Действительно, так как Y неприводимо, то любые два непустых открытых подмножества в Y имеют непустое пересечение. Следовательно, мы можем определить сложение и умножение в $K(Y)$, превратив его в кольцо. Далее, если $\langle U, f\rangle \in K(Y)$ и $f \neq 0$, то, ограничивая f на открытое множество $V = U - U \cap Z(f)$, на котором f не имеет нулей, мы видим, что $1/f$ регулярна на V, т. е. пара $\langle V, 1/f\rangle$ является обратным элементом к $\langle U, f\rangle$.

Итак, для любого многообразия Y определены кольцо его глобальных функций $\mathcal{O}(Y)$, локальные кольца $\mathcal{O}_P$ для всех точек $P \in Y$ и поле функций $K(Y)$. Посредством ограничения функций мы получаем естественные отображения $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}_P \to K(Y)$, $P \in Y$, которые инъективны по 3.1.1. Значит, можно отождествлять кольца $\mathcal{O}(Y)$ и $\mathcal{O}_P$ с соответствующими подкольцами в $K(Y)$.

Если заменить Y на изоморфное ему многообразие, то соответствующие кольца также заменятся на изоморфные. Стало быть, $\mathcal{O}(Y)$, $\mathcal{O}_P$ и $K(Y)$ являются *инвариантами* многообразия Y (и точки $P \in Y$) с точностью до изоморфизма.

Наша следующая задача — установить, как связаны кольца $\mathcal{O}(Y)$, $\mathcal{O}_P$, $K(Y)$ с аффинным координатным кольцом $A(Y)$, если Y — аффинное многообразие, и с однородным координатным кольцом $S(Y)$, если Y — проективное многообразие. Мы установим, что для аффинного многообразия $\mathcal{O}(Y) = A(Y)$, так что последнее кольцо также является инвариантом многообразия Y с точностью до изоморфизма. Однако для проективного многообразия Y кольцо $S(Y)$ не является инвариантом: оно зависит от вложения Y в проективное пространство (упр. 3.9).

Теорема 3.2. *Пусть $Y \subset \mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие с аффинным координатным кольцом $A(Y)$. Тогда*

(a) $\mathcal{O}(Y) \simeq A(Y)$;

(b) *для каждой точки $P \in Y$ пусть $\mathfrak{m}_P \subset A(Y)$ обозначает идеал всех функций, обращающихся в точке P в нуль. Тогда отображение $P \to \mathfrak{m}_P$ задает взаимно однозначное соответствие между точками многообразия Y и максимальными идеалами кольца $A(Y)$;*

(c) *для каждой точки $P \in Y$ имеет место изоморфизм $\mathcal{O}_P \simeq A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ и $\dim \mathcal{O}_P = \dim Y$;*

(d) *поле $K(Y)$ изоморфно полю частных кольца $A(Y)$ и, следовательно, является конечно порожденным расширением поля k степени трансцендентности, равной $\dim Y$.*

Доказательство. Мы проведем его в несколько шагов. Прежде всего определим отображение $\alpha\colon A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$. Для этого заметим, что каждый многочлен $f \in A = k[x_1, \ldots, x_n]$ определяет регулярную функцию на $\mathbf{A}^n$ и, следовательно, на Y. Поэтому определен гомоморфизм $A \to \mathcal{O}(Y)$. Его ядро есть в точности $I(Y)$, так что мы получаем инъективный гомоморфизм α: $A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$.

Из 1.4 известно, что существует взаимно однозначное соответствие между точками многообразия Y (которые являются минимальными алгебраическими подмножествами в Y) и максимальными идеалами кольца A, содержащими $I(Y)$. Переходя к фактору по идеалу $I(Y)$, получаем взаимно однозначное соответствие между точками многообразия Y и максимальными идеалами кольца $A(Y)$. Кроме того, отождествляя посредством изоморфизма α элементы из $A(Y)$ с регулярными функциями на Y, видим, что максимальный идеал, соответствующий точке P,— это не что иное, как идеал $\mathfrak{m}_P = \{f \in A(Y) \mid f(P) = 0\}$. Это доказывает утверждение (b).

Далее, для каждой точки P существует естественное отображение $A(Y)_{\mathfrak{m}_P} \to \mathcal{O}_P$. Оно инъективно, потому что α инъективно, и сюръективно по определению регулярной функции. Отсюда $\mathcal{O}_P \simeq A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ и $\dim \mathcal{O}_P = \operatorname{ht} \mathfrak{m}_P$. Так как $A(Y)/\mathfrak{m}_P \simeq k$, то из 1.7 и 1.8А мы получаем, что $\dim \mathcal{O}_P = \dim Y$.

Из (c) следует, что поле частных кольца $A(Y)$ изоморфно полю частных локального кольца $\mathcal{O}_P$ для любой точки P, которое совпадает, очевидно, с полем $K(Y)$, поскольку всякая рациональная функция содержится в действительности в некотором кольце $\mathcal{O}_P$. Далее, так как $A(Y)$ — конечно порожденная k-алгебра, то поле $K(Y)$ является конечно порожденным расширением поля k. Кроме того, согласно 1.7 и 1.8А, степень трансцендентности расширения $K(Y)/k$ равна $\dim Y$. Это доказывает (d).

Для того чтобы доказать утверждение (a), заметим, что $\mathcal{O}(Y) \subset \bigcap_{P \in Y} \mathcal{O}_P$, где все кольца рассматриваются как подкольца в $K(Y)$.

Используя (b) и (c), заключаем, что

$$A(Y) \subset \mathcal{O}(Y) \subset \bigcap_{\mathfrak{m}} A(Y)_{\mathfrak{m}},$$

где $\mathfrak{m}$ пробегает все максимальные идеалы кольца $A(Y)$. Требуемое равенство вытекает теперь из следующего простого алгебраического факта: всякое целостное кольцо B совпадает с пересечением (внутри поля частных) своих локализаций по всем максимальным идеалам. Теорема доказана.

Предположение 3.3. *Пусть $U_i \subset \mathbf{P}^n$ — открытое множество, где $x_i \neq 0$. Тогда отображение φ_i: $U_i \to \mathbf{A}^n$, определенное в 2.2, является изоморфизмом многообразий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уже было показано, что это отображение — гомеоморфизм, так что надо проверить только то, что на каждом открытом множестве регулярные функции этих многообразий совпадают. Регулярные функции на U_i локально представляются в виде отношений однородных многочленов от $x_0, \ldots$

$\ldots, x_n$ одинаковой степени, а на $\mathbf{A}^n$ — в виде отношений многочленов от $y_1, \ldots, y_n$. Легко проверить, что они отождествляются с помощью отображений α и β, определенных в доказательстве предложения 2.2.

Прежде чем сформулировать следующий результат, введем некоторые обозначения. Пусть S — градуированное кольцо и $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал в S. Обозначим через $S_{(\mathfrak{p})}$ подкольцо элементов степени 0 в локализации кольца S относительно мультипликативного множества T, состоящего из всех однородных элементов кольца S, не принадлежащих $\mathfrak{p}$. Отметим, что кольцо $T^{-1}S$ имеет естественную градуировку: $\deg(f/g) = \deg f - \deg g$, если f и g — однородные элементы из S и $g \in T$. Кольцо $S_{(\mathfrak{p})}$ является локальным кольцом с максимальным идеалом $(\mathfrak{p} \cdot T^{-1}S) \cap S_{(\mathfrak{p})}$. В частности, если S — целостное кольцо, то в случае $\mathfrak{p} = (0)$ мы получаем поле частных $S_{((0))}$. Если f — однородный элемент из S, то через $S_{(f)}$ мы будем обозначать подкольцо элементов степени 0 в локализации S_f.

Теорема 3.4. *Пусть $Y \subset \mathbf{P}^n$ — проективное многообразие с однородным координатным кольцом $S(Y)$. Тогда*

(a) $\mathcal{O}(Y) = k$;

(b) *для любой точки $P \in Y$ пусть $\mathfrak{m}_P \subset S(Y)$ обозначает идеал, порожденный множеством однородных элементов $f \in S(Y)$, таких, что $f(P) = 0$. Тогда $\mathcal{O}_P = S(Y)_{(\mathfrak{m}_P)}$;*

(c) $K(Y) \simeq S(Y)_{((0))}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U_i \subset \mathbf{P}^n$ — открытое множество $x_i \neq 0$ и $Y_i = Y \cap U_i$. Так как U_i изоморфно $\mathbf{A}^n$ (с помощью изоморфизма φ_i из 3.3), то Y_i можно считать аффинным многообразием. Существует естественный изоморфизм φ_i^* аффинного координатного кольца $A(Y_i)$ на локализацию $S(Y)_{(x_i)}$ однородного координатного кольца многообразия Y. Для того чтобы это показать, установим сначала изоморфизм между $k[y_1, \ldots, y_n]$ и $k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)}$, сопоставляя многочлену $f(y_1, \ldots, y_n)$ элемент $f(x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i)$, где x_i/x_i опускается, как и в доказательстве 2.2. Этот изоморфизм переводит $I(Y_i)$ в $I(Y) \cdot S_{(x_i)}$ (см. упр. 2.9), так что, переходя к факторкольцам, мы получаем требуемый изоморфизм φ_i^*: $A(Y_i) \simeq S(Y)_{(x_i)}$.

Докажем теперь утверждение (b). Пусть $P \in Y$ — произвольная точка; выберем индекс i так, чтобы $P \in Y_i$. Тогда, согласно 3.2, $\mathcal{O}_P \simeq A(Y_i)_{\mathfrak{m}'_P}$, где $\mathfrak{m}'_P$— максимальный идеал кольца $A(Y_i)$, соответствующий точке P. Легко проверяется, что $\varphi_i^*(\mathfrak{m}'_P) = \mathfrak{m}_P S(Y)_{(x_i)}$. Далее, $x_i \notin \mathfrak{m}_P$ и операция локализации транзитивна, поэтому $A(Y_i)_{\mathfrak{m}'_P} \simeq S(Y)_{(\mathfrak{m}_P)}$, что доказывает (b).

Чтобы доказать утверждение (с), мы снова воспользуемся теоремой 3.2 для того, чтобы отождествить поле $K(Y)$, которое совпадает с $K(Y_i)$, с полем частных кольца $A(Y_i)$. Но поле частных кольца $A(Y_i)$ изоморфно (с помощью изоморфизма φ_i^*) полю $S(Y)_{((0))}$. Это доказывает (с).

Осталось доказать утверждение (а). Пусть $f \in \mathcal{O}(Y)$ — глобальная регулярная функция. Тогда для каждого i функция f регулярна на Y_i, так что из 3.2 $f \in A(Y_i)$, но мы уже видели, что $A(Y_i) \simeq S(Y)_{(x_i)}$, поэтому f можно записать в виде $g_i/x_i^{N_i}$, где $g_i \in S(Y)$ — однородный многочлен степени N_i. Так как $\mathcal{O}(Y)$, $K(Y)$ и $S(Y)$ мы можем рассматривать как подкольца поля частных L кольца $S(Y)$, то это означает, что $x_i^{N_i} f \in S(Y)_{N_i}$ для каждого i. Возьмем $N \geqslant \sum N_i$, тогда $S(Y)_N$ порождается как векторное k-пространство одночленами степени N от $x_0, \ldots, x_n$ и в каждом таком одночлене по крайней мере один из x_i имеет степень $\geqslant N_i$. Таким образом, $S(Y)_N \cdot f \subset S(Y)_N$. Интегрируя это включение, мы получаем, что $S(Y)_N \cdot f^q \subset S(Y)_N$ для всех $q > 0$. В частности, $x_0^N f^q \in S(Y)$ для всех $q > 0$. Это показывает, что подкольцо $S(Y)[f]$ поля L содержится в кольце $x_0^{-N} S(Y)$, которое является конечно порожденным $S(Y)$-модулем. Так как кольцо $S(Y)$ нётерово и $S(Y)[f]$ — конечно порожденный $S(Y)$-модуль, то элемент f *цел* над $S(Y)$ (см., например, Атья — Макдональд [1, стр. 76]). Это означает, что существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_m \in S(Y)$, что

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \ldots + a_m = 0.$$

Поскольку степень f равна 0, то мы можем заменить a_i их однородными компонентами степени 0, так что уравнение все еще останется в силе. Но $S(Y)_0 = k$, так что $a_i \in k$ и f алгебраичен над k. Поскольку поле k алгебраически замкнуто, то $f \in k$, что завершает доказательство утверждения (а), а вместе с ним и всей теоремы.

Следующий результат показывает, что аффинные многообразия X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда их аффинные координатные кольца $A(X)$ и $A(Y)$ изоморфны как k-алгебры. В действительности мы докажем более сильный результат.

Предложение 3.5. *Пусть X — произвольное, а Y — аффинное многообразия. Тогда существует естественное биективное отображение множеств*

$$\alpha\colon \operatorname{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(A(Y), \mathcal{O}(X)),$$

где левый Hom *означает морфизмы многообразий, а правый — гомоморфизмы k-алгебр.*

Доказательство. Пусть задан морфизм $\varphi\colon X \to Y$, тогда он переводит регулярные функции на Y в регулярные функции на X. Следовательно, φ индуцирует отображение $\mathcal{O}(Y)$ в $\mathcal{O}(X)$, которое, очевидно, является гомоморфизмом k-алгебр. Согласно 3.2, $\mathcal{O}(Y) \simeq A(Y)$, так что мы получаем гомоморфизм $A(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Это определяет отображение α.

Обратно, предположим, что задан гомоморфизм k-алгебр h: $A(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Будем считать, что Y — замкнутое подмножество в $\mathbf{A}^n$, так что $A(Y) = k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)$. Пусть $\bar{x}_i$ — образ x_i в $A(Y)$; рассмотрим элементы $\xi_i = h(\bar{x}_i) \in \mathcal{O}(X)$. Они являются глобальными функциями на X, поэтому мы можем использовать их для определения отображения $\psi\colon X \to \mathbf{A}^n$, полагая $\psi(P) = (\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P))$, $P \in X$.

Покажем теперь, что образ ψ содержится в Y. Так как $Y = Z(I(Y))$, то достаточно показать, что для любой точки $P \in X$ и любого $f \in I(Y)$ имеем $f(\psi(P)) = 0$. Но

$$f(\psi(P)) = f(\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P)).$$

Поскольку f — многочлен и h — гомоморфизм k-алгебр, то

$$f(\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P)) = h(f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n))(P) = 0,$$

так как $f \in I(Y)$. Таким образом, ψ определяет отображение из X в Y, индуцированное заданным гомоморфизмом h.

Для завершения доказательства надо показать еще, что ψ — морфизм. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.6. *Пусть X — произвольное многообразие и $Y \subset \mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие. Отображение множеств $\psi\colon X \to Y$ тогда и только тогда является морфизмом, когда $x_i \circ \psi$ для всех i являются регулярными функциями на X, где $x_1, \ldots, x_n$ — координатные функции на $\mathbf{A}^n$.*

Доказательство. Если ψ — морфизм, то функции $x_i \circ \psi$ регулярны по определению морфизма. Обратно, предположим, что функции $x_i \circ \psi$ регулярны. Тогда для любого многочлена $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ функция $f \circ \psi$ также регулярна на X. Далее, поскольку замкнутые подмножества в Y определяются нулями многочленов и так как регулярные функции непрерывны, то, как легко видеть, ψ^{-1} переводит замкнутые множества в замкнутые, т. е. ψ является непрерывным отображением. Наконец, так как регулярные функции локально на открытых подмножествах многообразия Y представляются в виде отношений многочленов, то $g \circ \psi$ регулярно для любой регулярной функции g на любом открытом подмножестве в Y. Значит, ψ — морфизм.

Следствие 3.7. *Аффинные многообразия X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда их аффинные координатные кольца $A(X)$ и $A(Y)$ изоморфны как k-алгебры.*

Доказательство непосредственно следует из предложения 3.5.

На языке категорий предыдущий результат можно выразить так:

Следствие 3.8. *Функтор $X \mapsto A(X)$ задает обращающую стрелки эквивалентность категории аффинных многообразий над k и категории конечно порожденных целостных алгебр над k.*

В заключение этого параграфа приведем без доказательства один алгебраический результат, который будет использоваться в упражнениях.

Теорема 3.9А (конечность целого замыкания). *Пусть A — целостное кольцо, являющееся конечно порожденной алгеброй над k, K — его поле частных и L — конечное алгебраическое расширение K. Тогда целое замыкание A' кольца A в L является конечно порожденным A-модулем, а также конечно порожденной алгеброй над k.*

Доказательство. См. Зарисский — Самюэль [1, т. 1, гл. V, теорема 9].

Упражнения

3.1. (a) Показать, что любая коника в $\mathbf{A}^2$ изоморфна либо $\mathbf{A}^1$, либо $\mathbf{A}^1 - \{0\}$ (см. упр. 1.1).

(b) Показать, что $\mathbf{A}^1$ *не* изоморфно никакому своему собственному открытому подмножеству. (Обобщение этого результата см. ниже в упр. 6.7.)

(c) Доказать, что всякая коника в $\mathbf{P}^2$ изоморфна $\mathbf{P}^1$.

(d) Ниже в упр. 4.8 мы увидим, что любые две кривые гомеоморфны над k. Показать, однако, что $\mathbf{A}^2$ уже не гомеоморфно $\mathbf{P}^2$.

(e) Показать, что если аффинное многообразие изоморфно проективному, то оно состоит только из одной точки.

3.2. Морфизм, который как непрерывное отображение топологических пространств является гомеоморфизмом, может не быть изоморфизмом.

(a) Пусть, например, морфизм $\varphi\colon \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^2$ задан формулой $t \mapsto (t^2, t^3)$. Показать, что φ определяет биективное бинепрерывное отображение $\mathbf{A}^1$ на кривую $y^2 = x^3$, но не является изоморфизмом.

(b) Рассмотрим другой пример. Пусть характеристика основного поля k равна $p > 0$. Определим отображение $\varphi\colon \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ формулой $t \mapsto t^p$. Показать, что φ биективно и бинепрерывно, но не является изоморфизмом. Отображение φ называется *морфизмом Фробениуса*.

3.3. (a) Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм. Показать, что для каждой точки $P \in X$ он индуцирует гомоморфизм локальных колец $\varphi_P^*\colon \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$.

(b) Показать, что морфизм φ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда он гомеоморфизм и индуцированное им отображение локальных колец φ_P^* является изоморфизмом для всех точек $P \in X$.

(c) Показать, что если $\varphi(X)$ плотно в Y, то отображение φ_P^* инъективно для каждой точки $P \in X$.

3.4. Показать, что d-кратное вложение $\mathbf{P}^n$ (упр. 2.12) является изоморфизмом на свой образ.

3.5. Будем говорить для простоты, что многообразие *аффинно*, если оно изоморфно некоторому аффинному многообразию. Пусть $H \subset \mathbf{P}^n$ — произвольная гиперповерхность. Показать, что многообразие $\mathbf{P}^n - H$ аффинно. [*Указание.* Пусть $\deg H = d$. Рассмотреть d-кратное вложение $\mathbf{P}^n$ в $\mathbf{P}^N$ и воспользоваться тем фактом, что $\mathbf{P}^N$ минус гиперплоскость аффинно.]

3.6. Существуют квазиаффинные многообразия, не являющиеся аффинными. Например, показать, что $X = \mathbf{A}^2 - \{(0, 0)\}$ не аффинно. [*Указание.* Показать, что $\mathcal{O}(X) \simeq k[x, y]$, и воспользоваться предложением 3.5. По поводу другого доказательства см. упр. 4.3 из гл. III.]

3.7. (a) Показать, что любые две кривые на $\mathbf{P}^2$ имеют непустое пересечение.

(b) Более общим образом, показать, что $Y \cap H \neq \varnothing$, где $Y \subset \mathbf{P}^n$ — проективное многообразие размерности $\geqslant 1$, а H — гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$. [*Указание.* Воспользоваться упр. 3.5 и 3.1(e). Обобщение этого факта см. в 7.2.]

3.8. Пусть H_i и H_j — гиперплоскости в $\mathbf{P}^n$, определенные уравнениями $x_i = 0$ и $x_j = 0$, $i \neq j$. Показать, что всякая регулярная функция на $\mathbf{P}^n - (H_i \cap H_j)$ является константой. (Это дает другое доказательство утверждения (a) из теоремы 3.4 в случае $Y = \mathbf{P}^n$.)

3.9. Однородное координатное кольцо проективного многообразия не является инвариантом относительно изоморфизмов. Например, пусть $X = \mathbf{P}^1$ и Y суть 2-кратное вложение $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^2$. Тогда $X \simeq Y$ (упр. 3.4). Показать, однако, что $S(X) \not\simeq S(Y)$.

3.10. *Подмногообразия.* Подмножество топологического пространства называется *локально замкнутым*, если оно является открытым подмножеством своего замыкания или, что эквивалентно, пересечением открытого и замкнутого множеств.

Пусть X — квазиаффинное или квазипроективное многообразие и Y — неприводимое локально замкнутое подмножество в нем. Тогда Y тоже квазиаффинное (соответственно квазипроективное) многообразие, поскольку оно является локально замкнутым подмножеством аффинного или проективного пространства. Будем называть Y *подмногообразием* в X с *индуцированной структурой*.

Пусть теперь $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм, и пусть $X' \subset X$ и $Y' \subset Y$ — неприводимые локально замкнутые подмножества, такие, что $\varphi(X') \subset Y'$. Показать, что $\varphi|_{X'}\colon X' \to Y'$ — морфизм многообразий.

3.11. Пусть X — произвольное многообразие и $P \in X$. Показать, что существует взаимно однозначное соответствие между простыми идеалами локального кольца $\mathcal{O}_P$ и замкнутыми подмногообразиями в X, содержащими точку P.

3.12. Пусть P — точка на многообразии X. Показать, что $\dim \mathcal{O}_P = \dim X$. [*Указание.* Свести утверждение к аффинному случаю и воспользоваться 3.2(c).]

3.13. *Локальное кольцо подмногообразия.* Пусть $Y \subset X$ — подмногообразие. Обозначим через $\mathcal{O}_{Y,X}$ множество классов эквивалентности пар $\langle U, f\rangle$, где $U \subset X$ — открытое подмножество, $U \cap Y \neq \varnothing$ и f — регулярная функция на U, причем пара $\langle U, f\rangle$ считается эквивалентной паре $\langle V, g\rangle$, если $f = g$ на $U \cap V$. Показать, что $\mathcal{O}_{Y,X}$ — локальное кольцо с полем вычетов, изоморфным $K(Y)$, и $\dim \mathcal{O}_{Y,X} = \dim X - \dim Y$. Оно называется *локальным кольцом* подмногообразия Y в X. Отметим, что если $Y = P$ — точка, то $\mathcal{O}_{Y,X} = \mathcal{O}_P$, и если $Y = X$, то $\mathcal{O}_{Y,X} = K(X)$. Отметим также, что если Y не точка, то поле $K(Y)$ не является алгебраически замкнутым, так что таким образом мы получаем запас локальных колец, поля вычетов которых не алгебраически замкнуты.

3.14. *Проекция из точки.* Пусть $\mathbf{P}^n$ — гиперплоскость в $\mathbf{P}^{n+1}$ и $P \in \mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}^n$. Определим отображение $\varphi\colon \mathbf{P}^{n+1} - \{P\} \to \mathbf{P}^n$, сопоставляя точке Q

единственную точку $\varphi(Q)$ пересечения прямой, соединяющей P и Q, с гиперплоскостью $\mathbf{P}^n$.

(a) Показать, что φ — морфизм многообразий.

(b) Пусть $Y \subset \mathbf{P}^3$ — скрученная кубическая кривая — образ 3-кратного вложения $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^3$ (упр. 2.12). Если t, u — однородные координаты на $\mathbf{P}^1$, то мы будем говорить, что кривая Y задана *параметрически* формулой $(x, y, z, w) = (t^3, t^2u, tu^2, u^3)$. Пусть $P = (0, 0, 1, 0)$ и $\mathbf{P}^2$ — гиперплоскость $z = 0$. Показать, что проекция кривой Y из точки P является каспидальной кубической кривой [1]) на плоскости $\mathbf{P}^2$, и написать ее уравнение.

3.15. *Произведение аффинных многообразий.* Пусть $X \subset \mathbf{A}^n$ и $Y \subset \mathbf{A}^m$ — аффинные многообразия.

(a) Показать, что $X \times Y \subset \mathbf{A}^{n+m}$ с индуцированной топологией неприводимо. [*Указание.* Предположить, что $X \times Y$ является объединением двух замкнутых подмножеств $Z_1 \cup Z_2$. Положить $X_i = \{x \in X \mid x \times Y \subset Z_i\}$, $i = 1,2$. Показать, что $X = X_1 \cup X_2$, где множества X_1 и X_2 замкнуты. Тогда $X = X_1$ или $X = X_2$, откуда $X \times Y = Z_1$ или $X \times Y = Z_2$.] Аффинное многообразие $X \times Y$ называется *произведением* многообразий X и Y. Отметим, что его топология, вообще говоря, не совпадает с произведением топологий сомножителей (упр. 1.4).

(b) Показать, что $A(X \times Y) \simeq A(X) \otimes_k A(Y)$.

(c) Показать, что $X \times Y$ является произведением в категории многообразий, т. е. что (i) проекции $X \times Y \to X$ и $X \times Y \to Y$ являются морфизмами и (ii) для заданного многообразия Z и морфизмов $Z \to X$, $Z \to Y$ существует единственный морфизм $Z \to X \times Y$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & \\ X & X \times Y \arrow[l] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

(d) Показать, что $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

3.16. *Произведение квазипроективных многообразий.* Посредством вложения Сегре (упр. 2.14) $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ отождествляется с его образом в $\mathbf{P}^{nm+n+m}$ и, следовательно, снабжается структурой проективного многообразия. Далее, для любых квазипроективных многообразий $X \subset \mathbf{P}^n$ и $Y \subset \mathbf{P}^m$ мы можем рассмотреть $X \times Y \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$.

(a) Показать, что $X \times Y$ является квазипроективным многообразием.

(b) Показать, что если X и Y — проективные многообразия, то проективным многообразием будет и $X \times Y$.

*(c) Показать, что $X \times Y$ является произведением в категории многообразий.

3.17. *Нормальные многообразия.* Многообразие Y называется *нормальным в точке* $P \in Y$, если локальное кольцо $\mathcal{O}_P$ целозамкнуто; Y называется *нормальным* многообразием, если оно нормально в каждой своей точке.

(a) Показать, что всякая коника в $\mathbf{P}^2$ нормальна.

(b) Показать, что квадрики Q_1, Q_2 в $\mathbf{P}^3$, заданные уравнениями Q_1: $xy = zw$; Q_2: $xy = z^2$, нормальны (обобщения см. в упр. 6.4 гл. II).

(c) Показать, что каспидальная кубика $y^2 = x^3$ в $\mathbf{A}^2$ не будет нормальной.

(d) Пусть Y — аффинное многообразие. Показать, что Y нормально тогда и только тогда, когда кольцо $A(Y)$ целозамкнуто.

(e) Пусть Y — аффинное многообразие. Показать, что существует нормальное аффинное многообразие $\widetilde{Y}$ и морфизм $\pi\colon \widetilde{Y} \to Y$, обладающие следующим свойством (универсальности): для всякого нормального многообразия Z и произвольного *доминантного* морфизма $\varphi\colon Z \to Y$ (доминантность означает, что $\varphi(Z)$ плотно в Y) существует единственный морфизм $\theta\colon Z \to \widetilde{Y}$, такой, что $\varphi = \pi \circ \theta$. Многообразие $\widetilde{Y}$ называется *нормализацией* многообразия Y. (Использовать теорему 3.9A.)

[1]) См. рис. 4 далее.— *Прим. перев.*

3.18. *Проективно нормальные многообразия.* Проективное многообразие $Y \subset \mathbf{P}^n$ называется *проективно нормальным* (относительно заданного вложения), если его однородное координатное кольцо целозамкнуто.

(a) Показать, что если Y проективно нормально, то оно нормально.

(b) В $\mathbf{P}^n$ существуют нормальные многообразия, не являющиеся проективно нормальными. Например, пусть Y — скрученная кривая степени 4 в $\mathbf{P}^3$, заданная параметрически формулой $(x, y, z, w) = (t^4, t^3u, tu^3, u^4)$. Показать, что Y нормальна, но не проективно нормальна. Другие примеры см. в упр. 5.6 гл. III.

(c) Показать, что скрученная кривая Y степени 4 изоморфна прямой $\mathbf{P}^1$, которая, очевидно, проективно нормальна. Стало быть, проективная нормальность зависит от вложения.

3.19. *Автоморфизмы пространства* $\mathbf{A}^n$. Пусть $\varphi\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ — морфизм, заданный n многочленами $f_1, \ldots, f_n$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $J = \det \mid \partial f_i/\partial x_j \mid$ — *якобиан* отображения φ, который является, очевидно, многочленом.

(a) Показать, что если φ — изоморфизм (в этом случае мы будем называть φ *автоморфизмом* пространства $\mathbf{A}^n$), то многочлен J является ненулевой константой.

**(b) Утверждение, обратное к (a), составляет нерешенную проблему даже в случае $n = 2$. См., например, Витушкин [1].

3.20. Пусть Y — многообразие размерности $\geqslant 2$, $P \in Y$ — нормальная точка и f — регулярная функция на $Y - P$.

(a) Показать, что f продолжается до регулярной функции на всем Y.

(b) Показать, что это неверно в случае $\dim Y = 1$.

Обобщение см. в упр. 3.5 гл. III.

3.21. *Групповые многообразия.* Групповым многообразием называется многообразие Y вместе с морфизмом $\mu\colon Y \times Y \to Y$, таким, что множество точек из Y с операцией, заданной μ, является группой и что обратное отображение $y \mapsto y^{-1}$ также является морфизмом $Y \to Y$.

(a) *Аддитивная группа* $\mathbf{G}_a$ — это многообразие $\mathbf{A}^1$ с морфизмом $\mu\colon \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^1$, определенным формулой $\mu(a, b) = a + b$. Показать, что $\mathbf{G}$ является групповым многообразием.

(b) *Мультипликативная группа* $\mathbf{G}_m$ — это многообразие $\mathbf{A}^1 - \{(0)\}$ с морфизмом $\mu(a, b) = ab$. Показать, что $\mathbf{G}_m$ — групповое многообразие.

(c) Пусть G — групповое, а X — произвольное многообразие. Показать, что множество $\operatorname{Hom}(X, G)$ обладает естественной структурой группы.

(d) Показать, что $\operatorname{Hom}(X, \mathbf{G}_a)$ изоморфно $\mathcal{O}(X)$ как группа по сложению для любого многообразия X.

(e) Показать, что $\operatorname{Hom}(X, \mathbf{G}_m)$ изоморфно группе обратимых элементов в $\mathcal{O}(X)$ как группа по умножению для любого многообразия X.

§ 4. Рациональные отображения

В этом параграфе мы вводим понятия рационального отображения и бирациональной эквивалентности, которые имеют важное значение для классификации многообразий. Рациональное отображение — это морфизм, который определен только на некотором открытом подмножестве. Так как открытое подмножество плотно в многообразии, то это уже несет массу информации. В этом отношении алгебраическая геометрия более «жесткая», чем дифференциальная геометрия или топология. В частности, понятие бирациональной эквивалентности присуще только алгебраической геометрии.

Лемма 4.1. *Пусть X и Y — многообразия, φ и ψ — морфизмы из X в Y, и предположим, что существует такое непустое открытое подмножество $U \subset X$, что $\varphi|_U = \psi|_U$. Тогда $\varphi = \psi$.*

Доказательство. Можно предполагать, что $Y \subset \mathbf{P}^n$ для некоторого n. Беря композиции морфизмов φ и ψ с вложением $Y \to \mathbf{P}^n$, мы сводим все к случаю $Y = \mathbf{P}^n$. Рассмотрим произведение $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$, которое обладает структурой проективного многообразия, определяемой вложением Сегре (упр. 3.16). Морфизмы φ и ψ определяют отображение $\varphi \times \psi$: $X \to \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$, являющееся в действительности морфизмом (упр. 3.16(c)). Пусть $\Delta = \{P \times P \mid P \in \mathbf{P}^n\}$ — *диагональное* подмножество (или просто *диагональ*) в $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$. Оно определяется уравнениями $\{x_iy_j = x_jy_i \mid i, j = 0, \ldots, n\}$ и потому является замкнутым подмножеством в $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$. По предположению $\varphi \times \psi(U) \subset \Delta$. Но U плотно в X, а Δ замкнуто, так что $\varphi \times \psi(X) \subset \Delta$. Это доказывает, что $\varphi = \psi$.

Определение. Пусть X, Y — многообразия. *Рациональным отображением* φ: $X \to Y$ называется класс эквивалентных пар $\langle U, \varphi_U \rangle$, где U — непустое открытое подмножество в X, φ_U — морфизм из U в Y и пары $\langle U, \varphi_U \rangle$ и $\langle V, \varphi_V \rangle$ считаются эквивалентными, если φ_U и φ_V совпадают на $U \cap V$. Рациональное отображение φ называется *доминантным*, если для некоторой (а следовательно, и для каждой) пары $\langle U, \varphi_U \rangle$ образ φ_U плотен в Y.

Отметим, что из леммы 4.1 вытекает, что эквивалентность пар, указанная в определении, на самом деле является отношением эквивалентности. Отметим также, что рациональное отображение *не есть*, вообще говоря, отображение множества X в Y. Ясно, что доминантные рациональные отображения можно компоновать, так что мы можем рассматривать категорию многообразий с рациональными доминантными отображениями в качестве морфизмов. Изоморфизм в этой категории называется бирациональным отображением.

Определение. *Бирациональным отображением* φ: $X \to Y$ называется рациональное отображение, которое обладает обратным, т. е. таким рациональным отображением ψ: $Y \to X$, что $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ и $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ как рациональные отображения. Многообразия X и Y называются *бирационально эквивалентными* (или просто *бирациональными между собой*), если существует хотя бы одно бирациональное отображение из X в Y.

Основным результатом этого параграфа является тот факт, что категория многообразий с доминантными рациональными отображениями в качестве морфизмов эквивалентна с обращением стрелок категории конечно порожденных полей над k. Для доказательства этого результата нам понадобятся два вспомогательных утверждения, которые показывают, что на любом многообразии аффинные открытые подмножества образуют базис топологии. Допуская некоторую неточность, мы называем многообразие *аффинным*, если оно изоморфно некоторому аффинному многообразию.

Лемма 4.2. *Пусть Y — гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$, заданная уравнением $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Тогда $\mathbf{A}^n - Y$ изоморфно гиперповерхности H в $\mathbf{A}^{n+1}$, заданной уравнением $x_{n+1}f = 1$. В частности, $\mathbf{A}^n - Y$ аффинно и его аффинным координатным кольцом служит кольцо $k[x_1, \ldots, x_n]_f$.*

Доказательство. Пусть $P = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in H$, и положим $\varphi(P) = (a_1, \ldots, a_n)$. Ясно, что φ является морфизмом из H в $\mathbf{A}^n$, соответствующим гомоморфизму колец $A \to A_f$, где $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Ясно также, что φ является биективным отображением гиперповерхности H на свой образ, равный $\mathbf{A}^n - Y$. Для того чтобы показать, что φ — изоморфизм, достаточно проверить, что φ^{-1} является морфизмом. Имеем $\varphi^{-1}(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n, 1/f(a_1, \ldots, a_n))$, так что из 3.6 непосредственно следует, что φ^{-1} — морфизм.

Предложение 4.3. *На любом многообразии Y существует базис топологии, состоящий из открытых аффинных подмножеств.*

Доказательство. Нам надо показать, что для каждой точки $P \in Y$ и любого открытого множества U, содержащего P, существует открытое аффинное множество V, такое, что $P \in V \subset U$. Для этого можно считать, во-первых, что $U = Y$, так как U тоже является многообразием. Во-вторых, можно предполагать, что Y — квазиаффинное многообразие в $\mathbf{A}^n$, поскольку (см. 2.3) любое многообразие покрывается квазиаффинными. Положим $Z = \bar{Y} - Y$. Это множество замкнуто в $\mathbf{A}^n$. Пусть $\mathfrak{a} \subset A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал Z. Тогда, поскольку Z замкнуто и $P \notin Z$, существует такой многочлен $f \in \mathfrak{a}$, что $f(P) \neq 0$. Пусть H — гиперповерхность $f = 0$ в $\mathbf{A}^n$. Тогда $Z \subset H$, а $P \notin H$. Следовательно, P принадлежит множеству $Y - Y \cap H$, которое открыто в Y. Кроме того, $Y - Y \cap H$ замкнуто в $\mathbf{A}^n - H$, которое аффинно по лемме 4.2. Стало быть, это и есть требуемая аффинная окрестность точки P.

Теперь докажем основной результат этого параграфа. Пусть φ: $X \to Y$ — доминантное рациональное отображение, представленное парой $\langle U, \varphi_U\rangle$, и пусть $f \in K(Y)$ — рациональная функция, представленная парой $\langle V, f\rangle$, где V — открытое множество в Y и f — регулярная функция на V. Тогда, поскольку $\varphi_U(U)$ плотно в Y, то $\varphi_U^{-1}(V)$ является непустым открытым подмножеством в X, так что $f \circ \varphi_U$ — регулярная функция на $\varphi_U^{-1}(V)$. Она представляет некоторую рациональную функцию на X, тем самым мы определили гомоморфизм k-алгебр $K(Y)$ в $K(X)$.

Теорема 4.4. *Для любых многообразий X и Y предыдущая конструкция осуществляет биективное соответствие между*

(i) *множеством доминантных рациональных отображений из X в Y и*

(ii) *множеством гомоморфизмов k-алгебр $K(Y)$ в $K(X)$.*

Более того, это соответствие осуществляет обращающую стрелки эквивалентность категорий: категории многообразий с доминантными рациональными отображениями в качестве морфизмов и категории конечно порожденных расширений поля k.

Доказательство. Мы построим отображение, обратное тому, которое было указано перед формулировкой теоремы. Пусть θ: $K(Y) \to K(X)$ — гомоморфизм k-алгебр. Нам надо определить соответствующее ему рациональное отображение из X в Y. Согласно 4.3, Y покрывается аффинными многообразиями, так что можно считать Y аффинным. Пусть $A(X)$ — его аффинное координатное кольцо и $y_1, \ldots, y_n$ — образующие $A(Y)$ как алгебры над k. Тогда $\theta(y_1), \ldots, \theta(y_n)$ являются рациональными функциями на X. Можно выбрать открытое множество $U \subset X$, такое, что все функции $\theta(y_i)$ будут регулярны на U. В таком случае θ определяет некоторый инъективный гомоморфизм k-алгебр $A(Y) \to \mathcal{O}(U)$. В силу 3.5 ему соответствует морфизм φ: $U \to Y$, который определяет доминантное рациональное отображение из X в Y. Легко видеть, что это дает отображение множеств (ii) $\to$ (i), обратное к построенному выше отображению (i) $\to$ (ii).

Для того чтобы убедиться в том, что мы имеем эквивалентность категорий, как утверждает теорема, надо проверить только, что для любого многообразия Y поле $K(Y)$ конечно порождено над k и, обратно, всякое конечно порожденное расширение K/k является полем рациональных функций $K = K(Y)$ на некотором многообразии Y. Пусть Y — многообразие, тогда $K(Y) = K(U)$ для любого открытого подмножества $U \subset Y$, так что можно считать Y аффинным. Тогда, согласно 3.2(d), поле $K(Y)$ конечно порождено над k. С другой стороны, пусть K — конечно порожденное расширение поля k, $y_1, \ldots, y_n \in K$ — система образующих и B — подалгебра в K, порожденная $y_1, \ldots, y_n$ над k. Тогда B является факторкольцом кольца многочленов $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ по некоторому идеалу, так что $B \simeq A(Y)$ для

некоторого многообразия Y в $\mathbf{A}^n$. Значит, $K \simeq K(Y)$, и теорема доказана.

Следствие 4.5. *Для любых многообразий X и Y следующие условия эквивалентны:*

(i) *X и Y бирационально эквивалентны;*

(ii) *существуют открытые подмножества $U \subset X$ и $V \subset Y$, такие, что U изоморфно V;*

(iii) *$K(X) \simeq K(Y)$ как k-алгебры.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть φ: $X \to Y$ и ψ: $Y \to X$ — бирациональные отображения, обратные друг другу. Пусть φ представлено парой $\langle U, \varphi\rangle$, а ψ — парой $\langle V, \psi\rangle$, тогда $\psi \circ \varphi$ представляется парой $\langle \varphi^{-1}(V), \psi \circ \varphi\rangle$ и, поскольку $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ как рациональное отображение, то $\psi \circ \varphi$ тождественно на $\varphi^{-1}(V)$. Аналогично $\varphi \circ \psi$ тождественно на $\psi^{-1}(U)$. Возьмем теперь в X открытое множество $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(U))$, а в Y — открытое множество $\psi^{-1}(\varphi^{-1}(V))$. По построению эти открытые множества изоморфны; изоморфизм осуществляется посредством отображений φ и ψ.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из определения поля функций.

(iii) $\Rightarrow$ (i) следует из теоремы 4.4.

В качестве иллюстрации понятия бирационального соответствия воспользуемся некоторыми алгебраическими результатами о расширениях полей для того, чтобы показать, что всякое многообразие бирационально эквивалентно некоторой гиперповерхности. Предполагается, что читатель знаком с понятием сепарабельного алгебраического расширения поля и с понятиями базиса трансцендентности и степени трансцендентности бесконечных расширений (см., например, Зарисский — Самюэль [1, гл. II]).

Теорема 4.6А (теорема о примитивном элементе). *Пусть L — конечное сепарабельное расширение поля K. Тогда существует элемент $\alpha \in L$, порождающий поле L как расширение над K. Более того, если $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — произвольная система образующих поля L над K и если поле K бесконечно, то α можно выбрать в виде линейной комбинации $\alpha = c_1\beta_1 + \ldots + c_n\beta_n$ элементов β_i с коэффициентами $c_i \in K$.*

Доказательство. См. Зарисский — Самюэль [1, гл. II, теорема 19]. Второе утверждение следует из приведенного там доказательства первого.

Определение. Расширение полей K/k называется *сепарабельно порожденным*, если существует такой базис трансцендентности $\{x_i\}$ в K/k, что поле K является сепарабельным алгебраическим расширением поля $k(\{x_i\})$. В таком случае базис $\{x_i\}$ называется *сепарабельным базисом трансцендентности*.

Теорема 4.7А. *Пусть K/k — конечно порожденное и сепарабельно порожденное расширение поля k. Тогда всякое множество образующих расширения K/k содержит подмножество, являющееся сепарабельным базисом трансцендентности.*

Доказательство. См. Зарисский — Самюэль [1, гл. II, теорема 30].

Теорема 4.8А. *Пусть k — совершенное (в частности, алгебраически замкнутое) поле. Тогда любое конечно порожденное расширение K/k является сепарабельно порожденным.*

Доказательство. См. Зарисский — Самюэль [1, гл. II, теорема 31] или Мацумура [2, гл. 10, следствие на стр. 194].

Предложение 4.9. *Всякое многообразие X размерности r бирационально эквивалентно гиперповерхности Y в $\mathbf{P}^{r+1}$.*

Доказательство. Поле функций K на X является конечно порожденным расширением поля k. Согласно 4.8А, поле K сепарабельно порождено над k. Следовательно, существует базис трансцендентности $x_1, \ldots, x_r \in K$, такой, что K является конечным сепарабельным расширением поля $k(x_1, \ldots, x_r)$. Тогда по 4.6А мы можем найти такой элемент $y \in K$, что $K = k(x_1, \ldots, x_r, y)$. Элемент y алгебраичен над k, т. е. удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из поля рациональных функций от $x_1, \ldots, x_r$. Освобождаясь от знаменателей, мы получим неприводимый многочлен $f(x_1, \ldots, x_r, y) = 0$, приравненный нулю. Он определяет гиперповерхность в $\mathbf{A}^{r+1}$ с полем функций K, которая, согласно 4.5, бирационально эквивалентна X. Проективное замыкание (упр. 2.9) этой гиперповерхности и есть требуемая гиперповерхность $Y \subset \mathbf{P}^{r+1}$.

Раздутие

Приведем еще один пример бирационального отображения а именно опишем конструкцию раздутия многообразия в точке (или точки на многообразии). Эта важная конструкция служит основным инструментом для разрешения особенностей алгебраических многообразий.

Мы начнем с построения раздутия пространства $\mathbf{A}^n$ в точке $O = (0, \ldots, 0)$. Рассмотрим произведение $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$. Согласно упр. 3.16, оно является квазипроективным многообразием. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — аффинные координаты в $\mathbf{A}^n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — однородные координаты в $\mathbf{P}^{n-1}$ (обратите внимание на необычное обозначение!). Тогда замкнутые подмножества в $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$ определяются системами многочленов от переменных x_i, y_j, однородных относительно переменных y_j.

Определим *раздутие пространства $\mathbf{A}^n$ в точке O* (или *раздутие точки O в пространстве $\mathbf{A}^n$*) как замкнутое подмножество X в $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$, определенное системой уравнений $\{x_i y_j = x_j y_i \mid i, j = 1, \ldots, n\}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1} \arrow[d] \\ & \mathbf{A}^n \end{tikzcd}$$

Определен естественный морфизм $\varphi\colon X \to \mathbf{A}^n$, являющийся ограничением проекции $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$ на первый множитель. Изучим свойства многообразия X.

(1) Если $P \in \mathbf{A}^n$, $P \neq O$, то слой $\varphi^{-1}(P)$ состоит из одной точки. В действительности φ задает изоморфизм $X - \varphi^{-1}(O)$ на $\mathbf{A}^n - O$. В самом деле, пусть $P = (a_1, \ldots, a_n)$ с $a_i \neq 0$ для некоторого i. Если $P \times (y_1, \ldots, y_n) \in \varphi^{-1}(P)$, то для каждого j имеем $y_j = (a_j/a_i)\, y_i$. Стало быть, точка $(y_1, \ldots, y_n)$ в $\mathbf{P}^{n-1}$ однозначно определена, а именно $(y_1, \ldots, y_n) = (a_1, \ldots, a_n)$ и слой $\varphi^{-1}(P)$ состоит ровно из одной точки. Более того, формула $\psi(P) = (a_1, \ldots, a_n) \times (a_1, \ldots, a_n)$ определяет морфизм $\psi\colon \mathbf{A}^n - O \to X - \varphi^{-1}(O)$, обратный к морфизму φ. Тем самым показано, что $X - \varphi^{-1}(O)$ изоморфно $\mathbf{A}^n - O$.

(2) $\varphi^{-1}(O) \simeq \mathbf{P}^{n-1}$. В самом деле, слой $\varphi^{-1}(O)$ состоит из всех точек $O \times Q$, таких, что $Q = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{P}^{n-1}$, без всяких ограничений.

(3) Точки слоя $\varphi^{-1}(O)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми в $\mathbf{A}^n$, проходящими через точку O. В самом деле, всякую прямую L в $\mathbf{A}^n$, проходящую через O, можно задать параметрическими уравнениями вида $x_i = a_i t$, $i = 1, \ldots, n$, где a_i лежат в k и одновременно не обращаются в нуль, а $t \in \mathbf{A}^1$. Рассмотрим прямую $L' = \varphi^{-1}(L - O)$ в $X - \varphi^{-1}(O)$. Она задается параметрически уравнениями $x_i = a_i t$, $y_i = a_i t$, $t \in \mathbf{A}^1 - 0$. Но так как y_i — однородные координаты в $\mathbf{P}^{n-1}$, то L' задается также уравнениями $x_i = a_i t$, $y_i = a_i$, $t \in \mathbf{A}^1 - 0$. Эти уравнения имеют смысл и при $t = 0$ и определяют замыкание $\overline{L}'$ прямой L' в X. Прямая $\overline{L}'$ пересекает $\varphi^{-1}(O)$ в точке $Q = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{P}^{n-1}$. Отсюда видно, что сопоставление прямой L точки Q задает взаимно однозначное соответствие между множеством прямых в $\mathbf{A}^n$, проходящих через O, и множеством точек слоя $\varphi^{-1}(O)$.

(4) Многообразие X неприводимо. В самом деле, X является объединением двух кусков $X - \varphi^{-1}(O)$ и $\varphi^{-1}(O)$. Первый кусок изоморфен $\mathbf{A}^n - O$ и, следовательно, неприводим. С другой стороны, мы только что показали, что каждая точка из $\varphi^{-1}(O)$ лежит

4—01390

в замыкании некоторого подмножества (а именно прямой L') из $X - \varphi^{-1}(O)$. Следовательно, $X - \varphi^{-1}(O)$ плотно в X, так что X неприводимо.

Определение. Пусть Y — замкнутое подмногообразие в $\mathbf{A}^n$, содержащее точку O. Определим *раздутие* $\widetilde{Y}$ *многообразия* Y *в точке* O (или *раздутие точки* $O \in Y$), полагая $\widetilde{Y} = \overline{\varphi^{-1}(Y - O)}$, где $\varphi\colon X \to \mathbf{A}^n$ — раздутие пространства $\mathbf{A}^n$ в точке O, описанное выше. Ограничение на $\widetilde{Y}$ морфизма $\varphi\colon X \to \mathbf{A}^n$ мы будем также обозначать через $\varphi\colon \widetilde{Y} \to Y$. Раздутие любой другой точки $P \in \mathbf{A}^n$ сводится к раздутию точки O посредством линейной замены координат, переводящей P в O.

Отметим, что морфизм φ индуцирует изоморфизм $\widetilde{Y} - \varphi^{-1}(O)$ на $Y - O$, так что морфизм $\varphi\colon \widetilde{Y} \to Y$ бирационален. Отметим также, что приведенное определение раздутия, очевидно, зависит от вложения Y в $\mathbf{A}^n$, однако позднее будет показано, что на самом деле понятие раздутия не зависит от вложения (см. 7.15.1 гл. II). Раздутие точки из Y — это «растягивание» Y в точке O в направлении различных прямых, «касающихся» Y в точке O. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 4.9.1. Пусть Y — плоская кубическая кривая, заданная уравнением $y^2 = x^2(x+1)$. Опишем раздутие Y в точке O

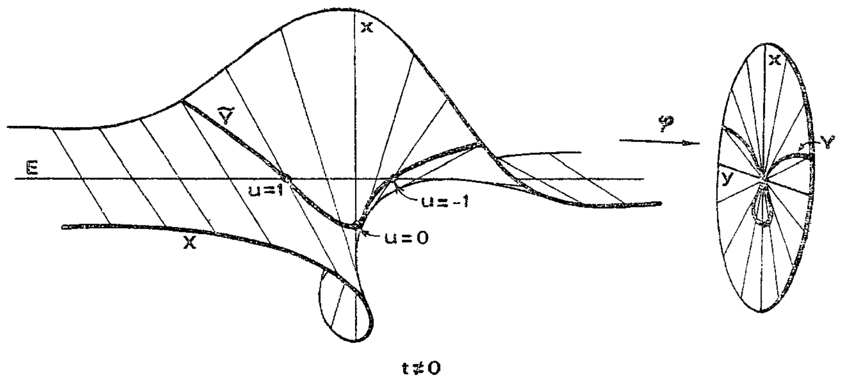


Рис. 3. Раздутие.

(рис. 3). Пусть t, u — однородные координаты в $\mathbf{P}^1$. Тогда раздутие X плоскости $\mathbf{A}^2$ в O задается в $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$ уравнением $xu = ty$. Многообразие X отличается от $\mathbf{A}^2$ только тем, что вместо точки O вклеивается прямая $\mathbf{P}^1$, соответствующая направлениям прямых в $\mathbf{A}^2$, проходящих через O. Эту прямую $\mathbf{P}^1$ мы будем называть *исключительной кривой* и обозначать через E.

Полный прообраз Y в X задается уравнениями $y^2 = x^2(x+1)$ и $xu = ty$ в $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$. Прямая $\mathbf{P}^1$ покрывается двумя аффинными открытыми множествами $t \neq 0$ и $u \neq 0$. Рассмотрим по отдельности каждое из них. Пусть $t \neq 0$, тогда можно положить $t = 1$ и считать u аффинным параметром. В таком случае предыдущие уравнения запишутся в $\mathbf{A}^3$ с координатами x, y, u в виде

$$y^2 = x^2(x+1),$$
$$y = xu.$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем уравнение $x^2u^2 - x^2(x+1) = 0$, левая часть которого разлагается на множители. Следовательно, полный прообраз в X кривой Y состоит из двух неприводимых компонент, одна из которых задается уравнениями $x = 0$, $y = 0$, u произвольное, т. е. это E, а вторая — уравнениями $u^2 = x + 1$ и $y = xu$. Это $\widetilde{Y}$. Заметим, что $\widetilde{Y}$ пересекает E в двух точках $u = \pm 1$. Эти точки соответствуют наклонам двух ветвей кривой Y в точке O.

Аналогично проверяется, что полный прообраз оси x состоит из E и некоторой неприводимой кривой, которую мы назовем *собственным прообразом* [1]) оси x (это кривая $\overline{L}'$, отвечающая оси x в соответствии, описанном выше). Этот собственный прообраз пересекает E в точке $u = 0$. При рассмотрении второго открытого множества $u \neq 0$ в $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$ находим, что собственный прообраз оси y пересекает E в точке $t = 0$, $u = 1$.

Описанное раздутие изображено на рис. 3. Мы видим, что раздутие кривой разъединяет ее ветви в точке O в соответствии с их наклонами. В случае когда ветви имеют различные наклоны, их собственные прообразы уже не пересекаются в X. Вместо этого они пересекают E в точках, соответствующих этим разным наклонам.

Упражнения

4.1. Пусть f и g — регулярные функции на открытых подмножествах U и V многообразия X соответственно, и пусть $f = g$ на $U \cap V$. Показать, что функция, совпадающая с f на U и с g на V, является регулярной функцией на $U \cup V$. Вывести отсюда, что если f — *рациональная* функция на X, то существует наибольшее открытое подмножество U в X, на котором f представлена регулярной функцией. Подмножество U будем называть *областью определения* функции f.

4.2. Пусть φ — рациональное отображение X в Y. Показать, что существует наибольшее открытое множество в X, на котором φ представлено морфизмом. Это множество мы будем называть *областью определения* отображения φ.

[1]) Здесь и далее авторский термин «strict transform» мы переводим как собственный прообраз. Такое словосочетание более употребительно в отечественной литературе.— *Прим. перев.*

4.3. (a) Пусть $f = x_1/x_0$ — рациональная функция на $\mathbf{P}^2$. Найти об ласть определения функции f и указать соответствующую регулярную функцию на ней.

(b) Рассмотреть функцию f из (a) как рациональное отображение из $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{A}^1$. Пусть φ: $\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^1$ — композиция этого отображения с вложением $\mathbf{A}^1$ в $\mathbf{P}^1$. Найти область определения отображения φ и указать соответствующий морфизм.

4.4. Многообразие Y называется *рациональным*, если оно бирационально эквивалентно проективному пространству $\mathbf{P}^n$ для некоторого n (или, что равносильно по 4.5, если поле функций $K(Y)$ является чисто трансцендентным расширением поля k).

(a) Показать, что любая коника в $\mathbf{P}^2$ является рациональной кривой.

(b) Показать, что каспидальная кубика $y^2 = x^3$ является рациональной кривой.

(c) Пусть Y — кубическая кривая с обыкновенной двойной точкой, т. е. двойной точкой с разделенными касательными (см. упр. 5.6(b) ниже) в $\mathbf{P}^2$, заданная уравнением $y^2z = x^2(x + z)$. Показать, что проекция из точки $P = (0, 0, 1)$ на прямую $z = 0$ (упр. 3.14) индуцирует бирациональное отображение Y на $\mathbf{P}^1$, и установить тем самым, что Y — рациональная кривая.

4.5. Показать, что квадрика Q: $xy = zw$ в $\mathbf{P}^3$ бирационально эквивалентна, но не изоморфна плоскости $\mathbf{P}^2$ (ср. упр. 2.15).

4.6. *Плоские кремоновы преобразования.* Бирациональное отображение $\mathbf{P}^2$ в себя называется *плоским кремоновым преобразованием*. Приведем пример такого преобразования φ: $\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$, называемого (*стандартным*) *квадратичным преобразованием*. Оно задается формулой $(a_0, a_1, a_2) \mapsto (a_1a_2, a_0a_2, a_0a_1)$, где никакие две координаты из трех a_0, a_1, a_2 не равны одновременно нулю.

(a) Показать, что φ — бирациональное отображение, совпадающее со своим обратным.

(b) Найти открытые подмножества U, $V \subset \mathbf{P}^2$, такие, что φ: $U \to V$ — изоморфизм.

(c) Найти области определения отображений φ и φ^{-1} и указать соответствующие морфизмы (см. также 4.2.3 гл. V).

4.7. Пусть X и Y — многообразия, и предположим, что существуют такие точки $P \in X$ и $Q \in Y$, что их локальные кольца $\mathcal{O}_{P,X}$ и $\mathcal{O}_{Q,Y}$ изоморфны как k-алгебры. Показать, что тогда существуют открытые множества $P \in U \subset X$ и $Q \in V \subset Y$ и изоморфизм $U \to V$, отображающий P в Q.

4.8. (a) Показать, что множество точек любого многообразия положительной размерности над k имеет ту же мощность, что и k. [*Указание.* Сначала показать это для $\mathbf{A}^n$ и $\mathbf{P}^n$. Для произвольного X использовать индукцию по n. Отобразить X бирационально на гиперповерхность $H \subset \mathbf{P}^{n+1}$ (см. 4.9) и, воспользовавшись упр. 3.7, показать, что проекция H в $\mathbf{P}^n$ из точки, не лежащей на H, является конечнолистным сюръективным отображением на $\mathbf{P}^n$.]

(b) Вывести из (a), что любые две *кривые* над k гомеоморфны (ср. упр. 3.1).

4.9. Пусть X — проективное многообразие размерности r в $\mathbf{P}^n$ и $n \geqslant r + 2$. Показать, что при подходящем выборе точки $P \notin X$ и линейного подпространства $\mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^n$ проекция из P в $\mathbf{P}^{n-1}$ (упр. 3.14) индуцирует *бирациональный* морфизм X на его образ $X' \subset \mathbf{P}^{n-1}$. Нужно воспользоваться утверждениями 4.6A, 4.7A и 4.8A. Это показывает, в частности, что бирациональное отображение из предложения 4.9 может быть получено с помощью конечного числа таких проекций.

4.10. Пусть Y — каспидальная кубическая кривая $y^2 = x^3$ в $\mathbf{A}^2$. Раздуем точку $O = (0, 0) \in \mathbf{A}^2$ и обозначим через E исключительную кривую, а через $\widetilde{Y}$ — собственный прообраз кривой Y. Показать, что E пересекает $\widetilde{Y}$ в одной точке и что $\widetilde{Y} \simeq \mathbf{A}^1$. В этом случае морфизм φ: $\widetilde{Y} \to Y$ биективен и бинепрерывен, но не является изоморфизмом.

§ 5. Неособые многообразия

Понятие неособого многообразия в алгебраической геометрии аналогично понятию дифференцируемого многообразия в дифференциальной геометрии. Например, над полем комплексных чисел неособые многообразия, рассматриваемые в «обычной» хаусдорфовой топологии, являются также комплексно-аналитическими многообразиями. Поэтому наиболее естественное (и исторически первое) определение неособости дается в терминах производных функций, задающих многообразие.

Определение. Пусть $Y \subset \mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие и $f_1, \ldots, f_t \in A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — образующие идеала $I(Y)$. Многообразие Y называется *неособым в точке* $P \in Y$, если ранг матрицы $\|(\partial f_i/\partial x_j)(P)\|$ равен $n - r$, где r — размерность многообразия Y. Это многообразие называется *неособым*, если оно неособо в каждой своей точке.

Сделаем несколько замечаний по поводу этого определения. Прежде всего понятие частной производной многочлена по одной из его переменных имеет смысл над любым полем. Оно определяется формально посредством применения обычных правил дифференцирования без использования предельного перехода. Однако в характеристике $p > 0$ при этом могут происходить всякие неожиданности. Например, если $f(x) = x^p$, то $df/dx = px^{p-1} = 0$, поскольку $p = 0$ в k. Но, во всяком случае, любая частная производная $\partial f/\partial x_i$ многочлена $f \in \mathbf{A}$ снова является многочленом. Матрица $\|(\partial f_i/\partial x_j)(P)\|$ называется *якобиевой матрицей* точки P. Легко показать, что понятие неособости не зависит от выбора образующих идеала $I(Y)$.

Недостатком данного определения является то, что оно, очевидно, зависит от вложения Y в аффинное пространство. Однако, как было показано Зарисским в его основополагающей статье [1], неособость является внутренним свойством многообразия, описываемым в терминах его локальных колец. В нашем случае это приводит к следующему результату.

Определение. Пусть A — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$. Кольцо A называется *регулярным*, если $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$.

Теорема 5.1. *Пусть $Y \subset \mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие и $P \in Y$ — некоторая точка. Многообразие Y тогда и только тогда неособо в точке P, когда локальное кольцо $\mathcal{O}_{P,Y}$ регулярно.*

Доказательство. Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$ — координаты точки P в $\mathbf{A}^n$ и $\mathfrak{a}_P = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ — максимальный идеал точки P в $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Определим линейное отображение θ: $A \to k^n$, полагая

$$\theta(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right\rangle, \quad f \in A.$$

Очевидно, что элементы $\theta(x_i - a_i)$, $i = 1, \ldots, n$, образуют базис в k^n и что $\theta(\mathfrak{a}_P^2) = 0$. Следовательно, θ индуцирует изоморфизм θ': $\mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_P^2 \simeq k^n$.

Пусть теперь $\mathfrak{b}$ — идеал многообразия Y в A и $f_1, \ldots, f_t$ — его образующие. Тогда ранг якобиевой матрицы $J = \| (\partial f_i/\partial x_j)(P) \|$ равен размерности $\theta(\mathfrak{b})$ как подпространства в k^n, а также (в силу изоморфизма θ') размерности подпространства $(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2)/\mathfrak{a}_P^2$ в $\mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_P^2$. С другой стороны, локальное кольцо $\mathcal{O}_{P, Y}$ точки P на Y получается из A факторизацией по идеалу $\mathfrak{a}$ и локализацией относительно максимального идеала $\mathfrak{a}_P$. Поэтому если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}_P$, то имеет место изоморфизм

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{a}_P/(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_P^2).$$

Подсчитывая размерности векторных пространств, получаем равенство

$$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + \operatorname{rank} J = n.$$

Пусть теперь $\dim Y = r$. Тогда локальное кольцо $\mathcal{O}_P$ имеет тоже размерность r (см. 3.2), следовательно, $\mathcal{O}_P$ тогда и только тогда регулярно, когда $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$. Но это равносильно равенству $\operatorname{rank} J = n - r$, т. е. неособости точки $P \in Y$ по определению.

Замечание. Позднее мы дадим другую характеризацию неособых точек многообразия Y в терминах пучка дифференциальных форм на нем (8.15 гл. II).

Распространим теперь понятие неособости на произвольные многообразия, воспользовавшись его независимостью от вложения.

Определение. Пусть Y — произвольное многообразие. Оно называется *неособым в точке* $P \in Y$, если локальное кольцо $\mathcal{O}_{P, Y}$ точки P является регулярным. Многообразие Y называется *неособым*, если оно неособо в каждой своей точке, и *особым* в противном случае. Точка, в которой локальное кольцо не регулярно, называется *особой точкой* многообразия Y.

Покажем теперь, что почти все точки любого многообразия являются неособыми. Для этого нам понадобится следующий предварительный результат из коммутативной алгебры.

Предложение 5.2A. *Пусть A — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов k. Тогда*

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqslant \dim A.$$

Доказательство. См. Атья — Макдональд [1, следствие 11.15, стр. 150] или Мацумура [2, стр. 78].

Теорема 5.3. *Пусть Y — произвольное многообразие. Тогда множество* $\operatorname{Sing} Y$ *особых точек этого многообразия является замкнутым собственным подмножеством в Y.*

Доказательство. (См. также 8.16 гл. II.) Покажем сначала, что $\operatorname{Sing} Y$ замкнуто в Y. Для этого достаточно показать, что $\operatorname{Sing} Y_i$ замкнуто в Y_i для каждого i в некотором аффинном открытом накрытии $Y = \bigcup Y_i$. Стало быть, можно считать многообразие Y аффинным. В силу 5.2A и доказательства теоремы 5.1 мы знаем, что ранг якобиевой матрицы всегда $\leqslant n - r$. Следовательно, множество особых точек на Y — это множество точек, где ранг $< n - r$. Значит, $\operatorname{Sing} Y$ — алгебраическое множество, идеал которого порожден идеалом $I(Y)$ и всеми минорами порядка $(n - r) \times (n - r)$ матрицы $\| \partial f_i/\partial x_j \|$. Это доказывает замкнутость множества $\operatorname{Sing} Y$ в Y.

Для того чтобы показать, что $\operatorname{Sing} Y$ является собственным подмножеством в Y, воспользуемся предложением 4.9 и сведем все к случаю, когда Y — гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$. Это можно сделать, поскольку бирациональные многообразия обладают изоморфными открытыми подмножествами. В силу замкнутости $\operatorname{Sing} Y$ мы можем ограничиться рассмотрением любого аффинного открытого подмножества в Y, поэтому можно считать, что Y — гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$.

Итак, пусть Y — гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$, заданная неприводимым уравнением $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Множество $\operatorname{Sing} Y$ в этом случае определяется условием $(\partial f/\partial x_i)(P) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Если $\operatorname{Sing} Y = Y$, то все функции $\partial f/\partial x_i$ тождественно равны нулю на Y и, следовательно, $\partial f/\partial x_i \in I(Y)$ для каждого i. Но $I(Y)$ — главный идеал, порожденный многочленом f, и $\deg(\partial f/\partial x_i) \leqslant \deg f - 1$ для каждого i, так что $\partial f/\partial x_i \equiv 0$ на $\mathbf{A}^n$ для любого i.

В характеристике 0 это уже приводит к противоречию, потому что если x_i входит в f в ненулевой степени, то $\partial f/\partial x_i \neq 0$. В характеристике $p > 0$ тот факт, что $\partial f/\partial x_i = 0$, означает, что f является многочленом от x_i^p. В нашем случае $\partial f/\partial x_i = 0$ для всех i, поэтому, извлекая корни p-й степени из коэффициентов (что возможно в силу алгебраической замкнутости поля k), получим многочлен $g(x_1, \ldots, x_n)$, такой, что $f = g^p$. Но это противоречит предположению о неприводимости многочлена f, следовательно, $\operatorname{Sing} Y$ строго содержится в Y и теорема доказана.

Пополнение

Для локального анализа особенностей нам понадобится техника пополнения локальных колец, которую мы сейчас опишем. Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Степени идеала $\mathfrak{m}$ задают топологию на A, которая называется *$\mathfrak{m}$-адической топологией*. Пополняя кольцо A относительно этой топологии, получаем его *пополнение* (или *$\mathfrak{m}$-адическое пополнение*), которое обозначается символом $\hat{A}$. По-другому $\hat{A}$ можно определить как обратный (проективный) предел $\varprojlim A/\mathfrak{m}^n$, см. Атья — Макдональд [1, гл. 10], Мацумура [2, гл. 9] или Зарисский — Самюэль [1, т. 2, гл. VIII], где содержится общая информация о пополнениях.

Значение пополнения в алгебраической геометрии заключается в том, что переход к пополнению $\hat{\mathcal{O}}_P$ локального кольца $\mathcal{O}_P$ точки P на многообразии X дает возможность изучать только локальные свойства X вблизи P. В упр. 4.7 мы видели, что изоморфизм локальных колец $\mathcal{O}_P$ и $\mathcal{O}_Q$ точек $P \in X$ и $Q \in Y$ уже влечет за собой изоморфизм некоторых открытых окрестностей этих точек и, стало быть, бирациональный изоморфизм многообразий X и Y. Таким образом, обычное локальное кольцо $\mathcal{O}_P$ несет информацию почти обо всех точках многообразия X. Пополнение же $\hat{\mathcal{O}}_P$, как будет видно ниже, несет только наиболее «локальную» информацию в близком к нашим интуитивным представлениям о локальности из топологии и дифференциальной геометрии смысле.

Напомним некоторые алгебраические свойства пополнения и приведем примеры.

Теорема 5.4А. *Пусть A — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, и пусть $\hat{A}$ — его пополнение. Тогда*

(a) *$\hat{A}$ является локальным кольцом с максимальным идеалом $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{A}$ и естественный гомоморфизм $A \to \hat{A}$ инъективен;*

(b) *если M — конечно порожденный A-модуль, то его пополнение $\hat{M}$ относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии изоморфно $M \otimes_A \hat{A}$;*

(c) $\dim A = \dim \hat{A}$;

(d) *кольцо A тогда и только тогда регулярно, когда регулярно $\hat{A}$.*

Доказательство. См. Атья — Макдональд [1, гл. 10, 11] или Зарисский — Самюэль [1, т. 2, гл. VIII].

Теорема 5.5А (структурная теорема Коэна). *Пусть A — полное регулярное локальное кольцо размерности n, содержащее некоторое поле. Тогда $A \simeq k[[x_1, \ldots, x_n]]$, где справа стоит кольцо формальных степенных рядов от $x_1, \ldots, x_n$ над полем вычетов k кольца A.*

Доказательство. См. Мацумура [2, следствие 2, стр. 206] или Зарисский — Самюэль [1, т. 2, следствие на стр. 355].

Определение. Будем говорить, что точки $P \in X$ и $Q \in Y$ *аналитически изоморфны*, если существует изоморфизм $\hat{\mathcal{O}}_P \simeq \hat{\mathcal{O}}_Q$ как k-алгебр.

Пример 5.6.1. Если $P \in X$ и $Q \in Y$ аналитически изоморфны, то $\dim X = \dim Y$. Это вытекает из теоремы 5.4А и из того факта, что размерность локального кольца любой точки многообразия равна размерности этого многообразия (упр. 3.12).

Пример 5.6.2. Если $P \in X$ и $Q \in Y$ — неособые точки на многообразиях одной и той же размерности, то они аналитически изоморфны. Это следует из теорем 5.4А и 5.5А. Этот пример служит алгебраическим аналогом того факта, что любые два многообразия (топологические, дифференцируемые или комплексно-аналитические) одинаковой размерности локально изоморфны.

Пример 5.6.3. Пусть X — плоская кубическая кривая с обыкновенной двойной точкой, заданная уравнением $y^2 = x^2(x+1)$, и пусть Y — алгебраическое множество в $\mathbf{A}^2$, определенное уравнением $xy = 0$. Мы хотим показать, что точка $O = (0, 0)$ на X аналитически изоморфна точке O на Y. (Поскольку мы пока еще не развили общую теорию локальных колец точек на приводимых алгебраических множествах, то будем пользоваться ad hoc определением $\mathcal{O}_{O,Y} = (k[x, y]/(xy))_{(x,y)}$. Стало быть, $\hat{\mathcal{O}}_{O,Y} \simeq k[[x, y]]/(xy)$.) Этот пример отражает тот геометрический факт, что вблизи O кривая X устроена как две пересекающиеся прямые.

Чтобы доказать сформулированное выше утверждение, рассмотрим пополнение $\hat{\mathcal{O}}_{O,X}$, которое, как легко видеть, изоморфно $k[[x, y]]/(y^2 - x^2 - x^3)$. Ключевым моментом здесь является то, что начальная форма уравнения, а именно $y^2 - x^2$, разлагается в произведение двух множителей $y + x$ и $y - x$ (мы предполагаем, что $\operatorname{char} k \neq 2$). В таком случае в $k[[x, y]]$ существуют такие формальные степенные ряды

$$g = y + x + g_2 + g_3 + \ldots,$$
$$h = y - x + h_2 + h_3 + \ldots,$$

где g_i, h_i — однородные многочлены от x, y степени i, что $y^2 - x^2 - x^3 = gh$. Действительно, ряды g и h можно построить по индукции, вычисляя шаг за шагом члены g_i, h_i. Для вычисления g_2 и h_2 надо решить уравнение

$$(y - x)\, g_2 + (y + x)\, h_2 = -x^3.$$

Оно разрешимо, поскольку $y - x$ и $y + x$ порождают максимальный идеал кольца $k[[x, y]]$. Вычисление g_3 и h_3 сводится к уравнению

$$(y - x) g_3 + (y + x) h_3 = -g_2 h_2,$$

которое опять разрешимо, и так далее.

Таким образом, $\hat{\mathcal{O}}_{O,X} \simeq k[[x, y]]/(gh)$. Далее, поскольку g и h начинаются с линейно независимых членов первой степени, то существует автоморфизм кольца $k[[x, y]]$, переводящий g и h в x и y соответственно. Это показывает, что $\hat{\mathcal{O}}_{O,X} \simeq k[[x, y]]/(xy)$, как и утверждалось.

Отметим, что в этом примере кольцо $\mathcal{O}_{O,X}$ целостное, а его пополнение $\hat{\mathcal{O}}_{O,X}$ нет.

Сформулируем теперь алгебраический результат, который будет использоваться в упр. 5.15.

Теорема 5.7А (теория исключения). *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — однородные многочлены от $x_0, \ldots, x_n$ с неопределенными коэффициентами a_{ij}. Тогда существует некоторое множество многочленов $g_1, \ldots, g_t$ от a_{ij} с целыми коэффициентами, однородных в отдельности по коэффициентам каждого из f_i и обладающих следующим свойством: для любого поля k и любых значений $a_{ij} \in k$ необходимым и достаточным условием существования общего нуля, отличного от $(0, 0, \ldots, 0)$, для многочленов f_i является обращение в нуль всех многочленов g_j в заданных значениях $a_{ij} \in k$.*

Доказательство. См. Ван дер Варден [1, т. II, § 80].

Упражнения

5.1. Указать особые точки и начертить следующие кривые в $\mathbf{A}^2$ (предполагается, что $\operatorname{char} k \neq 2$). Выяснить, какому из уравнений соответствует каждая из изображенных на рис. 4 кривых.

(a) $x^2 = x^4 + y^4$,

(b) $xy = x^6 + y^6$,

(c) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$,

(d) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

5.2. Указать особые точки и описать тип особенностей следующих поверхностей в $\mathbf{A}^3$ (предполагается, что $\operatorname{char} k \neq 2$). Выяснить, какому из уравнений соответствует каждая из изображенных на рис. 5 поверхностей.

(a) $xy^2 = z^2$,

(b) $x^2 + y^2 = z^2$,

(c) $xy + x^3 + y^3 = 0$.

5.3. *Кратности.* Пусть $Y \subset \mathbf{A}^2$ — кривая, определенная уравнением $f(x, y) = 0$, и пусть $P = (a, b) \in \mathbf{A}^2$ — произвольная точка. Сделаем замену координат, так чтобы P стала точкой $(0, 0)$, и представим f в виде суммы $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d$, где f_i — однородные многочлены степени i от x

и y. *Кратностью* точки P на Y называется наименьшее целое число r, обозначаемое через $\mu_P(Y)$, такое, что $f_r \neq 0$. (Отметим, что $P \in Y \Leftrightarrow \mu_P(Y) > 0$.) Линейные множители многочлена f_r называются *касательными направлениями* в точке P.

(a) Показать, что $\mu_P(Y) = 1 \Leftrightarrow P$ — неособая точка многообразия Y.

(b) Вычислить кратность каждой из особых точек в упр. 5.1.

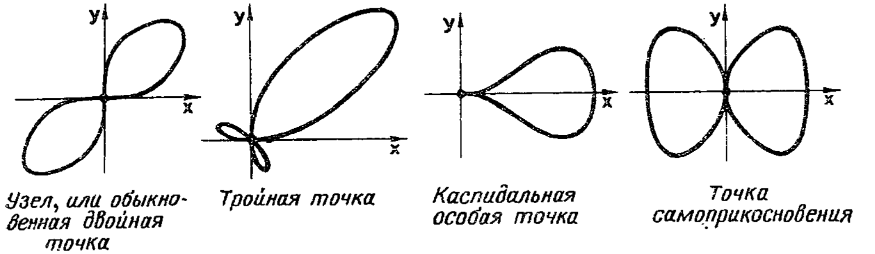


Рис. 4. Особые точки плоских кривых.

5.4. *Кратность пересечения.* Пусть $Y, Z \subset \mathbf{A}^2$ — различные кривые, заданные уравнениями $f = 0$, $g = 0$, и пусть $P \in Y \cap Z$. Определим *кратность пересечения* $(Y \cdot Z)_P$ кривых Y и Z в точке P как длину $\mathcal{O}_P$-модуля $\mathcal{O}_P/(f, g)$.

(a) Показать, что кратность пересечения $(Y \cdot Z)_P$ конечна и что $(Y \cdot Z)_P \geqslant \mu_P(Y) \cdot \mu_P(Z)$.

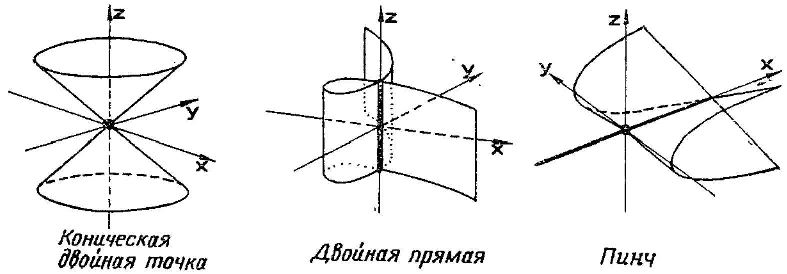


Рис. 5. Особенности поверхностей.

(b) Показать, что для почти всех (т. е. всех, кроме конечного числа) прямых L, проходящих через P, $P \in Y$, имеет место равенство $(L \cdot Y) = \mu_P(Y)$.

(c) Пусть Y — кривая степени d в $\mathbf{P}^2$ и L — прямая на $\mathbf{P}^2$. Показать, что $(L \cdot Y) = d$, где по определению $(L \cdot Y) = \sum (L \cdot Y)_P$ по всем точкам $P \in L \cap Y$ и $(L \cdot Y)_P$ определяется с помощью подходящего аффинного покрытия $\mathbf{P}^2$.

5.5. Для каждого целого $d > 0$ и p, равного нулю или какому-нибудь простому числу, написать уравнение неособой кривой степени d в $\mathbf{P}^2$ над полем k характеристики p.

5.6. *Раздутие особенностей кривой.* (a) Пусть Y — каспидальная кривая или кривая с обыкновенной двойной точкой (см. следующий п. (b)) из упр. 5.1. Показать, что кривая $\widetilde{Y}$, полученная раздутием Y в точке $O = (0, 0)$, неособа (ср. 4.9.1 и упр. 4.10).

(b) Определим *узел* (называемый также *обыкновенной двойной точкой*) как двойную точку (т. е. точку кратности 2) плоской кривой с различными касательными направлениями (упр. 5.3). Пусть P — узел на плоской кривой Y. Показать, что $\varphi^{-1}(P)$ на $\widetilde{Y}$ состоит из двух различных неособых точек на раздутой кривой $\widetilde{Y}$, где $\varphi: \widetilde{Y} \to Y$ — морфизм раздутия В таком случае мы говорим, что раздутие точки P ***разрешает особенности*** кривой Y в P.

(c) Пусть $P \in Y$ — точка самоприкосновения из упр. 5.1 и $\varphi: \widetilde{Y} \to Y$ — раздутие Y в P. Показать, что $\varphi^{-1}(P)$ — узел. Согласно (b), мы заключаем отсюда, что точку самоприкосновения можно разрешить двумя последовательными раздутиями.

(d) Пусть Y — плоская кривая $y^3 = x^5$, имеющая в O «касп высшего порядка». Показать, что O — тройная точка на Y и ее раздутие приводит к двойной точке (какого типа?) и что последующее раздутие этой двойной точки разрешает особенности Y в O.

Замечание. Позднее в 3.8 гл. V мы увидим, что любую особую точку плоской кривой можно разрешить с помощью конечной последовательности подходящих раздутий.

5.7. Пусть $Y \subset \mathbf{P}^2$ — неособая плоская кривая степени больше 1, определенная уравнением $f(x, y, z) = 0$, и пусть $X \subset \mathbf{A}^3$ — аффинная поверхность, определяемая f (т. е. конус на Y, см. упр. 2.10). Пусть $\varphi: \widetilde{X} \to X$ — раздутие X в точке $P = (0, 0, 0)$, *вершине* конуса X.

(a) Показать, что X имеет единственную особую точку, а именно точку P.

(b) Показать, что многообразие $\widetilde{X}$ неособо (покрыв его открытыми аффинными множествами).

(c) Показать, что $\varphi^{-1}(P)$ изоморфно Y.

5.8. Пусть $Y \subset \mathbf{P}^n$ — проективное многообразие размерности r, $f_1, \ldots, f_t \in S = k[x_0, \ldots, x_n]$ — однородные многочлены, порождающие идеал многообразия Y, и $P \in Y$ — точка с однородными координатами $(a_0, \ldots, a_n)$. Показать, что точка P неособа на Y тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\| (\partial f_i/\partial x_j)(a_0, \ldots, a_n) \|$ равен $n - r$. [*Указание.* (a) Показать, что ранг не зависит от выбора однородных координат точки P; (b) перейти к открытому аффинному множеству $U_i \subset \mathbf{P}^n$, содержащему P, и рассмотреть соответствующую аффинную якобиеву матрицу; (c) воспользоваться теоремой Эйлера об однородных функциях, утверждающей, в частности, что если f — однородный многочлен степени d, то $\sum x_i (\partial f/\partial x_i) = df$.]

5.9. Пусть $f \in k[x, y, z]$ — однородный многочлен и $Y = Z(f) \subset \mathbf{P}^2$ — алгебраическое множество, определенное f. Предположим, что в каждой точке $P \in Y$ по крайней мере одно из значений частных производных $(\partial f/\partial x)(P)$, $(\partial f/\partial y)(P)$, $(\partial f/\partial z)(P)$ отлично от нуля. Показать, что многочлен f неприводим (следовательно, Y — неособое многообразие). [*Указание.* Воспользоваться упр. 3.7.]

5.10. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в локальном кольце $\mathcal{O}_P$ точки P на многообразии X. Определим *касательное пространство Зарисского* $T_P(X)$ к X в точке P как двойственное векторное k-пространство к пространству $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(a) Показать, что $\dim T_P(X) \geqslant \dim X$ для любой точки $P \in X$ и равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P неособая.

(b) Показать, что для всякого морфизма $\varphi: X \to Y$ существует естественное k-линейное отображение

$$T_P(\varphi): T_P(X) \to T_{\varphi(P)}(Y).$$

(c) Пусть φ — вертикальная проекция параболы $x = y^2$ на ось x-ов. Показать, что индуцированное отображение $T_0(\varphi)$ касательных пространств в начале координат является нулевым.

5.11. *Эллиптическая кривая 4-й степени в* $\mathbf{P}^3$. Пусть Y — алгебраическое множество в $\mathbf{P}^3$, определенное уравнениями $x^2 - xz - yw = 0$ и $yz - xw - zw = 0$, $P \in Y$ — точка $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 1)$ и φ — проекция из P в плоскость $w = 0$. Показать, что φ индуцирует изоморфизм $Y - P$ на плоскую кубическую кривую $y^2z - x^3 + xz^2 = 0$ без точки $(1, 0, -1)$. Вывести отсюда, что Y — неприводимая неособая кривая. Она называется *эллиптической кривой 4-й степени* в $\mathbf{P}^3$. Это еще один пример полного пересечения (упр. 2.17).

5.12. *Квадратичные гиперповерхности* (*квадрики*). Пусть $\operatorname{char} k \neq 2$ и f — однородный многочлен степени 2 от $x_0, \ldots, x_n$.

(a) Показать, что подходящей линейной заменой переменных f можно привести к виду $f = x_0^2 + \ldots + x_r^2$, где $0 \leqslant r \leqslant n$ — некоторое целое число.

(b) Показать, что многочлен f неприводим тогда и только тогда, когда $r \geqslant 2$.

(c) Предположим, что $r \geqslant 2$, и пусть Q — квадратичная гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$, определенная уравнением $f = 0$. Показать, что множество особых точек $Z = \operatorname{Sing} Q$ квадрики Q является *линейным* многообразием (упр. 2.11) размерности $n - r - 1$. В частности, Q неособа тогда и только тогда, когда $r = n$.

(d) Показать, что в случае $r < n$ квадрика Q является конусом с вершиной Z над неособой квадрикой $Q' \subset \mathbf{P}^r$ в следующем смысле, обобщающем понятие конуса, рассмотренного в упр. 2.10. Пусть $Y \subset \mathbf{P}^r$ — замкнутое подмножество и Z — линейное подпространство размерности $n - r - 1$ в $\mathbf{P}^n$, и пусть $\mathbf{P}^r$ вложено в $\mathbf{P}^n$ так, чтобы $\mathbf{P}^r \cap Z = \varnothing$. Определим ***конус над** Y **с вершиной** Z* как объединение всех прямых, соединяющих точки из Y с точками из Z.

5.13. Известно, что всякое регулярное локальное кольцо целозамкнуто и не имеет делителей нуля (Мацумура [2, теорема 36, стр. 121]). Поэтому из 5.3 следует, что на любом многообразии нормальные точки (т. е. точки, в которых многообразие нормально) составляют непустое открытое подмножество (упр. 3.17). Показать, не используя 5.3, что множество точек, в которых многообразие не является нормальным, составляет в нем собственное замкнутое подмножество. (Использовать теорему о конечности целого замыкания, см. 3.9A.)

5.14. *Аналитически изоморфные особенности.* (a) Пусть $P \in Y$ и $Q \in Z$ — аналитически изоморфные особенности плоских кривых. Показать, что тогда кратности $\mu_P(Y)$ и $\mu_Q(Z)$ одинаковы (упр. 5.3).

(b) Обобщая пример 5.6.3, показать, что если $f = f_r + f_{r+1} + \ldots \in k[[x, y]]$ и если начальная форма f_r разлагается в произведение $g_s h_t$, где g_s, h_t — формы степени s и t соответственно и не имеют общих линейных множителей, то существуют формальные степенные ряды

$$g = g_s + g_{s+1} + \ldots,$$
$$h = h_t + h_{t+1} + \ldots$$

в $k[[x, y]]$, такие, что $f = gh$.

(c) Пусть Y определено уравнением $f(x, y) = 0$ в $\mathbf{A}^2$ и $P = (0, 0)$ — точка кратности r на Y, так что многочлен f имеет вид $f = f_r +$ члены более высокого порядка. Будем называть точку P *обыкновенной r-кратной* точкой, если f_r разлагается в произведение r *различных* линейных множителей. Показать, что любые две обыкновенные двойные точки аналитически изоморфны. То же самое верно и для обыкновенных тройных точек. Показать, однако, что существует однопараметрическое семейство попарно аналитически неизоморфных обыкновенных 4-кратных точек.

*(d) Пусть char $k \neq 2$. Показать, что любая двойная точка плоской кривой аналитически изоморфна особенности в (0, 0) кривой $y^2 = x^r$ для некоторого однозначно определенного $r \geqslant 2$. Если $r = 2$, то это обыкновенная двойная точка (упр. 5.6), если $r = 3$, то это так называемая *каспидальная особая точка*, и если $r = 4$, то это точка *самоприкосновения*. Дальнейшее обсуждение см. в 3.9.5 гл. V.

5.15. *Семейства плоских кривых.* Однородный многочлен f степени d от трех переменных x, y, z имеет $\binom{d+2}{2}$ (число сочетаний из $d+2$ по 2) коэффициентов. Рассмотрим эти коэффициенты как координаты точки в $\mathbf{P}^N$, где $N = \binom{d+2}{2} - 1 = d(d+3)/2$.

(a) Показать, что это задает соответствие между всеми алгебраическими множествами в $\mathbf{P}^2$, которые задаются уравнениями степени d, и всеми точками из $\mathbf{P}^N$. Это соответствие взаимно однозначно, кроме случаев, когда f имеет кратные множители.

(b) Показать, что в (a) (неприводимые) неособые кривые степени d взаимно однозначно соответствуют точкам непустого открытого по Зарисскому подмножества в $\mathbf{P}^N$. [*Указание.* (1) Применить теорию исключения 5.7A к однородным многочленам $\partial f/\partial x_0, \ldots, \partial f/\partial x_n$; (2) воспользоваться предыдущими упр. 5.5, 5.8, 5.9.]

§ 6. Неособые кривые

Общую проблему классификации алгебраических многообразий, исходя из соображений, что неособые проективные многообразия лучше, чем другие, можно разбить на следующие три задачи: (a) классифицировать многообразия с точностью до бирациональной эквивалентности; (b) в каждом классе бирациональной эквивалентности найти неособое проективное многообразие; (c) классифицировать неособые проективные многообразия в заданном классе бирациональной эквивалентности.

Вообще говоря, каждая из этих трех задач очень трудна. Однако в случае кривых ситуация намного упрощается. В этом параграфе мы дадим решение задач (b) и (c), показав, что в каждом классе бирациональной эквивалентности существует единственная неособая проективная кривая, и приведем пример, показывающий, что не все кривые между собой бирационально эквивалентны (упр. 6.2). Таким образом, с каждым конечно порожденным расширением K поля k степени трансцендентности 1 (которое мы будем называть *функциональным полем размерности* 1) можно связать единственную (с точностью до изоморфизма) неособую проективную кривую C_K с полем функций K. Более того, будет показано, что каждому k-гомоморфизму $K_2 \to K_1$ функциональных полей размерности 1 соответствует морфизм проективных кривых $C_{K_1} \to C_{K_2}$.

Для решения этих задач мы изберем окольный путь и начнем с определения понятия «абстрактной неособой кривой», связанной с заданным функциональным полем. Заранее не ясно даже, что она будет являться многообразием. Однако впоследствии окажется, что в этом определении не содержится ничего нового.

Напомним прежде всего некоторые основные факты о кольцах нормирования и дедекиндовых областях.

Определение. Пусть K — произвольное поле и G — линейно упорядоченная абелева группа. *Нормированием* поля K со значениями в G называется отображение v: $K - \{0\} \to G$, обладающее следующими двумя свойствами:

(1) $v(xy) = v(x) + v(y)$,

(2) $v(x + y) \geqslant \min(v(x), v(y))$

для любых $x, y \in K$, $x, y \neq 0$.

Множество $R = \{x \in K \mid v(x) \geqslant 0\} \cup \{0\}$ является подкольцом в K, которое называется *кольцом нормирования* v. Его подмножество $\mathfrak{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\} \cup \{0\}$ является идеалом в R, так что $(R, \mathfrak{m})$ — локальное кольцо. *Кольцом нормирования* называется всякое целостное кольцо, являющееся кольцом нормирования некоторого нормирования своего поля частных. Кольцо нормирования R с полем частных K будем называть *кольцом нормирования поля* K. Если существует подполе k поля K, такое, что $v(x) = 0$ для всех $x \in k - \{0\}$, то мы будем говорить, что v — *нормирование поля* K/k (K над k) и R — *кольцо нормирования поля* K/k. (Отметим, что кольца нормирования не являются, вообще говоря, нётеровыми!)

Определение. Пусть A, B — локальные кольца, содержащиеся в поле K. Будем говорить тогда, что *B доминирует над A*, если $A \subset B$ и $\mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{m}_A$.

Теорема 6.1A. *Пусть K — произвольное поле. Локальное кольцо R, содержащееся в K, тогда и только тогда будет кольцом нормирования поля K, когда оно является максимальным элементом множества локальных колец, содержащихся в K, относительно отношения доминирования. Всякое локальное кольцо, содержащееся в K, доминируется некоторым кольцом нормирования поля K.*

Доказательство. См. Бурбаки [2, гл. VI, § 1, 3] или Атья — Макдональд [1, гл. 5, стр. 84, и упр. на стр. 91].

Определение. Нормирование v называется *дискретным*, если его группа значений G есть группа целых чисел. Соответствующее кольцо нормирования называется *кольцом дискретного нормирования*.

Теорема 6.2A. *Пусть A — нётерово целостное локальное кольцо размерности 1 с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) A — *кольцо дискретного нормирования*;
(ii) A *целозамкнуто*;
(iii) A — *регулярное локальное кольцо*;
(iv) $\mathfrak{m}$ — *главный идеал*.

Доказательство. См. Атья — Макдональд [1, предложение 9.2, стр. 116].

Определение. *Дедекиндовой областью* называется всякое целозамкнутое нётерово целостное кольцо размерности один.

Так как целозамкнутость — свойство локальное (Атья — Макдональд [1, предложение 5.13, стр. 80]), то всякая локализация дедекиндовой области по ненулевому простому идеалу является кольцом дискретного нормирования.

Теорема 6.3А. *Целое замыкание дедекиндовой области в конечном расширении ее поля частных снова является дедекиндовой областью.*

Доказательство. См. Зарисский — Самюэль [1, т. 1, теорема 19].

Возвратимся теперь к случаю функционального поля K размерности 1 над k, где k — фиксированное алгебраически замкнутое основное поле. Мы хотим установить связь между множеством неособых точек кривой с полем функций K и множеством колец дискретного нормирования поля K/k. Пусть P — точка на неособой кривой Y. Тогда, согласно 5.1, локальное кольцо $\mathcal{O}_P$ является регулярным локальным кольцом размерности один, и по 6.2А оно есть кольцо дискретного нормирования. Поле функций K на Y является его полем частных, и поскольку $k \subset \mathcal{O}_P$, то $\mathcal{O}_P$ — кольцо нормирования поля K/k. Стало быть, локальные кольца неособой кривой Y составляют подмножество множества C_K всех колец дискретного нормирования поля K/k. Это служит мотивировкой определения абстрактной неособой кривой. Но перед тем, как ввести это определение, приведем несколько предварительных результатов.

Лемма 6.4. *Пусть Y — квазипроективное многообразие и P, $Q \in Y$ — такие его точки, что $\mathcal{O}_Q \subset \mathcal{O}_P$ как подкольца в $K(Y)$. Тогда $P = Q$.*

Доказательство. Вложим Y в $\mathbf{P}^n$. Взяв в случае необходимости проективное замыкание многообразия Y, можно считать Y проективным. Подходящей заменой координат можно добиться того, чтобы точки P и Q не лежали в гиперплоскости H_0, определенной уравнением $x_0 = 0$. Тогда P, Q принадлежат аффинному многообразию $Y \cap (\mathbf{P}^n - H_0)$, т. е. можно считать Y аффинным.

Пусть A — аффинное координатное кольцо многообразия Y. Тогда существуют максимальные идеалы $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n} \subset A$, такие, что $\mathcal{O}_P = A_\mathfrak{m}$ и $\mathcal{O}_Q = A_\mathfrak{n}$ Если $\mathcal{O}_Q \subset \mathcal{O}_P$, то $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$, но $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал, поэтому $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Следовательно, $P = Q$, согласно 3.2(b).

Лемма 6.5. *Пусть K — функциональное поле размерности 1 над k и $x \in K$ — некоторый его элемент. Тогда $\{R \in C_K \mid x \notin R\}$ — конечное множество.*

Доказательство. Пусть R — кольцо нормирования, тогда $x \notin R$, если и только если $1/x \in \mathfrak{m}_R$. Положив $y = 1/x$, нам надо показать, следовательно, что если $y \in K$, $y \neq 0$, то множество $\{R \in C_K \mid y \in \mathfrak{m}_R\}$ конечно. Можно предполагать, что $y \notin k$, поскольку в противном случае таких R, чтобы $y \in \mathfrak{m}_R$, очевидно, не существует.

Рассмотрим подкольцо $k[y]$ в K, порожденное элементом y. Так как поле k алгебраически замкнуто, то y трансцендентен над k и, следовательно, $k[y]$ — кольцо многочленов. Кроме того, поскольку поле K конечно порождено и имеет степень трансцендентности 1 над k, то оно является конечным расширением поля $k(y)$. Пусть B — целое замыкание кольца $k[y]$ в K, тогда, согласно 6.3А, B — дедекиндова область и является также конечно порожденной k-алгеброй (см. 3.9А).

Далее, если y содержится в кольце дискретного нормирования R поля K/k, то $k[y] \subset R$ и, так как R целозамкнуто в K, то $B \subset R$. Положим $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_R \cap B$. Тогда $\mathfrak{n}$ — максимальный идеал кольца B и B доминируется R. Но $B_\mathfrak{n}$ тоже является кольцом дискретного нормирования поля K/k и, следовательно, совпадает с R в силу свойства максимальности колец нормирования (6.1А).

Если, кроме того, $y \in \mathfrak{m}_R$, то $y \in \mathfrak{n}$. Кольцо B мы можем интерпретировать как аффинное координатное кольцо некоторого аффинного многообразия Y (см. 1.4.6). Так как B — дедекиндова область, то Y одномерно и неособо. Элемент $y \in \mathfrak{n}$ интерпретируется теперь как регулярная функция на Y, обращающаяся в нуль в точке, соответствующей максимальному идеалу $\mathfrak{n}$. Так как $y \not\equiv 0$, то функция y обращается в нуль только в конечном множестве точек. Ввиду взаимно однозначного соответствия между точками из Y и максимальными идеалами из B (см. 3.2) эти точки определяют конечное число максимальных идеалов в B, в которых содержится y, а также соответствующие кольца дискретного нормирования $R = B_\mathfrak{n}$ для каждого максимального идеала $\mathfrak{n}$ в B, содержащего y. Таким образом, $y \in \mathfrak{m}_R$ только для конечного числа $R \in C_k$, что и утверждалось.

Следствие 6.6. *Любое кольцо дискретного нормирования поля K/k изоморфно локальному кольцу точки на некоторой неособой аффинной кривой.*

Доказательство. Пусть R — кольцо дискретного нормирования поля K/k и $y \in R - k$ — некоторый элемент. Тогда конструкция, изложенная в доказательстве леммы 6.5, приводит к требуемой кривой и точке на ней с локальным кольцом R.

Теперь мы в состоянии определить понятие абстрактной неособой кривой. Пусть K — функциональное поле размерности 1 над k (т. е. конечно порожденное расширение поля k степени трансцендентности 1). Обозначим через C_K множество всех колец дискретного нормирования поля K/k. Элементы из C_K мы будем иногда называть *точками* и писать $P \in C_K$, где P отвечает кольцу нормирования R_P. Отметим, что множество C_K бесконечно, потому что оно содержит все локальные кольца любой неособой кривой с полем функций K: все эти локальные кольца различны (6.4) и их бесконечно много (упр. 4.8). Превратим C_K в топологическое пространство, указав в качестве замкнутых множеств всевозможные конечные подмножества в C_K, а также пустое множество и все пространство. На каждом открытом подмножестве $U \subset C_K$ определим кольцо *регулярных функций* $\mathcal{O}(U)$, полагая $\mathcal{O}(U) = \bigcap_{P \in U} R_P$. Элемент $f \in \mathcal{O}(U)$ определяет функцию из U в k: $f(P)$ — это класс вычетов f по модулю максимального идеала кольца R_P. (Отметим, что, согласно 6.6, поле вычетов $R/\mathfrak{m}_R$ изоморфно k для любого $R \in C_K$.) Элементы $f, g \in \mathcal{O}(U)$ определяют одну и ту же функцию тогда и только тогда, когда $f - g \in \mathfrak{m}_P$ для всех $P \in U$, которых, как мы знаем, бесконечное множество, так что в силу 6.5 $f = g$. Следовательно, элементы из $\mathcal{O}(U)$ можно отождествлять с функциями из U в k. Отметим, что по лемме 6.5 каждый элемент $f \in K$ является регулярной функцией на некотором открытом подмножестве $U \subset C_K$. Таким образом, поле функций на C_K, определяемое, как в § 3, в точности совпадает с K.

Определение. Пусть K — функциональное поле размерности 1 над k и C_K — множество всех его колец дискретного нормирования над k с определенной выше топологией. *Абстрактной неособой кривой* (с полем функций K) называется открытое подмножество $U \subset C_K$ с индуцированной топологией и индуцированным понятием регулярных функций на его открытых подмножествах.

Отметим, что заранее не ясно даже, является ли абстрактная неособая кривая многообразием. Поэтому, добавляя к категории многообразий абстрактные кривые, мы получаем, вообще говоря, некоторое ее расширение.

Определение. *Морфизмом* $\varphi: X \to Y$ абстрактных неособых кривых или многообразий называется непрерывное отображение, такое, что для всякого открытого подмножества $V \subset Y$ и всякой регулярной функции $f: V \to k$ функция $f \circ \varphi$ является регулярной на $\varphi^{-1}(V)$.

Покажем теперь, что наша категория в действительности не расширилась, т.е. докажем, что каждая неособая квазипроективная кривая изоморфна абстрактной неособой кривой, а также обратное утверждение. Докажем, в частности, что C_K изоморфно неособой проективной кривой.

Предложение 6.7. *Каждая неособая квазипроективная кривая Y изоморфна абстрактной неособой кривой.*

Доказательство. Пусть K — поле функций на Y. Тогда, согласно 5.1 и 6.2А, каждое локальное кольцо $\mathcal{O}_P$ точки $P \in Y$ является кольцом дискретного нормирования поля K/k. Кроме того, согласно 6.4, различные точки определяют различные подкольца в K. Пусть $U \subset C_K$ — множество всех локальных колец кривой Y и $\varphi: Y \to U$ — биективное отображение, определенное формулой $\varphi(P) = \mathcal{O}_P$.

Покажем прежде всего, что U — открытое подмножество в C_K. Так как открытые подмножества в C_K — это дополнения к конечным подмножествам, достаточно показать, что U содержит непустое открытое множество. На основании 4.3 кривую Y можно считать аффинной с аффинным координатным кольцом A. Кольцо A является конечно порожденной k-алгеброй, и, согласно 3.2, поле K есть поле частных кольца A, а U — множество всех локализаций A по его максимальным идеалам. Поскольку все такие локальные кольца являются отличными друг от друга кольцами дискретного нормирования, то U состоит в действительности из всех колец дискретного нормирования поля K/k, содержащих A. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система образующих алгебры A над k. Тогда $A \subset R_P$, если и только если $x_1, \ldots, x_n \in R_P$. Стало быть, $U = \bigcap U_i$, где $U_i = \{P \in C_K \mid x_i \in R_P\}$. Но, согласно 6.5, множество $\{P \in C_K \mid x_i \notin R_P\}$ конечно. Поэтому каждое U_i, а следовательно, и U открыты.

Таким образом, мы показали, что множество U является абстрактной неособой кривой. Для того чтобы показать, что φ — изоморфизм, надо проверить только, что кольца регулярных функций на соответствующих открытых подмножествах в Y и U одинаковы. Но это следует из определения регулярных функций на U и из того факта, что $\mathcal{O}(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_{P,Y}$ для всякого открытого множества $V \subset Y$.

Далее нам понадобится следующий результат о продолжении морфизмов кривых в проективные многообразия, который представляет также и самостоятельный интерес.

Предложение 6.8. *Пусть X — абстрактная неособая кривая, $P \in X$ — точка, Y — некоторое проективное многообразие и φ: $X - P \to Y$ — морфизм. Тогда существует единственный морфизм $\bar{\varphi}$: $X \to Y$, продолжающий φ.*

Доказательство. Вложим Y в качестве замкнутого подмножества в проективное пространство $\mathbf{P}^n$. Достаточно будет показать, что φ продолжается до морфизма X в $\mathbf{P}^n$, поскольку в таком случае образ X обязательно должен содержаться в Y. Таким образом, мы сводим все к случаю $Y = \mathbf{P}^n$.

Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — однородные координаты в $\mathbf{P}^n$ и $U \subset \mathbf{P}^n$ — открытое подмножество, определяемое условиями $x_i \neq 0$ для всех $i = 0, \ldots, n$. Можно предполагать, что $\varphi(X - P) \cap U \neq \varnothing$. Действительно, если $\varphi(X - P) \cap U = \varnothing$, то $\varphi(X - P) \subset \mathbf{P}^n - U$. Многообразие $\mathbf{P}^n - U$ является объединением гиперплоскостей H_i, определяемых уравнениями $x_i = 0$. Поскольку $\varphi(X - P)$ неприводимо, оно должно содержаться в некоторой гиперплоскости H_i. Но $H_i \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ и $\varphi|_{X-P}$: $X - P \to \mathbf{P}^n$ пропускается через вложение H_i: $\mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}^n$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\varphi(X - P) \cap U \neq \varnothing$.

Для каждых i, j отношение x_i/x_j является регулярной функцией на U, которая посредством отображения φ определяет регулярную функцию f_{ij} на открытом подмножестве кривой X. Мы будем рассматривать f_{ij} как рациональную функцию на X, т. е. $f_{ij} \in K$, где K — поле функций на X.

Пусть v — нормирование поля K, ассоциированное с кольцом нормирования R_P. Положим $r_i = v(f_{i0})$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $r_i \in \mathbf{Z}$. Так как $x_i/x_j = (x_i/x_0)/(x_j/x_0)$, то $v(f_{ij}) = r_i - r_j$, $i, j = 0, \ldots, n$. Выберем индекс k с минимальным значением r_k среди $r_0, \ldots, r_n$. Тогда $v(f_{ik}) \geqslant 0$ для всех i, следовательно, $f_{0k}, \ldots, f_{nk} \in R_P$. Положим теперь $\bar{\varphi}(P) = (f_{0k}(P), \ldots, f_{nk}(P))$ и $\bar{\varphi}(Q) = \varphi(Q)$ для $Q \neq P$. Покажем, что $\bar{\varphi}$ является морфизмом из X в $\mathbf{P}^n$, продолжающим морфизм φ, и что $\bar{\varphi}$ единствен. Единственность очевидна по построению (а также следует из 4.1). Для доказательства того, что $\bar{\varphi}$ — морфизм, достаточно показать, что прообразами регулярных функций в окрестности точки $\bar{\varphi}(P)$ относительно $\bar{\varphi}$ являются регулярные функции на X. Пусть $U_k \subset \mathbf{P}^n$ — открытое множество $x_k \neq 0$. Тогда $\bar{\varphi}(P) \in U_k$, так как $f_{kk}(P) = 1$. Но U_k — аффинное многообразие с аффинным

координатным кольцом

$$k[x_0/x_k, \ldots, x_n/x_k].$$

Прообразами функции $x_0/x_k, \ldots, x_n/x_k$ являются функции $f_{0k}, \ldots, f_{nk}$ на X, которые регулярны в точке P по построению. Отсюда непосредственно следует, что для любой маленькой окрестности $V \subset U_k$ точки $\bar{\varphi}(P)$ прообразами регулярных функций на V служат регулярные функции на X. Стало быть, $\bar{\varphi}$ — морфизм, что завершает доказательство.

Докажем теперь основной результат этого параграфа.

Теорема 6.9. *Пусть K — функциональное поле размерности 1 над полем k. Тогда определенная выше абстрактная неособая кривая C_K изоморфна неособой проективной кривой.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Выберем покрытие кривой $C = C_K$ открытыми подмножествами U_i, изоморфными неособым аффинным кривым, и обозначим через Y_i проективные замыкания этих аффинных кривых. Используя 6.8, построим морфизмы φ_i: $C \to Y_i$, затем рассмотрим произведение отображений φ: $C \to \prod Y_i$ и обозначим через Y замыкание образа кривой C. Тогда Y — проективная кривая, и оказывается, что φ: $C \to Y$ — изоморфизм.

Пусть $P \in C$ — произвольная точка. Согласно 6.6, существует неособая аффинная кривая V и точка $Q \in V$ с $R_P \simeq \mathcal{O}_Q$. Отсюда следует, что поле функций на кривой V изоморфно K и, согласно 6.7, V изоморфно открытому подмножеству кривой C. Тем самым мы показали, что каждая точка $P \in C$ обладает открытой окрестностью, изоморфной некоторой аффинной кривой.

Так как C квазикомпактна, то из покрытия этими окрестностями мы можем выбрать некоторое конечное покрытие $\{U_i\}$, где каждая из окрестностей U_i изоморфна аффинной кривой V_i. Вложим V_i в $\mathbf{A}^{n_i}$, рассматривая $\mathbf{A}^{n_i}$ как открытое подмножество в $\mathbf{P}^{n_i}$, и обозначим через Y_i проективное замыкание V_i в $\mathbf{P}^{n_i}$. Тогда Y_i — проективная кривая и определен морфизм φ_i: $U_i \to Y_i$, который изоморфно отображает U_i на ее образ в Y_i.

Применяя предложение 6.8 к конечному множеству точек $C - U_i$, построим морфизм $\bar{\varphi}_i$: $C \to Y_i$, продолжающий морфизм φ_i. Пусть $\prod Y_i$ — произведение проективных кривых Y_i (упр. 3.16) Тогда $\prod Y_i$ является проективным многообразием. Пусть φ: $C \to \prod Y_i$ —«диагональное» отображение $\varphi(P) = \prod \bar{\varphi}_i(P)$ и Y — замыкание образа отображения φ. Тогда Y — проективное многообразие и φ: $C \to Y$ — морфизм, образ которого плотен в Y (откуда следует, что Y — кривая).

Осталось показать, что φ — изоморфизм. Для каждой точки $P \in C$ существует i, такое, что $P \in U_i$. Имеет место следующая коммутативная диаграмма доминантных морфизмов:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \uparrow & & \downarrow \pi \\ \cup & & \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & Y_i \end{array}$$

где π — отображение проекции на i-й сомножитель. Следовательно, мы имеем следующую цепочку вложений локальных колец (см. упр. 3.3):

$$\mathcal{O}_{\varphi_i(P),\, Y_i} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\varphi(P),\, Y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{P,\, C}.$$

Здесь крайние локальные кольца изоморфны, поэтому среднее также изоморфно каждому из них. Стало быть, мы показали, что для каждой точки $P \in C$ отображение φ_P^*: $\mathcal{O}_{\varphi(P),\, Y} \to \mathcal{O}_{P,C}$ является изоморфизмом.

Далее, пусть Q — произвольная точка Y. Тогда $\mathcal{O}_Q$ доминируется некоторым кольцом дискретного нормирования R поля K/k (например, можно взять локализацию целого замыкания кольца $\mathcal{O}_Q$ по некоторому его максимальному идеалу). Но $R = R_P$ для некоторой точки $P \in C$ и $\mathcal{O}_{\varphi(P)} \simeq R$, так что, согласно 6.4, должно быть $Q = \varphi(P)$. Это показывает, что морфизм φ сюръективен. Он, очевидно, инъективен, потому что различным точкам кривой C соответствуют разные подкольца в K.

Таким образом, φ — биективный морфизм из C в Y и для каждой точки $P \in C$ отображение φ_P^* является изоморфизмом, так что, согласно упр. 3.3(b), φ — изоморфизм.

Следствие 6.10. *Каждая неособая абстрактная кривая изоморфна некоторой квазипроективной кривой. Каждая неособая квазипроективная кривая изоморфна открытому подмножеству неособой проективной кривой.*

Следствие 6.11. *Каждая кривая бирационально эквивалентна неособой проективной кривой.*

Доказательство. Действительно, пусть Y — произвольная кривая с полем функций K, тогда она бирационально эквивалентна кривой C_K, которая, как мы показали, неособа и проективна.

Следствие 6.12. *Следующие три категории эквивалентны:*

(i) *категория неособых проективных кривых и доминантных морфизмов;*

(ii) *категория квазипроективных кривых и доминантных рациональных отображений;*

(iii) *категория функциональных полей размерности* 1 *над* k *и* k-*гомоморфизмов.*

Доказательство. Функтор из (i) в (ii) строится очевидным образом. Соответствие $Y \to K(Y)$ определяет функтор из (ii) в (iii), индуцирующий эквивалентность категорий по теореме 4.4. Чтобы завершить цикл, надо задать функтор из (iii) и (i).

Сопоставим функциональному полю K кривую C_K, которая по теореме 6.9 является проективной и неособой. Если $K_2 \to K_1$ — некоторый гомоморфизм, то в силу эквивалентности (ii) $\simeq$ (iii) он индуцирует рациональное отображение соответствующих кривых (с обращением стрелки). Оно может быть представлено морфизмом φ: $U \to C_{K_2}$, где $U \subset C_{K_1}$ — некоторое открытое подмножество. Согласно 6.8, φ продолжается до морфизма $\bar{\varphi}$: $C_{K_1} \to C_{K_2}$. Если $K_3 \to K_2 \to K_1$ — последовательность двух гомоморфизмов, то из утверждения о единственности предложения 6.8 следует, что соответствующие морфизмы $C_{K_1} \to C_{K_2} \to C_{K_3}$ и $C_{K_1} \to C_{K_3}$ совпадают. Таким образом, соответствие $K \mapsto C_K$ является функтором из (iii) в (i). Очевидно, что этот функтор обратен указанному выше функтору (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii), так что имеет место эквивалентность категорий (i) $\simeq$ (ii) $\simeq$ (iii).

Упражнения

6.1. Напомним, что кривая называется *рациональной*, если она бирационально эквивалентна $\mathbf{P}^1$ (упр. 4.4). Пусть Y — неособая рациональная кривая, не изоморфная $\mathbf{P}^1$. Показать, что

(a) кривая Y изоморфна открытому подмножеству в $\mathbf{A}^1$;

(b) кривая Y аффинна;

(c) кольцо $A(Y)$ факториально.

6.2. *Эллиптическая кривая.* Пусть Y — эллиптическая кривая $y^2 = x^3 - x$ в $\mathbf{A}^2$, и предположим, что характеристика основного поля k не равна 2. Цель этого упражнения — показать, что кривая Y не рациональна и, следовательно, поле $K(Y)$ не является чисто трансцендентным расширением поля k.

(a) Показать, что кривая Y неособая, и вывести отсюда, что кольцо $A = A(Y) \cong k[x, y]/(y^2 - x^3 + x)$ целозамкнуто.

(b) Пусть $k[x]$ — подкольцо в $K = K(Y)$, порожденное образом элемента x в A. Показать, что $k[x]$ — кольцо многочленов и что A является целым замыканием кольца $k[x]$ в K.

(c) Показать, что существует автоморфизм σ: $A \to A$, который переводит y в $-y$ и оставляет x на месте. Для любого элемента $a \in A$ определим его *норму* $N(a) = a \cdot \sigma(a)$. Показать, что $N(a) \in k[x]$, $N(1) = 1$ и $N(ab) = N(a) \cdot N(b)$ для любых $a, b \in A$.

(d) Пользуясь понятием нормы, показать, что обратимыми в кольце A являются только ненулевые элементы из k. Показать, что x и y являются неприводимыми элементами в A и что кольцо A *не* факториально.

(e) Доказать, что кривая Y не рациональна (упр. 6.1). Другие доказательства этого важного результата см. в 8.20.3 гл. II и упр. 5.3 гл. III.

6.3. Показать на примере, что предложение 6.8 перестает быть верным в следующих случаях:

(a) $\dim X \geqslant 2$;

(b) многообразие Y не проективно.

6.4. Пусть Y — неособая проективная кривая. Показать, что любая непостоянная рациональная функция f на Y определяет сюръективный морфизм $\varphi\colon Y \to \mathbf{P}^1$ и что для каждой точки $P \in \mathbf{P}^1$ множество $\varphi^{-1}(P)$ является конечным.

6.5. Пусть X — неособая проективная кривая. Предположим, что X является (локально замкнутым) подмногообразием многообразия Y (упр. 3.10). Показать, что X на самом деле является замкнутым подмножеством в Y. Для обобщений см. упр. 4.4 гл. II.

6.6. *Автоморфизмы* $\mathbf{P}^1$. Представим $\mathbf{P}^1$ как $\mathbf{A}^1 \cup \{\infty\}$ и определим *дробно-линейное преобразование* $\mathbf{P}^1$ формулой

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a, b, c, d \in k, \ ad-bc \neq 0.$$

(a) Показать, что дробно-линейное преобразование индуцирует *автоморфизм* $\mathbf{P}^1$ (т. е. изоморфизм $\mathbf{P}^1$ на себя). Группу всех дробно-линейных преобразований $\mathbf{P}^1$ обозначим через $\mathrm{PGL}(1)$.

(b) Пусть $\mathrm{Aut}\,\mathbf{P}^1$ — группа всех автоморфизмов $\mathbf{P}^1$. Показать, что $\mathrm{Aut}\,\mathbf{P}^1 \cong \mathrm{Aut}\,k(x)$, где $\mathrm{Aut}\,k(x)$ — группа автоморфизмов поля $k(x)$.

(c) Показать теперь, что каждый автоморфизм поля $k(x)$ является дробно-линейным преобразованием, и вывести отсюда, что отображение $\mathrm{PGL}(1) \to \mathrm{Aut}\,\mathbf{P}^1$ — изоморфизм.

Замечание. Позднее (7.1.1 гл. II) мы увидим, что аналогичный результат верен и для $\mathbf{P}^n$, $n \geqslant 2$: каждый автоморфизм $\mathbf{P}^n$ задается линейным преобразованием однородных координат.

6.7. Пусть $P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_s$ — различные точки $\mathbf{A}^1$. Предположим, что $\mathbf{A}^1 - \{P_1, \ldots, P_r\}$ изоморфно $\mathbf{A}^1 - \{Q_1, \ldots, Q_s\}$; показать тогда, что $r = s$. Верно ли обратное (упр. 3.1)?

§ 7. Пересечение в проективном пространстве

Цель этого параграфа — изучить, как пересекаются многообразия в проективном пространстве. Если Y, Z — многообразия в $\mathbf{P}^n$, что можно сказать о $Y \cap Z$? Мы уже видели (упр. 2.16), что $Y \cap Z$ может не быть многообразием, однако оно всегда является алгебраическим множеством и можно спросить, например, какова размерность его неприводимых компонент? Намек на ожидаемый ответ можно получить из теории векторных пространств; если U, V — подпространства размерностей r, s векторного пространства W размерности n, то $U \cap V$ является подпространством в W размерности $\geqslant r+s-n$. Более того, если U и V находятся в достаточно общем положении, то размерность $U \cap V$ равна $r+s-n$ (при условии $r+s-n \geqslant 0$). Этот результат о векторных пространствах немедленно влечет за собой аналогичный результат для линейных подпространств в $\mathbf{P}^n$ (упр. 2.11). Вот первый факт, который мы докажем в этом параграфе: если Y, Z — подмногообразия размерностей r, s в $\mathbf{P}^n$, то каждая неприводимая компонента пересечения $Y \cap Z$ имеет размерность $\geqslant r+s-n$. Более того, если $r+s-n \geqslant 0$, то $Y \cap Z$ непусто.

Можно попытаться получить более точную информацию о пересечении $Y \cap Z$. Например, предположим, что $r+s=n$ и что

$Y \cap Z$ состоит из конечного множества точек. Каково число этих точек? Рассмотрим один частный случай. Пусть Y — кривая степени d, Z — прямая на $\mathbf{P}^2$, тогда $Y \cap Z$ состоит не более чем из d точек, и если эти точки считать с подходящим образом определенными кратностями (упр. 5.4), то их число оказывается в точности равным d. Обобщением этого результата служит хорошо известная теорема Безу: если Y, Z — плоские кривые степеней d, e и $Y \neq Z$, то $Y \cap Z$ состоит из de точек, подсчитанных с учетом кратностей. Теорему Безу мы докажем в конце этого параграфа (7.8).

Идеальное обобщение теоремы Безу на $\mathbf{P}^n$ должно заключаться в следующем. Прежде всего для любого проективного многообразия определяется его степень. Далее, пусть Y, Z — многообразия размерностей r, s и степеней d, e в $\mathbf{P}^n$. Предположим, что Y и Z находятся в достаточно общем положении, так что все неприводимые компоненты пересечения $Y \cap Z$ имеют одинаковую размерность, равную $r+s-n$, и предположим, что $r+s-n \geqslant 0$. Для каждой неприводимой компоненты W пересечения $Y \cap Z$ определим кратность пересечения $i(Y, Z; W)$ многообразий Y и Z вдоль W. Тогда должно выполняться равенство

$$\sum i(Y, Z; W) \deg W = de,$$

где сумма берется по всем неприводимым компонентам пересечения $Y \cap Z$.

Самая трудная часть этого обобщения состоит в корректном определении кратности пересечения. (И, между прочим, исторически было сделано много попыток, прежде чем была найдена удовлетворительная трактовка вопроса геометрически (Севери [3]) и алгебраически (Шевалле [1] и А. Вейль [1]).) Кратность пересечения мы определим только для случая, когда Z — гиперповерхность. По поводу общей теории пересечения см. добавление А.

Наша основная задача в этом параграфе — дать определение степени проективного многообразия Y размерности r в $\mathbf{P}^n$. Классически степень Y определялась как число точек пересечения Y с достаточно общим линейным пространством L размерности $n-r$. Однако этим определением трудно пользоваться. Пересекая Y последовательно $n-r$ достаточно общими гиперплоскостями, можно найти линейное пространство L размерности $n-r$, которое пересекает Y в конечном числе точек (упр. 1.8). Но это число точек пересечения может зависеть от L, и сделать точным понятие «общего положения» довольно трудно.

Поэтому мы дадим чисто алгебраическое определение степени, используя многочлен Гильберта проективного многообразия. Геометрически это определение мало мотивировано, но имеет преимущество быть точным. В упр. 7.4 показывается в одном частном случае, что оно согласуется с классическим определением.

Предложение 7.1 (аффинная теорема о размерности). *Пусть Y, Z — многообразия размерностей r, s в $\mathbf{A}^n$. Тогда каждая неприводимая компонента W пересечения $Y \cap Z$ имеет размерность $\geqslant r + s - n$.*

Доказательство. Рассмотрим прежде всего частный случай, когда Z — гиперповерхность, определенная уравнением $f = 0$. Если $Y \subset Z$, то доказывать нечего. Если $Y \not\subset Z$, то мы должны показать, что каждая неприводимая компонента W пересечения $Y \cap Z$ имеет размерность $r - 1$. Пусть $A(Y)$ — аффинное координатное кольцо многообразия Y. Тогда неприводимые компоненты пересечения $Y \cap Z$ соответствуют минимальным простым идеалам $\mathfrak{p}$ главного идела (f) в $A(Y)$. По теореме Крулля о главных идеалах 1.11A каждый такой идеал $\mathfrak{p}$ имеет высоту один, так что, согласно теореме о размерности 1.8A, факторкольцо $A(Y)/\mathfrak{p}$ имеет размерность $r - 1$. Из предложения 1.7 следует тогда, что каждая неприводимая компонента W пересечения $Y \cap Z$ имеет размерность $r - 1$.

Теперь обратимся к общему случаю. Рассмотрим произведение $Y \times Z \subset \mathbf{A}^{2n}$, которое имеет размерность $r + s$ (упр. 3.15). Пусть Δ — диагональ $\{P \times P \mid P \in \mathbf{A}^n\} \subset \mathbf{A}^{2n}$. Тогда отображение $P \mapsto P \times P$ устанавливает изоморфизм $\mathbf{A}^n \xrightarrow{\sim} \Delta$, и при этом изоморфизме пересечению $Y \cap Z$ соответствует пересечение $(Y \times Z) \cap \Delta$. Поскольку Δ имеет размерность n и так как $r + s - n = (r + s) + n - 2n$, то доказательство предложения сводится к случаю двух многообразий $Y \times Z$ и Δ в $\mathbf{A}^{2n}$. Многообразие Δ здесь является полным пересечением n гиперповерхностей $x_1 - y_1 = 0, \ldots, x_n - y_n = 0$, где $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ — координаты в $\mathbf{A}^{2n}$. Поэтому, применяя n-кратно рассмотренный выше частный случай, мы получим требуемый результат.

Теорема 7.2 (проективная теорема о размерности). *Пусть Y, Z — многообразия размерностей r, s в $\mathbf{P}^n$. Тогда каждая неприводимая компонента W пересечения $Y \cap Z$ имеет размерность $\geqslant r + s - n$. Кроме того, если $r + s - n \geqslant 0$, то $Y \cap Z$ непусто.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предложения 7.1, поскольку $\mathbf{P}^n$ покрывается аффинными n-мерными пространствами. Для доказательства второго результата рассмотрим конусы $C(Y)$ и $C(Z)$ над Y и Z в $\mathbf{A}^{n+1}$ (упр. 2.10). Тогда размерности $C(Y)$ и $C(Z)$ равны соответственно $r + 1$ и $s + 1$. Кроме того, $C(Y) \cap C(Z) \neq \varnothing$, поскольку оба конуса содержат начало координат, точку $P = (0, \ldots, 0)$. Согласно аффинной теореме о размерности, $C(Y) \cap C(Z)$ имеет размерность $\geqslant (r + 1) + (s + 1) - (n + 1) = r + s - n + 1 > 0$. Следовательно, $C(Y) \cap C(Z)$ содержит некоторую точку $Q \neq P$ и, стало быть, $Y \cap Z \neq \varnothing$.

Теперь мы перейдем к определению многочлена Гильберта проективного многообразия. Идея заключается в сопоставлении каждому проективному многообразию $Y \subset \mathbf{P}^n$ некоторого многочлена $P_Y \in \mathbf{Q}[z]$, из которого можно извлечь различные численные инварианты многообразия Y. Определим P_Y, исходя из однородного координатного кольца $S(Y)$. В действительности многочлен Гильберта мы определим в более общей ситуации, а именно для любого градуированного S-модуля, где $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. Следующие несколько результатов являются чисто алгебраическими, но мы приводим их с полными доказательствами ввиду отсутствия удобных для ссылок источников.

Определение. *Числовым многочленом* называется всякий многочлен $P(z) \in \mathbf{Q}[z]$, такой. что $P(n) \in \mathbf{Z}$ для всех $n \gg 0$, $n \in \mathbf{Z}$.

Предложение 7.3 (a). *Пусть $P \in \mathbf{Q}[z]$ — числовой многочлен. Тогда существуют такие целые числа $c_0, c_1, \ldots, c_r$, что*

$$P(z) = c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \ldots + c_r,$$

где

$$\binom{z}{r} = \frac{1}{r!} z(z-1) \ldots (z-r+1)$$

— биномиальный коэффициент с переменным z. В частности, $P(n) \in \mathbf{Z}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$.

(b) *Пусть $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ — произвольная функция. Предположим, что существует такой числовой многочлен $Q(z)$, что разностная функция $\Delta f = f(n+1) - f(n)$ совпадает с $Q(n)$ для всех $n \gg 0$; тогда существует числовой многочлен $P(z)$, такой, что $f(n) = P(n)$ для всех $n \gg 0$.*

Доказательство. (a) Используем индукцию по степени многочлена P. Случай $\deg P = 0$ очевиден. Далее, так как $\binom{z}{r} = \frac{z^r}{r!} + \ldots$, то любой многочлен $P \in \mathbf{Q}[z]$ степени r можно записать в указанном выше виде, но с рациональными коэффициентами $c_0, \ldots, c_r \in \mathbf{Q}$. Нам надо показать, что эти коэффициенты являются на самом деле целыми. Для любого многочлена P определим *разностный многочлен* ΔP, полагая $\Delta P(z) = P(z+1) - P(z)$. Так как $\Delta \binom{z}{r} = \binom{z}{r-1}$, то

$$\Delta P = c_0 \binom{z}{r-1} + c_1 \binom{z}{r-2} + \ldots + c_{r-1}.$$

По индукции $c_0, \ldots, c_{r-1} \in \mathbf{Z}$. Но в таком случае $c_r \in \mathbf{Z}$, поскольку $P(n) \in \mathbf{Z}$ для всех $n \gg 0$.

(b) Запишем $Q(z)$ в виде

$$Q = c_0 \binom{z}{r} + \ldots + c_r,$$

где $c_0, \ldots, c_r \in \mathbf{Z}$, и положим

$$P = c_0 \binom{z}{r+1} + \ldots + c_r \binom{z}{1}.$$

Тогда $\Delta P = Q$, так что $\Delta (f - P)(n) = 0$ для всех $n \gg 0$. Следовательно, $(f - P)(n)$ — константа c_{r+1} для всех $n \gg 0$ и

$$f(n) = P(n) + c_{r+1}$$

для всех $n \gg 0$, что и утверждалось.

Ниже нам понадобятся некоторые предварительные сведения о градуированных модулях. Пусть S — градуированное кольцо (см. § 2). *Градуированным S-модулем* называется S-модуль M, который представлен в виде прямой суммы $M = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} M_d$ таким образом, что $S_d \cdot M_e \subset M_{d+e}$. Для любого градуированного S-модуля M и любого $l \in \mathbf{Z}$ определим *скрученный* модуль $M(l)$, получающийся из M сдвигом градуировки на число l влево, т. е. $M(l)_d = M_{d+l}$. Для градуированного S-модуля M определим его *аннулятор* $\mathrm{Ann}\, M = \{s \in S \mid s \cdot M = 0\}$. Он является однородным идеалом в S.

Следующие результаты для градуированных S-модулей являются аналогами хорошо известных результатов для модулей конечного типа над нётеровым кольцом (см. Бурбаки [1, гл. IV, § 1, п. 4] или Мацумура [2, стр. 51]). Опять мы приводим доказательства ввиду отсутствия удобных источников.

Предложение 7.4. *Пусть M — конечно порожденный градуированный модуль над нётеровым градуированным кольцом S. Тогда существует фильтрация $0 = M^0 \subset M^1 \subset \ldots \subset M^r = M$ подмодулями M^i, такими, что для каждого i имеет место изоморфизм $M^i/M^{i-1} \simeq (S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$, где $\mathfrak{p}_i$ — однородный простой идеал в S и $l_i \in \mathbf{Z}$. Такая фильтрация не единственна, но для любой из них справедливы следующие утверждения:*

(a) *если $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал в S, то $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}\, M \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_i$ для некоторого i. В частности, минимальные элементы множества $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ в точности совпадают с минимальными простыми идеалами модуля M, т. е. с однородными простыми идеалами в S, минимальными среди содержащих $\mathrm{Ann}\, M$;*

(b) *для каждого минимального простого идеала модуля M число экземпляров идеала $\mathfrak{p}$, встречающихся среди элементов множества $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$, равно длине модуля $M_\mathfrak{p}$ над локальным кольцом $S_\mathfrak{p}$ (и, следовательно, не зависит от фильтрации).*

Доказательство. Для доказательства существования фильтрации рассмотрим множество градуированных подмодулей, обладающих такой фильтрацией. Очевидно, что нулевой модуль принадлежит этому множеству, так что оно непусто. Поскольку модуль M нётеров, существует максимальный подмодуль $M' \subset M$, принадлежащий этому множеству. Положим $M'' = M/M'$. Если $M'' = 0$, то все в порядке. Если же $M'' \neq 0$, то рассмотрим множество идеалов $\mathfrak{J} = \{I_m = \mathrm{Ann}(m) \mid m \in M''$ — однородный элемент, $m \neq 0\}$. Каждый из I_m является однородным идеалом, отличным от S. Так как кольцо S нётерово, можно найти $m \in M''$, $m \neq 0$, такой, что I_m будет максимальным элементом множества $\mathfrak{J}$. Покажем, что I_m — простой идеал. Действительно, пусть $a, b \in S$, $ab \in I_m$, но $b \notin I_m$. Докажем, что $a \in I_m$. Можно предполагать, что элементы a и b однородны. Рассмотрим элемент $bm \in M''$. Так как $b \notin I_m$, то $bm \neq 0$. Ясно, что $I_m \subset I_{bm}$, и ввиду максимальности I_m имеем $I_m = I_{bm}$. Но $ab \in I_m$, так что $abm = 0$. Отсюда $a \in I_{bm} = I_m$, что и требовалось показать. Стало быть, I_m является однородным простым идеалом в S. Обозначим его через $\mathfrak{p}$. Пусть степень элемента m равна l. Тогда модуль $N \subset M''$, порожденный элементом m, изоморфен $(S/\mathfrak{p})(-l)$. Если $N' \subset \subset M$ — прообраз модуля N в M, то $M' \subset N'$ и $N'/M' \simeq (S/\mathfrak{p})(-l)$, так что N' тоже обладает фильтрацией требуемого типа, что противоречит максимальности M'. Отсюда мы заключаем, что $M' = M$. Это доказывает существование требуемой фильтрации.

Пусть теперь на M такая фильтрация задана. Тогда очевидно, что $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}\, M \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}(M_i/M_{i-1})$ для некоторого i. Но $\mathrm{Ann}((S/\mathfrak{p}_i)(l)) = \mathfrak{p}_i$, что доказывает утверждение (a).

Чтобы доказать (b), перейдем к локализации по минимальному простому идеалу $\mathfrak{p}$. Поскольку идеал $\mathfrak{p}$ минимален в множестве $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$, то после локализации мы будем иметь $M^i_\mathfrak{p} = M^{i-1}_\mathfrak{p}$, кроме тех случаев, когда $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$. А в этих случаях $M^i_\mathfrak{p}/M^{i-1}_\mathfrak{p} \simeq \simeq (S/\mathfrak{p})_\mathfrak{p} = k(\mathfrak{p})$, где $k(\mathfrak{p})$ — поле частных кольца $S/\mathfrak{p}$ (здесь мы забывает о градуировке). Это показывает, что модуль $M_\mathfrak{p}$ является $S_\mathfrak{p}$-модулем конечной длины, равной кратности вхождения идеала $\mathfrak{p}$ в множество $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$.

Определение. Пусть $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал градуированного S-модуля M. Определим *кратность* M в $\mathfrak{p}$, обозначив ее через $\mu_\mathfrak{p}(M)$, как длину модуля $M_\mathfrak{p}$ над $S_\mathfrak{p}$.

Теперь мы можем определить многочлен Гильберта градуированного модуля M над кольцом многочленов $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. Определим прежде всего *функцию Гильберта* φ_M модуля M поларая

$$\varphi_M(l) = \dim_k M_l$$

для каждого $l \in \mathbf{Z}$.

Теорема 7.5 (Гильберт—Серр). *Пусть M — конечно порожденный градуированный $S = k[x_0, \ldots, x_n]$-модуль. Тогда существует единственный многочлен $P_M(z) \in \mathbf{Q}[z]$, такой, что $\varphi_M(l) = P_M(l)$ для всех $l \gg 0$. Кроме того, $\deg P_M(z) = \dim Z(\operatorname{Ann} M)$, где Z обозначает множество нулей в $\mathbf{P}^n$ соответствующего однородного идеала* (см. § 2).

Доказательство. Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — короткая точная последовательность S-модулей. Тогда $\varphi_M = \varphi_{M'} + \varphi_{M''}$ и $Z(\operatorname{Ann} M) = Z(\operatorname{Ann} M') \cup Z(\operatorname{Ann} M'')$, так что если теорема верна для M' и M'', то она верна и для M. Согласно 7.4, M обладает фильтрацией с факторами типа $(S/\mathfrak{p})(l)$, где $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал и $l \in \mathbf{Z}$. Следовательно, все сводится к случаю $M \simeq (S/\mathfrak{p})(l)$. Сдвигу градуировки на l соответствует замена переменных $z \mapsto z + l$, так что достаточно рассмотреть случай $M = S/\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{p} = (x_0, \ldots, x_n)$, то $\varphi_M(l) = 0$ для $l > 0$. Следовательно, соответствующий многочлен — это $P_M = 0$ и, стало быть, $\deg P_M = \dim Z(\mathfrak{p})$; здесь мы условливаемся, что нулевой многочлен имеет степень -1 и размерность пустого множества равна -1. Пусть $\mathfrak{p} \neq (x_0, \ldots, x_n)$. Выберем $x_i \notin \mathfrak{p}$ и рассмотрим точную последовательность $0 \to M \xrightarrow{x_i} M \to M'' \to 0$, где $M'' = M/x_iM$. Тогда $\varphi_{M''}(l) = \varphi_M(l) - \varphi_M(l-1) = (\Delta\varphi_M)(l-1)$. С другой стороны, $Z(\operatorname{Ann} M'') = Z(\mathfrak{p}) \cap H$, где H — гиперплоскость $x_i = 0$, и $Z(\mathfrak{p}) \not\subset H$ по выбору x_i, так что, согласно 7.2, $\dim Z(\operatorname{Ann} M'') = \dim Z(\mathfrak{p}) - 1$. Используя индукцию по размерности $\dim Z(\operatorname{Ann} M)$, можно считать, следовательно, что $\varphi_{M''}$ — полиномиальная функция, соответствующая многочлену $P_{M''}$ степени, равной $\dim Z(\operatorname{Ann} M'')$. Согласно 7.3, отсюда следует, что φ_M — полиномиальная функция, соответствующая многочлену степени, равной $\dim Z(\mathfrak{p})$. Единственность многочлена P_M очевидна.

Определение. Многочлен P_M из теоремы **7.5** **называется** *многочленом Гильберта* модуля M.

Определение. Для алгебраического множества $Y \subset \mathbf{P}^n$ размерности r определим его *многочлен Гильберта* P_Y как многочлен Гильберта однородного координатного кольца $S(Y)$. (Согласно теореме 7.5, его степень равна r.) *Степенью* алгебраического множества Y назовем число, равное произведению старшего коэффициента многочлена P_Y на $r!$.

Предложение 7.6. (a) *Если $Y \subset \mathbf{P}^n$, $Y \neq \varnothing$, то степень Y является целым положительным числом.*

(b) *Пусть $Y = Y_1 \cup Y_2$, где Y_1 и Y_2 имеют одинаковую размерность r и* $\dim(Y_1 \cap Y_2) < r$. *Тогда* $\deg Y = \deg Y_1 + \deg Y_2$.

(c) $\deg \mathbf{P}^n = 1$.

(d) *Пусть $H \subset \mathbf{P}^n$ — гиперповерхность, идеал которой порожден однородным многочленом степени d, тогда* $\deg H = d$. (*Иными словами, данное определение степени согласуется с определением степени гиперповерхности, введенным ранее в* 1.4.2.)

Доказательство. (a) Так как $Y \neq \varnothing$, то P_Y — ненулевой многочлен степени $r = \dim Y$. По 7.3(a) $\deg Y = c_0$, которое является целым числом. Положительность c_0 следует из того, что $P_Y(l) = \varphi_{S/I}(l) \geqslant 0$ для $l \gg 0$.

(b) Пусть I_1, I_2 — идеалы алгебраических множеств Y_1 и Y_2. Тогда $I = I_1 \cap I_2$ — идеал множества Y. Имеем точную последовательность

$$0 \to S/I \to S/I_1 + S/I_2 \to S/(I_1 + I_2) \to 0.$$

Далее, $Z(I_1 + I_2)$ равно $Y_1 \cap Y_2$, размерность которого меньше r. Следовательно, степень многочлена $P_{S/(I_1+I_2)}$ тоже меньше r. Поэтому старший коэффициент многочлена $P_{S/I}$ равен сумме старших коэффициентов многочленов P_{S/I_1} и P_{S/I_2}.

(c) Вычислим многочлен Гильберта проективного пространства $\mathbf{P}^n$. По определению это многочлен Гильберта P_S, где $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ Для $l > 0$ $\varphi_S(l) = \binom{l+n}{n}$, так что $P_S = \binom{z+n}{n}$. В частности, его старший коэффициент равен $1/n!$ и, следовательно, $\deg \mathbf{P}^n = 1$.

(d) Пусть $f \in S$ — однородный многочлен степени d. Тогда имеет место такая точная последовательность градуированных S-модулей:

$$0 \to S(-d) \xrightarrow{f} S \to S/(f) \to 0.$$

Следовательно,

$$\varphi_{S/(f)}(l) = \varphi_S(l) - \varphi_S(l-d).$$

Стало быть, многочлен Гильберта гиперповерхности H имеет вид

$$P_H(z) = \binom{z+n}{n} - \binom{z-d+n}{n} = \frac{d}{(n-1)!} z^{n-1} + \ldots$$

и потому $\deg H = d$.

Перейдем теперь к доказательству основного результата о степени пересечения проективного многообразия с гиперповерхностью, который частично обобщает теорему Безу на проективные пространства высших размерностей. Пусть $Y \subset \mathbf{P}^n$ — проективное многообразие размерности r и H — гиперповерхность, не содержащая Y. Тогда, согласно 7.2, $Y \cap H = Z_1 \cup \ldots \cup Z_s$, где Z_j — многообразия размерности $r-1$. Пусть $\mathfrak{p}_j$ — однородный простой идеал многообразия Z_j. Определим *кратность пересечения* многообразий Y и H вдоль Z_j формулой

$$i(Y, H; Z_j) = \mu_{\mathfrak{p}_j}(S/(I_Y + I_H)),$$

где I_Y, I_H — однородные идеалы многообразий Y и H соответственно. Аннулятором модуля $M = S/(I_Y + I_H)$ является идеал $I_Y + I_H$ и $Z(I_Y + I_H) = Y \cap H$, так что $\mathfrak{p}_j$ является минимальным простым идеалом модуля M и $\mu_{\mathfrak{p}_j}$ — определенная выше кратность.

Теорема 7.7. *Пусть Y — многообразие в $\mathbf{P}^n$ и H — гиперповерхность, не содержащая Y. Пусть $Z_1, \ldots, Z_s$ — неприводимые компоненты $Y \cap H$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{s} i(Y, H; Z_j) \cdot \deg Z_j = (\deg Y)(\deg H).$$

Доказательство. Пусть H определяется однородным многочленом f степени d. Рассмотрим точную последовательность градуированных S-модулей

$$0 \to (S/I_Y)(-d) \xrightarrow{f} S/I_Y \to M \to 0,$$

где $M = S/(I_Y + I_H)$. Для соответствующих многочленов Гильберта имеет место соотношение

$$P_M(z) = P_Y(z) - P_Y(z-d).$$

Утверждение нашей теоремы мы получим из сравнения старших коэффициентов левой и правой частей этого равенства. Пусть размерность Y равна r и $\deg Y = e$. Тогда $P_Y(z) = (e/r!)z^r + \ldots$, поэтому в правой части мы имеем

$$(e/r!)z + \ldots - [(e/r!)(z-d)^r + \ldots] = (de/(r-1)!)z^{r-1} + \ldots.$$

Теперь рассмотрим модуль M. Согласно 7.4, M обладает фильтрацией $0 = M^0 \subset M^1 \subset \ldots \subset M^q = M$, последовательные факторы M^i/M^{i-1} которой имеют вид $(S/\mathfrak{q}_i)(l_i)$. Следовательно, $P_M = \sum_{i=1}^{q} P_i$, где P_i — многочлен Гильберта модуля $(S/\mathfrak{q}_i)(l_i)$. Если размерность проективного многообразия $Z(\mathfrak{p}_i)$ равна r_i, а его степень равна f_i, то

$$P_i = (f_i/r_i!)z^{r_i} + \ldots.$$

Отметим, что сдвиг градуировки на l_i не меняет старшего коэффициента многочлена P_i. Поскольку нас интересует только старший коэффициент многочлена P_i, мы можем отбросить все многочлены P_i, для которых $\deg P_i < r-1$, так что остаются только такие P_i, для которых соответствующие идеалы $\mathfrak{q}_i$ являются минимальными простыми идеалами модуля M, т. е. все идеалы из множества $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$. Каждый такой многочлен встретится $\mu_{\mathfrak{p}_j}(M)$ раз, следовательно, старший коэффициент многочлена P_M равен

$$\left(\sum_{j=1}^{s} i(Y, H; Z_j) \cdot \deg Z_j\right)/(r-1)!$$

Сравнивая его с полученной выше формулой для правой части, получаем требуемый результат.

Следствие 7.8 (теорема Безу). *Пусть Y, Z — различные кривые на $\mathbf{P}^2$ степеней d, e соответственно, и пусть $Y \cap Z = \{P_1, \ldots, P_s\}$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{s} i(Y, Z; P_j) = de.$$

Доказательство. Здесь надо отметить только тот факт, что многочлен Гильберта точки равен 1 и, следовательно, его степень равна 0. Другое доказательство см. в 1.4.2, гл. V.

Замечание 7.8.1. Наше определение кратности в терминах однородного координатного кольца отличается от локального определения, приведенного ранее (упр. 5.4). Однако легко показать, что они совпадают в случае пересечений плоских кривых.

Замечание 7.8.2. Доказательство 7.8 легко распространяется на случай, когда Y и Z — «приводимые кривые», т. е. алгебраические множества размерности 1 в $\mathbf{P}^2$, при условии, что они не имеют общих неприводимых компонент.

Упражнения

7.1. (a) Вычислить степень образа d-кратного вложения $\mathbf{P}^n$ в $\mathbf{P}^N$ (упр. 2.12). [*Ответ*: d^n].

(b) Вычислить степень образа вложения Сегре $\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s$ в $\mathbf{P}^N$ (упр. 2.14). $\left[\text{Ответ: } \binom{r+s}{r}\right]$.

7.2. Пусть Y — многообразие размерности r в $\mathbf{P}^n$ с многочленом Гильберта P_Y. Определим *арифметический род* многообразия Y формулой $p_a(Y) = (-1)^r(P_Y(0) - 1)$. Это важный инвариант многообразия, который (как будет видно позднее в упр. 5.3, гл. III) не зависит от проективного вложения многообразия Y.

(a) Показать, что $p_a(\mathbf{P}^N) = 0$.

(b) Пусть Y — плоская кривая степени d. Показать, что $p_a(Y) = (1/2)(d-1)(d-2)$.

(c) Более общим образом пусть H — гиперповерхность степени d в $\mathbf{P}^n$. Тогда $p_a(H) = \binom{d-1}{n}$.

(d) Пусть Y — полное пересечение (упр. 2.17) поверхностей степеней a, b в $\mathbf{P}^3$. Показать тогда, что $p_a(Y) = (1/2)\,ab\,(a+b-4)+1$.

(e) Пусть $Y^r \subset \mathbf{P}^n$, $Z^s \subseteq \mathbf{P}^m$ — проективные многообразия, и пусть $Y \times Z \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ — вложение Сегре. Показать, что

$$p_a(Y \times Z) = p_a(Y)\,p_a(Z) + (-1)^s p_a(Y) + (-1)^r p_a(Z).$$

7.3. *Двойственная кривая.* Пусть $Y \subset \mathbf{P}^2$ — произвольная кривая. Будем интерпретировать множество всех прямых в $\mathbf{P}^2$ как двойственную проективную плоскость $(\mathbf{P}^2)^*$, приписывая каждой прямой L: $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ однородные координаты (a_0, a_1, a_2). Показать, что для каждой неособой точки $P \in Y$ существует единственная прямая $T_P(Y)$, кратность пересечения которой с Y в точке P больше 1. Такая прямая называется *касательной прямой к* Y в точке P. Показать, что отображение $P \to T_P(Y)$ определяет *морфизм* множества $\operatorname{Reg} Y$ (множества неособых точек кривой Y) в $(\mathbf{P}^2)^*$. Замыкание образа этого морфизма называется *двойственной* кривой $Y^* \subset (\mathbf{P}^2)^*$ к кривой Y.

7.4. Пусть Y — кривая степени d на $\mathbf{P}^2$. Показать, что существует непустое открытое подмножество U в $(\mathbf{P}^2)^*$ в топологии Зарисского, такое, что Y пересекается с любой прямой $L \in U$ в точности в d точках. [*Указание.* Показать, что множество прямых в $(\mathbf{P}^2)^*$, касательных к Y или проходящих через особые точки этой кривой, содержится в собственном замкнутом подмножестве.] Это утверждение показывает, что степень кривой Y можно определить как целое число d, такое, что почти все прямые пересекают Y в d точках, где «почти все» означает непустоту открытого подмножества множества прямых, рассматриваемого как двойственная проективная плоскость $(\mathbf{P}^2)^*$.

7.5. (a) Показать, что неприводимая кривая степени $d > 1$ в $\mathbf{P}^2$ не может иметь точку кратности $\geqslant d$ (упр. 5.3).

(b) Пусть Y — неприводимая кривая степени $d > 1$, имеющая точку кратности $d-1$. Показать тогда, что кривая Y рациональна (упр. 6.1).

7.6. *Линейные многообразия.* Показать, что алгебраическое множество Y чистой размерности r (т. е. такое, что каждая неприводимая компонента множества Y имеет размерность r) имеет степень 1 тогда и только тогда, когда Y — линейное многообразие (упр. 2.11). [*Указание.* Прежде всего, разобрать случай $\dim Y = 1$, пользуясь теоремой 7.7. Общий случай свести к этому, пересекая Y гиперплоскостью и применяя индукцию.]

7.7. Пусть Y — многообразие размерности r и степени $d > 1$ в $\mathbf{P}^n$ и $P \in Y$ — неособая точка. Определим подмножество $X \subset \mathbf{P}^n$ как замыкание объединения всех прямых PQ, где $Q \in Y$, $P \neq Q$.

(a) Показать, что X является многообразием размерности $r+1$.

(b) Показать, что $\deg X < d$. [*Указание.* Воспользоваться индукцией по $\dim Y$.]

7.8. Пусть $Y^r \subset \mathbf{P}^n$ — многообразие степени 2. Показать, что Y содержится в линейном подпространстве L размерности $r+1$ в $\mathbf{P}^n$. Таким образом, Y изоморфно квадратичной гиперповерхности в $\mathbf{P}^{r+1}$ (упр. 5.12).

§ 8. Что такое алгебраическая геометрия?

Теперь, когда мы познакомились с некоторыми алгебраическими многообразиями и с некоторыми из основных понятий, связанных с ними, самое время спросить: что изучает алгебраическая геометрия? Каковы ее основные проблемы и в каком направлении она развивается?

Алгебраическую геометрию мы определяем как область математики, изучающую решения систем алгебраических (т. е. полиномиальных) уравнений в аффинных и проективных пространствах. Иными словами, алгебраическая геометрия изучает алгебраические многообразия.

В любой ветви математики существуют обычно ведущие проблемы, которые настолько трудны, что их полное решение даже и не ожидается, но которые стимулируют очень большое количество работ и служат главными вехами на пути прогресса в этой области. В алгебраической геометрии такой проблемой является проблема классификации алгебраических многообразий. В наиболее сильной форме она предполагает классификацию всех алгебраических многообразий с точностью до изоморфизма. Эту проблему можно разделить на несколько частей. Первая часть — это задача классификации алгебраических многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности. Как мы уже видели, эта задача эквивалентна задаче классификации функциональных полей над k (т. е. конечно порожденных расширений основного поля k) с точностью до изоморфизма. Вторая часть состоит в выборе в каждом классе бирациональной эквивалентности «хорошего» подмножества, такого, как подмножество неособых проективных многообразий, и последующей классификации многообразий из этого подмножества с точностью до изоморфизма. Третья часть заключается в том, чтобы изучить, насколько произвольное многообразие отличается от одного из «хороших». В частности, хотелось бы знать

(a) что нужно добавить к непроективному многообразию, чтобы получить проективное;

(b) какова структура особенностей и как их можно разрешить, чтобы получить неособое многообразие.

Как правило, решение любой классификационной проблемы в алгебраической геометрии разделяется на дискретную и непрерывную части. Поэтому проблему классификации многообразий можно переформулировать следующим образом: определить целочисленные и непрерывные инварианты, которые полностью различают неизоморфные алгебраические многообразия. Еще одной особенностью проблемы классификации является то, что часто, когда существует непрерывное семейство неизоморфных объектов, соответствующее пространство параметров можно снабдить структурой алгебраического многообразия. Это весьма ценно, поскольку для изучения пространства параметров может быть привлечена та же техника, что и для изучения самих многообразий.

Для иллюстрации этих идей расскажем о том, что известно с классификации алгебраических кривых (над фиксированным алгебраически замкнутым полем k). Начнем с бирациональной классификации. Существует целочисленный инвариант $g \geqslant 0$, называемый *родом* кривой, который является бирациональным инвариантом и может принимать любые неотрицательные целые значения. При $g = 0$ существует только один класс бирациональной эквивалентности, а именно класс рациональных кривых (т. е. кривых, бирационально эквивалентных проективной прямой $\mathbf{P}^1$). Для каждого $g > 0$ существует непрерывное семейство классов бирациональной эквивалентности, которое может быть параметризовано неприводимым алгебраическим многообразием $\mathfrak{M}_g$, называемым *многообразием модулей* кривых рода g, которое имеет размерность 1, если $g = 1$, и $3g - 3$, если $g \geqslant 2$. Кривые рода $g = 1$ называются *эллиптическими*. Таким образом, ответ на вопрос о бирациональной классификации кривых достигается указанием рода кривой, ее дискретного инварианта, и точки на многообразии модулей, непрерывного инварианта. Подробнее об этом см. в гл. IV.

Второй вопрос, а именно описание всех неособых проективных кривых в данном классе бирациональной эквивалентности, имеет очень простой ответ: как мы видели, в каждом классе имеется в точности одна такая кривая.

Что касается третьего вопроса, то мы знаем, что каждая кривая может быть дополнена до проективной добавлением конечного числа точек, и это все, что можно сказать по этому поводу. О классификации особенностей кривых см. 3.9.4 гл. V.

Поскольку мы обсуждаем проблему классификации, то хотелось бы рассмотреть еще один случай, где известен вполне удовлетворительный ответ, а именно классификацию неособых проективных поверхностей в заданном классе бирациональной эквивалентности. В этом случае известно, что

(1) каждый класс бирациональной эквивалентности поверхностей содержит неособую проективную поверхность;

(2) множество неособых проективных поверхностей с данным полем функций K/k частично упорядочено относительно порядка, определяемого существованием бирационального морфизма;

(3) любой бирациональный морфизм $f\colon X \to Y$ может быть разложен на конечное число шагов, каждый из которых является раздутием точки;

(4) кроме случаев, когда K является *рациональным* (т. е. изоморфным $K(\mathbf{P}^2)$) или *линейчатым* (т. е. изоморфным полю функций на произведении $\mathbf{P}^1 \times C$, где C — некоторая кривая), существует единственный минимальный элемент в этом частично упорядоченном множестве, который называется *минимальной моделью* функционального поля K. (В рациональном и линейчатом случаях существует бесконечно много минимальных элементов, и их структура хорошо известна.) Теория минимальных моделей — замечательный раздел общей теории алгебраических поверхностей. Результаты о минимальных моделях были известны еще итальянским геометрам, однако полные их доказательства, пригодные во всех характеристиках, были даны впервые Зарисским [5], [6]. Дальнейшие детали см. в гл. V.

Из сделанных выше замечаний должно быть ясно, что проблема классификации является весьма плодотворной проблемой, которая постоянно имеется в виду в процессе развития алгебраической геометрии. Возникает вопрос: как можно подойти к определению инвариантов алгебраических многообразий? Пока что мы определили размерность многообразия, а для проективных многообразий — многочлен Гильберта и, следовательно, степень и арифметический род p_a. Конечно, размерность является бирациональным инвариантом. Но степень и многочлен Гильберта зависят от вложения многообразия в проективное пространство, так что они даже не являются инвариантами относительно изоморфизмов многообразий. Оказывается, однако, что арифметический род инвариантен при изоморфизмах (упр. 5.3 гл. III) и в большинстве случаев является даже *бирациональным* инвариантом (кривые, поверхности, неособые многообразия в характеристике 0; см. 5.6.1 гл. V), но всего этого не видно непосредственно из нашего определения.

Для того чтобы пойти дальше, нам надо изучить внутреннюю геометрию многообразий, которая пока еще не была затронута. Так, например, мы будем изучать *дивизоры* на многообразии X. Дивизор — это элемент свободной абелевой группы, порожденной подмногообразиями коразмерности один. Будет определено понятие классов дивизоров по модулю *линейной эквивалентности*. Они составляют группу, которая называется *группой Пикара* многообразия X. Эта группа является важным внутренним инвариантом многообразия. Еще одним очень важным понятием является понятие дифференциальной формы на X. Используя дифференциальные формы, можно дать внутреннее определение касательного и кокасательного расслоений на алгебраическом многообразии. В результате многие конструкции из дифференциальной геометрии можно использовать для определения численных инвариантов алгебраических многообразий. Например, род алгебраической кривой можно определить как размерность векторного пространства глобальных дифференциальных форм на неособой проективной модели. Из этого определения уже очевидно, что род является бирациональным инвариантом. См. § 6, 7, 8 гл. II.

Быть может, наиболее важные численные инварианты доставляет современная когомологическая техника. Существует много разных теорий когомологий, но в этой книге мы будем иметь дело главным образом с когомологиями когерентных пучков, введенных Серром [3]. Когомологии являются очень мощным и многогранным инструментом в изучении алгебраических многообразий. Они не только дают возможность определять численные инварианты (например, род кривой X можно определить как $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$), но могут быть использованы также для доказательства многих важных результатов, которые, казалось бы, вовсе не имеют никакого отношения к когомологиям, например, таких, как так называемая основная теорема Зарисского, касающаяся структуры бирациональных преобразований. Поначалу теория когомологий требует массы работы, но я считаю, что она вполне оправдывает затраченные усилия. В этой книге когомологиям мы посвятим целую главу (гл. III). Когомологии являются также полезным средством для понимания и формулировки многих важных результатов, таких, как теорема Римана—Роха. Эта теорема была известна классикам для кривых и поверхностей, но когомологический подход Хирцебруха [1] и Гротендика (см. Борель и Серр [1]) позволил прояснить и обобщить ее на многообразия произвольной размерности (добавление А).

Теперь, когда мы немного узнали о предмете алгебраической геометрии, обсудим степень общности, в которой развиваются ее основания. В настоящей главе мы работали над алгебраически замкнутым полем, поскольку это самый простой случай. Но имеются весьма веские соображения для введения алгебраически незамкнутых полей. Одно из соображений заключается в том, что локальное кольцо подмногообразия на многообразии имеет алгебраически незамкнутое поле вычетов (упр. 3.13), в то время как удобно иметь единую трактовку свойств многообразия вдоль подмногообразия и свойств многообразия в точке. Еще одним глубоким соображением для введения алгебраически незамкнутых полей является то, что многие задачи алгебраической геометрии вызваны к жизни проблемами теории чисел и прежде всего проблемами, связанными с решениями уравнений над конечными или числовыми полями. Например, проблема Ферма эквивалентна вопросу о существовании (или несуществовании) на кривой $x^n + y^n = z^n$ в $\mathbf{P}^2$, $n \geqslant 3$, нетривиальных рациональных точек над $\mathbf{Q}$ (т. е. точек с рациональными координатами и с $x, y, z \neq 0$).

Необходимость работать над произвольными основными полями была понята и обоснована Зарисским и А. Вейлем. На самом деле, возможно, что одним из главных вкладов «Оснований» А. Вейля [1] является систематическая разработка принципов изучения многообразий над произвольными полями и выяснение

различных явлений, связанных с изменением основного поля. Нагата [2] пошел дальше, развив основания алгебраической геометрии над дедекиндовыми областями.

Другое направление, в котором необходимо расширить основания, — это определить некоторый более широкий класс абстрактных многообразий, которые a priori не вложены ни в аффинные, ни в проективные пространства. Это особенно необходимо в таких задачах, как построение многообразия модулей, потому что оно может быть осуществлено локально без какого-либо задания глобального вложения. В § 6 было дано определение абстрактной кривой. В высших размерностях этот метод не работает, поскольку уже неособая модель заданного функционального поля не единственна. Однако можно определить абстрактное многообразие, исходя из соображений, что любое многообразие обладает открытым покрытием аффинными многообразиями. Таким образом, абстрактное многообразие можно определить как топологическое пространство X с открытым покрытием U_i, причем каждое из U_i снабжено структурой аффинного многообразия так, что на каждом пересечении $U_i \cap U_j$ две индуцированные структуры многообразия изоморфны. Оказывается, что это обобщение понятия многообразия действительно приводит к более общим объектам: в размерности $\geqslant 2$ существуют абстрактные многообразия, которые не изоморфны никакому квазипроективному многообразию (4.10.2 гл. II).

Существует третье направление, в котором полезно распространить наше понятие алгебраического многообразия. В этой главе многообразия были определены как неприводимые алгебраические множества в аффинном и проективном пространствах. Но часто бывает удобно добавить к ним приводимые алгебраические множества или даже алгебраические множества с кратными компонентами. Это подсказывается, например, как мы уже видели в § 7, теорией пересечения, поскольку пересечение многообразий может быть приводимым и сумма их идеалов может не быть идеалом пересечения. Таким образом, может возникнуть желание определить «обобщенные проективные многообразия» в $\mathbf{P}^n$ как упорядоченные пары $\langle V, I \rangle$, где V — алгебраическое множество в $\mathbf{P}^n$, а $I \subset S = k[x_0, \ldots, x_n]$ — любой идеал, такой, что $V = Z(I)$. Это не совсем то, что мы в действительности будем делать, но общая идея такова.

Все три обобщения понятия многообразия, указанные выше, содержатся в определении схемы по Гротендику. Гротендик исходит из наблюдения, что аффинные многообразия соответствуют конечно порожденным целостным алгебрам над полем (3.8). Однако почему следует ограничиваться таким специальным классом колец? И он для любого коммутативного кольца A определяет топологическое пространство $\operatorname{Spec} A$ и пучок колец на нем, который является обобщением кольца регулярных функций на аффинном многообразии, и все это называет аффинной схемой. Произвольная схема определяется тогда путем склеивания аффинных схем, что является обобщением понятия абстрактного многообразия.

Одно предостережение о работе в экстремальной общности. Существует много преимуществ в развитии теории в максимальной общности. В случае алгебраической геометрии не может быть сомнений в том, что введение схем революционизировало предмет и дало ему громадные преимущества. С другой стороны, тот, кто работает со схемами, должен нести тяжесть соответствующего технического баланса: пучки, абелевы категории, когомологии, спектральные последовательности и т. д. Более серьезная трудность заключается в том, что некоторые свойства многообразий могут не распространяться на схемы. Например, аффинная схема не всегда имеет конечную размерность, даже если ее кольцо нётерово. Так что интуиция здесь должна быть подкреплена хорошим знанием коммутативной алгебры.

В этой книге основания алгебраической геометрии мы будем развивать с использованием языка схем, начиная со следующей главы.

Глава II

СХЕМЫ

Настоящая и следующая главы являются техническим сердцем книги. В этой главе мы развиваем основы теории схем, следуя Гротендику [EGA]. Основными являются § 1 и 5, которые содержат обзор теории пучков (необходимых даже для определения схемы), а также определения основных понятий: схем, морфизмов и когерентных пучков. Это тот язык, которым мы будем пользоваться в оставшейся части книги.

В § 6, 7 и 8 изучаются понятия, которые могли бы быть сформулированы уже на языке многообразий, но более удобно их обсуждать, используя схемы. Например, такие новые понятия, как дивизоры Картье и обратимые пучки, проясняют суть старых понятий дивизоров Вейля и линейных систем. В § 8 систематическое использование незамкнутых схемных точек вносит гибкость в изучение пучков дифференциалов и неособых многообразий, совершенствуя изложение материала § 5 из гл. I.

В § 9 приводится определение формальной схемы, которое не имеет аналога в теории многообразий. Оно было придумано Гротендиком как удобное средство изложения теории голоморфных функций Зарисского, являющейся в абстрактной алгебраической геометрии аналогом теории голоморфных функций в окрестности подмногообразия в классическом случае.

§ 1 Пучки

Понятие пучка дает систематический способ согласования локальных алгебраических данных на топологическом пространстве. Например, как мы скоро увидим, регулярные функции на открытых подмножествах многообразия, определенные в гл. I, образуют пучок. Пучки являются основным инструментом при изучении схем. В действительности даже само понятие схемы нельзя определить без использования пучков. Поэтому настоящую главу мы начинаем именно с пучков. Дополнительную информацию о них можно получить из книги Годемана [1].

Определение. Пусть X — топологическое пространство. *Предпучок* абелевых групп $\mathcal{F}$ на X состоит из следующих объектов:

является обобщением кольца регулярных функций на аффинном многообразии, и все это называет аффинной схемой. Произвольная схема определяется тогда путем склеивания аффинных схем, что является обобщением понятия абстрактного многообразия.

Одно предостережение о работе в экстремальной общности. Существует много преимуществ в развитии теории в максимальной общности. В случае алгебраической геометрии не может быть сомнений в том, что введение схем революционизировало предмет и дало ему громадные преимущества. С другой стороны, тот, кто работает со схемами, должен нести тяжесть соответствующего технического баланса: пучки, абелевы категории, когомологии, спектральные последовательности и т. д. Более серьезная трудность заключается в том, что некоторые свойства многообразий могут не распространяться на схемы. Например, аффинная схема не всегда имеет конечную размерность, даже если ее кольцо нётерово. Так что интуиция здесь должна быть подкреплена хорошим знанием коммутативной алгебры.

В этой книге основания алгебраической геометрии мы будем развивать с использованием языка схем, начиная со следующей главы.

Глава II

СХЕМЫ

Настоящая и следующая главы являются техническим сердцем книги. В этой главе мы развиваем основы теории схем, следуя Гротендику [EGA]. Основными являются § 1 и 5, которые содержат обзор теории пучков (необходимых даже для определения схемы), а также определения основных понятий: схем, морфизмов и когерентных пучков. Это тот язык, которым мы будем пользоваться в оставшейся части книги.

В § 6, 7 и 8 изучаются понятия, которые могли бы быть сформулированы уже на языке многообразий, но более удобно их обсуждать, используя схемы. Например, такие новые понятия, как дивизоры Картье и обратимые пучки, проясняют суть старых понятий дивизоров Вейля и линейных систем. В § 8 систематическое использование незамкнутых схемных точек вносит гибкость в изучение пучков дифференциалов и неособых многообразий, совершенствуя изложение материала § 5 из гл. I.

В § 9 приводится определение формальной схемы, которое не имеет аналога в теории многообразий. Оно было придумано Гротендиком как удобное средство изложения теории голоморфных функций Зарисского, являющейся в абстрактной алгебраической геометрии аналогом теории голоморфных функций в окрестности подмногообразия в классическом случае.

§ 1 Пучки

Понятие пучка дает систематический способ согласования локальных алгебраических данных на топологическом пространстве. Например, как мы скоро увидим, регулярные функции на открытых подмножествах многообразия, определенные в гл. I, образуют пучок. Пучки являются основным инструментом при изучении схем. В действительности даже само понятие схемы нельзя определить без использования пучков. Поэтому настоящую главу мы начинаем именно с пучков. Дополнительную информацию о них можно получить из книги Годемана [1].

Определение. Пусть X — топологическое пространство. *Предпучок* абелевых групп $\mathscr{F}$ на X состоит из следующих объектов:

(a) абелевой группы $\mathscr{F}(U)$ для каждого открытого подмножества $U \subset X$ и

(b) гомоморфизма абелевых групп ρ_{UV}: $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ для каждого вложения открытых подмножеств $V \subset U$ в X, удовлетворяющих условиям

(0) $\mathscr{F}(\varnothing) = 0$, где $\varnothing$ — пустое множество,

(1) ρ_{UU}: $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ — тождественное отображение,

(2) если $W \subset V \subset U$, то $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Читатель, предпочитающий язык теории категорий, может переформулировать это определение следующим образом. Для любого топологического пространства X определена категория $\mathfrak{Top}(X)$, объектами которой являются открытые подмножества X, а морфизмами служат только отображения вложения, так что $\mathrm{Hom}(V, U)$ пусто, если $V \not\subset U$, и состоит из одного элемента, если $V \subset U$. В этих терминах предпучок — это контравариантный функтор из категории $\mathfrak{Top}(X)$ в категорию $\mathfrak{Ab}$ абелевых групп.

Предпучок колец, множеств или вообще предпучок со значениями в любой фиксированной категории $\mathfrak{C}$ определяется заменой слов «в категорию абелевых групп» в приведенном выше определении соответственно словами «в категорию колец», «в категорию множеств» или «в категорию $\mathfrak{C}$». В этом параграфе мы остановимся на случае абелевых групп, предоставляя читателю возможность осуществить модификации на случай колец, множеств и т. д.

Что касается терминологии, то элементы $\mathscr{F}(U)$ называются *сечениями* предпучка $\mathscr{F}$ над открытым множеством U; для $\mathscr{F}(U)$ мы будем иногда использовать также обозначение $\Gamma(U, \mathscr{F})$. Отображения ρ_{UV} называются *отображениями ограничения*; иногда мы будем писать $s|_V$ вместо $\rho_{UV}(s)$, если $s \in (\mathscr{F}\ U)$.

Пучок — это, грубо говоря, предпучок, сечения которого определяются локально. Точнее, введем следующее

Определение. Предпучок $\mathscr{F}$ на топологическом пространстве X называется *пучком*, если он удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

(3) пусть U — открытое множество, $\{V_i\}$ — его открытое покрытие и $s \in \mathscr{F}(U)$ — такой элемент, что $s|_{V_i} = 0$ для всех i; тогда $s = 0$;

(4) пусть U — открытое множество, $\{V_i\}$ — его открытое покрытие, и пусть для каждого i задан элемент $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$, такой, что $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ для любых i, j; тогда существует элемент $s \in \mathscr{F}(U)$, такой, что $s|_{V_i} = s_i$ для каждого i. (Отметим, что из условия (3) следует единственность элемента s.)

Замечание. Согласно нашему определению, пучок — это предпучок, удовлетворяющий дополнительным условиям. В некоторых книгах дается эквивалентное определение пучка как топологического пространства над X с некоторыми свойствами (упр. 1.13).

Пример 1.0.1. Пусть X — многообразие над полем k. Для каждого открытого множества $U \subset X$ пусть $\mathcal{O}(U)$ — кольцо регулярных функций на U со значениями в k, и для каждого $V \subset U$ пусть $\rho_{UV}: \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ — отображение ограничения (в обычном смысле). Тогда $\mathcal{O}$ является пучком колец на X. Действительно, очевидно, что он является предпучком колец. Для того чтобы проверить условия (3) и (4), заметим, что функция, которая является нулевой локально, оказывается всюду нулевой и локально регулярная функция является всюду регулярной, согласно определению регулярной функции (§ 3 гл. I). Пучок $\mathcal{O}$ будем называть *пучком регулярных функций* на X.

Пример 1.0.2. Точно таким же образом можно определить пучок непрерывных вещественнозначных функций на любом топологическом пространстве, пучок дифференцируемых функций на дифференцируемом многообразии или пучок голоморфных функций на комплексном многообразии.

Пример 1.0.3. Пусть X — топологическое пространство и A — абелева группа. Тогда на X посредством A можно определить *постоянный пучок* $\mathscr{A}$ следующим образом. Снабдим A дискретной топологией и для каждого открытого множества $U \subset X$ обозначим через $\mathscr{A}(U)$ группу всех непрерывных отображений из U в A. Тогда вместе с обычными отображениями ограничения набор групп $\mathscr{A}(U)$ задает пучок $\mathscr{A}$. Отметим, что для каждого связного открытого множества U имеет место изоморфизм $\mathscr{A}(U) \simeq A$, что объясняет термин «постоянный пучок». Если U — открытое множество, компоненты связности которого открыты (что всегда выполнено для локально связного топологического пространства), то $\mathscr{A}(U)$ является прямым произведением экземпляров группы A в числе, равном числу связных компонент множества U.

Определение. *Слой* $\mathscr{F}_P$ предпучка $\mathscr{F}$ на U в точке $P \in X$ определим как прямой предел групп $\mathscr{F}(U)$ по всем открытым множествам U, содержащим P, относительно отображений ограничения ρ.

Таким образом, элемент слоя $\mathscr{F}_P$ представляется парой $\langle U, s \rangle$, где U — открытая окрестность точки P и s — элемент группы $\mathscr{F}(U)$. Две такие пары $\langle U, s \rangle$ и $\langle V, t \rangle$ определяют один и тот же элемент слоя $\mathscr{F}_P$, если и только если существует такая открытая окрестность W точки P, $W \subset U \cap V$, что $s|_W = t|_W$. Значит, можно сказать, что элементы слоя $\mathscr{F}_P$ — это *ростки* сечений пучка $\mathscr{F}$ в точке P. Слой пучка регулярных функций $\mathcal{O}$ на многообразии X — это не что иное, как локальное кольцо $\mathcal{O}_P$ в точке P на X, которое было определено в § 3 гл. I.

Определение. *Морфизмом* $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ предпучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ на X называется набор гомоморфизмов абелевых групп $\varphi(U)$: $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, по одному для каждого открытого множества U, таких, что для всякого вложения открытых множеств $V \subset U$ следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho_{UV}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'_{UV}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

коммутативна, где ρ и ρ' — отображения ограничения для $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ соответственно. В случае когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки на X, φ называется морфизмом пучков. Морфизм φ называется *изоморфизмом*, если для него существует левый и правый обратные морфизмы.

Отметим, что морфизм предпучков $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ на X индуцирует морфизм слоев $\varphi_P: \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ для любой точки $P \in X$. Следующее предложение (которое не имеет места для предпучков) иллюстрирует локальную природу пучков.

Предложение 1.1. *Морфизм пучков $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ на топологическом пространстве X тогда и только тогда является изоморфизмом, когда индуцированный им морфизм слоев $\varphi_P: \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ является изоморфизмом для каждой точки $P \in X$.*

Доказательство. Если φ — изоморфизм, то ясно, что φ_P является изоморфизмом для любой точки $P \in X$. Обратно, предположим, что φ_P является изоморфизмом для всех точек $P \in X$. Для того чтобы доказать, что φ — изоморфизм, достаточно показать, что $\varphi(U)$: $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ является изоморфизмом для всякого открытого множества U, поскольку тогда можно определить обратный морфизм ψ, полагая $\psi(U) = \varphi(U)^{-1}$ для каждого U. Докажем сначала инъективность $\varphi(U)$. Пусть $s \in \mathcal{F}(U)$, и предположим, что $\varphi(s) \in \mathcal{G}(U)$ равен 0. Тогда для каждой точки $P \in U$ образ $\varphi(s)_P$ элемента $\varphi(s)$ в слое $\mathcal{G}_P$ равен 0. Так как отображение φ_P инъективно для любой точки P, то отсюда следует, что $s_P = 0$ в $\mathcal{F}_P$ для каждой точки $P \in U$. Утверждение $s_P = 0$ означает, что s и 0 имеют один и тот же образ в $\mathcal{F}_P$, а это означает в свою очередь, что существует открытая окрестность W_P точки P, $W_P \subset U$, такая, что $s|_{W_P} = 0$. Множество U покрывается такими окрестностями W_P всех его точек P, так что по свойству пучков (3) элемент s равен 0 на U. Это доказывает инъективность $\varphi(U)$.

Покажем теперь, что $\varphi(U)$ сюръективно. Пусть $t \in \mathcal{G}(U)$ и t_P — его росток в точке $P \in U$. Так как отображение φ_P сюръективно, то существует элемент $s_P \in \mathcal{F}_P$, такой, что $\varphi_P(s_P) = t_P$. Пусть s_P представлен сечением $s(P)$ в некоторой окрестности V_P точки P. Тогда ростки элементов $\varphi(s(P))$ и $t|_{V_P}$ совпадают в точке P и, следовательно, заменяя V_P на меньшую окрестность, если в этом есть необходимость, можно считать, что $\varphi(s(P)) = t|_{V_P}$ в $\mathcal{G}(V_P)$. Стало быть, U покрывается открытыми множествами V_P и на каждом V_P задано сечение $s(P) \in \mathcal{F}(V_P)$, причем для различных точек P и Q сечения $s(P)|_{V_P \cap V_Q}$ и $s(Q)|_{V_P \cap V_Q}$ в $\mathcal{F}(V_P \cap V_Q)$ отображаются при φ в сечение $t|_{V_P \cap V_Q}$. Следовательно, в силу доказанной выше инъективности φ эти сечения совпадают на $V_P \cap V_Q$. По свойству пучков (4) существует сечение $s \in \mathcal{F}(U)$, такое, что $s|_{V_P} = s(P)$ для каждой точки $P \in U$. Осталось проверить, что $\varphi(s) = t$. Для этого заметим, что $\varphi(s)$, $t \in \mathcal{G}(U)$, и для каждой точки $P \in U$ имеем $\varphi(s)|_{V_P} = t|_{V_P}$. Следовательно, по свойству пучков (3), примененному к сечению $\varphi(s) - t$, получаем, что $\varphi(s) = t$.

Определим теперь ядра, коядра и образы морфизмов пучков.

Определение. Пусть $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм предпучков. Определим *ядро*, *коядро* и *образ* φ как предпучки, заданные соответственно формулами

$$U \mapsto \ker(\varphi(U)), \quad U \mapsto \operatorname{coker}(\varphi(U)) \quad \text{и} \quad U \mapsto \operatorname{im}(\varphi(U)).$$

Отметим, что если $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм пучков, то его ядро тоже является пучком, но коядро и образ пучками, вообще говоря, не являются. Это приводит к необходимости ввести понятие пучка, ассоциированного с предпучком.

Предложение-определение. *Для каждого предпучка $\mathcal{F}$ существует пучок $\mathcal{F}^+$ и морфизм $\theta: \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, обладающие следующим свойством: для любого пучка $\mathcal{G}$ и любого морфизма $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ существует единственный морфизм $\psi: \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, такой, что $\varphi = \psi \circ \theta$. Кроме того, пара $(\mathcal{F}^+, \theta)$ единственна с точностью до однозначно определенного изоморфизма. Пучок $\mathcal{F}^+$ называется* пучком, ассоциированным *с предпучком $\mathcal{F}^+$.*

Доказательство. Пучок $\mathcal{F}^+$ строится следующим образом. Для любого открытого множества U обозначим через $\mathcal{F}^+(U)$ множество функций s из U в объединение $\bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P$ слоев $\mathcal{F}$ над точками множества U, таких, что

(1) $s(P) \in \mathcal{F}_P$ для каждой точки $P \in U$ и

(2) для каждой точки $P \in U$ существует окрестность $V \ni P$, содержащаяся в U, и элемент $t \in \mathcal{F}(V)$, такие, что для всех $Q \in V$ росток t_Q элемента t в Q равен $s(Q)$.

Непосредственно проверяется (!), что $\mathscr{F}^+$ с естественными отображениями ограничения является пучком, что существует естественный морфизм θ: $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ и что выполняется требуемое свойство универсальности. Единственность $\mathscr{F}^+$ — это формальное следствие свойства универсальности. Отметим, что для любой точки P имеет место равенство слоев $\mathscr{F}_P = \mathscr{F}^+_P$. Отметим также, что если $\mathscr{F}$ — пучок, то $\mathscr{F}^+$ изоморфен $\mathscr{F}$, причем изоморфизм осуществляется морфизмом θ.

Определение. *Подпучком* пучка $\mathscr{F}$ называется пучок $\mathscr{F}'$, такой, что $\mathscr{F}'(U)$ является подгруппой группы $\mathscr{F}(U)$ для каждого открытого множества $U \subset X$ и отображения ограничения для пучка $\mathscr{F}'$ индуцированы отображениями ограничения для пучка $\mathscr{F}$. Отсюда следует, что слой $\mathscr{F}'_P$ является подгруппой в слое $\mathscr{F}_P$ для любой точки P.

Пусть φ: $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ — морфизм пучков, тогда ядро φ, обозначаемое через $\ker \varphi$, определенное выше для морфизма предпучков, является на самом деле пучком и, следовательно, подпучком пучка $\mathscr{F}$.

Будем называть морфизм пучков φ: $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *инъективным*, если $\ker \varphi = 0$, так что φ инъективен тогда и только тогда, когда индуцированное отображение $\varphi(U)$: $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ инъективно для каждого открытого множества U в X.

Образом морфизма пучков φ: $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$, обозначаемым через $\operatorname{im} \varphi$, называется пучок, ассоциированный с предпучком—образом морфизма φ в категории предпучков. По свойству универсальности пучка, ассоциированного с предпучком, существует естественное отображение $\operatorname{im} \varphi \to \mathscr{G}$. В действительности это отображение инъективно (см. упр. 1.4), и, следовательно, $\operatorname{im} \varphi$ можно отождествить с подпучком пучка $\mathscr{G}$.

Будем называть морфизм φ: $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *сюръективным*, если $\operatorname{im} \varphi = \mathscr{G}$.

Последовательность пучков и морфизмов

$$\ldots \to \mathscr{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathscr{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathscr{F}^{i+1} \to \ldots$$

будем называть *точной*, если $\ker \varphi^i = \operatorname{im} \varphi^{i-1}$ для каждого i. Таким образом, последовательность $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G}$ точна тогда и только тогда, когда морфизм φ инъективен, и последовательность $\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \to 0$ точна тогда и только тогда, когда φ сюръективен.

Пусть $\mathscr{F}'$ — подпучок пучка $\mathscr{F}$. Определим *факторпучок* $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ как пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathscr{F}(U)/\mathscr{F}'(U)$. Из определения следует, что для любой точки P слой $(\mathscr{F}/\mathscr{F}')_P$ совпадает с $\mathscr{F}_P/\mathscr{F}'_P$.

Определим *коядро* морфизма пучков φ: $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$, обозначаемое через $\operatorname{coker} \varphi$, как пучок, ассоциированный с предпучком—коядром морфизма φ в категории предпучков.

Предостережение 1.2.1. Выше было отмечено, что морфизм пучков φ: $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ инъективен тогда и только тогда, когда отображение сечений $\varphi(U)$: $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ инъективно для каждого открытого множества U. Соответствующее утверждение для сюръективных морфизмов неверно: если морфизм φ: $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ сюръективен, то отображения сечений $\varphi(U)$: $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ могут не быть сюръективными. Однако можно утверждать, что морфизм φ сюръективен тогда и только тогда, когда отображения слоев φ_P: $\mathscr{F}_P \to \mathscr{G}_P$ сюръективны для всех точек P. Более общим образом последовательность пучков и морфизмов точна тогда и только тогда, когда она точна послойно (упр. 1.2). Это еще раз указывает на локальную природу пучков.

До сих пор речь шла только о пучках на одном топологическом пространстве. Определим теперь некоторые операции на пучках, ассоциированные с непрерывным отображением одного пространства в другое.

Определение. Пусть f: $X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Для любого пучка $\mathscr{F}$ на X определим пучок $f_*\mathscr{F}$, *прямой образ* пучка $\mathscr{F}$ на Y, полагая $(f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$ для каждого открытого множества $V \subset Y$. Для любого пучка $\mathscr{G}$ на Y определим его *обратный образ* $f^{-1}\mathscr{G}$ на X как пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{G}(V)$, где U — произвольное открытое множество в X и предел берется по всем открытым множествам V в Y, содержащим $f(U)$. Пучок $f^{-1}\mathscr{G}$ не следует путать с пучком $f^*\mathscr{G}$, который будет определен позднее (§ 5) для морфизмов окольцованных пространств.

Отметим, что f_* является функтором из категории $\mathfrak{Ab}(X)$ пучков на X в категорию $\mathfrak{Ab}(Y)$ пучков на Y. Точно так же f^{-1} является функтором из $\mathfrak{Ab}(Y)$ в $\mathfrak{Ab}(X)$.

Определение. Пусть $Z \subset X$ — подмножество топологического пространства X, рассматриваемое с индуцированной топологией, i: $Z \to X$ — отображение вложения и $\mathscr{F}$ — пучок на X. Тогда пучок $i^{-1}\mathscr{F}$ будем называть *ограничением* $\mathscr{F}$ на Z и часто обозначать через $\mathscr{F}|_Z$. Отметим, что для любой точки $P \in Z$ слой $\mathscr{F}|_Z$ в $P \in Z$ равен $\mathscr{F}_P$.

Упражнения

1.1. Для абелевой группы A и топологического пространства X определим *постоянный предпучок* на X, ассоциированный с A, как предпучок $U \mapsto A$ для всех открытых подмножеств $U \neq \varnothing$ с тождественными отображениями ограничения. Показать, что постоянный пучок $\mathcal{A}$, определенный в тексте, является пучком, ассоциированным с этим предпучком.

1.2. (а) Пусть $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — произвольный морфизм пучков. Показать, что для каждой точки P

$$(\ker \varphi)_P = \ker \varphi_P \quad \text{и} \quad (\operatorname{im} \varphi)_P = \operatorname{im} (\varphi_P).$$

(b) Показать, что φ инъективен (соответственно сюръективен) тогда и только тогда, когда индуцированные отображения слоев φ_P инъективны (соответственно сюръективны) для всех P.

(с) Показать, что последовательность пучков и морфизмов

$$\ldots \to \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \to \ldots$$

точна тогда и только тогда, когда для каждой точки $P \in X$ соответствующая последовательность слоев точна как последовательность абелевых групп.

1.3. (а) Пусть $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм пучков на X. Показать, что φ сюръективен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: для каждого открытого множества $U \subset X$ и для каждого $s \in \mathcal{G}(U)$ существует покрытие $\{U_i\}$ множества U и элементы $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$, такие, что $\varphi(t_i) = s|_{U_i}$ для всех i.

(b) Привести пример сюръективного морфизма пучков $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ и открытого множества U, таких, что отображение $\varphi(U): \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ не будет сюръективно.

1.4. (а) Пусть $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм предпучков, такой, что $\varphi(U): \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ инъективно для каждого U. Показать, что индуцированное отображение ассоциированных пучков $\varphi^+: \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ будет инъективно.

(b) Используя (а), показать, что если $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм пучков, то $\operatorname{im} \varphi$ можно естественно отождествить с подпучком пучка $\mathcal{G}$, как упоминалось в тексте.

1.5. Показать, что морфизм пучков тогда и только тогда является изоморфизмом, когда он инъективен и сюръективен одновременно.

1.6. (а) Пусть $\mathcal{F}'$ — подпучок пучка $\mathcal{F}$. Показать, что естественное отображение пучка $\mathcal{F}$ в факторпучок $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ сюръективно и его ядром является пучок $\mathcal{F}'$. Таким образом, имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}' \to 0$$

(b) Обратно, если $0 \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to 0$ — точная последовательность пучков, то показать, что $\mathcal{F}'$ изоморфен подпучку пучка $\mathcal{F}$, а $\mathcal{F}''$ — факторпучку пучка $\mathcal{F}$ по этому подпучку.

1.7. Пусть $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм пучков.

(а) Показать, что $\operatorname{im} \varphi \simeq \mathcal{F}/\ker \varphi$.

(b) Показать, что $\operatorname{coker} \varphi \simeq \mathcal{G}/\operatorname{im} \varphi$.

1.8. Показать, что для любого открытого множества $U \subset X$ функтор $\Gamma(U, \cdot)$ из категории пучков на X в категорию абелевых групп точен слева, т. е. если $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — точная последовательность пучков, то $0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}') \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}'')$ — точная последовательность групп. Функтор $\Gamma(U, \cdot)$ может не быть точным; см. упр. 1.21 ниже.

1.9. *Прямая сумма.* Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки на X. Показать, что предпучок $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ является пучком. Он называется *прямой суммой* пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ и обозначается через $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Показать, что он является прямой суммой и прямым произведением пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в категорном смысле (в категории пучков абелевых групп на X).

1.10. *Прямой предел.* Пусть $\{\mathcal{F}_i\}$ — прямая система пучков и морфизмов на X. Определим *прямой предел* $\varinjlim \mathcal{F}_i$ системы $\{\mathcal{F}_i\}$ как пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_i(U)$. Показать, что он является прямым пределом в категорном смысле, т. е. обладает следующим свойством универсальности: для заданного пучка $\mathcal{G}$ и набора морфизмов $\mathcal{F}_i \to \mathcal{G}$, согласованных с отображениями в прямой системе $\{\mathcal{F}_i\}$, существует единственное отображение $\varinjlim \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}$, такое, что для каждого i заданное отображение $\mathcal{F}_i \to \mathcal{G}$ разлагается в композицию отображений $\mathcal{F}_i \to \varinjlim \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}$.

1.11. Пусть $\{\mathcal{F}_i\}$ — прямая система пучков на нётеровом топологическом пространстве X. Показать, что в этом случае предпучок $U \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_i(U)$ является на самом деле пучком. В частности, $\Gamma(X, \varinjlim \mathcal{F}_i) = \varinjlim \Gamma(X, \mathcal{F}_i)$.

1.12. *Обратный предел.* Пусть $\{\mathcal{F}_i\}$ — обратная система пучков на X. Показать, что предпучок $U \mapsto \varprojlim \mathcal{F}_i(U)$ является пучком. Он называется *обратным пределом* системы $\{\mathcal{F}_i\}$ и обозначается через $\varprojlim \mathcal{F}_i$. Показать, что для него выполнено свойство универсальности обратного предела в категории пучков.

1.13. *Этальное пространство предпучка.* (Цель этого упражнения — установить связь между нашим определением пучка и другим его определением, часто встречающимся в литературе. См., например, Годеман [1, гл. II, § 1.2].) Для заданного предпучка $\mathcal{F}$ на X определим топологическое пространство $\operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$, называемое его *этальным пространством*, следующим образом. Как множество $\operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ совпадает с $\bigcup_{P \in X} \mathcal{F}_P$. Определим отображение проекции $\pi: \operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) \to X$, сопоставляя элементу $s \in \mathcal{F}_P$ точку P. Для каждого открытого множества $U \subset X$ и каждого сечения $s \in \mathcal{F}(U)$ зададим отображение $\bar{s}: U \to \operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ с помощью сопоставления $P \mapsto s_P$, где s_P — росток сечения s в точке P. Это отображение обладает тем свойством, что $\pi \circ \bar{s} = \mathrm{id}_U$, иными словами, оно является «сечением» отображения π над U. Превратим теперь $\operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ в топологическое пространство, задав на нем слабейшую топологию, в которой все отображения $\bar{s}: U \to \operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ для всех U и всех $s \in \mathcal{F}(U)$ являются непрерывными. Показать, что пучок $\mathcal{F}^+$, ассоциированный с $\mathcal{F}$, можно описать следующим образом: для любого открытого множества $U \subset X$ $\mathcal{F}^+(U)$ — это множество *непрерывных* сечений отображения $\pi: \operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) \to X$ над U. В частности, исходный предпучок $\mathcal{F}$ тогда и только тогда является пучком, когда $\mathcal{F}(U)$ совпадает с множеством непрерывных сечений $\pi: \operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) \to X$ над U для каждого U.

1.14. *Носитель.* Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на X и $s \in \mathcal{F}(U)$ — сечение над открытым множеством U. *Носителем* $\operatorname{Supp} s$ сечения s будем называть множество $\{P \in U \mid s_P \neq 0\}$, где s_P — росток сечения s в слое $\mathcal{F}_P$. Показать, что $\operatorname{Supp} s$ является замкнутым подмножеством в U. *Носителем* $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ пучка $\mathcal{F}$ будем называть множество $\{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}$. Оно может не быть замкнутым.

1.15. *Пучок* $\mathcal{H}om$. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки абелевых групп над X. Показать, что для любого открытого множества $U \subset X$ множество $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ морфизмов ограниченных пучков обладает естественной структурой абелевой группы. Показать, что предпучок $U \mapsto \operatorname{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ является пучком. Он называется *пучком локальных морфизмов* $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$ или пучком гомоморфизмов и обозначается через $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

1.16. *Плоские пучки.* Пучок $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X называется *плоским* (или *вялым*), если для всякого вложения открытых множеств $V \subset U$ отображение ограничения $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(V)$ сюръективно.

(а) Показать, что постоянный пучок на неприводимом топологическом пространстве является плоским. (Определение неприводимого топологического пространства см. в § 1 гл. I.)

(b) Если $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ — точная последовательность пучков и пучок $\mathscr{F}'$ плоский, то для любого открытого множества U последовательность абелевых групп $0 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U) \to 0$ также точна.

(c) Если $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ — точная последовательность пучков и пучки $\mathscr{F}'$ и $\mathscr{F}$ плоские, то пучок $\mathscr{F}''$ тоже плоский.

(d) Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и $\mathscr{F}$ — плоский пучок на X. Тогда пучок $f_* \mathscr{F}$ на Y тоже плоский.

(e) Пусть $\mathscr{F}$ — произвольный пучок на X. Определим пучок $\mathscr{G}$ *разрывных сечений* пучка $\mathscr{F}$, сопоставляя открытому множеству $U \subset X$ множество $\mathscr{G}(U)$ всех отображений $s\colon U \to \bigcup_{P \in U} \mathscr{F}_P$, таких, что $s(P) \in \mathscr{F}_P$ для каждой точки $P \in U$. Показать, что $\mathscr{G}$ является плоским пучком и что существует естественный инъективный морфизм пучка $\mathscr{F}$ в $\mathscr{G}$.

1.17. *Пучки-небоскребы.* Пусть X—топологическое пространство, $P \in X$— некоторая точка и A — абелева группа. Определим пучок $i_P(A)$ на X следующим образом: $i_P(A)(U) = A$, если $P \in U$, и 0 в противном случае. Проверить, что слой пучка $i_P(A)$ равен A в любой точке $Q \in \{\overline{P}\}$ и 0 в остальных точках, где $\{\overline{P}\}$ обозначает замыкание множества, состоящего из точки P. Такой пучок называется *пучком-небоскребом*. Показать, что его можно описать также как $i_*(A)$, где A обозначает постоянный пучок на замкнутом подмножестве $\{\overline{P}\}$ и $i\colon \{\overline{P}\} \to X$ — естественное вложение.

1.18. *Свойство сопряженности для* f^{-1}. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Показать, что для любого пучка $\mathscr{F}$ на X существует естественное отображение $f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ и для любого пучка $\mathscr{G}$ на Y — естественное отображение $\mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$. Используя эти отображения, показать, что существует естественная биекция множеств

$$\operatorname{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \operatorname{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$$

для любых пучков $\mathscr{F}$ на X и $\mathscr{G}$ на Y. Это означает, что f^{-1} является *левым сопряженным* функтором к f_*, а f_* — *правым сопряженным* функтором к f^{-1}.

1.19. *Продолжение пучка нулем.* Пусть X — топологическое пространство, $Z \subset X$ — замкнутое подмножество, $i\colon Z \to X$ — естественное вложение, $U = X - Z$ — открытое множество (дополнение к Z) и $j\colon U \to X$ — его вложение.

(a) Пусть $\mathscr{F}$ — пучок на Z. Показать, что слой $(i_*\mathscr{F})_P$ прямого образа $i_*\mathscr{F}$ на X пучка $\mathscr{F}$ на Z равен $\mathscr{F}_P$, если $P \in Z$, и 0, если $P \notin Z$. Пучок $i_*\mathscr{F}$ будем называть *продолжением пучка* $\mathscr{F}$ *нулем вне* Z. Для простоты обозначений мы будем иногда вместо $i_*\mathscr{F}$ писать $\mathscr{F}$ и говорить «рассмотрим $\mathscr{F}$ как пучок на X» вместо того, чтобы сказать «рассмотрим пучок $i_*\mathscr{F}$».

(b) Пусть теперь $\mathscr{F}$ — пучок на U, и пусть $j_!(\mathscr{F})$ — пучок на X, ассоциированный с предпучком $V \mapsto \mathscr{F}(V)$, если $V \subset U$, и $V \mapsto 0$ в противном случае. Показать, что слой $(j_!(\mathscr{F}))_P$ равен $\mathscr{F}_P$, если $P \in U$, и 0, если $P \notin U$, и что $j_!(\mathscr{F})$ — единственный пучок на X, обладающий этим свойством, ограничение которого на U совпадает с $\mathscr{F}$. Пучок $j_!(\mathscr{F})$ будем называть *продолжением пучка* $\mathscr{F}$ *нулем* вне U.

(c) Пусть $\mathscr{F}$ — пучок на X. Показать, что существует следующая точная последовательность пучков на X:

$$0 \to j_!(\mathscr{F}|_U) \to \mathscr{F} \to i_*(\mathscr{F}|_Z) \to 0.$$

1.20. *Подпучок с носителями.* Пусть Z — замкнутое подмножество в X и $\mathscr{F}$—пучок на X. Определим $\Gamma_Z(X, \mathscr{F})$ как подгруппу $\Gamma(X, \mathscr{F})$, состоящую из всех сечений, носители которых (упр. 1.14) содержатся в Z.

(a) Показать, что предпучок $V \mapsto \Gamma_{Z \cap V}(V, \mathscr{F}|_V)$ является пучком. Этот пучок будем называть *подпучком* пучка $\mathscr{F}$ *с носителями* в Z и обозначать через $\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})$.

(b) Пусть $U = X - Z$ и $j\colon U \to X$ — естественное вложение. Показать, что существует следующая точная последовательность пучков на X:

$$0 \to \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F}) \to \mathscr{F} \to j_*(\mathscr{F}|_U)$$

Более того, если пучок $\mathscr{F}$ плоский, то отображение $\mathscr{F} \to j_*(\mathscr{F}|_U)$ сюръективно.

1.21. *Некоторые примеры пучков на многообразиях.* Пусть X — многообразие над алгебраически замкнутым полем k, как в гл. I, и $\mathcal{O}_X$ — пучок регулярных функций на X (см. 1.0.1).

(a) Пусть Y — замкнутое подмножество в X. Для каждого открытого множества $U \subset X$ пусть $\mathcal{J}_Y(U)$ обозначает идеал в кольце $\mathcal{O}_X(U)$, состоящий из всех регулярных функций, обращающихся в нуль во всех точках из $Y \cap U$. Показать, что предпучок $U \mapsto \mathcal{J}_Y(U)$ является пучком. Он называется *пучком идеалов* $\mathcal{J}_Y$ подмногообразия Y и является подпучком пучка колец $\mathcal{O}_X$.

(b) Пусть Y—подмногообразие. Показать тогда, что факторпучок $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$ изоморфен пучку $i_*(\mathcal{O}_Y)$, где $i\colon Y \to X$ — естественное вложение и $\mathcal{O}_Y$ — пучок регулярных функций на Y.

(c) Пусть теперь $X = \mathbf{P}^1$ и Y — объединение двух различных точек P, $Q \in X$. Тогда, согласно (b), мы имеем следующую точную последовательность пучков на X:

$$0 \to \mathcal{J}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathscr{F} \to 0,$$

где $\mathscr{F} = i_*\mathcal{O}_P \oplus i_*\mathcal{O}_Q$. Показать, что индуцированное отображение глобальных сечений $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathscr{F})$ в этом случае не является сюръективным. Это показывает, что функтор глобальных сечений $\Gamma(X, \cdot)$ не является точным (ср. упр. 1.8, где утверждается, что он точен слева).

(d) Пусть опять $X = \mathbf{P}^1$ и $\mathcal{O}$ — пучок регулярных функций на X. Обозначим через $\mathscr{K}$ постоянный пучок на X, ассоциированный с полем функций K на X. Показать, что существует естественное инъективное отображение $\mathcal{O} \to \mathscr{K}$ и что факторпучок $\mathscr{K}/\mathcal{O}$ изоморфен прямой сумме пучков $\sum_{P \in X} i_P(I_P)$, где I_P — группа $K/\mathcal{O}_P$ и $i_P(I_P)$ обозначает пучок-небоскреб (упр. 1.17), определяемый группой I_P в точке P.

(e) Показать, наконец, что в случае (d) последовательность

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}) \to \Gamma(X, \mathscr{K}) \to \Gamma(X, \mathscr{K}/\mathcal{O}) \to 0$$

точна. (Это некоторый аналог так называемой первой проблемы Кузена, известной в теории функций многих комплексных переменных. См. Ганнинг и Росси [1].)

1.22. *Склеивание пучков.* Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ — открытое покрытие X, и предположим, что для каждого i задан пучок $\mathscr{F}_i$ на U_i и для каждой пары i, j изоморфизм $\varphi_{ij}\colon \mathscr{F}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_j|_{U_i \cap U_j}$, такие, что

(1) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}$ для любого i,

(2) $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ на $U_i \cap U_j \cap U_k$ для любых i, j, k.

Тогда существует единственный пучок $\mathscr{F}$ на X, вместе с изоморфизмами $\psi_i\colon \mathscr{F}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_i$, такой что $\psi_j = \varphi_{ij} \circ \psi_i$ на $U_i \cap U_j$ для любых i, j. Пучок $\mathscr{F}$ мы будем называть пучком, полученным *склеиванием* пучков $\mathscr{F}_i$ посредством изоморфизмов φ_{ij}.

§ 2. Схемы

В этом параграфе будет дано определение схемы. Сначала мы определим аффинные схемы: любому кольцу A (вспомним наши соглашения о кольцах, сделанные во введении!) мы поставим в соответствие топологическое пространство вместе с пучком колец на нем, обозначаемое через $\operatorname{Spec} A$. Конструкция $\operatorname{Spec} A$ аналогична конструкции аффинных многообразий (§ 1 гл. I), за исключением того, что точкам пространства $\operatorname{Spec} A$ соответствуют все простые идеалы кольца A, а не только максимальные. Произвольная схема определяется как некоторый глобальный объект, локально изоморфный аффинной схеме. Для этого определения аналога в гл. I нет. Важный класс схем доставляют схемы вида $\operatorname{Proj} S$, ассоциированные с произвольным градуированным кольцом S. Конструкция таких схем аналогична конструкции проективных многообразий в § 2 гл. I. Мы покажем в этом параграфе, что многообразия из гл. I после незначительной модификации можно рассматривать как схемы. Таким образом, категория схем является расширением категории многообразий.

Начнем с построения пространства $\operatorname{Spec} A$, ассоциированного с кольцом A. Как множество $\operatorname{Spec} A$ состоит из всех простых идеалов кольца A. Для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A определим подмножество $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$, состоящее из всех простых идеалов в A, содержащих $\mathfrak{a}$.

Лемма 2.1. (a) *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *идеалы в* A, *тогда* $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

(b) *Пусть* $\{\mathfrak{a}_i\}$ — *произвольное множество идеалов кольца* A, *тогда* $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$.

(c) *Для двух идеалов* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *в* A *включение* $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\sqrt{\mathfrak{a}} \supset \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Доказательство. (a) Ясно, что если $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ или $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$, то $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Обратно, если $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{b}$, например, то существует элемент $b \in \mathfrak{b}$, такой, что $b \notin \mathfrak{p}$. Далее, $ab \in \mathfrak{p}$ для любого $a \in \mathfrak{a}$, так что $a \in \mathfrak{p}$, поскольку идеал $\mathfrak{p}$ простой. Поэтому $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$

(b) Идеал $\mathfrak{p}$ содержит $\sum \mathfrak{a}_i$ тогда и только тогда, когда он содержит каждый из $\mathfrak{a}_i$, просто потому, что $\sum \mathfrak{a}_i$ является наименьшим идеалом, содержащим все $\mathfrak{a}_i$.

(c) Радикал идеала $\mathfrak{a}$ — это пересечение всех простых идеалов, его содержащих, так что $\sqrt{\mathfrak{a}} \supset \sqrt{\mathfrak{b}}$ тогда и только тогда, когда $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$.

Зададим теперь на множестве $\operatorname{Spec} A$ топологию, объявляя подмножества вида $V(\mathfrak{a})$ замкнутыми. Отметим, что $V(A) = \varnothing$, $V((0)) = \operatorname{Spec} A$ и, согласно лемме 2.1, конечные объединения и произвольные пересечения множеств вида $V(\mathfrak{a})$ имеют тот же вид. Следовательно, они составляют полный набор замкнутых множеств на $\operatorname{Spec} A$.

Перейдем к определению пучка колец $\mathcal{O}$ на $\operatorname{Spec} A$. Для каждого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ пусть $A_\mathfrak{p}$ обозначает локализацию кольца A в $\mathfrak{p}$. Пусть $U \subset \operatorname{Spec} A$ — произвольное открытое подмножество. Определим $\mathcal{O}(U)$ как множество всех функций $s\colon U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}$, таких, что $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ для каждого $\mathfrak{p}$, и таких, что s локально является отношением элементов из A: точнее, мы потребуем, чтобы для каждого $\mathfrak{p} \in U$ существовала окрестность V точки $\mathfrak{p}$, содержащаяся в U, и элементы $a, f \in A$, такие, что $s(\mathfrak{q}) = a/f$, $f \notin \mathfrak{q}$, для каждого $\mathfrak{q} \in V$. (Отметим, что эта конструкция аналогична определению регулярных функций на многообразии. Отличие состоит в том, что рассматриваются функции со значениями в различных локальных кольцах, а не в основном поле, как в случае многообразий.)

Очевидно, что суммы и произведения таких функций будут функциями того же вида и существует единичная функция 1, которая в каждом $A_\mathfrak{p}$ принимает значение 1. Следовательно, $\mathcal{O}(U)$ является коммутативным кольцом с единицей. Для вложений открытых множеств $V \subset U$ естественное отображение ограничения $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ является, очевидно, гомоморфизмом колец, стало быть, $\mathcal{O}$ — предпучок колец. Из локальной природы определения ясно, наконец, что $\mathcal{O}$ является пучком.

Определение. Пусть A — кольцо. *Спектром* кольца A называется пара, состоящая из топологического пространства $\operatorname{Spec} A$ и пучка колец $\mathcal{O}$, определенных выше.

Установим некоторые основные свойства пучка $\mathcal{O}$ на $\operatorname{Spec} A$. Для любого элемента $f \in A$ обозначим через $D(f)$ открытое дополнение к $V((f))$. Отметим, что открытые множества вида $D(f)$ образуют базис топологии на $\operatorname{Spec} A$. В самом деле, если $V(\mathfrak{a})$ — замкнутое множество и $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, то $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}$, так что существует элемент $f \in \mathfrak{a}$, такой, что $f \notin \mathfrak{p}$. Тогда $\mathfrak{p} \in D(f)$ и $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \varnothing$.

Предложение 2.2. *Пусть* A — *кольцо и* $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ — *его спектр.*

(a) *Для каждого* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *слой* $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ *пучка* $\mathcal{O}$ *изоморфен локальному кольцу* $A_\mathfrak{p}$.

(b) *Для каждого элемента* f *кольцо* $\mathcal{O}(D(f))$ *изоморфно локализованному кольцу* A_f.

(c) *В частности,* $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}) \simeq A$.

Доказательство. (a) Определим прежде всего гомоморфизм из $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ в $A_\mathfrak{p}$, сопоставляя локальному сечению s в окрестности точки $\mathfrak{p}$ его значение $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$. Тем самым мы получаем корректно определенный гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$. Отображение φ сюръективно, поскольку любой элемент из $A_\mathfrak{p}$ можно представить как отношение a/f, $a, f \in A$, $f \notin \mathfrak{p}$. В таком случае $D(f)$ будет открытой окрестностью точки $\mathfrak{p}$ и a/f определяет сечение пучка $\mathcal{O}$ над $D(f)$, значение которого в $\mathfrak{p}$ совпадает с заданным элементом. Для доказательства инъективности φ рассмотрим окрестность U точки $\mathfrak{p}$, и пусть $s, t \in \mathcal{O}(U)$ — элементы, имеющие одно и то же значение $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$ в $\mathfrak{p}$. Уменьшив, если нужно, U, можно считать, что $s = a/f$ и $t = b/g$ на U, где $a, b, f, g \in A$ и $f, g \notin \mathfrak{p}$. Так как a/f и b/g имеют один и тот же образ в $A_\mathfrak{p}$, то из определения локализации следует, что существует элемент $h \notin \mathfrak{p}$, такой, что $h(ga - fb) = 0$. Поэтому $a/f = b/g$ в каждом локальном кольце $A_\mathfrak{q}$, таком, что $f, g, h \notin \mathfrak{q}$. Но множество всех таких $\mathfrak{q}$ является открытым множеством $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, содержащим $\mathfrak{p}$. Следовательно, $s = t$ в некоторой окрестности точки $\mathfrak{p}$. Стало быть, они определяют один и тот же росток в $\mathfrak{p}$. Отсюда вытекает, что отображение φ инъективно и, следовательно, является изоморфизмом, что доказывает (а).

(b) и (c). Заметим, что (c) является частным случаем (b), когда $f = 1$ и $D(f)$ — все пространство, так что достаточно доказать утверждение (b). Определим гомоморфизм $\psi\colon A_f \to \mathcal{O}(D(f))$, сопоставляя элементу a/f^n сечение $s \in \mathcal{O}(D(f))$, которое каждой точке $\mathfrak{p}$ ставит в соответствие образ a/f^n в $A_\mathfrak{p}$.

Докажем сначала инъективность ψ. Предположим, что $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$. Тогда для каждой точки $y \in D(f)$ элементы a/f^n и b/f^m имеют один и тот же образ в $A_\mathfrak{p}$. Следовательно, существует элемент $h \notin \mathfrak{p}$, такой, что $h(f^m a - f^n b) = 0$ в А. Пусть $\mathfrak{a}$ — аннулятор элемента $f^m a - f^n b$, тогда $h \in \mathfrak{a}$ и $h \notin \mathfrak{p}$, так что $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Это выполняется для любой точки $\mathfrak{p} \in D(f)$, поэтому мы заключаем, что $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \varnothing$. Значит, $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, т. е. $f^l \in \mathfrak{a}$ для некоторого l, и, значит, $f^l(f^m a - f^n b) = 0$, что доказывает равенство $a/f^n = b/f^m$ в A_f. Следовательно, отображение ψ инъективно.

Труднее доказать сюръективность ψ. Пусть $s \in \mathcal{O}(D(f))$. Тогда по определению пучка $\mathcal{O}$ множество $D(f)$ можно покрыть открытыми множествами V_i, на каждом из которых s представляется отношением a_i/g_i, где $g_i \notin \mathfrak{p}$ для всех $\mathfrak{p} \in V_i$, иными словами, $V_i \subset D(g_i)$. Открытые множества вида $D(h)$ образуют базис топологии, поэтому можно предполагать, что $V_i = D(h_i)$ для некоторого h_i. Так как $D(h_i) \subset D(g_i)$, то $V((h_i)) \supset V((g_i))$, поэтому, согласно 2.1(c), $\sqrt{(h_i)} \subset \sqrt{(g_i)}$ и, в частности, $h_i^n \in (g_i)$ для некоторого n. Стало быть, $h_i^n = cg_i$, так что $a_i/g_i = ca_i/h_i^n$. Заменяя h_i на h_i^n (так как $D(h_i) = D(h_i^n)$) и a_i на ca_i, можно считать, что $D(f)$ покрывается открытыми множествами $D(h_i)$ и что s представляется отношением a_i/h_i на $D(h_i)$.

Заметим далее, что $D(f)$ можно покрыть конечным числом открытых множеств $D(h_i)$. В самом деле, $D(f) \subset \bigcup D(h_i)$ тогда и только тогда, когда $V((f)) \supset \bigcap V((h_i)) = V(\sum (h_i))$. Снова по 2.1 (c) это эквивалентно тому, что $f \in \sqrt{\sum (h_i)}$ или что $f^n \in \sum (h_i)$ для некоторого n. Последнее означает, что f^n можно представить в виде *конечной* суммы $f^n = \sum b_i h_i$, $b_i \in A$. Следовательно, задействовано только конечное число h_i. Поэтому можно зафиксировать конечное множество $h_1, \ldots, h_r$, так что $D(f) \subset D(h_1) \cup \ldots \cup D(h_r)$.

Перейдем к следующему шагу. Заметим, что на $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ заданы два элемента из $A_{h_i h_j}$, а именно a_i/h_i и a_j/h_j, представляющие одно и то же сечение s. В силу инъективности ψ, доказанной выше и примененной к $D(h_i h_j)$, мы имеем $a_i/h_i = a_j/h_j$ в $A_{h_i h_j}$. Значит, $(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0$ для некоторого n. Так как в этих равенствах участвует только конечное число индексов, то n можно выбрать достаточно большим, чтобы оно годилось для всех i, j одновременно. Перепишем эти равенства в виде

$$h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0$$

и заменим h_i на h_i^{n+1} и a_i на $h_i^n a_i$. Тогда сечение s на $D(h_i)$ будет представлено элементом a_i/h_i и будет выполняться равенство $h_j a_i = h_i a_j$ для всех i, j.

Запишем $f^n = \sum b_i h_i$, как и выше, что возможно для некоторого n, поскольку множества $D(h_i)$ покрывают все $D(f)$. Пусть $a = \sum b_i a_i$, тогда для каждого j имеют место равенства

$$h_j a = \sum_i b_i a_i h_j = \sum_i b_i h_i a_j = f^n a_j.$$

Это означает, что $a/f^n = a_j/h_j$ на $D(h_j)$, так что $\psi(a/f^n) = s$ всюду, что доказывает инъективность ψ и показывает, следовательно, что ψ — изоморфизм.

Итак, каждому кольцу А мы поставили в соответствие его спектр $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$. Теперь мы хотим показать, что это соответствие функториально. Для этого понадобится подходящая категория пространств с пучками колец на них, а именно категория локально окольцованных пространств.

Определение. *Окольцованным пространством* называется пара $(X, \mathcal{O}_X)$, состоящая из топологического пространства X и пучка колец $\mathcal{O}_X$ на нем. *Морфизмом* окольцованных пространств из $(X, \mathcal{O}_X)$ в $(Y, \mathcal{O}_Y)$ называется пара $(f, f^\#)$, состоящая из непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ и отображения $f^\#\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$

пучков колец на Y. Окольцованное пространство $(X, \mathcal{O}_X)$ называется *локально окольцованным*, если для каждой точки $P \in X$ слой $\mathcal{O}_{X,P}$ является локальным кольцом. *Морфизмом* локально окольцованных пространств называется такой морфизм окольцованных пространств $(f, f^\#)$, что для каждой точки $P \in X$ индуцированное отображение (см. ниже) локальных колец $f_P^\#\colon \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ является *локальным гомоморфизмом* локальных колец.

Поясним последнее условие. Прежде всего для заданной точки $P \in X$ морфизм пучков $f^\#\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ индуцирует гомоморфизм колец $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ для каждого открытого множества V в Y, и, когда V пробегает все открытые окрестности точки $f(P)$, $f^{-1}V$ пробегает подмножество окрестностей точки P. Переходя к прямым пределам, получаем

$$\mathcal{O}_{Y,f(P)} = \varinjlim_{V} \mathcal{O}_Y(V) \to \varinjlim_{V} \mathcal{O}_X(f^{-1}V),$$

где последний предел естественно отображается в слой $\mathcal{O}_{X,P}$. Следовательно, индуцируется гомоморфизм $f_P^\#\colon \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$. Мы требуем, чтобы он был локальным гомоморфизмом: гомоморфизм локальных колец $\varphi\colon A \to B$ с максимальными идеалами $\mathfrak{m}_A$ и $\mathfrak{m}_B$ соответственно называется *локальным гомоморфизмом*, если $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

Изоморфизмом локально окольцованных пространств называется морфизм, обладающий двусторонним обратным. Таким образом, морфизм $(f, f^\#)$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда f — гомеоморфизм базисных топологических пространств и $f^\#$ — изоморфизм пучков.

Предложение 2.3. (a) *Пусть A — кольцо. Тогда* $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ *является локально окольцованным пространством.*

(b) *Если $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, то φ индуцирует морфизм локально окольцованных пространств*

$$(f, f^\#)\colon (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}).$$

(c) *Пусть A и B — кольца, тогда любой морфизм локально окольцованных пространств из* Spec B *в* Spec A *индуцирован гомоморфизмом колец $\varphi\colon A \to B$, как в утверждении* (b).

Доказательство. (a) Это утверждение вытекает из предложения 2.2 (a).

(b) Для заданного гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$ определим отображение $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, полагая $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$. Немедленно проверяется, что $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$ для любого идеала $\mathfrak{a}$ в A, так что отображение f непрерывно. Для каждого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ путем локализации φ определен локальный гомоморфизм локальных колец $\varphi_\mathfrak{p}\colon A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_\mathfrak{p}$. Далее, для любого открытого множества $V \subset \operatorname{Spec} A$ мы получаем

гомоморфизм колец $f^\#\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}(V))$ по определению $\mathcal{O}$, компонуя функции с отображениями f и $\varphi_\mathfrak{p}$. Это дает морфизм пучков $f^\#\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_*(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B})$. Индуцированные отображения на слоях являются в точности локальными гомоморфизмами $\varphi_\mathfrak{p}$, так что $(f, f^\#)$ — морфизм локально окольцованных пространств.

(c) Обратно, предположим, что задан морфизм локально окольцованных пространств $(f, f^\#)$ из $\operatorname{Spec} B$ в $\operatorname{Spec} A$. На глобальных сечениях $f^\#$ индуцирует гомоморфизм колец $\varphi\colon \Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \to \Gamma(\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B})$. Согласно 2.2 (c), эти кольца являются кольцами A и B соответственно, так что мы имеем гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$. Для любой точки $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ он индуцирует локальный гомоморфизм слоев $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, f(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B, \mathfrak{p}}$ или $A_{f(\mathfrak{p})} \to B_\mathfrak{p}$, который согласован с отображением φ на глобальных сечениях и с гомоморфизмами локализаций. Иными словами, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "f_\mathfrak{p}^\#"] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

Так как $f^\#$ — локальный гомоморфизм, то $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$, что показывает совпадение отображения f с отображением $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, индуцированным гомоморфизмом φ. Отсюда непосредственно следует, что $f^\#$ также индуцируется гомоморфизмом φ, так что морфизм окольцованных пространств $(f, f^\#)$ совпадает с морфизмом, определяемым гомоморфизмом колец φ.

Предостережение 2.3.0. Утверждение (c) не было бы верным, если бы в определении морфизма локально окольцованных пространств мы не потребовали, чтобы индуцированные отображения слоев были *локальными* гомоморфизмами локальных колец (см. 2.3.2 ниже).

Дадим теперь определение схемы.

Определение. *Аффинной схемой* называется локально окольцованное пространство $(X, \mathcal{O}_X)$, изоморфное (как локально окольцованное пространство) спектру некоторого кольца. *Схемой* называется локально окольцованное пространство $(X, \mathcal{O}_X)$, каждая точка которого обладает открытой окрестностью U, такой, что топологическое пространство U вместе с пучком $\mathcal{O}_X|_U$ — ограничением пучка $\mathcal{O}_X$ на U — является аффинной схемой. Пространство X мы будем называть *базисным топологическим пространством* схемы $(X, \mathcal{O}_X)$, а пучок $\mathcal{O}_X$ — *структурным пучком*. Для простоты обозначений мы часто будем писать просто X вместо $(X, \mathcal{O}_X)$. Если нас будет интересовать только базисное топологическое пространство без структуры схемы, то будем писать sp (X) и читать как «пространство схемы X». *Морфизмом* схем называется морфизм локально окольцованных пространств. *Изоморфизм* — это морфизм, обладающий двусторонним обратным.

Пример 2.3.1. Пусть k — поле, тогда Spec k — это аффинная схема, базисное пространство которой состоит из одной точки, а структурный пучок — из поля k.

Пример 2.3.2. Пусть R — кольцо дискретного нормирования, тогда $T = \operatorname{Spec} R$ — аффинная схема, базисное топологическое пространство которой состоит из двух точек. Одна из точек, t_0, является замкнутой с локальным кольцом R, другая, t_1, является открытой и плотной с локальным кольцом — полем частных K кольца R. Отображению вложения $R \to K$ соответствует морфизм Spec $K \to T$, который отображает единственную точку из Spec K в точку t_1. Существует другой морфизм окольцованных пространств Spec $K \to T$, который сопоставляет единственной точке из Spec K точку t_0, и отображение вложения $R \to K$ используется для определения соответствующего отображения $f^\#$ структурных пучков. Этот морфизм *не* индуцируется никаким гомоморфизмом $R \to K$, как в 2.3 (b), (c), поскольку он не является морфизмом *локально окольцованных пространств*.

Пример 2.3.3. Для заданного поля k определим *аффинную прямую* $\mathbf{A}_k^1$ над k как Spec $k[x]$. На ней существует точка ξ, соответствующая нулевому идеалу, замыкание которой совпадает со всем пространством. Она называется *общей точкой*. Все другие точки, которые соответствуют максимальным идеалам в $k[x]$, замкнуты. Они находятся во взаимно однозначном соответствии с непостоянными неприводимыми многочленами от x со старшим коэффициентом 1. В частности, если поле k алгебраически замкнуто, то замкнутые точки из $\mathbf{A}_k^1$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами поля k.

Пример 2.3.4. Для алгебраически замкнутого поля k рассмотрим *аффинную плоскость* $\mathbf{A}_k^2$ над k, определяемую как Spec $k[x, y]$ (см. рис. 6). Замкнутые точки из $\mathbf{A}_k^2$ находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными парами элементов из k. Более того, множество всех замкнутых точек из $\mathbf{A}_k^2$ с индуцированной топологией гомеоморфно *многообразию* $\mathbf{A}^2$, определенному в гл. I. Кроме замкнутых точек на $\mathbf{A}_k^2$ существует *общая точка* ξ, соответствующая нулевому идеалу в $k[x, y]$, замыкание которой совпадает со всем пространством. Для каждого неприводимого многочлена $f(x, y)$ существует также точка η, замыкание которой состоит из нее самой и всех замкнутых точек (a, b), для которых $f(a, b) = 0$. Точку η мы будем называть *общей точкой* кривой $f(x, y) = 0$.

Пример 2.3.5. Пусть X_1 и X_2 — две схемы, $U_1 \subset X_1$ и $U_2 \subset X_2$ — их открытые подмножества, и пусть $\varphi\colon (U_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{U_1}) \to (U_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{U_2})$ — изоморфизм локально окольцованных пространств. Тогда можно определить схему X, полученную *склеиванием* схем X_1 и X_2 вдоль U_1 и U_2 посредством изоморфизма φ. Топологическое пространство X является факторпространством с фактортопологией несвязного объединения $X_1 \cup X_2$ по отношению эквивалентности $x_1 \sim \varphi(x_1)$ для каждого $x_1 \in U_1$. Следовательно, существуют отображения $i_1\colon X_1 \to X$ и $i_2\colon X_2 \to X$, и

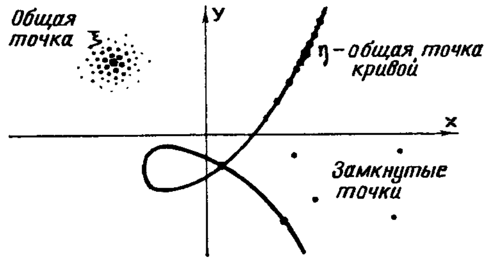


Рис. 6. Spec $k[x, y]$.

подмножество $V \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $i_1^{-1}(V)$ открыто в X_1 и $i_2^{-1}(V)$ открыто в X_2. Пучок $\mathcal{O}_X$ на X определяется следующим образом: для любого открытого множества $V \subset X$

$$\mathcal{O}_X(V) = \{\langle s_1, s_2\rangle \mid s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V)),\ s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V)),\ \varphi(s_1|_{i_1^{-1}(V)\cap U_1}) = s_2|_{i_2^{-1}(V)\cap U_2}\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{O}_X$ является пучком и что $(X, \mathcal{O}_X)$ — локально окольцованное пространство. Более того, поскольку X_1 и X_2 — схемы, то ясно, что каждая точка из X обладает аффинной окрестностью, следовательно, X тоже схема.

Пример 2.3.6. В качестве примера склеивания рассмотрим $X_1 = X_2 = \mathbf{A}_k^1$ для некоторого поля k и $U_1 = U_2 = \mathbf{A}_k^1 - \{P\}$, где P — точка, соответствующая максимальному идеалу (x), и пусть $\varphi\colon U_1 \to U_2$ — тождественное отображение. Обозначим через X схему, полученную склеиванием X_1 и X_2 вдоль U_1 и U_2 посредством φ. В результате мы получим «аффинную прямую с раздвоенной точкой P».

———:———

Это доставляет пример схемы, не являющейся аффинной (!), а также пример неотделимой схемы, как мы увидим позднее (4.0.1).

Определим теперь важный класс схем, возникающих из градуированных колец, которые аналогичны проективным многообразиям.

Пусть S — градуированное кольцо. (См. § 2 гл. I о наших соглашениях о градуированных кольцах.) Обозначим через S_+ идеал $\bigoplus\limits_{d>0} S_d$.

Определим *множество* Proj S как множество всех однородных простых идеалов $\mathfrak{p}$ в S, которые не содержат целиком S_+. Для каждого однородного идеала $\mathfrak{a}$ кольца S определим $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$.

Лемма 2.4. (a) *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *однородные идеалы в* S. *Тогда* $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

(b) *Пусть* $\{\mathfrak{a}_i\}$ — *произвольное семейство однородных идеалов в* S. *Тогда* $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$.

Доказательство. Доказательства этих утверждений такие же, как в 2.1 (a), (b), с использованием того факта, что однородный идеал $\mathfrak{p}$ прост тогда и только тогда, когда для любых двух *однородных* элементов $a, b \in S$ из того, что $ab \in \mathfrak{p}$, следует, что либо $a \in \mathfrak{p}$, либо $b \in \mathfrak{p}$.

На основании этой леммы на Proj S можно задать топологию, указав в качестве замкнутых подмножеств все подмножества вида $V(\mathfrak{a})$.

Займемся теперь определением пучка колец $\mathcal{O}$ на Proj S. Для каждого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ рассмотрим кольцо $S_{(\mathfrak{p})}$ элементов степени нуль в локализации $T^{-1}S$, где T — мультипликативная система, состоящая из всех однородных элементов из S, не содержащихся в $\mathfrak{p}$. Для любого открытого подмножества $U \subset \operatorname{Proj} S$ определим $\mathcal{O}(U)$ как множество всех функций $s: U \to \prod S_{(\mathfrak{p})}$, таких, что $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$ для каждого $\mathfrak{p} \in U$ и s локально представляется в виде отношения элементов из S: для каждого $\mathfrak{p} \in U$ существует такая окрестность $V \ni \mathfrak{p}$, содержащаяся в U, и такие однородные элементы $a, f \in S$ одинаковой степени, что $f \notin \mathfrak{q}$ и $s(\mathfrak{q}) = a/f$ в $S_{\mathfrak{q}}$ для всех $\mathfrak{q} \in V$. Ясно, что $\mathcal{O}$ является предпучком колец с естественными отображениями ограничения, и также ясно из локальной природы определения, что $\mathcal{O}$ является на самом деле пучком.

Определение. Для любого градуированного кольца S определим (Proj S, $\mathcal{O}$) как топологическое пространство Proj S вместе с пучком колец, определенным выше.

Предложение 2.5. *Пусть* S — *градуированное кольцо, тогда*

(a) *для любой точки* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ *слой* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *изоморфен локальному кольцу* $S_{(\mathfrak{p})}$;

(b) *для любого однородного элемента* $f \in S_+$ *пусть* $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid f \notin \mathfrak{p}\}$, *тогда* $D_+(f)$ — *открытое подмножество в* Proj S; *более того, такими открытыми подмножествами покрывается все пространство* Proj S *и для каждого такого открытого подмножества имеет место изоморфизм локально окольцованных пространств*

$$(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \simeq \operatorname{Spec} S_{(f)},$$

где $S_{(f)}$ — *подкольцо элементов степени* 0 *в локализации кольца* S_f;

(c) Proj S *является схемой.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что (a) утверждает, что Proj S является локально окольцованным пространством, а (b) — что оно покрывается открытыми аффинными схемами, так что (c) следует из (a) и (b).

Доказательство утверждения (a) практически не отличается от соответствующего доказательства утверждения 2.2 (a) выше, поэтому мы оставляем его читателю.

Для доказательства (b) заметим, что $D_+(f) = \operatorname{Proj} S - V((f))$, так что $D_+(f)$ открыто. Поскольку элементами пространства Proj S являются однородные простые идеалы, не содержащие S_+, то отсюда следует, что открытые множества $D_+(f)$ для однородных элементов $f \in S_+$ покрывают все пространство Proj S. Далее, для фиксированного однородного элемента $f \in S_+$ определим изоморфизм $(\varphi, \varphi^\#)$ локально окольцованных пространств $D_+(f)$ и Spec $S_{(f)}$. Для этого заметим, что существует естественный гомоморфизм колец $S \to S_f$ и что $S_{(f)}$ является подкольцом в S_f. Для любого однородного идеала $\mathfrak{a} \subset S$ положим $\varphi(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} S_f) \cap S_{(f)}$. В частности, если $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, то $\varphi(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec} S_{(f)}$, так что φ задает отображение $D_+(f) \to \operatorname{Spec} S_{(f)}$ как множеств. Свойства локализации показывают, что φ биективно как отображение из $D_+(f)$ в Spec $S_{(f)}$. Более того, пусть $\mathfrak{a}$ — однородный идеал в S. Тогда $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ в том и только в том случае, когда $\varphi(\mathfrak{p}) \supset \varphi(\mathfrak{a})$. Следовательно, φ — гомеоморфизм. Заметим также, что если $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, то локальные кольца $S_{(\mathfrak{p})}$ и $(S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$ естественно изоморфны. Соответствующие изоморфизмы и гомеоморфизм φ индуцируют естественное отображение пучков $\varphi^\#: \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}} \to \varphi_*(\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}|_{D_+(f)})$, которое, как легко видеть, является изоморфизмом. Следовательно, $(\varphi, \varphi^\#)$ — изоморфизм локально окольцованных пространств, что и утверждалось.

Пример 2.5.1. Пусть A — кольцо. Определим *проективное n-мерное пространство* над A как схему $\mathbf{P}_A^n = \operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_n]$. В частности, если A — алгебраически замкнутое поле k, то $\mathbf{P}_k^n$ — это схема, подпространство замкнутых точек которой естественно гомеоморфно *многообразию*, называемому n-мерным проективным пространством (см. упр. 2.14 (d)).

Теперь мы покажем, что понятие схемы является в действительности обобщением понятия многообразия. Не совсем верно, что многообразие — это схема. Как мы уже убедились на примерах, базисные пространства таких схем, как $\mathbf{A}_k^1$ и $\mathbf{A}_k^2$, содержат больше точек, чем соответствующие многообразия. Однако мы покажем, что существует некоторый естественный способ добавления к точкам многообразия общих точек (упр. 2.9) его неприводимых подмножеств для того, чтобы из многообразия получить схему.

Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, нам понадобится следующее определение.

Определение. Пусть S — некоторая фиксированная схема. Схема X, снабженная морфизмом $X \to S$, называется *схемой над* S. Пусть X и Y — схемы над S. *Морфизмом* X в Y как схем над S (называемым также *S-морфизмом*) называется морфизм $f\colon X \to Y$, согласованный с заданными морфизмами X и Y в S. Категорию схем над S будем обозначать через $\mathfrak{Sch}(S)$. Для любого кольца A через $\mathfrak{Sch}(A)$ мы для простоты будем обозначать категорию схем над $\operatorname{Spec} A$.

Предложение 2.6. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле. Тогда существует вполне строгий функтор $t\colon \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)$ из категории многообразий над k в категорию схем над k. Для любого многообразия V его топологическое пространство гомеоморфно множеству всех замкнутых точек из $\operatorname{sp}(t(V))$ и пучок его регулярных функций является ограничением структурного пучка схемы $t(V)$ посредством этого гомеоморфизма.*

Доказательство. Пусть X — любое топологическое пространство, и пусть $t(X)$ — множество всех его (непустых) неприводимых замкнутых подмножеств. Тогда $t(Y) \subset t(X)$ для любого замкнутого подмножества Y в X. Более того, $t(Y_1 \cup Y_2) = t(Y_1) \cup t(Y_2)$ и $t(\bigcap Y_i) = \bigcap t(Y_i)$, так что мы можем задать топологию на $t(X)$, указав в качестве замкнутых подмножеств в X подмножества вида $t(Y)$, где Y — замкнутое подмножество в X. Непрерывному отображению $f\colon X_1 \to X_2$ можно поставить в соответствие отображение $t(f)\colon t(X_1) \to t(X_2)$, которое переводит неприводимое замкнутое подмножество в замыкание его образа при отображении f. Следовательно, t является функтором на категории топологических пространств. Кроме того, можно определить непрерывное отображение $\alpha\colon X \to t(X)$, полагая $\alpha(P) = \{\overline{P}\}$. Отметим, что α индуцирует *биекцию* между множеством открытых подмножеств в X и множеством открытых подмножеств в $t(X)$.

Пусть теперь k — алгебраически замкнутое поле, V — многообразие над k и $\mathcal{O}_V$ — пучок регулярных функций на нем (1.0.1). Покажем, что $(t(V), \alpha_*(\mathcal{O}_V))$ является схемой над k. Так как любое многообразие покрывается открытыми аффинными подмногообразиями (4.3 гл. I), то достаточно доказать это утверждение для аффинного многообразия V. Итак, пусть V — аффинное многообразие с аффинным координатным кольцом A. Определим морфизм локально окольцованных пространств

$$\beta\colon (V, \mathcal{O}_V) \to X = \operatorname{Spec} A$$

следующим образом. Для каждой точки $P \in V$ положим $\beta(P) = \mathfrak{m}_P$, где $\mathfrak{m}_P$ — идеал кольца A, состоящий из всех регулярных функций, обращающихся в нуль в точке P. Тогда, согласно 3.2 (b) гл. I, β является биекцией V на множество замкнутых точек X. Легко видеть, что β — гомеоморфизм на свой образ. Далее, для любого открытого множества $U \subset X$ определим гомоморфизм колец $\mathcal{O}_X(U) \to \beta_*(\mathcal{O}_V)(U) = \mathcal{O}_V(\beta^{-1}U)$. Сечению $s \in \mathcal{O}_X(U)$ и точке $P \in \beta^{-1}(U)$ сопоставим $s(P)$ — образ сечения s в слое $\mathcal{O}_{X,\beta(P)}$, изоморфном локальному кольцу $A_{\mathfrak{m}_P}$, с последующим переходом к фактору $A_{\mathfrak{m}_P}/\mathfrak{m}_P$, изоморфному полю k. Сечение s, таким образом, определяет функцию на $\beta^{-1}(U)$ со значениями в k. Легко видеть, что эта функция регулярна и что построенное отображение задает изоморфизм $\mathcal{O}_X(U) \simeq \mathcal{O}_V(\beta^{-1}U)$. Наконец, поскольку простые идеалы кольца A находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми замкнутыми подмножествами из V (см. 1.4 гл. I), то мы получаем изоморфизм $(X, \mathcal{O}_X) \simeq (t(V), \alpha_*\mathcal{O}_V)$, который показывает, что $(t(V), \alpha_*\mathcal{O}_V)$ действительно является аффинной схемой.

Для того чтобы задать морфизм $(t(V), \alpha_*\mathcal{O}_V)$ в $\operatorname{Spec} k$, достаточно указать гомоморфизм колец $k \to \Gamma(t(V), \alpha_*\mathcal{O}_V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$. Для этого каждому элементу $\lambda \in k$ сопоставим постоянную функцию λ на V. Таким образом, $t(V)$ снабжается структурой схемы над k. Наконец, если V и W — два многообразия, то можно проверить (упр. 2.15), что естественное отображение

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Var}(k)}(V, W) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}(k)}(t(V), t(W))$$

биективно. Это показывает, что функтор $t\colon \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)$ вполне строгий. В частности, из этого следует, что $t(V)$ тогда и только тогда изоморфно $t(W)$, когда V изоморфно W.

Из построения ясно, что $\alpha\colon V \to t(V)$ индуцирует гомеоморфизм между V и множеством замкнутых точек схемы $t(V)$ с индуцированной топологией.

Замечание. Позже (4.10) мы увидим, что такое образ функтора t.

Упражнения

2.1. Пусть A — кольцо, $X = \operatorname{Spec} A$, $f \in A$ и $D(f) \subset X$ — открытое дополнение к $V((f))$. Показать, что локально окольцованное пространство $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ изоморфно $\operatorname{Spec} A_f$.

2.2. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — схема и $U \subset X$ — произвольное открытое подмножество. Показать, что $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ является схемой. Будем говорить в таком случае, что структура схемы на U *индуцирована* структурой схемы X, и называть $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ *открытой подсхемой* схемы X.

2.3. *Приведенные схемы.* Схема $(X, \mathcal{O}_X)$ называется *приведенной*, если ни для какого открытого множества $U \subset X$ кольцо $\mathcal{O}_X(U)$ не имеет нильпотентных элементов.

(a) Показать, что схема $(X, \mathcal{O}_X)$ приведена тогда и только тогда, когда для каждой точки $P \in X$ локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,P}$ не имеет нильпотентных элементов.

(b) Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — схема и $(\mathcal{O}_X)_{\text{red}}$ — пучок на X, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{\text{red}}$, где для любого кольца A через A_{red} обозначается факторкольцо кольца A по идеалу нильпотентных элементов. Показать, что $(X, (\mathcal{O}_X)_{\text{red}})$ является схемой. Она называется *приведенной схемой*, ассоциированной с X, и обозначается через X_{red}. Показать, что существует морфизм схем $X_{\text{red}} \to X$, являющийся гомеоморфизмом на базисных топологических пространствах.

(c) Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем, и предположим, что схема X приведена. Показать, что существует единственный морфизм $g\colon X \to Y_{\text{red}}$, такой, что f есть композиция g с естественным морфизмом $Y_{\text{red}} \to Y$.

2.4. Пусть A — кольцо и $(X, \mathcal{O}_X)$ — некоторая схема. Для любого морфизма $f\colon X \to \operatorname{Spec} A$ определено соответствующее отображение пучков $f^{\#}\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_*\mathcal{O}_X$. На глобальных сечениях он индуцирует гомоморфизм $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Таким образом, существует естественное отображение

$$\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(X, \operatorname{Spec} A) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

Показать, что α биективно (ср. с аналогичным утверждением для многообразий в 3.5 гл. I).

2.5. Описать $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ и показать, что он является конечным объектом в категории схем, т. е. каждая схема обладает единственным морфизмом в $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$.

2.6. Описать спектр нулевого кольца и показать, что он является начальным объектом в категории схем. (В силу наших соглашений все кольцевые гомоморфизмы отображают 1 в 1. Так как в нулевом кольце $0 = 1$, то каждое кольцо R обладает единственным гомоморфизмом в нулевое кольцо, но не существует гомоморфизмов нулевого кольца в R, кроме тех случаев, когда $0 = 1$ в R.)

2.7. Пусть X — схема, и для любой точки $x \in X$ пусть $\mathcal{O}_x$ — локальное кольцо в x с максимальным идеалом $\mathfrak{m}_x$. Определим *поле вычетов* $k(x)$ точки x на X, полагая $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$. Пусть K — произвольное поле. Показать, что задание морфизма $\operatorname{Spec} K$ в X равносильно заданию точки $x \in X$ и отображения вложения $k(x) \to K$.

2.8. Пусть X — схема. Для каждой точки $x \in X$ определим *касательное пространство Зарисского* T_x к X в x как двойственное векторное $k(x)$-пространство к пространству $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Предположим, что X — схема над полем k, и пусть $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ — *кольцо дуальных чисел* над k. Показать, что задание k-морфизма $\operatorname{Spec} k(\varepsilon)/\varepsilon^2$ в X эквивалентно заданию точки $x \in X$, *рациональной над* k (т. е. такой, что $k(x) = k$), и элемента пространства T_x.

2.9. Пусть X — топологическое пространство и Z — неприводимое замкнутое подмножество в X. *Общей точкой* подмножества Z называется такая точка ζ, что $Z = \overline{\{\zeta\}}$. Показать, что если X — схема, то каждое ее (непустое) неприводимое замкнутое подмножество обладает единственной общей точкой.

2.10. Описать схему $\operatorname{Spec} \mathbf{R}[x]$. Как ее топологическое пространство соотносится с множествами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$?

2.11. Пусть $k = \mathbf{F}_p$ — конечное поле из p элементов. Описать $\operatorname{Spec} k[x]$. Как устроены поля вычетов его точек? Сколько существует точек с заданным полем вычетов?

2.12. *Лемма о склеивании.* Обобщим процесс склеивания схем, описанный в 2.3.5. Пусть $\{X_i\}$ — семейство схем (возможно, бесконечное). Для каждой пары i, j, $i \neq j$, пусть задано открытое подмножество $U_{ij} \subset X_i$ с индуцированной структурой схемы (упр. 2.2). Предположим также, что для каждой пары i, j, $i \neq j$, задан изоморфизм схем $\varphi_{ij}\colon U_{ij} \to U_{ji}$, такой, что

(1) $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ для всех i, j;

(2) $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ и $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ на $U_{ij} \cap U_{ik}$ для всех i, j, k.

Показать, что тогда существует схема X вместе с морфизмами $\psi_i\colon X_i \to X$ для каждого i, такая, что

(1) ψ_i — изоморфизм схемы X_i на открытую подсхему в X;

(2) $\psi_i(X_i)$ покрывают X;

(3) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$;

(4) $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ на U_{ij}.

В такой ситуации будем говорить, что схема X получена *склеиванием* схем X_i вдоль U_i посредством изоморфизмов φ_{ij}. Интересный частный случай: семейство $\{X_i\}$ произвольное, а все U_{ij} и φ_{ji} пусты, тогда схема X называется *несвязным объединением* X_i и обозначается через $\coprod X_i$.

2.13. Топологическое пространство называется *квазикомпактным*, если всякое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

(a) Показать, что топологическое пространство тогда и только тогда является нётеровым (§ 1, гл. I), когда каждое его открытое подмножество квазикомпактно.

(b) Пусть X — аффинная схема. Показать, что пространство $\operatorname{sp}(X)$ квазикомпактно, но не обязательно нётерово. Схему X будем называть *квазикомпактной*, если квазикомпактно пространство $\operatorname{sp}(X)$.

(c) Показать, что пространство $\operatorname{sp}(\operatorname{Spec} A)$ нётерово, если кольцо A нётерово.

(d) Привести пример ненётерова кольца A, для которого пространство $\operatorname{sp}(\operatorname{Spec} A)$ нётерово.

2.14. (a) Пусть S — градуированное кольцо. Показать, что $\operatorname{Proj} S = \varnothing$ тогда и только тогда, когда все элементы в S_+ нильпотентны.

(b) Пусть $\varphi\colon S \to T$ — градуированный гомоморфизм градуированных колец (сохраняющий степень). Положим $U = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T \mid \mathfrak{p} \not\supseteq \varphi(S_+)\}$. Показать, что U — открытое подмножество $\operatorname{Proj} T$, и показать, что φ определяет естественный морфизм $f\colon U \to \operatorname{Proj} S$.

(c) Показать, что морфизм f может быть изоморфизмом, даже если φ не изоморфизм. Например, предположим, что $\varphi_d\colon S_d \to T_d$ является изоморфизмом для всех $d \geqslant d_0$, где d_0 — некоторое целое число. Показать, что $U = \operatorname{Proj} T$ и морфизм $f\colon \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ является изоморфизмом.

(d) Пусть V — проективное многообразие с однородным координатным кольцом S (§ 2 гл. I). Показать, что $t(V) \simeq \operatorname{Proj} S$.

2.15. (a) Пусть V — многообразие над алгебраически замкнутым полем k. Показать, что точка $P \in t(V)$ замкнута тогда и только тогда, когда ее поле вычетов $k(P)$ изоморфно k.

(b) Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем над k, и пусть $P \in X$ — точка с полем вычетов k. Показать, что полем вычетов точки $f(P)$ тоже является поле k.

(c) Показать, что если V и W — многообразия над k, то естественное отображение

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Var}}(V, W) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}/k}(t(V), t(W))$$

биективно. (Инъективность доказывается легко, сюръективность — труднее.)

8—01390

2.16. Пусть X — схема, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ — сечение и X_f — подмножество точек $x \in X$, таких, что росток f_x сечения f в точке x не содержится в максимальном идеале $\mathfrak{m}_x$ локального кольца $\mathcal{O}_x$.

(a) Пусть $U = \operatorname{Spec} B$ — открытая *аффинная* подсхема схемы X и $\bar{f} \in B = \Gamma(U, \mathcal{O}_X|_U)$ — ограничение сечения f. Показать, что $U \cap X_f = D(\bar{f})$. Вывести отсюда, что X_f открыто в X.

(b) Предположим, что схема X квазикомпактна. Пусть $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ и $a \in A$ — элемент, ограничение которого на X_f равно 0. Показать, что $f^n a = 0$ для некоторого $n > 0$. [*Указание.* Рассмотреть открытое аффинное покрытие X.]

(c) Предположим теперь, что X обладает конечным покрытием открытыми аффинными подмножествами U_i, такими, что каждое пересечение $U_i \cap U_j$ квазикомпактно. (Это предположение выполняется, например, в случае, когда пространство sp (X) нётерово.) Пусть $b \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f})$ — некоторое сечение. Показать, что $f^n b$ для некоторого $n > 0$ является ограничением некоторого элемента из A.

(d) В предположениях п.(c) показать, что $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}) \simeq A_f$.

2.17. *Критерий аффинности.* (a) Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем, и предположим, что Y может быть покрыто открытыми подмножествами U_i, такими, что для каждого i индуцированное отображение $f^{-1}(U_i) \to U_i$ является изоморфизмом. Показать, что тогда f — изоморфизм.

(b) Показать, что схема X аффинна тогда и только тогда, когда существует конечное множество элементов $f_1, \ldots, f_r \in A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, таких, что все открытые множества X_{f_i} аффинны и $f_1, \ldots, f_r$ порождают единичный идеал в A. [*Указание.* Воспользоваться упр. 2.4 и упр. 2.16(d).]

2.18. В этом упражнении сравниваются некоторые свойства гомоморфизма колец со свойствами индуцированного морфизма спектров.

(a) Пусть A — кольцо, $X = \operatorname{Spec} A$ и $f \in A$ — некоторый элемент. Показать, что f нильпотентен тогда и только тогда, когда $D(f)$ пусто.

(b) Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец и $f\colon Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$ — индуцированный им морфизм аффинных схем. Показать, что φ инъективен тогда и только тогда, когда соответствующее отображение пучков $f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ инъективно. Показать, кроме того, что в этом случае морфизм f является *доминантным*, т. е. $f(Y)$ плотно в X.

(c) В тех же обозначениях показать, что если φ сюръективно, то f — гомеоморфизм Y на замкнутое подмножество в X и отображение $f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ сюръективно.

(d) Доказать утверждение, обратное к (c), а именно, что если $f\colon Y \to X$ — гомеоморфизм Y на замкнутое подмножество в X и отображение $f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ сюръективно, то гомоморфизм φ сюръективен. [*Указание.* Рассмотреть $X' = \operatorname{Spec}(A/\ker\varphi)$ и воспользоваться упр. (b) и (c).]

2.19. Показать, что для кольца A следующие условия эквивалентны:

(i) Spec A несвязно;

(ii) существуют ненулевые элементы $e_1, e_2 \in A$, такие, что $e_1 e_2 = 0$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 + e_2 = 1$ (такие элементы называются *ортогональными идемпотентами*);

(iii) A изоморфно прямому произведению $A_1 \times A_2$ ненулевых колец A_1 и A_2.

§ 3. Первоначальные свойства схем

В этом параграфе излагаются некоторые начальные свойства схем, в частности свойства открытых и замкнутых подсхем и произведений схем. В упражнениях вводится понятие конструктивных подмножеств и изучаются свойства размерности слоев морфизмов.

Определение. Схема называется *связной*, если ее базисное топологическое пространство связно, и *неприводимой*, если оно неприводимо.

Определение. Схема X называется *приведенной*, если ни для какого открытого множества U кольцо $\mathcal{O}_X(U)$ не имеет нильпотентных элементов. Это равносильно (упр. 2.3) тому, что локальные кольца $\mathcal{O}_P$ для всех точек $P \in X$ не имеют нильпотентных элементов.

Определение. Схема X называется *целой*, если для каждого открытого множества $U \subset X$ кольцо $\mathcal{O}_X(U)$ является целостным.

Пример 3.0.1. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема. Тогда X неприводима, если и только если ниль-радикал nil A кольца A является простым идеалом, X приведена, если и только если nil $A = 0$, и X цела, если и только если кольцо A целостное.

Предложение 3.1. *Схема X тогда и только тогда является целой, когда она приведена и неприводима.*

Доказательство. Ясно, что целая схема приведена. Если X не неприводима, то в ней можно найти два непустых непересекающихся открытых подмножества U_1 и U_2. Тогда $\mathcal{O}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}(U_1) \times \mathcal{O}(U_2)$ — кольцо, не являющееся целостным. Значит, из того, что схема X целая, следует, что она неприводима.

Обратно, предположим, что схема X приведена и неприводима. Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество, и предположим, что существуют элементы $f, g \in \mathcal{O}(U)$, такие, что $fg = 0$. Положим $Y = \{x \in U \mid f_x \in \mathfrak{m}_x\}$ и $Z = \{x \in U \mid g_x \in \mathfrak{m}_x\}$. Тогда подмножества Y и Z замкнуты в X (упр. 2.16 (a)) и $Y \cup Z = U$. Но поскольку X неприводимо, то и U неприводимо, стало быть, одно из подмножеств Y, Z совпадает с U, скажем $Y = U$. В таком случае ограничение f на любое открытое аффинное подмножество в U будет нильпотентным (упр. 2.18(a)), а следовательно, нулевым, так что $f \equiv 0$. Это показывает, что схема X цела.

Определение. Схема X называется *локально нётеровой*, если ее можно покрыть открытыми аффинными подмножествами Spec A_i, где каждое из колец A_i является нётеровым. Схема X называется *нётеровой*, если она локально нётерова и квазикомпактна. Равносильное определение: схема X нётерова, если ее можно покрыть конечным числом открытых аффинных подмножеств $\operatorname{Spec} A_i$, где A_i — нётеровы кольца.

Предостережение 3.1.1. Если схема X нётерова, то пространство $\operatorname{sp} X$ тоже нётерово; обратное, вообще говоря, неверно (упр. 2.13 и 3.17).

Отметим, что в этом определении не требуется, чтобы каждое открытое аффинное подмножество было спектром нётерова кольца. В то время как из определения очевидно, что спектр нётерова кольца является нётеровой схемой, обратное не очевидно. Это показывает, что нётеровость является «локальным свойством». С аналогичными ситуациями мы будем часто встречаться позднее при изучении свойств схем и их морфизмов, поэтому для иллюстрации подобного типа ситуации точно сформулируем и докажем утверждение о локальной природе свойства нётеровости.

Предложение 3.2. *Схема X тогда и только тогда является локально нётеровой, когда для каждого открытого аффинного подмножества $U = \operatorname{Spec} A$ кольцо A нётерово. В частности, аффинная схема $X = \operatorname{Spec} A$ нётерова тогда и только тогда, когда кольцо A нётерово.*

Доказательство. Утверждение о локальной нётеровости X, когда все кольца A открытых аффинных подмножеств $U = \operatorname{Spec} A$ нётеровы, непосредственно следует из определения, так что надо показать только, что если схема X локально нётерова и $U = \operatorname{Spec} A$ — любое открытое аффинное подмножество в X, то A — нётерово кольцо. Прежде всего отметим, что если B — нётерово кольцо, то нётеровой является и любая его локализация вида B_f. Открытые подмножества $D(f) \simeq \operatorname{Spec} B_f$ образуют базис топологии в $\operatorname{Spec} B$. Следовательно, на локально нётеровой схеме X существует базис топологии, состоящий из спектров нётеровых колец. В частности, открытое множество U может быть покрыто спектрами нётеровых колец.

Таким образом, все сводится к следующему утверждению: если $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, которая может быть покрыта открытыми подмножествами, являющимися спектрами нётеровых колец, то кольцо A нётерово. Пусть $U = \operatorname{Spec} B$ — открытое подмножество в X с нётеровым кольцом B. Тогда для некоторого $f \in A$ имеем $D(f) \subset U$. Если $\bar{f}$ — образ f в B, то $A_f \simeq B_{\bar{f}}$, и, следовательно, кольцо A_f нётерово, так что мы можем покрыть X открытыми подмножествами $D(f) \simeq \operatorname{Spec} A_f$ с нётеровыми кольцами A_f. Поскольку схема X квазикомпактна, то такое покрытие можно выбрать конечным.

Значит, теперь все сводится к следующей чисто алгебраической задаче: если A — кольцо, $f_1, \ldots, f_r$ — конечное число элементов из A, таких, что они порождают единичный идеал, и каждая локализация A_{f_i} нётерова, то кольцо A тоже нётерово. Прежде всего докажем следующее утверждение. Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ — некоторый идеал и $\varphi_i\colon A \to A_{f_i}$ — отображение локализации, $i = 1, \ldots, r$. Тогда

$$\mathfrak{a} = \bigcap \varphi_i^{-1} (\varphi_i(\mathfrak{a}) \cdot A_{f_i}).$$

Включение $\subset$ очевидно. Обратно, если заданный элемент $b \in A$ содержится в этом пересечении, то можно записать $\varphi_i(b) = a_i/f_i^{n_i}$ в A_{f_i} для каждого i, где $a_i \in \mathfrak{a}$ и $n_i > 0$. Увеличивая, если в этом есть необходимость, n_i, можно считать их все равными фиксированному числу n. Это значит, что в A имеют место равенства

$$f_i^{m_i}(f_i^n b - a_i) = 0$$

для некоторых целых m_i. Точно так же можно считать $m_i = m$. Таким образом, $f_i^{m+n} b \in \mathfrak{a}$ для каждого i. Так как $f_1, \ldots, f_r$ порождают единичный идеал, то их N-е степени для любого N тоже порождают единичный идеал. Возьмем $N = m + n$. Тогда $1 = \sum c_i f_i^N$ для подходящих $c_i \in A$. Следовательно,

$$b = \sum c_i f_i^N b \in \mathfrak{a},$$

что и требовалось доказать.

Теперь уже совсем легко показать, что A нётерово Пусть $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots$ — возрастающая цепочка идеалов в A. Тогда для каждого i

$$\varphi_i(\mathfrak{a}_1) \cdot A_{f_i} \subset \varphi_i(\mathfrak{a}_2) \cdot A_{f_i} \subset \ldots$$

— возрастающая цепочка идеалов в A_{f_i}, которая стабилизируется, поскольку кольцо A_{f_i} нётерово. Так как имеется только конечное число A_{f_i}, то из только что доказанного утверждения вытекает, что исходная цепочка тоже стабилизируется и, следовательно, кольцо A нётерово.

Определение. Морфизм схем $f\colon X \to Y$ называется *морфизмом локально конечного типа*, если существует покрытие пространства Y открытыми аффинными подмножествами $V_i = \operatorname{Spec} B_i$, такими, что $f^{-1}(V_i)$ для каждого i можно покрыть открытыми аффинными подмножествами $U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$, где каждое из A_{ij} является конечно порожденной B_i-алгеброй. Морфизм f называется *морфизмом конечного типа*, если, кроме того, каждое $f^{-1}(V_i)$ может быть покрыто конечным числом U_{ij}.

Определение. Морфизм схем $f\colon X \to Y$ называется *конечным*, если существует покрытие Y открытыми аффинными подмножествами $V_i = \operatorname{Spec} B_i$, такими, что для каждого i множество $f^{-1}(V_i)$ является аффинным, $f^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec} A_i$, где A_i есть B_i-алгебра, которая конечно порождена как B_i-модуль.

Отметим, что в каждом из этих определений свойство морфизма $f\colon X \to Y$ определяется требованием существования открытого аффинного покрытия Y с некоторыми свойствами. На самом деле в каждом из этих случаев это равносильно требованию выполнения этого свойства для каждого открытого аффинного подмножества в Y (упр. 3.1—3.4).

Пример 3.2.1. Пусть V — многообразие над алгебраически замкнутым полем k. Тогда соответствующая схема $t(V)$ (см. 2.6) является целой нётеровой схемой конечного типа над k. В самом деле, V может быть покрыто конечным числом аффинных подмногообразий (4.3 гл. I), так что $t(V)$ может быть покрыто конечным числом открытых аффинных подмножеств вида $\operatorname{Spec} A_i$, где каждое из A_i является целостным кольцом и конечно порожденной k-алгеброй, а следовательно, нётерово

Пример 3.2.2. Пусть P — произвольная точка на многообразии V с локальным кольцом $\mathcal{O}_P$, тогда $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$ — целая нётерова схема, которая, вообще говоря, не является схемой конечного типа над k

Дадим теперь определения открытых и замкнутых подсхем.

Определение. *Открытой подсхемой* схемы X называется схема U, топологическое пространство которой является открытым подмножеством в X, а структурный пучок $\mathcal{O}_U$ изоморфен ограничению $\mathcal{O}_X|_U$ структурного пучка $\mathcal{O}_X$ схемы X. *Открытым вложением* (open immersion) называется морфизм $f\colon X \to Y$, который индуцирует изоморфизм X с открытой подсхемой в Y.

Отметим, что каждое открытое подмножество схемы снабжается единственной структурой открытой подсхемы (упр. 2.2).

Определение. *Замкнутой подсхемой* схемы X называется класс эквивалентности пар (Y, i), где Y — схема, а $i\colon Y \to X$ — морфизм, такие, что $\operatorname{sp}(Y)$ — замкнутое подмножество в $\operatorname{sp}(X)$, i — отображение вложения и, кроме того, индуцированное отображение пучков $i^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ сюръективно. Пары (Y, i) и (Y', i') считаются эквивалентными, если существует изоморфизм $f\colon Y \xrightarrow{\sim} Y'$, такой, что $i = i' \circ f$. *Замкнутым вложением* (closed immersion) называется морфизм $f\colon Y \to X$, который индуцирует изоморфизм Y на замкнутую подсхему схемы X.

Пример 3.2.3. Пусть A — кольцо и $\mathfrak{a}$ — идеал в A. Положим $X = \operatorname{Spec} A$ и $Y = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$. Тогда гомоморфизм колец $A \to A/\mathfrak{a}$ индуцирует морфизм схем $f\colon Y \to X$, являющийся замкнутым вложением. Действительно, отображение f является гомеоморфизмом Y на замкнутое подмножество $V(\mathfrak{a})$ в X; отображение структурных пучков $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ сюръективно, потому что оно сюръективно на слоях, являющихся локализациями колец A и $A/\mathfrak{a}$ соответственно (упр. 2.18).

Таким образом, для любого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ на замкнутом множестве $V(\mathfrak{a}) \subset X$ определена структура замкнутой подсхемы. В частности, каждое замкнутое подмножество Y в X снабжается структурой замкнутой подсхемы многими способами, соответствующими всем идеалам $\mathfrak{a}$, для которых $V(\mathfrak{a}) = Y$. В действительности всякая структура замкнутой подсхемы на замкнутом подмножестве Y аффинной схемы X получается из некоторого идеала указанным способом (упр. 3.11(b) и 5.10).

Пример 3.2.4. Рассмотрим более конкретную ситуацию. Пусть $A = k[x, y]$, где k — некоторое поле, тогда $\operatorname{Spec} A = \mathbf{A}_k^2$ — аффинная плоскость над k. Идеал $\mathfrak{a} = (xy)$ определяет приводимую подсхему, состоящую из объединения осей x и y. Идеал $\mathfrak{a} = (x^2)$ задает структуру замкнутой подсхемы с нильпотентными элементами на оси y. Идеал $\mathfrak{a} = (x^2, xy)$ задает другую структуру замкнутой подсхемы на оси y, которая имеет нильпотентные элементы только в локальном кольце точки $(0, 0)$. Точку $(0, 0)$ будем называть *вложенной точкой* этой подсхемы.

Пример 3.2.5. Пусть V — аффинное многообразие над полем k и W — замкнутое подмногообразие в нем. Тогда W соответствует простой идеал $\mathfrak{p}$ в аффинном координатном кольце A многообразия V (§ 1 гл. I). Пусть $X = t(V)$ и $Y = t(W)$ — соответствующие схемы. Тогда $X = \operatorname{Spec} A$ и Y — замкнутая подсхема в X, определяемая идеалом $\mathfrak{p}$. Для каждого $n \geqslant 1$ пусть Y_n обозначает замкнутую подсхему в X, соответствующую идеалу $\mathfrak{p}^n$. Тогда $Y_1 = Y$, а Y_n для каждого $n > 1$ — замкнутая подсхема с неприведенной структурой на замкнутом множестве Y, которая не соответствует никакому подмногообразию многообразия V. Тогда Y_n мы будем называть *n-й инфинитезимальной окрестностью* схемы Y в X. Схемы Y_n отражают свойства вложения Y в X. Позднее (§ 9) мы будем изучать *формальное пополнение* Y в X, которое, грубо говоря, является пределом схем Y_n при $n \to \infty$.

Пример 3.2.6. Пусть X — схема и Y — замкнутое подмножество в X. Вообще говоря, Y обладает многими структурами замкнутых подсхем в X, однако среди них существует одна «наименьшая», называемая *замкнутой подсхемой с приведенной индуцированной структурой*, которую мы сейчас опишем.

Пусть сначала $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема и Y — замкнутое подмножество в X. Обозначим через $\mathfrak{a} \subset A$ идеал, являющийся пересечением всех простых идеалов, содержащих идеал $I(Y)$. Это наибольший идеал, для которого $V(\mathfrak{a}) = Y$. Тогда назовем приведенной индуцированной структурой на Y структуру подсхемы, определенную идеалом $\mathfrak{a}$.

Пусть теперь X — произвольная схема и Y — замкнутое подмножество в X. Для каждого открытого аффинного подмножества $U_i \subset X$ рассмотрим замкнутое подмножество $Y_i = Y \cap U_i$ в U_i и зададим на нем приведенную индуцированную структуру замкнутой подсхемы, как было сделано выше для аффинных схем (она может зависеть от U_i). Утверждается, что для любых i, j ограничения на $Y_i \cap Y_j$ структурных пучков подсхем Y_i и Y_j изоморфны и, кроме того, что три таких изоморфизма на $Y_i \cap Y_j \cap Y_k$ согласованы для всех i, j, k. Это легко сводится к аффинному случаю: пусть $U = \operatorname{Spec} A$ — открытое аффинное множество, $f \in A$ и $V = D(f) = \operatorname{Spec} A_f$, тогда приведенная индуцированная структура на $Y \cap U$, полученная из A, при ограничении на $Y \cap V$ согласуется с приведенной индуцированной структурой, полученной из A_f. Это утверждение соответствует следующему алгебраическому факту: пусть $\mathfrak{a}$ — пересечение всех простых идеалов в A, содержащих $I(Y \cap U)$, тогда $\mathfrak{a}A_f$ является пересечением всех простых идеалов в A_f, содержащих $I(Y \cap D(f))$.

Таким образом, пучки, определенные на Y_i, можно склеить в один пучок на Y (упр. 1.22), который и будет задавать требуемую приведенную индуцированную структуру замкнутой подсхемы на Y. О свойстве универсальности этой структуры см. упр. 3.11.

Определение. *Размерностью* схемы X, обозначаемой через $\dim X$, называется размерность ее базисного топологического пространства (§ 1 гл. I). Пусть Z — неприводимое замкнутое подмножество в X. Тогда *коразмерностью* Z в X, обозначаемой через $\operatorname{codim}(Z, X)$, называется верхняя грань целых чисел n, таких, что существует цепочка

$$Z = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$$

не совпадающих друг с другом замкнутых неприводимых подмножеств в X, начинающаяся с Z. Если Y — произвольное замкнутое подмножество в X, то положим

$$\operatorname{codim}(Y, X) = \inf_{Z \subset Y} \operatorname{codim}(Z, X),$$

где Z пробегает замкнутые неприводимые подмножества в Y.

Пример 3.2.7. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема. Тогда ее размерность — это то же самое, что и размерность Крулля кольца A (§ 1 гл. I).

Предостережение 3.2.8. С понятиями размерности и коразмерности для произвольных схем следует обращаться осторожно. Наша интуиция возникает в результате работы со схемами конечного типа над полем, где эти понятия ведут себя хорошо. Например, в случае, когда X — аффинная целая схема конечного типа над полем k и $Y \subset X$ — ее замкнутое неприводимое подмножество, из 1.8A гл. I следует, что $\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) = \dim X$. Однако в случае произвольных (даже нётеровых) схем могут возникать всякие неожиданности (см. упр. 3.20—3.22, а также Нагата [7] и Гротендик [EGA IV, § 5]).

Определение. Пусть S — некоторая схема и X, Y — схемы над S, т. е. схемы, снабженные морфизмами в S. *Расслоенным произведением* схем X и Y над S называется обозначаемая через $X \times_S Y$ схема вместе с морфизмами $p_1 \colon X \times_S Y \to X$ и $p_2 \colon X \times \times_S Y \to Y$, составляющими вместе с морфизмами $X \to S$ и $Y \to S$ коммутативную диаграмму, такая, что для любой схемы Z над S и морфизмов $f \colon Z \to X$ и $g \colon Z \to Y$, образующих вместе с морфизмами $X \to S$ и $Y \to S$ коммутативную диаграмму, существует единственный морфизм $\theta \colon Z \to X \times_S Y$, такой, что $f = p_1 \circ \theta$ и $g = p_2 \circ \theta$. Морфизмы p_1 и p_2 называются *проекциями* расслоенного произведения на его множители.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr] & X \times_S Y \arrow[l] \arrow[r] & Y \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Если схемы X и Y заданы безотносительно к какой-либо схеме S, то мы считаем $S = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ (упр. 2.5) и расслоенное произведение $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}} Y$ называем просто *произведением* схем X и Y, обозначая его через $X \times Y$.

Теорема 3.3. *Для любых двух схем X и Y над S расслоенное произведение $X \times_S Y$ существует и единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы вначале построить произведения для аффинных схем, а затем склеить из них произведение в общем случае. Доказательство мы проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Пусть схемы $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $S = \operatorname{Spec} R$ аффинны. Тогда A и B являются R-алгебрами, и мы утверждаем, что Spec $(A \otimes_R B)$ является расслоенным произведением X и Y над S. Действительно, для любой схемы Z задать морфизм Z в Spec $(A \otimes_R B)$ — это все равно, что задать гомоморфизм кольца $A \otimes_R B$ в кольцо $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ согласно упр. 2.4. Но задать гомоморфизм $A \otimes_R B$ в какое-нибудь кольцо — это все равно, что задать гомоморфизмы A и B в это кольцо, индуцирующие один и тот же гомоморфизм на R. Пользуясь опять упр. 2.4, видим, что задать морфизм Z в Spec $(A \otimes_R B)$ — это все равно, что задать морфизмы Z в X и Y, которые продолжаются до одного и того же морфизма Z в S. Таким образом, Spec $(A \otimes_R B)$ является требуемым произведением $X \otimes_S Y$.

Шаг 2. Из свойства универсальности произведения непосредственно следует, что если оно существует, то единственно с точностью до изоморфизма. Единственность уже построенных произведений нам понадобится в дальнейшем ходе доказательства.

Шаг 3. *Склеивание морфизмов.* Мы уже знаем, как склеивать пучки (упр. 1.22) и схемы (упр. 2.12). Теперь будем склеивать морфизмы. Пусть X и Y — схемы. Тогда задание морфизма f из X в Y равносильно заданию открытого покрытия $\{U_i\}$ схемы X и морфизмов f_i: $U_i \to Y$, где U_i рассматриваются как схемы с индуцированной структурой, таких, что ограничения f_i и f_j на $U_i \cap U_j$ совпадают для каждых i, j. Доказательство — непосредственная проверка.

Шаг 4. Пусть X и Y — схемы над S, $U \subset X$ — открытое подмножество, и предположим, что произведение $X \times_S Y$ существует, тогда $p_1^{-1}(U) \subset X \times_S Y$ является произведением U и Y над S. Действительно, для схемы Z и морфизмов f: $Z \to U$ и g: $Z \to Y$ морфизм f в композиции с вложением $U \subset X$ определяет отображение Z в X. Следовательно, существует отображение θ: $Z \to X \times_S Y$, согласованное с морфизмами f, g и проекциями. Но так как $f(Z) \subset U$, то $\theta(Z) \subset p_1^{-1}(U)$, так что θ можно рассматривать как морфизм $Z \to p_1^{-1}(U)$. Его единственность очевидна, стало быть, $p_1^{-1}(U)$ является произведением $U \times_S Y$.

Шаг 5. Пусть X и Y — схемы над S, а $\{X_i\}$ — открытое покрытие X, и предположим, что для каждого i существует произведение $X_i \times_S Y$, тогда существует и произведение $X \times_S Y$. Действительно, пусть $U_{ij} = p_1^{-1}(X_{ij}) \subset X_i \times_S Y$, где $X_{ij} = X_i \cap X_j$ для каждых i, j. Тогда, согласно шагу 4, U_{ij} является произведением X_{ij} и Y над S. Следовательно, в силу единственности произведения существуют (единственные) изоморфизмы φ_{ij}: $U_{ij} \to U_{ji}$ для каждых i, j, согласованные со всеми проекциями. Более того, эти изоморфизмы согласованы между собой для каждых i, j, k в смысле упр. 2.12. Следовательно, выполнены все условия для склеивания схем $X_i \times_S Y$ посредством изоморфизмов φ_{ij}. Согласно упр. 2.12, мы получаем схему $X \times_S Y$, которая, как мы утверждаем, и является произведением X и Y над S.

Действительно, проекции p_1 и p_2 определяются посредством склеивания проекций, заданных на кусках $X_i \times_S Y$ (шаг 3). Для схемы Z и морфизмов f: $Z \to X$ и g: $Z \to Y$ положим $Z_i = f^{-1}(X_i)$. Тогда существуют отображения θ_i: $Z_i \to X_i \times_S Y$, композиции которых с вложениями $X_i \times_S Y \subset X \times_S Y$ задают отображения θ_i: $Z_i \to X \times_S Y$. Нетрудно проверить, что эти отображения согласованы на $Z_i \cap Z_j$, так что, склеивая эти морфизмы (шаг 3), мы получаем морфизм θ: $Z \to X \times_S Y$, согласованный с проекциями и морфизмами f и g. Единственность θ можно проверить локально.

Шаг 6. В силу шага 1 мы знаем, что для аффинных схем X, Y и S произведение $X \times_S Y$ существует. Отсюда на основании шага 5 заключаем, что произведение $X \times_S Y$ существует для любой схемы X и аффинных схем Y и S. Опять же в силу шага 5, меняя местами X и Y, получаем, что произведение $X \times_S Y$ существует для произвольных схем X и Y над аффинной схемой S.

Шаг 7. Пусть X, Y, S — произвольные схемы и q: $X \to S$, r: $Y \to S$ — заданные морфизмы. Пусть $\{S_i\}$ — открытое аффинное покрытие S. Положим $X_i = q^{-1}(S_i)$ и $Y_i = r^{-1}(S_i)$. Тогда в силу шага 6 произведения $X_i \times_S Y_i$ существуют для всех i. Заметим, что схема $X_i \times_S Y_i$ является также произведением X_i и Y над S. Действительно, для морфизмов f: $Z \to X_i$ и g: $Z \to Y$ над S образ морфизма g должен попадать внутрь Y_i. Стало быть, произведение $X_i \times_S Y$ существует для каждого i, и, использовав еще раз шаг 5, получаем существование произведения $X \times_S Y$. Это завершает доказательство.

Может быть, здесь наиболее подходящее место для того, чтобы сделать некоторые общие замечания о важности и полезности расслоенных произведений. Начнем с определения слоев морфизма.

Определение. Пусть f: $X \to Y$ — морфизм схем, $y \in Y$ — некоторая точка, $k(y)$ — ее поле вычетов и Spec $k(y) \to Y$ — естественный морфизм (упр. 2.7). Определим *слой* морфизма f над точкой y как схему вида

$$X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y).$$

Слой X_y является схемой над $k(y)$, и можно показать, что его базисное топологическое пространство гомеоморфно подмножеству $f^{-1}(y)$ в X (упр. 3.10).

Понятие слоя морфизма позволяет рассматривать морфизм как семейство схем (а именно его слоев), параметризованных точками схемы—образа морфизма. Понятие семейства в свою очередь позволяет придать точный смысл интуитивному понятию семейства схем, варьирующихся алгебраически. Например, пусть X_0 — заданная схема над полем k. Определим *семейство деформаций* схемы X_0 как морфизм f: $X \to Y$ со связной схемой Y и фиксированной точкой $y_0 \in Y$, такой, что $k(y_0) = k$ и $X_{y_0} \simeq X_0$. Все другие слои X_y морфизма f называются *деформациями* X_0.

Интересный пример семейства доставляет схема X над $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$. В этом случае слой над общей точкой — это схема $X_{\mathbf{Q}}$ над $\mathbf{Q}$, в то время как слой над замкнутой точкой, соответствующей простому числу p,— это схема X_p над конечным полем из p элементов $\mathbf{F}_p$. В таком случае X_p будем называть *редукцией* схемы X *по модулю* p

Еще одно важное применение расслоенные произведения находят в определении понятия расширения базы. Пусть S — фиксированная схема, которую мы будем представлять себе как *базисную схему* в том смысле, что нас будет интересовать категория схем над S. Например, пусть $S = \operatorname{Spec} k$ в категории схем над полем k. Пусть S'— другая базисная схема и $S' \to S$ — некоторый морфизм, тогда для любой схемы X над S можно построить схему $X' = X \times_S S'$, которая уже будет схемой над S'. Будем говорить в таком случае, что схема X' получена из схемы X посредством *расширения* (или *замены*) *базы* $S' \to S$. Например, взяв $S' = \operatorname{Spec} k'$, где k'— расширение поля k, мы получаем из схемы X над k схему X' над расширением k' поля k. Отметим, что операция расширения базы транзитивна: если $S'' \to S' \to S$ — композиция морфизмов, то $(X \times_S S') \times_{S'} S'' \simeq X \times_S S''$.

Это находится в связи с общей концепцией, подчеркнутой Гротендиком в [EGA] и заключающейся в том, что следует попытаться развивать все понятия алгебраической геометрии в относительном контексте. Вместо того чтобы всегда работать над фиксированным основным полем и изучать свойства одного многообразия, следует рассматривать морфизм схем $f: X \to S$ и изучать свойства этого морфизма. В таком случае становится важным изучение поведения свойств морфизма f при расширении базы, в частности связи между свойствами морфизма f и свойствами его слоев. Например, пусть $f: X \to S$ — морфизм конечного типа и $S' \to S$ — любое расширение базы, тогда $f': X' \to S'$ — также морфизм конечного типа, где $X' = X \times_S S'$. Следовательно, можно утверждать, что свойство морфизма f иметь конечный тип *сохраняется при расширении базы* (или *стабильно* относительно расширения базы). С другой стороны, если, например, $f: X \to S$ — морфизм целых схем, то слои f уже могут не быть неприводимыми или приведенными, так что свойство схемы быть целой не сохраняется при расширении базы.

Пример 3.3.1. Пусть k — алгебраически замкнутое поле,

$$X = \operatorname{Spec} k[x, y, t]/(ty - x^2),$$

$Y = \operatorname{Spec} k[t]$ и $f: X \to Y$ — морфизм, определяемый естественным гомоморфизмом $k[t] \to k[x, y, t]/(ty - x^2)$. Тогда X и Y являются целыми схемами конечного типа над k и морфизм f сюръективен. Отождествим замкнутые точки Y с элементами поля k. Над точкой $a \in k$, $a \neq 0$, слой X_a является плоской кривой $ay = x^2$ на $\mathbf{A}_k^2$, которая одновременно неприводима и приведена. Но над точкой $a = 0$ слой X_0 является неприведенной схемой, заданной уравнением $x^2 = 0$ на $\mathbf{A}_k^2$. Таким образом, мы имеем семейство (рис. 7), в котором все слои, кроме X_0, являются неприводимыми кривыми, а X_0 — неприведенной одномерной схемой.

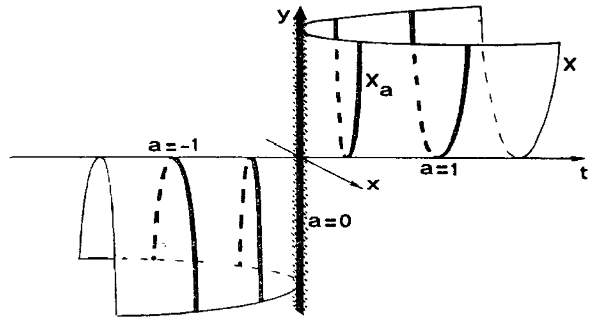


Рис. 7. Алгебраическое семейство схем.

Это показывает, что неприведенные схемы возникают естественно, даже если первоначально рассматривались многообразия. Можно сказать, что неприведенная схема $x^2 = 0$ на $\mathbf{A}^2$ является деформацией неприводимой параболы $ay = x^2$ при $a \to 0$.

Пример 3.3.2. Аналогично можно рассмотреть семейство $X = \operatorname{Spec} k[x, y, t]/(xy - t)$, общий член которого X_a является неприводимой гиперболой $xy = a$, $a \neq 0$, а специальный X_0— приводимой схемой $xy = 0$, состоящей из двух прямых.

Упражнения

3.1. Показать, что морфизм $f: X \to Y$ тогда и только тогда является морфизмом локально конечного типа, когда $f^{-1}(V)$ для *каждого* открытого аффинного подмножества $V = \operatorname{Spec} B$ в Y может быть покрыто открытыми аффинными подмножествами $U_j = \operatorname{Spec} A_j$, где каждое из A_j является конечно порожденной B-алгеброй.

3.2. Морфизм схем $f: X \to Y$ называется *квазикомпактным*, если существует покрытие Y открытыми аффинными подмножествами V_i, такими, что $f^{-1}(V_i)$ квазикомпактно для каждого i. Показать, что f тогда и только тогда квазикомпактен, когда $f^{-1}(V)$ квазикомпактно для *каждого* открытого аффинного подмножества $V \subset Y$.

3.3. (а) Показать, что морфизм $f: X \to Y$ тогда и только тогда является морфизмом конечного типа, когда он — морфизм локально конечного типа и квазикомпактен.

(b) Вывести из этого, что f тогда и только тогда является морфизмом конечного типа, когда $f^{-1}(V)$ для *каждого* открытого аффинного подмножества $V = \operatorname{Spec} B$ в Y может быть покрыто конечным числом открытых аффинных множеств $U_j = \operatorname{Spec} A_j$, где каждое из A_j является конечно порожденной B-алгеброй.

(c) Показать, что если f — морфизм конечного типа, то для *каждого* открытого аффинного подмножества $V = \operatorname{Spec} B \subset Y$ и для *каждого* открытого аффинного подмножества $U = \operatorname{Spec} A \subset f^{-1}(V)$ кольцо A является конечно порожденной B-алгеброй.

3.4. Показать, что морфизм $f\colon X \to Y$ тогда и только тогда конечен, когда для *каждого* открытого аффинного подмножества $V = \operatorname{Spec} B$ в Y множество $f^{-1}(V)$ аффинно, скажем $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} A$, где A — конечный B-модуль.

3.5. Морфизм $f\colon X \to Y$ называется *квазиконечным*, если для каждой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ является конечным.

(a) Показать, что конечный морфизм является квазиконечным.

(b) Показать, что конечный морфизм *замкнут*, т. е. образ любого замкнутого множества замкнут.

(c) Показать на примере, что сюръективный и квазиконечный морфизм конечного типа может не быть конечным.

3.6. Пусть X — целая схема. Показать, что локальное кольцо $\mathcal{O}_\xi$ общей точки ξ схемы X является полем. Оно называется *полем функций* на X и обозначается через $K(X)$. Показать также, что если $U = \operatorname{Spec} A$ — любое открытое аффинное подмножество в X, то поле $K(X)$ изоморфно полю частных кольца A.

3.7. Морфизм $f\colon X \to Y$ с неприводимой схемой Y называется *конечным в общей точке*, если множество $f^{-1}(\eta)$ конечно, где η — общая точка схемы Y. Морфизм $f\colon X \to Y$ называется *доминантным*, если $f(X)$ плотно в Y. Пусть теперь $f\colon X \to Y$ — доминантный конечный в общей точке морфизм конечного типа целых схем. Показать, что существует открытое плотное подмножество $U \subset Y$, такое, что индуцированный морфизм $f^{-1}(U) \to U$ конечен. [*Указание.* Показать сначала, что поле функций на X является конечным расширением поля функций на Y.]

3.8. *Нормализация.* Схема называется *нормальной*, если все ее локальные кольца целостные и целозамкнутые. Пусть X — целая схема. Для каждого открытого аффинного подмножества $U = \operatorname{Spec} A$ в X пусть $\widetilde{A}$ обозначает целое замыкание A в его поле частных и $\widetilde{U} = \operatorname{Spec} \widetilde{A}$. Показать, что схемы $\widetilde{U}$ можно склеить и получить нормальную целую схему $\widetilde{X}$, называемую *нормализацией* схемы X. Показать также, что существует конечный морфизм $\widetilde{X} \to X$, обладающий следующим свойством универсальности: для каждой нормальной целой схемы Z и каждого доминантного морфизма $f\colon Z \to X$ морфизм f однозначно пропускается через $\widetilde{X}$. Это обобщение упр. 3.17 гл. I.

3.9. *Топологическое пространство произведения.* Напомним, что в категории многообразий топология Зарисского на произведении многообразий не совпадает с произведением топологий (упр. 1.4 гл. I). Сейчас мы увидим, что в категории схем базисное множество точек произведения схем не является даже произведением множеств.

(a) Пусть k — поле и $\mathbf{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[x]$ — аффинная прямая над k. Показать, что $\mathbf{A}_k^1 \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbf{A}_k^1 \simeq \mathbf{A}_k^2$ и что базисное множество точек этого произведения не является произведением базисных множеств сомножителей (даже если поле k алгебраически замкнуто).

(b) Пусть k — поле и s, t — неопределенные элементы над k. Тогда $\operatorname{Spec} k(s)$, $\operatorname{Spec} k(t)$ и $\operatorname{Spec} k$ — одноточечные пространства. Описать произведение схем $\operatorname{Spec} k(s) \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t)$.

3.10. *Слои морфизма.* (a) Показать, что если $f\colon X \to Y$ — морфизм схем и $y \in Y$ — некоторая точка, то $\operatorname{sp}(X_y)$ гомеоморфно $f^{-1}(y)$ с индуцированной топологией.

(b) Пусть $X = \operatorname{Spec} k[s, t]/(s - t^2)$, $Y = \operatorname{Spec} k[s]$ и $f\colon X \to Y$ — морфизм, определенный отображением $s \to s$. Показать, что слой X над точкой $y \in Y$, соответствующей элементу $a \in k$, $a \neq 0$, состоит из двух точек с полями вычетов k. Показать также, что слой X_y над точкой y, соответствующей элементу $0 \in k$, является неприведенной одноточечной схемой. Пусть η — общая точка Y. Показать, что слой X_η — одноточечная схема, поле вычетов которой является квадратичным расширением поля вычетов точки η. (k предполагается алгебраически замкнутым.)

3.11. *Замкнутые подсхемы.* (a) Замкнутое вложение стабильно при расширении базы; если $f\colon Y \to X$ — замкнутое вложение и $X' \to X$ — произвольный морфизм, то $f'\colon Y \times_X X' \to X'$ тоже замкнутое вложение.

*(b) Пусть Y — замкнутая подсхема аффинной схемы $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда она тоже аффинна и является на самом деле замкнутой подсхемой, определенной подходящим идеалом $\mathfrak{a} \subset A$ как образ замкнутого вложения $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$. [*Указание.* Показать сначала, что Y может быть покрыта конечным числом открытых аффинных подмножеств вида $D(f_i) \cap Y$, $f_i \in A$. Добавив, если нужно, еще несколько f_i с $D(f_i) \cap Y = \varnothing$, показать, что можно предполагать, что $D(f_i)$ покрывают X. Показать далее, что $f_1, \ldots, f_r$ порождают единичный идеал в A. Воспользовавшись упр. 2.17(b), показать, что Y аффинна. Далее из упр. 2.18(d) вывести, что Y получается из идеала $\mathfrak{a} \subset A$.] *Замечание.* Позднее (5.10) мы дадим другое доказательство этого результата, используя пучки идеалов.

(c) Пусть Y — замкнутое подмножество схемы X с заданной на нем индуцированной приведенной структурой замкнутой подсхемы. Показать, что для любой другой замкнутой подсхемы $Y' \subset X$ с базисным топологическим пространством Y замкнутое вложение $Y \to X$ пропускается через Y'. Именно в этом смысле индуцированная приведенная структура является наименьшей структурой замкнутой подсхемы на замкнутом подмножестве.

(d) Пусть $f\colon Z \to X$ — морфизм. Тогда существует единственная замкнутая подсхема Y в X со следующим свойством: морфизм f пропускается через Y и если Y' — любая другая замкнутая подсхема в X, через которую пропускается f, то вложение $Y \to X$ также пропускается через Y'. Подсхему Y мы будем называть *схемным образом* морфизма f. Если схема Z приведена, то схемный образ Y есть не что иное, как индуцированная приведенная структура на замыкании образа $f(Z)$.

3.12. *Замкнутые подсхемы в* $\operatorname{Proj} S$. (a) Пусть $\varphi\colon S \to T$ — сюръективный градуированный гомоморфизм градуированных колец, сохраняющий степень. Показать, что открытое множество U из упр. 2.14 совпадает с $\operatorname{Proj} T$ и морфизм $f\colon \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ является замкнутым вложением.

(b) Пусть $I \subset S$ — однородный идеал, $T = S/I$ и Y — замкнутая подсхема схемы $X = \operatorname{Proj} S$, определяемая как образ замкнутого вложения $\operatorname{Proj} S/I \to X$. Показать, что различным однородным идеалам может соответствовать одна и та же замкнутая подсхема. Например, пусть d_0 — целое число и $I' = \bigoplus_{d \geqslant d_0} I_d$. Показать, что идеалы I и I' определяют одну и ту же замкнутую подсхему.

Позднее (5.16) мы увидим, что каждая замкнутая подсхема в X получается из некоторого однородного идеала $I \subset S$ (по крайней мере в случае, когда S — кольцо многочленов над S_0).

3.13. *Свойства морфизмов конечного типа.* (a) Замкнутое вложение является морфизмом конечного типа.

(b) Квазикомпактное открытое вложение (упр. 3.2) является морфизмом конечного типа.

(c) Композиция двух морфизмов конечного типа является морфизмом конечного типа.

(d) Морфизмы конечного типа стабильны при расширении базы.

(e) Если X и Y — схемы конечного типа над S, то $X \times_S Y$ тоже схема конечного типа над S.

(f) Если $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — два морфизма, морфизм f квазикомпактен и $g \circ f$ — морфизм конечного типа, то f — морфизм конечного типа.

(g) Если $f\colon X \to Y$ — морфизм конечного типа и Y нётерова, то X тоже нётерова.

3.14. Пусть X — схема конечного типа над полем. Показать, что множество замкнутых точек плотно в X. Показать на примере, что это неверно для произвольных схем.

3.15. Пусть X — схема конечного типа над полем k (не обязательно алгебраически замкнутым).

(a) Показать, что следующие три условия эквивалентны (при этих условиях будем говорить, что схема X *геометрически неприводима*):

(i) $X \times_k \bar{k}$ неприводима, где $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. (Для простоты обозначений мы пишем $X \times_k \bar{k}$ вместо $X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar{k}$.)

(ii) $X \times_k k_s$ неприводимо, где k_s обозначает сепарабельное замыкание поля k.

(iii) $X \times_k K$ неприводимо для всякого расширения K поля k.

(b) Показать, что следующие три условия эквивалентны (в этих условиях будем говорить, что схема X *геометрически приведена*):

(i) $X \times_k \bar{k}$ приведена.

(ii) $X \times_k k_p$ приведена, где k_p обозначает совершенное замыкание поля k.

(iii) $X \times_k K$ приведена для всякого расширения K поля k.

(c) Схему X будем называть *геометрически целой*, если схема $X \times_k \bar{k}$ является целой. Привести пример целой схемы, не являющейся геометрически неприводимой и геометрически приведенной.

3.16. *Нётерова индукция.* Пусть X — нётерово топологическое пространство и $\mathcal{P}$ — некоторое свойство замкнутых подмножеств в X. Предположим, что для любого замкнутого подмножества Y в X выполнено следующее условие: если $\mathcal{P}$ верно для любого собственного замкнутого подмножества в Y, то оно верно и для Y. (В частности, $\mathcal{P}$ должно выполняться для пустого множества.) Показать, что тогда $\mathcal{P}$ выполняется и для X.

3.17. *Пространство Зарисского.* Топологическое пространство X называется *пространством Зарисского*, если оно нётерово и каждое его (непустое) замкнутое неприводимое подмножество обладает единственной общей точкой (упр. 2.9).

Например, пусть R — кольцо дискретного нормирования и $T = \operatorname{sp}(\operatorname{Spec} R)$. Тогда T состоит из двух точек: t_0 — максимальный идеал и t_1 — нулевой идеал. Открытыми подмножествами являются $\varnothing$, $\{t_1\}$ и T. Пространство T является неприводимым пространством Зарисского с общей точкой t_1.

(a) Показать, что если X — нётерова схема, $\operatorname{sp}(X)$ — пространство Зарисского.

(b) Показать, что любое минимальное непустое замкнутое подмножество пространства Зарисского состоит из одной точки. Такие точки называются *замкнутыми*.

(c) Показать, что пространство Зарисского X удовлетворяет аксиоме T_0: для любых двух различных точек X существует открытое множество, содержащее одну из этих точек, но не содержащее другую.

(d) Пусть X — неприводимое пространство Зарисского, тогда его общая точка содержится в каждом непустом открытом подмножестве в X.

(e) Если x_0, x_1 — точки топологического пространства X и $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$, то мы будем говорить, что x_1 *специализируется в* x_0, и записывать $x_1 \rightsquigarrow x_0$. Точку x_0 будем называть также *специализацией* точки x_1, а x_1 — *генеризацией* точки x_0. Пусть теперь X — пространство Зарисского. Показать, что при частичном упорядочении, определенном правилом $x_1 > x_0$, если $x_1 \rightsquigarrow x_0$, минимальными точками являются замкнутые точки, а максимальными — общие точки неприводимых компонент пространства X. Показать также, что замкнутое подмножество содержит всякую специализацию любой из его точек. (В такой ситуации будем говорить, что замкнутые подмножества *стабильны относительно специализации*.) Аналогично открытые подмножества *стабильны относительно генеризации*.

(f) Пусть t — функтор на категории топологических пространств, введенный в доказательстве предложения 2.6. Показать, что $t(X)$ для нётерова топологического пространства X является пространством Зарисского. Более того, само X тогда и только тогда является пространством Зарисского, когда отображение $\alpha\colon X \to t(X)$ является гомеоморфизмом.

3.18. *Конструктивные множества.* Пусть X — топологическое пространство Зарисского. *Конструктивным подмножеством* в X называется подмножество, принадлежащее наименьшему семейству $\mathfrak{F}$ подмножеств, такому, что (1) каждое открытое подмножество содержится в $\mathfrak{F}$, (2) конечные пересечения подмножеств из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{F}$ и (3) дополнение к любому подмножеству из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{F}$.

(a) Подмножество в X называется *локально замкнутым*, если оно является пересечением открытого и замкнутого подмножеств. Показать, что подмножество в X тогда и только тогда конструктивно, когда оно может быть представлено как конечное объединение локально замкнутых подмножеств.

(b) Показать, что конструктивное подмножество неприводимого пространства Зарисского X тогда и только тогда плотно в X, когда оно содержит общую точку X. Более того, в таком случае оно содержит непустое открытое подмножество из X.

(c) Подмножество S в X замкнуто тогда и только тогда, когда оно конструктивно и стабильно относительно специализации. Аналогично подмножество T в X открыто тогда и только тогда, когда оно конструктивно и стабильно относительно генеризации.

(d) Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение пространств Зарисского. Тогда прообраз любого конструктивного подмножества из Y является конструктивным подмножеством в X.

3.19. Важность понятия конструктивного подмножества проявляется в следующей теореме Шевалле (см. Картан и Шевалле [1, доклад 7], а также Мацумура [2, гл. 2, § 6]). Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм конечного типа нётеровых схем, тогда образ любого конструктивного подмножества из X является конструктивным подмножеством в Y. В частности, $f(X)$ может не быть ни открытым, ни замкнутым, а быть только конструктивным подмножеством в Y. Доказательство этой теоремы состоит из следующих шагов.

(a) Свести к доказательству того, что $f(X)$ конструктивно в случае, когда X и Y — аффинные целые нётеровы схемы и $f\colon X \to Y$ — доминантный морфизм.

*(b) Показать, что в этом случае $f(X)$ содержит непустое открытое подмножество из Y, используя следующий факт из коммутативной алгебры. Пусть $A \subset B$ — вложение нётеровых целостных колец, такое, что B является конечно порожденной A-алгеброй. Тогда для заданного ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $a \in A$ со следующим свойством: если $\varphi\colon A \to K$ — произвольный гомоморфизм A в алгебраически замкнутое поле K, такой, что $\varphi(a) \neq 0$, то φ продолжается до гомоморфизма $\varphi'\colon B \to K$, такого, что $\varphi'(b) \neq 0$. [*Указание.* Доказательство этого факта проводится индукцией по числу образующих B над A. В случае одной образующей доказательство непосредственное. Для применения взять $b = 1$.]

(c) Для завершения доказательства использовать нётерову индукцию на Y.

(d) Привести примеры морфизмов $f\colon X \to Y$ многообразий над алгебраически замкнутым полем k, таких, что $f(X)$ не будет ни открытым, ни замкнутым.

3.20. ***Размерность.*** Пусть X — целая схема конечного типа над полем k (не обязательно алгебраически замкнутым). Используя подходящие результаты из § 1 гл. I, доказать следующие утверждения:

(a) $\dim X = \dim \mathcal{O}_P$ для любой замкнутой точки $P \in X$, где под размерностью кольца всегда понимается размерность Крулля.

(b) Пусть $K(X)$ — поле функций на X (упр. 3.6). Тогда $\dim X = \operatorname{deg} \operatorname{tr} K(X)/k$.

(c) Пусть Y — замкнутое подмножество в X, тогда $\operatorname{codim}(Y, X) = \inf\{\dim \mathcal{O}_{P,X} \mid P \in Y\}$.

(d) Пусть Y — замкнутое подмножество в X, тогда $\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) = \dim X$.

(e) Пусть U — непустое открытое подмножество в X, тогда $\dim U = \dim X$.

(f) Пусть $k \subseteq k'$ — расширение полей, тогда размерность каждой неприводимой компоненты пространства $X' = X \times_k k'$ равна $\dim X$.

3.21. Пусть R — кольцо дискретного нормирования, содержащее свое поле вычетов k, и $X = \operatorname{Spec} R[t]$ — аффинная прямая над $\operatorname{Spec} R$. Показать, что утверждения (a), (d) и (e) из упр. 3.20 неверны для X.

***3.22.** *Размерность слоев морфизма.* Пусть $f: X \to Y$ — доминантный морфизм целых схем конечного типа над полем k.

(a) Пусть Y' — замкнутое неприводимое подмножество в Y, общая точка η' которого содержится в $f(X)$, и Z — любая неприводимая компонента $f^{-1}(Y')$, такая, что $\eta' \in f(Z)$. Показать, что $\operatorname{codim}(Z, X) \leqslant \operatorname{codim}(Y', Y)$.

(b) Пусть $e = \dim X - \dim Y$ — *относительная размерность* X над Y. Показать, что каждая неприводимая компонента слоя X_y для любой точки $y \in f(X)$ имеет размерность $\geqslant e$. [*Указание.* Положить $Y' = \overline{\{y\}}$ и воспользоваться утверждением (a) и упр. 3.20 (b).]

(c) Показать, что существует плотное открытое подмножество $U \subset X$, такое, что $\dim U_y = e$ для любого $y \in f(U)$. [*Указание.* Сначала свести к случаю, когда X и Y аффинны, скажем $X = \operatorname{Spec} A$ и $Y = \operatorname{Spec} B$, тогда A — конечно порожденная B-алгебра. Выбрать $t_1, \ldots, t_e \in A$ так, чтобы они образовывали базис трансцендентности поля $K(X)$ над полем $K(Y)$, и положить $X_1 = \operatorname{Spec} B[t_1, \ldots, t_e]$. Тогда X_1 изоморфно аффинному e-мерному пространству над Y и морфизм $X \to X_1$ конечен в общей точке. Далее воспользоваться упр. 3.7.]

(d) Возвращаясь к исходному морфизму $f: X \to Y$, обозначим через E_h для любого целого h множество точек $x \in X$, таких, что для $y = f(x)$ существует неприводимая компонента Z слоя X_y, содержащая x, и $\dim Z \geqslant h$. Показать, что (1) $E_e = X$ (воспользоваться утверждением (b)); (2) если $h > e$, то E_h не плотно в X (воспользоваться утверждением (c)); (3) E_h замкнуто для любого h (воспользоваться индукцией по размерности X).

(e) Доказать следующую теорему Шевалле (см. Картан и Шевалле [1, доклад 8]). Пусть C_h для каждого целого h обозначает множество точек $y \in Y$, таких, что $\dim X_y = h$. Тогда подмножества C_h конструктивны и C_e содержит некоторое открытое плотное подмножество из Y.

3.23. Пусть V, W — многообразия над алгебраически замкнутым полем k, $V \times W$ — их произведение, определенное в упр. 3.15, 3.16 гл. I, и пусть t — функтор из предложения 2.6, тогда $t(V \times W) = t(V) \times_{\operatorname{Spec} k} t(W)$.

§ 4. Отделимые и собственные морфизмы

Изучим теперь два свойства схем или, точнее, морфизмов схем — отделимость и собственность, которые соответствуют хорошо известным свойствам обычных топологических пространств. Отделимость соответствует хаусдорфовости топологического пространства, собственность — обычному понятию собственности, а именно тому, что прообраз компактного подмножества компактен. Однако в абстрактной алгебраической геометрии обычные определения оказываются непригодными, поскольку топология Зарисского не хаусдорфова и базисное топологическое пространство схемы не вполне точно отражает ее свойства. Поэтому вместо обычных определений из топологии в категории схем мы будем использовать определения, отражающие функториальное поведение морфизмов. Можно показать, что для схем конечного типа над $\mathbf{C}$ эти абстрактно определенные понятия совпадают на самом деле с соответствующими понятиями обычной топологии, если схемы над $\mathbf{C}$ рассматривать как комплексно-аналитические пространства (добавление B).

В этом параграфе мы дадим определения отделимых и собственных морфизмов. Используя кольца нормирований, мы сформулируем и докажем критерии отделимости и собственности для морфизмов схем. После этого покажем, что проективное пространство над любой схемой собственно.

Определение. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм схем. *Диагональным морфизмом* называется такой однозначно определенный морфизм $\Delta: X \to X \times_Y X$, композиция которого с каждой из проекций $p_1, p_2: X \times_Y X \to X$ является тождественным отображением $X \to X$. Морфизм f называется *отделимым*, если диагональный морфизм Δ является замкнутым вложением. В таком случае мы будем говорить также, что схема X *отделима над* Y. Схема *отделима*, если она отделима над $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$.

Пример 4.0.1. Пусть k — некоторое поле и X — аффинная прямая над k с раздвоенной точкой 0 (см. 2.3.6). Тогда X не отделима над k. Действительно, $X \times_k X$ является аффинной плоскостью с четырьмя нулевыми точками. Образом Δ является обычная диагональ с раздвоенной точкой 0. Она незамкнута, поскольку все четыре нулевые точки $X \times_k X$ лежат, очевидно, в замыкании схемы $\Delta(X)$.

Пример 4.0.2. Позднее (4.10) мы увидим, что если V — произвольное многообразие над алгебраически замкнутым полем k, то соответствующая схема $t(V)$ отделима над k.

Предложение 4.1. *Пусть $f: X \to Y$ — морфизм аффинных схем. Тогда f отделим.*

Доказательство. Положим $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, тогда A есть B-алгебра и схема $X \times_Y X$ тоже аффинна, $X \times_Y X = \operatorname{Spec} A \otimes_B A$. Диагональный морфизм Δ соответствует *диагональному гомоморфизму* $A \otimes_B A \to A$, определяемому формулой

$a \otimes a' \to aa'$. Этот гомоморфизм, очевидно, сюръективен. Следовательно, Δ — замкнутое вложение.

Следствие 4.2. *Произвольный морфизм $f\colon X \to Y$ тогда и только тогда отделим, когда образ диагонального морфизма является замкнутым подмножеством в $X \times_Y X$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, так что надо доказать только, что если $\Delta(X)$ — замкнутое подмножество, то $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ — замкнутое вложение. Иными словами, надо проверить, что $\Delta\colon X \to \Delta(X)$ — гомеоморфизм и морфизм пучков $\mathcal{O}_{X\times_Y X} \to \Delta_* \mathcal{O}_X$ сюръективен. Пусть $p_1\colon X \times \times_Y X \to X$ — проекция на первый множитель. Так как $p_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_X$, то отсюда непосредственно следует, что Δ задает гомеоморфизм X на $\Delta(X)$. Сюръективность отображения пучков $\mathcal{O}_{X\times_Y X} \to \Delta_* \mathcal{O}_X$ можно проверять локально. Для любой точки $P \in X$ пусть U — такая ее достаточно малая открытая аффинная окрестность, что $f(U)$ содержится в некотором открытом аффинном подмножестве V в Y. Тогда $U \times_V U$ является открытой аффинной окрестностью точки $\Delta(P)$ и, согласно предложению 4.1, $\Delta\colon U \to U \times_V U$ — замкнутое вложение. Поэтому рассматриваемое отображение пучков сюръективно в окрестности точки P, что завершает доказательство.

Теперь перейдем к обсуждению валюативного критерия отделимости. Его идея, грубо говоря, заключается в том, что отделимая схема не должна содержать никаких подсхем типа кривой с раздвоенной точкой, как в примере 4.0.1. Иными словами, пусть C — кривая и $P \in C$ — некоторая точка. Тогда любой морфизм $C - P$ в X должен обладать не более чем одним продолжением до морфизма всей кривой C в X. (Ср. 6.8 гл. I, где показано, что проективное пространство обладает этим свойством.)

В практической реализации эта идея несколько уточняется. Вопрос, очевидно, локальный, поэтому кривую C можно заменить ее локальным кольцом в точке P, т. е. некоторым кольцом дискретного нормирования. Далее, так как схемы могут быть какими угодно, надо рассматривать произвольные кольца нормирования, а не только кольца дискретного нормирования. Наконец, критерий должен быть относительным над базисной схемой Y.

Напомним, что определение и основные свойства колец нормирования изложены в § 6 гл. I.

Теорема 4.3 (валюативный критерий отделимости). *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем, и предположим, что схема X нётерова. Морфизм f отделим тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: для всякого поля K и всякого кольца нормирования R с полем частных K, если $T = \operatorname{Spec} R$, $U = \operatorname{Spec} K$ и $i\colon U \to T$ —*

морфизм, индуцированный вложением $R \subset K$, то для любых морфизмов из T в Y и из U в X, составляющих вместе с i и f коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

существует, самое большее, один морфизм из T в X, делающий всю диаграмму коммутативной.

Для доказательства понадобятся две леммы.

Лемма 4.4. *Пусть R — кольцо нормирования поля K, $T = \operatorname{Spec} R$ и $U = \operatorname{Spec} K$. Тогда задание морфизма схемы U в схему X равносильно заданию точки $x_1 \in X$ и вложения полей $k(x_1) \subset K$; задание морфизма из T в X равносильно заданию точек x_0, x_1 в X, где x_0 — специализация x_1* (см. упр. 3.17 (е)), *и вложения полей $k(x_1) \subset K$, таких, что R доминирует над локальным кольцом $\mathcal{O}$ точки x_0 на подсхеме $Z = \overline{\{x_1\}}$ схемы X с индуцированной приведенной структурой.*

Доказательство. Схема U состоит из одной точки со структурным пучком K. Задать локальный гомоморфизм $\mathcal{O}_{x_1, X} \to K$ — это то же самое, что задать вложение $k(x_1) \subset K$, так что первое утверждение леммы очевидно. Для доказательства второго утверждения пусть $t_0 = \mathfrak{m}_R$ — замкнутая точка в T и $t_1 = (0)$ — общая точка схемы T и пусть x_0 и x_1— образы t_0 и t_1 при заданном морфизме из T в X. Так как схема T приведена, то морфизм $T \to X$ пропускается через Z (упр. 3.11). Более того, поле $k(x_1)$ является полем функций на Z, так что мы имеем локальный гомоморфизм кольца $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{x_0, Z}$ в R, согласованный с вложением $k(x_1) \subset K$. Иными словами, R доминирует над $\mathcal{O}$.

Обратно, если заданы точки x_0, x_1 и вложение $k(x_1) \subset K$, такие, что R доминирует над $\mathcal{O}$, то вложение $\mathcal{O} \to R$ определяет морфизм $T \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}$, который в композиции с естественным отображением $\operatorname{Spec} \mathcal{O} \to X$ дает требуемый морфизм $T \to X$.

Лемма 4.5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — квазикомпактный морфизм схем* (см. упр. 3.2). *Тогда подмножество $f(X)$ в Y замкнуто в том и только том случае, когда оно стабильно относительно специализации* (упр. 3.17 (е)).

Доказательство. Одна импликация очевидна, так что надо показать только, что если $f(X)$ стабильно относительно специализации, то оно замкнуто. Ясно, что X и Y можно считать приведенными и что $\overline{f(X)} = Y$ (заменив Y индуцированной приведенной структурой на $\overline{f(X)}$). Пусть $y \in Y$ — некоторая точка.

Мы хотим показать, что $y \in f(X)$. Можно заменить Y некоторой аффинной окрестностью точки y и считать, следовательно, что Y аффинна. Тогда, поскольку морфизм f квазикомпактен, X будет конечным объединением открытых аффинных подмножеств X_i. Так как $y \in \overline{f(X)} = Y$, то $y \in \overline{f(X_i)}$ для некоторого i. Пусть $Y_i = \overline{f(X_i)}$ с индуцированной приведенной структурой. Тогда Y_i тоже аффинно, и мы будем рассматривать доминантный морфизм $X_i \to Y_i$ приведенных аффинных схем. Положим $X_i = \operatorname{Spec} A$ и $Y_i = \operatorname{Spec} B$. Тогда соответствующий гомоморфизм колец $B \to A$ инъективен, поскольку морфизм $X_i \to Y_i$ доминантен. Точке $y \in Y_i$ соответствует простой идеал $\mathfrak{p} \subset B$. Пусть $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал в B, содержащийся в $\mathfrak{p}$. (Минимальные простые идеалы существуют по лемме Цорна, поскольку пересечение любого семейства линейно упорядоченных по вложению простых идеалов является также простым идеалом!) Тогда $\mathfrak{p}'$ соответствует точке $y' \in Y_i$, которая специализируется в точку y. Мы утверждаем, что $y' \in f(X_i)$. Действительно, рассмотрим локализации колец A и B в $\mathfrak{p}'$. Локализация является точным функтором, поэтому $B_{\mathfrak{p}'} \subset A \otimes B_{\mathfrak{p}'}$. Заметим теперь, что $B_{\mathfrak{p}'}$ является полем. Пусть $\mathfrak{q}_0'$ — произвольный простой идеал в $A \otimes B_{\mathfrak{p}'}$, тогда $\mathfrak{q}_0' \cap B_{\mathfrak{p}'} = (0)$. Обозначим через $\mathfrak{q}'$ прообраз в A идеала $\mathfrak{q}_0'$ при отображении локализации $A \to A \otimes B_{\mathfrak{p}'}$. Тогда $\mathfrak{q}' \cap B = \mathfrak{p}'$, так что $\mathfrak{q}'$ соответствует некоторой точке $x' \in X_i$, такой, что $f(x') = y'$. Возвращаясь к морфизму $f\colon X \to Y$, имеем $x' \in X$, $f(x') = y'$, так что $y' \in f(X)$. По предположению $f(X)$ стабильно относительно специализации, следовательно, $y \in f(X)$ как специализация точки y', что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4.3. Пусть сначала f — отделимый морфизм, и предположим, что в диаграмме, указанной в формулировке теоремы, существуют два морфизма h, h' из T в X, делающие полную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "h"] \arrow[ur, shift right, "h'"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативной. Тогда мы получаем морфизм $h''\colon T \to X \times_Y X$. Так как ограничения h и h' на U совпадают, то образ общей точки $t_1 \in T$ принадлежит диагонали $\Delta(X)$. Поскольку диагональ $\Delta(X)$ замкнута в $X \times_Y X$, то образ точки t_0 тоже принадлежит $\Delta(X)$. Следовательно, морфизмы h и h' переводят точки t_0, t_1 в одни и те же точки x_0, x_1 в X. Далее, поскольку вложения $k(x_1) \subset K$, индуцированные морфизмами h и h', тоже совпадают, то по лемме 4.4 отсюда следует, что $h = h'$.

Обратно, предположим, что условия теоремы выполнены. Для того чтобы доказать, что морфизм f отделим, достаточно показать, согласно 4.2, что $\Delta(X)$ замкнуто в $X \times_Y X$. Поскольку по предположению схема X нётерова, то диагональный морфизм Δ квазикомпактен, так что по лемме 4.5 достаточно показать, что $\Delta(X)$ стабильно относительно специализации. Пусть $\xi_1 \in \Delta(X)$ — некоторая точка и $\xi_1 \rightsquigarrow \xi_0$ — ее специализация. Положим $K = k(\xi_1)$, и пусть $\mathcal{O}$ — локальное кольцо точки ξ_0 на подсхеме $\overline{\{\xi_1\}}$ с индуцированной приведенной структурой. Тогда $\mathcal{O}$ — локальное кольцо в K, так что, согласно 6.1А гл. I, существует кольцо нормирования R в K, доминирующее над кольцом $\mathcal{O}$. Теперь по лемме 4.4 мы получаем морфизм $T = \operatorname{Spec} R$ в $X \times_Y X$, отображающий t_0 и t_1 в ξ_0 и ξ_1 соответственно. Его композиция с проекциями p_1, p_2 определяет два морфизма T в X, которые дают один и тот же морфизм в Y и ограничения которых на $U = \operatorname{Spec} K$ совпадают, так как $\xi_1 \in \Delta(X)$. Значит, по условию эти два морфизма из T в X совпадают. Следовательно, морфизм $T \to X \times_Y X$ пропускается через диагональный морфизм $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ и, стало быть, $\xi_0 \in \Delta(X)$. Это завершает доказательство. Отметим, что в последнем шаге доказательства было бы недостаточно показать только, что $p_1(\xi_0) = p_2(\xi_0)$. Из того что $\xi \in X \times_Y X$ и $p_1(\xi) = p_2(\xi)$, *не* следует, вообще говоря, что $\xi \in \Delta(X)$.

Следствие 4.6. *Имеют место следующие утверждения, в которых все схемы предполагаются нётеровыми:*

(a) *Открытые и замкнутые вложения отделимы.*

(b) *Композиция двух отделимых морфизмов отделима.*

(c) *Отделимые морфизмы стабильны относительно замены базы.*

(d) *Пусть $f\colon X \to Y$ и $f'\colon X' \to Y'$ — отделимые морфизмы схем над S. Тогда их произведение $f \times f'\colon X \times_S X' \to Y \times_S Y'$ — тоже отделимый морфизм.*

(e) *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — два морфизма, и предположим, что морфизм $g \circ f$ отделим. Тогда морфизм f тоже отделим.*

(f) *Морфизм $f\colon X \to Y$ отделим тогда и только тогда, когда схема Y может быть покрыта открытыми подмножествами V_i, такими, что $f^{-1}(V_i) \to V_i$ является отделимым морфизмом для каждого i.*

Доказательство. Все эти утверждения непосредственно следуют из предыдущей теоремы. В качестве иллюстрации мы докажем утверждение (c). Пусть $f\colon X \to Y$ — отделимый морфизм, и пусть $X' = X \times_Y Y'$— схема, полученная из X расширением базы $Y' \to Y$. Надо показать, что морфизм $f'\colon X' \to Y'$ отделим. Воспользуемся критерием 4.3. Предположим, что заданы морфизмы из T в Y' и из U в X', как в 4.3, и два морфизма из T в X', превращающих следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

в коммутативную. Компонуя последние с отображением $X' \to X$, получаем два морфизма из T в X. Так как морфизм f отделим, то они совпадают. Но X'— расслоенное произведение X и Y' над Y, так что по свойству универсальности расслоенного произведения два заданных отображения из T в X' тоже должны совпадать. Следовательно, морфизм f' отделим.

Замечание относительно предположения о нётеровости. Читатель, вероятно, заметил, что при применении теоремы 4.3 в доказательстве следствия предположение о нётеровости схем не использовалось. В действительности даже саму эту теорему можно доказать в предположениях, несколько более слабых, чем нётеровость X (см. Гротендик [EGA I, новое изд. 5.5.4]). Я полагаю, что если предположение о нётеровости существенно упрощает формулировки утверждений и их доказательства, то это предположение следует вводить, даже если оно и не обязательно. Оправданием этому служит то, что основные мотивировки и примеры в алгебраической геометрии возникают из схем конечного типа над полем или схем, получающихся из них с помощью различного рода конструкций, так что практически все встречающиеся в конкретной ситуации схемы оказываются нётеровыми. Это особенно характерно для гл. III, где предположения о нётеровости относятся к основным в нашей трактовке теории когомологий. Читателю, желающему освободиться от предположений о нётеровости, рекомендуем обратиться к [EGA], в частности к [EGA IV, § 8].

Определение. Морфизм $f\colon X \to Y$ называется *собственным*, если он отделим, конечного типа и универсально замкнут. Морфизм называется *замкнутым*, если образ любого замкнутого подмножества замкнут, и *универсально замкнутым*, если он замкнут и для любого морфизма $Y' \to Y$ соответствующий морфизм $f'\colon X' \to Y'$, полученный расширением базы, тоже замкнут.

Пример 4.6.1. Пусть k — некоторое поле и X — аффинная прямая над k. Тогда схема X отделима и конечного типа над k, но не является собственной над k. Действительно, рассмотрим расширение базы $X \to \operatorname{Spec} k$. Тогда отображение $X \times_k X \to X$ есть не что иное, как проекция аффинной плоскости на аффинную прямую, которая не является замкнутым отображением: например, гипербола $xy = 1$ является замкнутым подмножеством в плоскости, а ее образ при проекции на аффинную прямую — это аффинная прямая без точки 0, которая, очевидно, не замкнута.

Ясно, конечно, что пропущенной точке в этом примере соответствует одна из бесконечно удаленных точек на гиперболе. Это указывает на то, что *проективная* прямая уже будет собственной над k. В действительности позднее (4.9) мы покажем, что любое проективное многообразие является собственным над полем.

Теорема 4.7 (валюативный критерий собственности). *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм конечного типа, где схема X предполагается нётеровой. Морфизм f тогда и только тогда является собственным, когда для всякого кольца нормирования R и морфизмов U в X и T в Y, образующих следующую коммутативную диаграмму:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur] & Y \end{tikzcd}$$

(используются обозначения из 4.3), *существует морфизм $T \to X$, делающий полную диаграмму коммутативной.*

Доказательство. Пусть сначала f — собственный морфизм. Тогда по определению он отделим, так что единственность морфизма $T \to X$, если он существует, будет следовать из 4.3. Для доказательства существования рассмотрим расширение базы $T \to Y$ и положим $X_T = X \times_Y T$. Из заданных отображений $U \to X$ и $U \to T$ мы получаем тогда отображение $U \to X_T$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] & X_T \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & T \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Пусть $\xi_1 \in X_T$ — образ единственной точки t_1 из U и $Z = \overline{\{\xi_1\}}$. Тогда Z — замкнутое подмножество в X_T. Поскольку морфизм f собственный, он универсально замкнут, так что морфизм $f'\colon X_T \to T$ должен быть замкнутым и $f'(Z)$ — замкнутое подмножество в T. Но $f'(\xi_1) = t_1$, где t_1— общая точка схемы T, стало быть, $f'(Z) = T$. Следовательно, существует точка $\xi_0 \in Z$, такая, что $f'(\xi_0) = t_0$, и мы имеем локальный гомоморфизм локальных колец $R \to \mathcal{O}_{\xi_0, Z}$, соответствующий морфизму f'. Поле функций на Z — это поле вычетов $k(\xi_1)$, которое по построению точки ξ_1 содержится в поле K. Согласно 6.1A гл. I, кольцо R является максимальным элементом в частично упорядоченном отношении доминирования множестве локальных подколец в K. Следовательно, R изоморфно $\mathcal{O}_{\xi_0, Z}$ и, в частности, R доминирует над последним. Поэтому в силу 4.4 мы получаем морфизм из T в X_T, переводящий t_0, t_1 в ξ_0, ξ_1 соответственно. Композиция его с отображением $X_T \to X$ дает требуемый морфизм $T \to X$.

Обратно, предположим, что условия теоремы выполнены. Для доказательства собственности морфизма f достаточно показать только, что он универсально замкнут, поскольку он имеет конечный тип по предположению и отделим в силу 4.3. Пусть $Y' \to Y$ — произвольный морфизм и $f'\colon X' \to Y'$ — морфизм, полученный из f расширением базы. Пусть Z — замкнутое подмножество в X', снабженное приведенной индуцированной структурой:

$$\begin{array}{ccc} Z \subset X' & \to & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \to & Y \end{array}$$

Нам надо показать, что $f'(Z)$ замкнуто в Y'. Так как f является морфизмом конечного типа, то морфизмом конечного типа будет и f', а также его ограничение на Z (упр. 3.13). В частности, морфизм $f'\colon Z \to Y'$ квазикомпактен, так что, согласно 4.5, достаточно лишь показать, что $f'(Z)$ стабильно относительно специализации. Пусть $z_1 \in Z$ — некоторая точка, $y_1 = f'(z_1)$ и $y_1 \rightsquigarrow y_0$ — специализация точки y_1. Пусть $\mathcal{O}$ — локальное кольцо точки y_0 на схеме $\overline{\{y_1\}}$ с приведенной индуцированной структурой. Тогда $k(y_1)$ является полем частных кольца $\mathcal{O}$, которое содержится как подполе в $k(z_1)$. Положим $K = k(z_1)$, и пусть R — кольцо нормирования в K, доминирующее над $\mathcal{O}$ (оно существует по 6.1А гл. I.).

Отсюда в силу 4.4 мы получаем морфизмы $U \to Z$ и $T \to Y'$, образующие следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} U & \to & Z \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ T & \to & Y', \end{array}$$

Компонуя их с морфизмами $Z \to X' \to X$ и $Y' \to Y$, получаем морфизмы $U \to X$ и $T \to Y$, удовлетворяющие условию теоремы. Значит, существует морфизм $T \to X$, делающий полную диаграмму коммутативной. Он поднимается до морфизма схемы T в расслоенное произведение $X' = X \times_Y Y'$. Так как схема Z замкнута и общая точка схемы T отображается в $z_1 \in Z$, то этот морфизм пропускается через Z, давая морфизм $T \to Z$. Пусть z_0 — образ t_0. Тогда $f'(z_0) = y_0$ и, следовательно, $y_0 \in f'(Z)$. Это завершает доказательство.

Следствие 4.8. *Имеют место следующие утверждения, в которых все схемы предполагаются нётеровыми:*

(a) *Замкнутое вложение является собственным.*

(b) *Композиция собственных морфизмов собственна.*

(c) *Собственные морфизмы стабильны относительно расширения базы.*

(d) *Произведения (в смысле* 4.6 (d)) *собственных морфизмов являются собственными.*

(e) *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — два морфизма. Тогда если морфизм $g \circ f$ собствен и морфизм g отделим, то морфизм f тоже собствен.*

(f) *Понятие собственности морфизма локально по базе (в смысле* 4.6 (f)).

Доказательство. Все эти утверждения непосредственно следуют из предыдущей теоремы по аналогии с упр. 3.13, где речь идет о свойстве морфизмов быть морфизмами конечного типа, и со следствием 4.6. В качестве иллюстрации мы докажем утверждение (e). Пусть $g \circ f$ — собственный, а g — отделимый морфизмы. Тогда, согласно упр. 3.13, f имеет конечный тип. (Так как X предполагается нётеровой, то морфизм f автоматически квазикомпактен.) В силу 4.6 f отделим. Значит, осталось показать, что для заданного кольца нормирования R и морфизмов $U \to X$ и $T \to Y$, образующих коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[ur, dashed] \arrow[r, dashed, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

существует морфизм из T в X, делающий полную диаграмму коммутативной.

Пусть $T \to Z$ — композиция отображений $T \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Тогда, поскольку морфизм $g \circ f$ собственный, существует отображение $T \to X$, коммутирующее с отображением $T \to Z$. Композиция его с f дает второй морфизм из T в Y. Но так как морфизм g отделим, то эти два морфизма $T \to Y$ совпадают. Тем самым утверждение доказано.

Наша следующая задача — определить проективные морфизмы и показать, что всякий проективный морфизм является собственным. Напомним, что в § 2 было определено проективное n-мерное пространство $\mathbf{P}^n_A$ над произвольным кольцом A как

$\operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_n]$. Отметим, что если $A \to B$ — гомоморфизм колец и $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ — соответствующий морфизм аффинных схем, то $\mathbf{P}_B^n \simeq \mathbf{P}_A^n \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$. В частности, $\mathbf{P}_A^n \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \times$ $\times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}} \operatorname{Spec} A$ для любого кольца A. Этим объясняется введение следующего определения для произвольной схемы Y.

Определение. Для любой схемы Y определим *проективное n-мерное* пространство $\mathbf{P}_Y^n$ над Y как произведение $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}} Y$. Морфизм схем $f\colon X \to Y$ называется *проективным*, если он пропускается через замкнутое вложение $i\colon X \to \mathbf{P}_Y^n$ для некоторого n с последующей проекцией $\mathbf{P}_Y^n \to Y$. Морфизм $f\colon X \to Y$ называется *квазипроективным*, если он пропускается через открытое вложение $j\colon X \to X'$ с последующим проективным морфизмом $g\colon X' \to Y$. (Это определение проективного морфизма слегка отличается от определения Гротендика [EGA II, 5.5]. В случае когда сама схема Y квазипроективна над некоторой аффинной схемой, они эквивалентны.)

Пример 4.8.1. Пусть A — кольцо и S — градуированное кольцо с $S_0 = A$, конечно порожденное как A-алгебра элементами из S_1. Тогда естественное отображение $\operatorname{Proj} S \to \operatorname{Spec} A$ является проективным морфизмом. Действительно, по предположению S — факторкольцо кольца многочленов $S' = A[x_0, \ldots, x_n]$. Сюръективный гомоморфизм градуированных колец $S' \to S$ приводит к замкнутому вложению $\operatorname{Proj} S \to \operatorname{Proj} S' = \mathbf{P}_A^n$, что означает проективность $\operatorname{Proj} S$ над A (упр. 3.12).

Теорема 4.9. *Всякий проективный морфизм нётеровых схем является собственным. Всякий квазипроективный морфизм нётеровых схем имеет конечный тип и отделим.*

Доказательство. Принимая во внимание результаты упр. 3.13, а также 4.6 и 4.8, достаточно показать, что схема $X = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$ собственна над $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$. Напомним, что, согласно предложению 2.5, X является объединением открытых аффинных подмножеств $V_i = D_+(x_i)$ и что каждое V_i изоморфно $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]$. Таким образом, схема X имеет конечный тип. Для доказательства собственности X воспользуемся критерием 4.7, следуя доказательству предложения 6.8 гл. I. Пусть заданы кольцо нормирования R и морфизмы $U \to X$, $T \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, составляющие следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \operatorname{Spec} \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

Пусть $\xi_1 \in X$ — образ единственной точки из U. Пользуясь индукцией по n, можно считать, что ξ_1 не содержится ни в одной из гиперплоскостей $X - V_i$, изоморфных $\mathbf{P}^{n-1}$. Иными словами, можно считать, что $\xi_1 \in \bigcap V_i$, и поэтому все функции x_i/x_j являются обратимыми элементами локального кольца $\mathcal{O}_{\xi_1}$.

Морфизм $U \to X$ задает вложение полей $k(\xi_1) \subset K$. Пусть $f_{ij} \in K$ — образы элементов x_i/x_j. Тогда $f_{ij} \neq 0$ и $f_{ik} = f_{ij} \cdot f_{jk}$ для всех i, j, k. Пусть $v\colon K \to G$ — нормирование, ассоциированное с кольцом нормирования R, и $g_i = v(f_{i0})$, $i = 0, \ldots, n$. Выберем индекс k так, чтобы g_k был минимальным в множестве $\{g_0, \ldots, g_n\}$ в смысле порядка на группе G. Тогда для каждого i

$$v(f_{ik}) = g_i - g_k \geqslant 0,$$

следовательно, $f_{ik} \in R$ для всех $i = 0, \ldots, n$. В таком случае можно построить гомоморфизм

$$\varphi\colon \mathbf{Z}[x_0/x_k, \ldots, x_n/x_k] \to R,$$

переводящий x_i/x_k в f_{ik}. Он согласован с заданным вложением полей $k(\xi_1) \subset K$. Гомоморфизм φ определяет морфизм $T \to V_k$ и, следовательно, морфизм из T в X, один из требуемых. Единственность его следует из построения и способа склейки V_i.

Предложение 4.10. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле. Тогда образ функтора $t\colon \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)$ из 2.6 — это в точности множество квазипроективных целых схем над k. Образом множества проективных многообразий является множество проективных целых схем над k. В частности, схема $t(V)$ является целой отделимой схемой конечного типа над k для всякого многообразия V.*

Доказательство. Мы уже видели в § 3, что для любого многообразия V ассоциированная с ним схема $t(V)$ является целой и имеет конечный тип над k. Очевидно также, что схема $t(V)$ квазипроективна, поскольку многообразия определялись (см. § 3 гл. I) как локально замкнутые подмножества в проективном пространстве.

Для доказательства обратного утверждения достаточно показать, что всякая проективная целая схема Y над k принадлежит образу t. Пусть Y — замкнутая подсхема в $\mathbf{P}_k^n$ и V — множество ее замкнутых точек. Тогда V — замкнутое подмножество *многообразия* $\mathbf{P}^n$. Так как V плотно в Y (упр. 3.14), то оно неприводимо. Следовательно, V — проективное многообразие и схемы $t(V)$ и Y имеют одно и то же базисное топологическое пространство. Поскольку обе являются приведенными замкнутыми подсхемами в $\mathbf{P}_k^n$, то они изоморфны (упр. 3.11).

Определение. *Абстрактным многообразием* называется целая отделимая схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k. Абстрактное многообразие называется *полным*, если оно собственно над k.

Замечание 4.10.1. Абстрактные многообразия мы будем называть в дальнейшем просто многообразиями. Многообразия из гл. I будем отождествлять с ассоциированными с ними схемами и называть квазипроективными многообразиями. Будем пользоваться также терминами «кривая», «поверхность», «трехмерное многообразие» и т. д. для обозначения абстрактных многообразий размерностей 1, 2, 3 и т. д.

Замечание 4.10.2. Понятие абстрактного многообразия было введено А. Вейлем [1]. Оно понадобилось ему для чисто алгебраической конструкции якобиева многообразия кривой, которое появлялось сначала только как абстрактное многообразие (А. Вейль [2]). Затем Чжоу [3] дал другую конструкцию якобиева многообразия, из которой было видно, что оно на самом деле является проективным. Позднее А. Вейль [6] сам показал, что все абелевы многообразия проективны.

Тем временем Нагата [1] нашел пример полного абстрактного непроективного многообразия, показав тем самым, что класс абстрактных многообразий шире, чем класс проективных многообразий.

Известные результаты в этом направлении подытожены в следующем списке:

(a) Всякая полная кривая проективна (упр. 5.8 гл. III).

(b) Всякая неособая полная поверхность проективна (Зарисский [5], см. также Хартсхорн [5, II.4.2]).

(c) Существуют особые непроективные полные поверхности (Нагата [3], см. также упр. 7.13 и упр. 5.9 гл. III.)

(d) Существуют неособые полные непроективные трехмерные многообразия (Нагата [4], Хиронака [2] и добавление B).

(e) Всякое многообразие может быть вложено как открытое плотное подмножество в полное многообразие (Нагата [6]).

Следующий алгебраический результат будет использоваться в упр. 4.6.

Теорема 4.11A.. *Пусть A — подкольцо поля K. Тогда целое замыкание A в K является пересечением всех колец нормирования в K, содержащих A.*

Доказательство см. Бурбаки [1, гл. VI, § 1, n. 3, теорема 3].

Упражнения

4.1. Показать, что конечный морфизм является собственным.

4.2. Пусть S — некоторая схема, X — приведенная и Y — отделимая схемы над S. Пусть f и g суть S-морфизмы из X в Y, совпадающие на некотором открытом плотном подмножестве из X. Показать, что $f = g$. Привести пример, показывающий, что это утверждение неверно в случае, когда схема X не приведена или когда схема Y не отделима над S. [*Указание.* Рассмотреть отображение $h: X \to Y \times_S Y$, построенное по f и g.]

4.3. Пусть X — отделимая схема над аффинной схемой S, а U и V — открытые аффинные подмножества в X. Показать, что подмножество $U \cap V$ тоже аффинно. Показать на примере, что это неверно, если схема X не отделима.

4.4. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм отделимых схем конечного типа над нётеровой схемой S, а Z — замкнутое подмножество в X, собственное над S. Показать, что $f(Z)$ замкнуто в Y и что $f(Z)$ как подсхема (упр. 3.11d) собственна над S. В такой ситуации мы будем говорить, что образ собственной схемы собствен. [*Указание.* Разложить f в композицию морфизма вложения графика $\Gamma_f: X \to X \times_S Y$ и морфизма p_2 проекции на второй множитель и показать, что Γ_f — замкнутое вложение.]

4.5. Пусть X — целая схема конечного типа над полем k с полем функций K. Будем говорить, что нормирование поля K/k (см. § 6 гл. I) имеет *центр* x на X, если соответствующее ему кольцо нормирования доминирует над локальным кольцом $\mathcal{O}_{x,X}$.

(a) Показать, что если схема X отделима над k, то центр любого нормирования K/k на X единствен (если он существует).

(b) Показать, что если схема X собственна над k, то каждое нормирование K/k имеет единственный центр на X.

*(c) Доказать утверждения, обратные к (a) и (b). [*Указание.* Утверждения (a) и (b) легко следуют из 4.3 и 4.7; для их обращения требуется сравнить нормирования различных полей.]

(d) Показать, что если схема X собственна над k и k алгебраически замкнуто, то $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$. Это является обобщением результата 3.4a гл. I. [*Указание.* Пусть $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ и $a \notin k$, показать, что существует кольцо нормирования R поля K/k, такое, что $a^{-1} \in \mathfrak{m}_R$. Затем воспользоваться утверждением (b) и получить противоречие.]

Замечание. Для многообразий над k критерий (b) используется иногда в качестве определения полного многообразия.

4.6. Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм аффинных многообразий над k. Показать, что тогда f — конечный морфизм. [*Указание.* Воспользоваться теоремой 4.11A.]

4.7. *Схемы над* $\mathbf{R}$. Для любой схемы X_0 над $\mathbf{R}$ положим $X = X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Пусть $\alpha: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ — комплексное сопряжение и $\sigma: X \to X$ — автоморфизм, определяемый действием α на второй множитель произведения $X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ ($\sigma|_{X_0} = \mathrm{id}$). Тогда X — схема над $\mathbf{C}$ и σ — *полулинейный* автоморфизм X над $\mathbf{C}$ в том смысле, что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} \mathbf{C} & \xrightarrow{\alpha} & \operatorname{Spec} \mathbf{C} \end{array}$$

Так как $\sigma^2 = \mathrm{id}$, то автоморфизм σ будем называть *полулинейной инволюцией*.

(a) Пусть X — отделимая схема конечного типа над $\mathbf{C}$ и σ — полулинейная инволюция на X. Предположим, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует открытое аффинное подмножество, их содержащее. (Это выполняется, например, в случае, когда X квазипроективна.) Показать, что существует единственная отделимая схема X_0 конечного типа над $\mathbf{R}$, такая, что $X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ изоморфна X и при этом изоморфизме инволюция σ отождествляется с инволюцией на $X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, описанной выше.

В следующих утверждениях X_0 обозначает отделимую схему конечного типа над $\mathbf{R}$, а X и σ — соответствующую схему с инволюцией над $\mathbf{C}$.

(b) Показать, что схема X_0 аффинна тогда и только тогда, когда аффинна схема X.

(c) Пусть X_0, Y_0 — схемы над $\mathbf{R}$. Показать, что тогда задание морфизма f_0: $X_0 \to Y_0$ эквивалентно заданию морфизма f: $X \to Y$, коммутирующего с инволюциями σ_X и σ_Y, т. е. $f \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ f$.

(d) Показать, что если $X \simeq \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$, то $X_0 \simeq \mathbf{A}^1_{\mathbf{R}}$.

(e) Показать, что если $X \simeq \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$, то $X_0 \simeq \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ или X_0 изоморфна конике в $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, заданной однородным уравнением $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$.

4.8. Пусть $\mathscr{P}$ — свойство морфизмов схем, такое, что

(a) замкнутое вложение обладает свойством $\mathscr{P}$;

(b) композиция двух морфизмов, обладающих свойством $\mathscr{P}$, тоже обладает им;

(c) $\mathscr{P}$ стабильно относительно расширения базы.

Показать тогда, что

(d) произведение морфизмов, обладающих свойством $\mathscr{P}$, тоже им обладает;

(e) если f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ — два морфизма, такие, что $g \circ f$ обладает свойством $\mathscr{P}$ и g отделим, то f тоже обладает свойством $\mathscr{P}$;

(f) если морфизм f: $X \to Y$ обладает свойством $\mathscr{P}$, то f_{red}: $X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ тоже обладает им. [*Указание.* Для доказательства (e) рассмотреть морфизм вложения графика Γ_f: $X \to X \times_Z Y$ и заметить, что он получается из диагонального морфизма Δ: $Y \to Y \times_Z Y$ расширением базы.]

4.9. Показать, что композиция проективных морфизмов является проективным морфизмом. [*Указание.* Использовать вложение Сегре, определенное в упр. 2.14 гл. I, показав предварительно, что оно является замкнутым вложением $\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \to \mathbf{P}^{rs+r+s}$.] Вывести отсюда, что проективные морфизмы обладают свойствами (a) — (f) из упр. 4.8.

*4.10. *Лемма Чжоу.* Она утверждает, что собственные морфизмы очень близки к проективным. А именно, пусть X — собственная схема над нётеровой схемой S. Тогда существует схема X' и морфизм g: $X' \to X$, такие, что схема X' проективна над S и существует открытое плотное подмножество $U \subset X$, такое, что g индуцирует изоморфизм $g^{-1}(U)$ в U. Доказать это утверждение, разбив его на несколько шагов.

(a) Свести доказательство к случаю, когда X неприводимо.

(b) Показать, что схема X может быть покрыта конечным числом открытых подмножеств U_i, $i = 1, \ldots, n$, каждое из которых квазипроективно над S.

(c) Пусть $U_i \to P_i$ — открытое вложение U_i в схему P_i, проективную над S, и $U = \bigcap U_i$. Рассмотрим отображение

$$f\colon U \to X \times_S P_1 \times_S P_2 \times_S \ldots \times_S P_n,$$

полученное из отображений $U \to X$ и $U \to P_i$. Пусть X' — замкнутый схемный образ этого отображения, т. е. $\overline{f(U)}$ со структурой замкнутой подсхемы образа морфизма (упр. 3.11(d)), g: $X' \to X$ — проекция на первый множитель и h: $X' \to P = P_1 \times_S \ldots \times_S P_n$ — проекция на произведение остальных множителей. Показать, что h — замкнутое вложение. Отсюда будет следовать, что X' проективно над S.

(d) Показать, что $g^{-1}(U) \to U$ — изоморфизм. Это завершит доказательство.

4.11. Если использовать некоторые более глубокие результаты из коммутативной алгебры и ограничиться нётеровыми схемами, то можно дать валюативные критерии отделимости и собственности морфизмов, пользуясь только кольцами *дискретного* нормирования.

(a) Пусть $\mathcal{O}$ — нётерово локальное целостное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем частных K и L — конечно порожденное расширение поля K. Тогда существует кольцо дискретного нормирования R поля L, доминирующее над кольцом $\mathcal{O}$. Доказать это, проделав следующие шаги. Переходя от $\mathcal{O}$ к кольцу многочленов над $\mathcal{O}$, свести доказательство к случаю, когда L — *конечное* расширение поля K. Показать затем, что для подходящим способом выбранных образующих $x_1, \ldots, x_n$ идеала $\mathfrak{m}$ идеал $\mathfrak{a} = (x_1)$ в $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1]$ не единичный. Далее, пусть $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал, ассоциированный с $\mathfrak{a}$, и $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ — локализация кольца $\mathcal{O}'$ в $\mathfrak{p}$. Тогда $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ — нётерово целостное локальное кольцо размерности 1, доминирующее над $\mathcal{O}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{O}}'_{\mathfrak{p}}$ — целое замыкание $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ в L. Пользуясь теоремой Крулля — Акицуки (см. Нагата [7, стр. 115]), показать, что $\widetilde{\mathcal{O}}'_{\mathfrak{p}}$ — нётерово кольцо размерности 1. Наконец, взять за R локализацию $\widetilde{\mathcal{O}}'_{\mathfrak{p}}$ относительно одного из его максимальных идеалов.

(b) Пусть f: $X \to Y$ — морфизм конечного типа нётеровых схем. Показать, что f тогда и только тогда отделим (соответственно собствен), когда критерий 4.3 (соответственно 4.7) выполняется для всех колец *дискретного* нормирования.

4.12. *Примеры колец нормирований.* Пусть k — некоторое алгебраически замкнутое поле.

(a) Показать, что если K — функциональное поле размерности 1 над k (§ 6 гл. I), то всякое кольцо нормирования поля K/k (кроме самого K) является кольцом дискретного нормирования. Следовательно, множество всех таких колец нормирования — это в точности абстрактная неособая кривая C_K, определенная в § 6 гл. I.

(b) Показать, что если K/k — функциональное поле размерности 2, то для него существуют несколько различных классов нормирований. А именно, пусть X — неособая полная поверхность с полем функций K. Тогда

(1) если Y — неприводимая кривая на X с общей точкой x_1, то локальное кольцо $R = \mathcal{O}_{x_1,X}$ является кольцом дискретного нормирования поля K/k с центром в (незамкнутой) точке x_1 на X;

(2) если f: $X' \to X$ — бирациональный морфизм и Y' — неприводимая кривая в X', образ которой в X состоит из единственной замкнутой точки x_0, то локальное кольцо R общей точки кривой Y' в X' является кольцом дискретного нормирования поля K/k с центром в замкнутой точке x_0 на X;

(3) Пусть $x_0 \in X$ — замкнутая точка, f_1: $X_1 \to X$ — раздутие точки x_0 (§ 4 гл. I) и $E_1 = f_1^{-1}(x_0)$ — исключительная кривая. Выберем замкнутую точку x_1 на E_1, и пусть f_2: $X_2 \to X_1$ — раздутие точки x_1 и т. д. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность многообразий X_i с замкнутыми точками $x_i \in X_i$, такими, что для каждого i локальное кольцо $\mathcal{O}_{x_{i+1},X_{i+1}}$ доминирует над локальным кольцом $\mathcal{O}_{x_i,X_i}$. Положим $R_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_{x_i,X_i}$. Тогда R_0 — локальное кольцо, стало быть, над ним доминирует некоторое кольцо нормирования R поля K/k (см. 6.1A гл. I). Показать, что R — кольцо недискретного нормирования поля K/k и что оно имеет центр x_0 на X.

Замечание. Ниже (упр. 5.6 гл. V) мы увидим, что в действительности уже само R_0 в (3) является кольцом нормирования, так что $R = R_0$. Более того, всякое кольцо нормирования поля K/k (кроме самого K) принадлежит к одному из указанных трех классов.

§ 5. Пучки модулей

При определении схем и морфизмов схем мы не использовали никакие другие пучки, кроме структурных. Оказывается, что техника схем становится гораздо более гибкой, если ввести в рассмотрение пучки модулей на схемах. Среди них наиболее важными и употребительными являются квазикогерентные и когерентные пучки, играющие роль модулей (соответственно конечно порожденных модулей) над кольцами.

В этом параграфе будут рассмотрены основные свойства квазикогерентных и когерентных пучков. В частности, будет введен «скручивающий пучок» Серра $\mathcal{O}(1)$ на проективной схеме, который играет важную роль во всей теории.

Начнем с определения пучков модулей на окольцованном пространстве.

Определения. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство (см. § 2). *Пучком $\mathcal{O}_X$-модулей* (или просто *$\mathcal{O}_X$-модулем*) называется пучок $\mathcal{F}$ на X, такой, что для каждого открытого множества $U \subset X$ группа $\mathcal{F}(U)$ является $\mathcal{O}_X(U)$-модулем и для каждого вложения открытых множеств $V \subset U$ гомоморфизм ограничения согласован со структурой модулей при помощи гомоморфизма колец $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$. *Морфизмом* пучков $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется морфизм пучков, такой, что для каждого открытого множества $U \subset X$ отображение $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ является гомоморфизмом $\mathcal{O}_X(U)$-модулей.

Отметим, что ядро, коядро и образ морфизма $\mathcal{O}_X$-модулей являются $\mathcal{O}_X$-модулями. Если $\mathcal{F}'$ — подпучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{F}$, то факторпучок $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ также является $\mathcal{O}_X$-модулем. Любые прямые суммы, прямые произведения, прямые и обратные пределы $\mathcal{O}_X$-модулей являются $\mathcal{O}_X$-модулями. Для любых двух $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ обозначим через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (или $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, или просто $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, если это не приведет к путанице) группу морфизмов из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$. Последовательность $\mathcal{O}_X$-модулей и морфизмов называется *точной*, если она точна как последовательность пучков абелевых групп.

Пусть U — открытое подмножество в X и $\mathcal{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль. Тогда $\mathcal{F}|_U$ является $\mathcal{O}_X|_U$-модулем. Для любых двух пучков $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ предпучок

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

является пучком, который называется *пучком гомоморфизмов* (упр. 1.15) и обозначается через $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Это тоже $\mathcal{O}_X$-модуль.

Определим *тензорное произведение* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ двух $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ как пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Вместо $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ мы будем часто писать просто $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, подразумевая, что тензорное произведение берется над $\mathcal{O}_X$.

$\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ называется *свободным*, если он изоморфен прямой сумме нескольких экземпляров пучка $\mathcal{O}_X$, и *локально свободным*, если существует такое покрытие X открытыми множествами U, что $\mathcal{F}|_U$ — свободный $\mathcal{O}_X|_U$-модуль. *Рангом* локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на открытом подмножестве U, где $\mathcal{F}|_U$ свободен, называется число (конечное или бесконечное) экземпляров пучков $\mathcal{O}_X|_U$ в прямой сумме для $\mathcal{F}|_U$. Если X связно, то ранг локально свободного пучка постоянен. Локально свободный пучок ранга 1 называется также *обратимым пучком*.

Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{J}$, являющийся подпучком пучка $\mathcal{O}_X$, называется *пучком идеалов* на X. Иначе говоря, $\mathcal{J}(U)$ для каждого открытого множества U является идеалом в $\mathcal{O}_X(U)$.

Пусть $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ — морфизм окольцованных пространств (см. § 2) и $\mathcal{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль, тогда $f_*\mathcal{F}$ является $f_*\mathcal{O}_X$-модулем. Но так как существует морфизм пучков колец $f^\#\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ на Y, то $f_*\mathcal{F}$ снабжается естественной структурой $\mathcal{O}_Y$-модуля. Будем называть его *прямым образом* пучка $\mathcal{F}$ относительно морфизма f.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ — пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей. Тогда пучок $f^{-1}\mathcal{G}$ является $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-модулем. В силу свойства сопряженности функтора f^{-1} (упр. 1.18) определен морфизм пучков колец $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ на X. Определим $f^*\mathcal{G}$ как тензорное произведение

$$f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Тогда пучок $f^*\mathcal{G}$ является, очевидно, $\mathcal{O}_X$-модулем. Будем называть его *обратным образом* пучка $\mathcal{G}$ относительно морфизма f.

Как и в упр. 1.18, можно показать, что f_* и f^* являются сопряженными функторами для категорий $\mathcal{O}_X$-модулей и $\mathcal{O}_Y$-модулей. Точнее, для всяких $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{F}$ и $\mathcal{O}_Y$-модуля $\mathcal{G}$ существует естественный изоморфизм групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Переформулируем теперь общее понятие пучка модулей на окольцованном пространстве для случая схем. Начнем с определения пучка модулей $\widetilde{M}$ на $\operatorname{Spec} A$, ассоциированного с модулем M над кольцом A.

Определение. Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Определим пучок $\widetilde{M}$ на $\operatorname{Spec} A$, *ассоциированный* с M, следующим образом. Для каждого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ обозначим через $M_\mathfrak{p}$ локализацию M в $\mathfrak{p}$ и для всякого открытого множества $U \subset \subset \operatorname{Spec} A$ определим группу $\tilde{M}(U)$ как множество отображений s: $U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p}$, таких, что $s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$ для каждого $\mathfrak{p} \in U$ и что s локально представляется в виде дроби m/f, где $m \in M$ и $f \in A$. Точнее, потребуем, чтобы для каждого $\mathfrak{p} \in U$ существовала окрестность $V \ni \mathfrak{p}$ в U и элементы $m \in M$ и $f \in A$, такие, что $s(\mathfrak{q}) = m/f$ в $M_\mathfrak{q}$ и $f \notin \mathfrak{q}$ для каждого $\mathfrak{q} \in V$. Теперь с помощью обычных отображений ограничения набор групп $\tilde{M}(U)$ превратим в пучок $\tilde{M}$.

Предложение 5.1. *Пусть A — кольцо, M — некоторый A-модуль и $\tilde{M}$ — пучок на $X = \operatorname{Spec} A$, ассоциированный с M. Тогда*

(a) *$\tilde{M}$ является $\mathcal{O}_X$-модулем;*

(b) *для каждого $\mathfrak{p} \in X$ слой $(\tilde{M})_\mathfrak{p}$ пучка $\tilde{M}$ в точке $\mathfrak{p}$ изоморфен локализации $M_\mathfrak{p}$ модуля M в $\mathfrak{p}$;*

(c) *для всякого $f \in A$ A_f-модуль $\tilde{M}(D(f))$ изоморфен локализации M_f модуля M относительно f;*

(d) *в частности, $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$.*

Доказательство. Тот факт, что $\tilde{M}$ является пучком $\mathcal{O}_X$-модулей, непосредственно следует из определения структурного пучка $\mathcal{O}_X$ (см. § 2). Доказательства утверждений (b), (c) и (d) совершенно аналогичны доказательствам утверждений (a), (b) и (c) предложения 2.2 с заменой A на M в подходящих местах.

Предложение 5.2. *Пусть A — кольцо, $X = \operatorname{Spec} A$, $A \to B$ — гомоморфизм колец и f: $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ — соответствующий морфизм спектров. Тогда*

(a) *соответствие $M \to \tilde{M}$ является точным вполне строгим функтором из категории A-модулей в категорию $\mathcal{O}_X$-модулей;*

(b) *для любых двух A-модулей M и N имеет место изоморфизм $(M \otimes_A N)^\sim \simeq \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$;*

(c) *для любого семейства A-модулей $\{M_i\}$ имеет место изоморфизм $(\bigoplus M_i)^\sim \simeq \bigoplus \tilde{M}_i$;*

(d) *для любого B-модуля N имеет место изоморфизм $f_*(\tilde{N}) \simeq ({}_AN)^\sim$, где ${}_AN$ означает N, рассматриваемый как A-модуль;*

(e) *для каждого A-модуля M имеет место изоморфизм $f^*(\tilde{M}) \simeq (M \otimes_A B)^\sim$.*

Доказательство. Соответствие $M \to \tilde{M}$, очевидно, функториально. Этот функтор точен, так как функтор локализации точен и точность пучков можно проверять послойно (см. упр. 1.2 и 5.1(b)). Он перестановочен с прямыми суммами и тензорными произведениями, потому что они коммутируют с локализацией. Понятие вполне строгости означает, что для всяких A-модулей M и N имеет место равенство $\operatorname{Hom}_A(M, N) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$. Функтор $\sim$ задает естественное отображение $\operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$. Обратное отображение получается применением функтора Γ с использованием утверждения 5.1(a). Очевидно, что эти два отображения обратны друг другу и являются, следовательно, изоморфизмами. Последние утверждения о f_* и f^* следуют непосредственно из определений. Доказательство закончено.

Пучки вида $\tilde{M}$ на аффинных схемах являются моделями для построения квазикогерентных пучков. Квазикогерентный пучок на схеме X — это пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, который локально имеет вид $\tilde{M}$. В нескольких следующих леммах и предложениях мы установим локальность свойства квазикогерентности и докажем некоторые факты о квазикогерентных и когерентных пучках.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — схема. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ на X называется *квазикогерентным*, если существует такое покрытие X открытыми аффинными подмножествами $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, что для каждого i существует A_i-модуль M_i, такой, что $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$. Квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ называется *когерентным*, если каждый из M_i является конечно порожденным A_i-*модулем*.

Хотя определения квазикогерентных и когерентных пучков были даны для произвольных схем, мы, как правило, не будем рассматривать когерентные пучки на ненётеровых схемах. Это связано с тем, что понятие когерентности на ненётеровых схемах не обладает достаточно хорошими функториальными свойствами.

Пример 5.2.1. Структурный пучок $\mathcal{O}_X$ на любой схеме X является квазикогерентным (и даже когерентным).

Пример 5.2.2. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, $Y \subset X$ — ее замкнутая подсхема, определенная идеалом $\mathfrak{a} \subset A$ (см. 3.2.3), и $i: Y \to X$ — соответствующий морфизм вложения. Тогда пучок $i_*\mathcal{O}_Y$ является квазикогерентным (и даже когерентным) пучком $\mathcal{O}_X$-модулей. В действительности он изоморфен пучку $(A/\mathfrak{a})^\sim$.

Пример 5.2.3. Пусть U — открытая подсхема схемы X с морфизмом вложения $j: U \to X$. Тогда пучок $j_!(\mathcal{O}_U)$, полученный продолжением нулем вне U пучка $\mathcal{O}_U$ (упр. 1.19), является $\mathcal{O}_X$-модулем, но в общем случае не является квазикогерентным. Действительно, предположим, что схема X неприводима, и пусть

$V = \operatorname{Spec} A$ — произвольное аффинное открытое подмножество в X, не содержащееся в U. Тогда $j_!(\mathcal{O}_U)|_V$ не имеет глобальных сечений над V, однако не является нулевым пучком. Следовательно, он не может быть пучком вида $\widetilde{M}$ ни для какого M.

Пример 5.2.4. Пусть Y — замкнутая подсхема схемы X. Тогда пучок $\mathcal{O}_X|_Y$ в общем случае не будет квазикогерентным на Y. В самом деле, в общем случае он не является даже $\mathcal{O}_Y$-модулем.

Пример 5.2.5. Пусть X — целая нётерова схема и $\mathcal{K}$ — постоянный пучок рациональных функций на X (упр. 3.6). Тогда пучок $\mathcal{K}$ является квазикогерентным пучком $\mathcal{O}_X$-модулей, но не будет когерентным, кроме единственного случая, когда X — точка.

Лемма 5.3. *Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, $f \in A$, $D(f) \subset X$ — соответствующее открытое множество и $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Тогда*

(a) *если $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ — глобальное сечение $\mathcal{F}$, ограничение которого на $D(f)$ равно 0, то $f^n s = 0$ для некоторого $n > 0$;*

(b) *если $t \in \mathcal{F}(D(f))$ — сечение $\mathcal{F}$ над открытым множеством $D(f)$, то $f^n t$ для некоторого $n > 0$ продолжается до глобального сечения $\mathcal{F}$ над X.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что поскольку пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен, то X можно покрыть открытыми аффинными подмножествами вида $V = \operatorname{Spec} B$, такими, что $\mathcal{F}|_V \simeq \widetilde{M}$ для некоторого B-модуля M. Далее, поскольку открытые множества вида $D(g)$ образуют базис открытых множеств топологии на X (см. § 2), то V можно покрыть открытыми множествами $D(g)$ для различных $g \in A$. Согласно 2.3, вложению $D(g) \subset V$ соответствует гомоморфизм колец $B \to A_g$. Следовательно, согласно 5.2, $\mathcal{F}|_{D(g)} \simeq (M \otimes_B A_g)^{\sim}$. Таким образом, мы показали, что если $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X, то X можно покрыть открытыми множествами вида $D(g_i)$, где $\mathcal{F}|_{D(g_i)}$ для каждого i изоморфен $\widetilde{M}_i$ для некоторого модуля M_i над кольцом A_{g_i}. Так как пространство X квазикомпактно, то можно выбрать конечное число таких открытых множеств.

(a) Пусть теперь задано сечение $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, такое, что $s|_{D(f)} = 0$. Ограничение s на $D(g_i)$ определяет сечение s_i пучка $\mathcal{F}$ над $D(g_i)$, т. е., согласно 5.1(d), некоторый элемент $s_i \in M_i$. Так как $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$, то в силу 5.1 (c) $\mathcal{F}|_{D(fg_i)} = (M_i)_f^{\sim}$. Стало быть, образ s_i в $(\widetilde{M}_i)_f$ равен 0, а это по определению локализации означает, что $f^n s_i = 0$ для некоторого n. Это n может зависеть от i, но поскольку индексов i конечное число, то можно взять n достаточно большим, так чтобы оно годилось одновременно для всех i. Таким образом, поскольку $D(g_i)$ покрывают X, мы получаем $f^n s = 0$.

(b) Пусть $t \in \mathcal{F}(D(f))$ — заданное сечение. Ограничиваем его для каждого i, получая элемент t из $\mathcal{F}(D(fg_i)) = (M_i)_f$. Тогда по определению локализации для некоторого $n > 0$ существует элемент $t_i \in M_i = \mathcal{F}(D(g_i))$, который ограничивается в элемент $f^n t$ на $D(fg_i)$. Это n может зависеть от i, но опять можно взять его достаточно большим, так чтобы оно годилось для всех i одновременно. На пересечении $D(g_i) \cap D(g_j) = D(g_i g_j)$ мы получаем два сечения t_i и t_j пучка $\mathcal{F}$, которые совпадают на $D(fg_ig_j)$, поскольку оба равны $f^n t$. Следовательно, по утверждению (a) существует целое $m > 0$, такое, что $f^m(t_i - t_j) = 0$ на $D(g_i g_j)$. Число m зависит, вообще говоря, от i и j, но, снова в силу конечности множества индексов, его можно взять достаточно большим, чтобы оно было пригодным для всех i и j. Осталось склеить локальные сечения $f^m t_i$ пучка $\mathcal{F}$ на $D(g_i)$ и получить одно глобальное сечение s пучка $\mathcal{F}$, ограничение которого на $D(f)$ равно $f^{n+m} t$. Доказательство закончено.

Предложение 5.4. *Пусть X — схема и $\mathcal{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль. $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ тогда и только тогда является квазикогерентным, когда для каждого открытого аффинного подмножества $U = \operatorname{Spec} A$ в X существует A-модуль M, такой, что $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$. Если схема X нётерова, то $\mathcal{F}$ тогда и только тогда является когерентным, когда выполняется то же условие, только с конечно порожденным A-модулем M.*

Доказательство. Пусть пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен на X и $U = \operatorname{Spec} A$ — открытое аффинное подмножество. Как и в доказательстве леммы 5.3, существует базис топологии на X, состоящий из открытых аффинных подмножеств, ограничения пучка $\mathcal{F}$ на которые ассоциированы с модулями. Отсюда следует, что пучок $\mathcal{F}|_U$ тоже квазикогерентен, так что все сводится к случаю, когда схема X аффинна, скажем $X = \operatorname{Spec} A$. Положим $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Тогда в любом случае существует естественное отображение $\alpha: \widetilde{M} \to \mathcal{F}$ (упр. 5.3). Так как пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен, то X можно покрыть открытыми множествами $D(g_i)$ с $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \simeq \widetilde{M}_i$ для некоторого A_{g_i}-модуля M_i. Применяя предыдущую лемму к открытому множеству $D(g_i)$, получаем, что $\mathcal{F}(D(g_i)) \simeq M_{g_i}$, так что $M_i = M_{g_i}$. Из этого следует, что отображение α, ограниченное на $D(g_i)$, является изоморфизмом. Так как $D(g_i)$ покрывают X, то α — изоморфизм.

Предположим теперь, что схема X нётерова и пучок $\mathcal{F}$ когерентен. Тогда, используя предыдущие обозначения, мы имеем дополнительную информацию, что каждый M_{g_i} является конечно порожденным A_{g_i}-модулем, и хотим доказать, что модуль M тоже конечно порожден. Поскольку кольца A и A_{g_i} нётеровы, то модули M_{g_i} тоже нётеровы, и нам надо доказать нётеровость M. Для этого нужно воспользоваться доказательством предложения 3.2 с заменой A на M в подходящих местах.

Следствие 5.5. *Пусть A — некоторое кольцо и $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда функтор $M \mapsto \widetilde{M}$ осуществляет эквивалентность категорий: категории A-модулей и категории квазикогерентных $\mathcal{O}_X$-модулей. Обратным к нему является функтор $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$. В случае когда кольцо A нётерово, тот же функтор осуществляет эквивалентность категорий: категории конечно порожденных A-модулей и категории когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей.*

Доказательство. Нужно показать только, что $\mathcal{F}$ квазикогерентен на X тогда и только тогда, когда он имеет вид $\widetilde{M}$, и что в этом случае $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Это непосредственно следует из 5.4.

Предложение 5.6. *Пусть X — аффинная схема, $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — точная последовательность $\mathcal{O}_X$-модулей, и предположим, что пучок $\mathcal{F}'$ квазикогерентен. Тогда последовательность*

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}'') \to 0$$

точна.

Доказательство. Мы уже знаем (упр. 1.8), что функтор Γ точен слева, так что достаточно показать сюръективность последнего отображения. Пусть $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ — глобальное сечение пучка $\mathcal{F}''$. Так как отображение пучков $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ сюръективно, то для любой точки $x \in X$ существует открытая окрестность $D(f) \ni x$, такая, что $s|_{D(f)}$ поднимается до сечения $t \in \mathcal{F}(D(f))$ (упр. 1.3). Покажем, что для некоторого $n > 0$ сечение $f^n s$ поднимается до глобального сечения пучка $\mathcal{F}$. Для этого покроем X конечным числом открытых множеств $D(g_i)$, таких, что для каждого i сечение $s|_{D(g_i)}$ поднимается до сечения $t_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$. На $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$ мы получаем два сечения $t, t_i \in \mathcal{F}(D(fg_i))$, являющиеся поднятиями s. Следовательно, $t - t_i \in \mathcal{F}'(D(fg_i))$. Так как пучок $\mathcal{F}'$ квазикогерентен, то, согласно 5.3(b), $f^n(t - t_i)$ для некоторого $n > 0$ продолжается до сечения $u_i \in \mathcal{F}'(D(g_i))$. Как обычно, выберем одно n для всех i. Положим $t_i' = f^n t_i + u_i$. Тогда t_i' является поднятием сечения $f^n s$ на $D(g_i)$ и, более того, t_i' и $f^n t$ совпадают на $D(fg_i)$. Теперь на $D(g_i g_j)$ мы имеем два сечения t_i' и t_j' пучка $\mathcal{F}$, являющиеся поднятиями сечения $f^n s$, так что $t_i' - t_j' \in \mathcal{F}'(D(g_i g_j))$. Более того, t_i' и t_j' совпадают на $D(fg_i g_j)$ и, значит, согласно 5.3а, $f^m(t_i' - t_j') = 0$ для некоторого $m > 0$, которое можно выбрать не зависящим от i и j. Стало быть, сечения $f^m t_i'$ пучка $\mathcal{F}$ можно склеить в глобальное сечение t'' пучка $\mathcal{F}$ над X, которое является поднятием сечения $f^{n+m}s$. Это доказывает утверждение о поднятии сечения $f^n s$.

Теперь покроем X конечным числом открытых множеств $D(f_i)$, $i = 1, \ldots, r$, так, чтобы $s|_{D(f_i)}$ поднималось до сечения пучка $\mathcal{F}$ над $D(f_i)$ для каждого i. Тогда по доказанному выше утверждению можно найти такое целое n (одно для всех i) и такие глобальные сечения $t_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, что t_i являются поднятиями $f_i^n s$. Открытые множества $D(f_i)$ покрывают X, поэтому идеал $(f_1^n, \ldots, f_r^n)$ является единичным идеалом в A и, следовательно, можно записать $1 = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i^n$, где $a_i \in A$. Положим $t = \sum_{i=1}^{r} a_i t_i$, тогда t является глобальным сечением пучка $\mathcal{F}$, образ которого в $\Gamma(X, \mathcal{F}'')$ равен $\sum_{i=1}^{r} a_i f_i^n s = s$. Это завершает доказательство предложения.

Замечание 5.6.1. Когда будет развита техника когомологий пучков, мы увидим, что это предложение является непосредственным следствием того факта, что $H^1(X, \mathcal{F}') = 0$ для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}'$ на аффинной схеме X (см. 3.5 гл. III).

Предложение 5.7. *Пусть X — некоторая схема. Тогда ядро, коядро и образ любого морфизма квазикогерентных пучков являются квазикогерентными пучками. Любые расширения квазикогерентных пучков являются квазикогерентными пучками. Если схема X нётерова, то аналогичное утверждение справедливо и для когерентных пучков.*

Доказательство. Вопрос локальный, так что можно предполагать схему X аффинной. Утверждения о ядрах, коядрах и образах следуют из того факта, что функтор $M \mapsto \widetilde{M}$ является точным и вполне строгим функтором из категории A-модулей в категорию квазикогерентных пучков (см. 5.2(a) и 5.5). Остается показать только, что расширение квазикогерентного пучка является квазикогерентным пучком. Пусть $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — точная последовательность $\mathcal{O}_X$-модулей, причем $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ квазикогерентны. Согласно 5.6, соответствующая последовательность глобальных сечений над X, скажем $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, точна. Применяя функтор $\widetilde{\ }$, получаем точную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \widetilde{M}' & \to & \widetilde{M} & \to & \widetilde{M}'' & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}'' & \to & 0 \end{array}$$

Здесь две крайние вертикальные стрелки обозначают изоморфизмы, поскольку пучки $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ квазикогерентны. Тогда по лемме о пяти гомоморфизмах средняя стрелка также обозначает изоморфизм, что доказывает квазикогерентность пучка $\mathscr{F}$.

В нётеровом случае, если пучки $\mathscr{F}'$ и $\mathscr{F}''$ когерентны, то модули M' и M'' конечно порождены, так что модуль M тоже конечно порожден и, следовательно, пучок $\mathscr{F}$ когерентен.

Предложение 5.8. *Пусть* $f: X \to Y$ *— морфизм схем. Тогда*

(a) *если* $\mathscr{G}$ *— квазикогерентный пучок* $\mathcal{O}_Y$*-модулей, то* $f^*\mathscr{G}$ *— квазикогерентный пучок* $\mathcal{O}_X$*-модулей;*

(b) *если схемы* X *и* Y *нётеровы и пучок* $\mathscr{G}$ *когерентен, то пучок* $f^*\mathscr{G}$ *тоже когерентен;*

(c) *предположим, что либо схема* X *нётерова, либо морфизм* f *квазикомпактен* (упр. 3.2) *и отделим. Тогда если* $\mathscr{F}$ *— квазикогерентный пучок* $\mathcal{O}_X$*-модулей, то* $f_*\mathscr{F}$ *— квазикогерентный пучок* $\mathcal{O}_Y$*-модулей.*

Доказательство. (a) Вопрос локальный как по X, так и по Y, так что можно предполагать схемы X и Y аффинными. В этом случае результат следует из 5.5 и 5.2(e).

(b) В нётеровом случае точно такое же доказательство годится для когерентных пучков.

(c) Здесь вопрос локален только по Y, так что схему Y можно считать аффинной. Тогда схема X квазикомпактна (при каждом из предположений), так что ее можно покрыть конечным числом открытых аффинных подмножеств U_i. В отделимом случае пересечения $U_i \cap U_j$ снова являются аффинными схемами (упр. 4.3). Будем обозначать их через U_{ij}. В нётеровом случае $U_i \cap U_j$ по крайней мере квазикомпактны, так что покрываются конечным числом открытых подмножеств U_{ijk}. Для любого открытого подмножества V в Y задание сечения s пучка $\mathscr{F}$ над $f^{-1}V$ равносильно заданию набора сечений s_i пучка $\mathscr{F}$ над $(f^{-1}V) \cap U_i$, ограничения которых на открытые подмножества $f^{-1}(V) \cap U_{ijk}$ совпадают. Это следует из одного из свойств пучка (§ 1). Следовательно, существует такая точная последовательность пучков на Y:

$$0 \to f_*\mathscr{F} \to \bigoplus_i f_*(\mathscr{F}|_{U_i}) \to \bigoplus_{i, j, k} f_*(\mathscr{F}|_{U_{ijk}}),$$

где для простоты также обозначены через f индуцированные морфизмы $U_i \to Y$ и $U_{ijk} \to Y$. Согласно 5.2(d), пучки $f_*(\mathscr{F}|_{U_i})$ и $f_*(\mathscr{F}|_{U_{ijk}})$ квазикогерентны. Следовательно, по 5.7 и пучок $f_*\mathscr{F}$ тоже квазикогерентен.

Предостережение 5.8.1. Если схемы X и Y нётеровы, то, вообще говоря, *неверно*, что f_* от когерентного пучка является когерентным пучком (упр. 5.5). Однако это верно, если f — конечный морфизм (упр. 5.5), проективный морфизм (см. 5.20 и 8.8 гл. III) или, наиболее общим образом, собственный морфизм, см. Гротендик [EGA III, 3.2.1].

В качестве первых применений новых понятий мы рассмотрим пучки идеалов замкнутых подсхем.

Определение. Пусть Y — замкнутая подсхема схемы X и $i: Y \to X$ — соответствующий морфизм вложения. *Пучком идеалов* $\mathscr{I}_Y$ подсхемы Y называется ядро морфизма $i^\#: \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$.

Предложение 5.9. *Пусть* X *— схема. Для любой замкнутой подсхемы* Y *в* X *ее пучок идеалов* $\mathscr{I}_Y$ *является квазикогерентным пучком идеалов на* X. *Если схема* X *нётерова, то он когерентен. Обратно, любой квазикогерентный пучок идеалов на* X *является пучком идеалов однозначно определенной замкнутой подсхемы в* X.

Доказательство. Если Y — замкнутая подсхема в X, то морфизм вложения $i: Y \to X$ квазикомпактен (очевидно) и отделим (4.6), так что, согласно 5.8, пучок $i_*\mathcal{O}_Y$ квазикогерентен на X. Поэтому пучок $\mathscr{I}_Y$ как ядро морфизма квазикогерентных пучков также квазикогерентен. Пусть схема X нётерова, тогда для любого открытого аффинного подмножества $U = \operatorname{Spec} A$ в X кольцо A нётерово, так что идеал $I = \Gamma(U, \mathscr{I}_Y|_U)$ конечно порожден. Следовательно, пучок $\mathscr{I}_Y$ когерентен.

Обратно, пусть $\mathscr{Y}$ — квазикогерентный пучок идеалов на схеме X, и пусть Y — носитель факторпучка $\mathcal{O}_X/\mathscr{Y}$. Тогда Y является подпространством в X. Покажем, что $(Y, \mathcal{O}_X/\mathscr{Y})$ — однозначно определенная замкнутая подсхема в X с пучком идеалов $\mathscr{Y}$. Единственность очевидна, так что надо проверить только, что $(Y, \mathcal{O}_X/\mathscr{Y})$ является замкнутой подсхемой. Вопрос локален, поэтому можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема. Так как пучок $\mathscr{Y}$ квазикогерентен, то $\mathscr{Y} = \tilde{\mathfrak{a}}$ для некоторого идеала $\mathfrak{a} \subset A$. В таком случае $(Y, \mathcal{O}_X/\mathscr{Y})$ — это в точности замкнутая подсхема в X, определенная идеалом $\mathfrak{a}$ (см. 3.2.3).

Следствие 5.10. *Пусть* $X = \operatorname{Spec} A$ *— аффинная схема. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между идеалами* $\mathfrak{a}$ *в* A *и замкнутыми подсхемами* Y *в* X: $\mathfrak{a} \mapsto$ (*образ* $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ *в* X) (см. 3.2.3). *В частности, каждая замкнутая подсхема аффинной схемы аффинна.*

Доказательство. В силу 5.5 квазикогерентные пучки идеалов на X находятся во взаимно однозначном соответствии с идеалами кольца A.

Наша следующая задача — изучить квазикогерентные пучки на Proj градуированного кольца. Как и в случае Spec, существует связь между модулями над кольцом и пучками на пространстве, но уже более сложная.

Определение. Пусть S — градуированное кольцо и M — градуированный S-модуль (см. § 7, гл. I). Определим *пучок* $\widetilde{M}$ *на*

Proj S, *ассоциированный с модулем* M, следующим образом. Для каждой точки $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ пусть $M_{(\mathfrak{p})}$ обозначает группу элементов степени 0 в локализации $T^{-1}M$, где T — мультипликативная система однородных элементов в S, не содержащихся в $\mathfrak{p}$ (см. определение Proj в § 2). Для любого открытого подмножества $U \subset \operatorname{Proj} S$ определим $\widetilde{M}(U)$ как множество отображений s из U в $\coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$, которые локально являются дробями. Это означает, что для каждого $\mathfrak{p} \in U$ существует окрестность V точки $\mathfrak{p}$ в U и однородные элементы $m \in M$ и $f \in S$ одной и той же степени, такие, что для каждого $\mathfrak{q} \in V$ имеем $f \notin \mathfrak{q}$ и $s(\mathfrak{q}) = m/f$ в $M_{(\mathfrak{q})}$. Тогда $\widetilde{M}$ является пучком с очевидными отображениями ограничения.

Предложение 5.11. *Пусть S — градуированное кольцо и M — градуированный S-модуль. Пусть $X = \operatorname{Proj} S$. Тогда*

(a) *для любого $\mathfrak{p} \in X$ слой $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}}$ равен $M_{(\mathfrak{p})}$;*

(b) *для любого однородного элемента $f \in S_+$ имеет место изоморфизм $\widetilde{M}|_{D_+(f)} \simeq (M_{(f)})^{\sim}$, который осуществляется с помощью изоморфизма $D_+(f)$ с* Spec $S_{(f)}$ (см. 2.5(b)), *где $M_{(f)}$ обозначает группу элементов степени 0 в локализации M_f;*

(c) *$\widetilde{M}$ является квазикогерентным $\mathcal{O}_X$-модулем, и если кольцо S нётерово и модуль M конечно порожден, то пучок $\widetilde{M}$ когерентен.*

Доказательство. Для доказательства (a) и (b) надо повторить доказательство предложения 2.5 с M вместо S. Утверждение (c) следует из (b).

Определение. Пусть S — градуированное кольцо и $X = \operatorname{Proj} S$. Для любого $n \in \mathbf{Z}$ определим пучок $\mathcal{O}_X(n)$ как $S(n)^{\sim}$. Пучок $\mathcal{O}_X(1)$ будем называть *скручивающим пучком* Серра. Для любого пучка $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ через $\mathcal{F}(n)$ будем обозначать *скрученный пучок* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$.

Предложение 5.12. *Пусть S — градуированное кольцо и $X = \operatorname{Proj} S$. Предположим, что S порождается компонентой S_1 как S_0-алгебра. Тогда*

(a) *пучок $\mathcal{O}_X(n)$ является обратимым пучком на X;*

(b) *для любого градуированного S-модуля M имеем $\widetilde{M}(n) \simeq (M(n))^{\sim}$, в частности $\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(m) \simeq \mathcal{O}_X(n+m)$;*

(c) *пусть T — другое градуированное кольцо, порожденное T_1 как T_0-алгебра, $\varphi\colon S \to T$ — однородный гомоморфизм, сохраняющий степени, $U \subset Y = \operatorname{Proj} T$ — открытое подмножество и $f\colon U \to X$ — морфизм, определяемый гомоморфизмом φ* (упр. 2.14); *тогда $f^*(\mathcal{O}_X(n)) \simeq \mathcal{O}_Y(n)|_U$ и $f_+(\mathcal{O}_Y(n)|_U) \simeq (f_*\mathcal{O}_U)(n)$.*

Доказательство. (a) Напомним, что обратимым называется локально свободный пучок ранга 1. Пусть $f \in S_1$. Рассмотрим ограничение $\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)}$. По предыдущему предложению этот пучок изоморфен $S(n)_{(f)}^{\sim}$ на Spec $S_{(f)}$. Заметим, что он свободен и имеет ранг 1. Действительно, $S(n)_{(f)}$ является свободным $S_{(f)}$-модулем ранга 1: $S_{(f)}$ — группа элементов степени 0 в S_f, а $S(n)_{(f)}$ — группа элементов степени n в S_f; их изоморфизм осуществляется с помощью соответствия $s \mapsto f^n s$. Последнее имеет смысл для любого $n \in \mathbf{Z}$, поскольку f обратим в S_f. Теперь так как S порождается S_1 как S_0-алгебра, то X покрывается открытыми множествами $D_+(f)$ для $f \in S_1$. Это доказывает, что *пучок $\mathcal{O}(n)$ обратим.*

(b) Это утверждение вытекает из того факта, что $(M \otimes_S N)^{\sim} \simeq \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$ для любых двух градуированных S-модулей M и N, если S порождается S_1. В самом деле, для любого $f \in S_1$ имеет место изоморфизм $(M \otimes_S N)_{(f)} \simeq M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$.

(c) Справедливы даже более общие утверждения: для любого градуированного S-модуля M имеет место изоморфизм $f^*(\widetilde{M}) \simeq (M \otimes_S T)^{\sim}|_U$ и для любого градуированного T-модуля N — изоморфизм $f_*(\widetilde{N}|_U) \simeq ({}_S N)^{\sim}$. Кроме того, пучок $\widetilde{T}$ на X в точности равен $f_*(\mathcal{O}_U)$. Доказательства этих утверждений получаются непосредственной проверкой (ср. 5.2 для аффинного случая).

Операция скручивания позволяет определить градуированный S-модуль, ассоциированный с любым пучком модулей на $X = \operatorname{Proj} S$.

Определение. Пусть S — градуированное кольцо, $X = \operatorname{Proj} S$ и $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Определим *градуированный S-модуль, ассоциированный с* $\mathcal{F}$, как группу $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$. Структура градуированного S-модуля на $\Gamma_*(\mathcal{F})$ задается следующим образом. Каждый элемент $s \in S_d$ естественным образом определяет сечение $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$. Тогда для любого $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ можно определить произведение $s \cdot t$ в $\Gamma(X, \mathcal{F}(n+d))$ как тензорное произведение сечений $s \otimes t$ с учетом изоморфизма $\mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{O}_X(d) \simeq \mathcal{F}(n+d)$.

Предложение 5.13. *Пусть A — кольцо, $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, $r \geqslant 1$, и $X = \operatorname{Proj} S$ (это не что иное, как проективное r-мерное пространство над A). Тогда $\Gamma^*(\mathcal{O}_X) \simeq S$.*

Доказательство. Покроем X открытыми множествами $D_+(x_i)$. Тогда задание сечения $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ равносильно заданию набора сечений $t_i \in \mathcal{O}_X(n)(D_+(x_i))$ для всех i, которые совпадают на пересечениях $D_+(x_i x_j)$. Элемент t_i есть не что иное, как однородный элемент степени n в локализации S_{x_i}, и его ограничение на $D_+(x_ix_j)$ — это его образ в $S_{x_ix_j}$. Объединяя по всем $n \in \mathbf{Z}$, видим, что $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ можно отождествить с наборами из $r+1$ элементов $(t_0, \ldots, t_r)$, где $t_i \in S_{x_i}$ и для любых i, j образы t_i и t_j в $S_{x_ix_j}$ совпадают.

Так как x_i не является делителем нуля в S, то отображения локализации $S \to S_{x_i}$ и $S_{x_i} \to S_{x_ix_j}$ инъективны и все эти кольца являются подкольцами кольца $S' = S_{x_0 \ldots x_r}$. Следовательно, $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ есть пересечение $\bigcap S_{x_i}$ в S'. Далее, любой однородный элемент из S' можно однозначно записать в виде $x_0^{i_0} \ldots x_r^{i_r} f(x_0, \ldots, x_r)$, где $i_j \in \mathbf{Z}$ и f — однородный многочлен, не делящийся ни на какое x_i. Такой элемент принадлежит S_{x_i} тогда и только тогда, когда $i_j \geqslant 0$ для $j \neq i$. Отсюда следует, что пересечение всех S_{x_i} (в действительности пересечение любых двух из них) в точности совпадает с S.

Предостережение 5.13.1. Если S — градуированное кольцо, отличное от кольца многочленов, то, вообще говоря, не верно, что $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$ (упр. 5.14).

Лемма 5.14. *Пусть X — некоторая схема, $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X, $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, X_f — открытое множество точек $x \in X$, где $f_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x$, и пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X.*

(a) *Предположим, что схема X квазикомпактна, и пусть $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ — глобальное сечение пучка $\mathcal{F}$, ограничение которого на X_f равно 0. Тогда для некоторого $n > 0$ имеем $f^n s = 0$, где $f^n s$ рассматривается как глобальное сечение пучка $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.*

(b) *Предположим, что, кроме того, X обладает конечным покрытием, состоящим из открытых аффинных подмножеств U_i, таких, что пучок $\mathcal{L}|_{U_i}$ свободен для каждого i, и таких, что $U_i \cap U_j$ квазикомпактно для любых i, j, и пусть $t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ — некоторое сечение. Тогда для некоторого $n > 0$ сечение $f^n t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ продолжается до глобального сечения пучка $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.*

Доказательство. Эта лемма является непосредственным обобщением леммы 5.3 с добавлением подкрутки с помощью обратимого пучка $\mathcal{L}$. Она обобщает также упр. 2.16.

Для того чтобы доказать (a), мы прежде всего покроем X конечным числом (что возможно в силу квазикомпактности X) открытых аффинных подмножеств $U = \operatorname{Spec} A$, таких, что ограничение $\mathcal{L}|_U$ является свободным пучком. Пусть $\psi\colon \mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U$ — изоморфизм тривиализации. Так как пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен, то, согласно 5.4, существует A-модуль M, такой, что $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$. Сечению $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ соответствует элемент $s \in M$, а сечению $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ отвечает элемент $g = \psi(f) \in A$. Ясно, что $X_f \cap U = D(g)$. Поскольку $s|_{X_f} = 0$, то $g^n s = 0$ в M для некоторого $n > 0$ точно так, как в доказательстве леммы 5.3. Используя изоморфизм

$$\mathrm{id} \times \psi^{\otimes n}\colon \quad \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n|_U \simeq \mathcal{F}|_U,$$

заключаем, что $f^n s = 0$ в $\Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)$. Это утверждение, очевидно, не зависит от ψ. Проделав это для каждого элемента покрытия и выбрав n достаточно большим, чтобы оно годилось для всех элементов покрытия сразу, получим, что $f^n s = 0$ на X.

Для того чтобы доказать (b), мы поступим так же, как и в доказательстве леммы 5.3, согласовывая элементы подкрутки на $\mathcal{L}$, как и выше. Предположение о квазикомпактности $U_i \cap U_j$ используется здесь для того, чтобы можно было ссылаться на утверждение (a).

Замечание 5.14.1. Предположения на X, сделанные в (a) и (b) выше, выполняются в случае, когда схема X нётерова (тогда каждое открытое множество квазикомпактно) или когда она квазикомпактна и отделима (тогда пересечение двух открытых аффинных множеств аффинно и, следовательно, квазикомпактно).

Предложение 5.15. *Пусть S — градуированное кольцо, которое конечно порождено множеством S_1 как S_0-алгебра, $X = \operatorname{Proj} S$ и $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Тогда существует естественный изоморфизм $\beta\colon \Gamma_*(\mathcal{F})^\sim \to \mathcal{F}$.*

Доказательство. Определим сначала морфизм β для любого $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{F}$. Пусть $f \in S_1$. Так как пучок $\Gamma_*(\mathcal{F})^\sim$ в любом случае квазикогерентен, то для того, чтобы определить β, достаточно указать образы сечений $\Gamma_*(\mathcal{F})^\sim$ над $D_+(f)$ (см. упр. 5.3). Каждое такое сечение представляется в виде дроби m/f^d, где $m \in \Gamma(X, \mathcal{F}(d))$ для некоторого $d \geqslant 0$. Элемент f^{-d} можно считать сечением пучка $\mathcal{O}_X(-d)$, определенным над $D_+(f)$. Рассматривая m/f^d как тензорное произведение сечений $m \otimes f^{-d}$, получаем сечение пучка $\mathcal{F}$ над $D_+(f)$. Это определяет гомоморфизм β.

Пусть теперь пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен. Для того чтобы показать, что β — изоморфизм, нам надо отождествить модуль $\Gamma_*(\mathcal{F})_{(f)}$ с сечениями $\mathcal{F}$ над $D_+(f)$. Применяя лемму 5.14, рассмотрим f как глобальное сечение обратимого пучка $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. Так как по предположению S конечно порождено множеством S_1 как S_0-алгебра, то можно найти конечное число элементов $f_0, \ldots, f_r \in S_1$, таких, что X покрывается открытыми аффинными подмножествами $D_+(f_i)$. Пересечения $D_+(f_i) \cap D_+(f_j)$ тоже аффинны и $\mathcal{L}|_{D_+(f_i)}$ свободен для каждого i, так что выполнены все условия леммы 5.14. Из этой леммы мы получаем, что $\mathcal{F}(D_+(f_i)) \simeq \Gamma_*(\mathcal{F})_{(f_i)}$, а это и есть то, что нам нужно.

Следствие 5.16. *Пусть A — кольцо. Тогда*

(a) *если Y — замкнутая подсхема в $\mathbf{P}^r_A$, то существует одно-*

родный идеал $I \subset S = A[x_0, \ldots, x_r]$, *такой, что замкнутая подсхема* Y *определяется идеалом* I (упр. 3.12);

(b) *схема* Y *над* Spec A *проективна тогда и только тогда, когда она изоморфна* Proj S *для некоторого градуированного кольца* S *с* $S_0 = A$, *конечно порожденного множеством* S_1 *как* S_0*-алгебра.*

Доказательство. (а) Пусть $\mathcal{J}_Y$ — пучок идеалов подсхемы Y на $X = \mathbf{P}^r_A$. Так как $\mathcal{J}_Y$ является подпучком пучка $\mathcal{O}_X$, функтор скручивания точен и функтор глобальных сечений Γ точен слева, то $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ является подмодулем модуля $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$. Но, согласно 5.13, $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$. Следовательно, $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$—однородный идеал в S, который мы обозначим через I. По упр. 3.12 I определяет замкнутую подсхему в X, пучком идеалов которой является $\tilde{I}$. Поскольку пучок $\mathcal{J}_Y$ квазикогерентен (см. 5.9), то, согласно 5.15, $\mathcal{J}_Y \simeq \tilde{I}$ и, следовательно, Y — подсхема, определенная идеалом I. В действительности $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ является наибольшим идеалом в S, определяющим Y (см. упр. 5.10).

(b) Напомним, что по определению схема Y проективна над Spec A, если она изоморфна замкнутой подсхеме схемы $\mathbf{P}^r_A$ для некоторого r (§ 4). В силу утверждения (а) всякая такая подсхема имеет вид Proj S/I, причем I можно выбрать содержащимся в $S_+ = \bigoplus\limits_{d>0} S_d$ (упр. 3.12), так что $(S/I)_0 = A$. Обратно, любое такое градуированное кольцо S является факторкольцом кольца многочленов, стало быть, схема Proj S проективна.

Определение. Для любой схемы Y определим *скручивающий пучок* $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}^r_Y$ как $g^*\mathcal{O}(1)$, где $g: \mathbf{P}^r_Y \to \mathbf{P}^r_{\mathbf{Z}}$ — естественное отображение (напомним, что $\mathbf{P}^r_Y$ определяется как $\mathbf{P}^r_{\mathbf{Z}} \times_{\mathbf{Z}} Y$).

Отметим, что в случае $Y = \operatorname{Spec} A$ это тот же самый пучок $\mathcal{O}(1)$, что уже был определен на $\mathbf{P}^r_A = \operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_r]$ (см. 5.12(c)).

Определение. Пусть X — произвольная схема над Y. Обратимый пучок $\mathcal{L}$ на X называется *очень обильным* относительно Y, если существует вложение $i: X \to \mathbf{P}^r_Y$ для некоторого r, такое, что $i^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{L}$. Морфизм $i: X \to Z$ мы называем *вложением* (immersion), если он задает изоморфизм X на некоторую открытую подсхему замкнутой подсхемы в Z. (Настоящее определение очень обильного пучка слегка отличается от определения Гротендика [EGA II, 4.4.2].)

Замечание 5.16.1. Пусть Y — нётерова схема. Схема X над Y проективна тогда и только тогда, когда она собственна и на X существует очень обильный относительно Y пучок. Действительно, если схема X проективна над Y, то она собственна, согласно 4.9. Кроме того, существует замкнутое вложение $i: X \to \mathbf{P}^r_Y$ для некоторого r, так что $i^*\mathcal{O}(1)$ является очень обильным обратимым

пучком на X. Обратно, если схема X собственна над Y и $\mathcal{L}$ — очень обильный обратимый пучок на X относительно Y, то $\mathcal{L} \simeq i^*\mathcal{O}(1)$ для некоторого вложения $i: X \to \mathbf{P}^r_Y$. Но, согласно упр. 4.4, образ X замкнут в $\mathbf{P}^r_Y$, так что i — замкнутое вложение и, следовательно, X проективно над Y.

Отметим, однако, что существует много различных неизоморфных очень обильных обратимых пучков на проективной схеме X над Y. Каждый такой пучок $\mathcal{L}$ зависит от вложения X в $\mathbf{P}^r_Y$ (упр. 5.12). Если $Y = \operatorname{Spec} A$ и $Y = \operatorname{Proj} S$, где S — градуированное кольцо, как в 5.16(b), то пучок $\mathcal{O}(1)$ на X, определенный выше, является очень обильным на X. Однако существует много неизоморфных градуированных колец, имеющих один и тот же Proj и тот же самый очень обильный пучок $\mathcal{O}(1)$ (упр. 2.14).

Мы завершим этот параграф некоторыми конкретными результатами о пучках на проективной схеме над нётеровым кольцом.

Определение. Пусть X — схема и $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Будем говорить, что пучок $\mathcal{F}$ *порождается глобальными сечениями*, если существует такое семейство глобальных сечений $\{s_i\}_{i \in I}$, $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, что для каждой точки $x \in X$ образы сечений s_i в слое $\mathcal{F}_x$ порождают этот слой как $\mathcal{O}_x$-модуль.

Отметим, что $\mathcal{F}$ порождается глобальными сечениями тогда и только тогда, когда он может быть представлен как факторпучок свободного пучка. Действительно, порождающие сечения $\{s_i\}_{i \in I}$ определяют сюръективный морфизм пучков $\bigoplus\limits_{i \in I} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$, обратное столь же очевидно.

Пример 5.16.2. Любой квазикогерентный пучок на аффинной схеме порождается глобальными сечениями. Действительно, если $\mathcal{F} = \tilde{M}$ на Spec A, то любое множество образующих A-модуля M определяет множество глобальных сечений, порождающих $\mathcal{F}$.

Пример 5.16.3. Пусть $X = \operatorname{Proj} S$, где S — градуированное кольцо, которое порождается S_1 как S_0-алгебра. Тогда элементы из S_1 определяют глобальные сечения пучка $\mathcal{O}_X(1)$, его порождающие.

Теорема 5.17 (Серр). *Пусть* X *— проективная схема над нётеровым кольцом* A, $\mathcal{O}(1)$ *— очень обильный обратимый пучок на* X *и* $\mathcal{F}$ *— когерентный* $\mathcal{O}_X$*-модуль. Тогда существует целое число* n_0, *такое, что для всех* $n \geqslant n_0$ *пучок* $\mathcal{F}(n)$ *порождается конечным числом глобальных сечений.*

Доказательство. Пусть $i: X \to \mathbf{P}^r_A$ — замкнутое вложение X в проективное пространство над A, такое, что $i^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_X(1)$. Тогда пучок $i_*\mathcal{F}$ когерентен на $\mathbf{P}^r_A$ (упр. 5.5), $i_*(\mathcal{F}(n)) = (i_*\mathcal{F})(n)$; согласно 5.12 или упр. 5.12, и $\mathcal{F}(n)$ порождается глобальными сечениями тогда и только тогда, когда $i_* (\mathcal{F}(n))$ порождается глобальными сечениями (на самом деле у них одни и те же глобальные сечения), так что все сводится к случаю $X = \mathbf{P}^r_A = \operatorname{Proj} A [x_0, \ldots, x_r]$.

В этом случае покроем X открытыми множествами $D_+(x_i)$, $i = 0, \ldots, r$. Так как пучок $\mathcal{F}$ когерентен, то для каждого i существует конечно порожденный модуль M_i над $B_i = A [x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]$, такой, что $\mathcal{F}|_{D_+(x_i)} \simeq \widetilde{M}_i$. Для каждого i выберем конечное число элементов $s_{ij} \in M_i$, которые порождают модуль M_i. Согласно 5.14, существует целое число n, такое, что $x_i^n s_{ij}$ продолжается до глобального сечения t_{ij} пучка $\mathcal{F}(n)$. Как обычно, n можно взять единое для всех i, j. Пучку $\mathcal{F}(n)$ на $D_+(x_i)$ соответствует B_i-модуль M'_i, и отображение x_i^n: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(n)$ индуцирует изоморфизм M_i на M'_i. Значит, сечения $x_i^n s_{ij}$ порождают M'_i и, следовательно, глобальные сечения $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ порождают пучок $\mathcal{F}(n)$ всюду.

Следствие 5.18. *Пусть X — проективная схема над нётеровым кольцом A. Тогда любой когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X может быть представлен как факторпучок пучка $\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — конечная прямая сумма подкрученных структурных пучков $\mathcal{O}(n_i)$ для некоторых целых чисел n_i.*

Доказательство. Пусть пучок $\mathcal{F}(n)$ порождается конечным числом глобальных сечений. Тогда мы имеем сюръективное отображение $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}(n) \to 0$. Умножая тензорно на $\mathcal{O}_X(-n)$, получаем сюръекцию $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X(-n) \to \mathcal{F} \to 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.19. *Пусть k — поле, A — конечно порожденная k-алгебра, X — проективная схема над A и $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль. Тогда $\Gamma(X, \mathcal{F})$ является конечно порожденным A-модулем. В частности, если $A = k$, то $\Gamma(X, \mathcal{F})$ — конечномерное векторное пространство над k.*

Доказательство. Пусть $X = \operatorname{Proj} S$, где S — градуированное кольцо с $S_0 = A$, которое конечно порождается S_1 как S_0-алгебра (5.16(b)), и M — градуированный S-модуль $\Gamma_*(\mathcal{F})$. Тогда по 5.15 имеем $\widetilde{M} \simeq \mathcal{F}$. С другой стороны, согласно 5.17, для достаточно больших n пучок $\mathcal{F}(n)$ порождается конечным числом глобальных сечений из $\Gamma(X, \mathcal{F}(n))$. Пусть M' — подмодуль модуля M, порожденный этими сечениями. Тогда M' — конечно порожденный S-модуль. Более того, вложение $M' \hookrightarrow M$ индуцирует вложение пучков $\widetilde{M}' \hookrightarrow \widetilde{M} = \mathcal{F}$. Подкручивая на n, получаем вложение $\widetilde{M}'(n) \hookrightarrow \mathcal{F}(n)$, являющееся на самом деле изоморфизмом, так как $\mathcal{F}(n)$ порождается глобальными сечениями из M'. Подкручивая на $-n$, находим, что $\widetilde{M}' \simeq \mathcal{F}$. Таким образом, $\mathcal{F}$ — пучок, ассоциированный с конечно порожденным S-модулем. Стало быть, задача сводится к тому, чтобы показать, что если M — конечно порожденный S-модуль, то $\Gamma(X, \widetilde{M})$ — конечно порожденный A-модуль.

Согласно 7.4 гл. I, существует конечная фильтрация

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \ldots \subset M^r = M$$

модуля M градуированными подмодулями, где для каждого i имеет место изоморфизм $M^i/M^{i-1} \simeq (S/\mathfrak{p}_i)(n_i)$ для некоторого однородного простого идеала $\mathfrak{p}_i \subset S$ и некоторого целого числа n_i. Эта фильтрация индуцирует фильтрацию пучка $\widetilde{M}$, порождающую короткие точные последовательности

$$0 \to \widetilde{M}^{i-1} \to \widetilde{M}^i \to \widetilde{M}^i/\widetilde{M}^{i-1} \to 0,$$

которые приводят к точным слева последовательностям

$$0 \to \Gamma(X, \widetilde{M}^{i-1}) \to \Gamma(X, \widetilde{M}^i) \to \Gamma(X, \widetilde{M}^i/\widetilde{M}^{i-1}).$$

Таким образом, для доказательства конечной порожденности модуля $\Gamma(X, \widetilde{M})$ над A достаточно показать, что модуль $\Gamma(X, (S/\mathfrak{p})^{\sim}(n))$ конечно порожден для каждого $\mathfrak{p}$ и каждого n. Таким образом, задача сводится к следующему частному случаю: пусть S — градуированное целостное кольцо, конечно порожденное множеством S_1 как S_0-алгебра, где $S_0 = A$ — конечно порожденная целостная алгебра над k, тогда $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ — конечно порожденный A-модуль для любого $n \in \mathbf{Z}$.

Пусть $x_0, \ldots, x_r \in S_1$ — образующие S_1 как A-модуля. Так как S — целостное кольцо, то умножение на x_0 дает вложение $S(n) \to S(n+1)$ для любого n, а значит, вложение $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n+1))$. Поэтому достаточно доказать, что модуль $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ конечно порожден для всех достаточно больших n, скажем $n \geqslant 0$.

Пусть $S' = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$. Тогда S' — кольцо, содержащее S и содержащееся в пересечении $\bigcap S_{x_i}$ локализаций по элементам $x_0, \ldots, x_r$. (Здесь мы используем те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 5.13.) Покажем, что S' цело над S.

Пусть $s' \in S'$ — однородный элемент степени $d \geqslant 0$. Поскольку $s' \in S_{x_i}$ для каждого i, то можно найти такое целое n, что $x_i^n s' \in S$. Выберем единое n для всех i. Так как x_i порождают S_1, то одночлены степени m от x_i порождают S_m для любого m. Поэтому для достаточно большого n можно считать, что $ys' \in S$ для всех $y \in S_n$. В действительности поскольку степень s' неотрицательна, то можно утверждать, что $ys' \in S_{\geqslant n}$ для любого $y \in S_{\geqslant n} = \bigoplus_{d \geqslant n} S_d$. Теперь по индукции $y(s')^q \in S_{\geqslant n}$ для любых $q \geqslant 1$ и $y \in S_{\geqslant n}$. Возьмем, например, $y = x_0^n$. Тогда для каждого $q \geqslant 1$ имеем $(s')^q \in (1/x_0^n) S$. Это конечно порожденный S-подмодуль поля частных кольца S'. Из хорошо известного критерия целой зависимости (Атья — Макдональд [1, стр. 76]) следует, что элемент s' цел над S. Таким образом, S' содержится в целом замыкании кольца S в своем поле частных.

Чтобы завершить доказательство, воспользуемся теоремой о конечности целого замыкания 3.9A гл. I. Поскольку S — конечно порожденная k-алгебра, то S' будет конечно порожденным S-модулем. Отсюда следует, что для каждого n компонента S'_n является конечно порожденным S_0-модулем, а это и есть то, что мы хотели доказать. На самом деле из доказательства видно, что $S'_n = S_n$ для всех достаточно больших n (5.14 и упр. 5.9).

Замечание 5.19.1. Доказательство этой теоремы обобщает доказательство теоремы 3.4(a) гл. I. Позднее мы дадим другое доказательство с использованием теории когомологий (5.2.1 гл. III).

Замечание 5.19.2. Предположение, что A — конечно порожденная k-алгебра, использовалось только при ссылке на теорему 3.9A гл. I. Было бы достаточно предположить только, что A является «кольцом Нагаты» в смысле Мацумуры [2, стр. 231], см. также [loc cit, теорема 72, стр. 240].

Следствие 5.20. *Пусть $f\colon X \to Y$ — проективный морфизм схем конечного типа над полем k и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Тогда пучок $f_*\mathscr{F}$ когерентен на Y.*

Доказательство. Вопрос локален по Y, так что можно предполагать, что $Y = \operatorname{Spec} A$, где A — конечно порожденная k-алгебра. Тогда в любом случае пучок $f_*\mathscr{F}$ квазикогерентен (см. 5.8(c)), так что $f_*\mathscr{F} = \Gamma(Y, f_*\mathscr{F})^\sim = \Gamma(X, \mathscr{F})^\sim$. Но по теореме 5.19 $\Gamma(X, \mathscr{F})$ — конечно порожденный A-модуль, а значит, $f_*\mathscr{F}$ когерентен. Другое доказательство и обобщение см. в 8.8 гл. III.

Упражнения

5.1. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство и $\mathscr{E}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль конечного ранга. Определим двойственный к $\mathscr{E}$ $\mathcal{O}_X$-модуль $\check{\mathscr{E}}$ как пучок гомоморфизмов $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X)$.

(a) Показать, что $\check{\check{\mathscr{E}}} \simeq \mathscr{E}$.

(b) Показать, что $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \simeq \check{\mathscr{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}$ *для любого $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathscr{F}$.*

(c) Показать, что $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{G}))$ для любых $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$.

(d) (*Формула проекции.*) Пусть $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ — морфизм окольцованных пространств, $\mathscr{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль и $\mathscr{E}$ — локально свободный $\mathcal{O}_Y$-модуль конечного ранга. Показать, что тогда существует естественный изоморфизм $f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathscr{E}) \simeq f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{E}$.

5.2. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с полем частных K и $X = \operatorname{Spec} R$. Показать, что тогда

(a) задание $\mathcal{O}_X$-модуля эквивалентно заданию R-модуля M, векторного K-пространства L и гомоморфизма $\rho\colon M \otimes_R K \to L$;

(b) $\mathcal{O}_X$-модуль квазикогерентен тогда и только тогда, когда ρ — изоморфизм.

5.3. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема. Показать, что функторы $\sim$ и Γ сопряжены в следующем смысле: для любого A-модуля M и любого пучка $\mathcal{O}_X$-моду ей $\mathscr{F}$ существует естественный изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathscr{F})) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathscr{F}).$$

5.4. Показать, что пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathscr{F}$ на схеме X квазикогерентен тогда и только тогда, когда для каждой точки схемы X существует такая окрестность U, что $\mathscr{F}|_U$ изоморфен коядру некоторого морфизма свободных пучков на U. Если схема X нётерова, то $\mathscr{F}$ когерентен тогда и только тогда, когда он локально является коядром морфизма свободных пучков конечного ранга. (Первоначально эти свойства брались в качестве определений квазикогерентных и когерентных пучков.)

5.5. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем.

(a) Показать на примере, что если $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X, то пучок $f_*\mathscr{F}$ на Y может не быть когерентным, если даже X и Y — многообразия над полем k.

(b) Показать, что замкнутое вложение является конечным морфизмом (§ 3).

(c) Показать, что если f — конечный морфизм нётеровых схем и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X, то пучок $f_*\mathscr{F}$ когерентен на Y.

5.6. *Носитель.* Напомним, что понятия носителя сечения, носителя пучка и понятие подпучка с носителями были введены в упр. 1.14 и упр. 1.20.

(a) Пусть A — кольцо, M — некоторый A-модуль, $X = \operatorname{Spec} A$ и $\mathscr{F} = \widetilde{M}$. Показать, что $\operatorname{Supp} m = V(\operatorname{Ann} m)$ для любого $m \in M = \Gamma(X, \mathscr{F})$, где $\operatorname{Ann} m$ — аннулятор m, т. е. $\{a \in A \mid am = 0\}$.

(b) Предположим, что кольцо A нётерово и модуль M конечно порожден. Показать, что $\operatorname{Supp} \mathscr{F} = V(\operatorname{Ann} M)$.

(c) Показать, что носитель когерентного пучка на нётеровой схеме замкнут.

(d) Для любого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ определим подмодуль $\Gamma_\mathfrak{a}(M)$ модуля M, полагая $\Gamma_\mathfrak{a}(M) = \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n m = 0$ для некоторого $n > 0\}$. Предположим, что кольцо A нётерово и M — произвольный A-модуль. Показать, что $\Gamma_\mathfrak{a}(M)^\sim \simeq \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})$, где $Z = V(\mathfrak{a})$ и $\mathscr{F} = \widetilde{M}$. [*Указание.* Воспользоваться упр. 1.20 и предложением 5.8 для того, чтобы показать сначала, что пучок $\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})$ квазикогерентен. После этого установить изоморфизм $\Gamma_\mathfrak{a}(M) \simeq \Gamma_Z(M)$.]

(e) Пусть X — нётерова схема и Z — замкнутое подмножество в X. Показать, что если $\mathscr{F}$ — квазикогерентный (соответственно когерентный)

$\mathcal{O}_X$-модуль, то пучок $\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})$ тоже квазикогерентен (соответственно когерентен).

5.7. Пусть X — нётерова схема и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Показать, что

(a) если слой $\mathscr{F}_x$ является свободным $\mathcal{O}_x$-модулем для некоторой точки $x \in X$, то существует такая окрестность U точки x, что пучок $\mathscr{F}|_U$ свободен;

(b) пучок $\mathscr{F}$ тогда и только тогда локально свободен, когда его слои $\mathscr{F}_x$ являются свободными $\mathcal{O}_x$-модулями для всех $x \in X$;

(c) пучок $\mathscr{F}$ тогда и только тогда обратим (т. е. локально свободен ранга 1), когда существует такой когерентный пучок $\mathscr{G}$, что $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \simeq \mathcal{O}_X$. (Это оправдывает термин «обратимый»: пучок $\mathscr{F}$ является обратимым элементом в моноиде когерентных пучков относительно операции $\otimes$.)

5.8. Пусть опять X — нётерова схема и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \dim_{k(x)} \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x),$$

где $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ — поле вычетов точки x. Воспользоваться леммой Накаямы и доказать следующие результаты:

(a) Функция φ *полунепрерывна сверху*, т. е. для любого $n \in \mathbf{Z}$ множество $\{x \in X \mid \varphi(x) \geqslant n\}$ замкнуто в X.

(b) Если схема X связна и пучок $\mathscr{F}$ локально свободен, то функция φ постоянна.

(c) Обратно, если схема X приведена и функция φ постоянна, то пучок $\mathscr{F}$ локально свободен.

5.9. Пусть S — градуированное кольцо, порожденное S_1 как S_0-алгебра, M — градуированный S-модуль и $X = \operatorname{Proj} S$.

(a) Показать, что существует естественный гомоморфизм $\alpha\colon M \to \Gamma_*(\widetilde{M})$.

(b) Предположим, что $S_0 = A$ — конечно порожденная k-алгебра над некоторым полем k, S_1 — конечно порожденный A-модуль и M — конечно порожденный S-модуль. Показать, что отображение α является изоморфизмом для всех компонент достаточно большой степени, т. е. существует такое $d_0 \in \mathbf{Z}$, что $\alpha_d\colon M_d \to \Gamma(X, \widetilde{M}(d))$ является изоморфизмом для всех $d \geqslant d_0$. [*Указание*. Воспользоваться методами доказательства теоремы 5.19.]

(c) В этих же предположениях определим отношение эквивалентности $\approx$ на множестве градуированных S-модулей, полагая $M \approx M'$, если существует такое целое число d, что $M_{\geqslant d} \simeq M'_{\geqslant d}$, где $M_{\geqslant d} = \bigoplus_{n \geqslant d} M_n$. Градуированный S-модуль M будем называть *квазиконечно порожденным*, если он эквивалентен некоторому конечно порожденному S-модулю. Показать, что функторы $\sim$ и Γ_* задают эквивалентность категорий: категории квазиконечно порожденных градуированных S-модулей по модулю отношения эквивалентности $\approx$ и категории когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей.

5.10. Пусть A — кольцо, $S = A[x_0, \ldots, x_r]$ и $X = \operatorname{Proj} S$. В упр. 3.12 показано, что однородный идеал I в S определяет замкнутую подсхему в X и, как показано в 5.16, любая замкнутая подсхема в X получается таким способом.

(a) Для любого однородного идеала $I \subset S$ определим *насыщение* $\bar{I}$ идеала I как $\{s \in S \mid$ для каждого $i = 0, \ldots, r$ существует n, такое, что $x_i^n s \in I\}$. Идеал I будем называть *насыщенным*, если $\bar{I} = I$. Показать, что $\bar{I}$ — однородный идеал в S.

(b) Показать, что два однородных идеала I_1 и I_2 определяют одну и ту же замкнутую подсхему тогда и только тогда, когда они обладают одинаковым насыщением.

(c) Показать, что для любой замкнутой подсхемы Y в X идеал $\Gamma_*(\mathscr{J}_Y)$ является насыщенным. Следовательно, он является наибольшим идеалом, определяющим подсхему Y.

(d) Показать, что существует взаимно однозначное соответствие между насыщенными идеалами в S и замкнутыми подсхемами в X.

5.11. Пусть S и T—градуированные кольца с $S_0 = T_0 = A$. Определим *декартово произведение* $S \times_A T$ как градуированное кольцо $\bigoplus_{d \geqslant 0} S_d \otimes_A T_d$. Пусть $X = \operatorname{Proj} S$ и $Y = \operatorname{Proj} T$. Показать, что $\operatorname{Proj}(S \times_A T) \simeq X \times_A Y$ и что пучок $\mathcal{O}(1)$ на $\operatorname{Proj}(S \times_A T)$ изоморфен пучку $p_1^*\mathcal{O}_X(1) \otimes p_2^*\mathcal{O}_Y(1)$ на $X \times Y$.

Декартово произведение колец связано с вложением Сегре проективных пространств (упр. 2.14 гл. I) следующим образом. Пусть $x_0, \ldots, x_r$ — множество образующих S_1 над A, соответствующих проективному вложению $X \hookrightarrow \mathbf{P}^r_A$, и $y_0, \ldots, y_s$ — множество образующих T_1, соответствующих проективному вложению $Y \hookrightarrow \mathbf{P}^s_A$. Тогда $\{x_i \otimes y_j\}$ — множество образующих $(S \times_A T)_1$, и, следовательно, они определяют проективное вложение $\operatorname{Proj}(S \times_A T) \hookrightarrow \mathbf{P}^N_A$, где $N = rs + r + s$. Это есть не что иное, как вложение Сегре $X \times Y \hookrightarrow \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s$ в $\mathbf{P}^N$.

5.12. (a) Пусть X — схема над схемой Y и $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ — очень обильные обратимые пучки на X. Показать, что пучок $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ также очень обилен. [*Указание*. Воспользоваться вложением Сегре.]

(b) Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — морфизмы схем, $\mathscr{L}$ — очень обильный обратимый пучок на X относительно Y и $\mathscr{M}$ — очень обильный обратимый пучок на Y относительно Z. Показать, что тогда $\mathscr{L} \otimes f^*\mathscr{M}$ является очень обильным обратимым пучком на X относительно Z.

5.13. Пусть S — градуированное кольцо, порожденное S_1 как S_0-алгебра. Для любого целого числа $d > 0$ пусть $S^{(d)}$ обозначает градуированное кольцо $\bigoplus_{n \geqslant 0} S_n^{(d)}$, где $S_n^{(d)} = S_{nd}$. Пусть $X = \operatorname{Proj} S$. Показать, что $\operatorname{Proj} S^{(d)} \simeq X$ и что пучок $\mathcal{O}(1)$ на $\operatorname{Proj} S^{(d)}$ при этом изоморфизме соответствует пучку $\mathcal{O}_X(d)$.

Эта конструкция связана с d-кратным *вложением* (Веронезе) (см. упр. 2.12 гл. I) следующим образом. Пусть $x_0, \ldots, x_r$ — множество образующих S_1, соответствующих вложению $X \hookrightarrow \mathbf{P}^r_A$. Тогда одночлены степени d от x_i составляют множество образующих $S_1^{(d)} = S_d$. Это определяет проективное вложение схемы $\operatorname{Proj} S^{(d)}$, которое есть не что иное, как образ X при d-кратном вложении.

5.14. Пусть A — кольцо и X — замкнутая подсхема в $\mathbf{P}^r_A$. Определим *однородное координатное кольцо* $S(X)$ схемы X для заданного вложения как факторкольцо $A[x_0, \ldots, x_r]/I$, где I — идеал $\Gamma_*(\mathscr{J}_X)$, определенный в доказательстве леммы 5.14. (Разумеется, если A — поле и X — многообразие над этим полем, то это определение совпадает с определением, данным в § 2 гл. I!). Напомним, что схема X называется *нормальной*, если все ее локальные кольца целозамкнуты и целостны. Замкнутая подсхема $X \subset \mathbf{P}^r_A$ называется *проективно нормальной* в заданном вложении, если ее однородное координатное кольцо $S(X)$ целозамкнуто и не имеет делителей нуля (ср. упр. 3.18 гл. I). Предположим теперь, что A — конечно порожденная k-алгебра над некоторым полем k и что X — связная нормальная замкнутая подсхема в $\mathbf{P}^r_A$. Показать, что d-кратное вложение X для некоторого $d > 0$ является проективно нормальным, доказав следующие утверждения.

(a) Пусть S — однородное координатное кольцо X и $S' = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$. Показать, что S — целостное кольцо и что S' — его целое замыкание. [*Ука-

зание. Прежде всего показать, что схема X цела, затем рассмотреть S' как кольцо глобальных сечений пучка колец $\mathscr{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathcal{O}_X(n)$ на X и показать, что $\mathscr{S}$ — пучок целозамкнутых колец без делителей нуля.]

(b) Воспользоваться упр. 5.9 и показать, что $S_d = S'_d$ для всех достаточно больших d.

(c) Показать, что кольцо $S^{(d)}$ целозамкнуто для достаточно большого d, и вывести отсюда, что d-кратное вложение X проективно нормально.

(d) В качестве следствия утверждения (a) показать, что замкнутая подсхема $X \subset \mathbf{P}^r_A$ проективно нормальна тогда и только тогда, когда для каждого $n \geqslant 0$ естественное отображение $\Gamma(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ сюръективно.

5.15. *Продолжение когерентных пучков.* Следующую теорему мы докажем в несколько шагов: пусть X — нётерова схема, U — открытое подмножество в X и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на U. Тогда существует когерентный пучок $\mathscr{F}'$ на X, такой, что $\mathscr{F}'|_U \simeq \mathscr{F}$.

(a) На нётеровой аффинной схеме каждый квазикогерентный пучок является объединением своих когерентных подпучков. Мы называем пучок $\mathscr{F}$ *объединением* своих подпучков $\mathscr{F}_\alpha$, если для любого открытого подмножества U группа $\mathscr{F}(U)$ является объединением подгрупп $\mathscr{F}_\alpha(U)$.

(b) Пусть X — аффинная нётерова схема, U — открытое подмножество и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на U. Тогда существует когерентный пучок $\mathscr{F}'$ на X, такой, что $\mathscr{F}'|_U \simeq \mathscr{F}$. [*Указание.* Показать, что если $i: U \to X$ — отображение вложения, то пучок $i_*\mathscr{F}$ квазикогерентен, и воспользоваться п. (a).]

(c) Пусть X, U, $\mathscr{F}$ такие же, как и в п. (b), и предположим, кроме того, что на X задан квазикогерентный пучок $\mathscr{G}$, такой, что $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}|_U$. Показать, что можно найти когерентный подпучок $\mathscr{F}'$ пучка $\mathscr{G}$, такой, что $\mathscr{F}'|_U \simeq \mathscr{F}$. [*Указание.* Воспользоваться тем же методом с заменой пучка $i_*\mathscr{F}$ пучком $\rho^{-1}(i_*\mathscr{F})$, где ρ — естественное отображение $\mathscr{G} \to i_*(\mathscr{G}|_U)$.]

(d) Пусть теперь X — любая нётерова схема, U — открытое подмножество в X, $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на U и $\mathscr{G}$ — квазикогерентный пучок на X, такой, что $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}|_U$. Показать, что существует когерентный подпучок $\mathscr{F}' \subset \mathscr{G}$ на X, такой, что $\mathscr{F}'|_U \simeq \mathscr{F}$. Взяв $\mathscr{G} = i_*\mathscr{F}$, доказать утверждение, сформулированное вначале. [*Указание.* Покрыть X открытыми аффинными множествами и продолжить на одно из них, как это было сделано выше.]

(e) В качестве следствия показать, что на нётеровой схеме любой квазикогерентный пучок $\mathscr{F}$ является объединением своих когерентных подпучков. [*Указание.* Пусть s — сечение пучка $\mathscr{F}$ над открытым множеством U. Применить утверждение (d) к подпучку пучка $\mathscr{F}|_U$, порожденному сечением s.]

5.16. *Тензорные операции на пучках.* Прежде всего напомним различные тензорные операции на модулях. Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Обозначим через $T^n(M)$ тензорное произведение $M \otimes \ldots \otimes M$ модуля M на себя n раз, $n \geqslant 1$. При $n = 0$ положим $T^0(M) = A$. Тогда $T(M) = \bigoplus_{n\geqslant 0} T^n(M)$ — (некоммутативная) A-алгебра, называемая *тензорной алгеброй* модуля M. Определим *симметрическую алгебру* $S(M) = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^n(M)$ модуля M как факторалгебру алгебры $T(M)$ по двустороннему идеалу, порожденному всеми элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$, $x, y \in M$. Тогда алгебра $S(M)$ коммутативна и ее компоненты $S^n(M)$ степени n называются n-ми *симметрическими степенями* M. Будем обозначать через xy образ в $S(M)$ элемента $x \otimes y$ для любых $x, y \in M$. Отметим, в частности, что если M — свободный A-модуль ранга r, то $S(M) \simeq A[x_1, \ldots, x_r]$.

Определим *внешнюю алгебру* $\bigwedge(M) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \bigwedge^n(M)$ модуля M как факторалгебру алгебры $T(M)$ по двустороннему идеалу, порожденному элементами $x \otimes x$ для всех $x \in M$. Заметим, что этот идеал содержит все элементы вида

$x \otimes y + y \otimes x$, так что $\bigwedge(M)$ является *косокоммутативной* градуированной A-алгеброй. Это означает, что $u\wedge v = (-1)^{rs} v\wedge u$, где $u \in \bigwedge^r(M)$, $v \in \bigwedge^s(M)$ и $\wedge$ обозначает операцию умножения в алгебре $\bigwedge(M)$, так что $x\wedge y$ обозначает образ в $\bigwedge^2(M)$ элемента $x \otimes y \in T(M)$. Компонента $\bigwedge^n(M)$ называется *n-й внешней степенью модуля* M.

Пусть теперь $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство и $\mathscr{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Определим *тензорную*, *симметрическую* и *внешнюю* алгебры пучка $\mathscr{F}$ как пучки, ассоциированные с предпучками, сопоставляющими каждому открытому множеству U соответствующие алгебры, порожденные $\mathcal{O}_X(U)$-модулем $\mathscr{F}(U)$. Определенные таким образом объекты являются пучками $\mathcal{O}_X$-алгебр, а их однородные компоненты любой степени — пучками $\mathcal{O}_X$-модулей.

(a) Предположим, что $\mathscr{F}$ — локально свободный пучок ранга n. Показать, что тогда пучки $T^r(\mathscr{F})$, $S^r(\mathscr{F})$ и $\bigwedge^r(\mathscr{F})$ также локально свободны и имеют ранг rn, $\binom{n+r-1}{n-1}$ и $\binom{n}{r}$ соответственно.

(b) Пусть опять $\mathscr{F}$ — локально свободный пучок ранга n. Показать, что отображение внешнего умножения $\bigwedge^r\mathscr{F} \otimes \bigwedge^{n-r}\mathscr{F} \to \bigwedge^n\mathscr{F}$ является совершенным спариванием для любого r, т. е. индуцирует изоморфизм $\bigwedge^r\mathscr{F} \simeq (\bigwedge^{n-r}\mathscr{F})^\vee \otimes \bigwedge^n\mathscr{F}$. В частности, если ранг $\mathscr{F}$ равен 2, то $\mathscr{F} \simeq \check{\mathscr{F}} \otimes \bigwedge^2\mathscr{F}$.

(c) Пусть $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ — точная последовательность локально свободных пучков. Показать, что для любого r существует конечная фильтрация $\mathcal{O}_X$-модуля $S^r(\mathscr{F})$

$$S^r(\mathscr{F}) = F^0 \supset F^1 \supset \ldots \supset F^r \supset F^{r+1} = 0$$

с факторами

$$F^p/F^{p+1} \simeq S^p(\mathscr{F}') \otimes S^{r-p}(\mathscr{F}'')$$

для каждого p.

(d) Доказать утверждение, аналогичное утверждению (c), только для внешних степеней вместо симметрических. Показать, в частности, что если ранги пучков $\mathscr{F}'$, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}''$ равны соответственно n', n и n'', то существует изоморфизм $\bigwedge^n\mathscr{F} \simeq \bigwedge^{n'}\mathscr{F}' \otimes \bigwedge^{n''}\mathscr{F}''$.

(e) Пусть $f: X \to Y$ — морфизм окольцованных пространств и $\mathscr{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_Y$-модуль. Показать, что f^* коммутирует со всеми тензорными операциями на $\mathscr{F}$, т. е. $f^*(S^n(\mathscr{F})) = S^n(f^*\mathscr{F})$ и т. д.

5.17. *Аффинные морфизмы.* Морфизм схем $f: X \to Y$ называется *аффинным*, если существует такое открытое покрытие $\{V_i\}$ схемы Y, что $f^{-1}(V_i)$ аффинно для каждого i.

(a) Показать, что морфизм $f: X \to Y$ тогда и только тогда является аффинным, когда для *каждого* открытого аффинного множества $V \subset Y$ прообраз $f^{-1}(V)$ тоже является открытым аффинным множеством. [*Указание.* Свести к случаю, когда схема Y аффинна, и воспользоваться упр. 2.17.]

(b) Показать, что аффинный морфизм является квазикомпактным и отделимым и что любой конечный морфизм аффинен.

(c) Пусть Y — некоторая схема и $\mathscr{A}$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр (т. е. пучок колец, являющийся одновременно квазикогерентным пучком $\mathcal{O}_Y$-модулей). Показать, что существует единственная схема X и морфизм $f: X \to Y$, такой, что для каждого открытого аффинного подмножества $V \subset Y$ имеет место изоморфизм $f^{-1}(V) \simeq \operatorname{Spec} \mathscr{A}(V)$ и для каждого вложения открытых аффинных подмножеств $U \hookrightarrow V$ на Y морфизм $f^{-1}(U) \hookrightarrow f^{-1}(V)$ соответствует гомоморфизму ограничения $\mathscr{A}(V) \to \mathscr{A}(U)$. Схема X обозначается через $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$. [*Указание.* Построить X, склеивая схемы $\operatorname{Spec} \mathscr{A}(V)$ для открытых аффинных подмножеств $V \subset Y$.]

(d) Показать, что если $\mathcal{A}$ — квазикогерентная $\mathcal{O}_Y$-алгебра, то морфизм $f\colon X = \mathbf{Spec}\,\mathcal{A} \to Y$ аффинен и $\mathcal{A} \simeq f_*\mathcal{O}_X$. Обратно, если $f\colon X \to Y$ — аффинный морфизм, то $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ является квазикогерентным пучком $\mathcal{O}_Y$-алгебр и $X = \mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$.

(e) Пусть $f\colon X \to Y$ — аффинный морфизм и $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$. Показать, что f_* задает эквивалентность категорий: категории квазикогерентных $\mathcal{O}_X$-модулей и категории квазикогерентных $\mathcal{A}$-модулей (т. е. квазикогерентных $\mathcal{O}_Y$-модулей, обладающих структурой $\mathcal{A}$-модулей). [*Указание*. Для всякого квазикогерентного $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{M}$ построить квазикогерентный $\mathcal{O}_X$-модуль $\tilde{\mathcal{M}}$ и показать, что функторы f_* и $\tilde{}$ обратны друг другу.]

5.18. *Векторные расслоения.* Пусть Y — схема. (*Геометрическим*) *векторным расслоением* ранга n над Y называется схема X и морфизм $f\colon X \to Y$ со следующей дополнительной структурой: задано открытое покрытие $\{U_i\}$ схемы Y и изоморфизмы $\psi_i\colon f^{-1}(U_i) \to \mathbf{A}^n_{U_i}$, такие, что для любых i, j и любого открытого аффинного подмножества $V = \operatorname{Spec} A \subset U_i \cap U_j$ автоморфизм $\psi = \psi_j \circ \psi_i^{-1}$ пространства $\mathbf{A}^n_V = \operatorname{Spec} A[x_1, \ldots, x_n]$ задается линейным автоморфизмом θ алгебры $A[x_1, \ldots, x_n]$, т. е. $\theta(a) = a$ для любого $a \in A$ и $\theta(x_i) = \sum a_{ij}x_j$, где $a_{ij} \in A$.

Изоморфизмом $g\colon (X, f\{U_i\}, \{\psi_i\}) \to (X', f'\{U'_i\}, \{\psi'_i\})$ векторных расслоений ранга n называется изоморфизм схем $g\colon X \to X'$, такой, что $f = f' \circ g$ и X, f вместе с покрытием схемы Y, состоящим из всех открытых множеств U'_i и U_i, и изоморфизмами ψ_i и $\psi'_i \circ g$ тоже определяют структуру векторного расслоения на X.

(a) Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга n на схеме Y, $S(\mathcal{E})$ — симметрическая алгебра на $\mathcal{E}$ и $X = \mathbf{Spec}\,S(\mathcal{E})$ с морфизмом проекции $f\colon X \to Y$. Для каждого открытого аффинного подмножества $U \subset Y$, для которого ограничение $\mathcal{E}|_U$ свободно, выберем базис в $\mathcal{E}|_U$, и пусть $\psi\colon f^{-1}(U) \to \mathbf{A}^n_U$ — изоморфизм, получающийся при отождествлении $S(\mathcal{E}(U))$ с $\mathcal{O}(U)[x_1, \ldots, x_n]$. Показать, что тогда $(X, f, \{U\}, \{\psi\})$ — векторное расслоение ранга n над Y, которое (с точностью до изоморфизма) не зависит от выбора базиса в $\mathcal{E}|_U$. Будем называть его *геометрическим векторным расслоением, ассоциированным с* $\mathcal{E}$, и обозначать через $\mathbf{V}(\mathcal{E})$.

(b) *Сечением* произвольного морфизма $f\colon X \to Y$ над открытым множеством $U \subset Y$ называется такой морфизм $s\colon U \to X$, что $f \circ s = \mathrm{id}_U$. Очевидно, что сечения можно ограничивать на меньшие открытые множества и склеивать их, если они совпадают на пересечениях, так что предпучок $U \mapsto \{$множество сечений морфизма f над $U\}$ является на самом деле пучком множеств на Y, который мы будем обозначать через $\mathcal{S}(X/Y)$. Показать, что если $f\colon X \to Y$ — векторное расслоение ранга n, то пучок сечений $\mathcal{S}(X/Y)$ обладает естественной структурой $\mathcal{O}_Y$-модуля и является локально свободным $\mathcal{O}_Y$-модулем ранга n. [*Указание*. Достаточно определить структуру модуля локально, так что можно предполагать схему $Y = \operatorname{Spec} A$ аффинной и $X = \mathbf{A}^n_Y$. В таком случае сечение $s\colon Y \to X$ получается из гомоморфизма A-алгебр $\theta\colon A[x_1, \ldots, x_n] \to A$, который задается упорядоченным набором $\langle\theta(x_1), \ldots, \theta(x_n)\rangle$ из n элементов кольца A. Далее воспользоваться этим соответствием между сечениями s и упорядоченными наборами из n элементов кольца A для определения требуемой структуры модуля.]

(c) Пусть опять $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга n на Y, $X = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X/Y)$ — пучок сечений X над Y. Показать, что $\mathcal{S} \simeq \check{\mathcal{E}}$, причем этот изоморфизм осуществляется следующим образом. Сечение $s \in \Gamma(V, \check{\mathcal{E}})$ над произвольным открытым множеством V можно рассматривать как элемент s из $\operatorname{Hom}(\mathcal{E}|_V, \mathcal{O}_V)$, так что s определяет гомоморфизм $\mathcal{O}_V$-алгебр $S(\mathcal{E}|_V) \to \mathcal{O}_V$, который определяет в свою очередь морфизм спектров $V = \mathbf{Spec}\,\mathcal{O}_V \to \mathbf{Spec}\,S(\mathcal{E}|_V) = f^{-1}(V)$, т. е. некоторое сечение X/Y. Показать, что это соответствие задает изоморфизм $\check{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{S}$.

(d) Показать, что в итоге мы установили взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных локально свободных пучков ранга n на Y и классами изоморфных векторных расслоений ранга n над Y. По этой причине мы иногда будем использовать термины «локально свободный пучок» и «векторное расслоение» как равнозначные, если это не будет приводить к путанице.

§ 6. Дивизоры

Понятие дивизора доставляет важное средство для изучения внутренней геометрии многообразия или схемы. В этом параграфе вводятся понятия дивизоров, линейной эквивалентности дивизоров и группы классов дивизоров. Группа классов дивизоров — это некоторая абелева группа, которая является интересным и тонким инвариантом многообразия. В § 7 мы увидим, что дивизоры играют также важную роль при изучении отображений многообразия в проективное пространство.

Существует несколько различных способов определения дивизоров в зависимости от контекста. Мы начнем с дивизоров Вейля, которые очень просты для геометрического понимания, но определяются только для некоторых нётеровых целых схем. Для более общих схем существует понятие дивизоров Картье, которое также вводится в этом параграфе. После этого мы проясним связь между понятиями дивизоров Вейля, дивизоров Картье и обратимыми пучками.

Начнем с простого неформального примера. Пусть C — неособая проективная кривая на проективной плоскости $\mathbf{P}^2_k$ над алгебраически замкнутым полем k. Для каждой прямой $L \subset \mathbf{P}^2_k$ рассмотрим пересечение $L \cap C$, которое состоит из конечного множества точек на кривой C. Если степень кривой C равна d и точки считать с учетом их кратностей, то в пересечении $L \cap C$ окажется ровно d точек (упр. 5.4 гл. I). Запишем $L \cap C = \sum n_i P_i$, где $P_i \in C$ — различные точки, а n_i — их кратности, и назовем эту формальную сумму дивизором на C. При изменении прямой L мы получаем семейство дивизоров на C, параметризованное множеством всех прямых на $\mathbf{P}^2$, которое представляет собой двойственную проективную плоскость $(\mathbf{P}^2)^*$. Полученное таким способом множество дивизоров назовем линейной системой дивизоров на C. Отметим, что вложение C в $\mathbf{P}^2_k$ может быть восстановлено по этой линейной системе: для точки $P \in C$ рассмотрим множество всех дивизоров из этой линейной системы, содержащих P; эти дивизоры соответствуют прямым $L \in (\mathbf{P}^2)^*$, проходящим через P, которые однозначно определяют P как точку на $\mathbf{P}^2$. Эта связь между линейными системами и вложениями в проективное пространство будет детально изучаться в § 7.

Уже этот пример служит иллюстрацией важности понятия дивизоров. Для выяснения связи между различными дивизорами в линейной системе рассмотрим две прямые L и L' в $\mathbf{P}^2$, и пусть $D = L \cap C$ и $D' = L' \cap C$ — соответствующие дивизоры. Если L и L' задаются линейными однородными уравнениями $f = 0$ и $f' = 0$ на $\mathbf{P}^2$, то отношение f/f' является рациональной функцией на $\mathbf{P}^2$, ограничение которой на C определяет рациональную функцию, скажем g. По построению функция g имеет нули в точках из D, а полюсы — в точках из D' с подходящими кратностями, смысл которых будет уточнен ниже. Будем называть дивизоры D и D' линейно эквивалентными, и существование такой рациональной функции g, для которой точки из D являются нулями, а точки из D' — полюсами, может быть взято в качестве внутреннего определения линейной эквивалентности. Мы уточним эти понятия в последующем формальном изложении.

Дивизоры Вейля

Определение. Схема X называется *регулярной в коразмерности один* (или *неособой в коразмерности один*), если всякое ее локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ размерности один регулярно.

Наиболее важными примерами таких схем являются неособые многообразия над некоторым полем (§ 5 гл. I) и нётеровы нормальные схемы. На неособом многообразии локальное кольцо каждой замкнутой точки регулярно (5.1 гл. I), следовательно, регулярными будут все локальные кольца, поскольку они являются локализациями локальных колец замкнутых точек. На нётеровой нормальной схеме всякое локальное кольцо размерности один является целозамкнутым целостным кольцом и, следовательно, регулярно (6.2A гл. I).

В этом параграфе мы будем рассматривать схемы, удовлетворяющие следующему условию:

(*) схема X является нётеровой целой отделимой и регулярной в коразмерности один.

Определение. Пусть схема X удовлетворяет условию (*). *Простым дивизором* на X называется целая подсхема Y коразмерности один в X. *Дивизором Вейля* называется элемент свободной абелевой группы $\operatorname{Div} X$, порожденной всеми простыми дивизорами. Дивизоры будем записывать в виде $D = \sum n_i Y_i$, где Y_i — простые дивизоры, n_i — целые числа, среди которых только

конечное число отлично от нуля. Если $n_i \geqslant 0$ для всех i, то дивизор D называется *эффективным*.

Пусть Y — простой дивизор на X и $\eta \in Y$ — его общая точка. Тогда локальное кольцо $\mathcal{O}_{\eta, X}$ является кольцом дискретного нормирования с полем частных K, изоморфным полю функций на X. Соответствующее дискретное нормирование v_Y будем называть *нормированием* дивизора Y. Отметим, что поскольку схема X отделима, то Y однозначно определяется своим нормированием (упр. 4.5). Пусть теперь $f \in K^*$ — произвольная ненулевая рациональная функция. Тогда $v_Y(f)$ — некоторое целое число. Если оно положительно, то мы будем говорить, что f имеет нуль вдоль Y порядка $v_Y(f)$, если же оно отрицательно, то — полюс вдоль Y порядка $-v_Y(f)$.

Лемма 6.1. *Пусть схема X удовлетворяет условию (*) и $f \in K^*$ — ненулевая функция на X. Тогда $v_Y(f) = 0$ для всех, кроме конечного числа, простых дивизоров Y на X.*

Доказательство. Пусть $U = \operatorname{Spec} A$ — открытое аффинное подмножество в X, на котором функция f регулярна. Тогда $Z = X - U$ — собственное замкнутое подмножество в X. Так как схема X нётерова, то Z может содержать не более конечного множества простых дивизоров из X — все другие должны пересекаться с U. Таким образом, достаточно показать, что существует только конечное число простых дивизоров Y на U, для которых $v_Y(f) \neq 0$. Так как функция f регулярна на U, то в любом случае $v_Y(f) \geqslant 0$, и $v_Y(f) > 0$ тогда и только тогда, когда Y содержится в замкнутом подмножестве из U, определенном идеалом Af в A. Поскольку $f \neq 0$, то это собственное замкнутое подмножество в U и, следовательно, содержит только конечное число замкнутых неприводимых подмножеств коразмерности один в U.

Определение. Пусть схема X удовлетворяет условию (*) и $f \in K^*$. Определим *дивизор* функции f, обозначаемый через (f), как

$$(f) = \sum v_Y(f) \cdot Y,$$

где сумма берется по всем простым дивизорам из X. Но, согласно лемме 6.1, эта сумма конечна, следовательно, определяет некоторый дивизор. Дивизор функции называется также *главным* дивизором.

Отметим, что если $f, g \in K^*$, то $(f/g) = (f) - (g)$ по свойству нормирований. Более того, сопоставление функции f ее дивизора (f) задает гомоморфизм мультипликативной группы K^* в аддитивную группу $\operatorname{Div} X$, образ которого составляет подгруппу главных дивизоров в $\operatorname{Div} X$.

Определение. Пусть X удовлетворяет (*). Дивизоры D и D' называются *линейно эквивалентными* (что записывается в виде

$D \sim D'$), если их разность $D - D'$ является главным дивизором. Факторгруппа всех дивизоров $\operatorname{Div} X$ по подгруппе главных называется *группой классов дивизоров* X и обозначается через $\operatorname{Cl} X$.

Группа классов дивизоров схемы X представляет собой очень интересный инвариант. В общем случае его вычислить не так уж просто. Однако в следующих предложениях и примерах мы изложим некоторые соображения, позволяющие в частных случаях вычислять эти группы.

Предложение 6.2. *Пусть A — нётерово целостное кольцо. Кольцо A тогда и только тогда является факториальным, когда схема $X = \operatorname{Spec} A$ нормальна и $\operatorname{Cl} X = 0$.*

Доказательство. (См. также Бурбаки [1, гл. 7, § 3].) Хорошо известно, что факториальное кольцо целозамкнуто, так что схема X нормальна. С другой стороны, кольцо A тогда и только тогда факториально, когда всякий простой идеал высоты 1 является главным (1.12A гл. I), так что мы должны показать, что в целозамкнутом кольце без делителей нуля A каждый простой идеал высоты 1 является главным тогда и только тогда, когда $\operatorname{Cl}(\operatorname{Spec} A) = 0$.

В одну сторону утверждение доказывается совсем просто: если каждый простой идеал высоты 1 главный, то простой дивизор $Y \subset X = \operatorname{Spec} A$ соответствует простому идеалу $\mathfrak{p}$ высоты 1, который, являясь главным, порождается некоторым элементом $f \in A$. Стало быть, дивизор функции f имеет вид $1 \cdot Y$, т. е. каждый простой дивизор является главным и потому $\operatorname{Cl} X = 0$.

В обратную сторону: предположим, что $\operatorname{Cl} X = 0$. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1 и Y — соответствующий простой дивизор. Тогда существует некоторый элемент $f \in K$, где K — поле частных кольца A, такой, что $(f) = Y$. Покажем, что на самом деле $f \in A$ и f порождает $\mathfrak{p}$. Так как $v_Y(f) = 1$, то $f \in A_{\mathfrak{p}}$ и f порождает $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Пусть $\mathfrak{p}' \subset A$ — любой простой идеал высоты 1. Тогда ему соответствует простой дивизор Y' на X и $v_{Y'}(f) = 0$, так что $f \in A_{\mathfrak{p}'}$. Теперь из одного алгебраического результата (см. 6.3A ниже) следует, что $f \in A$. В действительности $f \in A \cap \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Для того чтобы показать, что f порождает $\mathfrak{p}$, рассмотрим произвольный элемент $g \in \mathfrak{p}$. Тогда $v_Y(g) \geqslant 1$ и $v_{Y'}(g) \geqslant 0$ для всех $Y' \neq Y$. Следовательно, $v_{Y'}(g/f) \geqslant 0$ для всех простых дивизоров Y' (включая Y). Поэтому $g/f \in A_{Y'}$ для всех $\mathfrak{p}'$ высоты 1, так что, опять согласно 6.3A, $g/f \in A$. Иначе говоря, $g \in Af$; это показывает, что $\mathfrak{p}$ — главный идеал, порожденный элементом f.

Предложение 6.3A. *Пусть A — целозамкнутое целостное нётерово кольцо. Тогда*

$$A = \bigcap_{\operatorname{ht}\mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}},$$

где пересечение берется по всем простым идеалам высоты 1.

Доказательство. См. Мацумура [2, теорема 38, стр. 124].

Пример 6.3.1. Если X — аффинное n-мерное пространство $\mathbf{A}_k^n$ над полем k, то $\operatorname{Cl} X = 0$. Действительно, $X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$, а кольцо многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ факториально.

Пример 6.3.2. Пусть A — дедекиндово кольцо, тогда $\operatorname{Cl}(\operatorname{Spec} A)$ — это в точности группа классов идеалов, как она определяется в алгебраической теории чисел. Таким образом, предложение 6.2 обобщает тот факт, что кольцо A тогда и только тогда является факториальным, когда его группа классов идеалов равна нулю.

Предложение 6.4. *Пусть X — проективное пространство $\mathbf{P}_k^n$ над полем k. Для любого дивизора $D = \sum n_i Y_i$ определим его степень, полагая* $\deg D = \sum n_i \deg Y_i$, *где* $\deg Y_i$ *— степень гиперповерхности Y_i. Пусть H — гиперплоскость $x_0 = 0$. Тогда*

(a) *если D — дивизор степени d, то $D \sim dH$;*

(b) $\deg f = 0$ *для любого* $f \in K^*$;

(c) *степень дивизора задает изоморфизм* $\deg\colon \operatorname{Cl} X \to \mathbf{Z}$.

Доказательство. Пусть $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ — однородное координатное кольцо пространства X, и пусть g — однородный элемент степени d. Разложим его на неприводимые множители $g = g_1^{n_1} \ldots g_r^{n_r}$. Тогда каждый g_i определяет неприводимую гиперповерхность Y_i степени $d_i = \deg g_i$, и можно определить дивизор элемента g, полагая $g = \sum n_i Y_i$. Тогда $\deg(g) = d$. Поскольку всякая рациональная функция на X представляется в виде отношения g/h однородных многочленов одинаковой степени, то, очевидно, $(f) = (g) - (h)$ и, следовательно, $\deg(f) = 0$, что доказывает утверждение (b).

Пусть D — произвольный дивизор степени d. Тогда мы можем записать его в виде разности $D_1 - D_2$ эффективных дивизоров степеней d_1 и d_2 с $d_1 - d_2 = d$. Пусть $D_1 = (g_1)$ и $D_2 = (g_2)$. Это можно сделать, поскольку неприводимая гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$ соответствует простому идеалу высоты 1 в S, который является главным. Беря произведение степеней неприводимых многочленов, мы можем записать любой эффективный дивизор в виде (g) для некоторого однородного многочлена g. Пусть $f = g_1/x_0^d g_2$ — рациональная функция на X. Тогда $D - dH = (f)$, что доказывает утверждение (a). Утверждение (c) непосредственно следует из (a) и (b) и того факта, что $\deg H = 1$.

Предложение 6.5. *Пусть X удовлетворяет $(*)$, Z — собственное замкнутое подмножество в X и $U = X - Z$. Тогда*

(a) *существует сюръективный гомоморфизм $\operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} U$, определяемый формулой $D = \sum n_i Y_i \mapsto \sum n_i (Y_i \cap U)$, где пропускаются слагаемые, для которых $Y_i \cap U$ пусто;*

(b) *если $\operatorname{codim}(Z, X) \geqslant 2$, то $\operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} U$ — изоморфизм;*

(c) *если Z — неприводимое подмножество коразмерности 1, то существует точная последовательность*

$$\mathbf{Z} \to \operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} U \to 0,$$

где первое отображение определяется соответствием $1 \mapsto 1 \cdot Z$.

Доказательство. (a) Если Y — простой дивизор на X, то пересечение $Y \cap U$ либо пусто, либо является простым дивизором на U. Пусть $f \in K^*$ и $(f) = \sum n_i Y_i$. Рассматривая f как рациональную функцию на U, имеем $(f)_U = \sum n_i (Y_i \cap U)$, так что гомоморфизм $\operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} U$ корректно определен. Его сюръективность вытекает из того, что каждый простой дивизор на U является ограничением на U своего замыкания в X.

(b) Группы $\operatorname{Div} X$ и $\operatorname{Cl} X$ зависят только от подмножеств коразмерности 1, так что выбрасывание из X замкнутого подмножества Z коразмерности $\geqslant 2$ не изменяет этих групп.

(c) Ядро гомоморфизма $\operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} U$ состоит из классов дивизоров, носители которых содержатся в Z. Но если Z неприводимо, то это ядро состоит только из подгруппы, порожденной $1 \cdot Z$ в $\operatorname{Cl} X$.

Пример 6.5.1. Пусть Y — неприводимая кривая степени d на $\mathbf{P}_k^2$. Тогда $\operatorname{Cl}(\mathbf{P}^2 - Y) = \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$. Это непосредственно следует из 6.4 и 6.5.

Пример 6.5.2. Пусть k — поле, $A = k[x, y, z]/(xy - z^2)$ и $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда X — это аффинный квадратичный конус в $\mathbf{A}_k^3$. Покажем, что $\operatorname{Cl} X = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и эта группа порождена прямолинейной образующей конуса, скажем Y: $y = z = 0$ (рис. 8).

Заметим прежде всего, что Y — простой дивизор, так что, согласно 6.5, мы имеем точную последовательность

$$\mathbf{Z} \to \operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl}(X - Y) \to 0,$$

где первое отображение определяется соответствием $1 \mapsto 1 \cdot Z$. Теоретико-множественно Y можно высечь функцией y. Но на самом деле дивизор функции y равен $2 \cdot Y$, поскольку $y = 0 \Rightarrow z^2 = 0$, и z порождает максимальный идеал локального кольца общей точки Y. Следовательно, $X - Y = \operatorname{Spec} A_y$. Но $A_y = k[x, y, y^{-1}, z]/(xy - z^2)$, и в этом кольце $x = y^{-1} \cdot z^2$, так что x можно исключить и в результате $A_y \simeq k[y, y^{-1}, z]$. Это кольцо факториально, поэтому, согласно 6.2, $\operatorname{Cl}(X - Y) = 0$.

Таким образом, $\operatorname{Cl} X$ порождается Y и $2 \cdot Y = 0$. Остается показать, что само Y не является главным дивизором. Так как кольцо A целозамкнуто (упр. 6.4), то нужно показать, что простой идеал $\mathfrak{p} = (y, z)$, соответствующий Y, не является главным (ср. доказательство 6.2). Положим $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ и заметим, что

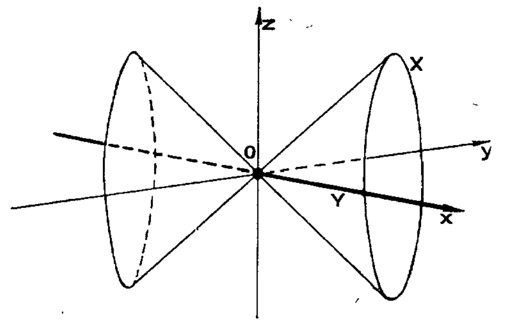


Рис. 8. Прямолинейная образующая на квадратичном конусе.

$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ является 3-мерным векторным пространством над k, порожденным $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — образами x, y, z. Теперь, так как $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ и образ $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ содержит $\bar{y}$ и $\bar{z}$, то $\mathfrak{p}$ не может быть главным идеалом.

Предложение 6.6. *Пусть X удовлетворяет $(*)$. Тогда схема $X \times \mathbf{A}^1$ $(= X \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}} \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[t])$ тоже удовлетворяет условию $(*)$ и $\operatorname{Cl} X \simeq \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{A}^1)$.*

Доказательство. Ясно, что схема $X \times \mathbf{A}^1$ нётерова, целая и отделимая. Для того чтобы убедиться, что она регулярна в коразмерности один, заметим, что на ней существуют два типа точек коразмерности один. Точки первого типа — это точки $x \in X \times \mathbf{A}^1$, образы которых на X тоже являются точками y коразмерности один. В этом случае x — общая точка $\pi^{-1}(y)$, где $\pi : X \times \mathbf{A}^1 \to X$ — проекция на первый множитель. Ее локальное кольцо имеет вид $\mathcal{O}_x \simeq \mathcal{O}_y[t]_{\mathfrak{m}_y}$ и является, очевидно, кольцом дискретного нормирования, поскольку кольцом дискретного нормирования является $\mathcal{O}_y$. Соответствующий простой дивизор $\{\bar{x}\}$ — это в точности $\pi^{-1}(\{\bar{y}\})$.

Точки второго типа — это точки $x \in X \times \mathbf{A}^{-1}$ коразмерности один, образом которых в X является общая точка X. В этом случае $\mathcal{O}_x$ является локализацией кольца $K[t]$ по некоторому максимальному идеалу, где K — поле функций на X. Поскольку $K[t]$ — кольцо главных идеалов, то $\mathcal{O}_x$ тоже является кольцом дискретного нормирования. Таким образом, условие (*) для $X \times \mathbf{A}^1$ выполнено.

Определим отображение $\mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}\,(X \times \mathbf{A}^1)$, полагая $D = \sum n_i Y_i \mapsto \pi^* D = \sum n_i \pi^{-1}(Y_i)$. Пусть $f \in K^*$. Тогда $\pi^*((f))$ является дивизором функции f как элемента поля функций $K(t)$ на $X \times \mathbf{A}^1$. Это означает, что гомоморфизм $\pi^*\colon \mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}\,(X \times \mathbf{A}^1)$ определен корректно.

Для доказательства инъективности π^* предположим, что $D \in \mathrm{Div}\, X$ и $\pi^* D = (f)$ для некоторой функции $f \in K(t)$. Так как $\pi^* D$ может содержать простые дивизоры только первого типа, то функция f должна принадлежать полю K. В противном случае мы могли бы записать $f = g/h$, где $g,\ h \in K[t]$ и взаимно просты. Если бы g и h не принадлежали K, то в (f) входили бы простые дивизоры второго типа на $X \times \mathbf{A}^1$. Стало быть, $f \in K$ и, очевидно, $D = (f)$, так что гомоморфизм π^* инъективен.

Для доказательства сюръективности π^* достаточно показать, что всякий простой дивизор второго типа на $X \times A^1$ линейно эквивалентен линейной комбинации простых дивизоров первого типа. Пусть $Z \subset X \times \mathbf{A}^1$ — простой дивизор второго типа. Локализуя в общей точке схемы X, получаем простой дивизор в $\mathrm{Spec}\, K[t]$, которому соответствует некоторый простой идеал $\mathfrak{p} \subset K[t]$. Этот идеал главный, и пусть f — его образующий элемент. Тогда $f \in K(t)$ и дивизор функции f состоит из Z и, может быть, еще только из дивизоров первого типа: он не может содержать никаких других простых дивизоров второго типа. Следовательно, Z линейно эквивалентен дивизору первого типа, что завершает доказательство.

Пример 6.6.1. Пусть Q — неособая квадрика $xy = zw$ в $\mathbf{P}^3_k$. Покажем, что $\mathrm{Cl}\, Q \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Воспользуемся тем фактом, что Q изоморфна $\mathbf{P}^1_k \times_k \mathbf{P}^1_k$ (упр. 2.15 гл. I). Пусть p_1 и p_2 — проекции Q на первый и второй сомножители. Тогда, как и в доказательстве предложения 6.6, мы получаем гомоморфизмы $p_1^*, p_2^*\colon \mathrm{Cl}\, \mathbf{P}^1 \to \mathrm{Cl}\, Q$. Докажем сначала инъективность этих гомоморфизмов. Пусть $Y = \mathrm{pt} \times \mathbf{P}^1$, где pt — точка на $\mathbf{P}^1$. Тогда $Q - Y = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1$ и композиция гомоморфизмов

$$\mathrm{Cl}\, \mathbf{P}^1 \xrightarrow{p_2} \mathrm{Cl}\, Q \to \mathrm{Cl}\,(\mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1)$$

— это изоморфизм из предложения 6.6. Следовательно, гомоморфизм p_2^* (и аналогично p_1^*) инъективен.

Теперь рассмотрим точную последовательность для Y из предложения 6.5:

$$\mathbf{Z} \to \mathrm{Cl}\, Q \to \mathrm{Cl}\,(\mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1) \to 0.$$

Здесь первое отображение переводит 1 в Y. Но если отождествить $\mathrm{Cl}\,\mathbf{P}^1$ с $\mathbf{Z}$, сопоставляя классу точки из $\mathbf{P}^1$ элемент 1 в $\mathbf{Z}$, то первое отображение будет совпадать с гомоморфизмом p_1^* и, следовательно, оно инъективно. Так как p_2 осуществляет, как мы уже видели, изоморфизм $\mathrm{Cl}\, \mathbf{P}^1$ на $\mathrm{Cl}\,(\mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1)$, то отсюда следует, что $\mathrm{Cl}\, Q \simeq \mathrm{Im}\, p_1^* \oplus \mathrm{Im}\, p_2^* \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Если D — произвольный дивизор на Q и $(a,\ b)$ — упорядоченная пара целых чисел в $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, соответствующая классу D при этом изоморфизме, то будем говорить, что D имеет *тип* $(a,\ b)$ на Q.

Пример 6.6.2. Пусть опять $Q \subset \mathbf{P}^3$ — квадрика из 6.6.1. Покажем, что вложение $Q \hookrightarrow \mathbf{P}^3$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Cl}\, \mathbf{P}^3 \to \mathrm{Cl}\, Q$ и что образом гиперплоскости H, которая порождает $\mathrm{Cl}\, \mathbf{P}^3$, является элемент типа $(1, 1)$ в $\mathrm{Cl}\, Q = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Пусть Y — произвольная неприводимая гиперповерхность в $\mathbf{P}^3$, не содержащая Q. Тогда неприводимым компонентам пересечения $Y \cap Q$ можно приписать некоторые кратности, так что на Q получится некоторый дивизор $Y \cdot Q$. Действительно, на каждом стандартном открытом множестве U_i в $\mathbf{P}^3$ гиперповерхность Y определяет единственную функцию f. Для каждого нормирования, соответствующего простому дивизору на Q, можно взять значение этого нормирования на функции f (ограниченной на Q) и тем самым определить дивизор $Y \cdot Q$. По линейности распространим это отображение на произвольный дивизор $D = \sum n_i Y_i$ на $\mathbf{P}^3$, где Y_i не содержит Q. Ясно, что линейно эквивалентные дивизоры на $\mathbf{P}^3$ переходят при этом в линейно эквивалентные дивизоры на Q. Поскольку любой дивизор на $\mathbf{P}^3$ линейно эквивалентен (см. 6.4) дивизору, простые компоненты которого не содержат Q, то мы получаем корректно определенный гомоморфизм $\mathrm{Cl}\, \mathbf{P}^3 \to \mathrm{Cl}\, Q$. Если теперь H — гиперплоскость $w = 0$, то $H \cap Q$ — дивизор, состоящий из двух прямых $x = w = 0$ и $y = w = 0$. Это прямые из разных семейств (упр. 2.15 гл. I), так что $H \cap Q$ имеет тип $(1, 1)$ в $\mathrm{Cl}\, Q = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Отметим, что прямые из двух разных семейств на Q — это $\mathrm{pt} \times \mathbf{P}^1$ и $\mathbf{P}^1 \times \mathrm{pt}$, так что они имеют тип $(1,\ 0)$ и $(0,\ 1)$ соответственно.

Пример 6.6.3. Продвинем пример с квадрикой $Q \subset \mathbf{P}^3$ еще на один шаг. Пусть C — пространственная кубическая кривая $x = t^3$, $y = u^3$, $z = t^2u$, $w = tu^2$, которая, очевидно, лежит на Q. Пусть Y — квадратичный конус $yz = w^2$. Тогда $Y \cap Q = C \cup L$, где L — прямая $y = w = 0$. Так как $Y \sim 2H$ на $\mathbf{P}^3$, то $Y \cap Q$ — дивизор типа $(2, 2)$. Прямая L имеет тип $(1, 0)$, так что C — кривая типа $(1, 2)$. Отсюда следует, что не существует поверхности $Y \subset \mathbf{P}^3$, не содержащей Q, такой, чтобы $Y \cap Q$ совпадало с C даже теоретико-множественно! Для этого дивизор $Y \cap Q$ должен иметь вид rC для некоторого целого $r > 0$. Но такой дивизор имеет тип $(r,\ 2r)$ в $\mathrm{Cl}\, Q$, а если степень Y равна d, то $Y \cap Q$ имеет тип $(d,\ d)$, который никак не может быть равен $(r, 2r)$. Стало быть, такого Y не существует.

Пример 6.6.4. Позднее в 4.8 гл. V мы увидим, что если X — неособая кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$, то $\operatorname{Cl} X \simeq \mathbf{Z}^7$.

Дивизоры на кривых

В качестве дальнейшей иллюстрации понятия группы классов дивизоров сосредоточим внимание на случае дивизоров на кривых. Определим понятие степени дивизора на кривой и покажем, что для полной неособой кривой степень сохраняется при линейной эквивалентности. Дальнейшее изучение дивизоров на кривых будет продолжено в гл. IV.

Для начала нам понадобится некоторая предварительная информация о кривых и их морфизмах. Напомним терминологию из конца § 4.

Определение. Пусть k — алгебраически замкнутое поле. *Кривая* над k — это целая отделимая схема X конечного типа над k размерности один. Кривая X называется *полной*, если как схема она собственна над k. Если все локальные кольца кривой X регулярны, то она называется *неособой*.

Предложение 6.7. *Пусть X — неособая кривая над k с полем функций K. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) X *проективна*;

(ii) X *полна*;

(iii) $X \simeq t(C_K)$, *где* C_K — *абстрактная неособая кривая из* § 6 *гл.* I *и* t — *функтор из категории многообразий в категорию схем* (см. 2.6).

Доказательство.

(i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из 4.9.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Если X — полная кривая, то всякое кольцо дискретного нормирования поля K/k имеет единственный центр на X (упр. 4.5). Так как локальные кольца всех замкнутых точек X являются кольцами дискретного нормирования, то отсюда следует, что замкнутые точки на X находятся во взаимно однозначном соответствии с кольцами дискретноно нормирования поля K/k, т. е. с точками из C_K. Поэтому ясно, что $X \simeq t(C_K)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) вытекает из 6.9 гл. I.

Предложение 6.8. *Пусть X — полная неособая кривая над k, Y — произвольная кривая над k и f: $X \to Y$ — некоторый морфизм. Тогда или* (1) $f(X)$ — *точка на* Y, *или* (2) $f(X) = Y$. *В случае* (2) *поле* $K(X)$ *является конечным расширением поля* $K(Y)$, f — *конечный морфизм и кривая Y также является полной.*

Доказательство. Поскольку X полна, то $f(X)$ должно быть замкнутым подмножеством в Y и собственным над $\operatorname{Spec} k$ (упр. 4.4). Кроме того, $f(X)$ неприводимо. Поэтому, либо (1) $f(X)$ — точка на Y, либо (2) $f(X) = Y$ и Y — полная кривая.

В случае (2) морфизм f является доминантным, так что он индуцирует вложение полей функций $K(Y) \subset K(X)$. Так как оба этих поля конечно порождены и имеют степень трансцендентности 1 над k, то $K(X)$ должно быть конечным алгебраическим расширением поля $K(Y)$. Для того чтобы показать, что морфизм f конечен, рассмотрим любое открытое аффинное подмножество $V = \operatorname{Spec} B$ в Y. Пусть A — целое замыкание B в $K(X)$. Тогда A — конечный B-модуль (3.9A гл. I) и $\operatorname{Spec} A$ изоморфно открытому подмножеству U в X (6.7 гл. I). Очевидно, что $U = f^{-1}V$. Отсюда следует, что f — конечный морфизм.

Определение. Пусть f: $X \to Y$ — конечный морфизм кривых. *Степенью* морфизма f назовем степень расширения полей $[K(X) : K(Y)]$.

Теперь приступим к изучению дивизоров на кривых. Если X — неособая кривая, то она удовлетворяет условию $(*)$, введенному в начале этого параграфа, так что понятие дивизора на X имеет смысл. Простыми дивизорами на X являются только замкнутые точки, а произвольный дивизор записывается в виде $D = \sum n_i P_i$, где P_i — замкнутые точки и $n_i \in \mathbf{Z}$. Определим *степень* D как $\deg D = \sum n_i$.

Определение. Пусть f: $X \to Y$ — конечный морфизм неособых кривых. Определим гомоморфизм f^*: $\operatorname{Div} Y \to \operatorname{Div} X$ следующим образом. Для любой точки $Q \in Y$ пусть $t \in \mathcal{O}_Q$ — *локальный параметр* в этой точке, т. е. элемент из $K(Y)$, такой, что $v_Q(t) = 1$, где v_Q—дискретное нормирование, соответствующее точке Q. Положим $f^*Q = \sum_{f(P)=Q} v_P(t) \cdot P$. Так как f—конечный морфизм, то эта сумма конечна, так что f^*Q — дивизор на X. Отметим, что он не зависит от выбора локального параметра t. В самом деле, пусть t' — другой локальный параметр в Q. Тогда $t' = ut$, где u — обратимый элемент кольца $\mathcal{O}_Q$. Для любой точки $P \in X$ с $f(P) = Q$ элемент u также является обратимым в кольце $\mathcal{O}_P$, так что $v_P(t) = v_P(t')$. По линейности распространим определение f^* на все дивизоры на Y. Легко видеть, что f^* сохраняет линейную эквивалентность и, стало быть, индуцирует гомоморфизм $\operatorname{Cl} Y \to \operatorname{Cl} X$.

Предложение 6.9. *Пусть f: $X \to Y$ — конечный морфизм неособых кривых. Тогда* $\deg f^*D = \deg f \cdot \deg D$ *для любого дивизора D на Y.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\deg f^*Q = \deg f$ для любой замкнутой точки $Q \in Y$. Пусть $V = \operatorname{Spec} B$ — открытое аффинное подмножество в Y, содержащее точку Q, и A — целое замыкание B в $K(X)$. Тогда, как и в доказательстве предложения (6.8), $U = \operatorname{Spec} A$ является открытым подмножеством $f^{-1}V$ в X. Пусть $\mathfrak{m}_Q$ — максимальный идеал точки Q в B. Локализуем B и A относительно мультипликативной системы $S = B - \mathfrak{m}_Q$. В результате получим расширение колец $\mathcal{O}_Q \hookrightarrow A'$, где кольцо A' является конечно порожденным $\mathcal{O}_Q$-модулем. Модуль A' свободен от кручения и имеет ранг $r = [K(X) : K(Y)]$, так что он является свободным $\mathcal{O}_Q$-модулем ранга $r = \deg f$. Если t — локальный параметр в точке Q, то A'/tA' является векторным пространством над k размерности r.

С другой стороны, точки P_i на X, такие, что $f(P_i) = Q$, находятся во взаимно однозначном соответствии с максимальными идеалами $\mathfrak{m}_i$ кольца A', и для каждого i имеет место равенство $A'_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{P_i}$. Ясно, что $tA' = \bigcap_i (tA'_{\mathfrak{m}_i} \cap A')$, поэтому по китайской теореме об остатках

$$\dim_k A'/tA' = \sum_i \dim_k A'/(tA'_{\mathfrak{m}_i} \cap A').$$

Но

$$A'/(tA'_{\mathfrak{m}_i} \cap A') \simeq A'_{\mathfrak{m}_i}/tA'_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{P_i}/t\mathcal{O}_{P_i},$$

так что размерность под знаком суммы в предыдущей формуле в точности равна $v_{P_i}(t)$. Так как $f^*Q = \sum v_{P_i}(t) \cdot P_i$, то отсюда следует $\deg f^*Q = \deg f$, что и требовалось доказать.

Следствие 6.10. *Степень главного дивизора на полной неособой кривой равна нулю. Следовательно, отображение взятия степени индуцирует сюръективный гомоморфизм* $\deg\colon \operatorname{Cl} X \to \mathbf{Z}$.

Доказательство. Пусть $f \in K(X)^*$. Если $f \in k$, то $(f) = 0$, так что доказывать нечего. Если $f \notin k$, то вложение полей $k(f) \subset K(X)$ индуцирует конечный морфизм $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^1$. Тот факт, что φ — морфизм, следует из 6.12 гл. I, а его конечность — из предложения 6.8. Имеем $(f) = \varphi^*(\{0\}) - \{\infty\})$. Поскольку дивизор $\{0\} - \{\infty\}$ имеет степень нуль на $\mathbf{P}^1$, то мы получаем, что $\deg(f) = 0$ на X.

Таким образом, степень дивизора на X зависит только от его класса линейной эквивалентности, и, следовательно, определен гомоморфизм $\operatorname{Cl} X \to \mathbf{Z}$. Он сюръективен, поскольку степень точки равна 1.

Пример 6.10.1. Полная неособая кривая X тогда и только тогда рациональна, когда на ней существуют две различные точки P, Q,

линейно эквивалентные ($P \sim Q$) как дивизоры. Напомним, что рациональность кривой X означает бирациональную эквивалентность ее пространству $\mathbf{P}^1$. Если кривая X рациональна, то на самом деле она изоморфна $\mathbf{P}^1$ (см. 6.7), и, как мы уже видели (6.4), на $\mathbf{P}^1$ любые две точки линейно эквивалентны. Обратно, предположим, что существуют две точки $P, Q \in X$, $P \neq Q$, такие, что $P \sim Q$. Тогда существует рациональная функция $f \in K(X)$ с $(f) = P - Q$. Рассмотрим морфизм $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^1$, определяемый функцией f, как в доказательстве следствия 6.10. Тогда $\varphi^*(\{0\}) = P$, так что морфизм φ должен иметь степень 1. Иначе говоря, φ — бирациональный морфизм, и, следовательно, кривая X рациональна.

Пример 6.10.2. Пусть X — неособая кубическая кривая $y^2z = x^3 - xz^2$ на плоскости $\mathbf{P}_k^2$, $\operatorname{char} k \neq 2$. Мы уже знаем, что кривая X не рациональна (упр. 6.2 гл. I). Пусть $\operatorname{Cl}^\circ X$ — ядро гомоморфизма степени $\deg\colon \operatorname{Cl} X \to \mathbf{Z}$. Тогда из предыдущего примера

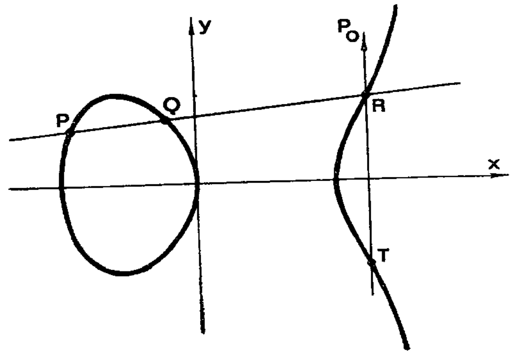


Рис. 9. Групповой закон на кубической кривой.

вытекает, что $\operatorname{Cl}^\circ X \neq 0$. Покажем, что на самом деле существует взаимно однозначное соответствие между множеством замкнутых точек из X и элементами группы $\operatorname{Cl}^\circ X$. С одной стороны, это проясняет структуру группы $\operatorname{Cl}^\circ X$, а с другой — позволяет задать групповую структуру на множестве замкнутых точек X, которая превращает X в групповое многообразие (рис. 9).

Пусть P_0 — точка с координатами $(0, 1, 0)$ на X. Это точка перегиба, так что касательная прямая $z = 0$ в этой точке высекает на X дивизор $3P_0$. Пусть L — произвольная прямая на $\mathbf{P}^2$, пересекающая X в трех точках P, Q, R (среди них могут быть и совпадающие). Тогда поскольку L линейно эквивалентна прямой $z = 0$ на $\mathbf{P}^2$, то $P + Q + R \sim 3P_0$ на X, как в примере 6.6.2.

Сопоставим теперь любой замкнутой точке $P \in X$ дивизор $P - P_0 \in \operatorname{Cl}^\circ X$. В результате мы получим инъективное отображение, так как если $P - P_0 \sim Q - P_0$, то $P \sim Q$ на X, что невозможно, поскольку кривая X не рациональна (см. 6.10.1).

Доказательство сюръективности отображения множества замкнутых точек кривой X в $\mathrm{Cl}^\circ X$ проведем в несколько шагов. Пусть $D \in \mathrm{Cl}^\circ X$. Тогда $D = \sum n_i P_i$, где $\sum n_i = 0$. Следовательно, мы можем записать D в виде $\sum n_i (P_i - P_0)$. Далее, для произвольной точки R пусть T — третья точка пересечения прямой P_0R с X (пересечение всегда рассматривается с учетом кратностей — например, если $R = P_0$, то в качестве прямой P_0R берется касательная к X в точке P_0, и тогда третья точка пересечения T тоже будет совпадать с P_0). Тогда $P_0 + R + T \sim 3P_0$, так что $R - P_0 \sim \sim -(T - P_0)$. Если i — такой индекс, что $n_i < 0$, то возьмем $R = P_i$ и заменим P_i на $-T$. В результате получим дивизор, линейно эквивалентный D, но с коэффициентом $-n_i > 0$ вместо $n_i < 0$. Продолжая этот процесс, можем считать, что $D = \sum n_i (P_i - P_0)$, где все $n_i > 0$. Покажем теперь с помощью индукции по $\sum n_i$, что $D \sim P - P_0$ для некоторой точки P. Если $\sum n_i = 1$, то доказывать нечего. Предположим, что $\sum n_i \geqslant 2$, и пусть P, Q — две из точек P_i (возможно, совпадающие), которые входят в D. Пусть R — третья точка пересечения прямой PQ с X и T — третья точка пересечения прямой P_0R с X. Тогда

$$P + Q + R \sim 3P_0 \quad \text{и} \quad P_0 + R + T \sim 3P_0,$$

откуда

$$(P - P_0) + (Q - P_0) \sim (T - P_0).$$

Заменяя P и Q на T, получаем, что D линейно эквивалентен дивизору такого же вида, но с меньшей на единицу $\sum n_i$. Следовательно, по индукции $D \sim P - P_0$ для некоторой точки P.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между группой $\mathrm{Cl}^\circ X$ и множеством замкнутых точек кривой X. Можно показать непосредственно, что закон сложения определяет морфизм $X \times X \to X$, а закон обращения — морфизм $X \to X$ (см., например, Олсон [1]). Следовательно, кривая X является групповым многообразием (в смысле упр. 3.21 гл. I). Дальнейшие обобщения см. в 1.3.6 гл. IV.

Замечание 6.10.3. Рассмотренный пример с кубической кривой иллюстрирует общий факт, что группа классов дивизоров многообразия имеет дискретную часть (в рассмотренном случае $\mathbf{Z}$) и непрерывную часть (в нашем случае $\mathrm{Cl}^\circ X$), которая сама обладает структурой алгебраического многообразия.

Более конкретно: если X — произвольная полная неособая кривая, то группа $\mathrm{Cl}^\circ X$ на ней изоморфна группе замкнутых точек некоторого абелева многообразия, так называемого *якобиева многообразия* кривой X. *Абелево многообразие* — это полное групповое многообразие над k. Размерность якобиева многообразия равна *роду* кривой X. Вся группа классов дивизоров кривой X является расширением $\mathbf{Z}$ при помощи группы замкнутых точек якобиева многообразия кривой X.

Если X — неособое проективное многообразие размерности $\geqslant 2$, то на нем тоже можно определить подгруппу $\mathrm{Cl}^\circ X$ группы $\mathrm{Cl}\, X$, а именно подгруппу классов дивизоров, *алгебраически эквивалентных* нулю. Тогда факторгруппа $\mathrm{Cl}\, X/\mathrm{Cl}^\circ X$ является конечно порожденной абелевой группой, так называемой *группой Нерона — Севери* многообразия X, а группа $\mathrm{Cl}^\circ X$ изоморфна группе замкнутых точек некоторого абелева многообразия, называемого *многообразием Пикара* многообразия X.

К сожалению, из-за недостатка места мы не можем в этой книге развить теорию абелевых многообразий и изучить якобиевы многообразия кривых и многообразия Пикара алгебраических многообразий более высокой размерности. Информацию об этих замечательных объектах и дальнейшие ссылки можно получить в следующих источниках: Ленг [1], Мамфорд [2], Мамфорд [5] и Хартсхорн [6]; см. также § 4 гл. IV, упр. 1.7 гл. V и добавление В.

Дивизоры Картье

Теперь мы хотим распространить понятие дивизора на произвольные схемы. Оказывается, что для такой цели неприводимые подмногообразия коразмерности один уже не могут служить подходящими объектами. Вместо этого мы будем исходить из идеи, что дивизоры локально должны быть устроены как дивизоры рациональных функций. Это не есть прямое обобщение понятия дивизора Вейля (как мы увидим ниже), но является его хорошей и удобной заменой для работы с произвольными схемами.

Определение. Пусть X — некоторая схема. Для каждого открытого аффинного подмножества $U = \operatorname{Spec} A$ пусть S обозначает множество всех элементов из A, не являющихся делителями нуля, и пусть $K(U)$ — локализация A относительно мультипликативной системы S. Тогда $K(U)$ будем называть *полным кольцом частных* кольца A. Для всевозможных открытых аффинных подмножеств U кольца $K(U)$ образуют пучок колец $\mathcal{K}$, называемый *пучком полных колец частных* пучка $\mathcal{O}$. Для произвольной схемы X пучок $\mathcal{K}$ служит заменой понятия поля функций на целой схеме. Обозначим через $\mathcal{K}^*$ пучок (мультипликативных групп) обратимых элементов пучка колец $\mathcal{K}$. Аналогично $\mathcal{O}^*$ будет обозначать пучок обратимых элементов пучка $\mathcal{O}$.

Определение. *Дивизором Картье* на схеме X называется глобальное сечение пучка $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$. Вспоминая свойства факторпучков, видим, что дивизор Картье на X можно описать, задав некоторое открытое покрытие $\{U_i\}$ схемы X и для каждого i элемент $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$, так, чтобы $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$ для любых i, j. Дивизор Картье называется *главным*, если он принадлежит образу естественного отображения $\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$. Два дивизора Картье называются *линейно эквивалентными*, если их разность является главным дивизором Картье. (Хотя на $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ групповая операция мультипликативна, для дивизоров Картье мы будем использовать аддитивную запись по аналогии с дивизорами Вейля.)

Предложение 6.11. *Пусть X — целая отделимая нётерова схема, все локальные кольца которой факториальны* (*в таком случае будем говорить, что схема X* локально факториальна). *Тогда группа* $\operatorname{Div} X$ *дивизоров Вейля на X изоморфна группе дивизоров Картье* $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ *и, более того, при этом изоморфизме главным дивизорам Вейля соответствуют главные дивизоры Картье.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что схема X нормальна и, следовательно, удовлетворяет условию (*), так как факториальные кольца целозамкнуты. Стало быть, на X имеет смысл понятие дивизора Вейля. Поскольку схема X цела, то пучок $\mathcal{K}$ на X — это постоянный пучок, соответствующий полю функций K на X. Пусть теперь дивизор Картье на X задан набором $\{(U_i, f_i)\}$, где $\{U_i\}$ — некоторое открытое покрытие X и $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*) = K^*$. Определим для него соответствующий дивизор Вейля следующим образом. Каждому простому дивизору Y припишем коэффициент $v_Y(f_i)$, где i — любой индекс, для которого $Y \cap U_i \neq \varnothing$. Если j — другой такой индекс, отличный от i, то f_i/f_j обратимо на $U_i \cap U_j$, так что $v_Y(f_i/f_j) = 0$ и $v_Y(f_i) = v_Y(f_j)$. Мы получаем, таким образом, корректно определенный дивизор Вейля $D = \sum v_Y(f_i)\, Y$ на X. (Сумма конечна, потому что схема X нётерова!)

Обратно, пусть D — дивизор Вейля на X и $x \in X$ — произвольная точка. Тогда D индуцирует дивизор Вейля D_x на локальной схеме $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_x$. Так как кольцо $\mathcal{O}_x$ факториально, то по 6.2 дивизор D_x главный, так что $D_x = (f_x)$ для некоторого $f_x \in K$. Далее, главный дивизор (f_x) функции f_x на X имеет то же ограничение на $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_x$, что и дивизор D, следовательно, они отличаются только на такие простые дивизоры на X, которые не проходят через x. Среди них только конечное число имеет отличные от нуля коэффициенты, а именно простые дивизоры, входящие в D или в (f_x), так что существует открытая окрестность U_x точки x, такая, что D и (f_x) имеют одно и то же ограничение на U_x. Покроем

X такими открытыми множествами U_x, тогда функции f_x зададут на X некоторый дивизор Картье. Отметим, что если f и f' задают один и тот же дивизор Вейля на открытом множестве U, то $f/f' \in \Gamma(U, \mathcal{O}^*)$, поскольку схема X нормальна (ср. доказательство предложения 6.2). Поэтому мы получаем корректно определенный дивизор Картье.

Обе рассмотренные конструкции обратны друг другу, откуда вытекает, что группы дивизоров Вейля и Картье изоморфны. Более того, очевидно, что главные дивизоры также соответствуют друг другу в обеих этих группах.

Замечание 6.11.1A. Так как регулярное локальное кольцо факториально (см. Мацумура [2, теорема 49, стр. 142] [1])), то это предложение применимо, в частности, к любой *регулярной* целой отделимой нётеровой схеме. Схема называется *регулярной*, если все ее локальные кольца регулярны.

Замечание 6.11.2. Пусть X — схема, удовлетворяющая условию (*), но не обязательно локально факториальна. Тогда можно определить подгруппу группы $\operatorname{Div} X$, состоящую из локально главных дивизоров Вейля: дивизор D называется *локально главным*, если X можно покрыть такими открытыми множествами U, что $D|_U$ является главным дивизором для каждого U. Из доказательста предыдущего предложения видно, что дивизоры Картье — это то же самое, что и локально главные дивизоры Вейля.

Пример 6.11.3. Пусть X — аффинный квадратичный конус $\operatorname{Spec} k[x, y, z]/(xy - z^2)$, рассмотренный ранее в 6.5.2. Тогда образующая Y является дивизором Вейля, который не является локально главным в окрестности вершины конуса. В самом деле, как показано в 6.5.2, простой идеал $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ дивизора Y не является главным даже в локальном кольце $A_{\mathfrak{m}}$. Стало быть, он не соответствует никакому дивизору Картье. С другой стороны, дивизор $2Y$ является локально главным и даже главным. Следовательно, в этом случае группа дивизоров Картье по модулю главных дивизоров равна 0, в то время как $\operatorname{Cl} X \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Пример 6.11.4. Пусть X — каспидальная кубическая кривая $y^2z = x^3$ на плоскости $\mathbf{P}^2_k$, $\operatorname{char} k \neq 2$. Тогда X не удовлетворяет условию (*) и мы не можем говорить о дивизорах Вейля на X. Однако имеет смысл говорить о группе классов $\operatorname{CaCl} X$ дивизоров Картье по модулю главных дивизоров. Проводя рассуждения, как в случае неособой кубической кривой (6.10.2), покажем, что

(а) существует сюръективный гомоморфизм степени $\deg\colon \operatorname{CaCl} X \to \mathbf{Z}$;

[1]) А также, например, Зарисский и Самюэль [1, т. II, добавление 6]. — *Прим. перев.*

(b) существует взаимно однозначное соответствие между множеством неособых замкнутых точек из X и ядром $\mathrm{CaCl}^\circ X$ гомоморфизма $\deg\colon \mathrm{CaCl}\, X \to \mathbf{Z}$, которое превращается тем самым в групповое многообразие;

(c) существует естественный изоморфизм групповых многообразий между $\mathrm{CaCl}^\circ X$ и аддитивной группой $\mathbf{G}_a$ поля k (упр. 3.21a гл. I).

Для определения степени дивизора Картье на X заметим, что любой дивизор Картье на X линейно эквивалентен дивизору, локальное уравнение (функция) которого обратимо в некоторой окрестности особой точки $Z = (0, 0, 1)$. Тогда последний дивизор соответствует некоторому дивизору Вейля $D = \sum n_i P_i$ на $X - Z$, и мы определим степень первоначального дивизора как $\deg D = \sum n_i$. Из доказательства следствия 6.10 видно, что если функция $f \in K$ обратима в Z, то степень главного дивизора (f) на $X - Z$ равна 0. Поэтому степень дивизора Картье на X определена корректно, и, переходя к классам линейной эквивалентности, мы получаем сюръективный гомоморфизм $\deg\colon \mathrm{CaCl}\, X \to \mathbf{Z}$.

Пусть теперь P_0 — точка $(0, 1, 0)$, как и в случае неособой кубической кривой. Каждой замкнутой точке $P \in X - Z$ сопоставим дивизор Картье D_P, который равен 1 в окрестности Z и соответствует дивизору Вейля $P - P_0$ на $X - Z$. Заметим прежде всего, что построенное таким образом отображение инъективно. В самом деле, если $P \neq Q$ — две точки на $X - Z$ и если $D_P \sim D_Q$, то должна существовать функция $f \in K^*$, обратимая в Z и такая, что $(f) = P - Q$ на $X - Z$. Тогда f задает морфизм X на $\mathbf{P}^1$, который должен быть бирациональным. Но в таком случае локальное кольцо точки Z на X должно доминировать над кольцом дискретного нормирования некоторой точки на $\mathbf{P}^1$, что невозможно, поскольку точка Z особая.

Для того чтобы показать, что всякий дивизор из $\mathrm{CaCl}^\circ X$ линейно эквивалентен дивизору D_P для некоторой точки $P \in X - Z$, воспользуемся тем же способом, что и в случае неособой кубической кривой (6.10.2). Следует заметить только, что геометрические конструкции $R \mapsto T$ и $P, Q \mapsto R, T$, описанные в 6.10.2, остаются внутри $X - Z$. Таким образом, группа $\mathrm{CaCl}^\circ X$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством замкнутых точек в $X - Z$, превращая его в групповое многообразие.

Отождествим его с групповым многообразием $\mathbf{G}_a$. Мы знаем, конечно, что кривая X рациональна и что $X - Z \simeq \mathbf{A}^1_k$ (упр. 3.2 гл. I). Но на самом деле если выбрать правильную параметризацию, то можно установить соответствие и групповых законов. Так, например, определим морфизм $\mathbf{G}_a = \operatorname{Spec} k[t]$ в $X - Z$ формулой $t \simeq (t, 1, t^3)$. Очевидно, что он является изоморфизмом многообразий. Используя некоторые элементарные факты из аналитической геометрии (это мы оставляем читателю!), получаем, что если $P = (t, 1, t^3)$ и $Q = (u, 1, u^3)$, то точка T, построенная в 6.10.2, имеет вид $(t + u, 1, (t + u)^3)$. Это устанавливает изоморфизм между групповыми многообразиями $\mathbf{G}_a$ и $X - Z$ с групповой структурой $\mathrm{CaCl}^\circ X$.

Обратимые пучки

Напомним, что *обратимым пучком* на окольцованном пространстве X называется локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль ранга 1. Мы сейчас увидим, что обратимые пучки на схеме тесно связаны с классами дивизоров по модулю линейной эквивалентности.

Предложение 6.12. *Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — обратимые пучки на окольцованном пространстве X. Тогда пучок $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ тоже обратим. Для каждого обратимого пучка $\mathcal{L}$ на X существует обратимый пучок $\mathcal{L}^{-1}$, такой, что $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$.*

Д о к а з а т е л т с т в о. Первое утверждение очевидно, поскольку пучки $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ локально свободны ранга 1 и $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X$. Для доказательства второго утверждения возьмем в качестве $\mathcal{L}^{-1}$ двойственный к $\mathcal{L}$ пучок $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Тогда $\check{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \mathcal{O}_X$, согласно упр. 5.1.

Определение. Для любого окольцованного пространства X определим *группу Пикара* $\operatorname{Pic} X$ как группу классов с точностью до изоморфизма обратимых пучков на X относительно операции $\otimes$. Предыдущее предложение показывает, что это на самом деле группа.

Замечание 6.12.1. Позднее в упр. 4.5 гл. III мы увидим, что $\operatorname{Pic} X$ можно интерпретировать как группу когомологий $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Определение. Пусть D — дивизор Картье на схеме X, представленный системой $\{(U_i, f_i)\}$. Определим подпучок $\mathcal{L}(D)$ пучка полных колец частных $\mathcal{K}$ как $\mathcal{O}_X$-подмодуль в $\mathcal{K}$, порожденный функциями f_i^{-1} на U_i. Так как функции f_i/f_j обратимы на $U_i \cap U_j$, то f_i^{-1} и f_j^{-1} порождают один и тот же $\mathcal{O}_X$-модуль и, следовательно, пучок $\mathcal{L}(D)$ определен корректно. Будем называть его *пучком, ассоциированным* с дивизором D.

Предложение 6.13. *Пусть X — некоторая схема. Тогда*

(a) *для всякго дивизора Картье D пучок $\mathcal{L}(D)$ является обратимым пучком на X; отображение $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ задает взаимно* *однозначное соответствие между дивизорами Картье на X и обратимыми подпучками пучка* $\mathcal{K}$;

(b) $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$;

(c) $D_1 \sim D_2$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{L}(D_1) \simeq \mathcal{L}(D_2)$ *как абстрактные обратимые пучки (т. е. безотносительно к вложению в* $\mathcal{K}$).

Доказательство. (a) Так как $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$, то отображение $\mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{L}(D)|_{U_i}$, определенное формулой $1 \to f_i^{-1}$, является изоморфизмом. Стало быть, пучок $\mathcal{L}(D)$ обратим. По пучку $\mathcal{L}(D)$ и его вложению в $\mathcal{K}$ дивизор Картье D можно восстановить, сопоставляя U_i элемент f_i, являющийся обратным к локальному образующему элементу пучка $\mathcal{L}(D)$. Для всякого обратимого подпучка в $\mathcal{K}$ эта конструкция приводит к некоторому дивизору Картье, так что мы получаем требуемое взаимно однозначное соответствие.

(b) Если D_1 и D_2 локально определяются элементами f_i и g_i соответственно, то $\mathcal{L}(D_1 - D_2)$ локально порождается элементом $f_i^{-1}g_i$, так что $\mathcal{L}(D_1 - D_2) = \mathcal{L}(D_1) \cdot \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ как подпучки в $\mathcal{K}$. Последнее произведение изоморфно, очевидно, абстрактному тензорному произведению $\mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.

(c) Используя утверждение (b), достаточно показать, что дивизор $D = D_1 - D_2$ тогда и только тогда является главным, когда $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{O}_X$. Если D — главный дивизор, определенный сечением $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$, то пучок $\mathcal{L}(D)$ глобально порождается элементом f^{-1}, следовательно, сопоставление $1 \mapsto f^{-1}$ задает изоморфизм $\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L}(D)$. Обратно, если задан такой изоморфизм, то образ 1 является некоторым элементом из $\Gamma(X, \mathcal{K}^*)$, обратный к которому будет определять D как главный дивизор.

Следствие 6.14. *На любой схеме X отображение $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ задает инъективный гомоморфизм группы* CaCl X *классов дивизоров Картье по модулю линейной эквивалентности в группу* Pic X.

Замечание 6.14.1. Отображение CaCl $X \to$ Pic X может не быть сюръективным, поскольку могут существовать обратимые пучки на X, не изоморфные никакому обратимому подпучку в $\mathcal{K}$. Соответствующий пример, принадлежащий Клейману, приведен у Хартсхорна [5, 1.1.3, стр. 9]. С другой стороны, это отображение является изоморфизмом в достаточно общей ситуации. Накаи [2, стр. 301] показал, что оно является изоморфизмом всегда, когда X проективно над некоторым полем. Мы покажем сейчас, что оно изоморфизм в случае целых схем.

Предложение 6.15. *Пусть X — целая схема. Тогда гомоморфизм* CaCl $X \to$ Pic X *из* 6.14 *является изоморфизмом.*

Доказательство. Нужно показать только, что каждый обратимый пучок изоморфен подпучку пучка $\mathcal{K}$, который в этом случае является постоянным пучком K, где K — поле функций на X. Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный обратимый пучок. Рассмотрим пучок $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}$. На любом открытом множестве U, на котором $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$, имеем изоморфизм $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$, так что на U он постоянен. Теперь из того, что X неприводимо, следует, что любой пучок, ограничение которого на каждое открытое множество из некоторого покрытия X постоянно, является на самом деле постоянным пучком на всем X. Таким образом, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$ изоморфен постоянному пучку $\mathcal{K}$ на X, и естественное отображение $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$ реализует $\mathcal{L}$ в виде подпучка пучка $\mathcal{K}$.

Следствие 6.16. *Пусть X — нётерова целая отделимая и локально факториальная схема. Тогда существует естественный изоморфизм* Cl $X \simeq$ Pic X.

Доказательство. Это непосредственно следует из предложений 6.11 и 6.15.

Следствие 6.17. *Если $X = \mathbf{P}_k^n$, где k — некоторое поле, то всякий обратимый пучок на X изоморфен пучку вида $\mathcal{O}(l)$ для некоторого $l \in \mathbf{Z}$.*

Доказательство. Согласно 6.4, Cl $X \simeq \mathbf{Z}$, так что по 6.16 Pic $X \simeq \mathbf{Z}$. Более того, образующим элементом группы Cl X является класс гиперплоскости, которой соответствует обратимый пучок $\mathcal{O}(1)$. Следовательно, Pic X является свободной абелевой группой, порожденной пучком $\mathcal{O}(1)$, и всякий обратимый пучок $\mathcal{L}$ на X изоморфен пучку $\mathcal{O}(l)$ для некоторого $l \in \mathbf{Z}$.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о подсхемах коразмерности один на произвольной схеме.

Определение. Дивизор Картье на схеме X называется *эффективным*, если его можно представить в виде $\{(U_i, f_i)\}$, где все $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$. Для эффективного дивизора Картье определим *ассоциированную* с ним *подсхему коразмерности один* Y как замкнутую подсхему, заданную пучком идеалов $\mathcal{J}$, который локально порожден элементами f_i.

Замечание 6.17.1. Ясно, что это задает взаимно однозначное соответствие между эффективными дивизорами Картье на X и *локально главными* замкнутыми подсхемами $Y \subset X$, т. е. подсхемами, пучки идеалов которых локально порождаются одним элементом. Отметим также, что если X — целая отделимая нётерова локально факториальная схема, так что по 6.11 на ней дивизоры Картье соответствуют дивизорам Вейля, то эффективные дивизоры Картье в точности соответствуют эффективным дивизорам Вейля.

Предложение 6.18. *Пусть D — эффективный дивизор Картье на схеме X и Y — ассоциированная с ним локально главная замкнутая подсхема. Тогда $\mathcal{J}_Y \simeq \mathcal{L}(-D)$.*

Доказательство. Пучок $\mathcal{L}(-D)$ является подпучком пучка $\mathcal{K}$, порожденным локально элементами f_i. Так как дивизор D эффективен, то он является на самом деле подпучком пучка $\mathcal{O}_X$ и представляет собой не что иное, как пучок идеалов $\mathcal{J}_Y$ подсхемы Y.

Упражнения

6.1. Пусть X — схема, удовлетворяющая условию (*). Показать, что тогда $X \times \mathbf{P}^n$ тоже удовлетворяет условию (*) и $\mathrm{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) \simeq \mathrm{Cl}\, X \times \mathbf{Z}$.

***6.2.** *Многообразия в проективном пространстве.* Пусть k — алгебраически замкнутое поле и X — замкнутое подмногообразие в $\mathbf{P}^n_k$, неособое в коразмерности один (следовательно, удовлетворяющее условию (*)). Для любого дивизора $D = \sum n_i Y_i$ на X определим *степень* D как $\sum n_i \deg Y_i$, где $\deg Y_i$ — степень Y_i, рассматриваемого как проективное многообразие (§ 7 гл. I).

(a) Пусть V — неприводимая гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$, не содержащая X, и Y_i — неприводимые компоненты пересечения $V \cap X$. Тогда, согласно упр. 1.8 гл. I, коразмерность Y_i в X равна 1. Для каждого i пусть f_i — локальное уравнение для V на некотором открытом множестве U_i в $\mathbf{P}^n$, для которого $Y_i \cap U_i \neq \varnothing$, и пусть $n_i = v_{Y_i}(\bar{f}_i)$, где $\bar{f}_i$ — ограничение f_i на $U_i \cap X$. Определим *дивизор* $V \cdot X$ на X как $\sum n_i Y_i$. Показать, что по линейности мы получаем корректно определенный гомоморфизм из подгруппы группы $\mathrm{Div}\, \mathbf{P}^n$, состоящей из дивизоров, не содержащих X, в группу $\mathrm{Div}\, X$.

(b) Пусть D — главный дивизор на $\mathbf{P}^n$ и дивизор $D \cdot X$ на X определен, как в п. (a); показать тогда, что $D \cdot X$ является главным дивизором на X. Таким образом, мы получаем гомоморфизм $\mathrm{Cl}\, \mathbf{P}^n \to \mathrm{Cl}\, X$.

(c) Показать, что целое число n_i, определенное в (a), совпадает с кратностью пересечения $i(X, V; Y_i)$, определенной в § 7 гл. I. Воспользоваться обобщенной теоремой Безу (7.7 гл. I) и показать, что для любого дивизора D на $\mathbf{P}^n$ имеет место равенство

$$\deg(D \cdot X) = (\deg D) \cdot (\deg X).$$

(d) Пусть D — главный дивизор на X. Показать, что существует такая рациональная функция f на $\mathbf{P}^n$, что $D = (f) \cdot X$. Вывести отсюда, что $\deg D = 0$. Таким образом, отображение степени определяет гомоморфизм $\deg\colon \mathrm{Cl}\, X \to \mathbf{Z}$. (Это дает другое доказательство следствия 6.10, поскольку всякая полная неособая кривая проективна.) Показать, наконец, что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}\,\mathbf{P}^n \arrow[r] \arrow[d, "\deg"', "\sim"] & \mathrm{Cl}\, X \arrow[d, "\deg"] \\
\mathbf{Z} \arrow[r, "\cdot(\deg X)"] & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

и, в частности, что отображение $\mathrm{Cl}\, \mathbf{P}^n \to \mathrm{Cl}\, X$ инъективно.

***6.3.** *Конусы.* В этом упражнении мы сравним группу классов дивизоров проективного многообразия V с группой классов дивизоров соответствующего ему конуса (упр. 2.10 гл. I). Пусть V — проективное многообразие в $\mathbf{P}^n$ размерности $\geqslant 1$, неособое в коразмерности 1, и пусть $X = C(V)$ — аффинный конус над V в $\mathbf{A}^{n+1}$, а $\bar{X}$ — его проективное замыкание в $\mathbf{P}^{n+1}$. Обозначим через $P \in X$ вершину конуса X.

(a) Пусть $\pi\colon \bar{X} - P \to V$ — отображение проекции. Показать, что V можно покрыть такими открытыми подмножествами U_i, что $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbf{A}^1$ для каждого i, и показать, что тогда, как в предложении 6.6, гомоморфизм $\pi^*\colon \mathrm{Cl}\, V \to \mathrm{Cl}(\bar{X} - P)$ является изоморфизмом. Так как $\mathrm{Cl}\, \bar{X} \simeq \mathrm{Cl}(\bar{X} - P)$, то отсюда следует также, что $\mathrm{Cl}\, V \simeq \mathrm{Cl}\, \bar{X}$.

(b) Рассмотрим $V \subset \bar{X}$ как бесконечно удаленное гиперплоское сечение. Показать, что класс дивизора V в $\mathrm{Cl}\, \bar{X}$ совпадает с π^* от класса дивизора $V \cdot H$, где H — любая гиперплоскость в $\mathbf{P}^n$, не содержащая V. Используя 6.5, вывести отсюда, что имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathrm{Cl}\, V \to \mathrm{Cl}\, X \to 0,$$

где первая стрелка переводит 1 в $V \cdot H$, а вторая совпадает с гомоморфизмом π^* с последующим его ограничением на $X - P$ и вложением в X. (Инъективность первой стрелки следует из предыдущего упражнения.)

(c) Пусть $S(V)$ — однородное координатное кольцо многообразия V (которое является также аффинным координатным кольцом X). Показать, что $S(V)$ тогда и только тогда факториально, когда (1) многообразие V проективно нормально (упр. 5.14) и (2) $\mathrm{Cl}\, V \simeq \mathbf{Z}$ и порождается классом дивизора $V \cdot H$.

(d) Пусть $\mathcal{O}_P$ — локальное кольцо точки $P \in X$. Показать, что отображение естественного ограничения индуцирует изоморфизм $\mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_P)$.

6.4. Пусть k — поле характеристики $\neq 2$, $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ — непостоянный многочлен, *свободный от квадратов*, т. е. в разложении его на неприводимые многочлены не встречается одинаковых множителей, и пусть $A = k[x_1, \ldots, x_n, z]/(z^2 - f)$. Показать, что кольцо A целозамкнуто. [*Указание.* Показать, что полем частных кольца A является поле $K = k(x_1, \ldots, x_n)[z]/(z^2 - f)$. Оно является расширением Галуа поля $k(x_1, \ldots, x_n)$ с группой Галуа $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, порожденной автоморфизмом $z \mapsto -z$. Пусть $\alpha = g + hz \in K$, где $g, h \in k(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда минимальный многочлен элемента α имеет вид $X^2 - 2gX + (g^2 - h^2 f)$. Показать теперь, что α цел над $k[x_1, \ldots, x_n]$ тогда и только тогда, когда $g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Вывести отсюда, что кольцо A является целым замыканием кольца $k[x_1, \ldots, x_n]$ в K.]

***6.5.** *Квадратичные гиперповерхности.* Пусть k — поле характеристики $\neq 2$ и X — аффинная квадратичная гиперповерхность (квадрика) $\mathrm{Spec}\, k[x_0, \ldots, x_n]/(x_0^2 + \ldots + x_r^2)$ (ср. упр. 5.12 гл. I).

(a) Показать, что X нормальна, если $r \geqslant 2$ (воспользоваться упр. 6.4)

(b) С помощью подходящей линейной замены координат показать, что уравнение квадрики X может быть записано в виде $x_0 x_1 = x_2^2 + \ldots + x_r^2$. По аналогии с примером 6.5.2 показать, что

(1) если $r = 2$, то $\mathrm{Cl}\, X \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$;

(2) если $r = 3$, то $\mathrm{Cl}\, X \simeq \mathbf{Z}$ (воспользоваться 6.6.1 и упр. 6.3);

(3) если $r \geqslant 4$, то $\mathrm{Cl}\, X = 0$.

(c) Пусть теперь Q — проективная квадратичная гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$, определенная тем же самым уравнением. Показать, что

(1) если $r = 2$, то $\mathrm{Cl}\, Q \simeq \mathbf{Z}$ и класс гиперплоского сечения $Q \cdot H$ является удвоенной образующей;

(2) если $r = 3$, то $\mathrm{Cl}\, Q \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$;

(3) если $r \geqslant 4$, то $\mathrm{Cl}\, Q \simeq \mathbf{Z}$ и порожден классом $Q \cdot H$.

(d) Доказать теорему Клейна, утверждающую, что если $r \geqslant 4$ и Y — неприводимое подмногообразие коразмерности один на Q, то существует такая неприводимая гиперповерхность $V \subset \mathbf{P}^n$, что $V \cap Q = Y$ с кратностью 1. Иначе говоря, Y является полным пересечением. (Для этого показать сначала, что однородное координатное кольцо $S(Q) = k[x_0, \ldots, x_n]/(x_0^2 + \ldots + x_n^2)$ факториально.)

6.6. Пусть X — неособая плоская кубическая кривая $y^2z = x^3 - xz^2$ из примера 6.10.2.

(a) Показать, что три точки P, Q, R на X коллинеарны тогда и только тогда, когда $P + Q + R = 0$ в смысле группового закона на X. (Напомним, что точка $P_0 = (0, 1, 0)$ является нулевым элементом в групповой структуре на X.)

(b) Показать, что точка $P \in X$ имеет порядок 2 в группе X тогда и только тогда, когда касательная прямая к X в P проходит через точку P_0.

(c) Показать, что точка $P \in X$ имеет порядок 3 в группе X тогда и только тогда, когда она является точкой перегиба. (*Точкой перегиба* плоской кривой называется неособая точка P, касательная в которой имеет кратность пересечения с кривой в точке P, большую либо равную 3).

(d) Пусть $k = \mathbf{C}$. Показать, что точки кривой X с координатами в $\mathbf{Q}$ образуют подгруппу группы X. Можно ли описать структуру этой подгруппы явно?

***6.7.** Пусть X — кубическая кривая $y^2z = x^3 + x^2z$ на $\mathbf{P}^2$ с обыкновенной двойной точкой $(0, 0, 1)$. По аналогии с примером 6.11.4 показать, что группа классов дивизоров Картье $\mathrm{CaCl}^\circ X$ степени 0 естественно изоморфна мультипликативной группе $\mathbf{G}_m$.

6.8. (a) Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем. Показать, что соответствие $\mathcal{L} \mapsto f^*\mathcal{L}$ индуцирует гомоморфизм групп Пикара $f^*\colon \mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, X$.

(b) Пусть f — конечный морфизм неособых кривых. Показать тогда, что гомоморфизм из (a) переходит при изоморфизме 6.16 в гомоморфизм $f^*\colon \mathrm{Cl}\, Y \to \mathrm{Cl}\, X$, определенный в тексте.

(c) Пусть X — локально факториальная целая замкнутая подсхема в $\mathbf{P}_k^n$ и $f\colon X \to \mathbf{P}^n$ — отображение вложения. Показать тогда, что гомоморфизм f^* групп Пикара соответствует при изоморфизме 6.16 гомоморфизму групп классов дивизоров, определенному в упр. 6.2.

***6.9.** *Особые кривые.* Здесь мы приводим другой способ вычисления группы Пикара особой кривой. Пусть X — проективная кривая над k, $\tilde{X}$ — ее нормализация и $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — соответствующее отображение проекции (упр. 3.8). Для каждой точки $P \in X$ пусть $\mathcal{O}_P$ обозначает ее локальное кольцо, а $\tilde{\mathcal{O}}_P$ — целое замыкание $\mathcal{O}_P$. Для любого кольца (или пучка колец) Λ через Λ^* мы будем обозначать его группу обратимых элементов.

(a) Показать, что имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \to \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^*/\mathcal{O}_P^* \to \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}\, \tilde{X} \to 0.$$

[*Указание.* Представить $\mathrm{Pic}\, X$ и $\mathrm{Pic}\, \tilde{X}$ в виде групп классов дивизоров Картье по модулю главных дивизоров и воспользоваться точной последовательностью пучков на X

$$0 \to \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}^*/\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \to 0.]$$

(b) Воспользоваться утверждением (a) и дать другое доказательство того факта, что на плоской каспидальной кубической кривой X имеет место следующая точная последовательность групп:

$$0 \to \mathbf{G}_a \to \mathrm{Pic}\, X \to \mathbf{Z} \to 0,$$

а на плоской кубической кривой с обыкновенной двойной точкой — следующая точная последовательность:

$$0 \to \mathbf{G}_m \to \mathrm{Pic}\, X \to \mathbf{Z} \to 0.$$

6.10. *Группа Гротендика $K(X)$.* Пусть X — нётерова схема. Определим группу $K(X)$ как факторгруппу свободной абелевой группы, порожденной всеми когерентными пучками на X, по подгруппе, порожденной всевозможными выражениями вида $\mathcal{F} - \mathcal{F}' - \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ составляют точную последовательность $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ когерентных пучков на X. Образ когерентного пучка $\mathcal{F}$ в $K(X)$ будем обозначать через $\gamma(\mathcal{F})$.

(a) Показать, что если $X = \mathbf{A}_k^1$, то $K(X) \simeq \mathbf{Z}$.

(b) Пусть X — произвольная целая схема и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Определим *ранг* пучка $\mathcal{F}$ как $\dim_K \mathcal{F}_\xi$, где ξ — общая точка X и $K = \mathcal{O}_\xi$ — поле функций на X. Показать, что ранг определяет сюръективный гомоморфизм $\mathrm{rank}\colon K(X) \to \mathbf{Z}$.

(c) Показать, что для замкнутой подсхемы Y в X имеет место точная последовательность

$$K(Y) \to K(X) \to K(X - Y) \to 0,$$

где первое отображение определяется посредством продолжения пучков нулем, а второе является отображением ограничения. [*Указание.* Для проверки точности в среднем члене показать, что если носитель когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X содержится в Y, то существует фильтрация $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \ldots \mathcal{F}_n = 0$, такая, что каждый факторпучок $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}$ является $\mathcal{O}_Y$-модулем. Для доказательства сюръективности второй стрелки воспользоваться упр. 5.15.]

Дальнейшую информацию о группе $K(X)$ и ее применении к обобщенной теореме Римана — Роха можно найти в следующих источниках: Борель и Серр [1], Манин Ю. И. [1]; см. также добавление А.

***6.11.** *Группа Гротендика неособой кривой.* Пусть X — неособая кривая над алгебраически замкнутым полем k. Показать, что $K(X) \simeq \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathbf{Z}$, доказав следующие утверждения (a) — (d).

(a) Для любого дивизора $D = \sum n_i P_i$ на X положим $\psi(D) = \sum n_i \gamma(k(P_i))$, где $k(P_i)$ — пучок-небоскреб, равный k в точке P_i и 0 всюду вне ее. Для эффективного дивизора D пусть $\mathcal{O}_D$ обозначает структурный пучок соответствующей подсхемы коразмерности 1. Показать тогда, что $\psi(D) = \gamma(\mathcal{O}_D)$. Далее воспользоваться предложением 6.18 и показать, что для любого D $\psi(D)$ зависит только от класса его линейной эквивалентности, так что ψ определяет гомоморфизм $\psi\colon \mathrm{Cl}\, X \to K(X)$.

(b) Показать, что для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существуют локально свободные пучки $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ и точная последовательность вида $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to 0$. Пусть $r_0 = \mathrm{rank}\, \mathcal{E}_0$, $r_1 = \mathrm{rank}\, \mathcal{E}_1$. Положим по определению $\det \mathcal{F} = (\bigwedge^{r_0} \mathcal{E}_0) \otimes (\bigwedge^{r_1} \mathcal{E}_1)^{-1} \in \mathrm{Pic}\, X$, где $\bigwedge$ обозначает внешнюю степень (упр. 5.16). Показать, что $\det \mathcal{F}$ не зависит от выбора локально свободной резольвенты и что он задает гомоморфизм $\det\colon K(X) \to \mathrm{Pic}\, X$. Показать далее, что $\det(\psi(D)) = \mathcal{L}(D)$ для любого дивизора D.

(c) Показать, что для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ ранга r существует дивизор D на X и точная последовательность вида $0 \to \mathcal{L}(D)^{\oplus r} \to \mathcal{F} \to \mathcal{T} \to 0$, где $\mathcal{T}$ — пучок кручения. Вывести отсюда, что если $\mathcal{F}$ — пучок ранга r, то $\gamma(\mathcal{O}) - r\gamma(\mathcal{T}_X) \in \mathrm{Im}\, \psi$.

(d) Используя отображения ψ, $\det$, rank и $1 \mapsto \gamma(\mathcal{O}_X)$ из $\mathbf{Z}$ в $K(X)$, показать, что $K(X) \simeq \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathbf{Z}$.

6.12. Пусть X — полная неособая кривая. Показать, что для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существует однозначным образом определенная *степень* $\deg \mathcal{F} \in \mathbf{Z}$, такая, что

(1) $\deg \mathcal{L}(D) = \deg D$ для любого дивизора D;

(2) если $\mathcal{F}$ — *пучок кручения* (т. е. пучок, слой которого в общей точке равен 0), то $\deg \mathcal{F} = \sum \mathrm{length}\,(\mathcal{F}_P)$;

(3) если $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — точная последовательность пучков, то $\deg \mathcal{F} = \deg \mathcal{F}' + \deg \mathcal{F}''$.

§ 7. Проективные морфизмы

В этом параграфе мы изложим некоторые понятия и свойства, связанные с морфизмами схем в проективное пространство. Мы покажем, в частности, каким образом морфизм схемы в проективное пространство может быть задан с помощью обратимого пучка и множества его глобальных сечений, дадим некоторые критерии того, чтобы морфизм был вложением, и изучим тесно связанные с этими вопросами свойства обильных обратимых пучков. После этого мы изложим классический язык линейных систем, который с точки зрения схем представляется наиболее трудным по сравнению с другими понятиями, связанными с обратимыми пучками и их глобальными сечениями. Однако геометрическая ясность, доставляемая понятием линейной системы, часто бывает очень полезной. В конце параграфа будет определен $\mathbf{Proj}$ градуированного пучка алгебр на схеме X и рассмотрены связанные с этой конструкцией два важных примера, а именно проективное расслоение $\mathbf{P}(\mathscr{E})$, ассоциированное с локально свободным пучком $\mathscr{E}$, и раздутие когерентного пучка идеалов.

Морфизмы схем в $\mathbf{P}^n$

Пусть A — фиксированное кольцо и $\mathbf{P}_A^n = \operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_n]$ — проективное пространство над A. На $\mathbf{P}_A^n$ определен обратимый пучок $\mathcal{O}(1)$, причем однородные координаты $x_0, \ldots, x_n$ на $\mathbf{P}_A^n$ можно рассматривать как его глобальные сечения $x_0, \ldots, x_n \in \Gamma(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(1))$. Легко видеть, что пучок $\mathcal{O}(1)$ порождается этими глобальными сечениями, т. е. образы этих сечений порождают слой $\mathcal{O}(1)_P$ пучка $\mathcal{O}(1)$ как модуль над локальным кольцом $\mathcal{O}_P$ для любой точки $P \in \mathbf{P}_A^n$.

Пусть теперь X — произвольная схема над A и $\varphi: X \to \mathbf{P}_A^n$ — некоторый A-морфизм из X в $\mathbf{P}_A^n$. Тогда пучок $\mathscr{L} = \varphi^* \mathcal{O}(1)$ обратим на X и порождается своими глобальными сечениями $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathscr{L})$, где $s_i = \varphi^*(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Оказывается, что и, обратно, пучок $\mathscr{L}$ и сечения s_i определяют морфизм φ.

Теорема 7.1. *Пусть A — кольцо и X — схема над A. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *Пусть $\varphi: X \to \mathbf{P}_A^n$ — морфизм над A. Тогда $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$ является обратимым пучком на X, который порождается глобальными сечениями $s_i = \varphi^*(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.*

(b) *Обратно, пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X и $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ — глобальные сечения, его порождающие. Тогда существует единственный A-морфизм $\varphi: X \to \mathbf{P}_A^n$, такой, что $\mathscr{L} \simeq \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ и $s_i = \varphi^*(x_i)$ при этом изоморфизме.*

Доказательство. Утверждение (a) вытекает из предшествующего обсуждения. Докажем утверждение (b). Пусть задан пучок $\mathscr{L}$ и глобальные сечения $s_0, \ldots, s_n$, которые его порождают. Для каждого i положим $X_i = \{P \in X \mid (s_i)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathscr{L}_P\}$. Тогда (как мы уже видели раньше) X_i является открытым подмножеством в X и, поскольку s_i порождают $\mathscr{L}$, открытые подмножества X_i должны покрывать все X. Определим морфизм из X_i в стандартное открытое множество $U_i = \{x_i \neq 0\}$ в $\mathbf{P}_A^n$. Для этого напомним, что $U_i \simeq \operatorname{Spec} A[y_0, \ldots, y_n]$, где $y_j = x_j/x_i$ с пропущенным $y_i = 1$. Определим гомоморфизм колец $A[y_0, \ldots, y_n] \to \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ над A, полагая $y_j \to s_j/s_i$. Отображение имеет смысл, поскольку $(s_i)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathscr{L}_P$ для каждой точки $P \in X_i$ и $\mathscr{L}$ — локально свободный пучок ранга 1, так что отношение s_j/s_i является корректно определенным элементом из $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$. Согласно упр. 2.4, этот гомоморфизм колец определяет морфизм схем (над A) $X_i \to U_i$. Ясно, что морфизмы $X_i \to U_i$ склеиваются на пересечениях (ср. шаг 3 доказательства теоремы 3.3), и мы получаем морфизм $\varphi: X \to \mathbf{P}_A^n$. Из конструкции очевидно, что φ является A-морфизмом, что $\mathscr{L} \simeq \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ и что сечения s_i соответствуют $\varphi^*(x_i)$ при этом изоморфизме. Очевидно также, что морфизм с этими свойствами может быть получен только с помощью такой конструкции, так что φ определен однозначно.

Пример 7.1.1. (Автоморфизмы пространства $\mathbf{P}_k^n$.) Пусть $\|a_{ij}\|$ — обратимая матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$ с элементами из поля k. Тогда преобразование $x_i' = \sum a_{ij} x_j$ определяет автоморфизм кольца многочленов $k[x_0, \ldots, x_n]$ и, следовательно, также автоморфизм $\mathbf{P}_k^n$. Пусть $\lambda \in k$ — отличный от нуля элемент, тогда матрица $\|\lambda a_{ij}\|$ определяет тот же самый автоморфизм $\mathbf{P}_k^n$. Тем самым мы приходим к рассмотрению группы $\mathrm{PGL}(n, k) = \mathrm{GL}(n+1, k)/k^*$, которая действует на $\mathbf{P}_k^n$ как группа автоморфизмов. Рассматривая точки $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$, легко показать, что эта группа действует вполне строго, т. е. если элемент $g \in \mathrm{PGL}(n, k)$ индуцирует тривиальный автоморфизм $\mathbf{P}_k^n$, то он единичный.

Теперь покажем обратное: всякий k-автоморфизм $\mathbf{P}_k^n$ принадлежит $\mathrm{PGL}(n, k)$. Это обобщение довольно простого факта об автоморфизмах пространства $\mathbf{P}_k^1$ (упр. 6.6 гл. I). Итак, пусть φ — произвольный k-автоморфизм $\mathbf{P}_k^n$. Из 6.17 нам известно, что группа $\operatorname{Pic} \mathbf{P}_k^n$ изоморфна $\mathbf{Z}$ и порождена пучком $\mathcal{O}(1)$. Автоморфизм φ индуцирует некоторый автоморфизм группы $\operatorname{Pic} \mathbf{P}^n$, так что $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$ тоже должен быть образующей этой группы. Следовательно, пучок $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$ изоморфен $\mathcal{O}(1)$ или $\mathcal{O}(-1)$. Но пучок $\mathcal{O}(-1)$ не имеет глобальных сечений, откуда следует, что $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathcal{O}(1)$. Согласно 5.13, $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1))$ является векторным пространством над k с базисом $x_0, \ldots, x_n$. Поскольку φ —

автоморфизм, то $s_i = \varphi^* (x_i)$ тоже должны образовывать базис этого векторного пространства, стало быть, $s_i = \sum a_{ij} x_j$, где $\| a_{ij} \|$ — некоторая обратимая матрица с элементами из k. Так как по предыдущей теореме φ однозначно определяется сечениями s_i, то он должен совпадать с автоморфизмом, задаваемым матрицей $\| a_{ij} \|$ как элементом из $\mathrm{PGL}(n, k)$.

Пример 7.1.2. Пусть X — схема над A, $\mathscr{L}$ — обратимый пучок и $s_0, \ldots, s_n$ — произвольное множество глобальных сечений $\mathscr{L}$, которые не обязательно его порождают. Тогда можно найти открытое множество $U \subset X$ (возможно, пустое), над которым s_i порождают $\mathscr{L}$. В таком случае пучок $\mathscr{L}|_U$ и сечения $s_i|_U$ задают морфизм $U \to \mathbf{P}^n_A$. Это так, например, если взять $X = \mathbf{P}^n_A$, $\mathscr{L} = \mathscr{O}(1)$ и $s_i = x_i$, $i = 0, \ldots, n$ (опущено x_{n+1}). Тогда сечения s_i порождают $\mathscr{L}$ всюду, кроме точки $(0, 0, \ldots, 0, 1) = P_0$, т. е. $U = \mathbf{P}^{n+1} - P_0$, и соответствующий морфизм $U \to \mathbf{P}^n$ есть не что иное, как проекци из точки P_0 в $\mathbf{P}^n$ (упр. 3.14 гл. I).

Тепепь дадим некоторые критерии того, чтобы морфизм схемы в проективное пространство являлся замкнутым вложением.

Предложение 7.2. *Пусть φ: $X \to \mathbf{P}^n_A$ — морфизм схем над A, соответствующий обратимому пучку $\mathscr{L}$ на X и его глобальным сечениям $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathscr{L})$, как и выше. Морфизм φ тогда и только тогда является замкнутым вложением, когда выполняются следующие два условия:*

(1) *каждое окрытое множество $X_i = X_{s_i}$ аффинно,*

(2) *для каждого i гомоморфизм колец $A[y_0, \ldots, y_n] \to \Gamma(X_i, \mathscr{O}_{X_i})$, определенный формулами $y_j \mapsto s_j/s_i$, сюръективен.*

Доказательство. Предположим сначала, что φ — замкнутое вложение. Тогда $X_i = X \cap U_i$ является замкнутой подсхемой в U_i. Следовательно, X_i аффинно и соответствующее отображение колец сюръективно (см. 5.10). Обратно, предположим, что выполнены условия (1) и (2). Тогда каждое X_i является замкнутым подмножеством в U_i. Так как всегда $X_i = \varphi^{-1}(U_i)$ и X_i покрывают X, то ясно, что X является замкнутой подсхемой в $\mathbf{P}^n_A$.

При более сильных предположениях приведем еще один критерий локального характера.

Предложение 7.3. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле, X — проективная схема над k и φ: $X \to \mathbf{P}^n_k$ — морфизм (над k), определяемый пучком $\mathscr{L}$ и его сечениями $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathscr{L})$. Пусть $V \subset \Gamma(X, \mathscr{L})$ — подпространство, порожденное s_i. Морфизм φ тогда и только тогда является замкнутым вложением, когда выполняются следующие два условия:*

(1) *сечения из V разделяют точки, т. е. для любых двух различных замкнутых точек $P, Q \in X$ существует $s \in V$, такое, что $s \in \mathfrak{m}_P \mathscr{L}_P$ и $s \notin \mathfrak{m}_Q \mathscr{L}_Q$ или наоборот;*

(2) *сечения из V разделяют касательные векторы, т. е для каждой замкнутой точки $P \in X$ множество $\{s \in V \mid s_P \in \mathfrak{m}_P \mathscr{L}_P\}$ порождает векторное k-пространство $\mathfrak{m}_P \mathscr{L}_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathscr{L}_P$.*

Доказательство. Пусть φ — замкнутое вложение, тогда X можно считать замкнутой подсхемой в $\mathbf{P}^n_k$. В таком случае $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(1)$ и векторное пространство $V \subset \Gamma(X, \mathscr{O}_X(1))$ порождается образами $x_0, \ldots, x_n \in \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}(1))$. Для любых двух точек $P \neq Q$ в X существует гиперплоскость в $\mathbf{P}^n$, содержащая P, но не содержащая Q. Если $\sum a_i x_i = 0$ — ее уравнение, $a_i \in k$, то $s = \sum a_i x_i$, ограниченное на X, обладает свойством (1). Для проверки свойства (2) покажем, что гиперплоскости, проходящие через точку P, поднимаются до сечений, которые порождают пространство $\mathfrak{m}_P \mathscr{L}_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathscr{L}_P$. Для простоты пусть $P = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Тогда на аффинной карте $U_0 \simeq \operatorname{Spec} k[y_1, \ldots, y_n]$ пучок $\mathscr{L}$ тривиален, точка P имеет координаты $(0, 0, \ldots, 0)$ и $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ — это пространство, порожденное $y_1, \ldots, y_n$. Так как поле k алгебраически замкнуто, то всякая замкнутая точка в $\mathbf{P}^n_k$ имеет вид $(a_0, \ldots, a_n)$, $a_i \in k$, следовательно, точки и касательные векторы в P могут быть разделены гиперплоскостями с коэффициентами из поля k.

Обратно, пусть морфизм φ: $X \to \mathbf{P}^n$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Так как сечения из пространства V являются прообразами сечений пучка $\mathscr{O}(1)$ на $\mathbf{P}^n$, то условие (1), очевидно, означает, что φ инъективно как отображение множеств. Так как X проективно, а следовательно, собственно над k (см. 4.9), то образ $\varphi(X)$ замкнут в $\mathbf{P}^n$ (упр. 4.4) и отображение φ является собственным морфизмом (4.8 (e)). В частности, отображение φ замкнуто. Но будучи морфизмом, оно является также и непрерывным, так что φ — гомеоморфизм X на свой образ $\varphi(X)$, который является замкнутым подмножеством в $\mathbf{P}^n$. Для доказательства того, что φ — замкнутое вложение, остается показать только, что морфизм пучков $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n} \to \varphi_* \mathscr{O}_X$ сюръективен. Это можно сделать послойно, т.е. для каждой замкнутой точки P достаточно доказать сюръективность отображения слоев $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n, P} \to \mathscr{O}_{X, P}$. Но эти слои являются локальными кольцами с одинаковым полем вычетов k, и по условию (2) образ максимального идеала $\mathfrak{m}_{\mathbf{P}^n, P}$ порождает $\mathfrak{m}_{X, P}/\mathfrak{m}_{X, P}^2$. Нужно воспользоваться еще следствием 5.20, из которого вытекает, что пучок $\varphi_* \mathscr{O}_X$ когерентен на $\mathbf{P}^n$ и, следовательно, $\mathscr{O}_{X, P}$ является конечно порожденным $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n, P}$-модулем. Доказательство предложения непосредственно вытекает теперь из следующей леммы.

Лемма 7.4. *Пусть $f\colon A \to B$ — локальный гомоморфизм локальных нётеровых колец, такой, что*

(1) *отображение $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$ является изоморфизмом,*

(2) *отображение $\mathfrak{m}_A \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ сюръективно,*

(3) *B является конечно порожденным A-модулем.*

Тогда гомоморфизм f сюръективен.

Доказательство. Рассмотрим идеал $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_A B$ в B. Имеем $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_B$, и по условию (2) $\mathfrak{a}$ содержит множество образующих для $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$. Следовательно, из леммы Накаямы для локального кольца B и B-модуля $\mathfrak{m}_B$ следует, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_B$. Применим теперь эту лемму к A-модулю B. По условию (3) B — конечно порожденный A-модуль, а по условию (1) единичный элемент $1 \in B$ порождает $B/\mathfrak{m}_A B = B/\mathfrak{m}_B = A/\mathfrak{m}_A$, так что по лемме Накаямы 1 порождает B как A-модуль, т. е. отображение f сюръективно.

Обильные обратимые пучки

Теперь, когда мы установили, что задание морфизма схемы X в проективное пространство равносильно заданию некоторого обратимого пучка $\mathscr{L}$ на X и подходящего множества его глобальных сечений, изучение многообразий в проективном пространстве можно свести к изучению схем с некоторыми обратимыми пучками и заданными их глобальными сечениями. Напомним, что в § 5 было дано определение *относительно очень обильного пучка* на схеме X над Y: пучок $\mathscr{L}$ на X называется очень обильным относительно Y, если существует вложение $i\colon X \to \mathbf{P}_Y^n$, такое что $\mathscr{L} \simeq i^*\mathcal{O}(1)$. В случае $Y = \operatorname{Spec} A$ это равносильно тому, что $\mathscr{L}$ обладает множеством глобальных сечений $s_0, \ldots, s_n$, таких, что соответствующий морфизм $X \to \mathbf{P}_A^n$ является вложением. В 5.17 было показано также, что если $\mathscr{L}$ — очень обильный обратимый пучок на проективной схеме X над нётеровым кольцом A, то для любого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X существует целое число $n_0 > 0$, такое, что пучок $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ порождается своими глобальными сечениями для всякого $n \geqslant n_0$. Это последнее свойство — порождаемость пучка $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ глобальными сечениями — мы возьмем за определение более общего понятия обильного обратимого пучка. Это понятие во многих случаях оказывается более удобным, чем понятие очень обильного обратимого пучка.

Определение. Обратимый пучок $\mathscr{L}$ на нётеровой схеме X называется *обильным*, если для всякого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X существует целое число $n_0 > 0$ (зависящее от $\mathscr{F}$), такое, что для каждого $n \geqslant n_0$ пучок $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ порождается своими глобальными сечениями. (Здесь $\mathscr{L}^n = \mathscr{L}^{\otimes n}$ обозначает n-кратное тензорное произведение пучка $\mathscr{L}$ на себя.)

Замечание 7.4.1. Отметим, что понятие обильного пучка является абсолютным, т. е. зависит только от схемы X, в то время как понятие очень обильного пучка относительно, т. е. зависит от морфизма $X \to Y$.

Пример 7.4.2. Если схема X аффинна, то любой обратимый пучок на ней обилен, поскольку каждый когерентный пучок на аффинной схеме порождается своими глобальными сечениями (см. 5.5).

Замечание 7.4.3. Теорема Серра 5.17 утверждает, что всякий очень обильный пучок $\mathscr{L}$ на проективной схеме X над нётеровым кольцом A является обильным. Обратное, вообще говоря, неверно, но ниже в 7.6 мы покажем, что если пучок $\mathscr{L}$ обилен, то некоторая его степень $\mathscr{L}^m$ является очень обильным пучком. Так что в стабильном смысле обильный пучок — это то же самое, что и очень обильный пучок.

Замечание 7.4.4. В гл. III будет дана характеризация обильных обратимых пучков в терминах обращения в нуль некоторых групп когомологий (5.3 гл. III).

Предложение 7.5. *Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на нётеровой схеме X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *пучок $\mathscr{L}$ обилен;*

(ii) *пучок $\mathscr{L}^m$ обилен для всех $m > 0$;*

(iii) *пучок $\mathscr{L}^m$ обилен для некоторого $m > 0$.*

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) — непосредственное следствие определения обильности, а импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) тривиальна. Докажем, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что $\mathscr{L}^m$ обилен для некоторого $m > 0$. Тогда для заданного когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X существует $n_0 > 0$, такое, что пучок $\mathscr{F} \otimes (\mathscr{L}^m)^n$ порождается своими глобальными сечениями для всех $n \geqslant n_0$. Рассмотрим когерентный пучок $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}$. Тогда для него существует $n_1 > 0$, такое, что $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L} \otimes (\mathscr{L}^m)^n$ порождается своими глобальными сечениями для всех $n \geqslant n_1$. Аналогично для $k = 1, 2, \ldots, m-1$ существует $n_k > 0$, такое, что $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^k \otimes (\mathscr{L}^m)^n$ порождается своими глобальными сечениями для всех $n \geqslant n_k$. Теперь, если взять $N = m \cdot \max\{n_i \mid i = 0, 1, \ldots, m-1\}$, то пучок $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ будет порождаться своими глобальными сечениями для всех $n \geqslant N$. Следовательно, пучок $\mathscr{L}$ обилен.

Теорема 7.6. *Пусть X — схема конечного типа над нётеровым кольцом A и $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X. Пучок $\mathscr{L}$ обилен тогда* *и только тогда, когда* $\mathscr{L}^m$ *очень обилен над* Spec A *для некоторого* $m > 0$.

Доказательство. Пусть пучок $\mathscr{L}^m$ очень обилен для некоторого целого $m > 0$. Тогда существует вложение $i: X \to \mathbf{P}_A^n$, такое, что $\mathscr{L}^m \simeq i^* (\mathcal{O}(1))$. Пусть $\overline{X}$ — замыкание X в $\mathbf{P}_A^n$. Тогда $\overline{X}$ проективно над A и, согласно 5.17, пучок $\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)$ обилен на $\overline{X}$. Пусть теперь $\mathscr{F}$ — произвольный когерентный пучок на X, тогда по упр. 5.15 он продолжается до когерентного пучка $\overline{\mathscr{F}}$ на $\overline{X}$. Если $\overline{\mathscr{F}} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(l)$ порождается глобальными сечениями, то, разумеется, глобальными сечениями порождается и пучок $\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X(l)$. Стало быть, пучок $\mathscr{L}^m$ обилен на X, и, согласно 7.5, пучок $\mathscr{L}$ также обилен на X.

Обратно, предположим, что пучок $\mathscr{L}$ обилен на X. Для любой точки $P \in X$ пусть U — ее открытая аффинная окрестность, такая, что пучок $\mathscr{L}|_U$ свободен на U. Обозначим через Y замкнутое множество $X - U$, и пусть $\mathscr{I}_Y$ — его пучок идеалов с приведенной индуцированной структурой схемы. Тогда пучок $\mathscr{I}_Y$ когерентен на X, так что $\mathscr{I}_Y \otimes \mathscr{L}^n$ порождается глобальными сечениями для некоторого $n > 0$. В частности, существует такое сечение $s \in \Gamma(X, \mathscr{I}_Y \otimes \mathscr{L}^n)$, что $s_P \notin \mathfrak{m}_P (\mathscr{I}_Y \otimes \mathscr{L}^n)_P$. Поскольку $\mathscr{I}_Y \otimes \mathscr{L}^n$ можно рассматривать как подпучок пучка $\mathscr{L}^n$, то сечение s можно представлять себе как элемент из $\Gamma(X, \mathscr{L}^n)$. Положим $X_s = \{Q \in X \mid s_Q \notin \mathfrak{m}_Q \mathscr{L}_Q^n\}$. Тогда X_s — открытое множество и, согласно выбору сечения s, $P \in X_s$ и $X_s \subset U$. Теперь поскольку пучок $\mathscr{L}|_U$ тривиален, то сечению s соответствует некоторый элемент $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Тогда $X_s = U_f$ и, стало быть, аффинно.

Таким образом, мы показали, что для любой точки $P \in X$ существует $n > 0$ и сечение $s \in \Gamma(X, \mathscr{L}^n)$, такие, что $P \in X_s$ и открытое множество X_s аффинно. Поскольку схема X квазикомпактна, то ее можно покрыть конечным числом таких открытых аффинных множеств, соответствующих сечениям $s_i \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{n_i})$. Заменяя s_i некоторой его степенью $s_i^k \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{kn_i})$, что оставляет X_{s_i} тем же, можно считать, что все n_i одинаковы и равны, скажем, числу n. Далее, так как пучок $\mathscr{L}^n$ также обилен, то можно заменить $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}^n$. В результате мы можем предполагать, что существуют глобальные сечения $s_1, \ldots, s_k \in \Gamma(X, \mathscr{L})$, такие, что каждое открытое множество $X_i = X_{s_i}$ аффинно и что X_i покрывают все X.

Пусть теперь $B_i = \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ для каждого i. Так как X является схемой конечного типа над A, то B_i — конечно порожденная A-алгебра (упр. 3.3). Пусть $\{b_{ij} \mid j = 1, \ldots, k_i\}$ — множество образующих B_i как алгебры над A. Согласно 5.14, для каждых i, j существует целое n, такое, что $s_i^n b_{ij}$ продолжается

до глобального сечения $c_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{L}^n)$. Можно найти одно достаточно большое n, пригодное для всех i, j сразу. С помощью обратимого пучка $\mathscr{L}^n$ и набора его глобальных сечений $\{s_i^n \mid i = 1, \ldots, k\}$ и $\{c_{ij} \mid i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, k_i\}$ построим теперь отображение (над A) $\varphi: X \to \mathbf{P}_A^N$, как в теореме 7.1. Так как X покрывается X_i и сечения s_i^n уже порождают $\mathscr{L}^n$, то отображение φ является морфизмом.

Пуст $\{x_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ и $\{x_{ij} \mid i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, k_i\}$ — однородные координаты пространства $\mathbf{P}_A^N$, соответствую ие ука ным выше наборам сечений. Для каждого $i = 1, . ., k$ пусть $U_i \subset \mathbf{P}_A^N$ — открытое подмножество $x_i \neq 0$. Тогда $\varphi^{-1}(U_i) = X_i$ и соответствующее отображение аффинных колец $A[\{y_i\}; \{y_{ij}\}] \to B_i$ сюръективно, поскольку $y_{ij} \mapsto c_{ij}/s_i^n = b_{ij}$, а b_{ij} порождают B_i как алгебру над A. Поэтому X_i отображается на некоторую замкнутую подсхему схемы U_i. Отсюда следует, что φ задает изоморфизм X на замкнутую подсхему в $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \subset \mathbf{P}_A^N$, так что φ является вложением. Следовательно, пучок $\mathscr{L}^n$ очень обилен относительно Spec A, что и требовалось доказать.

Пример 7.6.1. Пусть $X = \mathbf{P}_k^n$, где k — некоторое поле. Тогда пучок $\mathcal{O}(1)$ является очень обильным по определению. Для любого $d > 0$ пучок $\mathcal{O}(d)$ соответствует d-кратному вложению X (см. упр. 5.13), так что он тоже очень обилен. Следовательно, $\mathcal{O}(d)$ обилен для всех $d > 0$. С другой стороны, так как пучок $\mathcal{O}(l)$ не имеет глобальных сечений при $l < 0$, то, как легко видеть, он не может быть обильным ни для какого $l \leqslant 0$. Следовательно, на $\mathbf{P}_k^n$ мы имеем:

$$\mathcal{O}(l) \text{ обилен} \Leftrightarrow \mathcal{O}(l) \text{ очень обилен} \Leftrightarrow l > 0.$$

Пример 7.6.2. Пусть Q — неособая квадрика $xy = zw$ в $\mathbf{P}_k^3$ над полем k. Как было показано в 6.6.1, $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, так что любой обратимый пучок на Q характеризуется своим *типом* (a, b), $a, b \in \mathbf{Z}$. Напомним, что $Q \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Если $a > 0$, $b > 0$, то произведение a-кратного вложения $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^{n_1}$ и b-кратного вложения $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^{n_2}$ в композиции с вложением Сегре определяет следующее вложение:

$$Q = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^{n_1} \times \mathbf{P}^{n_2} \to \mathbf{P}^n,$$

которое соответствует обратимому пучку типа (a, b) на Q. Таким образом, для любых $a > 0$, $b > 0$ соответствующий обратимый пучок очень обилен и, следовательно, обилен. С другой стороны, если обратимый пучок $\mathscr{L}$ имеет тип (a, b), где по крайней мере одно из чисел a, b отрицательно, то, ограничивая $\mathscr{L}$ на слои произведения $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, легко видеть, что он не порождается глобальными сечениями. Следовательно, если $a \leqslant 0$ или $b \leqslant 0$, то пучок $\mathscr{L}$ не обилен. Таким образом, на Q мы имеем:

$$\text{обратимый пучок } \mathscr{L} \text{ типа } (a, b) \text{ обилен} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{очень обилен} \Leftrightarrow a > 0 \text{ и } b > 0.$$

Пример 7.6.3. Пусть X — неособая кубическая кривая $y^2z = x^3 - xz^2$ на плоскости $\mathbf{P}_k^2$, рассмотренная в 6.10.2, и пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X, соответствующий точке P_0, т. е. $\mathscr{L} = \mathscr{L}(P_0)$. Тогда $\mathscr{L}$ обилен, поскольку $\mathscr{L}(3P_0) \simeq \mathcal{O}_X(1)$ очень обилен. С другой стороны, $\mathscr{L}$ не может быть очень обильным, так как $\mathscr{L}(P_0)$ не порождается глобальными сечениями. Действительно, если бы $\mathscr{L}(P_0)$ порождался ими, то точка P_0 была бы линейно эквивалентна некоторой другой точке $Q \in X$, но это невозможно, поскольку кривая X не рациональна (см. 6.10.1). На этом примере видно, что существуют обильные пучки, не являющиеся очень обильными.

Пример 7.6.4. Позднее (3.3 гл. IV) мы увидим, что пучок $\mathscr{L}(D)$, где D — дивизор на неособой полной кривой X, обилен тогда и только тогда, когда $\deg D > 0$. Это следует из теоремы Римана — Роха.

Линейные системы

Мы установим сейчас соответствие между глобальными сечениями обратимого пучка и некоторыми эффективными дивизорами на многообразии. При этом окажется, что задание пучка и множества его глобальных сечений равносильно заданию некоторого множества эффективных дивизоров, линейно эквивалентных между собой. Это приводит к классическому понятию линейной системы. Для простоты мы будем пользоваться этим понятием только в случае неособых проективных многообразий, определенных над алгебраически замкнутым полем. Для произвольных схем геометрическая интуиция, связанная с понятием линейной системы, может иногда вводить в заблуждение, поэтому в этом случае предпочтительнее работать с обратимыми пучками и их глобальными сечениями.

Пусть X — неособое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k. Тогда на X понятия дивизоров Вейля и Картье совпадают (см. 6.11) и, более того, существует взаимно однозначное соответствие между классами линейной эквивалентности дивизоров и классами обратимых пучков с точностью до изоморфизма (6.15). Отметим еще один полезный факт, справедливый в этой ситуации: глобальные сечения $\Gamma(X, \mathscr{L})$ любого обратимого

пучка $\mathscr{L}$ образуют конечномерное векторное пространство над k (см. 5.19).

Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X и $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ — ненулевое сечение $\mathscr{L}$. Определим эффективный дивизор $D = (s)_0$ — *дивизор нулей* сечения s — следующим образом. Над любым открытым множеством $U \subset X$, над которым пучок $\mathscr{L}$ тривиален, выберем изоморфизм $\varphi\colon \mathscr{L}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$. Тогда $\varphi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ и, когда U пробегает элементы некоторого открытого покрытия X, набор $\{U, \varphi(s)\}$ определяет эффективный дивизор Картье D на X. В самом деле, изоморфизм φ задается с точностью до умножения на элемент из $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$, следовательно, дивизор Картье D корректно определен.

Предложение 7.7. *Пусть X — неособое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k, D_0 — некоторый дивизор на X и $\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}(D_0)$ — соответствующий обратимый пучок. Тогда*

(a) *для каждого ненулевого сечения $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ дивизор нулей $(s)_0$ является эффективным дивизором, линейно эквивалентным дивизору D_0;*

(b) *всякий эффективный дивизор, линейно эквивалентный дивизору D_0, имеет вид $(s)_0$ для некоторого сечения $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$;*

(c) *сечения s и $s' \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ тогда и только тогда имеют один и тот же дивизор нулей, когда существует элемент $\lambda \in k^*$, такой, что $s' = \lambda s$.*

Доказательство (a). Отождествим $\mathscr{L}$ с подпучком $\mathscr{L}(D_0)$ пучка $\mathscr{K}$. Тогда сечению s соответствует некоторая рациональная функция $f \in K$. Пусть $\{U_i, f_i\}$ — локальное задание дивизора Картье D_0, где $f_i \in K^*$. Тогда пучок $\mathscr{L}(D_0)$ локально порождается функциями f_i^{-1} и умножение на f_i определяет локальный изоморфизм $\varphi\colon \mathscr{L}(D_0) \to \mathcal{O}$, так что D_0 задается локально функцией $f_i f$. Следовательно, $D = D_0 + (f)$. Отсюда $D \sim D_0$.

(b) Если $D > 0$ и $D = D_0 + (f)$, то $(f) \geqslant -D_0$. В таком случае f соответствует глобальному сечению s пучка $\mathscr{L}(D_0)$, дивизор нулей которого равен D.

(c) Снова воспользуемся представлением $\mathscr{L}$ в виде подпучка пучка $\mathscr{K}$. Пусть $(s)_0 = (s')_0$, тогда сечениям s и s' соответствуют функции f и $f' \in K$, такие, что $(f/f') = 0$. Следовательно, $f/f' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$. Но поскольку X — проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k, то $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$, так что $f/f' \in k^*$ (3.4 гл. I).

Определение. *Полной линейной системой* на неособом проективном многообразии называется множество (возможно, пустое) всех эффективных дивизоров, линейно эквивалентных некоторому заданному дивизору D_0. Полная линейная система дивизора D_0 обозначается через $|D_0|$.

Из предыдущего предложения следует, что множество $|D_0|$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $(\Gamma(X, \mathscr{L}) - \{0\})/k^*$. Это позволяет рассматривать $|D_0|$ как множество замкнутых точек некоторого проективного пространства над k.

Определение. *Линейной системой* $\mathfrak{d}$ на X называется подмножество полной линейной системы $|D_0|$, являющееся линейным подпространством в смысле структуры проективного пространства на $|D_0|$. Линейной системе $\mathfrak{d}$ отвечает векторное подпространство $V \subset \Gamma(X, \mathscr{L})$, а именно $V = \{s \in \Gamma(X, \mathscr{L}) \mid (s)_0 \in \mathfrak{d}\} \cup \cup \{0\}$. *Размерностью* линейной системы $\mathfrak{d}$ называется размерность ее как линейного проективного многообразия. Следовательно, $\dim \mathfrak{d} = \dim V - 1$. (Отметим, что размерность линейной системы всегда конечна, поскольку $\Gamma(X, \mathscr{L})$ — конечномерное векторное пространство.)

Определение. Точка $P \in X$ называется *базисной точкой* линейной системы $\mathfrak{d}$, если $P \in \operatorname{Supp} D$ для всех $D \in \mathfrak{d}$.

Лемма 7.8. *Пусть $\mathfrak{d}$ — линейная система на X, соответствующая подпространству $V \subset \Gamma(X, \mathscr{L})$. Точка $P \in X$ тогда и только тогда является базисной точкой $\mathfrak{d}$, когда $s_P \in \mathfrak{m}_P\mathscr{L}_P$ для всех $s \in V$. В частности, $\mathfrak{d}$ тогда и только тогда свободна от базисных точек, когда $\mathscr{L}$ порождается глобальными сечениями из V.*

Доказательство. Эти утверждения непосредственно вытекают из того факта, что для любого сечения $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ носитель его дивизора нулей $(s)_0$ является дополнением к открытому множеству X_s.

Замечание 7.8.1. В терминах линейных систем теорема 7.1 может быть переформулирована следующим образом: задание морфизма из X в $\mathbf{P}_k^n$ равносильно заданию линейной системы без базисных точек на X и множества сечений $s_0, \ldots, s_n \in V$, порождающих пространство V. Когда мы будем говорить просто о морфизме X в проективное пространство, определяемом линейной системой без базисных точек, то будем иметь в виду, что сечения $s_0, \ldots, s_n$ составляют базис пространства V. При различных выборах базиса в V соответствующие морфизмы $X \to \mathbf{P}^n$ будут отличаться только на некоторый автоморфизм пространства $\mathbf{P}^n$.

Замечание 7.8.2. Предложение 7.3 тоже можно переформулировать в терминах линейных систем. Пусть $\varphi: X \to \mathbf{P}^n$ — морфизм, определенный линейной системой (без базисных точек) $\mathfrak{d}$. Морфизм φ тогда и только тогда является замкнутым вложением, когда выполняются следующие два условия:

(1) $\mathfrak{d}$ *разделяет точки*, т. е. для любых двух точек $P, Q \in X$ существует дивизор $D \in \mathfrak{d}$, такой, что $P \in \operatorname{Supp} D$, а $Q \notin \operatorname{Supp} D$;

(2) $\mathfrak{d}$ *разделяет касательные векторы*, т. е. для заданной точки $P \in X$ и касательного вектора $t \in T_P(X) = (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^{\vee}$ существует дивизор $D \in \mathfrak{d}$, такой, что $P \in \operatorname{Supp} D$, а $t \notin T_P(D)$. Здесь D рассматривается как локально главная замкнутая подсхема в X, в таком случае касательное пространстао Зарисского $T_P(D) = (\mathfrak{m}_{P,D}/\mathfrak{m}_{P,D}^2)^{\vee}$ естественным образом содержится в качестве подпространс а в $T_P(X)$.

В этой переформулировке термины «разделяет точки» и «разделяет касательные векторы» приобретают ясный геометрический смысл.

Определение. Пусть $i: Y \hookrightarrow X$ — замкнутое вложение неособых проективных многообразий над k и $\mathfrak{d}$ — линейная система на X. Определим *след* $\mathfrak{d}|_Y$ на Y линейной системы $\mathfrak{d}$ следующим образом. Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок и $V \subset \Gamma(X, \mathscr{L})$ — векторное подпространство, соответствующие линейной системе $\mathfrak{d}$ на X. Рассмотрим обратимый пучок $i^*\mathscr{L} = \mathscr{L} \otimes \mathcal{O}_Y$ на Y и образ $W \subset \Gamma(Y, i^*\mathscr{L})$ подпространства V при естественном отображении $\Gamma(X, \mathscr{L}) \to \Gamma(Y, i^*\mathscr{L})$. Тогда $i^*\mathscr{L}$ и W определяют некоторую линейную систему на Y, которую мы и назовем следом $\mathfrak{d}|_Y$.

Линейная система $\mathfrak{d}|_Y$ допускает следующее геометрическое описание: это множество всех дивизоров $D \cdot Y$ (определенных как в 6.6.2), таких, что $D \in \mathfrak{d}$ и $\operatorname{Supp} D$ не содержит Y.

Отметим, что линейная система $\mathfrak{d}|_Y$ может быть неполной, даже если линейная система $\mathfrak{d}$ полна.

Пример 7.8.3. Пусть $X = \mathbf{P}^n$. Тогда множество всех эффективных дивизоров степени $d > 0$ является полной линейной системой на X размерности $\binom{n+d}{d} - 1$. В самом деле, эта линейная система соответствует обратимому пучку $\mathcal{O}(d)$ и пространству всех его глобальных сечений, которое в этом случае есть не что иное, как пространство всех однородных многочленов от $x_0, \ldots, x_n$ степени d. Размерность этого пространства равна $\binom{n+d}{d}$, а размерность соответствующей линейной системы на единицу меньше.

Пример 7.8.4. Переформулируем упр. 5.14(d) в терминах линейных систем: неособое проективное многообразие $X \subset \mathbf{P}_k^n$ тогда и только тогда проективно нормально в $\mathbf{P}_k^n$, когда для всякого $d > 0$ след на X полной линейной системы дивизоров степени d на $\mathbf{P}^n$ является полной линейной системой. Для простоты мы будем говорить в такой ситуации, что линейная система, высекаемая на X гиперповерхностями степени d в $\mathbf{P}^n$, полна.

Пример 7.8.5. Напомним, что пространственная кубическая кривая в $\mathbf{P}^3$ определялась с помощью параметрических уравнений $x_0 = t^3$, $x_1 = t^2u$, $x_2 = tu^2$, $x_3 = u^3$. Иначе говоря, она представляет собой не что иное, как образ 3-кратного вложения $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^3$ (упр. 2.9 и 2.12 гл. I). Покажем, что всякая неособая кривая X степени 3 в $\mathbf{P}^3$, не содержащаяся ни в какой плоскости $\mathbf{P}^2$ и абстрактно изоморфная $\mathbf{P}^1$, может быть получена из описанной выше пространственной кубической кривой посредством некоторого автоморфизма пространства $\mathbf{P}^3$, так что в дальнейшем любую такую кривую мы будем называть пространственной кубической кривой.

Пусть X — такая кривая. Вложение X в $\mathbf{P}^3$ определяется линейной системой $\mathfrak{d}$ гиперплоских сечений X (см. 7.1). Размерность этой линейной системы равна 3. Действительно, плоскости в $\mathbf{P}^3$ образуют линейную систему размерности 3 и по предположению X не лежит ни в какой плоскости, так что отображение $\Gamma(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}(1)) \to \Gamma(X, i^*\mathfrak{d}(1))$ инъективно. С другой стороны, степень линейной системы $\mathfrak{d}$ равна 3, поскольку степень кривой X равна 3. *Степенью* линейной системы на полной неособой кривой называется степень любого ее дивизора, которая, как известно (6.10), от выбора дивизора не зависит. При отождествлении X с $\mathbf{P}^1$ линейной системе $\mathfrak{d}$ должно соответствовать четырехмерное подпространство $V \subset \Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(3))$. Но $\Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(3))$ само имеет размерность 4, так что $V = \Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(3))$ и, стало быть, $\mathfrak{d}$ — полная линейная система. Так как, согласно 7.1, вложение определяется линейной системой и выбором базиса пространства V, то отсюда следует, что X может отличаться от образа 3-кратного вложения $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^3$ разве только что другим выбором базиса в V. Следовательно, существует автоморфизм пространства $\mathbf{P}^3$, переводящий заданную выше пространственную кубическую кривую в кривую X. Обобщение этого факта см. в упр. 3.4 гл. IV.

Пример 7.8.6. Рассмотрим теперь случай *неособой рациональной кривой* X степени 4 в $\mathbf{P}^3$, не содержащейся ни в какой плоскости $\mathbf{P}^2$. Здесь также $X \simeq \mathbf{P}^1$, но оказывается, что не обязательно две такие кривые переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом пространства $\mathbf{P}^3$. Чтобы в этом убедиться, заметим, что для задания морфизма $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^3$, образом которого была бы кривая степени 4, не содержащаяся ни в какой плоскости $\mathbf{P}^2$, нужно выбрать 4-мерное подпространство $V \subset \Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(4))$, сечения которого порождают пучок $\mathcal{O}(4)$. Размерность пространства $\Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(4))$ равна 5, так что задача сводится к выбору двух таких различных подпространств V и V', для которых соответствующие кривые в $\mathbf{P}^3$ не связаны автоморфизмом простраства $\mathbf{P}^3$. Для того чтобы эти кривые как образы $\mathbf{P}^1$ были неособыми, надо

при выборе V и V' воспользоваться критерием 7.3. Например, легко непосредственно проверить, что подпространства $V = (t^4, t^3u, tu^3, u^4)$ и $V' = (t^4, t^3u + at^2u^2, tu^3, u^4)$, где $a \in k^*$, приводят к неособым рациональным кривым степени 4 в $\mathbf{P}^3$, которые не переводятся друг в друга никаким автоморфизмом $\mathbf{P}^3$.

Proj, $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ *и раздутие*

Мы уже знаем, как определяется Proj градуированного кольца. Рассмотрим теперь относительный вариант этой конструкции **Proj** пучка градуированных алгебр φ над схемой X. Эта конструкция будет использоваться, в частности, для построения расслоения на проективные пространства, ассоциированного с локально свободным пучком, и для определения понятия раздутия произвольного когерентного пучка идеалов. Последнее является обобщением понятия раздутия точки, рассмотренного в § 4 гл. I.

Для простоты будем предполагать всегда при определении **Proj**, что схема X и пучок градуированных алгебр $\mathscr{S}$ удовлетворяют следующим условиям:

(†) схема X нётерова, $\mathscr{S}$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, обладающий структурой пучка градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр, т. е. $\mathscr{S} \simeq \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathscr{S}_d$, где $\mathscr{S}_d$ — однородные компоненты степени d.

Кроме того, будем предлолагать, что $\mathscr{S}_0 = \mathcal{O}_X$, $\mathscr{S}_1$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-модулем и что $\mathscr{S}$ локально порождается $\mathscr{S}_1$ как $\mathcal{O}_X$-алгебра. (Отсюда следует, что $\mathscr{S}_d$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-модулем для каждого $d \geqslant 0$.)

Построение. Пусть X — схема и $\mathscr{S}$ — пучок градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр, удовлетворяющие условиям (†). Для каждого открытого аффинного подмножества $U = \operatorname{Spec} A$ на X пусть $\mathscr{S}(U)$ обозначает градуированную A-алгебру $\Gamma(U, \mathscr{S}|_U)$. Рассмотрим $\operatorname{Proj} \mathscr{S}(U)$ и его естественный морфизм π_U: $\operatorname{Proj} \mathscr{S}(U) \to U$. Пусть $f \in A$ и $U_f = \operatorname{Spec} A_f$, тогда в силу квазикогерентности $\mathscr{S}$ имеем $\operatorname{Proj} \mathscr{S}(U_f) \simeq \pi_U^{-1}(U_f)$. Отсюда следует, что если U, V — открытые аффинные подмножества X, то $\pi_U^{-1}(U \cap V)$ естественно изоморфно $\pi_V^{-1}(U \cap V)$ (некоторые технические детали здесь мы оставляем читателю). Эти изоморфизмы позволяют склеить все схемы $\operatorname{Proj} \mathscr{S}(U)$ (см. упр. 2.12) в одну **Proj** $\mathscr{S}$, обладающую естественным морфизмом π: **Proj** $\mathscr{S} \to X$, таким, что для каждого открытого аффинного подмножества $U \subset X$ имеет место изоморфизм $\pi^{-1}(U) \simeq \operatorname{Proj} \mathscr{S}(U)$. Более того, обратимые пучки $\mathcal{O}(1)$ на каждой из схем $\operatorname{Proj} \mathscr{S}(U)$ совпадают при этой склейке (см. 5.12 (c)) и определяют, следовательно, обратимый пучок $\mathcal{O}(1)$ на **Proj** $\mathscr{S}$, канонически связанный с приведенной конструкцией **Proj** $\mathscr{S}$.

14—01390

Таким образом, для любых X и $\mathscr{S}$, удовлетворяющих условиям (†), можно построить схему **Proj** $\mathscr{S}$, морфизм π: **Proj** $\varphi \to X$ и обратимый пучок $\mathcal{O}(1)$ на **Proj** $\mathscr{S}$. Все свойства Proj градуированного кольца могут быть распространены на эту относительную ситуацию. Не будем стремиться к их исчерпывающему описанию, а отметим только некоторые новые моменты.

Пример 7.8.7. Пусть $\mathscr{S}$ — алгебра многочленов над $\mathcal{O}_X$, т. е. $\mathscr{S} = \mathcal{O}_X[T_0, \ldots, T_n]$. Тогда **Proj** $\mathscr{S}$ — это относительное проективное пространство $\mathbf{P}_X^n$ со своим подкручивающим пучком $\mathcal{O}(1)$, определенное в § 5.

Предостережение 7.8.8. Вообще говоря, пучок $\mathcal{O}(1)$ может не быть очень обильным на **Proj** $\mathscr{S}$ относительно X, см. 7.10 и упр. 7.14.

Лемма 7.9. *Пусть $\mathscr{S}$ — пучок градуированных алгебр на схеме X, удовлетворяющий условиям (†), и $\mathscr{L}$ — некоторый обратимый пучок на X. Определим новый пучок градуированных алгебр $\mathscr{S}' = \mathscr{S} * \mathscr{L}$, полагая $\mathscr{S}'_d = \mathscr{S}_d \otimes \mathscr{L}^d$ для каждого $d \geqslant 0$. Тогда пучок $\mathscr{S}'$ тоже удовлетворяет условиям (†) и существует естественный изоморфизм φ: $P' = \mathbf{Proj}\, \mathscr{S}' \xrightarrow{\sim} P = \mathrm{Proj}\, \mathscr{S}$, коммутирующий с проекциями π и π' на X и обладающий следующим свойством:*

$$\mathcal{O}_{P'}(1) \simeq \varphi^* \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi'^* \mathscr{L}.$$

Доказательство. Пусть θ: $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}|_U$ — локальный изоморфизм между пучком $\mathcal{O}_U$ и пучком $\mathscr{L}|_U$ над некоторым достаточно малым открытым аффинным подмножеством U в X. Тогда θ индуцирует изоморфизм градуированных колец $\varphi(U) \simeq \simeq \varphi'(U)$ и, следовательно, изоморфизм θ^*: $\mathrm{Proj}\, \mathscr{S}' \simeq \mathrm{Proj}\, \mathscr{S}(U)$. Пусть θ_1: $\mathcal{O}_U \simeq \mathscr{L}|_U$ — другой локальный изоморфизм, тогда θ и θ_1 отличаются на некоторый элемент $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$, а соответствующие изоморфизмы градуированных колец $\mathscr{S}(U) \simeq \mathscr{S}'(U)$ — на автоморфизм ψ градуированного кольца $\mathscr{S}(U)$, который каждую градуированную компоненту степени d умножает на f^d. Это никак не действует на множество однородных простых идеалов в $\mathscr{S}(U)$ и, более того, поскольку структурный пучок схемы $\mathrm{Proj}\, \mathscr{S}(U)$ состоит из элементов степени *нуль* во всевозможных локализациях $\mathscr{S}(U)$, то автоморфизм ψ кольца $\mathscr{S}(U)$ индуцирует *тождественный* автоморфизм на $\mathrm{Proj}\, \mathscr{S}(U)$. Иначе говоря, изоморфизм θ^* не зависит от выбора θ, так что локальные изоморфизмы θ^* можно склеить и получить естественный глобальный изоморфизм φ: **Proj** $\mathscr{S} \xrightarrow{\sim}$ **Proj** $\mathscr{S}'$, коммутирующий с π и π'. Однако при построении пучка $\mathcal{O}(1)$ на **Proj** $\mathscr{S}$ автоморфизм ψ алгебры $\mathscr{S}(U)$ индуцирует в $\mathcal{O}(1)$ умножение на f. Поэтому $\mathcal{O}_{P'}(1)$ отличается от $\mathcal{O}_P(1)$ подкручиванием на функции перехода пучка $\mathscr{L}$. Точнее говоря, $\mathcal{O}_{P'}(1) \simeq \varphi^* \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi'^* \mathscr{L}$.

Предложение 7.10. *Пусть X, $\mathscr{S}$ удовлетворяют условиям (†), и пусть $P = \mathbf{Proj}\, \mathscr{S}$ с проекцией π: $P \to X$ и обратимым пучком $\mathcal{O}_P(1)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *морфизм π является собственным, в частности он отделим и имеет конечный тип над X;*

(b) *если на X существует обильный обратимый пучок $\mathscr{L}$, то морфизм π сюръективен и для подходящего $n > 0$ пучок $\mathcal{O}_P(1) \otimes \otimes \pi^* \mathscr{L}^n$ является очень обильным обратимым пучком на P относительно X.*

Доказательство. (a) Для каждого открытого аффинного множества $U \subset X$ морфизм π_U: **Proj** $\mathscr{S}(U) \to U$ проективен (см. 4.8.1) и, следовательно, является собственным (см. 4.9). Но свойство морфизма быть собственным локально по базе (4.8 (f)), следовательно, π — собственный морфизм.

(b) Пусть $\mathscr{L}$ — обильный обратимый пучок на X. Тогда для некоторого целого $n > 0$ пучок $\mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{L}^n$ порождается глобальными сечениями. Так как схема X нётерова и пучок $\mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{L}^n$ когерентен, то существует конечное число глобальных сечений, которые его порождают. Иначе говоря, существует сюръективный морфизм пучков $\mathcal{O}_X^{N+1} \to \mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{L}^n$ для некоторого целого N. Это позволяет построить сюръективное отображение пучков градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathcal{O}_X[T_0, \ldots, T_N] \to \mathscr{S} * \mathscr{L}^n$, которое определит замкнутое вложение **Proj** $\mathscr{S} * \mathscr{L}^n \hookrightarrow$ **Proj** $\mathcal{O}_X[T_0, \ldots, T_N] = \mathbf{P}_X^N$ (упр. 3.12). Но, согласно 7.9, **Proj** $\mathscr{S} * \mathscr{L}^n \simeq \simeq$ **Proj** $\mathscr{S}$, и построенное вложение индуцирует на **Proj** $\mathscr{S}$ очень обильный обратимый пучок $\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathscr{L}^n$.

Определение. Пусть X — нётерова схема и $\mathscr{E}$ — локально свободный когерентный пучок на X. Определим ассоциированное с ним *расслоение на проективные пространства* $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ следующим образом. Пусть $\mathscr{S} = S(\mathscr{E})$ — симметрическая алгебра пучка $\mathscr{E}$, т. е. $\mathscr{S} = \bigoplus_{d \geqslant 0} S^d(\mathscr{E})$ (см. упр. 5.16). Тогда $\mathscr{S}$ является пучком градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр, удовлетворяющим условиям (†) и мы положим $\mathbf{P}(\mathscr{E}) = \mathbf{Proj}\, \mathscr{E}$ с проекцией π: $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ и обратимым пучком $\mathcal{O}(1)$.

Отметим, что если пучок $\mathscr{E}$ свободен и имеет ранг $n + 1$ над открытым множеством U, то $\pi^{-1}(U) \simeq \mathbf{P}_U^n$, так что $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ является «относительным проективным пространством» над X.

Предложение 7.11. *Пусть X, $\mathscr{E}$, $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ такие же, как и в определении. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *если* $\mathrm{rank}\, \mathscr{E} \geqslant 2$, *то существует канонический изоморфизм градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathscr{S} \simeq \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} \pi_*(\mathcal{O}(l))$, где справа градуировка задается значением l; в частности, $\pi_*(\mathcal{O}(l)) = 0$, если $l < 0$, $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}) = \mathcal{O}_X$ и $\pi_*(\mathcal{O}(1)) = \mathscr{E}$;*

(b) *существует естественный сюръективный морфизм* $\pi^*\mathscr{E} \to \mathcal{O}(1)$.

Доказательство. (a) Это утверждение является относительным вариантом предложения 5.13 и непосредственно из него следует.

(b) Это относительный вариант того факта, что пучок $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}^n$ порождается глобальными сечениями $x_0, \ldots, x_n$ (см. 5.16.2).

Предложение 7.12. *Пусть* X, $\mathscr{E}$, $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ *такие же, как и выше, и* $g\colon Y \to X$ *— произвольный морфизм. Тогда задание морфизма из* Y *в* $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ *над* X *равносильно заданию обратимого пучка* $\mathscr{L}$ *на* Y *и сюръективного отображения пучков* $g^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$ *на* Y.

Доказательство. Это утверждение является локальным вариантом теоремы 7.1. Пусть сначала $f\colon Y \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ — некоторый морфизм над X. Тогда прообраз на Y сюръективного отображения $\pi^*\mathscr{E} \to \mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ дает сюръективное отображение пучков $g^*\mathscr{E} = f^*\pi^*\mathscr{E} \to f^*\mathcal{O}(1)$, так что можно взять $\mathscr{L} = f^*\mathcal{O}(1)$.

Обратно, пусть на Y задан обратимый пучок $\mathscr{L}$ и сюръективный морфизм $g^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$. Мы утверждаем, что существует единственный морфизм $f\colon Y \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ над X, такой, что $\mathscr{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ и отображение $g^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$ получается из отображения $\pi^*\mathscr{E} \to \mathcal{O}(1)$ посредством f^*. Единственность морфизма f очевидна. Поэтому утверждение о существовании достаточно проверить локально. Покрывая X открытыми афинными подмножествами $U = \operatorname{Spec} A$, настолько малыми, чтобы ограничение $\mathscr{E}|_U$ было свободным, сводим все к случаю теоремы 7.1. Действительно, если $\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X^{n+1}$, то задание сюръективного морфизма $g^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$ — это то же самое, что и задание $n+1$ глобальных сечений пучка $\mathscr{L}$, которые его порождают.

Замечание. За дальнейшими свойствами схем $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ и общим определением понятия расслоения на проективные пространства над схемой X мы отсылаем читателя к упражнениям в конце параграфа. Для сравнения понятие векторного расслоения, ассоциированного с локально свободным пучком, см. в упр. 5.18.

Обратимся теперь к определению общего понятия раздутия. В § 4 гл. I была дана конструкция раздутия многообразия в точке. Оказывается, что эту конструкцию можно обобщить на произвольные замкнутые подсхемы. Поскольку замкнутые подсхемы находятся в биективном соответствии с когерентными пучками идеалов (см. 5.9), то можно также говорить о раздутии когерентных пучков идеалов.

Определение. Пусть X — нётерова схема и $\mathscr{I}$ — когерентный пучок идеалов на ней. Рассмотрим пучок градуированных алгебр

$\mathscr{S} = \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathscr{I}^d$, где $\mathscr{I}^d$ есть d-я степень пучка идеалов $\mathscr{I}$ и $\mathscr{I}^0 = \mathcal{O}_X$. Тогда X и $\mathscr{S}$ удовлетворяют условиям (†), так что можно построить схему $\widetilde{X} = \mathbf{Proj}\,\mathscr{S}$. Схему $\widetilde{X}$ будем называть *раздутием* схемы X *относительно когерентного пучка идеалов* $\mathscr{I}$ (или просто раздутием когерентного пучка идеалов $\mathscr{I}$ на X). Если Y — замкнутая подсхема в X, соответствующая пучку идеалов $\mathscr{I}$, то $\widetilde{X}$ будем называть также *раздутием* X вдоль Y или *с центром* в Y.

Пример 7.12.1. Пусть $X = \mathbf{A}_k^n$ и $P \in X$ — начало координат, тогда раздутие X с центром в P изоморфно раздутию в смысле § 4 гл. I. Действительно, здесь $X = \operatorname{Spec} A$, где $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ и точке P соответствует идеал $I = (x_1, \ldots, x_n)$, так что $\widetilde{X} = \operatorname{Proj} S$, где $S = \bigoplus_{d \geqslant 0} I^d$. Сопоставляя y_i элемент $x_i \in I \subset S$, определим сюръективный гомоморфизм градуированных колец φ: $A[y_1, \ldots, y_n] \to S$. Тогда $\widetilde{X}$ изоморфно отображается на некоторую замкнутую подсхему схемы $\operatorname{Proj} A[y_1, \ldots, y_n] = \mathbf{P}_A^{n-1}$. Эта подсхема задается однородными многочленами от y_i, порождающими ядро гомоморфизма φ, и легко видеть, что в качестве образующих этого ядра можно взять $\{x_i y_j - x_j y_i \mid i, j = 1, \ldots, n\}$.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем и $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_Y$ — когерентный пучок идеалов на Y. Определим *обратный образ* $\mathscr{I}' \subset \mathcal{O}_X$ пучка идеалов $\mathscr{I}$ на Y следующим образом. Рассмотрим сначала f как непрерывное отображение топологических пространств $X \to Y$ и обозначим через $f^{-1}\mathscr{I}$ прообраз пучка $\mathscr{I}$ в смысле определения § 1. Тогда $f^{-1}\mathscr{I}$ является пучком идеалов в пучке колец $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ на топологическом пространстве X. На X существует естественный гомоморфизм пучков колец $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$, и мы определим $\mathscr{I}'$ как пучок идеалов в $\mathcal{O}_X$, порожденный образом пучка $f^{-1}\mathscr{I}$ при этом гомоморфизме. Пучок $\mathscr{I}'$ будем обозначать через $f^{-1}\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_X$, или просто через $\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_X$, если это не будет приводить к путанице.

Предостережение 7.12.2. Для $\mathscr{I}$ как пучка $\mathcal{O}_Y$-модулей в § 5 был определен обратный образ $f^*\mathscr{I}$ как пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Может оказаться, что $f^*\mathscr{I} \neq f^{-1}\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_X$, поскольку $f^*\mathscr{I}$ определяется как $f^{-1}\mathscr{I} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ и функтор тензорного умножения не является, вообще говоря, точным слева, так что $f^*\mathscr{I}$ может не быть подпучком пучка $\mathcal{O}_X$. Однако в любом случае существует естественное отображение $f^*\mathscr{I} \to \mathcal{O}_X$, возникающее из вложения $\mathscr{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_Y$, и пучок $f^{-1}\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_X$ есть не что иное, как образ $f^*\mathscr{I}$ при этом отображении.

Предложение 7.13. *Пусть X — нётерова схема, $\mathcal{J}$ — когерентный пучок идеалов на X и π: $\widetilde{X} \to X$ — раздутие $\mathcal{J}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *обратный образ $\widetilde{\mathcal{J}} = \pi^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_X$ пучка идеалов $\mathcal{J}$ является обратимым пучком на $\widetilde{X}$;*

(b) *пусть Y — замкнутая подсхема в X, соответствующая $\mathcal{J}$, и $U = X - Y$, тогда морфизм π: $\pi^{-1}(U) \to U$ является изоморфизмом.*

Доказательство. (a) Поскольку схема $\widetilde{X}$ определяется как $\mathbf{Proj}\, \mathcal{S}$, где $\mathcal{S} = \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} \mathcal{J}^d$, то она снабжается естественным образом обратимым пучком $\mathcal{O}(1)$. Для любого открытого аффинного множества $U \subset X$ пучок $\mathcal{O}(1)$ на $\mathrm{Proj}\, \mathcal{S}(U)$ ассоциирован с градуированным $\mathcal{S}(U)$-модулем $\mathcal{S}(U)(1) = \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} \mathcal{J}^{d+1}|_U$, который, очевидно, совпадает с идеалом $\mathcal{J} \cdot \mathcal{S}(U)$, порожденным $\mathcal{J}$ в $\mathcal{S}(U)$. Отсюда видно, что обратный образ $\widetilde{\mathcal{J}} = \pi^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ пучка идеалов $\mathcal{J}$ есть не что иное, как пучок $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1)$. Следовательно, он обратим.

(b) Если $U = X - Y$, то $\mathcal{J}|_U \simeq \mathcal{O}_U$, так что $\pi^{-1}U = \mathbf{Proj}\, \mathcal{O}_U[T] = U$.

Предложение 7.14 (свойство универсальности раздутия). *Пусть X — нётерова схема, $\mathcal{J}$ — когерентный пучок идеалов на X и π: $\widetilde{X} \to X$ — раздутие X относительно $\mathcal{J}$. Пусть f: $Z \to X$ — произвольный морфизм, такой, что пучок $f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z$ является обратимым пучком идеалов на Z, Тогда существует единственный морфизм g: $Z \to \widetilde{X}$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Доказательство. В силу утверждения о единственности g вопрос является локальным по X. Так что можно считать $X = \mathrm{Spec}\, A$ аффинным, A — нётеровым и $\mathcal{J}$ — соответствующим идеалу $I \subset A$. В таком случае $\widetilde{X} = \mathrm{Proj}\, S$, где $S = \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} I^d$. Пусть $a_0, \ldots, a_n \in I$ — образующие идеала I. Определим сюръективный гомоморфизм градуированных колец φ: $A[x_0, \ldots, x_n] \to S$, сопоставляя каждому x_i элемент a_i, рассматриваемый как элемент степени 1 в S. Этот гомоморфизм индуцирует замкнутое вложение $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathbf{P}_A^n$. Ядром φ является однородный идеал в $A[x_0, \ldots, x_n]$, порожденный всеми однородными многочленами $F(x_0, \ldots, x_n)$, такими, что $F(a_0, \ldots, a_n) = 0$ в A.

Пусть теперь f: $Z \to X$ — морфизм, для которого обратный образ $f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z$ пучка идеалов $\mathcal{J}$ на X является обратимым пучком, скажем $\mathcal{L}$, на Z. Так как $a_0, \ldots, a_n$ порождают I, то их прообразы, рассматриваемые как глобальные сечения пучка $\mathcal{J}$, дают глобальные сечения $s_0, \ldots, s_n$ пучка $\mathcal{L}$, его порождающие. Поэтому, согласно теореме 7.1, существует морфизм g: $Z \to \mathbf{P}_A^n$, такой, что $\mathcal{L} \simeq g^*\mathcal{O}(1)$ и $s_i = g^{-1}x_i$ при этом изоморфизме. Мы утверждаем, что g пропускается через замкнутую подсхему $\widetilde{X}$ в $\mathbf{P}_A^n$. Это легко вытекает из того факта, что если $F(x_0, \ldots, x_n)$ — однородный многочлен степени d из ядра φ, то $F(a_0, \ldots, a_n) = 0$ в A и, стало быть, $F(s_0, \ldots, s_n) = 0$ в $\Gamma(Z, \mathcal{L}^d)$.

Таким образом, мы доказали существование морфизма g: $Z \to \widetilde{X}$, через который пропускается f. Для любого такого морфизма обязательно должно выполняться равенство $f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z = g^{-1}(\pi^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_X) \cdot \mathcal{O}_Z$, причем последний пучок в точности есть $g^{-1}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1)) \cdot \mathcal{O}_Z$. Следовательно, существует сюръективное отображение $g^*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1) \to f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z = \mathcal{L}$. Но на всяком локально окольцованном пространстве сюръективное отображение обратимых пучков обязательно является изоморфизмом (упр. 7.1), так что $g^*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1) \simeq \mathcal{L}$. Очевидно, что сечения s_i пучка $\mathcal{L}$ должны быть прообразами сечений x_i пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}_A^n$. Стало быть, единственность морфизма g в наших предположениях непосредственно следует из утверждения единственности теоремы 7.1.

Следствие 7.15. *Пусть f: $Y \to X$ — морфизм нётеровых схем и $\mathcal{J}$ — когерентный пучок идеалов на X. Пусть $\widetilde{X}$ — раздутие $\mathcal{J}$ и $\widetilde{Y}$ — раздутие обратного образа $\mathcal{J}' = f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Y$ на Y пучка идеалов $\mathcal{J}$ на X. Тогда существует единственный морфизм $\tilde{f}$: $\widetilde{Y} \to \widetilde{X}$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d] & \widetilde{X} \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Более того, если f — замкнутое вложение, то $\tilde{f}$ — тоже замкнутое вложение.

Доказательство. Существование и единственность морфизма $\tilde{f}$ непосредственно следуют из предыдущего предложения. Для того чтобы доказать, что $\tilde{f}$ является замкнутым вложением, если f таково, обратимся к определению раздутия. По определению $\widetilde{X} = \mathbf{Proj}\, \mathcal{S}$, где $\mathcal{S} = \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} \mathcal{J}^d$, и $\widetilde{Y} = \mathbf{Proj}\, \mathcal{S}'$, где $\mathcal{S}' = \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} \mathcal{J}'^d$. Поскольку Y является замкнутой подсхемой в X, то $\mathcal{S}'$ можно рассматривать как пучок градуированных алгебр на X. В таком случае существует естественный сюръективный гомоморфизм градуированных колец $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$, который и определяет замкнутое вложение $\tilde{f}$.

Определение. В ситуации 7.15 если Y — замкнутая подсхема в X, то замкнутую подсхему $\tilde{Y}$ в $\tilde{X}$ будем называть *строгим* (**или** *собственным*) *прообразом* Y при раздутии $\pi: \tilde{X} \to X$.

Пример 7.15.1. Пусть Y — замкнутое подмногообразие многообразия $X = \mathbf{A}_k^n$, проходящее через начало координат P. Тогда строгий прообраз $\tilde{Y}$ подмногообразия Y является замкнутым подмногообразием в $\tilde{X}$. Следовательно, при условии, что $Y \neq P$, $\tilde{Y}$ можно рассматривать как замыкание $\pi^{-1}(Y - P)$ в $\tilde{X}$, где, как мы знаем (см. 7.13 (b)), $\pi: \pi^{-1}(X - P) \to X - P$ — изоморфизм. Отсюда следует, что приведенное выше определение раздутия совпадает с определением, данным в § 4 гл. I для любого замкнутого подмногообразия в $\mathbf{A}_k^n$. В частности, это означает, что раздутие является внутренним понятием, не зависящим от вложения в аффинное или проективное пространство.

Остановимся теперь на исследовании частного случая раздутия, когда X — многообразие. Напомним (см. § 4), что многообразием называется целая отделимая схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k.

Предложение 7.16. *Пусть X — многообразие над k, $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ — ненулевой когерентный пучок идеалов на X и $\pi: \tilde{X} \to X$ — раздутие X относительно $\mathscr{I}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *$\tilde{X}$ также является многообразием;*

(b) *морфизм π является бирациональным, собственным и сюръективным;*

(c) *если многообразие X квазипроективно (соответственно проективно) над k, то $\tilde{X}$ также квазипроективно (соответственно проективно) над k и морфизм π проективен.*

Доказательство. Так как X по предположению цело, то пучок $\mathscr{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathscr{I}^d$ является пучком целостных колец на X, так что $\tilde{X}$ также цело. Далее, как мы уже видели (7.10), морфизм π вляется собственным. В частности. π отделим и имеет конечный тип над X. Отсюда следует, что схема $\tilde{X}$ тоже отделима и конечного типа над k, т. е. является многообразием. Теперь поскольку $\mathscr{I} \neq 0$, то соответствующая замкнутая подсхема Y не совпадает со всем X, т. е. открытое множество $U = X - Y$ непусто. Так как морфизм π индуцирует изоморфизм $\pi^{-1}U$ на U (см. 7.13), то он бирационален. Поскольку он собственный, то является замкнутым отображением, так что $\pi(\tilde{X})$ — замкнутое множество, содержащее U, и, следовательно, совпадающее с X ввиду неприводимости последнего. Стало быть, морфизм π сюръективен. Наконец, если многообразие X квазипроективно (соответственно проективно), то оно обладает обильным обратимым пучком (см. 7.6), так что по 7.10 (b) π — проективный морфизм. Отсюда вытекает, что многообразие X тоже квазипроективно (соответственно проективно) над k (упр. 4.9).

Теорема 7.17. *Пусть X — квазипроективное многообразие над k, Z — некоторое многообразие и $f: Z \to X$ — любой бирациональный проективный морфизм. Тогда существует когерентный пучок идеалов $\mathscr{I}$ на X, такой, что $\mathscr{I}$ изоморфно раздутию $\tilde{X}$ многообразия X относительно $\mathscr{I}$, и при этом изоморфизме морфизму f соответствует проекция $\pi: \tilde{X} \to X$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы довольно технично, поэтому разобъем его на несколько шагов.

Шаг 1. Так как морфизм f по предположению проективен, то существует замкнутое вложение $i: Z \to \mathbf{P}_X^n$ для некotoроого n, такое, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{P}_X^n \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

Пусть $\mathscr{L} = i^*\mathcal{O}(1)$ на Z. Рассмотрим пучок градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathscr{S} = \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{d \geq 1} f_*\mathscr{L}^d$. Каждая его компонента $f_*\mathscr{L}^d$ является, согласно 5.20, когерентным пучком на X, так что пучок $\mathscr{S}$ квазикогерентен. Однако $\mathscr{S}$ может не порождаться компонентой $\mathscr{S}_1$ как $\mathcal{O}_X$-алгебра.

Шаг 2. Для любого целого $e > 0$ положим $\mathscr{S}^{(e)} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathscr{S}_d^{(e)}$, где $\mathscr{S}_d^{(e)} = \mathscr{S}_{de}$ (ср. упр. 5.13). Мы утверждаем, что для достаточно большого e пучок $\mathscr{S}^{(e)}$ порождается как $\mathcal{O}_X$-алгебра компонентой $\mathscr{S}_1^{(e)}$. В силу квазикомпактности X этот вопрос локален по X, так что можно считать $X = \operatorname{Spec} A$ аффинным, где A — конечно порожденная алгебра над k. В таком случае Z является замкнутой подсхемой в $\mathbf{P}_A^n$ и пучку $\mathscr{S}$ соответствует градуированная A-алгебра $S = A \oplus \bigoplus_{d \geq 1} \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z(d))$. Пусть $T = A[x_0, \ldots, x_n]/I_Z$, где I_Z — однородный идеал, определяющий Z. Тогда, пользуясь техникой упр. 5.9 и 5.14, можно показать, что A-алгебры S и T совпадают во всех достаточно больших степенях (детали мы оставляем читателю). Но T как A-алгебра порождается компонентой T_1, так что $T^{(e)}$ порождается $T_1^{(e)}$, а это всё равно, что $S^{(e)}$ для достаточно больших e.

Шаг 3. Теперь заменим первоначальное вложение $i\colon Z \to \mathbf{P}^n_X$ некоторым его e-кратным вложением для достаточно большого e. Это приведет к замене $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}^e$ и $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}^{(e)}$ (упр. 5.13). В таком случае уже можно предполагать, что $\mathscr{S}$ порождается $\mathscr{S}_1$ как $\mathscr{O}_X$-алгебра. Отметим также, что по построению $Z \simeq \mathbf{Proj}\,\mathscr{S}$ (ср. 5.16), так что по крайней мере Z изоморфно некоторому $\mathbf{Proj}$. Если бы $\mathscr{S}_1 = f_*\mathscr{L}$ был пучком идеалов в $\mathscr{O}_X$, то это было бы то, что нужно. Поэтому в следующем шаге мы попытаемся свести дело к этому случаю.

Шаг 4. Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на целой схеме Z, тогда существует вложение $\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{K}_Z$, где $\mathscr{K}_Z$ — постоянный пучок функций на Z (см. доказательство 6.15). Следовательно, $f_*\mathscr{L} \subset \subset f_*\mathscr{K}_Z$. Но поскольку f бирационален по предположению, то $f_*\mathscr{K}_Z = \mathscr{K}_X$ и, стало быть, $f_*\mathscr{L} \subset \mathscr{K}_X$. Пусть теперь $\mathscr{M}$ — обильный обратимый пучок на X, существующий по предположению о квазипроективности X. Тогда мы утверждаем, что существует $N > 0$ и вложение $\mathscr{M}^{-N} \subset \mathscr{K}_X$, такие, что $\mathscr{M}^{-N}\cdot f_*\mathscr{L} \subset \mathscr{O}_X$. Действительно, пусть $\mathscr{Y}$ — *пучок идеалов знаменателей* пучка $f_*\mathscr{L}$, определяемый локально как $\{a \in \mathscr{O}_X \mid a\cdot f_*\mathscr{L} \subset \mathscr{O}_X\}$. Тогда он является ненулевым когерентным пучком идеалов на X, поскольку $f_*\mathscr{L}$ — когерентный подпучок в $\mathscr{K}_X$, и поэтому локально образующие соответствующего конечно порожденного модуля можно привести к общему знаменателю. Так как пучок $\mathscr{M}$ обилен, то пучок $\mathscr{Y} \otimes \mathscr{M}^N$ для достаточно большого N порождается своими глобальными сечениями. В частности, для подходящего $N > 0$ существует ненулевое отображение $\mathscr{O}_X \to \mathscr{Y} \otimes \mathscr{M}^N$ и, следовательно, ненулевое отображение $\mathscr{M}^{-N} \to \mathscr{Y}$. Тогда по построению $\mathscr{M}^{-N}\cdot f_*\mathscr{L} \subset \mathscr{O}_X$.

Шаг 5. Обозначим теперь через $\mathscr{J}$ когерентный пучок идеалов $\mathscr{M}^{-N}\cdot f_*\mathscr{L} \subset \mathscr{O}_X$. Это и есть требуемый пучок идеалов, и наша ближайшая цель — показать, что Z изоморфно раздутию X относительно $\mathscr{J}$. Мы уже знаем, что $Z \simeq \mathbf{Proj}\,\mathscr{S}$. Поэтому, согласно 7.9, Z изоморфно также $\mathbf{Proj}\,\mathscr{S} * \mathscr{M}^{-N}$, и для завершения доказательства достаточно отождествить $(\mathscr{S} * \mathscr{M}^{-N})_d = \mathscr{M}^{-dN} \otimes f_*\mathscr{L}^d$ с пучком $\mathscr{J}^d$ для всех $d \geqslant 1$. Заметим прежде всего, что $f_*\mathscr{L}^d \subset \mathscr{K}_X$ для любого $d \geqslant 1$ (по тем же соображениям, что и при $d = 1$), и, поскольку пучок $\mathscr{M}$ обратим, тензорное произведение можно заменить просто умножением $\mathscr{M}^{-dN}\cdot f_*\mathscr{L}^d$. Далее, так как пучок $\mathscr{S}$ локально порождается $\mathscr{S}_1$ как $\mathscr{O}_X$-алгебра, то для каждого $d \geqslant 1$ имеет место сюръективное отображение $\mathscr{J}^d \to \mathscr{M}^{-dN}\cdot f_*\mathscr{L}^d$. Оно должно быть также и инъективным, так как оба пучка являются подпучками в $\mathscr{K}_X$. Стало быть, для каждого $d \geqslant 1$ это отображение — изоморфизм. Отсюда, наконец, вытекает, что $Z \simeq \mathbf{Proj} \bigoplus_{d\geqslant 0} \mathscr{J}^d$, и доказательство закончено.

Замечание 7.17.1. Ясно, что пучок идеалов $\mathscr{J}$ в теореме определен не однозначно. Это непосредственно видно из построения, см. также упр. 7.11.

Замечание 7.17.2. Из доказанной теоремы видно, что раздутие произвольного когерентного пучка идеалов — процесс довольно общий. Поэтому во многих приложениях обычно ограничиваются раздутиями только некоторых классов подмногообразий. Например, в своей статье о разрешении особенностей Хиронака [4] использовал раздутия только вдоль неособых подмногообразий, являющихся «нормально плоскими» в объемлющем пространстве. При изучении бирациональной геометрии поверхностей в гл. V мы будем пользоваться раздутиями только с центрами в точках. Один из основных результатов в этом направлении будет заключаться в том, что любое бирациональное преобразование неособых проективных поверхностей может быть разложено в композицию конечного числа раздутий (и стягиваний, т. е. преобразований, обратных к раздутиям) точек. Одно из важных применений более общих раздутий доставляет уже упоминавшаяся здесь (см. 4.10.2) теорема Нагаты [6] о том, что любое (абстрактное) многообразие может быть вложено как открытое подмножество в полное многообразие.

Пример 7.17.3. В качестве примера применения общего понятия раздутия когерентного пучка идеалов покажем, как исключать точки неопределенности рационального отображения, определенного обратимым пучком. Пусть A — кольцо, X — нётерова схема над A, $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X и $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ — множество его глобальных сечений. Пусть U — открытое подмножество в X, на котором сечения s_i порождают $\mathscr{L}$. Тогда, согласно теореме 7.1, обратимый пучок $\mathscr{L}|_U$ и глобальные сечения $s_0, \ldots \ldots s_n$ определяют морфизм $\varphi\colon U \to \mathbf{P}^n_A$ над A. Покажем что на X существует обратимый пучок идеалов $\mathscr{J}$, носитель соответствующей замкнутой подсхемы Y которого совпадает с $X - U$ (т. е. совпадают топологические пространства схем Y и $X - U$), такой, что его раздутие $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ устраняет точки неопределенности отображения φ, иначе говоря, морфизм φ продолжается до морфизма $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{X} \to \mathbf{P}^n_A$ так, что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[drr, dashed, "\widetilde{\varphi}"] & & \\
X & U \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{P}^n_A
\end{tikzcd}$$

Пусть $\mathscr{F}$ — когерентный подпучок пучка $\mathscr{L}$, порожденный сечениями $s_0, \ldots, s_n$. Пучок идеалов $\mathscr{I}$ на X определим следующим образом. Для любого открытого множества $V \subset X$, такого, что пучок $\mathscr{L}|_V$ свободен и $\psi: \mathscr{L}|_V \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_V$ — какой-нибудь изоморфизм, положим $\mathscr{I}|_V = \psi(\mathscr{F}|_V)$. Очевидно, что пучок идеалов $\mathscr{I}|_V$ не зависит от выбора ψ, так что мы получаем корректно определенный пучок идеалов $\mathscr{I}$ на X. Отметим также, что $\mathscr{I}_x = \mathscr{O}_x$ тогда и только тогда, когда $x \in U$. Следовательно, носитель замкнутой подсхемы Y, соответствующей пучку идеалов $\mathscr{I}$, совпадает с $X - U$. Пусть $\pi: \widetilde{X} \to X$ — раздутие $\mathscr{I}$. Тогда, согласно 7.13(а), $\pi^{-1}\mathscr{I} \cdot \mathscr{O}_{\widetilde{X}}$ является обратимым пучком идеалов на $\widetilde{X}$, откуда следует, что глобальные сечения π^*s_i пучка $\pi^*\mathscr{L}$ порождают *обратимый* когерентный подпучок $\mathscr{L}'$ пучка $\pi^*\mathscr{L}$. Пучок $\mathscr{L}'$ и его сечения π^*s_i определяют морфизм $\widetilde{\varphi}: \widetilde{X} \to \mathbf{P}_A^n$, ограничение которого на $\pi^{-1}(U)$ соответствует φ при естественном изоморфизме $\pi: \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ (см. 7.13 (в)).

В случае когда X — неособое проективное многообразие над некоторым алгебраически замкнутым полем, рассмотренный пример можно переизложить в терминах линейных систем. А именно, пучок $\mathscr{L}$ и его сечения s_i определяют линейную систему $\mathfrak{d}$ на X. Базисными точками этой линейной системы являются точки из $X - U$ и только они. Тогда $\varphi: U \to \mathbf{P}_k^n$ — это морфизм, определенный линейной системой без базисных точек $\mathfrak{d}|_U$ на U. Подсхема Y называется *базисной схемой* линейной системы $\mathfrak{d}$. Как следует из рассмотренного выше примера, раздутие Y приводит к продолжению линейной системы $\mathfrak{d}$ на X до линейной системы $\widetilde{\mathfrak{d}}$ без базисных точек на всем $\widetilde{X}$.

Упражнения

7.1. Пусть $(X, \mathscr{O}_X)$ — локально окольцованное пространство и $f: \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ — сюръективное отображение обратимых пучков на X. Показать, что тогда f является изоморфизмом. [*Указание.* Свести к случаю модулей над локальным кольцом.]

7.2. Пусть X — схема над полем k, $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X и $\{s_0, \ldots, s_n\}$, $\{t_0, \ldots, t_m\}$ — два набора глобальных сечений $\mathscr{L}$, которые порождают одно и то же подпространство $V \subset \Gamma(X, \mathscr{L})$ и пучок $\mathscr{L}$ в каждой точке схемы X. Пусть $n \leqslant m$. Показать, что соответствующие морфизмы $\varphi: X \to \mathbf{P}_k^n$ и $\psi: X \to \mathbf{P}_k^m$ отличаются друг от друга на подходящую линейную проекцию $\mathbf{P}^m - L \to \mathbf{P}^n$ и некоторый автоморфизм пространства $\mathbf{P}^n$, где L — линейное подпространство размерности $m - n - 1$ в $\mathbf{P}^m$.

7.3. Пусть $\varphi: \mathbf{P}_k^n \to \mathbf{P}_k^m$ — морфизм. Показать, что тогда

(a) $\varphi(\mathbf{P}\ )$ — либо точка, либо $m \geqslant n$ и $\dim \varphi(\mathbf{P}^n) = n$;

(b) во втором случае морфизм φ представляется в виде композиции (1) d-кратного вложения $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$ для некоторого однозначно определенного $d \geqslant 1$, (2) линейной проекции $\mathbf{P}^N - L \to \mathbf{P}^m$ и (3) некоторого автоморфизма $\mathbf{P}^m$.

7.4. (a) Воспользоваться теоремой 7.6 и показать, что если X — схема конечного типа над нётеровым кольцом A и обладает обильным обратимым пучком, то она отделима.

(b) Пусть X — аффинная прямая над полем k с раздвоенной точкой в начале координат (см. 4.0.1). Вычислить $\operatorname{Pic} X$ и выяснить, какие из обратимых пучков порождаются своими глобальными сечениями; затем показать непосредственно (не используя (a)), что на X не существует обильного обратимого пучка.

7.5. Проверить следующие свойства обильных и очень обильных обратимых пучков на нётеровой схеме X. Буквы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ ниже обозначают обратимые пучки на X, а в утверждениях (d) и (e) предполагается, кроме того, что X — схема конечного типа над нётеровым кольцом A.

(a) Если пучок $\mathscr{L}$ обилен, а $\mathscr{M}$ порождается своими глобальными сечениями, то пучок $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ тоже обилен.

(b) Если пучок $\mathscr{L}$ обилен, а пучок $\mathscr{M}$ произвольный, то $\mathscr{M} \otimes \mathscr{L}^n$ обилен для достаточно большого n.

(c) Если пучки $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ обильны, то пучок $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ тоже обилен.

(d) Если пучок $\mathscr{L}$ очень обилен, а $\mathscr{M}$ порождается своими глобальными сечениями, то пучок $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ тоже очень обилен.

(e) Если пучок $\mathscr{L}$ обилен, то существует такое $n_0 > 0$, что пучок $\mathscr{L}^n$ очень обилен для всех $n \geqslant n_0$.

7.6. *Проблема Римана — Роха.* Пусть X — неособое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k и D — дивизор на X. Для любого $n > 0$ рассмотрим полную линейную систему $|nD|$. Проблема Римана — Роха состоит в том, чтобы вычислить $\dim |nD|$ как функцию от n, и в частности выяснить ее поведение при больших n. Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(D)$ — соответствующий обратимый пучок, тогда $\dim |nD| = \dim \Gamma(X, \mathscr{L}^n) - 1$, так что эта проблема равносильна проблеме вычисления размерности $\Gamma(X, \mathscr{L}^n)$ как функции от n.

(a) Показать, что если D очень обилен и $X \hookrightarrow \mathbf{P}_k^N$ — соответствующее вложение X в проективное пространство, то $\dim |nD| = P_X(n) - 1$ для всех достаточно больших n, где $P_X(n)$ — *многочлен Гильберта* многообразия X (§ 7 гл. I). Таким образом, в этом случае $\dim |nD|$ является полиномиальной функцией от n для больших n.

(b) Показать, что если D представляет элемент конечного порядка, скажем r, в группе $\operatorname{Pic} X$, то $\dim |nD| = 0$, если $n \mid r$, и -1 в противном случае. Таким образом, здесь функция $\dim |nD|$ является периодической с периодом r.

Из общей теоремы Римана — Роха следует, что $\dim |nD|$ для любого *обильного* дивизора D является полиномиальной функцией от n при больших n, см. 1.3.2 гл. IV, 1.6 гл. V и добавление А. В случае алгебраических поверхностей Зарисский [7] показал, что для любого эффективного дивизора D существует конечное число многочленов $P_1, \ldots, P_r$, таких, что $\dim |nD| = P_{i(n)}(n)$ для всех достаточно больших n, где $i(n) \in \{1, 2, \ldots, r\}$ — некоторая функция от n.

7.7. *Некоторые рациональные поверхности.* Пусть $X = \mathbf{P}_k^2$ и $|D|$ — полная линейная система дивизоров степени 2 (коник) на X. Дивизору D соответствует обратимый пучок $\mathscr{O}(2)$, пространство глобальных сечений которого имеет базис $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$, где x, y, z — однородные координаты на X.

(a) Показать, что полная линейная система $|D|$ задает вложение $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}^5$, образом которого является поверхность Веронезе (упр. 2.13 гл. I).

(b) Показать, что подсистема этой линейной системы, порожденная элементами $x^2, y^2, z^2, y(x - z), (x - y)z$, задает замкнутое вложение X в $\mathbf{P}^4$. Образ X при этом вложении называется *поверхностью Веронезе в* $\mathbf{P}^4$, ср. упр. 3.11 гл. IV.

(c) Пусть $\mathfrak{d} \subset |D|$ — линейная система всех коник, проходящих через фиксированную точку P. Показать, что тогда $\mathfrak{d}$ задает вложение $U = X - P$ в $\mathbf{P}^4$. Более того, если $\widetilde{X}$ — раздутие X в точке P, то это вложение продолжается до замкнутого вложения $\widetilde{X}$ в $\mathbf{P}^4$. Показать, что образ $\widetilde{X}$ является поверхностью степени 3 в $\mathbf{P}^4$ и что прямые на $\widetilde{X}$, проходящие через P, отображаются в прямые на $\widetilde{X}$, которые уже не пересекаются между собой. Эти прямые заметают всю поверхность $\widetilde{X}$, так что в этом смысле она является *линейчатой поверхностью* (2.19.1 гл. V).

7.8. Пусть X — нётерова схема, $\mathscr{E}$ — когерентный локально свободный пучок на X и π: $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — соответствующее расслоение на проективные пространства. Показать, что существует естественное взаимно однозначное соответствие между *сечениями* морфизма π (т. е. морфизмами σ: $X \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$, такими, что $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X$) и обратимыми пучками $\mathscr{L}$, являющимися фактор-пучками пучка $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$.

7.9. Пусть X — регулярная нётерова схема и $\mathscr{E}$ — локально свободный когерентный пучок на X.

(a) Показать, что $\mathrm{Pic}\,\mathbf{P}(\mathscr{E}) \simeq \mathrm{Pic}\,X \times \mathbf{Z}$.

(b) Пусть $\mathscr{E}'$ — некоторый другой локально свободный когерентный пучок на X. Показать, что $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \simeq \mathbf{P}(\mathscr{E}')$ (над X) тогда и только тогда, когда существует обратимый пучок $\mathscr{L}$ на X, такой, что $\mathscr{E}' \simeq \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}$.

7.10. $\mathbf{P}^n$-*расслоения над схемой*. Пусть X — нётерова схема.

(a) По аналогии с определением векторного расслоения (упр. 5.18) определить проективное n-мерное расслоение над X как схему P с морфизмом π: $P \to X$, локально изоморфную $U \times \mathbf{P}^n$, где $U \subset X$ — открытое подмножество; функции перехода на $\mathrm{Spec}\,A \times \mathbf{P}^n$ задаются A-линейными автоморфизмами однородного координатного кольца $A[x_0, \ldots, x_n]$ (т. е. $x_i' = \sum a_{ij}x_j$, $a_{ij} \in A$).

(b) Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $n+1$ на X. Показать, что тогда $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ является проективным n-мерным расслоением над X.

*(c) Предположим, что схема X регулярна. Показать, что тогда всякое проективное n-мерное расслоение P над X изоморфно $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ для некоторого локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на X. [*Указание*. Пусть $U \subset X$ — такое открытое множество, что $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbf{P}^n$ и $\mathscr{L}_0$ — обратимый пучок $\mathcal{O}(1)$ на $U \times \mathbf{P}^n$. Показать, что $\mathscr{L}_0$ продолжается до обратимого пучка $\mathscr{L}$ на P, что $\pi_*\mathscr{L} = \mathscr{E}$ — локально свободный пучок на X и что $P \simeq \mathbf{P}(\mathscr{E})$.] Можно ли ослабить предположение о регулярности?

(d) Показать, что в случае регулярного X существует взаимно однозначное соответствие между проективными n-мерными расслоениями над X и классами эквивалентности локально свободных пучков $\mathscr{E}$ ранга $n+1$ по следующему отношению эквивалентности: $\mathscr{E}' \sim \mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}' \simeq \mathscr{E} \otimes \mathscr{M}$ для некоторого обратимого пучка $\mathscr{M}$ на X.

7.11. На нётеровой схеме X различные пучки идеалов могут приводить к изоморфным раздутиям.

(a) Пусть $\mathscr{J}$ — когерентный пучок идеалов на X. Показать, что раздутие пучка $\mathscr{J}^d$ для любого $d \geqslant 1$ является схемой, изоморфной раздутию пучка $\mathscr{Y}$ (ср. упр. 5.13).

(b) Пусть $\mathscr{J}$ — когерентный пучок идеалов и $\mathscr{Y}$ — некоторый обратимый пучок идеалов. Показать, что раздутия пучков $\mathscr{J}$ и $\mathscr{J}\cdot\mathscr{Y}$ являются изоморфными схемами.

(c) Пусть X — регулярная схема. Показать, что теорема 7.17 может быть следующим образом усилена. Пусть $U \subset X$ — наибольшее открытое подмножество, такое что f: $f^{-1}U \to U$ — изоморфизм. Тогда пучок $\mathscr{J}$ можно выбрать так, чтобы носитель соответствующей замкнутой подсхемы был равен $X - U$.

7.12. Пусть X — нётерова схема и Y, Z — ее замкнутые подсхемы, не содержащиеся друг в друге. Пусть $\widetilde{X}$ — раздутие X с центром в $Y \cap Z$ (т. е. относительно пучка идеалов $\mathscr{J}_Y + \mathscr{J}_Z$). Показать, что строгие образы $\widetilde{Y}$ и $\widetilde{Z}$ подсхем Y и Z не пересекаются в $\widetilde{X}$.

***7.13.** Пример полного непроективного многообразия. Пусть k — алгебраически замкнутое поле, $\mathrm{char}\,k \neq 2$ и $C \subset \mathbf{P}_k^2$ — кубическая кривая $y^2z = x^3 + x^2z$ с обыкновенной двойной точкой $P_0 = (0, 0, 1)$. Тогда $C - P_0$ изоморфно мультипликативной группе $\mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}\,k[t, t^{-1}]$ (упр. 6.7). Для каждого $a \in k$, $a \neq 0$, отображение сдвига $t \mapsto at$ на $\mathbf{G}_m$ индуцирует изоморфизм кривой C, который мы обозначим через φ_a.

Рассмотрим теперь поверхности $C \times (\mathbf{P}^1 - \{0\})$ и $C \times (\mathbf{P}^1 - \{\infty\})$ и склеим их по открытым подмножествам $C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\})$ посредством изоморфизма φ: $\langle P, u\rangle \mapsto \langle\varphi_u(P), u\rangle$, где $P \in C$, $u \in \mathbf{G}_m = \mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$. В результате мы получим схему X, которая и будет требуемым примером. Так как проекции исходных поверхностей на второй множитель согласованы с φ, то существует естественный морфизм π: $X \to \mathbf{P}^1$.

(a) Показать, что π является собственным морфизмом и, следовательно, X — полное многообразие над k.

(b) Воспользоваться методами упр. 6.9 и показать, что $\mathrm{Pic}\,(C \times \mathbf{A}^1) \simeq \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z}$ и $\mathrm{Pic}\,(C \times (\mathbf{A}^1 - \{0\})) \simeq \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. [*Указание*. Показать, что имеют место изоморфизмы групп $(A[u])^* \simeq A^*$ и $(A[u, u^{-1}])^* \simeq A^* \times \mathbf{Z}$, где A — любое кольцо и * обозначает группу обратимых элементов соответствующего кольца.]

(c) Показать теперь, что отображение ограничения $\mathrm{Pic}\,(C \times \mathbf{A}^1) \to \mathrm{Pic}\,(C \times (\mathbf{A}^1 - \{0\}))$ имеет вид $\langle t, n\rangle \mapsto \langle t, 0, n\rangle$ и что автоморфизм φ схемы $C \times (A^1 - \{0\})$ индуцирует на группе Пикара отображение вида $\langle t, d, n\rangle \mapsto \langle t, d + n, n\rangle$.

(d) Вывести из предыдущего, что образ отображения ограничения $\mathrm{Pic}\,X \to \mathrm{Pic}\,(C \times \{0\})$ состоит целиком из дивизоров степени 0 на C и что, следовательно, X не проективно над k и морфизм π не проективен.

7.14. (a) Привести пример нётеровой схемы X и локально свободного когерентного пучка $\mathscr{E}$ на X, таких, что обратимый пучок $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ *не* будет очень обильным относительно X.

(b) Пусть f: $X \to Y$ — морфизм схем, $\mathscr{L}$ — очень обильный обратимый пучок на X относительно Y и $\mathscr{S}$ — пучок градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр, удовлетворяющий условиям (†). Пусть $P = \mathbf{Proj}\,\mathscr{S}$, π: $P \to X$ — естественная проекция и $\mathcal{O}_P(1)$ — соответствующий обратимый пучок. Показать, что для всех $n \gg 0$ пучок $\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^*\mathscr{L}^n$ является очень обильным на P относительно Y. [*Указание*. Воспользоваться предложением 7.10 и упр. 5.12.]

§ 8. Дифференциалы

В этом параграфе мы определим пучок относительных дифференциальных форм одной схемы над другой. В случае неособого многообразия над $\mathbf{C}$, которое можно рассматривать также как комплексное многообразие, пучок дифференциальных форм представляет собой, в сущности, двойственный пучок к пучку ростков сечений касательного расслоения, как это определяется в дифференциальной геометрии. Однако в абстрактной алгебраической геометрии пучок дифференциальных форм мы определим чисто алгебраически, а касательный пучок будет определяться тогда как двойственный к пучку дифференциальных форм. Поэтому этот параграф мы начнем с обзора свойств модулей дифференциалов колец.

В качестве применения пучка дифференциалов будет дана характеризация неособых многообразий среди схем конечного типа над полем. На неособом многообразии пучок дифференциалов будет использоваться также для определения касательного и канонического пучков и геометрического рода многообразия. Последний является важнейшим численным инвариантом многообразия.

Кэлеровы дифференциалы

Начнем с обзора алгебраической теории кэлеровых дифференциалов. Для ссылок мы будем в основном использовать книгу Мацумуры [2, гл. 10], хотя доказательства основных утверждений можно найти также в докладах Картье и Годемана в семинаре Картана и Шевалле [1, exposés 13,17] или в трактате Гротендика [EGA0_{IV}, § 20.5].

Пусть A — кольцо (как всегда, коммутативное и с единицей), B — некоторая A-алгебра и M — произвольный B-модуль.

Определение. *A-дифференцированием* кольца B со значениями в модуле M называется отображение $d: B \to M$, такое, что

(1) d аддитивно,
(2) $d(bb') = bdb' + b'db$,
(3) $da = 0$ для всех $a \in A$.

Определение. *Модулем относительных дифференциальных форм* кольца B над A называется B-модуль $\Omega_{B/A}$ вместе с A-дифференцированием $d: B \to \Omega_{B/A}$, обладающий следующим свойством универсальности: для всякого B-модуля M и всякого A-дифференцирования $d': B \to M$ существует единственный гомоморфизм B-модулей $f: \Omega_{B/A} \to M$, такой, что $d' = f \circ d$.

Ясно, что модуль $\Omega_{B/A}$ можно построить, взяв свободный B-модуль F, порожденный символами $\{db \mid b \in B\}$, и профакторизовав его по подмодулю, порожденному всеми выражениями вида

(1) $d(b + b') - db - db'$, $b, b' \in B$;
(2) $d(bb') - bdb' - b'db$, $b, b' \in B$;
(3) da, $a \in A$.

Дифференцирование $d: B \to \Omega_{B/A}$ определяется формулой $b \mapsto db$. Таким образом, модуль $\Omega_{B/A}$ всегда существует. Как следует из определения, пара $\langle \Omega_{B/A}, d \rangle$ определена однозначно с точностью до изоморфизма. В качестве следствия такого построения получаем, что $\Omega_{B/A}$ как B-модуль порождается символами $\{db \mid b \in B\}$.

Предложение 8.1A. *Пусть B — некоторая A-алгебра, $f: B \otimes_A B \to B$ — «диагональный» гомоморфизм, определенный формулой $f(b \otimes b') = bb'$, и пусть $I = \ker f$. Рассмотрим $B \otimes_A B$ как B-модуль относительно умножения слева, тогда I/I^2 тоже наследует структуру B-модуля. Определим отображение $d: B \to I/I^2$, полагая $db = 1 \otimes b - b \otimes 1$ (по модулю I^2). Тогда $\langle I/I^2, d \rangle$ является модулем относительных дифференциалов для B/A.*

Доказательство. См. Мацумура [2, стр. 182].

Предложение 8.2A. *Пусть A' и B — некоторые алгебры над A и $B' = B \otimes_A A'$. Тогда $\Omega_{B'/A'} \simeq \Omega_{B/A} \otimes_B B'$. Кроме того, если S — некоторая мультипликативная система в B, то $\Omega_{S^{-1}B/A} \simeq S^{-1}\Omega_{B/A}$*

Доказательство. См. Мацумура [2, стр. 186].

Пример 8.2.1. Пусть $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов над A. Тогда $\Omega_{B/A}$ является свободным B-модулем ранга n с образующими $dx_1, \ldots, dx_n$ (см. Мацумура [2, стр. 184]).

Предложение 8.3A (первая точная последовательность). *Пусть $A \to B \to C$ — последовательность колец и гомоморфизмов. Тогда имеет место следующая точная последовательность C-модулей:*

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0.$$

Доказательство. См Мацумура [2, теорема 57, стр. 186].

Предложение 8.4A (вторая точная последовательность). *Пусть B — некоторая A-алгебра, I — идеал в B и $C = B/I$. Тогда имеет место естественная точная последовательность C-модулей*

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to 0,$$

где для любого $b \in I$, если $\bar{b}$ — его образ в I/I^2, то $\delta\bar{b} = db \otimes 1$. Отметим, в частности, что I/I^2 обладает естественной структурой C-модуля и что δ является C-линейным отображением, несмотря на то что оно определяется посредством дифференцирования d.

Доказательство. См. Мацумура [2, теорема 58, стр. 187].

Следствие 8.5. *Пусть B — конечно порожденная A-алгебра или локализация конечно порожденной A-алгебры. Тогда $\Omega_{B/A}$ является конечно порожденным B-модулем.*

Доказательство. Действительно, B является фактор-кольцом кольца многочленов (или его локализации), так что утверждение вытекает из предложений 8.4A, 8.2A и примера 8.2.1.

Будем изучать теперь модуль дифференциалов в случае расширения полей и локальных колец. Напомним (§ 4 гл. I), что расширение K поля k называется *сепарабельно порожденным*, если существует базис трансцендентности $\{x_\lambda\}$ расширения K/k, такой, что K является сепарабельным алгебраическим расширением поля $k(\{x_\lambda\})$.

Теорема 8.6A. *Пусть K — конечно порожденное расширение поля k. Тогда $\dim_K \Omega_{K/k} \geqslant \operatorname{deg\,tr} K/k$, и равенство выполняется тогда и только тогда, когда поле K сепарабельно порождено над k. (Здесь $\dim_K$ обозначает размерность векторного пространства над K.)*

Доказательство. См. Мацумура [2, теорема 59, стр. 191]. Отметим, в частности, что в случае конечного алгебраического расширения K/k равенство $\Omega_{K/k} = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда K/k сепарабельно.

Предложение 8.7. *Пусть B — локальное кольцо, содержащее поле k, изоморфное его полю вычетов $B/\mathfrak{m}$. Тогда отображение $\delta\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{B/k} \otimes_B k$, определенное в предложении 8.4A, является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно 8.4A, коядро δ равно $\Omega_{k/k} = 0$, так что отображение δ сюръективно. Для доказательства инъективности достаточно показать, что отображение двойственных векторных пространств

$$\delta'\colon \operatorname{Hom}_k(\Omega_{B/k} \otimes k,\ k) \to \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\ k)$$

сюръективно. Левый член здесь изоморфен $\operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/k}, k)$, который по определению модуля дифференциалов можно отождествить с множеством $\operatorname{Der}_k(B, k)$ k-дифференцирований из B в k. Пусть $d\colon B \to k$ — некоторое дифференцирование, тогда $\delta'(d)$ — это ограничение d на $\mathfrak{m}$ с учетом того, что $d(\mathfrak{m}^2) = 0$. Теперь для того чтобы доказать сюръективность δ', рассмотрим произвольный элемент $h \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$. Заметим, что любой элемент $b \in B$ можно однозначно представить в виде $b = \lambda + c$, где $\lambda \in k$, $c \in \mathfrak{m}$. Определим $db = h(\bar{c})$, где $\bar{c} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — образ элемента c. Тогда непосредственно проверяется, что d является k-дифференцированием из B в k и что $\delta'(d) = h$. Следовательно, отображение δ' сюръективно, что и требовалось доказать.

Теорема 8.8. *Пусть B — локальное кольцо, содержащее поле k, изоморфное его полю вычетов $B/\mathfrak{m}$. Предположим, что поле k совершенно и что B является локализацией конечно порожденной k-алгебры. Тогда $\Omega_{B/k}$ будет свободным B-модулем ранга $\dim B$ в том и только том случае, когда B — регулярное локальное кольцо.*

Доказательство. Предположим сначала, что модуль $\Omega_{B/k}$ свободен и $\operatorname{rk} \Omega_{B/k} = \dim B$. Тогда из предложения 8.7 имеем $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim B$, что означает по определению регулярность локального кольца B (§ 5 гл. I). Отметим, в частности, что отсюда вытекает целостность кольца B.

Обратно, предположим, что B — регулярное локальное кольцо размерности r. Тогда $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$, так что, согласно 8.7, мы имеем $\dim_k \Omega_{B/k} \otimes k = r$. С другой стороны, пусть K — поле частных кольца B. Тогда из предложения 8.2A следует, что $\Omega_{B/k} \otimes_B K = \Omega_{K/k}$. Но поскольку поле k совершенно, то k сепарабельно порождено над k (1.4.8A) и, согласно 8.6A, $\dim_K \Omega_{K/k} = \operatorname{deg\,tr} K/k$. Но в силу 1.8A гл. I мы имеем также $\dim B = \operatorname{deg\,tr} K/k$. Наконец, согласно 8.5, $\Omega_{B/k}$ — конечно порожденный B-модуль. Отсюда мы заключаем, что B-модуль $\Omega_{B/k}$ свободен и имеет ранг r, воспользовавшись следующей хорошо известной леммой.

Лемма 8.9. *Пусть A — нётерово локальное целостное кольцо с полем вычетов k и полем частных K и M — конечно порожденный A-модуль, такой, что $\dim_k M \otimes_A k = \dim_K M \otimes_A K = r$. Тогда M — свободный модуль ранга r.*

Доказательство. Так как $\dim_k M \otimes k = r$, то из леммы Накаямы следует, что M может быть порожден r элементами, так что существует сюръективное отображение $\varphi\colon A^r \to M \to 0$. Пусть R — его ядро. Тогда имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \to R \otimes K \to K^r \to M \otimes K \to 0,$$

и поскольку $\dim_K M \otimes K = r$, то $R \otimes K = 0$. Но R не имеет кручения, так что $R = 0$ и модуль M изоморфен A^r.

Пучки дифференциалов

Распространим теперь определение модуля дифференциалов на произвольные схемы. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем. Рассмотрим диагональный морфизм $\Delta\colon X \to X \times_Y X$. Как следует из доказательства 4.2, Δ является изоморфизмом X на его образ $\Delta(X)$, являющийся *локально замкнутой* подсхемой в $X \times_Y X$, т. е. замкнутой подсхемой в некотором открытом подмножестве W в $X \times_Y X$.

Определение. Пусть $\mathcal{J}$ — пучок идеалов подсхемы $\Delta(X)$ в W. Определим пучок $\Omega_{X/Y}$ *относительных дифференциалов* X над Y, полагая $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ на X.

Замечание 8.9.1. Отметим прежде всего, что $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ обладает естественной структурой $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$-модуля, и поскольку Δ индуцирует изоморфизм X с $\Delta(X)$, то $\Omega_{X/Y}$ снабжается структурой $\mathcal{O}_X$-модуля. Более того, как следует из предложения 5.9, пучок $\Omega_{X/Y}$ квазикогерентен. В случае когда схема X нётерова и f — морфизм конечного типа, схема $X \times_Y X$ тоже нётерова и тогда пучок $\Omega_{X/Y}$ является когерентным.

Замечание 8.9.2. Если $U = \operatorname{Spec} A$ — открытое аффинное подмножество в Y, а $V = \operatorname{Spec} B$ — открытое аффинное подмножество в X, такое, что $f(V) \subset U$, то $V \times_U V$ является открытым аффинным подмножеством, изоморфным $\operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$, в $X \times_Y X$ и $\Delta(X) \cap (V \times_U V)$ — замкнутая подсхема, определяемая ядром диагонального гомоморфизма $B \otimes_A B \to B$. Стало быть, $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ — пучок, соответствующий модулю I/I^2 из предложения 8.1A. Отсюда следует, что $\Omega_{V/U} \simeq (\Omega_{B/A})^{\sim}$. Следовательно, приведенное выше определение пучка дифференциалов X/Y согласуется в аффинном случае посредством функтора $\sim$ с модулем дифференциалов соответствующих колец. Поэтому мы могли бы определить пучок $\Omega_{X/Y}$, покрывая X и Y открытыми аффинными подмножествами V и U и склеивая соответствующие пучки $(\Omega_{B/A})^{\sim}$. Склеивая дифференцирования $d\colon B \to \Omega_{B/A}$, получаем отображение $d\colon \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/Y}$ пучков абелевых групп на X, которое является дифференцированием локальных колец в каждой точке.

Таким образом, изложенные выше факты о модулях дифференциалов можно перенести на пучки. В результате получаются следующие утверждения.

Предложение 8.10. *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y' \to Y$ — морфизмы схем и $f'\colon X' = X \times Y' \to Y'$ — морфизм расширения базы. Тогда $\Omega_{X'/Y'} \simeq g'^*(\Omega_{X/Y})$, где $g'\colon X' \to X$ — проекция на первый множитель.*

Доказательство. Это непосредственно следует из предложения 8.2A.

Предложение 8.11. *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — морфизмы схем. Тогда имеет место следующая точная последовательность пучков на X:*

$$f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z} \to \Omega_{X/Y} \to 0.$$

Доказательство. Это следует из предложения 8.3A.

Предложение 8.12. *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем и Z — замкнутая подсхема в X с пучком идеалов $\mathcal{J}$. Тогда имеет место следующая точная последовательность пучков на Z:*

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_Z \to \Omega_{Z/Y} \to 0.$$

Доказательство. Это следует из предложения 8.4A.

Пример 8.12.1. Пусть $X = \mathbf{A}^n_Y$, тогда $\Omega_{X/Y}$ является свободным $\mathcal{O}_X$-модулем ранга n, порожденным глобальными сечениями $dx_1, \ldots, dx_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — аффинные координаты в $\mathbf{A}^n$.

Докажем теперь один важный результат о существовании точной последовательности, связывающей пучок дифференциалов на проективном пространстве с уже известными нам пучками. На этом результате будут основаны дальнейшие вычисления, касающиеся дифференциалов на проективных многообразиях.

Теорема 8.13. *Пусть A — некоторое кольцо, $Y = \operatorname{Spec} A$ и $X = \mathbf{P}^n_A$. Тогда имеет место следующая точная последовательность пучков на X:*

$$0 \to \Omega_{X/Y} \to \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

(Показатель степени $n+1$ в среднем члене означает прямую сумму $n+1$ экземпляров пучка $\mathcal{O}_X(-1)$.)

Доказательство. Пусть $S = A[x_0, \ldots, x_n]$ — однородное координатное кольцо пространства X и $E = S(-1)^{n+1}$ — градуированный S-модуль с базисом $e_0, \ldots, e_n$ элементов степени 1. Определим гомоморфизм (степени 0) градуированных S-модулей $E \to S$ путем сопоставления $e_i \mapsto x_i$. Пусть M — его ядро. Тогда точная последовательность градуированных S-модулей

$$0 \to M \to E \to S$$

порождает точную последовательность пучков на X:

$$0 \to \widetilde{M} \to \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Отметим, что гомоморфизм $E \to S$ сюръективен во всех компонентах степени $\geqslant 1$ (но не на компоненте степени 0), поэтому соответствующее отображение пучков сюръективно.

Покажем, что $\widetilde{M} \simeq \Omega_{X/Y}$. Заметим прежде всего, что, локализуя относительно x_i, мы получаем сюръективный гомоморфизм свободных S_{x_i}-модулей $E_{x_i} \to S_{x_i}$, поэтому M_{x_i} является свободным S_{x_i}-модулем ранга n, порожденным элементами $\{e_j - (x_j/x_i)\, e_i \mid j \neq i\}$. Отсюда следует, что на стандартном открытом множестве $U_i \subset X$, определяемом условием $x_i \neq 0$, $\mathcal{O}_{U_i}$-модуль $\widetilde{M}|_{U_i}$ свободен и порожден сечениями $(1/x_i)\, e_j - (x_j/x_i^2)\, e_i$ для всех $j \neq i$. (Дополнительное умножение на $1/x_i$ здесь нужно для того, чтобы получить элементы степени 0 в M_{x_i}.)

Теперь построим отображение $\varphi_i: \Omega_{X/Y}|_{U_i} \to \widetilde{M}|_{U_i}$. Для этого напомним, что $U_i \simeq \operatorname{Spec} A\,[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]$, так что $\Omega_{X/Y}|_{U_i}$ является свободным $\mathcal{O}_{U_i}$-модулем, порожденным $d\,(x_0/x_i), \ldots, d\,(x_n/x_i)$. Положим

$$\varphi_i\,(d\,(x_j/x_i)) = (1/x_i^2)\,(x_i e_j - x_j e_i).$$

Отсюда видно, что φ_i является изоморфизмом. Простые вычисления показывают, что изоморфизмы φ_i согласованы на пересечениях $U_i \cap U_j$, так что определен глобальный изоморфизм $\varphi: \Omega_{X/Y} \to \widetilde{M}$ на X. Действительно, для любого k на $U_i \cap U_j$ имеет место равенство $(x_k/x_i) = (x_k/x_j)\cdot(x_j/x_i)$. Следовательно,

$$d\left(\frac{x_k}{x_i}\right) - \frac{x_k}{x_j}\,d\left(\frac{x_j}{x_i}\right) = \frac{x_j}{x_i}\,d\left(\frac{x_k}{x_j}\right).$$

Применяя φ_i к левой стороне этого равенства, а φ_j — к правой, получаем одно и то же выражение $(1/x_i x_j)\,(x_j e_k - x_k e_j)$. Стало быть, изоморфизмы φ_i склеиваются в глобальный изоморфизм φ, и теорема полностью доказана.

Случай неособых многообразий

Неособые многообразия являются основным объектом применения пучков дифференциалов. Понятие неособого многообразия было определено нами в § 5 гл. I только для случая квазипроективных многообразий. Распространим это определение на любые абстрактные многообразия.

Определение. Абстрактное многообразие X над алгебраически замкнутым полем называется *неособым*, если все его локальные кольца регулярны.

Отметим, что в этом определении требуется большее, чем в определении из гл. I, а именно требуется регулярность всех локальных колец, а не только локальных колец замкнутых точек. Однако оба определения эквивалентны, поскольку локальное кольцо любой незамкнутой точки является локализацией локального кольца некоторой замкнутой точки и имеет место следующий чисто алгебраический факт.

Теорема 8.14A. *Всякая локализация регулярного локального кольца относительно простого идеала снова является регулярным локальным кольцом.*

Доказательство. См. Мацумура [2, стр. 139].

В следующей теореме устанавливается связь между понятием неособости многообразия и свойствами пучка дифференциалов на нем.

Теорема 8.15. *Пусть X — неприводимая отделимая схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k. Схема X является неособым многообразием над k тогда и только тогда, когда пучок $\Omega_{X/k}$ локально свободен и его ранг равен $n = \dim X$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ — замкнутая точка, тогда локальное кольцо $B = \mathcal{O}_{x,X}$ в ней имеет размерность n, поле вычетов k и является локализацией некоторой k-алгебры конечного типа. Более того, модуль дифференциалов $\Omega_{B/k}$ кольца B над k совпадает со слоем $(\Omega_{X/k})_x$ пучка дифференциалов $\Omega_{X/k}$. В таком случае из теоремы 8.8 следует, что $(\Omega_{X/k})_x$ — локально свободный модуль ранга n тогда и только тогда, когда B — регулярное локальное кольцо. Доказательство теоремы вытекает теперь из 8.14A и упр. 5.7.

Следствие 8.16. *Пусть X — многообразие над k. Тогда существует открытое плотное подмножество U в X, являющееся неособым многообразием.*

Доказательство. Пусть $\dim X = n$, тогда поле функций K на X имеет степень трансцендентности n над k, конечно порождено над k и является сепарабельно порожденным расширением k (см. 4.8A гл. I). Поэтому, согласно 8.6A, модуль $\Omega_{K/k}$ является векторным пространством размерности n над K. Но $\Omega_{K/k}$ есть не что иное, как слой пучка $\Omega_{X/k}$ в общей точке схемы X. Стало быть, в силу упр. 5.7 пучок $\Omega_{X/k}$ локально свободен и имеет ранг n в окрестности общей точки, т. е. на некотором непустом открытом множестве U. Неособость U следует в таком случае из теоремы 8.15.

Отметим, что это дает другое доказательство леммы 5.3 гл. I.

Теорема 8.17. *Пусть X — неособое многообразие над k, а $Y \subset X$ — его неприводимое замкнутое подмножество, определенное пучком идеалов $\mathcal{J}$. Многообразие Y неособо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) *пучок $\Omega_{Y/k}$ локально свободен;*

(2) *последовательность 8.12 точна также и слева:*

$$0 \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to \Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_Y \to \Omega_{Y/k} \to 0.$$

Более того, в этом случае пучок $\mathcal{J}$ порождается локально $r = \operatorname{codim}(Y, X)$ элементами, а пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ локально свободен и имеет ранг r на Y.

Доказательство. Предположим сначала, что выполнены условия (1) и (2). Тогда пучок $\Omega_{Y/k}$ локально свободен, так что в силу теоремы 8.15 достаточно показать только, что $\operatorname{rank} \Omega_{Y/k} = \dim Y$. Пусть $\operatorname{rank} \Omega_{Y/k} = q$. Тогда поскольку $\Omega_{X/k}$ — локально свободный пучок ранга n, то из условия (2) следует, что $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ является локально свободным пучком ранга $n - q$ на Y. Следовательно, по лемме Накаямы пучок $\mathcal{J}$ локально может быть порожден $n - q$ элементами, и, стало быть, $\dim Y \geqslant n - (n - q) = q$ (упр. 1.9 гл. I). С другой стороны, для произвольной замкнутой точки $y \in Y$, согласно предложению 8.7, имеем $q = \dim_k(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2)$. В силу предложения 5.2A гл. I отсюда следует, что $q \geqslant \dim Y$. Стало быть $q = \dim Y$. Прежде всего отсюда вытекает, что Y неособо. Кроме того, это доказывает последнее утверждение теоремы, поскольку теперь мы имеем $n - q = \operatorname{codim}(Y, X)$.

Обратно, предположим, что Y неособо. Тогда пучок $\Omega_{Y/k}$ локально свободен и имеет ранг $q = \dim Y$, т. е. утверждение (1), очевидно, справедливо. В силу предложения 8.12 мы имеем точную последовательность

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\varphi} \Omega_{Y/k} \to 0.$$

Пусть $y \in Y$ — произвольная замкнутая точка. Тогда в некоторой ее окрестности U пучок $\ker \varphi$ свободен и имеет ранг $r = n - q$. Следовательно, можно выбрать набор сечений $x_1, \ldots, x_r$ пучка $\mathcal{J}$ в окрестности U, так чтобы $dx_1, \ldots, dx_r$ порождали $\ker \varphi|_U$. Пусть $\mathcal{J}'$ — пучок идеалов, порожденный $x_1, \ldots, x_r$, и Y' — замкнутая подсхема, определяемая $\mathcal{J}'$. Тогда по построению $dx_1, \ldots, dx_r$ порождают свободный подпучок ранга r пучка $\Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_{Y'}$ в окрестности U. Отсюда вытекает, что в точной последовательности из предложения 8.12, написанной для подсхемы Y',

$$\mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_{Y'} \to \Omega_{Y'/k} \to 0$$

гомоморфизм δ инъективен (так как его образ локально свободен и имеет ранг r) и пучок $\Omega_{Y'/k}$ локально свободен ранга $n - r$. Тогда по уже доказанному прямому утверждению подсхема Y' неособа и имеет размерность $n - r$ в окрестности U. Но $Y \subset Y'$ и обе схемы Y и Y' целы и имеют одинаковую размерность, так что $Y = Y'$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$. Отсюда получаем, что гомоморфизм $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_Y$ инъективен, что и требовалось доказать.

Теперь докажем результат такого сорта: при некоторых условиях гиперплоское сечение неособого многообразия само является неособым многообразием. В действительности существует большой класс такого рода результатов: если проективное многообразие

обладает некоторым свойством, то его достаточно общее гиперплоское сечение обладает тем же свойством. Приводимый ниже результат сформулирован не в самой сильной, но достаточной для многих приложений форме, см. также другой его вариант для характеристики 0 в 10.9 гл. III.

Теорема 8.18 (теорема Бертини). *Пусть X — неособое замкнутое подмногообразие в $\mathbf{P}_k^n$ над алгебраически замкнутым полем k. Тогда существует гиперплоскость $H \subset \mathbf{P}_k^n$, не содержащая X и такая, что схема $H \cap X$ регулярна в каждой точке.* (*В действительности позднее в* 7.9.1 гл. III *мы покажем, что если* $\dim X \geqslant 2$, *то схема $H \cap X$ связна и, следовательно, регулярна, так что $H \cap X$ является неособым многообразием*). *Более того, гиперплоскости с этим свойством образуют открытое плотное подмножество в полной линейной системе $|H|$, рассматриваемой как проективное пространство.*

Доказательство. Для каждой замкнутой точки $x \in X$ пусть $B_x = \{$гиперплоскости $H \mid H \supset X$ или $H \not\supset X$, но x не является

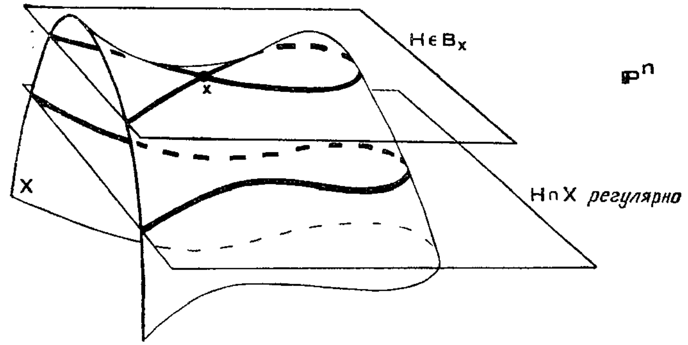


Рис. 10. Гиперплоские сечения неособого многообразия.

ся регулярной точкой схемы $H \cap X\}$ (см. рис. 10). Это множество всех плохих гиперплоскостей для данной точки x. Далее, каждая гиперплоскость H определяется ненулевым глобальным сечением $f \in V = \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$. Зафиксируем $f_0 \in V$ так, чтобы $x \notin H_0$, где H_0 — гиперплоскость, определяемая сечением f_0. Тогда мы можем определить отображение векторных k-пространств

$$\varphi_x\colon V \to \mathcal{O}_{x,X}/\mathfrak{m}_x^2$$

следующим образом. Пусть $f \in V$, тогда f/f_0 — регулярная функция на $\mathbf{P}^n - H_0$, которая индуцирует некоторую регулярную функцию на $X - X \cap H_0$. В качестве $\varphi_x(f)$ возьмем образ f/f_0

в локальном кольце $\mathcal{O}_{x,X}$ по модулю $\mathfrak{m}_x^2$. Далее, схема $H \cap X$ в точке x определяется идеалом, порожденным элементом f/f_0 в $\mathcal{O}_x$. Следовательно, $x \in H \cap X$ тогда и только тогда, когда $\varphi_x(f) \in \mathfrak{m}_x$, и точка x не регулярна на $H \cap X$ тогда и только тогда, когда $\varphi_x(f) \in \mathfrak{m}_x^2$, так как в этом случае локальное кольцо $\mathcal{O}_x/(\varphi(f))$ не будет регулярным. Таким образом, отсюда видно, что гиперплоскости $H \in B_x$ в точности соответствуют элементам $f \in \in \ker \varphi_x$ (отметим также, что $\varphi_x(f) = 0 \Leftrightarrow H \supset X$).

Так как точка x замкнута и поле k алгебраически замкнуто, то $\mathfrak{m}_x$ порождается линейными формами от координат. Следовательно, отображение φ_x является сюръективным. Если $\dim X = r$, то $\dim_k \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^2 = r + 1$. Так как $\dim V = n + 1$, то $\dim \ker \varphi_x = n - r$. Это показывает, что B_x является линейной системой гиперплоскостей (в смысле § 7) размерности $n - r - 1$.

Теперь, рассматривая полную линейную систему $|H|$ как проективное пространство, обозначим через $B \subset X \times |H|$ подмножество, состоящее из всех пар $\langle x, H\rangle$, таких, что $x \in X$ — замкнутая точка и $H \in B_x$. Ясно, что B является множеством замкнутых точек замкнутого подмножества в $X \times |H|$, которое мы также обозначим через B и будем рассматривать как подсхему с приведенной индуцированной структурой. Как только что было показано, первая проекция $p_1\colon B \to X$ сюръективна, причем ее слоями являются проективные пространства размерности $n - r - 1$. Следовательно, схема B неприводима и имеет размерность $(n - r - 1) + r = n - 1$. Стало быть, для второй проекции $p_2\colon B \to |H|$ имеем $\dim p_2(B) \leqslant n - 1$. Так как $\dim |H| = n$, то отсюда следует, что $p_2(B) \neq |H|$. Пусть $H \in |H| - p_2(B)$, тогда $H \not\supset X$ и схема $X \cap H$ регулярна в каждой точке, так что H удовлетворяет всем требованиям теоремы. Наконец, отметим, что поскольку многообразие X проективно, то $p_2\colon X \times |H| \to |H|$ — проективный морфизм; B замкнуто в $X \times |H|$, стало быть, $p_2(B)$ замкнуто в $|H|$. Таким образом, $|H| - p_2(B)$ является открытым плотным подмножеством в $|H|$, что доказывает последнее утверждение теоремы.

Замечание 8.18.1. Этот факт остается верным, даже если X имеет конечное число особых точек, поскольку множество гиперплоскостей, содержащих хотя бы одну из этих точек, является собственным замкнутым подмножеством в $|H|$.

Приложения

Теперь мы применим предыдущие соображения для того, чтобы определить некоторые инварианты неособых многообразий над полем.

Определение. Пусть X — неособое многообразие над k. Определим *касательный пучок* $\mathcal{T}_X$ на X как пучок $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$. Он является локально свободным пучком ранга $n = \dim X$. Определим *канонический пучок* ω_X на X, полагая $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}$, где справа стоит n-я внешняя степень пучка дифференциалов $\Omega_{X/k}$ и $n = \dim X$. Он является обратимым пучком на X. Для проективного неособого многообразия X определим *геометрический род* p_g, полагая $p_g = \dim_k \Gamma(X, \omega_X)$. Это некоторое целое неотрицательное число.

Замечание 8.18.2. В упр. 7.2 гл. I был определен арифметический род p_a многообразия в проективном пространстве. Для проективной неособой кривой арифметический и геометрический роды совпадают. Это является следствием теоремы двойственности Серра, которая будет доказана в 7.12.2 гл. III. Для многообразий размерности $\geqslant 2$, однако, p_a и p_g, вообще говоря, не совпадают, см. упр. 8.3, а также 7.12.3 гл. III.

Замечание 8.18.3. Так как касательный и канонический пучки, а также пучок дифференциалов определены внутренним образом, то любые числа, которые можно определить с их помощью, например геометрический род, будут являться инвариантами многообразия X с точностью до изоморфизма. На самом деле мы сейчас покажем, что геометрический род является даже *бирациональным инвариантом* неособого проектного многообразия. Он играет исключительной важности роль в проблеме классификации многообразий.

Теорема 8.19. *Пусть X и X' — бирационально эквивалентные неособые проективные многообразия над k. Тогда $p_g(X) = p_g(X')$.*

Доказательство. Напомним (см. § 4 гл. I), что бирациональная эквивалентность X и X' означает существование рациональных отображений из X в X' и из X' в X, обратных друг другу. Пусть $V \subset X$ — наибольшее открытое множество, на котором определено рациональное отображение из X в X', т. е. существует морфизм $f\colon V \to X'$, представляющий это рациональное отображение. Тогда по 8.11 мы имеем отображение $f^*\Omega_{X'/k} \to \Omega_{V/k}$. Оба этих пучка локально свободны и одинакового ранга $n = \dim X$, следовательно, это отображение индуцирует отображение их внешних степеней $f^*\omega_{X'} \to \omega_V$, которое в свою очередь индуцирует отображение пространств глобальных сечений $f^*\colon \Gamma(X', \omega_{X'}) \to \Gamma(V, \omega_V)$. Далее, поскольку отображение f бирационально, то, согласно 4.5 гл. I, существует открытое множество $U \subset V$, такое, что $f(U)$ открыто в X' и f индуцирует изоморфизм из U в $f(U)$. Поэтому $\omega_V|_U \simeq \omega_{X'}|_{f(U)}$. Так как ненулевое глобальное сечение обратимого пучка не может обращаться в нуль на плотном открытом множестве, то отсюда мы получаем, что отображение векторных пространств $f^*\colon \Gamma(X', \omega_{X'}) \to \Gamma(V, \omega_V)$ инъективно.

Теперь сравним $\Gamma(V, \omega_V)$ с $\Gamma(X, \omega_X)$. Прежде всего мы утверждаем, что коразмерность $X - V$ в X больше либо равна 2. Действительно, это следует из валюативного критерия собственности 4.7. Если $P \in X$ — точка коразмерности 1, то локальное кольцо $\mathcal{O}_{P, X}$ является кольцом дискретного нормирования (поскольку X неособо). Отображение из X в X' определено в общей точке, и X проективно, а следовательно, собственно над k, так что существует единственный морфизм $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{P, X} \to X'$, согласованный с заданным бирациональным отображанием. Он продолжается до морфизма некоторой окрестности точки P в X', следовательно, $P \in V$ по выбору V.

Теперь уже можно показать, что естественное отображение ограничения $\Gamma(X, \omega_X) \to \Gamma(V, \omega_V)$ биективно. Для этого достаточно показать, что для любого открытого аффинного подмножества $U \subset X$, такого, что $\omega_X|_U \simeq \mathcal{O}_U$, отображение $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \to \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{U \cap V})$ биективно. Так как многообразие X неособо, а следовательно, нормально и так как коразмерность $U - V \cap U$ в U больше либо равна 2, то это немедленно следует из предложения 6.3А.

Объединяя эти результаты, получаем, что $p_g(X') \leqslant p_g(X)$. По симметрии существует противоположное неравенство $p_g(X) \leqslant p_g(X')$, откуда следует, что $p_g(X) = p_g(X')$.

Теперь изучим строение касательного и канонического пучков на неособом подмногообразии многообразия X.

Определение. Пусть Y — неособое подмногообразие неособого многообразия X над k, заданное пучком идеалов $\mathcal{J}$. Локально свободный пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ из теоремы 8.17 называется *конормальным* пучком Y в X. Двойственный к нему пучок $\mathcal{N}_{Y/X} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_Y)$ называется *нормальным* пучком Y в X. Оба этих пучка локально свободны и имеют ранг $r = \operatorname{codim}(Y, X)$.

Отметим, что двойственная последовательность к точной последовательности из 8.17 локально свободных пучков на Y имеет вид

$$0 \to \mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0.$$

Отсюда следует, что определенный выше нормальный пучок имеет обычный геометрический смысл как пучок нормальных векторов, т. е. касательных векторов объемлющего пространства по модулю касательных векторов подпространства.

Предположение 8.20. *Пусть Y — неособое подмногообразие коразмерности r в неособом многообразии X над k. Тогда $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}$. В случае $r=1$, когда Y — дивизор, пусть $\mathcal{L}$ — соответствующий ему обратимый пучок на X. Тогда $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y$.*

Доказательство. Возьмем высшую внешнюю степень локально свободных пучков в точной последовательности

$$0 \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \Omega_Y \to 0$$

(см. упр. 5.16 (d)). В результате получим, что $\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \simeq \omega_Y \otimes \bigwedge^r(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$. Так как взятие высшей внешней степени коммутирует с переходом к двойственному пучку, то отсюда следует, что $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}$. В случае $r = 1$ имеем $\mathcal{J}_Y \simeq \mathcal{L}^{-1}$ согласно 6.18. Поэтому $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \simeq \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_Y$ и $\mathcal{N}_{Y/X} \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y$. Подставляя это в предыдущую формулу, получаем изоморфизм $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y$.

Пример 8.20.1. Пусть $X = \mathbf{P}_k^n$. Беря двойственную к точной последовательности из 8.13, получаем следующую точную последовательность:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1)^{n+1} \to \mathcal{T}_X \to 0.$$

Для того чтобы вычислить канонический пучок на $\mathbf{P}^n$, возьмем высшую внешнюю степень пучков в точной последовательности из 8.13. В результате получаем, что $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(-n-1)$. Так как пучок $\mathcal{O}_X(l)$ не имеет глобальных сечений при $l < 0$, то отсюда следует, что $p_g(\mathbf{P}^n) = 0$ для любого $n \geqslant 1$. Напомним, что *рациональным многообразием* называется всякое многообразие, бирационально эквивалентное $\mathbf{P}^n$ для некоторого n (упр. 4.4 гл. I). Так как p_g, согласно 8.19, является бирациональным инвариантом, то отсюда мы получаем, что $p_g(X) = 0$ для любого неособого проективного рационального многообразия X. Этот факт будет использован для доказательства существования нерациональных многообразий во всех размерностях.

Пример 8.20.2. Пусть $X = \mathbf{P}^n$, $n \geqslant 2$, и H — гиперплоскость в X. Для любого целого $d \geqslant 1$ дивизор dH очень обилен (см. 7.6.1) и, следовательно, является гиперплоским сечением X в подходящем вложении X в проективное пространство (а именно в d-кратном вложении). Поэтому можно воспользоваться теоремой Бертини 8.18. Из этой теоремы вытекает, что существует подсхема $Y \in |dH|$, регулярная в каждой из своих точек. Если бы Y состояло по крайней мере из двух неприводимых компонент, скажем Y_1 и Y_2, то их пересечение $Y_1 \cap Y_2$ было бы непустым (7.2 гл. I). Но это невозможно, поскольку тогда схема Y имела бы особенность в каждой точке $Y_1 \cap Y_2$, поэтому Y на самом деле неприводимое и неособое многообразие. Таким образом, для любого $d \geqslant 1$ существуют неособые гиперповерхности степени d в $\mathbf{P}^n$. На самом деле они образуют плотное открытое подмножество в полной линейной системе $|dH|$. (Это — обобщение упр. 5.5 гл. I.)

Пример 8.20.3. Пусть Y — неособая гиперповерхность степени d в $\mathbf{P}^n$, $n \geqslant 2$. Тогда из предложения 8.20 и примера 8.10.1 мы получаем, что $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(d-n-1)$. Рассмотрим некоторые частные случаи.

$n=2, d=1$. Y — прямая в $\mathbf{P}^r$, так что $Y \simeq \mathbf{P}^1$ и $\omega_Y \simeq \simeq \mathcal{O}_Y(-2)$, что мы уже знаем.

$n=2$, $d=2$. Y — коника в $\mathbf{P}^2$ и $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-1)$. В этом случае Y является образом 2-кратного вложения $\mathbf{P}^1$, так что прообраз ω_Y на $\mathbf{P}^1$ дает $\omega_{\mathbf{P}^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2)$, как и должно быть.

$n=2$, $d=3$. Y — неособая плоская кубическая кривая и $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$. Следовательно, $p_g(Y) = \dim \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$, и, значит, Y не рационально! Это обобщает упр. 6.2 гл. I, где был указан пример неособой кубической кривой и показано другим методом, что эта кривая не рациональна.

$n=2$, $d \geqslant 4$. Y — неособая плоская кривая степени d, $\omega_Y \simeq \simeq \mathcal{O}_Y(d-3)$ и $d-3>0$. Следовательно, $p_g>0$ и Y не рациональна. В действительности $p_g = {}^1/_2(d-1)(d-2)$ (см. упр. 8.4f), так что отсюда вытекает, что неособые плоские кривые различных степеней $d, d' \geqslant 3$ не могут быть бирационально эквивалентными между собой. Другой способ установить это заключается в следующем. Для любой неособой проективной кривой имеет смысл понятие *степени* канонического пучка. Так как всякая неособая проективная кривая единственна в своем классе бирациональной эквивалентности (§ 6 гл. I), то это число является на самом деле бирациональным инвариантом. В рассматриваемом случае оно равно $d(d-3)$, поскольку пучок $\mathcal{O}(1)$ имеет степень d на Y. Для различных d и d' эти числа тоже различны, следовательно, существует бесконечно много попарно бирационально неэквивалентных кривых.

$n=3$, $d=1$. Здесь $Y \simeq \mathbf{P}^2$, $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-3)$, и это нам уже известно.

$n=3$, $d=2$. Здесь Y — неособая квадрика в $\mathbf{P}^3$ и $\omega_Y \simeq \simeq \mathcal{O}_Y(-2)$. Следовательно, $p_g(Y)=0$, что согласуется с тем фактом, что поверхность Y рациональна (упр. 4.5 гл. I). При отождествлении $Y \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ канонический пучок ω_Y соответствует классу дивизоров типа $(-2, -2)$ (см. 6.6.1)). Это частный случай общего факта, что канонический пучок на прямом произведении неособых многообразий является тензорным произведением прообразов канонических пучков сомножителей (упр. 8.3).

$n=3$, $d=3$. Y — неособая кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$. $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-1)$, так что $p_g(Y)=0$. В этом случае Y тоже рациональная поверхность, как мы увидим позднее в гл. V.

$n=3$, $d=4$. В этом случае $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$, так что $p_g(Y)=1$. Это

уже нерациональная поверхность, принадлежащая классу так называемых К3-поверхностей.

$n=3$, $d \geqslant 5$. Здесь $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(d-4)$ и $d-4>0$. Следовательно, $p_g(Y)>0$ и поверхность Y не рациональна. Поверхности, на которых канонический пучок очень обилен, принадлежат к классу так называемых поверхностей общего типа.

$n=4$, $d=3, 4$. Это трехмерные кубика и квартика в $\mathbf{P}^4$. Для них $p_g=0$, но, как было недавно установлено (различными методами), неособые среди них всегда не рациональны. Нерациональность кубики — см. Клеменс и Гриффитс [1]. Нерациональность квартики — Исковских В. А. и Манин Ю. И. [1].

n произвольное, $d \geqslant n+1$. В этом случае Y — неособая гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$ с $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(d-n-1)$ и $d-n-1 \geqslant 0$. Следовательно, $p_g(Y) \geqslant 1$, так что Y не рационально. Тем самым показано, что существуют нерациональные многообразия во всех размерностях.

Немного локальной алгебры

Здесь мы изложим некоторые результаты из локальной алгебры, в большинстве своем касающиеся глубины и свойства быть кольцом Коэна — Маколея, которые обычно используются в алгебраической геометрии. Свяжем их с геометрическим понятием локально полного пересечения и применим к построению раздутия пучка идеалов. Доказательства нужных утверждений можно найти в книге Мацумуры [2, гл. 6].

Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Напомним, что последовательность $x_1, \ldots, x_r$ элементов из A называется *регулярной последовательностью* для M, если x_1 не является делителем нуля в M и для каждого $i=2, \ldots, r$ x_i не является делителем нуля в модуле $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$. Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. *Глубиной* (depth) модуля M называется максимальная длина регулярной последовательности $x_1, \ldots, x_r$ для M с $x_i \in \mathfrak{m}$. Эти определения применимы также и к самому кольцу, рассматриваемому как модуль над собой. Нётерово локальное кольцо A называется *кольцом Коэна — Маколея*, если $\operatorname{depth} A = \dim A$. Приведем список некоторых свойств колец Коэна — Маколея.

Теорема 8.21A. *Пусть A — локальное нётерово кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *Если A регулярно, то оно кольцо Коэна — Маколея.*

(b) *Если A — кольцо Коэна — Маколея, то всякая локализация A по простому идеалу тоже является кольцом Коэна — Маколея.*

(с) *Если A — кольцо Коэна — Маколея, то множество элементов $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ тогда и только тогда образует регулярную последовательность для A, когда* $\dim A/(x_1, \ldots, x_r) = \dim A - r$.

(d) *Если A — кольцо Коэна — Маколея и $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ — регулярная последовательность для A, то $A/(x_1, \ldots, x_r)$ тоже кольцо Коэна — Маколея.*

(е) *Пусть A — кольцо Коэна — Маколея, $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ — регулярная последовательность для A и I — идеал, порожденный $x_1, \ldots, x_r$. Тогда естественное отображение $(A/I)[t_1, \ldots, t_r] \to \operatorname{gr}_I A = \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n/I^{n+1}$, определяемое сопоставлением $t_i \mapsto x_i$, является изоморфизмом. Иначе говоря, I/I^2 является свободным A/I-модулем ранга r и для каждого $n \geqslant 1$ естественное отображение $S^n(I/I^2) \to I^n/I^{n+1}$ является изоморфизмом, где S^n обозначает n-ю симметрическую степень.*

Доказательство. См. Мацумура [2: (a) стр. 121, (b) стр. 104, (c) стр. 105, (d) стр. 104, (e) стр. 110].

В соответствии с терминологией схем (упр. 3.8) нётерово кольцо A мы будем называть *нормальным*, если для каждого простого идеала $\mathfrak{p}$ локализация $A_\mathfrak{p}$ является целозамкнутым целостным кольцом. Нормальное кольцо является конечным прямым произведением целозамкнутых целостных колец.

Теорема 8.22A (Серр). *Нётерово кольцо A нормально тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

(1) *для каждого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ высоты 1 локализация $A_\mathfrak{p}$ является регулярным кольцом (следовательно, кольцом дискретного нормирования);*

(2) *для каждого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ высоты $\geqslant 2$ имеет место неравенство* $\operatorname{depth} A_\mathfrak{p} \geqslant 2$.

Доказательство. См. Мацумура [2, теорема 39, стр. 125]. Условие (1) иногда называют условием R_1, или «регулярностью в коразмерности 1». Условие (2), дополненное требованием, чтобы для $\mathfrak{p}$ с $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$ имело место равенство $\operatorname{depth} A_\mathfrak{p} = 1$, которое в нашем случае является ледствием условия (1), называется *условием Серра* S_2.

Эти результаты применим теперь к алгебраической геометрии. Схему X будем называть *схемой Коэна — Маколея*, если все ее локальные кольца являются кольцами Коэна — Маколея.

Определение Пусть Y — замкнутая подсхема неособого многообразия X над k. Будем говорить, что Y является *локально полным пересечением* в X, если пучок идеалов $\mathcal{I}_Y$ подсхемы Y в X локально в окрестности каждой точки порождается $r = \operatorname{codim}(Y, X)$ элементами.

Пример 8.22.1. Если Y — неособое многообразие, то по 8.17 оно является локально полным пересечением в каждом неособом многообразии X, в котором оно содержится.

Замечание 8.22.2. В действительности понятие локально полного пересечения является внутренним свойством схемы Y, т. е. не зависит от содержащего ее неособого многообразия. Это доказывается с помощью понятия кокасательного комплекса морфизма, которое естественно обобщает понятие пучка относительных дифференциалов, введенных выше; см. Лихтенбаум и Шлессингер [1]. Мы не будем использовать этот факт в дальнейшем.

Предложение 8.23. *Пусть подсхема Y является локально полным пересечением в неособом многообразии X над k. Тогда*

(a) *Y — схема Коэна — Маколея;*

(b) *Y нормальна тогда и только тогда, когда она неособа в коразмерности 1.*

Доказательство. (a) Так как X неособо, то оно является схемой Коэна — Маколея по 8.21A(a), и так как $\mathcal{I}_Y$ локально порождается $r = \operatorname{codim}(Y, X)$ элементами, то по 8.21A(c) эти элементы локально образуют регулярную последовательность в $\mathcal{O}_X$. Поэтому, согласно 8.21A(d), Y является схемой Коэна — Маколея.

(b) Мы знаем уже, что из нормальности следует неособость в коразмерности 1 (6.2A гл. I). Для доказательства обратного утверждения применим теорему 8.22A к локальным кольцам схемы Y. Условие (1) теоремы — это наше предположение, а условие (2) выполнено автоматически, поскольку Y — схема Коэна — Маколея. □

В качестве последнего приложения рассмотрим раздутие неособого многообразия вдоль неособого подмногообразия (определение раздутия см. в § 7). Следующая теорема будет использоваться при сравнении инвариантов многообразий X и $\tilde{X}$ (упр. 8.5).

Теорема 8.24. *Пусть X — неособое многообразие над k и $Y \subset X$ — неособое замкнутое подмногообразие с пучком идеалов $\mathcal{I}$. Пусть $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — раздутие пучка $\mathcal{I}$ и $Y' \subset \tilde{X}$ — подсхема, определяемая обратным образом $\mathcal{I}' = \pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ пучка идеалов $\mathcal{I}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *$\tilde{X}$ неособо;*

(b) *Y' вместе с индуцированным отображением проекции $\pi\colon Y' \to Y$ изоморфно $\mathbf{P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$, т. е. расслоению на проективные про-*

странства над Y, ассоциированному с (локально свободным) пучком $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$;

(c) *при этом изоморфизме нормальный пучок* $\mathcal{N}_{Y'/\widetilde{X}}$ *переходит в пучок* $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)}(-1)$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение (b). Так как $\widetilde{X} = \mathbf{Proj} \bigoplus \mathcal{J}^d$, то мы имеем

$$Y' \simeq \mathbf{Proj} \bigoplus (\mathcal{J}^d \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \mathbf{Proj} \oplus \mathcal{J}^d/\mathcal{J}^{d+1}.$$

Но Y неособо, поэтому пучок $\mathcal{J}$ локально порождается регулярной последовательностью в $\mathcal{O}_X$, и можно воспользоваться теоремой 8.21A(e). Из этого следует, что пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ локально свободен и что для каждого $n \geqslant 1$ имеет место изоморфизм $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1} \simeq S^n(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$. Таким образом, $Y' \simeq \mathbf{Proj} \bigoplus S^d(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$, что по определению есть $\mathbf{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$.

В частности, Y' локально изоморфно $Y \times \mathbf{P}^{r-1}$, где $r = \operatorname{codim}(Y, X)$, поэтому Y' неособо. Так как Y' как дивизор в $\widetilde{X}$ локально главный (см 7.13a), то отсюда следует, что $\widetilde{X}$ тоже неособо: если факторкольцо локального нётерова кольца по главному идеалу, порожденному неделителем нуля, регулярно, то и само кольцо регулярно. Это доказывает утверждение (a).

Докажем (c). Напомним из доказательства предложения 7.13, что пучок $\mathcal{J}' = \pi^{-1}(\mathcal{J}) \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ изоморфен $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1)$. Отсюда следует, что $\mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2 \simeq \mathcal{O}_{Y'}(1)$, и, стало быть, $\mathcal{N}_{Y'/\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{Y'}(-1)$. Теорема доказана.

Следующий алгебраический факт будет использоваться в упражнениях.

Теорема 8.25A (Коэн И.). *Пусть A — полное локальное кольцо, содержащее поле k. Предположим, что поле вычетов $k(A) = A/\mathfrak{m}$ сепарабельно порождено над k. Тогда существует подполе $K \subset A$, содержащее k, такое, что отображение $K \to A/\mathfrak{m}$ — изоморфизм. (K называется* полем представителей *для A.)*

Доказательство. См. Мацумура [2, стр. 205].

Упражнения

8.1. Здесь содержится усиление результатов о пучках дифференциалов с целью изучить их поведение в не обязательно замкнутых точках схемы X.

(a) Обобщить предложение 8.7 в следующем смысле. Пусть B — локальное кольцо, содержащее поле k, и предположим, что его поле вычетов $k(B) = B/\mathfrak{m}$ сепарабельно порождено над k. Тогда точная последовательность из 8.4A точна также и слева, т. е.

$$0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/k} \otimes k(B) \to \Omega_{k(B)/k} \to 0.$$

[*Указание.* Повторяя доказательство предложения 8.7, перейти сначала к факторкольцу $B/\mathfrak{m}^2$, которое является полным локальным кольцом, а затем воспользоваться теоремой 8.25A, чтобы выбрать поле представителей для $B/\mathfrak{m}^2$.]

(b) Обобщить предложение 8.8 в следующем смысле. Пусть B и k такие же, как и в (a), и предположим, кроме того, что поле k совершенно и B является локализацией алгебры конечного типа над k. Показать, что кольцо B тогда и только тогда регулярно, когда $\Omega_{B/k}$ — свободный модуль ранга, равного $\dim B + \operatorname{deg} \operatorname{tr} k(B)/k$.

(c) Усилить теорему 8.15 в следующем смысле. Пусть X — неприводимая схема конечного типа над совершенным полем k и $\dim X = n$. Показать, что для любой точки $x \in X$, не обязательно замкнутой, локальное кольцо $\mathcal{O}_{x,X}$ регулярно тогда и только тогда, когда слой $(\Omega_{X/k})_x$ пучка дифференциалов $\Omega_{X/k}$ свободен и имеет ранг n.

(d) Усилить следствие 8.16 в следующем смысле. Пусть X — многообразие над алгебраически замкнутым полем k. Тогда $U = \{x \in X \mid \mathcal{O}_x$ — регулярное локальное кольцо$\}$ является открытым плотным подмножеством в X.

8.2. Пусть X — многообразие размерности n над k, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга $>n$ на X и $V \subset \Gamma(X, \mathcal{E})$ — векторное пространство глобальных сечений, порождающих $\mathcal{E}$. Показать, что тогда существует элемент $s \in V$, такой, что $s_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ для каждого $x \in X$. Вывести отсюда, что существует морфизм $\mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$, включающийся в точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0,$$

где пучок $\mathcal{E}'$ тоже локально свободен. [*Указание.* Воспользоваться методом, аналогичным методу доказательства теоремы Бертини 8.18.]

8.3 *Произведение схем.* (a) Пусть X и Y — схемы над схемой S. Показать, используя 8.10 и 8.11, что $\Omega_{X \times_S Y/S} \simeq p_1^*\Omega_{X/S} \oplus p_2^*\Omega_{Y/S}$.

(b) Пусть X и Y неособые многообразия над полем. Показать, что $\omega_{X \times Y} \simeq p_1^*\omega_X \otimes p_2^*\omega_Y$.

(c) Пусть Y — неособая плоская кубическая кривая и X — поверхность $Y \times Y$. Показать, что $p_g(X) = 1$, а $p_a(X) = -1$ (упр. 7.2 гл. I). Этот пример показывает, что арифметический и геометрический роды неособого проективного многообразия могут различаться.

8.4. *Полные пересечения в* $\mathbf{P}^n$. Замкнутая подсхема Y в $\mathbf{P}_k^n$ называется (*строго, или глобально*) *полным пересечением*, если однородный идеал I подсхемы Y в $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ может быть порожден $r = \operatorname{codim}(Y, \mathbf{P}^n)$ элементами (упр. 2.17 гл. I).

(a) Пусть Y — замкнутая подсхема коразмерности r в $\mathbf{P}^n$. Показать, что она является полным пересечением тогда и только тогда, когда существуют гиперповерхности (т. е. локально главные подсхемы коразмерности 1) $H_1, \ldots, H_r$, такие, что $Y = H_1 \cap \ldots \cap H_r$ *как схема*, т. е. $\mathcal{J}_Y = \mathcal{J}_{H_1} + \ldots + \mathcal{J}_{H_r}$. [*Указание.* Воспользоваться тем, что в S верна теорема о несмешанности для идеалов, см. Мацумура [2, стр. 107].]

(b) Пусть Y — полное пересечение размерности $\geqslant 1$ в $\mathbf{P}^n$. Показать, что если Y нормально, то оно проективно нормально (упр. 5.14). [*Указание.* Применить предложение 8.23 к аффинному конусу над Y.]

(c) В тех же предположениях, что и в упражнении (b), вывести, что для всех $l \geqslant 0$ естественное отображение $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(l)) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(l))$ сюръективно. В частности, полагая $l = 0$, показать, что схема Y связна.

(d) Предположим, что заданы целые числа $d_1, \ldots, d_r \geqslant 1$ с $r < n$. Используя теорему Бертини 8.18, показать, что существуют неособые гиперповерхности $H_1, \ldots, H_r$ в $\mathbf{P}^n$ с $\deg H_i = d_i$, такие, что схема $Y = H_1 \cap \ldots \cap H_r$ неприводима и неособа и имеет коразмерность r в $\mathbf{P}^n$.

(e) Пусть Y — неособое полное пересечение, такое, как и в упражнении (d). Показать, что тогда $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y\left(\sum d_i - n - 1\right)$.

(f) Пусть Y — неособая гиперповерхность степени d в $\mathbf{P}^n$. Используя упражнения (c) и (e), показать, что $p_g(Y) = \binom{d-1}{n}$. Отсюда $p_g(Y) = p_a(Y)$ (см. упр. 7.2 гл. I). В частности, если Y — неособая плоская кривая степени d, то $p_g(Y) = {}^1/_2(d-1)(d-2)$.

(g) Пусть Y — неособая кривая в $\mathbf{P}^3$, являющаяся полным пересечением неособых поверхностей степеней d и e. Показать, что тогда $p_g(Y) = {}^1/_2 de(d + e - 4) + 1$. Здесь тоже геометрический род совпадает с арифметическим (упр. 7.2 гл. I).

8.5. *Раздутие неособого подмногообразия.* Так же как и в 8.24, пусть X — неособое многообразие, $Y \subset X$ — неособое подмногообразие коразмерности $r \geqslant 2$, $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ — раздутие X вдоль Y и $Y' = \pi^{-1}(Y)$.

(a) Показать, что отображение $\pi^*\colon \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} \widetilde{X}$ и отображение $\mathbf{Z} \to \operatorname{Pic} \widetilde{X}$, определенное формулой $n \mapsto$ (класс nY'), устанавливают изоморфизм $\operatorname{Pic} \widetilde{X} \simeq \operatorname{Pic} X \oplus \mathbf{Z}$.

(b) Показать, что $\omega_{\widetilde{X}} \simeq f^*\omega_X \otimes \mathscr{L}((r-1)Y')$. [*Указание.* В силу упражнения (a) имеем $\omega_{\widetilde{X}} \simeq f^*\mathscr{M} \otimes \mathscr{L}(qY')$ для некоторого обратимого пучка $\mathscr{M}$ на X и некоторого целого числа q. Посредством ограничения на $\widetilde{X} - Y' \simeq X - Y$ показать, что $\mathscr{M} \simeq \omega_X$. Для определения q поступить следующим образом. Показать сначала, что $\omega_{Y'} \simeq f^*\omega_X \otimes \mathcal{O}_{Y'}(-q-1)$, затем рассмотреть слой Z многообразия Y' над замкнутой точкой $y \in Y$ и показать, что $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(-q-1)$. Но так как $Z \simeq \mathbf{P}^{r-1}$, то $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(-r)$, так что $q = r - 1$.]

8.6. *Инфинитезимальное свойство подъема.* Следующий результат имеет очень важное значение для изучения деформаций неособых многообразий. Пусть k — алгебраически замкнутое поле и A — конечно порожденная k-алгебра, такая, что $\operatorname{Spec} A$ является неособым многообразием над k. Пусть $0 \to I \to B' \to B \to 0$ — точная последовательность, где B' — некоторая k-алгебра, а I — идеал в B', такой, что $I^2 = 0$. Предположим, наконец, что задан гомоморфизм k-алгебр $f\colon A \to B$. Тогда существует гомоморфизм k-алгебр $g\colon A \to B'$, превращающий следующую диаграмму в коммутативную:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] \\
 & I \arrow[d] \\
 & B' \arrow[d] \\
A \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[d] \\
 & 0
\end{tikzcd}$$

Этот результат мы будем называть *инфинитезимальным свойством подъема.* Докажем его в несколько шагов.

(a) Предположим сначала, что гомоморфизм $g\colon A \to B'$, поднимающий f, существует, и пусть $g'\colon A \to B'$ — другой такой гомоморфизм. Показать, что тогда гомоморфизм $\theta = g - g'$ является k-дифференцированием из A в I, которое можно рассматривать как элемент из $\operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, I)$. Отметим, что поскольку $I^2 = 0$, то I обладает естественной структурой B-модуля и, следовательно, структурой A-модуля. Обратно, для любого $\theta \in \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, I)$ гомоморфизм $g' = g + \theta$ обладает свойством поднятия для f. (В этом шаге предположение о неособости $\operatorname{Spec} A$ не используется.)

(b) Пусть теперь $P = k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов над k, факторкольцом которого является A, и J — ядро. Показать, что существует гомоморфизм $h\colon P \to B'$, превращающий следующую диаграмму в коммутативную:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
J \arrow[d] & I \arrow[d] \\
P \arrow[d] \arrow[r, "h"] & B' \arrow[d] \\
A \arrow[d] \arrow[r, "f"] & B \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

и показать, что h индуцирует A-линейное отображение $\bar{h}\colon J/J^2 \to I$.

(c) Используя предположение о неособости $\operatorname{Spec} A$ и теорему 8.17, построить точную последовательность

$$0 \to J/J^2 \to \Omega_{P/k} \otimes A \to \Omega_{A/k} \to 0.$$

Показать, кроме того, что функтор $\operatorname{Hom}_A(\cdot, I)$ переводит ее в точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, I) \to \operatorname{Hom}_P(\Omega_{P/k}, I) \to \operatorname{Hom}_A(J/J^2, I) \to 0.$$

Пусть $\theta \in \operatorname{Hom}_P(\Omega_{P/k}, I)$ — элемент, образ которого есть $\bar{h} \in \operatorname{Hom}_P(J/J^2, I)$. Показать, что тогда $h' = h - \theta$ является гомоморфизмом из P в B', таким, что $h'(J) = 0$. Таким образом, h' индуцирует требуемый гомоморфизм $g\colon A \to B'$.

8.7. В качестве приложения инфинитезимального свойства подъема рассмотрим следующую общую задачу. Пусть X — схема конечного типа над k и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Мы хотим классифицировать схемы X' над k, обладающие пучком идеалов $\mathscr{I}$ с $\mathscr{I}^2 = 0$, такие, что $(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathscr{I}) \simeq (X, \mathcal{O}_X)$ и что пучок $\mathscr{I}$ со структурой $\mathcal{O}_X$-модуля изоморфен заданному пучку $\mathscr{F}$. Пару X', $\mathscr{I}$ мы будем называть *инфинитезимальным расширением* схемы X с помощью пучка $\mathscr{F}$. Одно из таких расширений, а именно *тривиальное,* получается следующим образом. Рассмотрим пучок $\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X \oplus \mathscr{F}$ как пучок абелевых групп и определим в нем умножение формулой $(a \oplus f) \cdot (a' \oplus f') = aa' \oplus (af' + a'f)$. Тогда топологическое пространство X с пучком колец $\mathcal{O}_{X'}$ будет являться инфинитезимальным расширением X с помощью $\mathscr{F}$.

Общая проблема классификации расширений X с помощью $\mathscr{F}$ достаточно сложна. Поэтому ограничимся рассмотрением следующего частного случая. Пусть схема X аффинна и неособа, показать, что тогда любое расширение X с помощью когерентного пучка $\mathscr{F}$ изоморфно тривиальному. Другие случаи см. в 4.10 гл. III.

8.8. Пусть X — проективное неособое многообразие над k. Для любого $n > 0$ определим *n-кратный род* P_n многообразия X формулой $P_n = \dim_k \Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})$, так что, в частности, $P_1 = p_g$. Аналогично для любого q, $0 \leqslant q \leqslant \dim X$, определим целое число $h^{q,0} = \dim_k \Gamma(X, \Omega^q_{X/k})$, где $\Omega^q_{X/k} = \bigwedge^q \Omega_{X/k}$ — пучок регулярных q-форм на X. В частности, при $q = \dim X$

мы снова получаем геометрический род. Целые числа $h^{q,0}$ называются *числами Ходжа*.

Пользуясь методами теоремы 8.19, показать, что P_n и $h^{q,0}$ являются бирациональными инвариантами X, т. е. если X и X' — бирационально эквивалентные неособые многообразия, то $P_n(X) = P_n(X')$ и $h^{q,0}(X) = h^{q,0}(X')$.

§ 9. Формальные схемы

Теорию схем от более старой теории многообразий отличает одна существенная черта, а именно возможность для схемы иметь нильпотентные элементы в своем структурном пучке. В частности, если Y — замкнутое подмногообразие многообразия X, определенное пучком идеалов $\mathcal{J}$, то для любого $n \geqslant 1$ можно рассмотреть замкнутую подсхему Y_n, определенную n-й степенью $\mathcal{J}^n$ пучка идеалов $\mathcal{J}$. ри $n \geqslant 2$ эта схема содержит нильпотентные элементы в структурном пучке. Она несет информацию об Y и об инфинитезимальных свойствах вложения Y в X.

Формальное пополнение Y в X, которое будет точно определено ниже, — это объект, несущий информацию сразу о всех инфинитезимальных окрестностях Y_n подсхемы Y в X, так что оно «толще» любого Y_n, но в то же время содержится во всякой настоящей открытой окрестности Y в X. Поэтому его можно назвать формальной окрестностью Y в X.

Идея рассмотрения формальных пополнений уже неявно содержалась в статье Зарисского [3], где было использовано понятие «голоморфных функций вдоль подмногообразия» для доказательства его принципа связности. Позже в § 11 гл. III, используя теорию когомологий, мы приведем другие доказательства некоторых из результатов Зарисского. Одним из первых приложений формальных схем как промежуточных объектов между подмногообразием и содержащим его многообразием является доказательство Гротендика теоремы Лефшеца о группах Pic и π_1 [SGA2]. Изложение этих результатов содержится также в книге Хартсхорна [5, гл. IV].

Произвольную формальную схему мы определим как объект, который локально устроен как пополнение обычной схемы вдоль замкнутой подсхемы.

Обратные пределы абелевых групп

Прежде всего напомним определение обратного предела. *Обратной системой* [1]) *абелевых групп называется* набор абелевых групп

[1]) Обратные системы иногда называют также проективными системами, а обратные пределы — проективными пределами.— *Прим. перев.*

A_n для каждого $n \geqslant 1$ вместе с гомоморфизмами $\varphi_{n'n}\colon A_{n'} \to A_n$ для каждых $n' \geqslant n$, такими, что если $n'' \geqslant n' \geqslant n$, то $\varphi_{n''n} = \varphi_{n'n} \circ \varphi_{n''n'}$. Обратную систему будем обозначать через $(A_n, \varphi_{n'n})$, или просто через (A_n). Для обратной системы абелевых групп (A_n) определим *обратный предел* $A = \varprojlim A_n$ как множество последовательностей $\{a_n\} \in \prod A_n$, таких, что $\varphi_{n'n}(a_{n'}) = a_n$ для всех $n' \geqslant n$. Очевидно, что A является абелевой группой. Обратный предел характеризуется следующим свойством универсальности: для заданной группы B и гомоморфизмов $\psi_n\colon B \to A_n$ для каждого n, таких, что $\psi_n = \varphi_{n'n} \circ \psi_{n'}$ для любого $n' \geqslant n$, существует единственный гомоморфизм $\psi\colon B \to A$, такой, что $\psi_n = p_n \circ \psi$ для каждого n, где $p_n\colon A \to A_n$ — ограничение на A n-й проекции $\prod A_n \to A_n$.

Если группы A_n обладают дополнительной структурой векторных пространств над полем k или модулей над кольцом R, то этой же структурой обладает и обратный предел A, т. е. обратный предел существует в категории соответствующих объектов.

Изучим теперь свойства точности обратного предела (как функтора) (см. Атья — Макдональд [1, гл. 10]). *Гомоморфизмом* обратных систем абелевых групп $(A_n) \to (B_n)$ называется набор гомоморфизмов $f_n\colon A_n \to B_n$ для каждого n, согласованных с отображениями, входящими в определение обратных систем, т. е. для каждого $n' \geqslant n$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A_{n'} & \xrightarrow{f_{n'}} & B_{n'} \\ {\scriptstyle \varphi_{n'n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{n'n}} \\ A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n \end{array}$$

Последовательность гомоморфизмов обратных систем

$$0 \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n) \to 0$$

называется *точной*, если соответствующие последовательности абелевых групп точны для каждого n. Легко видеть, что для заданной короткой точной последовательности обратных систем следующая последовательность их обратных пределов

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n$$

также точна. Однако последнее отображение в ней может не быть сюръективным, так что функтор обратного предела $\varprojlim$ является точным слева.

Для того чтобы получить критерий точности $\varprojlim$ справа, введем следующее определение: будем говорить, что обратная система $(A_n, \varphi_{n'n})$ удовлетворяет *условию Миттаг-Леффлера* (ML), если для каждого n убывающее семейство подгрупп $\{\varphi_{n'n}(A_{n'}) \subset A_n \mid n' \geqslant n\}$ стабилизируется. Иначе говоря, для каждого n существует $n_0 \geqslant n$, такое, что $\varphi_{n'n}(A_{n'}) = \varphi_{n''n}(A_{n''})$ как подгруппа в A_n для всех $n', n'' \geqslant n_0$.

Предположим, что обратная система (A_n) удовлетворяет условию (ML). Тогда для каждого n пусть $A'_n \subset A_n$ означает *стабильный образ* $\varphi_{n'n}(A_{n'})$ для любого n', большего или равного n_0 из условия (ML). Легко видеть, что (A'_n) также является обратной системой с индуцированными отображениями, которые, очевидно, в этой системе все будут сюръективными. Более того, ясно, что $\varprojlim A'_n = \varprojlim A_n$. Отсюда вытекает, что $A = \varprojlim A_n$ отображается сюръективно на каждую группу A'_n.

Предложение 9.1. *Пусть*

$$0 \to (A_n) \xrightarrow{f} (B_n) \xrightarrow{g} (C_n) \to 0$$

— короткая точная последовательность обратных систем абелевых групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) *если* (B_n) *удовлетворяет условию* (ML), *то этому условию удовлетворяет и* (C_n);

(b) *если* (A_n) *удовлетворяет условию* (ML), *то соответствующая последовательность обратных пределов*

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$$

точна.

Доказательство. (См. также Гротендик [EGA 0_{III}, 13.2].)

(a) Для каждого $n' \geqslant n$ образ $B_{n'}$ в B_n отображается сюръективно на образ $C_{n'}$ в C_n, так что условие (ML) для (B_n) непосредственно влечет за собой условие (ML) для (C_n).

(b) Достаточно показать только, что последнее отображение сюръективно. Пусть $\{c_n\} \in \varprojlim C_n$ и $E_n = g^{-1}(c_n)$ для каждого n. Тогда E_n является подмножеством в B_n и (E_n) представляет собой некоторую обратную систему множеств. Более того, между E_n и A_n для каждого n имеется неканоническое биективное соответствие, поскольку последовательность $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ точна. Так как (A_n) удовлетворяет условию (ML), то легко видеть, что (E_n) тоже удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера как обратная система множеств (определение такое же). Поскольку E_n непусто, то $\varprojlim E_n$ также непусто, что следует из рассмотрения обратной системы стабильных образов, как и выше. Любой элемент из $\varprojlim E_n$ является также элементом из $\varprojlim B_n$ и отображается в элемент $\{c_n\} \in \varprojlim C_n$.

Пример 9.1.1. Если все отображения $\varphi_{n'n}\colon A_{n'} \to A_n$ сюръективны, то (A_n) удовлетворяет условию (ML) и, следовательно, в этом случае имеет место утверждение 9.1 (b).

Пример 9.1.2. Пусть (A_n) — обратная система конечномерных векторных пространств или, более общим образом, обратная система модулей с условием обрыва убывающих цепочек над кольцом. Тогда (A_n) удовлетворяет условию (ML).

Обратные пределы пучков

В любой категории $\mathfrak{C}$ можно дать определение обратного предела, используя свойство универсальности, как в случае абелевых групп. Пусть $(A_n, \varphi_{n'n})$ — обратная система объектов из $\mathfrak{C}$ (определение такое же, как и выше для абелевых групп), тогда *обратным пределом* системы $(A_n, \varphi_{n'n})$ называется объект $A = \varprojlim A_n$ из $\mathfrak{C}$ вместе с морфизмами $p_n\colon A \to A_n$ для каждого n, такими, что $p_n = \varphi_{n'n} \circ p_{n'}$ для каждого $n' \geqslant n$, для которого выполняется следующее свойство универсальности: для любого объекта B из $\mathfrak{C}$ вместе с морфизмами $\psi_n\colon B \to A_n$ для каждого n, такими, что $\psi_n = \varphi_{n'n} \circ \psi_{n'}$ для каждого $n' \geqslant n$, существует единственный морфизм $\psi\colon B \to A$, такой, что $\psi_n = p_n \circ \psi$ для каждого n. Очевидно, что если обратный предел существует, то он единствен. Однако вопрос о существовании обратного предела решается в зависимости от свойств рассматриваемой категории.

Предложение 9.2. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{C}$ — категория пучков абелевых групп на X. Тогда в $\mathfrak{C}$ существуют обратные пределы. Более того, если $(\mathscr{F}_n)$ — обратная система пучков на X и $\mathscr{F} = \varprojlim \mathscr{F}_n$ — ее обратный предел, то для любого открытого множества U имеем $\Gamma(U, \mathscr{F}) = \varprojlim \Gamma(U, \mathscr{F}_n)$ в категории абелевых групп.*

Доказательство. Для заданной обратной системы пучков $(\mathscr{F}_n)$ на X рассмотрим предпучок $U \to \varprojlim \Gamma(U, \mathscr{F}_n)$, где обратный предел берется в категории абелевых групп. Используя пучковые свойства для каждого $\mathscr{F}_n$, немедленно получаем, что этот предпучок является пучком. Обозначим его через $\mathscr{F}$. Пусть теперь задан другой пучок $\mathscr{G}$ и система согласованных отображений ψ_n: $\mathcal{G} \to \mathcal{F}_n$ для каждого n. Тогда из свойства универсальности обратного предела абелевых групп для каждого U мы получаем единственное отображение $\Gamma(U, \mathcal{G}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$. Это дает отображение пучков $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$. Таким образом, $\mathcal{F}$ является обратным пределом обратной системы $(\mathcal{F}_n)$ в $\mathfrak{C}$.

Предостережение 9.2.1. Хотя обратные пределы в категории $\mathfrak{C}$ пучков абелевых групп на топологическом пространстве существуют, распространять на них интуитивные соображения, выработанные при изучении обратных пределов абелевых групп, следует с осторожностью. Например, утверждение 9.1(b) *перестает быть верным* в категории $\mathfrak{C}$, даже если все отображения в обратной системе (A_n) сюръективны. Поэтому в исследовании вопросов точности соответствующих функторов мы всегда будем переходить к сечениям над открытыми множествами и сводить все к вопросам об абелевых группах. Более подробно о свойствах точности $\varprojlim$ в $\mathfrak{C}$ см. Хартсхорн [7, I, § 4].

Пополнение кольца

Одним из важных приложений техники обратных пределов является использование ее для определения понятия пополнения кольца относительно идеала. Это понятие обобщает понятие пополнения локального кольца, обсуждавшееся в § 5 гл. I. Оно служит также алгебраической моделью для понятия пополнения схемы вдоль замкнутой подсхемы, которое будет определено ниже.

Пусть A — коммутативное кольцо с единицей (как всегда) и I — некоторый идеал в A. Обозначим через I^n n-ю степень идеала I. Тогда мы имеем последовательность естественных гомоморфизмов

$$\ldots \to A/I^3 \to A/I^2 \to A/I,$$

превращающую набор (A/I^n) в обратную систему колец. Обратный предел этой системы $\varprojlim A/I^n$ будем обозначать через $\hat{A}$ и называть *пополнением A относительно идеала I*, или *I-адическим пополнением A*. Для каждого n имеет место естественное отображение $A \to A/I^n$, так что по свойству универсальности мы получаем гомоморфизм $A \to \hat{A}$.

Аналогично пусть M — произвольный A-модуль. Определим *пополнение $\hat{M}$ модуля M относительно идеала I* формулой $\hat{M} = \varprojlim M/I^nM$ и будем называть его *I-адическим пополнением M*. Оно обладает естественной структурой $\hat{A}$-модуля.

Теорема 9.3А. *Пусть A — нётерово кольцо и I — идеал в A. Символом $\hat{}$ будем обозначать I-адическое пополнение, как и выше. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *$\hat{I} = \varprojlim I/I^n$ является идеалом в $\hat{A}$; для каждого n имеем $\hat{I}^n = I^n\hat{A}$ и $\hat{A}/\hat{I}^n \simeq A/I^n$;*

(b) *если M — конечно порожденный A-модуль, то $\hat{M} \simeq M \otimes_A \hat{A}$;*

(c) *функтор $M \mapsto \hat{M}$ является точным на категории конечно порожденных A-модулей;*

(d) *кольцо $\hat{A}$ нётерово;*

(e) *пусть (M_n) — обратная система, где каждое из M_n является конечно порожденным A/I^n-модулем, каждый гомоморфизм $\varphi_{n'n}$: $M_{n'} \to M_n$ сюръективен и $\ker \varphi_{n'n} = I^nM_{n'}$. Тогда $M = \varprojlim M_n$ будет конечно порожденным A-модулем и $M_n \simeq M/I^nM$ для каждого n.*

Доказательство. (a) См. Атья — Макдональд [1, стр. 135].

(b) См. там же, стр. 134.

(c) См. там же, стр. 134.

(d) См. там же, стр. 140.

(e) См. Бурбаки [1, гл. III, § 2, n° 11, предложение и следствие 14].

Формальные схемы

Начнем с определения понятия пополнения схемы вдоль замкнутой подсхемы. По техническим соображениям ограничимся рассмотрением только нётеровых схем.

Определение. Пусть X — нётерова схема и Y — замкнутая подсхема, определенная пучком идеалов $\mathcal{J}$. Определим *формальное пополнение схемы X вдоль Y* как окольцованное пространство $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$, где $\hat{X}$ как топологическое пространство совпадает с Y, а $\mathcal{O}_{\hat{X}} = \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n$. Здесь каждое из $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n$ рассматривается как пучок колец на Y и набор $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n)$ естественным образом снабжается структурой обратной системы пучков колец.

Замечание 9.3.1. Структурный пучок $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ пространства $\hat{X}$ зависит только от замкнутого подмножества Y в X, а не от структуры схемы на Y. Если, например, $\mathcal{J}'$ — другой пучок идеалов, определяющий структуру замкнутой подсхемы на Y, то, поскольку схема X нётерова, существуют целые m, n, такие, что $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}'^m$

и $\mathscr{Y} \supset \mathscr{I}^n$. Поэтому обратные системы $(\mathcal{O}_X/\mathscr{I}^n)$ и $(\mathcal{O}_X/\mathscr{Y}^m)$ конфинальны и, следовательно, имеют один и тот же предел.

Легко видеть, что слои пучка $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ являются локальными кольцами, так что $(X, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ будет на самом деле локально окольцованным пространством. Пусть $U = \operatorname{Spec} A$ — открытое аффинное подмножество в X и $I \subset A$ — идеал $\Gamma(U, \mathscr{I})$. Тогда из предложения 9.2 следует, что $\Gamma(\hat{X} \cap U, \mathcal{O}_{\hat{X}}) = \hat{A}$ есть I-адическое пополнение A. Таким образом, процесс пополнения X вдоль Y аналогичен I-адическому пополнению кольца, как это было определено выше. Однако следует отметить, что локальные кольца $\hat{X}$ *не являются*, вообще говоря, полными локальными кольцами и их размерность ($= \dim X$) не равна размерности базисного топологического пространства Y.

Определение. Пусть X, Y, $\mathscr{I}$ такие же, как и в предыдущем определении, и пусть $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Определим *пополнение* $\hat{\mathscr{F}}$ *пучка* $\mathscr{F}$ *вдоль* Y как пучок $\varprojlim \mathscr{F}/\mathscr{I}^n\mathscr{F}$ на Y. Он обладает естественной структурой $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-модуля.

Определение. *Нётеровой формальной схемой* называется локально окольцованное пространство $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, обладающее конечным открытым покрытием $\{\mathfrak{U}_i\}$, таким, что для каждого i пара $(\mathfrak{U}_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{\mathfrak{U}_i})$ изоморфна как локально окольцованное пространство пополнению некоторой нётеровой схемы X_i вдоль замкнутой подсхемы Y_i. *Морфизмами* нётеровых формальных схем являются морфизмы их как локально окольцованных пространств. Пучок $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей $\mathfrak{F}$ называется *когерентным*, если существует конечное открытое покрытие $\mathfrak{U}_i$ пространства $\mathfrak{X}$, для которого $\mathfrak{U}_i \simeq \hat{X}_i$ и для каждого i существует когерентный пучок $\mathscr{F}_i$ на X_i, такой, что $\mathfrak{F}|_{\mathfrak{U}_i} \simeq \hat{\mathscr{F}}_i$, рассматриваемые как $\mathcal{O}_{\hat{X}_i}$-модули с помощью изоморфизма $\mathfrak{U}_i \simeq \hat{X}_i$.

Примеры 9.3.2. Пусть X — произвольная нётерова схема и Y — ее замкнутая подсхема. Тогда пополнение $\hat{X}$ схемы X вдоль Y является формальной схемой. Формальная схема, которая может быть получена пополнением *единственной* нётеровой схемы вдоль замкнутой подсхемы, называется *алгебраизуемой*. Существуют неалгебраизуемые формальные схемы, хотя примеры таких формальных схем привести не так-то просто — см. Хиронака и Мацумура [1, § 5], а также Хартсхорн [5, V,3.3, стр. 205].

Пример 9.3.3. Если X — нётерова схема и $Y = X$, то пополнение $\hat{X}$ вдоль Y совпадает с X. Таким образом, категория нётеровых формальных схем содержит также и все нётеровы схемы.

Пример 9.3.4. Пусть X — нётерова схема и Y — замкнутая точка $P \in X$. Тогда $\hat{X}$ является одноточечным пространством $\{P\}$ с пополнением $\hat{\mathcal{O}}_P$ локального кольца точки P в качестве структурного пучка. $\hat{\mathcal{O}}_P$-модуль M, рассматриваемый как пучок на $\hat{X}$, когерентен тогда и только тогда, когда модуль M конечно порожден. В самом деле, из когерентности, очевидно, следует конечная порожденность. Обратное верно потому, что $\hat{X}$ можно получить пополнением схемы $\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_P$ в ее замкнутой точке и тогда любому конечно порожденному $\hat{\mathcal{O}}_X$-модулю M соответствует когерентный пучок на $\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_P$.

Изучим теперь строение когерентных пучков на формальной схеме. Как и в случае изучения когерентных пучков на обычной схеме, начнем с рассмотрения аффинного случая.

Определение. *Аффинной (нётеровой) формальной схемой* называется формальная схема, полученная пополнением единственной аффинной нётеровой схемы вдоль некоторой ее замкнутой подсхемы. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = V(I)$ и $\mathfrak{X} = \hat{X}$. Тогда для любого конечно порожденного A-модуля M определим пучок M^Δ на $\mathfrak{X}$ как пополнение когерентного пучка $\tilde{M}$ на X. Таким образом, M^Δ — когерентный пучок на $\mathfrak{X}$ по определению.

Предложение 9.4. *Пусть A — нётерово кольцо, I — идеал в A, $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = V(I)$ и $\mathfrak{X} = \hat{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *$\mathfrak{I} = I^\Delta$ является пучком идеалов в $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, и для всякого n имеет место изоморфизм пучков на Y: $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}^n \simeq (A/I^n)^\sim$;*

(b) *пусть M — конечно порожденный A-модуль, тогда $M^\Delta \simeq \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$;*

(c) *функтор $M \mapsto M^\Delta$ является точным функтором из категории конечно порожденных A-модулей в категорию когерентных $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей.*

Доказательство. В каждом из утверждений речь идет о пучках на J. Так как открытые аффинные подмножества в X образуют базис топологии на X, то их пересечения с Y образуют базис топологии на Y, поэтому все утверждения достаточно проверить для сечений соответствующих пучков над любым из таких открытых множеств. Итак, пусть $U = \operatorname{Spec} B$ — открытое аффинное подмножество в X, $J = \Gamma(U, \tilde{I})$ и $N = \Gamma(U, \tilde{M})$ для любого конечно порожденного A-модуля M. Тогда B — нётерово кольцо (см. 3.2), N — конечно порожденный B-модуль (см. 5.4) и функтор $M \mapsto N$ является точным функтором из категории A-модулей в категорию B-модулей (см. 5.5).

Докажем сначала утверждение (c). Пусть M — конечно порожденный A-модуль, тогда $M^\Delta = \varprojlim \widetilde{M}/\widetilde{I}^n\widetilde{M}$ по определению, так что, согласно 9.2, $\Gamma = (U, M^\Delta) = \varprojlim \Gamma(U, \widetilde{M}/\widetilde{I}^n\widetilde{M})$. Но это равно $\varprojlim N/J^nN = \hat{N}$, где $\hat{N}$ обозначает J-адическое пополнение B-модуля N. Так как функтор $M \mapsto N$ точен, как было сказано выше, и функтор $N \mapsto \hat{N}$ точен по 9.3A, то функтор $M \mapsto \Gamma(U, M^\Delta)$ тоже является точным для каждого U, стало быть, и $M \mapsto M^\Delta$ — точный функтор.

(a) Для всякого U, такого же, как и раньше, имеем $\Gamma(U, I^\Delta) = \varprojlim \Gamma(U, \widetilde{I}/\widetilde{I^n}) = \hat{I}$. Аналогично $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = \hat{B}$. Но по 9.3A $\hat{I}$ является идеалом в $\hat{B}$, так что отсюда следует, что $\mathfrak{J} = I^\Delta$ — пучок идеалов в $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

Рассмотрим теперь точную последовательность A-модулей

$$0 \to I^n \to A \to A/I^n \to 0.$$

Согласно уже доказанному утверждению (c), эта последовательность порождает точную последовательность $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей

$$0 \to \mathfrak{J}^n \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to (A/I^n)^\Delta \to 0.$$

Очевидно, что обратная система, которая определяет пучок $(A/I^n)^\Delta$ как пополнение $(A/I^n)^\sim$, является на самом деле стационарной, поскольку этот пучок аннулируется пучком идеалов $\widetilde{I}^n$. Следовательно, $(A/I^n)^\Delta = (A/I^n)^\sim$ и потому $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}^n = (A/I^n)^\sim$, что и утверждалось.

(b) В этом утверждении слегка искажены обозначения: поскольку $\widetilde{M}$ и $\mathcal{O}_X$ — пучки на X, то на самом деле следовало бы писать $M^\Delta \simeq \widetilde{M}|_Y \otimes_{\mathcal{O}_X|_Y} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Но мы будем рассматривать M^Δ и $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ как пучки на X, продолженные нулем вне Y (см. упр. 1.19). Для любого конечно порожденного A-модуля M и открытого аффинного множества U, как и выше, имеем $\Gamma(U, M^\Delta) = \hat{N}$. С другой стороны, $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ — это пучок, ассоциированный с предпучком

$$U \mapsto \Gamma(U, \widetilde{M}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = N \otimes_B \hat{B}.$$

Но так как $\hat{N} \simeq N \otimes_B \hat{B}$ по 9.3A, то отсюда следует, что соответствующие пучки изоморфны, т. е. $M^\Delta \simeq \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, что и требовалось доказать.

Определение. Пусть $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ — нётерова формальная схема. Пучок идеалов $\mathfrak{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ называется *идеалом определения* для $\mathfrak{X}$, если $\operatorname{Supp} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J} = \mathfrak{X}$ и локально окольцованное пространство $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J})$ является нётеровой схемой.

Предложение 9.5. *Пусть $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ — нётерова формальная схема. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *Если $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ — два идеала определения для $\mathfrak{X}$, то существуют целые m, $n > 0$, такие, что $\mathfrak{J}_1 \supset \mathfrak{J}_2^m$ и $\mathfrak{J}_2 \supset \mathfrak{J}_1^n$.*

(b) *Существует единственный наибольший идеал определения $\mathfrak{J}$ для $\mathfrak{X}$, характеризующийся свойством, что $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J})$ — приведенная схема. В частности, идеалы определения всегда существуют.*

(c) *Если $\mathfrak{J}$ — идеал определения для $\mathfrak{X}$, то идеалом определения будет и $\mathfrak{J}^n$ для любого $n > 0$.*

Доказательство. (a) Пусть $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ — идеалы определения для $\mathfrak{X}$. Тогда на топологическом пространстве $\mathfrak{X}$ мы имеем сюръективные отображения пучков $f_1\colon \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}_1$ и $f_2\colon \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}_2$. Для любой точки $P \in \mathfrak{X}$ слой $(\mathfrak{J}_2)_P$ пучка $\mathfrak{J}_2$ в P содержится в максимальном идеале $\mathfrak{m}_P$ локального кольца $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P}$. В самом деле, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P}/(\mathfrak{J}_2)_P$ является локальным кольцом точки P на схеме $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}_2)$. В частности, оно отлично от нуля, так что $(\mathfrak{J}_2)_P \subset \mathfrak{m}_P$. Теперь рассмотрим пучок идеалов $f_1(\mathfrak{J}_2)$ на схеме $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}_1)$. Его слой в P для каждой точки P содержится в максимальном идеале соответствующего локального кольца. Поэтому каждое локальное сечение пучка $f_1(\mathfrak{J}_2)$ нильпотентно (упр. 2.18) и, так как схема $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}_1)$ нётерова, то сам пучок $f_1(\mathfrak{J}_2)$ нильпотентен. Отсюда следует, что $\mathfrak{J}_1 \supset \mathfrak{J}_2^m$ для некоторого $m > 0$. По симметрии получаем, что $\mathfrak{J}_2 \subset \mathfrak{J}_1^n$ для некоторого $n > 0$.

(b) Предположим, что схема $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}_1)$ приведена. Тогда из доказательства утверждения (a) мы получаем, что $f_1(\mathfrak{J}_2) = 0$ и, стало быть, $\mathfrak{J}_1 \supset \mathfrak{J}_2$. Таким образом, пучок $\mathfrak{J}_1$ является наибольшим, если он существует. Поскольку он определен однозначно, то вопрос о его существовании является локальным. Поэтому можно считать, что $\mathfrak{X}$ является пополнением аффинной нётеровой схемы X вдоль некоторой ее замкнутой подсхемы Y. Согласно (8.3.1), можно считать также, что Y имеет приведенную индуцированную структуру. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = V(I)$. Тогда по 9.4 $\mathfrak{J} = I^\Delta$ — пучок идеалов в $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ и $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J} \simeq (A/I)^\sim = \mathcal{O}_Y$. Таким образом, пучок $\mathfrak{J}$ является идеалом определения для $\mathfrak{X}$, для которого схема

$(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I})$ приведена. Тем самым существование наибольшего идеала определения доказано.

(c) Пусть $\mathfrak{I}$ — произвольный идеал определения для $\mathfrak{X}$, и предположим, что задано целое число $n > 0$. Обозначим через $\mathfrak{I}_0$ единственный наибольший идеал определения. Тогда в силу утверждения (a) существует целое число r, такое, что $\mathfrak{I} \supset \mathfrak{I}_0^r$ и, следовательно, $\mathfrak{I}^n \supset \mathfrak{I}_0^{nr}$. Заметим прежде всего, что $\mathfrak{I}_0^{nr}$ является идеалом определения для $\mathfrak{X}$. Действительно, в этом можно убедиться с помощью локальной проверки. Если на некоторой аффинной схеме $\mathfrak{I}_0 = I^\Delta$ в обозначениях п. (b), то по 9.4 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}_0^{nr} \simeq$ $\simeq (A/I^{nr})^\sim$, так что носителем схемы $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}_0^{nr})$ является Y. Обозначим эту схему через Y', и пусть $f\colon \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{O}_{Y'}$ — соответствующее отображение пучков. Тогда по предположению схема $(Y', \mathcal{O}_{Y'}/f(\mathfrak{I})) = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I})$ нётерова, стало быть, $f(\mathfrak{I})$ — когерентный пучок. Поэтому пучок $f(\mathfrak{I}^n) = f(\mathfrak{I})^n$ также когерентен и схема $(Y', \mathcal{O}_{Y'}/f(\mathfrak{I}^n)) = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}^n)$ также нётерова, что и требовалось доказать.

Предложение 9.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ — нётерова формальная схема и $\mathfrak{I}$ — идеал определения для $\mathfrak{X}$. Для каждого $n > 0$ пусть Y_n обозначает схему $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}^n)$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *Пусть $\mathfrak{F}$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей. Тогда для каждого n пучок $\mathcal{F}_n = \mathfrak{F}/\mathfrak{I}^n\mathfrak{F}$ является когерентным пучком $\mathcal{O}_{Y_n}$-модулей и $\mathfrak{F} \simeq \varprojlim \mathcal{F}_n$.*

(b) *Обратно, предположим, что для каждого n задан когерентный $\mathcal{O}_{Y_n}$-модуль $\mathcal{F}_n$ вместе с сюръективными отображениями $\varphi_{n'n}\colon \mathcal{F}_{n'} \to \mathcal{F}_n$ для каждого $n' \geqslant n$, превращающими $\{\mathcal{F}_n\}$ в обратную систему пучков. Пусть, кроме того, $\ker \varphi_{n'n} = \mathfrak{I}^n\mathcal{F}_{n'}$ для каждого $n' \geqslant n$. Тогда $\mathfrak{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$ является когерентным $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулем и $\mathcal{F}_n \simeq \mathfrak{F}/\mathfrak{I}^n\mathfrak{F}$ для каждого n.*

Доказательство. (a) Вопрос локален по $\mathfrak{X}$, поэтому можно считать $\mathfrak{X}$ аффинной схемой, изоморфной пополнению $X = \operatorname{Spec} A$ вдоль $Y = V(I)$, и $\mathfrak{F} = M^\Delta$ для некоторого конечно порожденного A-модуля M. Тогда, как и в доказательстве 9.4(a), $\mathfrak{F}/\mathfrak{I}^n \simeq (M/I^nM)^\sim$ для каждого n. Следовательно, пучок $\mathcal{F}_n$ когерентен на $Y_n = \operatorname{Spec}(A/I^n)$ и $\mathfrak{F} \simeq \varprojlim \mathcal{F}_n$.

(b) Этот вопрос тоже локален, поэтому можно считать $\mathfrak{X}$ аффинным, как и выше. Более того, можно предполагать, что кольцо A является I-адически полным, поскольку замена A на $\hat{A}$ не изменяет $\hat{X}$. Пусть $M_n = \Gamma(Y_n, \mathcal{F}_n)$ для каждого n. Тогда (M_n) является обратной системой модулей, удовлетворяющей условиям 9.4A(e). Следовательно, $M = \varprojlim M_n$ — конечно порожденный A-модуль (поскольку кольцо A полно) и $M_n \simeq M/I^nM$ для каждого n. Но тогда $\mathfrak{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$ — это в точности M^Δ и, стало быть, является когерентным $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулем. Более того, $\mathfrak{F}/\mathfrak{I}^n\mathfrak{F} \simeq (M/I^nM)^\sim$, как в утверждении (a), так что $\mathfrak{F}/\mathfrak{I}^n\mathfrak{F} \simeq \mathcal{F}_n$.

Теорема 9.7. *Пусть A — нётерово кольцо, I — идеал в A, и предположим, что A является I-адически полным. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = V(I)$ и $\mathfrak{X} = \hat{X}$. Тогда функторы $M \mapsto M^\Delta$ и $\mathfrak{F} \mapsto \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ точны и обратны друг другу на категориях конечно порожденных A-модулей и когерентных $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей соответственно. Они устанавливают эквивалентность этих категорий. В частности, всякий когерентный $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модуль $\mathfrak{F}$ имеет вид M^Δ для некоторого M.*

Доказательство. Точность функтора $M \mapsto M^\Delta$ была установлена в 9.4. Пусть теперь M — произвольный A-модуль конечного типа. Тогда $\Gamma(\mathfrak{X}, M^\Delta) = \varprojlim M/I^nM = \hat{M}$ и $\hat{M} = M$, поскольку кольцо A полное (см. 9.3A(b)). Таким образом, одна из композиций двух рассматриваемых функторов является тождественным функтором.

Обратно, пусть $\mathfrak{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модуль и $\mathfrak{I} = I^\Delta$. Тогда, согласно утверждению 9.6 (a), $\mathfrak{F} \simeq \varprojlim \mathcal{F}_n$, где $\mathcal{F}_n = \mathfrak{F}/\mathfrak{I}^n\mathfrak{F}$ для каждого $n > 0$. Обратная система пучков $(\mathcal{F}_n)$ удовлетворяет предположениям 9.6(b), и из доказательства 9.6(b) следует, что в действительности $\mathfrak{F} \simeq M^\Delta$ для некоторого конечно порожденного A-модуля M. Более того, в силу 9.2 $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}) = \varprojlim \Gamma(Y, (M/I^nM)^\sim) =$ $= \varprojlim M/I^nM = \hat{M}$ и $\hat{M} = M$, поскольку кольцо A полное. Это показывает, что $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ — конечно порожденный A-модуль и $\mathfrak{F} \simeq \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})^\Delta$. Тем самым установлено, что и вторая композиция рассматриваемых функторов тождественна.

Осталось показать, что функтор $\Gamma(\mathfrak{X}, \cdot)$ точен на категории когерентных $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей. Итак, пусть

$$0 \to \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2 \to \mathfrak{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность когерентных $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей и пусть $M_i = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}_i)$ для $i = 1, 2, 3$. Тогда M_i являются конечно порожденными A-модулями и имеет место по крайней мере полуточная последовательность

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3.$$

17-01390

Пусть R — коядро правого гомоморфизма. Применяя к этой последовательности функтор $^{\Delta}$, получаем на $\mathfrak{X}$ точную последовательность

$$0 \to M_1^{\Delta} \to M_2^{\Delta} \to M_3^{\Delta} \to R^{\Delta} \to 0.$$

Но для каждого i $M_i^{\Delta} \simeq \mathfrak{F}_i$, как было показано выше, следовательно, $R^{\Delta} = 0$. Опять по предыдущему $R = \Gamma(\mathfrak{X}, R^{\Delta})$, так что $R = 0$. Следовательно, функтор $\Gamma(\mathfrak{X}, \cdot)$ точен, и теорема полностью доказана.

Следствие 9.8. *Пусть X — нётерова схема, Y — ее замкнутая подсхема и $\mathfrak{X} = \hat{X}$ — пополнение X вдоль Y. Тогда функтор $\mathscr{F} \mapsto \hat{\mathscr{F}}$ является точным функтором из категории когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей в категорию когерентных $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей. Более того, если $\mathscr{J}$ — пучок идеалов подсхемы Y и $\hat{\mathscr{J}}$ — его пополнение, то $\hat{\mathscr{F}}/\hat{\mathscr{J}}^n\hat{\mathscr{F}} \simeq \mathscr{F}/\mathscr{J}^n\mathscr{F}$ для каждого n и $\hat{\mathscr{F}} \simeq \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. Утверждения локальны и непосредственно сводятся к предложению 9.4.

Следствие 9.9. *Ядра, коядра и образы морфизмов когерентных пучков на нётеровой формальной схеме также являются когерентными пучками.*

Доказательство. Эти утверждения тоже локальны и непосредственно вытекают из теоремы 9.7.

Замечание 9.9.1. Верно также, что расширения когерентных пучков на нётеровой формальной схеме являются когерентными пучками (упр. 9.4). С другой стороны, некоторые свойства когерентных пучков на обычных схемах не переносятся на формальные схемы. Например, пусть $\mathfrak{X}$ — пополнение проективного многообразия $X \subset \mathbf{P}_k^n$ вдоль замкнутого подмногообразия Y и $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(1) = \mathcal{O}_X(1)\hat{}$, тогда может существовать ненулевой когерентный пучок $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{X}$, такой, что $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}(\nu)) = 0$ для всех $\nu \in \mathbf{Z}$. В частности, ни один из подкрученных пучков $\mathfrak{F}(\nu)$ не порождается своими глобальными сечениями (упр. 11.7 гл. III).

Упражнения

9.1. Пусть X — нётерова схема, Y — ее замкнутая подсхема и $\hat{X}$ — пополнение X вдоль Y. Назовем кольцо $\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ кольцом *формальных регулярных* функций на X вдоль Y. Цель этого упражнения — показать, что если Y — связное неособое подмногообразие положительной размерности в $X = \mathbf{P}_k^n$ над алгебраически замкнутым полем k, то $\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) = k$.

(a) Пусть $\mathscr{J}$ — пучок идеалов Y. Используя 8.13 и 8.17, показать, что существует вложение $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^{n+1}$ пучков на Y.

(b) Показать, что $\Gamma(Y, \mathscr{J}^r/\mathscr{J}^{r+1}) = 0$ для любого $r \geqslant 1$.

(c) Используя точную последовательность

$$0 \to \mathscr{J}^r/\mathscr{J}^{r+1} \to \mathcal{O}_X/\mathscr{J}^{r+1} \to \mathcal{O}_X/\mathscr{J}^r \to 0$$

и индукцию по r, показать, что $\Gamma(Y, \mathcal{O}_X/\mathscr{J}^r) = k$ для всех $r \geqslant 1$. (Воспользоваться теоремой 8.21Ae.)

(d) Вывести отсюда, что $\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) = k$. (На самом деле этот факт верен и без предположения неособости Y, но доказательство его более трудное — см. Хартсхорн [3, (7.3)].)

9.2. Используя упр. 9.1, доказать следующий геометрический факт. Пусть $Y \subset X = \mathbf{P}_k^n$ такие же, как в упр. 9.1, и $f: X \to Z$ — некоторый морфизм многообразий над k. Предположим, что $f(Y) = P$ — одна замкнутая точка в Z. Показать, что тогда также и $f(X) = P$.

9.3. Доказать аналог предложения 5.6 для формальных схем, а именно если $\mathfrak{X}$ — формальная схема,

$$0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$$

— точная последовательность $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей и $\mathfrak{F}'$ — когерентный пучок, то последовательность глобальных сечений

$$0 \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}') \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}'') \to 0$$

также точна. Доказательство провести в следующие два шага.

(a) Пусть $\mathfrak{J}$ — идеал определения для $\mathfrak{X}$ и для каждого $n > 0$

$$0 \to \mathfrak{F}'/\mathfrak{J}^n\mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}/\mathfrak{J}^n\mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}'' \to 0$$

— точная последовательность $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей. Используя слегка модифицированный вариант 5.6, показать, что для каждого открытого аффинного подмножества $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$ последовательность

$$0 \to \Gamma(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}'/\mathfrak{J}^n\mathfrak{F}') \to \Gamma(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}/\mathfrak{J}^n\mathfrak{F}') \to \Gamma(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}'') \to 0$$

точна.

(b) Используя 9.1, 9.2 и 9.6, в предыдущей последовательности перейти к пределу. Вывести отсюда, что $\mathfrak{F} \simeq \varprojlim \mathfrak{F}/\mathfrak{J}^n\mathfrak{F}'$ и что выписанная выше последовательность глобальных сечений пучков на $\mathfrak{X}$ точна.

9.4. Используя упр. 9.3, показать, что если в точной последовательности $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей

$$0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$$

на нётеровой формальной схеме $\mathfrak{X}$ пучки $\mathfrak{F}'$ и $\mathfrak{F}''$ когерентны, то когерентен также и пучок $\mathfrak{F}$.

9.5. Пусть $\mathfrak{F}$ — когерентный пучок на нётеровой формальной схеме $\mathfrak{X}$, порождающейся своими глобальными сечениями. Показать, что он может быть порожден конечным числом этих глобальных сечений.

9.6. Пусть $\mathfrak{X}$ — нётерова формальная схема, $\mathfrak{J}$ — ее идеал определения и для каждого n пусть $Y_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}^n)$. Предположим, что обратная система групп $(\Gamma(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}))$ удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера. Доказать, что тогда $\operatorname{Pic} \mathfrak{X} = \varprojlim \operatorname{Pic} Y_n$; здесь, как и в случае обычных схем, $\operatorname{Pic} \mathfrak{X}$ обозначает группу локально свободных $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей ранга 1 с операцией $\otimes$. Доказательство провести в следующие несколько шагов.

(a) Используя тот факт, что $\ker(\Gamma(Y_{n+1}, \mathcal{O}_{Y_{n+1}}) \to \Gamma(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}))$ является нильпотентным идеалом, показать, что обратная система $(\Gamma(Y_n, \mathcal{O}^*_{Y_n}))$ групп обратимых элементов соответствующих колец также удовлетворяет условию (ML).

(b) Пусть $\mathfrak{F}$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей, и предположим, что для каждого n существует некоторый изоморфизм $\varphi_n\colon \mathfrak{F}/\mathfrak{I}^n\mathfrak{F} \simeq \mathcal{O}_{Y_n}$. Показать, что тогда существует изоморфизм $\mathfrak{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Надо отнестись к этому аккуратнее, поскольку отображения φ_n могут не быть согласованными с отображениями в обратных системах $(\mathfrak{F}/\mathfrak{I}^n\mathfrak{F})$ и $(\mathcal{O}_{Y_n})$! Вывести отсюда, что естественное отображение $\operatorname{Pic}\mathfrak{X} \to \varprojlim \operatorname{Pic} Y_n$ инъективно.

(c) Пусть для каждого n на Y_n заданы обратимый пучок $\mathscr{L}_n$ и изоморфизмы $\mathscr{L}_{n+1} \otimes \mathcal{O}_{Y_n} \simeq \mathscr{L}_n$. Построить отображения $\mathscr{L}_{n'} \to \mathscr{L}_n$ для каждого $n' \geqslant n$ так, чтобы $(\mathscr{L}_n)$ превратилось в обратную систему пучков, и показать, что $\mathfrak{L} = \varprojlim \mathscr{L}_n$ является когерентным пучком на $\mathfrak{X}$. Показать далее, что $\mathscr{L}$ — локально свободный пучок ранга 1, и вывести отсюда, что отображение $\operatorname{Pic}\mathfrak{X} \to \varprojlim \operatorname{Pic} Y_n$ сюръективно. Опять следует быть осторожными, поскольку хотя каждый из пучков $\mathscr{L}_n$ локально свободен ранга 1, открытые множества, на которых они свободны, могут уменьшаться с ростом n.

(d) Показать, что предположение «$(\Gamma(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}))$ удовлетворяет условию (ML)» выполняется в случае, когда $\mathfrak{H}$ аффинна или когда каждая из схем Y_n проективна над полем k.

Замечание. Дальнейшие примеры и приложения см. в упр. 11.5—11.7. гл. III.

Глава III

КОГОМОЛОГИИ

В этой главе мы определим общее понятие когомологий пучков абелевых групп на топологическом пространстве и подробно изучим когомологии когерентных и квазикогерентных пучков на нётеровых схемах.

Существует много различных способов определения когомологий, хотя в итоге обычно получаются одни и те же результаты. Построение когомологий с помощью тонких резольвент часто используется в теории функций многих комплексных переменных, см. Ганнинг и Росси [1]; конструкцию когомологий Чеха в абстрактную алгебраическую геометрию впервые перенес Серр [3]; Годеман [1] определял когомологии посредством канонических плоских резольвент, и, наконец, общий подход к определению когомологий с помощью производных функторов был дан Гротендиком [1]. Каждый из этих способов построения теории когомологий интересен и важен сам по себе.

В качестве основного определения мы выбираем определение с помощью производных функторов функтора глобальных сечений (§ 1, 2). Оно является наиболее общим и лучше приспособлено для изучения теоретических вопросов, таких, например, как теорема двойственности Серра в § 7. Однако для конкретных вычислений оно практически непригодно, поэтому в § 4 мы вводим понятие когомологий Чеха и используем их в § 5 для явного вычисления когомологий пучков $\mathcal{O}(n)$ на проективном пространстве $\mathbf{P}^r$. Эти вычисления служат основой для получения многих дальнейших результатов о когомологиях проективных многообразий.

Для доказательства того, что когомологии Чеха совпадают с когомологиями, определенными как производные функторы, нужно утверждение об обращении в нуль высших когомологий квазикогерентных пучков на аффинных схемах. Мы доказываем его в § 3 только в нётеровом случае, потому что этот случай технически более простой, чем случай произвольных аффинных схем (см. EGA III, § 1). Следовательно, предположение нётеровости должно присутствовать во всех теоремах, доказываемых с использованием когомологий.

В качестве приложения мы доказываем, например, что арифметический род проективного многообразия X, определение которого

(a) Используя тот факт, что $\ker(\Gamma(Y_{n+1}, \mathcal{O}_{Y_{n+1}}) \to \Gamma(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}))$ является нильпотентным идеалом, показать, что обратная система $(\Gamma(Y_n, \mathcal{O}^*_{Y_n}))$ групп обратимых элементов соответствующих колец также удовлетворяет условию (ML).

(b) Пусть $\mathfrak{F}$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей, и предположим, что для каждого n существует некоторый изоморфизм $\varphi_n\colon \mathfrak{F}/\mathfrak{J}^n\mathfrak{F} \simeq \mathcal{O}_{Y_n}$. Показать, что тогда существует изоморфизм $\mathfrak{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Надо отнестись к этому аккуратнее, поскольку отображения φ_n могут не быть согласованными с отображениями в обратных системах $(\mathfrak{F}/\mathfrak{J}^n\mathfrak{F})$ и $(\mathcal{O}_{Y_n})$! Вывести отсюда, что естественное отображение $\operatorname{Pic} \mathfrak{X} \to \varprojlim \operatorname{Pic} Y_n$ инъективно.

(c) Пусть для каждого n на Y_n заданы обратимый пучок $\mathcal{L}_n$ и изоморфизмы $\mathcal{L}_{n+1} \otimes \mathcal{O}_{Y_n} \simeq \mathcal{L}_n$. Построить отображения $\mathcal{L}_{n'} \to \mathcal{L}_n$ для каждого $n' \geqslant n$ так, чтобы $(\mathcal{L}_n)$ превратилось в обратную систему пучков, и показать, что $\mathfrak{L} = \varprojlim \mathcal{L}_n$ является когерентным пучком на $\mathfrak{X}$. Показать далее, что $\mathcal{L}$ — локально свободный пучок ранга 1, и вывести отсюда, что отображение $\operatorname{Pic} \mathfrak{X} \to \varprojlim \operatorname{Pic} Y_n$ сюръективно. Опять следует быть осторожными, поскольку хотя каждый из пучков $\mathcal{L}_n$ локально свободен ранга 1, открытые множества, на которых они свободны, могут уменьшаться с ростом n.

(d) Показать, что предположение «$(\Gamma(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}))$ удовлетворяет условию (ML)» выполняется в случае, когда $\mathfrak{H}$ аффинна или когда каждая из схем Y_n проективна над полем k.

Замечание. Дальнейшие примеры и приложения см. в упр. 11.5—11.7. гл. III.

Глава III

КОГОМОЛОГИИ

В этой главе мы определим общее понятие когомологий пучков абелевых групп на топологическом пространстве и подробно изучим когомологии когерентных и квазикогерентных пучков на нётеровых схемах.

Существует много различных способов определения когомологий, хотя в итоге обычно получаются одни и те же результаты. Построение когомологий с помощью тонких резольвент часто используется в теории функций многих комплексных переменных, см. Ганнинг и Росси [1]; конструкцию когомологий Чеха в абстрактную алгебраическую геометрию впервые перенес Серр [3]; Годеман [1] определял когомологии посредством канонических плоских резольвент, и, наконец, общий подход к определению когомологий с помощью производных функторов был дан Гротендиком [1]. Каждый из этих способов построения теории когомологий интересен и важен сам по себе.

В качестве основного определения мы выбираем определение с помощью производных функторов функтора глобальных сечений (§ 1, 2). Оно является наиболее общим и лучше приспособлено для изучения теоретических вопросов, таких, например, как теорема двойственности Серра в § 7. Однако для конкретных вычислений оно практически непригодно, поэтому в § 4 мы вводим понятие когомологий Чеха и используем их в § 5 для явного вычисления когомологий пучков $\mathcal{O}(n)$ на проективном пространстве $\mathbf{P}^r$. Эти вычисления служат основой для получения многих дальнейших результатов о когомологиях проективных многообразий.

Для доказательства того, что когомологии Чеха совпадают с когомологиями, определенными как производные функторы, нужно утверждение об обращении в нуль высших когомологий квазикогерентных пучков на аффинных схемах. Мы доказываем его в § 3 только в нётеровом случае, потому что этот случай технически более простой, чем случай произвольных аффинных схем (см. EGA III, § 1). Следовательно, предположение нётеровости должно присутствовать во всех теоремах, доказываемых с использованием когомологий.

В качестве приложения мы доказываем, например, что арифметический род проективного многообразия X, определение которого в § 7 гл. I зависело от проективного вложения X, может быть вычислен в терминах когомологий $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ и тем самым оказывается не зависящим от выбора вложения (упр. 5.3). Показывается также, что арифметический род не меняется при изменении X в семействе нормальных проективных многообразий (9.13).

Другим важным приложением служит доказательство основной теоремы Зарисского 11.4, которая существенным образом используется в бирациональной теории многообразий.

Заключительная часть этой главы (§ 8—12) посвящена изучению семейств схем, т. е. изучению слоев морфизмов схем. В частности, мы включили сюда параграф о плоских морфизмах и отдельный параграф о гладких морфизмах. Эти морфизмы можно было бы изучать и без когомологий, но включение их в настоящую главу, по-видимому, наиболее уместно, поскольку понятие плоскости (необходимое также и для определения понятия гладкости) может быть понято лучше с использованием когомологической техники (9.9).

§ 1. Производные функторы

В этой главе у читателя предполагается знакомство с основами гомологической алгебры. Но поскольку терминология и обозначения обычно меняются от книги к книге, то в этом параграфе мы изложим (без доказательств) основные определения и результаты из гомологической алгебры, которые нам понадобятся в дальнейшем. Подробное изложение можно найти в следующих источниках: Годеман [1, гл. I, § 1.1—1.8, 2.1—2.4, 5.1—5.3], Хилтон и Штаммбах [1, гл. II, IV, IX], Гротендик [1, гл. II, § 1, 2, 3], Картан и Эйленберг [1, гл. III, V] и Ротман [1, § 6].

Определение. Категория $\mathfrak{A}$ называется *абелевой*, если для любых двух ее объектов A, $B \in \operatorname{Ob}\mathfrak{A}$ множество $\operatorname{Hom}(A, B)$ обладает структурой абелевой группы и закон композиции линеен; в $\mathfrak{A}$ существуют конечные прямые суммы; каждый морфизм обладает ядром и коядром; каждый мономорфизм является ядром своего коядра; каждый эпиморфизм является коядром своего ядра и, наконец, каждый морфизм может быть разложен в композицию эпиморфизма и мономорфизма (см. Хилтон и Штаммбах [1, стр. 78]).

В следующих примерах все категории являются абелевыми.

Пример 1.0.1. Категория $\mathfrak{Ab}$ абелевых групп.

Пример 1.0.2. Категория $\mathfrak{Mod}(A)$ модулей над кольцом A (коммутативным и с единицей, как обычно).

Пример 1.0.3. Категория $\mathfrak{Ab}(X)$ пучков абелевых групп на топологическом пространстве X.

Пример 1.0.4. Категория $\mathfrak{Mod}(X)$ пучков $\mathcal{O}_X$-модулей на окольцованном пространстве $(X, \mathcal{O}_X)$.

Пример 1.0.5. Категория $\mathfrak{Qco}(X)$ квазикогерентных пучков $\mathcal{O}_X$-модулей на схеме X (5.7 гл. II).

Пример 1.0.6. Категория $\mathfrak{Coh}(X)$ когерентных пучков $\mathcal{O}_X$-модулей на нётеровой схеме X (5.7 гл. II).

Пример 1.0.7. Категория $\mathfrak{Coh}(\mathfrak{X})$ когерентных пучков $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модулей на нётеровой формальной схеме $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ (9.9 гл. II).

В оставшейся части этого параграфа мы изложим некоторые основные результаты из гомологической алгебры в контексте произвольной абелевой категории.

В большинстве книг по гомологической алгебре эти результаты доказываются только для категории модулей, причем главным образом с помощью метода диаграммного поиска. Так как диаграммный поиск не имеет смысла в произвольной абелевой категории, то добросовестный читатель может оказаться в затруднении. Существуют по меньшей мере три способа обойти эту трудность.

(1) Дать инвариантное доказательство всех результатов, исходя только из аксиом абелевой категории, не упоминая даже слова «элемент». Это очень трудно, но возможно, см. Фрейд [1].

(2) Заметить, что в каждой из обычно используемых категорий (большинство из которых приведено выше) метод диаграммного поиска в действительности применим.

(3) Признать теорему о полной вложимости (см. Фрейд [1, гл. 7]), которая, грубо говоря, утверждает, что всякая абелева категория эквивалентна подкатегории категории $\mathfrak{Ab}$. Отсюда вытекает, что любое теоретико-категорное утверждение (например, лемма о пяти гомоморфизмах), которое может быть доказано в $\mathfrak{Ab}$ (например, с помощью метода диаграммного поиска), справедливо также и в произвольной абелевой категории.

Итак, приступим к обзору элементов гомологической алгебры. *Комплексом* $A^\cdot$ в абелевой категории $\mathfrak{A}$ называется набор объектов A^i, $i \in \mathbf{Z}$, и морфизмов $d^i\colon A^i \to A^{i+1}$, таких, что $d^{i+1} \circ d^i = 0$ для каждого i. Объекты A^i могут быть отличны от нуля только для некоторого подмножества индексов i, например для $i \geqslant 0$. *Морфизмом* комплексов $f\colon A^\cdot \to B^\cdot$ называется набор морфизмов $f^i\colon A^i \to B^i$ для каждого i, которые коммутируют с кограничными отображениями d^i.

Когомологии $h^i(A^\cdot)$ комплекса $A^\cdot$ определяются как фактор-объекты $\ker d^i/\operatorname{im} d^{i-1}$. Всякий морфизм комплексов $f\colon A^\cdot \to B^\cdot$ индуцирует естественное отображение $h^i(f)\colon h(A^\cdot) \to h^i(B^\cdot)$. Для всякой короткой точной последовательности комплексов $0 \to A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to 0$ существует набор естественных отображений $\delta^i\colon h^i(C^\cdot) \to h^{i+1}(A^\cdot)$, так что имеет место следующая длинная точная последовательность:

$$\ldots \to h^i(A^\cdot) \to h^i(B^\cdot) \to h^i(C^\cdot) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\cdot) \to \ldots .$$

Два морфизма комплексов $f, g\colon A^\cdot \to B^\cdot$ называются *гомотопными* (что обозначается так: $f \sim g$), если существует набор морфизмов $k^i\colon A^i \to B^{i-1}$ для каждого i (не обязательно коммутирующих с d^i), таких, что $f - g = dk + kd$. Набор морфизмов $k = (k^i)$ называется *оператором гомотопии*. Гомотопные морфизмы f и g индуцируют один и тот же морфизм когомологий $h^i(A^\cdot) \to h^i(B^\cdot)$ для каждого i.

Ковариантный функтор $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ из одной абелевой категории в другую называется *аддитивным*, если для любых двух объектов A, A' из $\mathfrak{A}$ индуцированное отображение $\operatorname{Hom}(A, A') \to \operatorname{Hom}(FA, FA')$ является гомоморфизмом абелевых групп. Функтор F называется *точным слева*, если он аддитивен и для всякой короткой точной последовательности в $\mathfrak{A}$

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

последовательность

$$0 \to FA' \to FA \to FA''$$

точна в $\mathfrak{B}$. Если вместо нуля слева здесь можно поставить нуль справа, то F называется *точным справа*. Функтор, точный слева и справа, называется *точным* функтором. Если точна только последовательность вида $FA' \to FA \to FA''$, то F называется *точным в среднем члене*.

Аналогичные определения имеют место и для контравариантных функторов. Например, контравариантный функтор $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ называется *точным слева*, если он аддитивен и для всякой короткой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ последовательность

$$0 \to FA'' \to FA \to FA'$$

точна в $\mathfrak{B}$.

Пример 1.0.8. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева категория и A — некоторый фиксированный объект в ней. Тогда функтор $B \mapsto \operatorname{Hom}(A, B)$, обозначаемый обычно через $\operatorname{Hom}(A, \cdot)$, является ковариантным точным слева функтором из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{Ab}$. Функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, A)$ контравариантен и также точен слева.

Перейдем теперь к резольвентам и производным функторам. Объект I из $\mathfrak{A}$ называется *инъективным*, если $\operatorname{Hom}(\cdot, I)$ является точным функтором. *Инъективной резольвентой* объекта A категории $\mathfrak{A}$ называется комплекс $I^\cdot$, определенный для $i \geq 0$, вместе с морфизмом $\varepsilon\colon A \to I^0$, такой, что каждый объект I^i, $i \geq 0$, инъективен в $\mathfrak{A}$ и последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \to I^1 \to \ldots$$

точна.

Если каждый объект категории $\mathfrak{A}$ изоморфен подобъекту некоторого инъективного объекта, то говорят, что $\mathfrak{A}$ имеет *достаточно много инъективных объектов*. Если $\mathfrak{A}$ имеет достаточно много инъективных объектов, тогда каждый ее объект обладает инъективной резольвентой. Более того, любые две его инъективные резольвенты гомотопны, как утверждает хорошо известная лемма из гомологической алгебры.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — абелева категория, имеющая достаточно много инъективных объектов, и $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — ковариантный точный слева функтор. Тогда для него можно определить *правые производные функторы* R^iF, $i \geq 0$, следующим образом. Для каждого объекта A категории $\mathfrak{A}$ зафиксируем инъективную резольвенту $I^\cdot$. После этого положим по определению

$$R^iF(A) = h^i(F(I^\cdot)).$$

Теорема 1.1А. *Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева категория, имеющая достаточно много инъективных объектов, и пусть $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — ковариантный точный слева функтор в абелеву категорию $\mathfrak{B}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *Для каждого $i \geq 0$ производный функтор R^iF является аддитивным функтором из категории $\mathfrak{A}$ в категорию $\mathfrak{B}$. Более того, он не зависит (с точностью до естественного изоморфизма функторов) от выбора инъективных резольвент.*

(b) *Существует естественный изоморфизм $F \simeq R^0F$.*

(c) *Для каждой короткой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ и для каждого $i \geq 0$ существует естественный морфизм $\delta^i\colon R^iF(A'') \to R^{i+1}F(A')$, такой, что имеет место следующая длинная точная последовательность:*

$$\ldots \to R^iF(A') \to R^iF(A) \to R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \to R^{i+1}F(A) \to \ldots .$$

(d) *Если задан морфизм короткой точной последовательности из (c) в другую короткую точную последовательность $0 \to B' \to$*

$\to B \to B'' \to 0$, *то следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^iF(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(B') \end{array}$$

коммутативна.

(e) *Для каждого инъективного объекта I категории $\mathfrak{A}$ и каждого $i > 0$ имеем $R^iF(I) = 0$.*

Определение. Пусть F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — такой же функтор, как и в теореме 1.1А. Объект J из $\mathfrak{A}$ называется *ациклическим* для F, если $R^iF(J) = 0$ для всех $i > 0$.

Предложение 1.2А. *Пусть F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ такой же, как и в* 1.1А, *и предположим, что существует последовательность*

$$0 \to A \to J^0 \to J^1 \to \ldots,$$

где каждый объект J^i, $i \geqslant 0$, ацикличен для F (в таком случае будем называть $J^\cdot$ F-ациклической резольвентой *A). Тогда для каждого $i \geqslant 0$ существует естественный изоморфизм $R^iF(A) \simeq \simeq h^i(F(J^\cdot))$.*

По аналогии можно определить понятия проективных объектов, проективных резольвент, абелевой категории, имеющей достаточно много проективных объектов, левых производных функторов ковариантного точного справа функтора, а также правых производных функторов контравариантного точного слева функтора (с помощью проективных резольвент) и левых производных функторов контровариантного точного справа функтора (с помощью инъективных резольвент). Мы предоставляем это сделать читателю.

Теперь поговорим о свойстве универсальности производных функторов

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — абелевы категории. *Ковариантным δ-функтором* из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называется набор функторов $T = (T^i)_{i \geqslant 0}$ вместе с морфизмом δ^i: $T^i(A'') \to T^{i+1}(A')$ для каждой короткой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ и каждого $i \geqslant 0$, таких, что выполняются следующие два условия:

(1) для каждой короткой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ существует длинная точная последовательность

$$0 \to T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(A') \to \ldots$$
$$\ldots \to T^i(A') \to T^i(A) \to T^i(A'') \xrightarrow{\delta^i} T^{i+1}(A') \to \ldots;$$

(2) для каждого морфизма короткой точной последовательности из (1) в короткую точную последовательность $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(B') \end{array}$$

коммутативна.

Определение. δ-функтор $T = (T^i)$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ называется *универсальным*, если для любого другого δ-функтора $T' = (T'^i)$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и любого морфизма функторов f^0: $T^0 \to T'^0$ существует единственная последовательность морфизмов f^i: $T^i \to T'^i$ для каждого $i \geqslant 0$, начинающаяся с f^0, которые коммутируют с δ^i для всякой короткой точной последовательности.

Замечание 1.2.1. По определению для заданного ковариантного аддитивного функтора F может существовать самое большее один (с точностью до единственного изоморфизма) универсальный δ-функтор T с $T^0 = F$. Если такой функтор T существует, то T^i называются иногда *правыми сателлитами* функтора F.

Определение. Аддитивный функтор F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ называется *стирающим*, если для каждого объекта A из $\mathfrak{A}$ существует мономорфизм u: $A \to M$ для некоторого M, такой, что $F(u) = 0$. Функтор F называется *костирающим*, если существует эпиморфизм u: $P \to A$, такой, что $F(u) = 0$.

Теорема 1.3А. *Пусть $T = (T^i)_{i \geqslant 0}$ — ковариантный δ-функтор из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Если функторы T^i являются стирающими для всех $i > 0$, то функтор T универсален.*

Доказательство. См. Гротендик [1, II, 2.2.1].

Следствие 1.4. *Предположим, что категория $\mathfrak{A}$ имеет достаточно много инъективных объектов. Тогда для любого точного слева функтора F: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ производные функторы $(R^iF)_{i \geqslant 0}$ образуют универсальный δ-функтор с $F \simeq R^0F$. Обратно, если $T = (T^i)_{i \geqslant 0}$ — произвольный универсальный δ-функтор, то функтор T^0 точен слева и функтор T^i изоморфен R^iT^0 для каждого $i \geqslant 0$.*

Доказательство. Если F — точный слева функтор, то $(R^iF)_{i \geqslant 0}$ образуют δ-функтор по теореме 1.1А. Далее, пусть u: $A \to I$ — мономорфизм объекта A в инъективный. Тогда по теореме 1.1А $R^iF(I) = 0$ для $i > 0$, так что $R^iF(u) = 0$. Таким образом, функтор R^iF является стирающим для каждого $i > 0$, и, следовательно, по теореме 1.3А функтор (R^iF) универсален.

Обратно, пусть T — универсальный δ-функтор. Тогда функтор T^0 точен слева по определению δ-функтора. Так как категория $\mathfrak{A}$ имеет достаточно много инъективных объектов, то производные функторы R^iT^0 в $\mathfrak{A}$ существуют. Как было показано, (R^iT^0) тоже является универсальным δ-функтором, причем $R^0T^0 = T^0$. Следовательно, $R^iT^0 \simeq T^i$ для каждого i в силу замечания 1.2.1.

§ 2. Когомологии пучков

В этом параграфе мы определяем когомологии пучков как производные функторы функтора глобальных сечений. Затем, применяя общую когомологическую технику, доказываем теорему Гротендика об обращении в нуль когомологий на нётеровом топологическом пространстве в размерностях, больших размерности пространства. Начнем с проверки того, что нужные нам категории имеют достаточно много инъективных объектов.

Предложение 2.1.А. *Пусть A — кольцо. Тогда каждый A-модуль M изоморфен подмодулю некоторого инъективного A-модуля.*

Доказательство. См. Годеман [1, I, 1.2.2] или Хилтон и Штаммбах [1, I, 8.3.].

Предложение 2.2. *Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство. Тогда категория $\mathfrak{Mod}(X)$ пучков $\mathcal{O}_X$-модулей имеет достаточно много инъективных объектов.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Для каждой точки $x \in X$ слой $\mathcal{F}_x$ является $\mathcal{O}_{x,X}$-модулем. Поэтому, согласно 2.1А, существует вложение $\mathcal{F}_x \to I_x$, где I_x — инъективный $\mathcal{O}_{x,X}$-модуль. Для каждой точки x пусть j обозначает вложение одноточечного пространства $\{x\}$ в X. Рассмотрим пучок $\mathcal{J} = \prod_{x \in X} j_*(I_x)$. Здесь I_x рассматривается как пучок на одноточечном пространстве $\{x\}$ и j_* — функтор прямого образа (см. § 1 гл. II).

Для всякого пучка $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{G}$ имеем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) = \prod \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_*(I_x))$ по определению прямого произведения. С другой стороны, как легко видеть, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_*(I_x)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{G}_x, I_x)$ для каждой точки $x \in X$. Отсюда мы заключаем, что, во-первых, существует естественный морфизм пучков $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F} \to \mathcal{J}$, получаемый из локальных отображений $\mathcal{F}_x \to I_x$; во-вторых, функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\cdot, \mathcal{J})$ является прямым произведением по всем $x \in X$ функторов, являющихся композициями точных функторов — функтора слоя $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}_x$ и функтора $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{x,X}}(\cdot, I_x)$. Точность последнего следует из того, что I_x — инъективный $\mathcal{O}_{x,X}$-модуль. Поэтому функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{J})$ также является точным и, следовательно, $\mathcal{J}$ — инъективный $\mathcal{O}_X$-модуль.

Следствие 2.3. *Пусть X — любое топологическое пространство. Тогда категория $\mathfrak{Ab}(X)$ пучков абелевых групп на X имеет достаточно много инъективных объектов.*

Доказательство. Действительно, если в качестве структурного пучка $\mathcal{O}_X$ взять постоянный пучок $\mathbf{Z}$, то $(X, \mathcal{O}_X)$ станет окольцованным пространством и $\mathfrak{Mod}(X) = \mathfrak{Ab}(X)$.

Определение. Пусть X — топологическое пространство и $\Gamma(X, \cdot)$ — функтор глобальных сечений из категории $\mathfrak{Ab}(X)$ в категорию $\mathfrak{Ab}$. Определим *функторы когомологий* $H^i(X, \cdot)$ как правые производные функтора $\Gamma(X, \cdot)$. Для любого пучка $\mathcal{F}$ группы $H^i(X, \mathcal{F})$ называются *группами когомологий* пучка $\mathcal{F}$. Отметим, что если даже X и $\mathcal{F}$ обладают дополнительными структурами, например X — схема, а $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок, когомологии всегда берутся в этом смысле, т. е. $\mathcal{F}$ рассматривается просто как пучок абелевых групп на топологическом пространстве X.

Оставляем читателю самому выписать длинные точные последовательности, исходя из общей теории производных функторов 1.1А.

Напомним (см. упр. 1.16 гл. II), что пучок $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X называется *плоским* (или *вялым*), если для всякого вложения открытых множеств $V \subset U$ отображение ограничения $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ сюръективно.

Лемма 2.4. *Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство. Тогда всякий инъективный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ является плоским.*

Доказательство. Для любого открытого подмножества $U \subset X$ пусть $\mathcal{O}_U$ обозначает пучок $j_!(\mathcal{O}_X|_U)$, т.е. ограничение пучка $\mathcal{O}_X$ на U, продолженное нулем вне U (см. упр. 1.19 гл. II). Далее, пусть $\mathcal{J}$ — инъективный $\mathcal{O}_X$-модуль и $V \subset U$ — вложение открытых множеств. Тогда мы имеем вложение $0 \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_U$ пучков $\mathcal{O}_X$-модулей. Так как пучок $\mathcal{J}$ инъективен, то это вложение дает сюръективное отображение $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U, \mathcal{J}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_V, \mathcal{J}) \to 0$. Но так как $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U, \mathcal{J}) = \mathcal{J}(U)$ и $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_V, \mathcal{J}) = \mathcal{J}(V)$, то это показывает, что пучок $\mathcal{J}$ плоский.

Предложение 2.5. *Пусть $\mathcal{F}$ — плоский пучок на топологическом пространстве X, тогда $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для всех $i > 0$.*

Доказательство. Вложим $\mathscr{F}$ в инъективный объект $\mathscr{I}$ категории $\mathfrak{Ab}(X)$ и обозначим через $\mathscr{G}$ соответствующий фактор-пучок. Получим следующую точную последовательность:

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{I} \to \mathscr{G} \to 0.$$

Так как пучок $\mathscr{F}$ плоский по предположению и $\mathscr{I}$ плоский по 2.4, то $\mathscr{G}$ тоже плоский согласно упр. 1.16(c) гл. II. Далее, поскольку $\mathscr{F}$ плоский, то имеет место следующая точная последовательность (см. упр. 1.16 (b) гл. II):

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{I}) \to \Gamma(X, \mathscr{G}) \to 0.$$

С другой стороны, так как $\mathscr{I}$ инъективен, то $H^i(X, \mathscr{I}) = 0$ для $i > 0$ (см. 1.1A(e)). Поэтому из длинной точной последовательности когомологий получаем, что $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$ и $H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^{i-1}(X, \mathscr{G})$ для каждого $i \geqslant 2$. Но пучок $\mathscr{G}$ тоже плоский, так что по индукции мы получаем требуемый результат.

Замечание 2.5.1. Этот результат означает, что плоские пучки являются ациклическими для функтора $\Gamma(X, \cdot)$. Следовательно, когомологии пучков можно вычислять, используя плоские резольвенты (1.2А). В частности, имеет место следующий факт.

Предложение 2.6. *Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство. Тогда производные функторы функтора глобальных сечений $\Gamma(X, \cdot)$ из $\mathfrak{Mod}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$ совпадают с функторами когомологий $H^i(X, \cdot)$.*

Доказательство. Рассматривая $\Gamma(X, \cdot)$ как функтор из $\mathfrak{Mod}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$, мы можем вычислить его производные функторы с помощью инъективных резольвент в категории $\mathfrak{Mod}(X)$. Но по 2.4 всякий инъективный пучок является плоским, а по (2.5) всякий плоский ацикличен, так что эти резольвенты приводят к обычным функторам когомологий (1.2А).

Замечание 2.6.1. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство и $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Тогда для любого пучка $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathscr{F}$ глобальные сечения $\Gamma(X, \mathscr{F})$ обладают естественной структурой A-модуля. В частности, поскольку когомологии можно вычислять, используя резольвенты в категории $\mathfrak{Mod}(X)$, то все группы когомологий пучка $\mathscr{F}$ также обладают естественной структурой A-модулей. Более того, соответствующие точные последовательности будут точными последовательностями A-модулей и т. д. Например, если X — схема над $\operatorname{Spec} B$ для некоторого кольца B, то группы когомологий всякого $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathscr{F}$ обладают естественной структурой B-модулей.

Теорема Гротендика об обращении в нуль

Теорема 2.7. (Гротендик [1]). *Пусть X — нётерово топологическое пространство размерности n. Тогда $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ для всех $i > n$ и всех пучков абелевых групп $\mathscr{F}$ на X.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые предварительные результаты, в основном касающиеся прямых пределов. Пусть $(\mathscr{F}_\alpha)$ — прямая система пучков на X, индексированная дискретным множеством A. Тогда определен прямой предел $\varinjlim \mathscr{F}_\alpha$ (см. упр. 1.10 гл. II).

Лемма 2.8. *На нётеровом топологическом пространстве прямой предел плоских пучков является плоским пучком.*

Доказательство. Пусть $(\mathscr{F}_\alpha)$ — прямая система плоских пучков. Тогда для любого вложения открытых множеств $V \subset U$ и для каждого α отображение $\mathscr{F}_\alpha(U) \to \mathscr{F}_\alpha(V)$ сюръективно. Так как функтор $\varinjlim$ точен, то мы получаем отсюда, что отображение $\varinjlim \mathscr{F}_\alpha(U) \to \varinjlim \mathscr{F}_\alpha(V)$ также сюръективно. Но поскольку пространство X нётерово, то $\varinjlim \mathscr{F}_\alpha(U) = (\varinjlim \mathscr{F}_\alpha)(U)$ для любого открытого множества U (см. упр. 1.11 гл. II). Таким образом, отображение

$$(\varinjlim \mathscr{F}_\alpha)(U) \to (\varinjlim \mathscr{F}_\alpha)(V)$$

сюръективно, и, следовательно, пучок $\varinjlim \mathscr{F}_\alpha$ плоский.

Предложение 2.9. *Пусть X — нётерово топологическое пространство и $(\mathscr{F}_\alpha)$ — прямая система пучков абелевых групп. Тогда для всех $i \geqslant 0$ имеют место естественные изоморфизмы*

$$\varinjlim H^i(X, \mathscr{F}_\alpha) \to H^i(X, \varinjlim \mathscr{F}_\alpha).$$

Доказательство. Для каждого α существует естественное отображение $\mathscr{F}_\alpha \to \varinjlim \mathscr{F}_\alpha$. Оно индуцирует отображение на когомологиях, и, следовательно, можно взять прямой предел когомологий относительно этих отображений. Для $i = 0$ утверждение предложения уже известно (см. упр. 1.11 гл. II). В общем случае рассмотрим категорию $\mathfrak{ind}_A(\mathfrak{Ab}(X))$, состоящую из всех прямых систем объектов категории $\mathfrak{Ab}(X)$, индексированных множеством A. Это некоторая абелева категория. Более того, поскольку функтор $\varinjlim$ точен, то мы имеем естественное преобразование δ-функторов

$$\varinjlim H^i(X, \cdot) \to H^i(X, \varinjlim \cdot)$$

из категории $\mathfrak{ind}_A(\mathfrak{Ab}(X))$ в категорию $\mathfrak{Ab}$. Оно тождественно для $i=0$, так что для совпадения всюду достаточно проверить, что оба функтора являются стирающими для $i>0$. В таком случае они оба будут универсальными (см. 1.3А) и, следовательно, должны быть изоморфными.

Итак, пусть $(\mathcal{F}_\alpha) \in \mathfrak{ind}_A(\mathfrak{Ab}(X))$. Для каждого α пусть $\mathcal{G}_\alpha$ обозначает пучок разрывных сечений пучка $\mathcal{F}_\alpha$ (см. упр. 1.16(е) гл. II). Тогда $\mathcal{G}_\alpha$ плоский и существует естественное вложение $\mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{G}_\alpha$. Более того, конструкция взятия пучка разрывных сечений функториальна, так что пучки $\mathcal{G}_\alpha$ тоже образуют прямую систему, и мы получаем мономорфизм u: $(\mathcal{F}_\alpha) \to (\mathcal{G}_\alpha)$ в категории $\mathfrak{ind}_A(\mathfrak{Ab}(X))$. Далее, поскольку все $\mathcal{G}_\alpha$ являются плоскими, то $H^i(X, \mathcal{G}_\alpha)=0$ при $i>0$ (см. 2.5). Поэтому $\varinjlim H^i(X, \mathcal{G}_\alpha)=0$ и, следовательно, функтор с левой стороны является стирающим для $i>0$. С другой стороны, по 2.8 пучок $\varinjlim \mathcal{G}_\alpha$ также плоский, так что $H^i(X, \varinjlim \mathcal{G}_\alpha)=0$ для $i>0$. Следовательно, функтор с правой стороны тоже стирающий. Это завершает доказательство.

Замечание 2.9.1. В частности, мы видим, что когомологии перестановочны с бесконечными прямыми суммами.

Лемма 2.10. *Пусть Y — замкнутое подмножество в X, $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на Y и j: $Y \to X$ — естественное вложение. Тогда $H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F})$, где $j_*\mathcal{F}$ — продолжение $\mathcal{F}$ нулем вне Y* (см. упр. 1.19 гл. II).

Доказательство. Пусть $\mathcal{J}^\cdot$ — плоская резольвента пучка $\mathcal{F}$ на Y. Тогда $j_*\mathcal{J}^\cdot$ будет плоской резольвентой пучка $j_*\mathcal{F}$ на X и $\Gamma(Y, \mathcal{J}^\cdot) = \Gamma(X, j_*\mathcal{J}^i)$ для каждого i, так что мы получаем одинаковые когомологии.

Замечание 2.10.1. Продолжая упрощение обозначений (упр. 1.19 гл. II), будем часто вместо $j_*\mathcal{F}$ писать просто $\mathcal{F}$. Предыдущая лемма показывает, что это не приведет к путанице при рассмотрении когомологий.

Доказательство теоремы 2.7. Сначала зафиксируем некоторые обозначения. Для замкнутого подмножества Y в X и пучка $\mathcal{F}$ на X положим $\mathcal{F}_Y = j_*(\mathcal{F}|_Y)$, где j: $Y \to X$ — естественное вложение. Для открытого подмножества U в X положим $\mathcal{F}_U = i_*(\mathcal{F}|_U)$, где i: $U \to X$ — естественное вложение. В частности, если $U = X - Y$, то мы имеем следующую точную последовательность (см. упр. 1.19 гл. II):

$$0 \to \mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0.$$

Теперь будем доказывать теорему индукцией по $n = \dim X$ в несколько шагов.

Шаг 1. Сведе́ние к случаю, когда X неприводимо. Предположим, что пространство X приводимо, и пусть Y — одна из его неприводимых компонент, а $U = X - Y$. Тогда для любого пучка $\mathcal{F}$ имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0.$$

Рассматривая соответствующую длинную точную последовательность когомологий, достаточно показать, что $H^i(X, \mathcal{F}_Y)=0$ и $H'(X, \mathcal{F}_U)=0$ для $i>n$. Но так как Y замкнуто и неприводимо, то пучок $\mathcal{F}_U$ можно рассматривать как пучок на замкнутом подмножестве $\bar{U}$, которое имеет на одну меньше неприводимых компонент, чем X. Поэтому, используя лемму 2.10 и индукцию по числу неприводимых компонент, сводим общий случай к неприводимому.

Шаг 2. Предположим, что пространство X неприводимо и имеет размерность 0. Тогда открытыми в X являются только все X и пустое множество. Иначе X должно было бы иметь собственные неприводимые подмножества и тогда его размерность была бы $\geqslant 1$. Следовательно, $\Gamma(X, \cdot)$ является точным функтором, так что $H^i(X, \mathcal{F})=0$ для $i>0$ и любого $\mathcal{F}$.

Шаг 3. Пусть теперь X неприводимо, $\dim X = n$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{Ab}(X)$. Положим $B = \bigcup_{U \subset X} (U)$, и пусть A — множество всех конечных подмножеств из B. Для каждого $\alpha \in A$ обозначим через $\mathcal{F}_\alpha$ подпучок $\mathcal{F}$, порожденный сечениями из α (над различными открытыми подмножествами). Тогда A — дискретное множество и $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$. Поэтому, согласно 2.9, достаточно доказать обращение в нуль когомологий для каждого из пучков $\mathcal{F}_\alpha$. Для подмножества α' из α имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F}_{\alpha'} \to \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{G} \to 0,$$

где $\mathcal{G}$ — пучок, порожденный $\#(\alpha - \alpha')$ сечениями на подходящих открытых множествах. Следовательно, рассматривая соответствующую длинную точную последовательность когомологий и пользуясь индукцией по числу элементов множества α, сводим все к случаю, когда пучок $\mathcal{F}$ порождается одним сечением над некоторым открытым подмножеством U. В этом случае $\mathcal{F}$ является факторпучком пучка $\mathbf{Z}_U$ (где $\mathbf{Z}$ обозначает постоянный пучок целых

18—01390

чисел на X). Обозначая через $\mathscr{R}$ его ядро, получаем следующую точную последовательность:

$$0 \to \mathscr{R} \to \mathbf{Z}_U \to \mathscr{F} \to 0.$$

Опять из соответствующей длинной точной последовательности когомологий видим, что достаточно доказать обращение в нуль когомологий для пучков вида $\mathscr{R}$ и $\mathbf{Z}_U$.

Шаг 4. Пусть U — открытое подмножество в X и $\mathscr{R}$ — подпучок пучка $\mathbf{Z}_U$. Для каждой точки $x \in U$ слой $\mathscr{R}_x$ является подгруппой в $\mathbf{Z}$. Если $\mathscr{R} = 0$, то перейдем к шагу 5, если нет, то пусть d — наименьшее положительное целое число, которое встречается в какой-либо из групп $\mathscr{R}_x$. Тогда существует непустое открытое подмножество $V \subset U$, такое, что $\mathscr{R}|_V \simeq d\cdot\mathbf{Z}|_V$ как подпучок пучка $\mathbf{Z}|_V$. Следовательно, $\mathscr{R}_V \simeq \mathbf{Z}_V$ и имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathbf{Z}_V \to \mathscr{R} \to \mathscr{R}/\mathbf{Z}_V \to 0.$$

Носителем пучка $\mathscr{R}/\mathbf{Z}_V$ является замкнутое подмножество $(U - V)^-$ в X, размерность которого $< n$, поскольку X неприводимо, так что по 2.10 и по предположению индукции $H^i(X, \mathscr{R}/\mathbf{Z}_V) = 0$ для $i \geqslant n$. Поэтому из соответствующей длинной точной последовательности когомологий мы видим, что достаточно доказать теорему только для пучков вида $\mathbf{Z}_V$.

Шаг 5. Для завершения доказательства надо показать только, что $H^i(X, \mathbf{Z}_U) = 0$ для любого открытого подмножества $U \subset X$ и $i > n$. Пусть $Y = X - U$. Тогда мы имеем точную последовательность

$$0 \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_Y \to 0.$$

Но $\dim Y < \dim X$, так как X неприводимо; значит, по 2.10 и по предположению индукции $H^i(X, \mathbf{Z}_Y) = 0$ для всех $i \geqslant n$. С другой стороны, пучок $\mathbf{Z}$ плоский как постоянный пучок на неприводимом пространстве (см. упр. 1.16а гл. II). Следовательно, $H^i(X, \mathbf{Z}) = 0$ для $i > 0$ по предложению 2.5. Стало быть, из соответствующей длинной точной последовательности когомологий мы получаем $H^i(X, \mathbf{Z}_U) = 0$ для $i > n$. Теорема полностью доказана.

Исторические замечания. Понятие производных функторов было введено Гротендиком [1]. Развитая в [1] теория была использована им в [EGA]. Систематическое использование когомологий пучков в алгебраической геометрии начал Серр [3]. В этой и последующей статье [4] Серр пользовался когомологиями Чеха когерентных пучков на алгебраических многообразиях с топологией Зарисского. Эквивалентность его теории теории производных функторов выводится из теоремы Лере (см. упр. 4.11). Аналогичными соображениями с использованием теоремы В Картана показывается, что когомологии Чеха когерентных аналитических пучков на комплексно-аналитическом пространстве совпадают с когомологиями как производными функторами. Ганнинг и Росси [1] пользовались теорией когомологий, построенной с помощью тонких резольвент пучков на паракомпактных хаусдорфовых пространствах. Эквивалентность их теории с нашей показал Годеман [1, теорема 4.7.1 и упр. 7.2.1], который доказал также, что обе эти теории совпадают с теорией, построенной с помощью канонических плоских резольвент. Годеман показал еще [1, теорема 5.10.1], что на паракомпактном хаусдорфовом пространстве его теория совпадает с теорией когомологий Чеха. Это перебрасывает мостик к стандартным топологическим теориям с постоянными коэффицентами, как они изложены, например, в книге Спеньера [1]. Спеньер показывает, что на паракомпактном хаусдорфовом пространстве когомологии Чеха, когомологии Александера и сингулярные когомологии совпадают между собой (см. Спеньер [1]).

Теорема об обращении в нуль 2.7 была доказана Серром для когерентных пучков на алгебраических кривых и проективных алгебраических многообразий в [3], а позднее в [5] и для абстрактных алгебраических многообразий. Это аналог теоремы о том, что на (вещественном) многообразии размерности n сингулярные когомологии обращаются в нуль при $i > 2n$.

Упражнения

2.1. (a) Пусть $X = \mathbf{A}^1_k$ — аффинная прямая над бесконечным полем k, P, Q — две различные точки на X и $U = X - \{P, Q\}$. Показать, что $H^1(X, \mathbf{Z}_U) \neq 0$.

*(b) Более общо, пусть $Y \subset X = \mathbf{A}^n_k$ — объединение $n+1$ гиперплоскостей в общем положении и $U = X - Y$. Показать, что $H^n(X, \mathbf{Z}_U) \neq 0$. Это показывает, что теорему 2.7 нельзя улучшить в смысле точности оценки на размерность когомологий.

2.2. Пусть $X = \mathbf{P}^1_k$ — проективная прямая над алгебраически замкнутым полем k. Показать, что точная последовательность $0 \to \mathcal{O} \to \mathscr{K} \to \mathscr{K}/\mathcal{O} \to 0$ (см. упр. 2.21 гл. II) является плоской резольвентой пучка $\mathcal{O}$. Вывести из упр. 1.21(e) гл. II, что $H^i(X, \mathcal{O}) = 0$ для $i > 0$.

2.3. *Когомологии с носителями* (Гротендик [7]). Пусть X — топологическое пространство, Y — замкнутое подмножество в X и $\mathscr{F}$ — пучок абелевых групп на X. Обозначим через $\Gamma_Y(X, \mathscr{F})$ группу сечений пучка $\mathscr{F}$ с носителями в Y (см. упр. 1.20 гл. II).

(a) Показать, что $\Gamma_Y(X, \cdot)$ — точный слева функтор из категории $\mathfrak{Ab}(X)$ в категорию $\mathfrak{Ab}$. Правые производные функторы от $\Gamma_Y(X, \cdot)$ будем обозначать через $H^i_Y(X, \cdot)$. Они называются *когомологиями* X с носителями в Y и с коэффициентами в заданном пучке.

(b) Пусть $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ — точная последовательность пучков, где пучок $\mathscr{F}'$ плоский. Показать, что последовательность

$$0 \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}') \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}'') \to 0$$

точна.

(c) Показать, что если $\mathcal{F}$ — плоский пучок, то $H^i_Y(X, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$.

(d) Показать, что если пучок $\mathcal{F}$ плоский, то последовательность

$$0 \to \Gamma_Y(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X - Y, \mathcal{F}) \to 0$$

точна.

(e) Пусть $U = X - Y$. Показать, что для любого пучка существует следующая длинная точная последовательность групп когомологий:

$$0 \to H^0_Y(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(U, \mathcal{F}|_U) \to$$
$$\to H^1_Y(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{F}|_U) \to H^2_Y(X, \mathcal{F}) \to \cdots.$$

(f) *Вырезания.* Пусть V — открытое подмножество X, содержащее Y. Показать, что тогда существует функториальный изоморфизм

$$H^i_Y(X, \mathcal{F}) \simeq H^i_Y(V, \mathcal{F}|_V)$$

для каждого i и любого $\mathcal{F}$.

2.4. *Последовательность Майера — Вьеториса.* Пусть Y_1, Y_2 — замкнутые подмножества в X. Показать, что тогда существует следующая длинная точная последовательность когомологий с носителями:

$$\ldots \to H^i_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{F}) \to H^i_{Y_1}(X, \mathcal{F}) \oplus H^i_{Y_2}(X, \mathcal{F}) \to$$
$$\to H^i_{Y_1 \cup Y_2}(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{F}) \to \ldots.$$

2.5. Пусть X — пространство Зарисского (см. упр. 3.17 гл. II), $P \in X$ — замкнутая точка и X_P — подмножество в X, состоящее из всех точек $Q \in X$, таких, что $P \in \{\overline{Q}\}$. Мы будем называть X_P *локальным пространством* X в точке P, снабдив его индуцированной топологией. Пусть $j\colon X_P \to X$ — естественное вложение, и положим $\mathcal{F}_P = j^*\mathcal{F}$ для любого пучка $\mathcal{F}$ на X. Показать, что для всех i и $\mathcal{F}$ имеет место равенство

$$H^i_P(X, \mathcal{F}) = H^i_P(X_P, \mathcal{F}_P).$$

2.6. Пусть X — нётерово топологическое пространство и $\{\mathcal{J}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — прямая система инъективных пучков абелевых групп на X. Показать, что тогда пучок $\varinjlim \mathcal{J}_\alpha$ также инъективен. [*Указание.* Прежде всего показать, что пучок $\mathcal{J}$ инъективен тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества $U \subset X$, каждого подпучка $\mathcal{R} \subset \mathbf{Z}_U$ и каждого отображения $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{J}$ существует продолжение f до отображения $\mathbf{Z}_U \to \mathcal{J}$. Далее, показать, что всякий такой пучок $\mathcal{R}$ конечно порожден, так что любое отображение $\mathcal{R} \to \varinjlim \mathcal{J}_\alpha$ пропускается через один из пучков $\mathcal{J}_\alpha$.]

2.7. Пусть S^1 — окружность (с обычной топологией) и $\mathbf{Z}$ — постоянный пучок на S^1.

(a) Показать, что $H^1(S^1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, пользуясь нашим определением когомологий.

(b) Пусть теперь $\mathcal{R}$ — пучок ростков непрерывных вещественнозначных функций на S^1. Показать, что $H^1(S^1, \mathcal{R}) = 0$.

§ 3. Когомологии нётеровых аффинных схем

В этом параграфе мы докажем, что $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для $i > 0$, если $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема и $\mathcal{F}$ — любой квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Основным моментом здесь является

доказательство того, что для инъективного A-модуля I соответствующий пучок $\widetilde{I}$ на $\operatorname{Spec} A$ плоский. Начнем с некоторых предварительных результатов алгебраического характера.

Предложение 3.1A (теорема Крулля). *Пусть A — нётерово кольцо, $M \subset N$ — конечно порожденные A-модули, и пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в A. Тогда $\mathfrak{a}$-адическая топология на M индуцируется $\mathfrak{a}$-адической топологией на N. В частности, для любого $n > 0$ существует $n' \geqslant n$, такое, что $\mathfrak{a}^n M \supset M \cap \mathfrak{a}^{n'} N$.*

Доказательство. См. Атья — Макдональд [1, 10, 11] или Зарисский — Самюэль [1, т. II, гл. VIII, теорема 4].

Напомним (см. упр. 5.6 гл. II), что для любого кольца A, любого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ и любого A-модуля M определен подмодуль $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ как $\{m \in M \mid \mathfrak{a}^n m = 0$ для некоторого $n > 0\}$.

Лемма 3. . *Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{a}$ — идеал в A и I — некоторый инъективный A-модуль. Тогда подмодуль $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ тоже является инъективным A-модулем.*

Доказательство. Для доказательства инъективности J достаточно показать, что для любого идеала $\mathfrak{b} \subset A$ и любого гомоморфизма $\varphi\colon \mathfrak{b} \to J$ существует гомоморфизм $\psi\colon A \to J$, который продолжает φ. (Это хорошо известный критерий инъективности модуля, см. Годеман [1, I, I.4.1].) Так как кольцо A нётерово, то идеал $\mathfrak{b}$ конечно порожден. С другой стороны, всякий элемент из J аннулируется некоторой степенью идеала $\mathfrak{a}$, так что существует $n > 0$, такое, что $\mathfrak{a}^n \varphi(\mathfrak{b}) = 0$, или, равносильно, $\varphi(\mathfrak{a}^n \mathfrak{b}) = 0$. Применяя предложение 3.1A к вложению $\mathfrak{b} \subset A$, получаем, что существует $n' \geqslant n$, такое, что $\mathfrak{a}^n \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'}$. Следовательно, $\varphi(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'}) = 0$, так что отображение $\varphi\colon \mathfrak{b} \to J$ пропускается через $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'})$. Теперь рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & A/\mathfrak{a}^{n'} \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, dashed, "\psi'"] & & \\
\mathfrak{b} \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'}) \arrow[u, hook] \arrow[r] & J \arrow[r] & I
\end{tikzcd}$$

Так как модуль I инъективен, составное отображение $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'})$ в I продолжается до отображения $\psi'\colon A/\mathfrak{a}^{n'} \to I$. Но образ отображения ψ' аннулируется идеалом $\mathfrak{a}^{n'}$, поэтому он содержится в J. Компонуя это отображение с естественным отображением

$A \to A/\mathfrak{a}^{n'}$, получаем требуемое отображение $\psi: A \to J$, продолжающее φ.

Лемма 3.3. *Пусть I — инъективный модуль над нётеровым кольцом A. Тогда для любого $f \in A$ естественное отображение I в локализацию I_f сюръективно.*

Доказательство. Для каждого $i > 0$ пусть $\mathfrak{b}_i$ — аннулятор f^i в A. Тогда $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \ldots$, и, поскольку кольцо A нётерово, существует целое r, такое, что $\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_{r+1} = \ldots$. Пусть $\theta: I \to I_f$ — естественное отображение и $x \in I_f$ — произвольный элемент. Тогда по определению локализации существуют $y \in I$ и целое $n \geqslant 0$, такие, что $x = \theta(y)/f^n$. Определим отображение φ из идеала $(f^{n+r}) \subset A$ в I, сопоставляя f^{n+r} элемент $f^r y$. Это можно сделать, поскольку аннулятор элемента f^{n+r} равен $\mathfrak{b}_{n+r} = \mathfrak{b}_r$ и $\mathfrak{b}_r$ аннулирует $f^r y$. Так как идеал I инъективен, это отображение φ продолжается до отображения $\psi: A \to I$. Пусть $\psi(1) = z$, тогда $f^{n+r}z = f^r y$. Но это означает, что $\theta(z) = \theta(y)/f^n = x$. Следовательно, отображение θ сюръективно, что и требовалось доказать.

Предложение 3.4. *Пусть I — инъективный модуль над нётеровым кольцом A. Тогда пучок $\tilde{I}$ на $X = \operatorname{Spec} A$ является плоским.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по $Y = (\operatorname{Supp} \tilde{I})^-$. Определение носителя см. в упр. 1.14 гл. II. Если Y состоит из одной точки X, то $\tilde{I}$ будет пучком-небоскребом (упр. 1.17 гл. II), который, очевидно, является плоским.

В общем случае для доказательства плоскости $\tilde{I}$ достаточно показать, что для любого открытого множества $U \subset X$ отображение $\Gamma(X, \tilde{I}) \to \Gamma(U, \tilde{I})$ сюръективно. Если $Y \cap U = \varnothing$, то доказывать нечего. Если $Y \cap U \neq \varnothing$, то можно найти $f \in A$, такой, что открытое множество $X_f = D(f)$ (см. § 2 гл. II) содержится в U и $X_f \cap Y \neq \varnothing$. Положим $Z = X - X_f$ и рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma(X, \tilde{I}) & \to & \Gamma(U, \tilde{I}) & \to & \Gamma(X_f, \tilde{I}) \\
\uparrow\cup & & \uparrow\cup & & \\
\Gamma_Z(X, \tilde{I}) & \to & \Gamma_Z(U, \tilde{I}), & &
\end{array}$$

где Γ_Z обозначает группу сечений с носителями в Z (см. упр. 1.20 гл. II). Пусть $s \in \Gamma(U, \tilde{I})$ — некоторое сечение. Рассмотрим его образ s' в $\Gamma(X_f, \tilde{I})$. Но $\Gamma(X_f, \tilde{I}) = I_f$ по 5.1 гл. II, так что, согласно 3.3, существует элемент $t \in I = \Gamma(X, \tilde{I})$, после ограничения совпадающий с s'. Пусть t' обозначает ограничение t в $\Gamma(U, \tilde{I})$. Тогда $s - t'$ дает 0 в $\Gamma(X_f, \tilde{I})$, поэтому его носитель содержится в Z. Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что отображение $\Gamma_Z(X, \tilde{I}) \to \Gamma_Z(U, \tilde{I})$ сюръективно.

Пусть $J = \Gamma_Z(X, \tilde{I})$ и $\mathfrak{a}$ — идеал, порождённый f. Тогда $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ (см. упр. 5.6 гл. II), стало быть, по 3.2 J тоже является инъективным A-модулем. Более того, носитель J содержится в $Y \cap Z$, что строго меньше, чем Y. Следовательно, по предположению индукции модуль J является плоским. Так как $\Gamma(U, \tilde{J}) = \Gamma_Z(U, \tilde{I})$ (см. упр. 5.6 гл. II), то отсюда следует, что отображение $\Gamma_Z(X, \tilde{I}) \to \Gamma_Z(U, \tilde{I})$ сюръективно, что и требовалось доказать.

Теорема 3.5. *Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — спектр нётерова кольца A. Тогда для всякого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X и любого $i > 0$ имеем $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Доказательство. Пусть задан квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ и $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Выберем некоторую инъективную резольвенту $0 \to M \to I^\cdot$ модуля M в категории A-модулей. Тогда мы получаем некоторую точную последовательность пучков $0 \to \tilde{M} \to \tilde{I}^\cdot$ на X. Но $\mathcal{F} = \tilde{M}$ (см. 5.5 гл. II) и каждый пучок $\tilde{I}^i$ является плоским по 3.4, так что можно воспользоваться этой резольвентой пучка $\mathcal{F}$ для вычисления его когомологий (см. 2.5.1). Применяя функтор Γ, мы снова приходим к точной последовательности A-модулей $0 \to M \to I^\cdot$. Следовательно, $H^0(X, \mathcal{F}) = M$ и $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для всех $i > 0$.

Замечание. Этот результат остается верным и без предположений о нётеровости, но доказательство его более сложное [EGA III, 1.3.1].

Следствие 3.6. *Пусть X — нётерова схема и $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Тогда $\mathcal{F}$ можно вложить в плоский квазикогерентный пучок $\mathcal{G}$ на X.*

Доказательство. Покроем X конечным числом открытых аффинных подмножеств $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, и пусть $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$ для каждого i. Вложим M_i в некоторый инъективный A_i-модуль I_i. Для каждого i пусть $f_i: U_i \to X$ обозначает естественное включение, и пусть $\mathcal{G} = \oplus f_*(\tilde{I}_i)$. Для каждого i мы имеем инъективное отображение пучков $\mathcal{F}|_{U_i} \to \tilde{I}_i$. Следовательно, определено отображение $\mathcal{F} \to f_*(\tilde{I}_i)$. Переходя к прямой сумме по i, получаем отображение $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, которое, очевидно, инъективно. С другой стороны, каждый из пучков $\tilde{I}_i$ является плоским (см. 3.4) и квазикогерентным на U_i. Поэтому пучок $f_*(\widetilde{I}_i)$ тоже плоский (см. упр. 1.16d гл. II) и квазикогерентный (см. 5.8 гл. II). Следовательно, прямая сумма таких пучков $\mathcal{G}$ также является плоским и квазикогерентным пучком.

Теорема 3.7 (Серр [5]). *Пусть X — нётерова схема. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *схема X аффинна;*

(ii) $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ *для всякого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ и всех $i > 0$;*

(iii) $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$ *для всякого квазикогерентного пучка идеалов $\mathcal{J}$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) — это теорема 3.5. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) тривиальна, так что остается доказать только импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Воспользуемся критерием из упр. 2.17 гл. II. Покажем сначала, что X можно покрыть открытыми аффинными подмножествами вида X_f, где $f \in A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Пусть P — замкнутая точка в X и U — ее открытая аффинная окрестность. Положим $Y = X - U$. Тогда имеем следующую точную последовательность:

$$0 \to \mathcal{J}_{Y \cup \{P\}} \to \mathcal{J}_Y \to k(P) \to 0,$$

где $\mathcal{J}_Y$ и $\mathcal{J}_{Y \cup \{P\}}$ — пучки идеалов замкнутых множеств Y и $Y \cup \{P\}$ соответственно. Их факторпучок является пучком-небоскребом $k(P) = \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P$ в точке P. Теперь построим открытые множества X_f. Имеем

$$\Gamma(X, \mathcal{J}_Y) \to \Gamma(X, k(P)) \to H^1(X, \mathcal{J}_{Y \cup \{P\}}) = 0.$$

Следовательно, существует элемент $f \in \Gamma(X, \mathcal{J}_Y)$, принимающий значение 1 в $k(P)$, т. е. $f_P \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_P}$. Так как $\mathcal{J}_Y \subset \mathcal{O}_X$, то f можно рассматривать как элемент из A. По построению $P \in X_f \subset U$. Более того, $X_f = U_{\bar{f}}$, где $\bar{f}$ — образ f в $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, так что открытое множество X_f аффинно.

Таким образом, каждая замкнутая точка обладает открытой аффинной окрестностью вида X_f. В силу квазикомпактности среди них можно выбрать конечное число окрестностей, соответствующих, скажем, $f_1, \ldots, f_r \in A$ и покрывающих все X.

Теперь, согласно упр. 2.17 гл. II, для того, чтобы доказать аффинность X, надо проверить только, что $f_1, \ldots, f_r$ порождают единичный идеал в A. С помощью $f_1, \ldots, f_r$ построим отображение $\alpha\colon \mathcal{O}_X^r \to \mathcal{O}_X$, сопоставляя $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ элемент $\sum f_i a_i$. Так как X_{f_i} покрывают X, то это отображение сюръективно. Обозначая через $\mathcal{F}$ его ядро, получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_X^r \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X \to 0.$$

Построим по $\mathcal{F}$ фильтрацию, полагая

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^r \supset \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^{r-1} \supset \ldots \supset \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X$$

для подходящим образом упорядоченных сомножителей $\mathcal{O}_X$ в $\mathcal{O}_X^r$. Каждый последовательный фактор в этой фильтрации является некоторым когерентным пучком идеалов в $\mathcal{O}_X$. Таким образом, используя предположение (iii) и длинную точную последовательность когомологий, мы поднимемся по ступенькам фильтрации и получим, что $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Но в таком случае отображение $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^r) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ сюръективно, и это означает, что элементы $f_1, \ldots, f_r$ порождают единичный идеал в A, что и требовалось доказать.

Замечание 3.7.1. Эта теорема является аналогом другой теоремы Серра из комплексной аналитической геометрии, которая дает характеризацию пространств Штейна в терминах обращения в нуль когомологий аналитических когерентных пучков.

Упражнения

3.1. Пусть X — нётерова схема. Показать, что X аффинна тогда и только тогда, когда X_{red} (см. упр. 2.3 гл. II) аффинна. [*Указание*. Воспользоваться теоремой 3.7 и для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X рассмотреть фильтрацию $\mathcal{F} \supset \mathcal{N} \cdot \mathcal{F} \supset \mathcal{N}^2 \cdot \mathcal{F} \supset \ldots$, где $\mathcal{N}$ — пучок нильпотентных элементов на X.]

3.2. Пусть X — приведенная нётерова схема. Показать, что она аффинна тогда и только тогда, когда каждая ее неприводимая компонента аффинна.

3.3. Пусть A — нётерово кольцо и $\mathfrak{a}$ — идеал в A.

(a) Показать, что $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\cdot)$ (см. упр. 5.6 гл. II) является точным слева функтором из категории A-модулей в себя. Его правые производные функторы, вычисленные в категории $\mathfrak{Mod}(A)$, будем обозначать через $H^i_{\mathfrak{a}}(\cdot)$.

(b) Пусть теперь $X = \operatorname{Spec} A$ и $Y = V(\mathfrak{a})$. Показать, что для любого A-модуля M имеет место равенство

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) = H^i_Y(X, \widetilde{M}),$$

где $H^i_Y(X, \cdot)$ обозначает когомологии с носителями в Y (упр. 2.3).

(c) Показать, что $\Gamma_{\mathfrak{a}}(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) = H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ для любого i.

3.4. *Когомологическая интерпретация глубины.* Пусть A — кольцо, $\mathfrak{a}$ — идеал в A и M — некоторый A-модуль. Тогда глубина $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M$ — это наибольшая длина M-регулярной последовательности $x_1, \ldots, x_r$, $x_i \in \mathfrak{a}$. Понятие $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M$ обобщает понятие глубины, введенное в § 8 гл. II.

(a) Предположим, что кольцо A нётерово. Показать, что если $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M \geqslant 1$, то $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$; обратное верно, если модуль M конечно порожден. [*Указание*. В случае когда модуль M конечно порожден, оба этих условия эквивалентны потому, что $\mathfrak{a}$ не содержится ни в каком простом идеале, ассоциированном с M.]

(b) Для конечно порожденного M показать по индукции, что для любого $n \geqslant 0$ следующие условия эквивалентны:

(i) $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M \geqslant n$;

(ii) $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ для всех $i < n$.

Подробности и обобщения см. Гротендик [7].

3.5. Пусть X — нётерова схема и P — замкнутая точка в X. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) $\operatorname{depth} \mathcal{O}_P \geqslant 2$;

(ii) пусть U — любая открытая окрестность P в X, тогда всякое сечение пучка $\mathcal{O}_X$ над $U - P$ однозначно продолжается до сечения $\mathcal{O}_X$ над всем U. В силу теоремы 8.22A гл. II это обобщает результат из упр. 3.20 гл. I.

3.6. Пусть X — нётерова схема.

(a) Показать, что пучок $\mathcal{J}$, построенный в доказательстве следствия 3.6, является инъективным объектом в категории $\mathfrak{Qco}(X)$ квазикогерентных пучков на X. Таким образом, $\mathfrak{Qco}(X)$ имеет достаточно много инъективных объектов.

* (b) Показать, что любой инъективный объект в $\mathfrak{Qco}(X)$ является плоским. [*Указание.* Метод доказательства леммы 2.4 здесь *не* работает, потому что $\mathcal{O}_U$ не является, вообще говоря, квазикогерентным пучком на X. Вместо этого воспользоваться упр. 5.15 гл. II и показать, что если $\mathcal{J} \in \mathfrak{Qco}(X)$ инъективен и $U \subset X$ — открытое подмножество, то $\mathcal{J}|_U$ является инъективным объектом в $\mathfrak{Qco}(U)$. Тогда покрыть X открытыми аффинными подмножествами и т. д.]

(c) Вывести отсюда, что когомологии можно вычислять как производные функторы от $\Gamma(X, \cdot)$, рассматриваемого как функтор из $\mathfrak{Qco}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$.

3.7. Пусть A — нётерово кольцо, $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал и $U \subset X$ — открытое множество в $X - V(\mathfrak{a})$.

(a) Для любого A-модуля M установить следующую формулу Делиня:

$$\Gamma(U, \widetilde{M}) \simeq \varinjlim_n \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{a}^n, M).$$

(b) Применить эту формулу для инъективного A-модуля I и дать другое доказательство предложения 3.4.

3.8. Без предположения нётеровости утверждения 3.3 и 3.4 неверны. Пусть $A = k[x_0, x_1, x_2, \ldots]$ с соотношениями вида $x_0^n x_n = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$. Пусть I — инъективный A-модуль, содержащий A. Показать, что отображение $I \to I_{x_0}$ не сюръективно.

§ 4. Когомологии Чеха

В этом параграфе мы определим группы когомологий Чеха для пучков абелевых групп на топологическом пространстве X относительно заданного открытого покрытия этого пространства. После этого будет доказано, что если X — нётерова отделимая схема, пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен и покрытие состоит из открытых аффинных подмножеств, то группы когомологий Чеха совпадают с группами когомологий, определенными в § 2. Значение этого результата заключается в том, что он дает практический способ вычисления когомологий квазикогерентных пучков на схемах.

Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие X. Зафиксируем вполне упорядоченное множество индексов I. Для любого конечного множества индексов $i_0, \ldots, i_p \in I$ пересечение $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ обозначим через $U_{i_0, \ldots, i_p}$.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X. По нему и по покрытию $\mathfrak{U}$ построим комплекс абелевых групп $C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ следующим образом. Для каждого $p \geqslant 0$ положим

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \ldots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_p}).$$

Таким образом, элемент $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ определяется заданием элемента $\alpha_{i_0, \ldots, i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_p})$ для каждого набора из $p+1$ индексов $i_0 < \ldots < i_p$ из I. Определим кограничное отображение $d: C^p \to C^{p+1}$, полагая

$$(d\alpha)_{i_0, \ldots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{p+1}}|_{U_{i_0, \ldots, i_{p+1}}}.$$

Здесь $\hat{i}_k$ означает, что соответствующий индекс i_k пропускается. Так как $\alpha_{i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{p+1}}$ — элемент из $\mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{p+1}})$, то, ограничивая его на $U_{i_0, \ldots, i_{p+1}}$, получаем элемент из $\mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_{p+1}})$. Легко проверяется, что $d^2 = 0$, следовательно, мы в самом деле построили комплекс абелевых групп.

Замечание 4.0.1. Элемент $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ иногда удобно обозначать символом $\alpha_{i_0, \ldots, i_p}$, определенным для *всех* наборов по $p+1$ элементов из I. Если при этом встречаются повторяющиеся индексы, то полагаем $\alpha_{i_0, \ldots, i_p} = 0$. Если все индексы различны, то полагаем $\alpha_{i_0, \ldots, i_p} = (-1)^{\operatorname{sign} \sigma} \alpha_{\sigma i_0, \ldots, \sigma i_p}$, где σ — подстановка, такая, что $\sigma i_0 < \ldots < \sigma i_p$. При этих соглашениях можно проверить, что написанная выше формула для $d\alpha$ остается корректно определенной для любых наборов по $p+2$ индексов из I.

Определение. Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие X. Для любого пучка абелевых групп $\mathcal{F}$ на X определим *p-ю группу когомологий Чеха* этого пучка относительно покрытия $\mathfrak{U}$, полагая

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^p(C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})).$$

Предостережение 4.0.2. При фиксированных X и $\mathfrak{U}$ если $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — короткая точная последовательность пучков абелевых групп на X, то мы, вообще говоря, *не* получаем длинной точной последовательности групп когомологий Чеха. Иначе говоря, функторы $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \cdot)$ не образуют δ-функтор в смысле § 1. Например, если $\mathfrak{U}$ состоит из единственного открытого множества X, то это следует из того, что функтор глобальных сечений $\Gamma(X, \cdot)$ не является, вообще говоря, точным.

Пример 4.0.3. Этот и следующий примеры иллюстрируют, насколько удобны когомологии Чеха для вычислений. Пусть $X = \mathbf{P}_k^1$, $\mathscr{F}$ — пучок дифференциалов Ω на X (см. § 8 гл. II) и $\mathfrak{U}$ состоит из двух открытых множеств: $U = \mathbf{A}^1$ с аффинной координатой x и $V = \mathbf{A}^1$ с аффинной координатой $y = 1/x$. Комплекс Чеха в этом случае состоит только из двух членов:

$$C^0 = \Gamma(U, \Omega) \times \Gamma(V, \Omega),$$
$$C^1 = \Gamma(U \cap V, \Omega).$$

Далее

$$\Gamma(U, \Omega) = k[x]\,dx,$$
$$\Gamma(V, \Omega) = k[y]\,dy,$$
$$\Gamma(U \cap V, \Omega) = k\left[x, \frac{1}{x}\right] dx,$$

и отображение $d\colon C^0 \to C^1$ задается формулами

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto \frac{1}{x}, \quad dy \mapsto -\frac{1}{x^2}\,dx,$$

так что $\ker d$ состоит из пар $\langle f(x)\,dx, g(y)\,dy\rangle$, таких, что

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}\, g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Это условие выполняется только если $f = g = 0$, поскольку слева стоит многочлен от x, а справа — многочлен от $1/x$ без свободного члена. Следовательно, $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \Omega) = 0$.

Для того чтобы вычислить H^1, заметим, что образ d состоит из всевозможных выражений вида

$$\left(f(x) + \frac{1}{x^2}\, g\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx,$$

где f и g — многочлены. Это векторное подпространство в $k[x, 1/x]\,dx$, порожденное всеми дифференциалами $x^n\,dx$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$. Следовательно, $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \Omega) \simeq k$ и порождено образом элемента $x^{-1}dx$.

Пример 4.0.4. Пусть S^1 — окружность (с обычной топологией), $\mathbf{Z}$ — постоянный пучок целых чисел на S^1 и $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие, состоящее из двух связных открытых полуокружностей U и V, которые частично перекрываются, так что $U \cap V$ состоит из двух маленьких интервалов. Тогда

$$C^0 = \Gamma(U, \mathbf{Z}) \times \Gamma(V, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z},$$
$$C^1 = \Gamma(U \cap V, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z},$$

и отображение $d\colon C^0 \to C^1$ имеет вид $\langle a, b\rangle \mapsto \langle b - a, b - a\rangle$. Следовательно, $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ и $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Поскольку мы знаем, что ответ правильный (см. упр. 2.7), то этот пример служит иллюстрацией общего принципа, что когомологии Чеха совпадают с обычными когомологиями при условии, что выбираемое открытое покрытие является достаточно тонким для того, чтобы каждый из элементов покрытия не имел собственных когомологий (упр. 4.11)

Изучим теперь некоторые свойства когомологий Чеха.

Лемма 4.1. *Пусть X, $\mathfrak{U}$ и $\mathscr{F}$ такие же, как и выше, Тогда $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \simeq \Gamma(X, \mathscr{F})$.*

Доказательство. По определению $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = \ker(d\colon C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}))$. Пусть $\alpha \in C^0$ задан набором сечений $\{\alpha_i \in \mathscr{F}(U_i)\}$, тогда для каждого $i < j$ имеем $(d\alpha)_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$. Поэтому условие $d\alpha = 0$ означает, что сечения α_i и α_j совпадают на $U_i \cap U_j$. Утверждение вытекает теперь из аксиом пучка.

Ниже мы определяем пучковый вариант комплекса Чеха. Для любого открытого множества $V \subset X$ пусть $f\colon V \to X$ обозначает отображение вложения, и пусть X, $\mathfrak{U}$, $\mathscr{F}$ такие же, как и выше. Построим комплекс $\mathscr{C}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ пучков на X следующим образом. Для каждого $p \geqslant 0$ положим

$$\mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i_0 < \ldots < i_p} f_*(\mathscr{F}|_{U_{i_0, \ldots, i_p}})$$

и определим кограничное отображение $d\colon \mathscr{C}^p \to \mathscr{C}^{p+1}$ той же формулой, что и выше. Отметим, что по построению $\Gamma(X, \mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})) = C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ для каждого p.

Лемма 4.2. *Для любого пучка абелевых групп $\mathscr{F}$ на X комплекс $\mathscr{C}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ является резольвентой для $\mathscr{F}$, т. е. существует естественное отображение $\varepsilon\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0$, такое, что последовательность пучков*

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathscr{C}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \ldots$$

точна.

Доказательство. Определим $\varepsilon\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0$ как произведение естественных отображений $\mathscr{F} \to f_*(\mathscr{F}|_{U_i})$ по всем $i \in I$.

Тогда точность в первом члене следует из аксиом пучка, примененных к $\mathscr{F}$.

Для доказательства точности комплекса $\mathscr{C}^{\cdot}$ при $p \geqslant 1$ достаточно проверить ее послойно. Итак, пусть $x \in X$ и, скажем, $x \in U_j$. Для каждого $p \geqslant 1$ определим отображение

$$k\colon\ \mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})_x \to \mathscr{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})_x$$

следующим образом. Пусть $\alpha_x \in \mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})_x$. Тогда он представлен сечением $\alpha \in \Gamma(V, \mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}))$ над некоторой окрестностью $V \ni x$, которую можно взять настолько малой, чтобы $V \subset U_j$. Для любого набора из p индексов $i_0 < \ldots < i_{p-1}$ положим

$$(k\alpha)_{i_0, \ldots, i_{p-1}} = \alpha_{j, i_0, \ldots, i_{p-1}},$$

пользуясь принятыми в 4.0.1 соглашениями об обозначениях. Это имеет смысл, потому что $V \cap U_{i_0, \ldots, i_{p-1}} = V \cap U_{j, i_0, \ldots, i_{p-1}}$. Взяв теперь росток сечения $k\alpha$ в точке x, мы получаем требуемое отображение k. Проверяется, что для любых $p \geqslant 1$, $\alpha \in \mathscr{C}^p_x$ имеет место соотношение

$$(dk + kd)(\alpha) = \alpha.$$

Таким образом, k является оператором гомотопии для комплекса $\mathscr{C}^{\cdot}_x$, устанавливающим гомотопность тождественного отображения нулевому. Из этого вытекает (см. § 1), что группы когомологий $h^p(\mathscr{C}^{\cdot}_x)$ тривиальны при $p \geqslant 1$.

Предложение 4.3. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие и $\mathscr{F}$ — плоский пучок абелевых групп на X. Тогда $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ для всех $p > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим резольвенту $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, определенную в 4.2. Так как пучок $\mathscr{F}$ плоский, то пучки $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ тоже являются плоскими для каждого $p \geqslant 0$. Действительно, для любого набора индексов $i_0, \ldots, i_p$ пучок $\mathscr{F}|_{U_{i_0, \ldots, i_p}}$ является плоским на $U_{i_0, \ldots, i_p}$, отображение f_* сохраняет плоскость (см. упр. 1.16 гл. II) и произведение плоских пучков является плоским. Согласно 2.5.1, с помощью этой резольвенты мы можем вычислить обычные группы когомологий пучка $\mathscr{F}$. Но поскольку $\mathscr{F}$ плоский, то по 2.5 $H^p(X, \mathscr{F}) = 0$ при $p > 0$. С другой стороны, ответ, полученный с помощью этой резольвенты, имеет вид

$$h^p(\Gamma(X, \mathscr{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}))) = \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}).$$

Отсюда получаем, что $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ при $p > 0$.

Лемма 4.4. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие X. Тогда для каждого $p \geqslant 0$ существует следующее естественное отображение, функториальное по $\mathscr{F}$:*

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^p(X, \mathscr{F}).$$

Доказательство. Пусть $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}^{\cdot}$ — инъективная резольвента пучка $\mathscr{F}$ в категории $\mathfrak{Ab}(X)$. Сравним ее с резольвентой $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ из леммы 4.2. Из общих результатов о комплексах (см. Хилтон и Штаммбах [1, IV, 4.4]) следует, что существует морфизм комплексов $\mathscr{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathscr{I}^{\cdot}$, индуцирующий тождественное отображение на $\mathscr{F}$ и единственный с точностью до гомотопии. Применяя функторы $\Gamma(X, \cdot)$ и h^p, получаем требуемое отображение.

Теорема 4.5. *Пусть X — нётерова отделимая схема, $\mathfrak{U}$ — открытое аффинное покрытие X и $\mathscr{F}$ — любой квазикогерентный пучок на X. Тогда для всякого $p \geqslant 0$ естественное отображение из 4.4 является изоморфизмом,*

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathscr{F}).$$

Доказательство. При $p = 0$ это изоморфизм по лемме 4.1. В общем случае вложим $\mathscr{F}$ в плоский квазикогерентный пучок $\mathscr{G}$ (см. 3.6), обозначим через $\mathscr{R}$ соответствующий фактор-пучок и получим точную последовательность

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{R} \to 0.$$

Для каждого набора индексов $i_0 < \ldots < i_p$ открытое множество $U_{i_0, \ldots, i_p}$ аффинно, так как оно является пересечением аффинных открытых подмножеств отделимой схемы (см. упр. 4.3 гл. II). Поскольку пучок $\mathscr{F}$ квазикогерентен, то мы имеем следующую точную последовательность абелевых групп:

$$0 \to \mathscr{F}(U_{i_0, \ldots, i_p}) \to \mathscr{G}(U_{i_0, \ldots, i_p}) \to \mathscr{R}(U_{i_0, \ldots, i_p}) \to 0$$

(см. 3.5 или 5.6 гл. II). Переходя к произведениям, получаем, что соответствующая последовательность комплексов Чеха

$$0 \to C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{R}) \to 0$$

также точна. Поэтому существует длинная точная последовательность групп когомологий Чеха. Так как пучок $\mathscr{G}$ плоский, то его когомологии Чеха обращаются в нуль при $p > 0$ (см. 4.3), так что мы имеем точную последовательность

$$0 \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{R}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to 0$$

и изоморфизмы

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{R}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$$

для всех $p \geqslant 1$. Теперь сравним это с длинной точной последовательностью обычных когомологий для предыдущей короткой точной последовательности, используя случай $p = 0$ и предложение 2.5. В итоге мы получаем, что естественное отображение

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{F})$$

является изоморфизмом. Но так как пучок $\mathscr{R}$ также квазикогерентен (см. 5.7 гл. II), то по индукции мы получаем изоморфизм и для всех p.

Упражнения

4.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — аффинный морфизм нётеровых отделимых схем (упр. 5.17 гл. II). Показать, что для любого квазикогерентного пучка $\mathscr{F}$ на X существуют естественные изоморфизмы

$$H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^i(Y, f_*\mathscr{F})$$

для всех $i \geqslant 0$. [*Указание.* Воспользоваться предложением 5.8 гл. II.]

4.2. Доказать следующую теорему Шевалле: пусть $f\colon X \to Y$ — конечный сюръективный морфизм нётеровых отделимых схем, тогда если X аффинна, то и Y аффинна.

(a) Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный сюръективный морфизм целых нётеровых схем. Показать, что существует когерентный пучок $\mathscr{M}$ на X и морфизм пучков $\alpha\colon \mathscr{O}_Y^r \to f_*\mathscr{M}$ для некоторого $r > 0$, такие, что α является изоморфизмом в общей точке Y.

(b) Показать, что для любого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на Y существует когерентный пучок $\mathscr{G}$ на X и морфизм $\beta\colon \mathscr{F}^r \to f_*\mathscr{G}$, являющийся изоморфизмом в общей точке Y. [*Указание.* Применить к α функтор $\mathscr{H}om(\cdot, \mathscr{F})$ и воспользоваться упр. 5.17(e) гл. II.]

(c) Теперь доказать теорему Шевалле. Воспользоваться сначала упр. 3.1 и упр. 3.2 для того, чтобы свести задачу к случаю, когда схемы X и Y целы. Затем воспользоваться теоремой 3.7, упр. 4.1, рассмотреть $\ker \beta$ и $\operatorname{coker} \beta$ и применить индукцию по Y.

4.3. Пусть $X = \mathbf{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$ и $U = X - \{(0, 0)\}$. Используя подходящее покрытие U открытыми аффинными подмножествами, показать, что $H^1(U, \mathscr{O}_U)$ изоморфно векторному пространству над k, порожденному $\{x^i y^j \mid i, j < 0\}$. В частности, оно бесконечномерно. (В силу 3.5 это дает другое доказательство того, что U не является афинным,— ср. упр. 3.6 гл. I).

4.4. На произвольном топологическом пространстве X при произвольном пучке абелевых групп $\mathscr{F}$ когомологии Чеха могут отличаться от когомологий как производных функторов. Однако здесь мы покажем, что для H^1 изоморфизм будет существовать, если перейти к пределу по всем покрытиям.

(a) Пусть $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие топологического пространства X. *Утончением* $\mathfrak{U}$ называется покрытие $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ вместе с отображением множества индексов $\lambda\colon J \to I$, такое, что для каждого $j \in J$ имеем $V_j \subset U_{\lambda(j)}$. Показать, что если $\mathfrak{V}$ — утончение $\mathfrak{U}$, то существует естественное индуцированное отображение на когомологиях Чеха

$$\lambda^i\colon \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \check{H}^i(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$$

для любого пучка абелевых групп $\mathscr{F}$ и любого $i \geqslant 0$. Покрытия пространства X образуют частично упорядоченное множество относительно утончения, так что можно рассматривать пределы когомологий Чеха

$$\varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}).$$

(b) Показать, что для любого пучка абелевых групп $\mathscr{F}$ на X естественное отображение из леммы 4.4

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^i(X, \mathscr{F})$$

для любого покрытия $\mathfrak{U}$ совместимо с отображением утончения покрытия.

(c) Доказать теперь следующую теорему. Пусть X — топологическое пространство и $\mathscr{F}$ — пучок абелевых групп на нем. Тогда естественное отображение

$$\varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{F})$$

является изоморфизмом. [*Указание.* Вложить $\mathscr{F}$ в плоский пучок $\mathscr{G}$, и пусть $\mathscr{R} = \mathscr{G}/\mathscr{F}$, так что получится точная последовательность

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{R} \to 0.$$

Определить комплекс $D^\bullet(\mathfrak{U})$ из точной последовательности

$$0 \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to D^\bullet(\mathfrak{U}) \to 0.$$

Затем воспользоваться точной когомологической последовательностью для этой короткой точной последовательности комплексов, а также естественным отображением комплексов

$$D^\bullet(\mathfrak{U}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{R}).$$

Исследовать, что происходит при утончении покрытия $\mathfrak{U}$.]

4.5. Для любого окольцованного пространства $(X, \mathscr{O}_X)$ пусть $\operatorname{Pic} X$ обозначает группу классов изоморфных обратимых пучков (см. § 6 гл. II). Показать, что $\operatorname{Pic} X \simeq H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$, где $\mathscr{O}_X^*$ обозначает пучок, сечения которого над открытым множеством U являются обратимыми элементами кольца $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ с умножением в качестве групповой операции. [*Указание.* Для любого обратимого пучка $\mathscr{L}$ на X покрыть X открытыми множествами U_i, на которых $\mathscr{L}$ свободен, и зафиксировать изоморфизмы $\varphi_i\colon \mathscr{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}|_{U_i}$. Тогда на $U_i \cap U_j$ возникает изоморфизм $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ пучка $\mathscr{O}_{U_i \cap U_j}$ в себе. Эти изоморфизмы дают элемент в $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_X^*)$. Далее воспользоваться упр. 4.4.]

4.6. Пусть $(X, \mathscr{O}_X)$ — окольцованное пространство, $\mathscr{J}$ — пучок идеалов на X с $\mathscr{J}^2 = 0$ и X_0 — окольцованное пространство вида $(X, \mathscr{O}_X/\mathscr{J})$. Показать, что существует следующая точная последовательность пучков абелевых групп на X:

$$0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{O}_X^* \to \mathscr{O}_{X_0}^* \to 0,$$

где $\mathscr{O}_X^*$ (соответственно $\mathscr{O}_{X_0}^*$) обозначает пучок (мультипликативных) групп обратимых элементов пучка колец $\mathscr{O}_X$ (соответственно $\mathscr{O}_{X_0}$).

19—01390

Отображение $\mathcal{J} \to \mathcal{O}_X^*$ определяется формулой $a \mapsto 1 + a$ и $\mathcal{J}$ рассматривается, как обычно, с аддитивной групповой структурой. Вывести отсюда, что существует точная последовательность абелевых групп

$$\ldots \to H^1(X, \mathcal{J}) \to \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} X_0 \to H^2(X, \mathcal{J}) \to \ldots .$$

4.7. Пусть X — подсхема в $\mathbf{P}_k^2$, определенная одним однородным уравнением $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ степени d (f не предполагается неприводимым). Предположим, что точка $(1, 0, 0)$ не лежит на X. Показать, что тогда X можно покрыть двумя открытыми аффинными подмножествами $U = X \cap \{x_1 \neq 0\}$ и $V = X \cap \{x_2 \neq 0\}$. Вычислить теперь комплекс Чеха

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \oplus \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X)$$

явно и показать, что

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1, \ \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

4.8. *Когомологическая размерность* (Хартсхорн [3]). Пусть X — нетёрова отделимая схема. Определим *когомологическую размерность* X, обозначаемую через $\operatorname{cd}(X)$, как наименьшее целое число n, такое, что $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для всякого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ и любого $i > n$. Так, например, теорема Серра 3.7 утверждает, что $\operatorname{cd}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда схема X аффинна. Из теоремы Гротендика 2.7 следует, что $\operatorname{cd}(X) \leqslant \dim X$.

(a) Показать, что в определении $\operatorname{cd}(X)$ достаточно ограничиться только когерентными пучками на X. Воспользоваться упр. 5.15 гл. II и предложением 2.9.

(b) Показать, что в случае, когда X квазипроективно над полем k, достаточно ограничиться только локально свободными когерентными пучками на X. Воспользоваться упр. 5.18 гл. II.

(c) Предположим, что X покрывается $r + 1$ открытыми аффинными подмножествами. Используя когомологии Чеха, показать, что $\operatorname{cd}(X) \leqslant r$.

*(d) Если X — квазипроективное многообразие размерности r над полем k, то оно может быть покрыто $r + 1$ открытыми аффинными подмножествами. Вывести отсюда (независимо от 2.7), что $\operatorname{cd}(X) \leqslant \dim X$.

(e) Пусть Y — теоретико-множественное полное пересечение (см. упр. 2.17 гл. II) коразмерности r в $X = \mathbf{P}_k^n$. Показать, что $\operatorname{cd}(X - Y) \leqslant r - 1$.

4.9. Пусть $X = \operatorname{Spec} k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ — аффинное четырехмерное пространство над полем k, Y_1 — плоскость $x_1 = x_2 = 0$ и Y_2 — плоскость $x_3 = x_4 = 0$. Показать, что $Y = Y_1 \cup Y_2$ не является теоретико-множественным полным пересечением в X. Следовательно, проективное замыкание $\overline{Y}$ в $\mathbf{P}_k^4$ также не является теоретико-множественным полным пересечением. [*Указание*. Воспользоваться аффинным аналогом упр. 4.8(e). Затем показать, что $H^2(X - Y, \mathcal{O}_X) \neq 0$, используя упр. 2.3 и 2.4. По аналогии с упр. 4.3 показать, что если $P = Y_1 \cap Y_2$, то $H^3(X - P, \mathcal{O}_X) \neq 0$.]

***4.10.** Пусть X — неособое многообразие над алгебраически замкнутым полем k и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Показать, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством инфинитезимальных расширений X при помощи $\mathcal{F}$ (упр. 8.7 гл. II) с точностью до изоморфизма и группой $H^1(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{T})$, где $\mathcal{T}$ — касательный пучок на X (см. § 8 гл. II). [*Указание*. Воспользоваться упр. 8.6 гл. II и теоремой 4.5.]

4.11. Цель этого упражнения — показать, что когомологии Чеха будут совпадать с обычными, если только пучок не имеет когомологий ни на каком из пересечений открытых подмножеств покрытия. Точнее, пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп и $\mathfrak{U} = (U_i)$ — открытое покрытие X. Предположим, что для всякого конечного пересечения $V = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ открытых множеств покрытия и для любого $k > 0$ имеет место равенство $H^k(V, \mathcal{F}|_V) = 0$. Доказать, что тогда для каждого $p \geqslant 0$ естественное отображение из 4.4

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$$

является изоморфизмом. Показать также, что из этого более общего результата теорема 4.5 может быть получена в качестве следствия.

§ 5. Когомологии проективного пространства

В этом параграфе явно вычисляются когомологии пучков $\mathcal{O}(n)$ на проективном пространстве с помощью когомологий Чеха для подходящего открытого аффинного покрытия. Эти явные вычисления служат основой для получения различных общих результатов о когомологиях когерентных пучков на проективных многообразиях.

Пусть A — нётерово кольцо, $S = A[x_0, \ldots, x_r]$ и $X = \operatorname{Proj} S$ — проективное пространство $\mathbf{P}_A^r$ над A. Пусть $\mathcal{O}_X(1)$ обозначает подкручивающий пучок Серра (§ 5 гл. II). Для любого пучка $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ обозначим через $\Gamma_*(\mathcal{F})$ градуированный S-модуль $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ (см. § 5 гл. II).

Теорема 5.1. *Пусть A — нётерово кольцо и $X = \mathbf{P}_A^r$, $r \geqslant 1$. Тогда*

(a) *естественное отображение $S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ является изоморфизмом градуированных S-модулей;*

(b) *$H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ при $0 < i < r$ и для всех $n \in \mathbf{Z}$;*

(c) *$H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) = A$;*

(d) *естественное отображение*

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \to H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \simeq A$$

является совершенным спариванием конечно порожденных свободных A-модулей для любого $n \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_X(n)$. Так как когомологии перестановочны с взятием произвольных прямых сумм на нётеровом топологическом пространстве (см. 2.9.1), то когомологии пучка $\mathcal{F}$ представляются в виде суммы когомологий пучков $\mathcal{O}(n)$, так что можно вычислять когомологии пучка $\mathcal{F}$, не заботясь о градуировке по n, которую всегда можно восстановить в конце. Отметим, что все группы когомологий здесь обладают естественной структурой A-модулей (см. 2.6.1).

Для каждого $i = 0, \ldots, r$ пусть U_i обозначает открытое множество вида $D_+(x_i)$. Тогда U_i является открытым аффинным подмножеством в X и все U_i покрывают X, так что можно вычислять когомологии $\mathscr{F}$ как когомологии Чеха этого покрытия $\mathfrak{U} = (U_i)$ (см. 4.5). Для любого множества индексов $i_0, \ldots, i_p$ открытое множество $U_{i_0}, \ldots{}_{i_p}$ —это в точности $D_+(x_{i_0} \ldots x_{i_p})$, поэтому, согласно 5.11 гл. II, мы имеем изоморфизм

$$\mathscr{F}(U_{i_0}, \ldots, {}_{i_p}) \simeq S_{x_{i_0} \ldots x_{i_p}},$$

где справа стоит локализация S относительно элемента $x_{i_0} \ldots x_{i_p}$. Более того, при этом изоморфизме градуировка на $\mathscr{F}$ соответствует естественной градуировке на $S_{x_{i_0} \ldots x_{i_p}}$. Таким образом, комплекс Чеха имеет вид

$$C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}): \prod S_{x_{i_0}} \to \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}} \to \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}x_{i_2}} \to \ldots \to S_{x_0 \ldots x_r},$$

причем все входящие в него модули обладают естественной градуировкой, согласованной с градуировкой $\mathscr{F}$.

Ядро первого отображения — это $H^0(X, \mathscr{F})$, которое, как мы уже видели (5.13 гл. II), изоморфно S, что доказывает утверждение (a).

Теперь вычислим $H^r(X, \mathscr{F})$. Это — коядро последнего отображения в комплексе Чеха

$$d^{r-1}: \prod_k S_{x_0 \ldots \hat{x}_k \ldots x_r} \to S_{x_0 \ldots x_r}.$$

$S_{x_0 \ldots x_r}$ можно представлять себе как свободный A-модуль с базисом $x_0^{l_0} \ldots x_r^{l_r}$, где $l_i \in \mathbf{Z}$. Образ отображения d^{r-1} является свободным подмодулем, порожденным такими базисными элементами, для которых по крайней мере одно из $l_i \geqslant 0$. Следовательно, $H^r(X, \mathscr{F})$ — это свободный A-модуль с базисом, состоящим из всех «отрицательных» одночленов $\{x_0^{l_0} \ldots x_r^{l_r} \mid l_i < 0$ для каждого $i\}$. Градуировка на нем задается суммой показателей $\sum l_i$. Существует только один такой одночлен степени $-r-1$, а именно $x_0^{-1} \ldots x_r^{-1}$, так что $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$ является свободным A-модулем ранга 1. Это доказывает утверждение (c).

Для доказательства (d) заметим прежде всего, что если $n < 0$, то $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ по утверждению (a), и $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) = 0$, так как не существует отрицательных одночленов такой степени. Поэтому для $n < 0$ утверждение (d) тривиально. При $n \geqslant 0$ модуль $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ имеет базис, состоящий из обычных одночленов степени n, т. е. $\{x_0^{m_0} \ldots x_r^{m_r} \mid m_i \geqslant 0$ и $\sum m_i = n\}$. Естественное спаривание его с $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$ в $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$ задается умножением

$$(x_0^{m_0} \ldots x_r^{m_r}) \cdot (x_0^{l_0} \ldots x_r^{l_r}) = x_0^{m_0+l_0} \ldots x_r^{m_r+l_r},$$

где $\sum l_i = -n-r-1$ и член справа считается равным 0, если хотя бы один из показателей $m_i + l_i$ становится больше либо равным нулю. Очевидно, что мы имеем совершенное спаривание, в котором одночлены $x_0^{-m_0-1} \ldots x_r^{-m_r-1}$ образуют двойственный базис к базису $x_0^{m_0} \ldots x_r^{m_r}$.

Остается доказать утверждение (b), которое мы будем доказывать с помощью индукции по r. Если $r = 1$, то доказывать нечего, так что будем считать $r > 1$. Локализуем комплекс $C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ относительно x_r как комплекс градуированных S-модулей, в результате мы получим комплекс Чеха для пучка $\mathscr{F}|_{U_r}$ на пространстве U_r относительно покрытия $\{U_i \cap U_r\}_{i=0, \ldots, r}$. Согласно 4.5, этот комплекс приводит к когомологиям пучка $\mathscr{F}|_{U_r}$ на U_r, которые обращаются в нуль для всех $i > 0$ (см. 3.5). Так как локализация является точным функтором, то мы получаем отсюда, что $H^i(X, \mathscr{F})_{x_r} = 0$ при $i > 0$. Иначе говоря, любой элемент из $H^i(X, \mathscr{F})$ при $i > 0$ аннулируется умножением на некоторую степень элемента x_r.

Для завершения доказательства утверждения (b) покажем, что для $0 < i < r$ умножение на x_r индуцирует биективное отображение $H^i(X, \mathscr{F})$ в себя. Тогда из этого будет следовать, что модуль $H^i(X, \mathscr{F})$ нулевой.

Рассмотрим точную последовательность градуированных S-модулей

$$0 \to S(-1) \xrightarrow{x_r} S \to S/(x_r) \to 0.$$

Она порождает точную последовательность пучков на X

$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_H \to 0,$$

где H — гиперплоскость $x_r = 0$. Подкручивая ее на все $n \in \mathbf{Z}$ и беря прямую сумму, мы получаем точную последовательность

$$0 \to \mathscr{F}(-1) \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_H \to 0,$$

где $\mathscr{F}_H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_H(n)$. Переходя к когомологиям, получаем следующую длинную точную последовательность:

$$\ldots \to H^i(X, \mathscr{F}(-1)) \to H^i(X, \mathscr{F}) \to H^i(X, \mathscr{F}_H) \to \ldots.$$

Как градуированный S-модуль $H^i(X, \mathscr{F}(-1))$ — это в точности модуль $H^i(X, \mathscr{F})$, сдвинутый на единицу влево, и отображение $H^i(X, \mathscr{F}(-1)) \to H^i(X, \mathscr{F})$ в точной последовательности — это умножение на x_r.

Далее гиперплоскость H изоморфна $\mathbf{P}_A^{r-1}$ и $H^i(X, \mathscr{F}_H) = H^i(H, \oplus \mathcal{O}_H(n))$ (см. 2.10). По предположению индукции, примененному к $\mathscr{F}_H$, имеем $H^i(X, \mathscr{F}_H) = 0$ для $0 < i < r-1$. Более того, при $i=0$ мы по утверждению (а) получаем точную последовательность

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}(-1)) \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}_H) \to 0,$$

так как $H^0(X, \mathscr{F}_H)$ — это в точности $S/(x_r)$. В другом конце мы имеем точную последовательность

$$0 \to H^{r-1}(X, \mathscr{F}_H) \xrightarrow{\delta} H^r(X, \mathscr{F}(-1)) \xrightarrow{x_r} H^r(X, \mathscr{F}) \to 0.$$

Действительно, как мы установили, $H^r(X, \mathscr{F})$ является свободным A-модулем с базисом, состоящим из всех отрицательных одночленов $x_0^{l_0} \ldots x_r^{l_r}$. Поэтому очевидно, что отображение x_r сюръективно. С другой стороны, ядром отображения x_r является свободный подмодуль, порожденный такими отрицательными одночленами $x_0^{l_0} \ldots x_r^{l_r}$, для которых $l_r = -1$. Поскольку $H^{r-1}(X, \mathscr{F}_H)$ является свободным A-модулем с базисом, состоящим из отрицательных одночленов от $x_0, \ldots, x_{r-1}$, и δ есть деление на x_r, то предыдущая последовательность точна. В частности, отображение δ инъективно. Объединяя полученные факты вместе, из длинной точной последовательности когомологий получаем, что отображение умножения на x_r: $H^i(X, \mathscr{F}(-1)) \to H^i(X, \mathscr{F})$ биективно при $0 < i < r$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.2 (Серр [3]). *Пусть X — проективная схема над нётеровым кольцом A и $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильный обратимый пучок на X над* Spec A. *Пусть $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Тогда*

(а) $H^i(X, \mathscr{F})$ *является конечно порожденным A-модулем для любого $i \geqslant 0$;*

(b) *существует целое число n_0, зависящее от $\mathscr{F}$, такое, что $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ для всякого $i > 0$ и любого $n \geqslant n_0$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильный пучок на X над Spec A, то существует замкнутое вложение $i: X \to \mathbf{P}_A^r$ схем над A для некоторого r, такое, что $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(1)$; ср. 5.16.1 гл. II. Если пучок $\mathscr{F}$ когерентен на X, то $i_*\mathscr{F}$ когерентен на $\mathbf{P}_A^r$ и их когомологии одинаковы (см. упр. 5.5 гл. II и лемму 2.10). Следовательно, все сводится к случаю $X = \mathbf{P}_A^r$.

В этом случае заметим, что утверждения (а) и (b) справедливы для любого пучка вида $\mathcal{O}_X(q)$, $q \in \mathbf{Z}$. Это непосредственно следует из явных вычислений (5.1). Стало быть, они справедливы и для любых конечных прямых сумм таких пучков.

Для того чтобы доказать теорему для произвольных когерентных пучков, воспользуемся убывающей индукцией по i. Для $i > r$ имеем $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$, поскольку X можно покрыть

$r+1$ открытыми аффинными множествами (упр. 4.8), так что в этом случае утверждения тривиально верны.

В общем случае пучок $\mathscr{F}$ на X можно представить как фактор-пучок пучка $\mathscr{E}$, являющегося конечной прямой суммой пучков $\mathcal{O}_X(q_i)$ для некоторых целых q_i (см. упр. 5.18 гл. II). Пусть $\mathscr{R}$ — его ядро, т. е. точна последовательность

$$0 \to \mathscr{R} \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0.$$

Тогда пучок $\mathscr{R}$ также когерентен, и мы получаем следующую точную последовательность A-модулей:

$$\ldots \to H^i(X, \mathscr{E}) \to H^i(X, \mathscr{F}) \to H^{i+1}(X, \mathscr{R}) \to \ldots.$$

Здесь модуль слева конечно порожден, потому что $\mathscr{E}$ является прямой суммой пучков $\mathcal{O}(q_i)$, как было отмечено выше. Модуль, стоящий справа, конечно порожден по предположению индукции. Поскольку кольцо A нётерово, то мы заключаем отсюда, что и средний модуль также конечно порожден. Это доказывает утверждение (а).

Для доказательства (b) подкрутим на n предыдущую точную последовательность пучков и выпишем опять кусок соответствующей когомологической последовательности:

$$\ldots \to H^i(X, \mathscr{E}(n)) \to H^i(X, \mathscr{F}(n)) \to H^{i+1}(X, \mathscr{R}(n)) \to \ldots.$$

Для $n \gg 0$ модуль слева здесь обращается в нуль, потому что $\mathscr{E}$ — прямая сумма пучков $\mathcal{O}(q_i)$. Модуль справа при $n \gg 0$ равен нулю по предположению индукции. Следовательно, $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ для всех $n \gg 0$. Отметим, что поскольку в утверждении (b) участвует только конечное число значений i, а именно $0 < i \leqslant r$, то число n_0 достаточно найти для каждого i в отдельности. Это доказывает утверждение (b), а вместе с ним и всю теорему.

Замечание 5.2.1. В качестве частного случая утверждения (а) получаем, что для любого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X модуль $\Gamma(X, \mathscr{F})$ конечно порожден над A. Это — обобщение и в то же время другое доказательство утверждения 5.19 гл. II.

Как приложение этих результатов, получим следующий когомологический критерий обильности обратимого пучка (§ 7 гл. II).

Предложение 5.3. *Пусть A — нётерово кольцо и X — собственная схема над* Spec A, *а $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *пучок $\mathscr{L}$ обилен;*

(ii) *для каждого когерентного пучка* $\mathcal{F}$ *на* X *существует целое число* n_0, *зависящее от* $\mathcal{F}$, *такое, что для каждого* $i > 0$ *и всякого* $n \geqslant n_0$ *имеем* $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\mathcal{L}$ обилен на X, тогда $\mathcal{L}^n$ очень обилен на X над Spec A для некоторого $m > 0$ (см. 7.6 гл. II). Так как схема X собственна над Spec A, то она обязательно проективна (5.16.1 гл. II). Применим теорему 5.2 к каждому из пучков $\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^2, \ldots, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{m-1}$, в результате получим утверждение (ii). Ср. 7.5 гл. II, где используется аналогичный способ доказательства.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Для доказательства обильности $\mathcal{L}$ покажем, что для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существует целое n_0, такое, что пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ порождается своими глобальными сечениями при $n \geqslant n_0$. Это и есть определение обильности обратимого пучка (см. § 7 гл. II).

Для заданного $\mathcal{F}$ пусть P — замкнутая точка X и $\mathcal{I}_P$ — пучок идеалов замкнутого подмножества $\{P\}$. Тогда имеет место следующая точная последовательность пучков:

$$0 \to \mathcal{I}_P\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes k(P) \to 0,$$

где $k(P)$ — пучок-небоскреб $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_P$. Умножая ее тензорно на $\mathcal{L}^n$, получаем точную последовательность вида

$$0 \to \mathcal{I}_P\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n \otimes k(P) \to 0.$$

По нашему предположению (ii) существует такое n_0, что $H^1(X, \mathcal{I}_P\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ для всех $n \geqslant n_0$. Следовательно, отображение

$$\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) \to \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n \otimes k(P))$$

сюръективно для всех $n \geqslant n_0$. В таком случае из леммы Накаямы над локальным кольцом $\mathcal{O}_P$ вытекает, что слой пучка $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ в точке P порождается глобальными сечениями. Поскольку пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ когерентен, то существует открытая окрестность U точки P, зависящая от n, такая, что при $n \geqslant n_0$ пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ порождается своими глобальными сечениями в каждой точке из U.

В частности, взяв $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, мы найдем целое число $n_1 > 0$ и открытую окрестность V точки P, такую, что $\mathcal{L}^{n_1}$ порождается своими глобальными сечениями над V. С другой стороны, для каждого $r = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$ предыдущие рассуждения позволяют указать окрестность U_r точки P, такую, что пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{n_0+r}$ порождается своими глобальными сечениями над U_r. Положим теперь

$$U_P = V \cap U_0 \cap \ldots \cap U_{n_1-1}.$$

Тогда над U_P все пучки $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ при $n \geqslant n_0$ порождаются своими глобальными сечениями. Действительно, всякий такой пучок может быть записан как тензорное произведение

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{n_0+r}) \otimes (\mathcal{L}^{n_1})^m$$

для подходящих $0 \leqslant r \leqslant n_1$ и $m \geqslant 0$.

Покроем теперь X конечным числом открытых множеств U_P для некоторых замкнутых точек P, и пусть n_0 будет обозначать максимум соответствующих n_0 для каждой из этих точек. Тогда пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ будет порождаться своими глобальными сечениями над всем X и для всех $n \geqslant n_0$. Предложение полностью доказано.

Упражнения

5.1. Пусть X — проективная схема над полем k и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Определим *эйлерову характеристику* пучка $\mathcal{F}$ формулой

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F}).$$

Показать, что если $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — короткая точная последовательность пучков на X, то $\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'')$.

5.2. (a) Пусть X — проективная схема над полем k, $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильный обратимый пучок на X над k и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Показать, что существует многочлен $P(z) \in \mathbf{Q}[z]$, такой, что $\chi(\mathcal{F}(n)) = P(n)$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Этот многочлен $P(z)$ будем называть *многочленом Гильберта* пучка $\mathcal{F}$ относительно пучка $\mathcal{O}_X(1)$. [*Указание.* Воспользоваться индукцией по размерности Supp $\mathcal{F}$, общими свойствами числовых многочленов (7.3 гл. I) и рассмотреть подходящие точные последовательности вида

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q} \to 0.]$$

(b) Пусть теперь $X = \mathbf{P}_k^r$ и $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$ рассматривается как градуированный S-модуль. Пользуясь теоремой 5.2, показать, что многочлен Гильберта пучка $\mathcal{F}$ — это не что иное, как многочлен Гильберта модуля M, определенный в § 7 гл. I.

5.3. *Арифметический род.* Пусть X — проективная схема размерности r над полем k. Определим *арифметический род* p_a *схемы* X, полагая

$$p_a(X) = (-1)^r (\chi(\mathcal{O}_X) - 1).$$

Отметим, что $p_a(X)$ зависит только от X, а не от его проективного вложения.

(a) Показать, что если схема X цела и k алгебраически замкнуто, то

$$p_a(X) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \dim_k H^{r-i}(X, \mathcal{O}_X).$$

В частности, если X — кривая, то $p_a(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$. [*Указание.* Воспользоваться теоремой 3.4 гл. I.]

(b) Показать, что если X — замкнутое подмногообразие в $\mathbf{P}_k^r$, то $p_a(X)$ совпадает с арифметическим родом, определенным в упр. 7.2 гл. I, который первоначально зависел от проективного вложения X.

(c) Показать, что если X — неособая проективная кривая над алгебраически замкнутым полем k, то $p_a(X)$ является на самом деле *бирациональным* инвариантом X. Вывести отсюда, что неособая плоская кривая степени $d \geqslant 3$ не рациональна. (Это другое доказательство утверждения 8.20.3 гл. II, где мы использовали геометрический род.)

5.4. Напомним, что определение группы Гротендика $K(X)$ нётеровой схемы X было дано в упр. 6.10 гл. II.

(a) Пусть X — проективная схема над полем k и $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильный обратимый пучок на X. Показать, что существует (единственный) аддитивный гомоморфизм

$$P\colon K(X) \to \mathbf{Q}[z],$$

такой, что для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X $P(\gamma(\mathcal{F}))$ является многочленом Гильберта пучка $\mathcal{F}$ (см. упр. 5.2).

(b) Пусть теперь $X = \mathbf{P}_k^r$. Для каждого $i = 0, 1, \ldots, r$ пусть L_i — линейное подпространство размерности i в X. Показать, что тогда

(1) $K(X)$ является свободной абелевой группой, порожденной $\{\gamma(\mathcal{O}_{L_i}) \mid i = 0, \ldots, r\}$;

(2) отображение $P\colon K(X) \to \mathbf{Q}[z]$ инъективно.

[*Указание.* Показать сначала, что (1) $\Rightarrow$ (2). Затем доказывать (1) и (2) одновременно индукцией по n, используя упр. 6.10(c) гл. II.]

5.5. Пусть k — поле, $X = \mathbf{P}_k^r$ и Y — замкнутая подсхема в X размерности $q \geqslant 1$, являющаяся полным пересечением (упр. 8.4 гл. II). Тогда

(a) для любого $n \in \mathbf{Z}$ естественное отображение

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(n))$$

сюръективно. (Это обобщает и дает другое доказательство утверждения упр. 8.4(c) гл. II, где Y предполагается нормальным.);

(b) схема Y связна;

(c) $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(n)) = 0$ для $0 < i < q$ и всех $n \in \mathbf{Z}$;

(d) $p_a(Y) = \dim_k H^q(Y, \mathcal{O}_Y)$.

[*Указание.* Воспользоваться точными последовательностями и индукцией по коразмерности, начиная со случая $Y = X$, который рассмотрен в теореме 5.1.]

5.6. *Кривые на неособой квадрике в* $\mathbf{P}^3$. Пусть Q — неособая квадрика $xy = zw$ в $X = \mathbf{P}_k^3$ над полем k. Мы будем рассматривать локально главные замкнутые подсхемы Y в Q. Они соответствуют дивизорам Картье на Q (см. 6.17.1 гл. II). С другой стороны, мы знаем, что $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, так что можно говорить о *типе* (a, b) подсхемы Y (см. 6.16 и 6.6.1 гл. II). Обратимый пучок $\mathcal{L}(Y)$ будем обозначать через $\mathcal{O}_Q(a, b)$. Следовательно, $\mathcal{O}_Q(n) = \mathcal{O}_Q(n, n)$ для любого $n \in \mathbf{Z}$.

(a) Используя частные случаи $(q, 0)$ и $(0, q)$, $q > 0$, когда Y является несвязным объединением q прямых $\mathbf{P}^1$ на Q, показать, что

(1) если $|a - b| \leqslant 1$, то $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a, b)) = 0$;

(2) если $a, b < 0$, то $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a, b)) = 0$;

(3) если $a \leqslant -2$, то $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a, 0)) \neq 0$.

(b) Теперь воспользоваться этими результатами и показать, что

(1) если Y — локально главная замкнутая подсхема типа (a, b) с $a, b > 0$, то она связна;

(2) предположим, что k алгебраически замкнуто, тогда для любых $a, b > 0$ существует неприводимая неособая кривая типа (a, b); воспользоваться 7.6.2 и 8.1.8 гл. II;

(3) неприводимая неособая кривая Y типа (a, b), $a, b > 0$, на Q проективно нормальна (см. упр. 5.14 гл. II) тогда и только тогда, когда $|a - b| \leqslant 1$. В частности, это дает примеры неособых, но не проективно нормальных кривых в $\mathbf{P}^3$. Простейший из них — это кривая типа $(1, 3)$, которая есть не что иное, как рациональная кривая степени 4 в $\mathbf{P}^3$ (упр. 3.18 гл. I).

(c) Показать, что если Y — локально главная подсхема типа (a, b) в Q, то $p_a(Y) = ab - a - b + 1$. [*Указание.* Вычислить многочлены Гильберта подходящих пучков и опять воспользоваться частным случаем $(q, 0)$, когда Y является несвязным объединением q экземпляров $\mathbf{P}^1$. Другой способ см. в 1.5.2 гл. V.]

5.7. Пусть X и Y — собственные схемы над нётеровым кольцом A и $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X. Показать, что

(a) Если $\mathcal{L}$ обилен на X и Y — любая замкнутая подсхема в X, то $i^*\mathcal{L}$ обилен на Y, где $i\colon Y \to X$ — естественное вложение.

(b) $\mathcal{L}$ обилен на X тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_{\text{red}} = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$ обилен на X_{red}.

(c) Предположим, что схема X приведена; $\mathcal{L}$ обилен на X тогда и только тогда, когда $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{X_i}$ обилен на X_i, где X_i пробегает все неприводимые компоненты X.

(d) Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный сюръективный морфизм и $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на Y. Пучок $\mathcal{L}$ обилен тогда и только тогда, когда $f^*\mathcal{L}$ обилен на X. [*Указание.* Воспользоваться предложением 5.3 и сравнить с упр. 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2. См. также Хартсхорн [5, § 1 гл. 4].]

5.8. Доказать, что всякая одномерная собственная схема X над алгебраически замкнутым полем k проективна.

(a) Если X неприводима и неособа, то она проективна согласно предложению 6.7 гл. II.

(b) Пусть X — целая схема и $\widetilde{X}$ — ее нормализация (упр. 3.8 гл. II). Показать, что схема $\widetilde{X}$ полная и неособая, а следовательно, проективная согласно (a). Пусть $f\colon \widetilde{X} \to X$ — естественный морфизм и $\mathcal{L}$ — очень обильный обратимый пучок на X. Показать, что существует эффективный дивизор $D = \sum P_i$ на $\widetilde{X}$ с $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{L}$ и такой, что $f(P_i)$ является неособой точкой на X для каждого i. Вывести отсюда, что существует обратимый пучок $\mathcal{L}_0$ на X, такой, что $f^*\mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{L}$. Затем воспользоваться упр. 5.7, 7.6 гл. II и 5.16.1 гл. II и показать, что схема X проективна.

(c) Пусть X — приведенная, но не обязательно неприводимая схема и $X_1, \ldots, X_r$ — ее неприводимые компоненты. Используя упр. 4.5, показать, что отображение $\operatorname{Pic} X \to \bigoplus \operatorname{Pic} X_i$ сюръективно, затем с помощью упр. 5.7 (c) показать, что X проективна.

(d) Наконец, если X — произвольная одномерная собственная схема над k, то воспользоваться теоремой 2.7 и упр. 4.6 для того, чтобы показать, что отображение $\operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} X_{\text{red}}$ сюръективно. Затем, используя упр. 5.7(c), заключить, что схема X проективна.

5.9. *Пример непроективной схемы.* Цель этого упражнения — показать, что основное утверждение упр. 5.8 неверно в размерности два. Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 и $X = \mathbf{P}_k^2$. Обозначим через ω пучок дифференциалов 2-форм на X (§ 8 гл. II). Определим инфинитезимальное расширение X' схемы X посредством пучка ω и элемента $\xi \in H^1(X, \omega \otimes \mathcal{T})$, как в упр. 4.10. А именно, пусть x_0, x_1, x_2 — однородные координаты X, U_0, U_1, U_2 — стандартное открытое покрытие X и пусть $\xi_{ij} = (x_j/x_i)\, d(x_i/x_j)$. Это одномерный коцикл Чеха со значениями в Ω_X^1. Но так как $\dim X = 2$, то мы имеем изоморфизм $\omega \otimes \mathcal{T} \simeq \Omega_X^1$ (см. упр. 5.16(b) гл. II). Теперь рассмотреть точную последовательность

$$\ldots \to H^1(X, \omega) \to \operatorname{Pic} X' \to \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\delta} H^2(X, \omega) \to \ldots$$

(упр. 4.6) и показать, что δ инъективно. Имеем $\omega \simeq \mathcal{O}_X(-3)$ (см. 8.20.1 гл. II), так что $H^2(X, \omega) \simeq k$. Так как char $k = 0$, то нужно показать только, что $\delta(\mathcal{O}(1)) \neq 0$, что можно сделать с помощью явного вычисления когомологий Чеха. Поскольку $H^1(X, \omega) = 0$, отсюда получается, что $\operatorname{Pic} X' = 0$. В частности, X' не имеет обильных обратимых пучков и, следовательно, не проективна.

Замечание. В действительности этот факт можно обобщить и показать, что для любой неособой проективной поверхности X над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0 существует инфинитезимальное расширение X' поверхности X посредством ω, такое, что X' не является проективным над k. Действительно, пусть D — обильный дивизор на X. Тогда D определяет элемент $c_1(D) \in H^1(X, \Omega^1)$, который мы используем для построения X', как и выше. Тогда для любого дивизора E на X можно показать, что $\delta(\mathcal{L}(E)) = (D \cdot E)$, где $(D \cdot E)$ — индекс пересечения (см. гл. V), рассматриваемый как элемент поля k. Поэтому если E обилен, то $\delta(\mathcal{L}(E)) \neq 0$. Следовательно, X' не имеет обильных дивизоров.

С другой стороны, над полем характеристики $p > 0$ собственная схема X проективна тогда и только тогда, когда проективна X_{red}!

5.10. Пусть X — проективная схема над нётеровым кольцом A и $\mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^2 \to \ldots \to \mathcal{F}^r$ — точная последовательность когерентных пучков на X. Показать, что существует целое n_0, такое, что для всех $n \geqslant n_0$ последовательность глобальных сечений

$$\Gamma(X, \mathcal{F}^1(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}^2(n)) \to \ldots \to \Gamma(X, \mathcal{F}^r(n))$$

точна.

§ 6. Группы Ext и пучки $\mathcal{E}xt$

В этом параграфе мы изучаем свойства групп Ext и пучков $\mathcal{E}xt$, которые понадобятся затем для теоремы двойственности. Мы работаем на окольцованном пространстве $(X, \mathcal{O}_X)$, и все рассматриваемые пучки будут пучками $\mathcal{O}_X$-модулей.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки $\mathcal{O}_X$-модулей. Обозначим через $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ группу гомоморфизмов соответствующих $\mathcal{O}_X$-модулей и через $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ — пучок $\mathcal{H}om$ (см. § 5 гл. II). Если возникнет необходимость, то будем приписывать внизу символ X, чтобы указать, на каком пространстве рассматриваются соответствующие объекты: например, $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. При фиксированном $\mathcal{F}$ $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)$ является точным слева ковариантным функтором из категории $\mathfrak{Mod}(X)$ в категорию $\mathfrak{Ab}$ и $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \cdot)$ — точным слева ковариантным функтором из категории $\mathfrak{Mod}(X)$ в $\mathfrak{Mod}(X)$. Так как $\mathfrak{Mod}(X)$ имеет достаточно много инъективных объектов (см. 2.2), то можно дать следующее определение.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство и $\mathcal{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль. Определим функторы $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \cdot)$ как правые производные функторы от $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)$ и функторы $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \cdot)$ как правые производные от $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \cdot)$.

Следовательно, согласно общей теории производных функторов (см. 1.1A), имеем $\operatorname{Ext}^0 = \operatorname{Hom}$, длинную точную последовательность для всякой короткой точной последовательности вторых аргументов и $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ при $i > 0$, если $\mathcal{G}$ — инъективный объект в $\mathfrak{Mod}(X)$. То же самое имеет место и для пучков $\mathcal{E}xt$.

Лемма 6.1. *Пусть $\mathcal{I}$ — инъективный объект в категории $\mathfrak{Mod}(X)$. Тогда для любого открытого подмножества $V \subset X$ ограничение $\mathcal{I}|_U$ является инъективным объектом в категории $\mathfrak{Mod}(U)$.*

Доказательство. Пусть $j\colon U \to X$ — отображение вложения. Тогда для всякого вложения $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ в $\mathfrak{Mod}(U)$ и отображения $\mathcal{F} \to \mathcal{I}|_U$ мы получаем вложение $j_!\mathcal{F} \to j_!\mathcal{G}$ и отображение $j_!\mathcal{F} \to j_!(\mathcal{I}|_U)$, где $j_!$ означает продолжение пучков нулем (упр. 1.19 гл. II). Но $j_!(\mathcal{I}|_U)$ является подпучком пучка $\mathcal{I}$, так что мы имеем отображение $j_!\mathcal{F} \to \mathcal{I}$. Так как $\mathcal{I}$ инъективен в $\mathfrak{Mod}(X)$, то это отображение продолжается до отображения $j_!\mathcal{G}$ в $\mathcal{I}$. Ограничивая его на U, получаем требуемое отображение $\mathcal{G}$ в $\mathcal{I}|_U$.

Предложение 6.2. *Для всякого открытого подмножества $U \subset X$ имеет место игоморфизм*

$$\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U \simeq \mathcal{E}xt^i_U(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.3A. С обеих сторон здесь стоят δ-функторы от $\mathcal{G}$ из категории $\mathfrak{Mod}(X)$ в категорию $\mathfrak{Mod}(U)$. Они совпадают при $i = 0$ и при $i > 0$ обращаются в нуль, если $\mathcal{G}$ инъективен, следовательно, по 6.1 они совпадают всюду.

Предложение 6.3. *Для любого $\mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$ имеем*

(a) $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$;
(b) $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$ *при* $i > 0$;
(c) $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \simeq H^i(X, \mathcal{G})$ *для всех* $i \geqslant 0$.

Доказательство. Функтор $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \cdot)$ является тождественным, так что его производные равны 0 при $i > 0$. Это доказывает (a) и (b). Функторы $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \cdot)$ и $\Gamma(X, \cdot)$ совпадают, следовательно, совпадают и их производные функторы (как функторы из $\mathfrak{Mod}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$). Осталось применить предложение 2.6.

Предложение 6.4. *Пусть $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — короткая точная последовательность в категории $\mathfrak{Mod}(X)$. Тогда для любого $\mathcal{G}$ имеет место следующая длинная точная последовательность:*

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \ldots,$$

и имеет место аналогичная последовательность с пучками $\mathcal{E}xt$.

Доказательство. Пусть $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{I}^{\cdot}$ — инъективная резольвента для $\mathcal{G}$. Для любого инъективного пучка $\mathcal{I}$ функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \mathcal{I})$ точен, следовательно, мы получаем короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{I}^{\cdot}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{\cdot}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{I}^{\cdot}) \to 0.$$

Переходя к соответствующей длинной точной последовательности групп когомологий h^i, получаем требуемую последовательность Ext^i.

Аналогично, используя 6.1, видим, что $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{I}^{\cdot})$ является точным функтором из $\mathfrak{Mod}(X)$ в $\mathfrak{Mod}(X)$. Тогда те же рассуждения приводят к требуемой точной последовательности $\mathcal{E}xt^i$.

Предложение 6.5. *Предположим, что в $\mathfrak{Mod}(X)$ существует точная последовательность*

$$\ldots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0,$$

где $\mathcal{L}_i$ — локально свободные пучки конечного ранга (в таком случае говорят, что $\mathcal{L}_{\cdot}$ является локально свободной резольвентой пучка $\mathcal{F}$). Тогда для любого $\mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$ и любого $i \geqslant 0$ имеет место изоморфизм

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq h^i(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_{\cdot}, \mathcal{G})).$$

Доказательство. С обеих сторон стоят δ-функторы от $\mathcal{G}$ из $\mathfrak{Mod}(X)$ в $\mathfrak{Mod}(X)$. При $i = 0$ они совпадают, потому что функтор $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{G})$ контравариантен и точен слева. При $i > 0$ они оба обращаются в нуль на инъективных объектах, так как в этом случае функтор $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{G})$ точен. Следовательно, по 1.3A эти функторы совпадают.

Пример 6.5.1. Пусть X — схема, квазипроективная над $\operatorname{Spec} A$, где A — нётерово кольцо. Тогда, согласно 5.8 гл. II, всякий когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X является факторпучком некоторого локально свободного пучка. Поэтому всякий когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X обладает локально свободной резольвентой $\mathcal{L}_{\cdot} \to \mathcal{F} \to 0$, так что в силу предложения 6.5 в этом случае $\mathcal{E}xt$ можно вычислять, используя локально свободную резольвенту по первому аргументу.

Предостережение 6.5.2. Из результатов 6.4 и 6.5 не следует, вообще говоря, что $\mathcal{E}xt$ могут быть определены как производные функторы по первому аргументу. В действительности мы не можем даже определить правые производные функторы от Hom и $\mathcal{H}om$ по первому аргументу, так как категория $\mathfrak{Mod}(X)$ не обладает достаточным количеством проективных объектов (упр. 6.2). Однако имеет место некоторое свойство универсальности (см. упр. 6.4).

Лемма 6.6. *Пусть $\mathcal{L} \in \mathfrak{Mod}(X)$ — локально свободный пучок конечного ранга и $\mathcal{I} \in \mathfrak{Mod}(X)$ — инъективный пучок. Тогда пучок $\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}$ тоже инъективен.*

Доказательство. Мы должны показать, что функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \mathcal{L} \otimes \mathcal{I})$ точен. Но он совпадает с функтором $\operatorname{Hom}(\cdot \otimes \check{\mathcal{L}}, \mathcal{I})$ (упр. 5.1 гл. II), который является точным, поскольку функтор $\cdot \otimes \check{\mathcal{L}}$ точен и $\mathcal{I}$ инъективен.

Предложение 6.7. *Пусть $\mathcal{L}$ — локально свободный пучок и $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ — двойственный к нему пучок. Тогда для любых $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$ и любого $i \geqslant 0$ имеет место изоморфизм*

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \simeq \operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \check{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}).$$

Для пучков $\mathcal{E}xt$ тоже имеют место аналогичные изоморфизмы:

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \check{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}) \simeq \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \check{\mathcal{L}}.$$

Доказательство. Случай $i = 0$ вытекает из упр. 5.1 гл. II. В общем случае заметим, что все эти функторы являются δ-функторами от $\mathcal{G}$ из $\mathfrak{Mod}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$ (соответственно в $\mathfrak{Mod}(X)$), поскольку тензорное умножение на $\mathcal{L}$ является точным функтором. При $i > 0$ они все обращаются в нуль на инъективных объектах (см. 6.6), так что по теореме 1.3A они совпадают.

Теперь изложим некоторые свойства применительно к схемам.

Предложение 6.8. *Пусть X — нётерова схема, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, $\mathcal{G}$ — произвольный $\mathcal{O}_X$-модуль и $x \in X$ — некоторая точка. Тогда для любого $i \geqslant 0$ имеет место изоморфизм*

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \simeq \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x),$$

где справа стоит Ext *над локальным кольцом $\mathcal{O}_x$.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что Ext над кольцом A определяется как производный функтор от $\operatorname{Hom}_A(M, \cdot)$ для любого A-модуля M, рассматриваемого как функтор из $\mathfrak{Mod}(A)$ в $\mathfrak{Mod}(A)$. Его можно определить также, рассматривая одноточечное окольцованное пространство с кольцом A в качестве структурного пучка; тогда он получается как частный случай общего определения Ext для окольцованных пространств.

Рассматриваемый вопрос является локальным (см. предложение 6.2), так что можно считать схему X аффинной. В таком случае $\mathcal{F}$ обладает локально свободной (и даже свободной) резольвентой $\mathcal{L}_{\bullet} \to \mathcal{F} \to 0$, которая при переходе к слоям в точке x дает свободную резольвенту $(\mathcal{L}_{\bullet})_x \to \mathcal{F}_x \to 0$. Согласно 6.5, мы можем обе стороны вычислять по этой резольвенте. Так как $\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{G})_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_x, \mathcal{G}_x)$ для локально свободного пучка $\mathcal{L}$ и так как функтор взятия слоя является точным, то мы получаем требуемый изоморфизм для Ext.

Отметим, что даже в случае $i = 0$ это неверно без предположения о когерентности $\mathcal{F}$.

Предложение 6.9. *Пусть X — проективная схема над нётеровым кольцом A, $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильный обратимый пучок и $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — произвольные когерентные пучки на X. Тогда существует целое число $n_0 > 0$, зависящее от $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, такое, что для каждого $n \geqslant n_0$ имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \simeq \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n))).$$

Доказательство. При $i = 0$ это верно для любых $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и n. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, тогда по 6.3 левая сторона имеет вид $H^i(X, \mathcal{G}(n))$, так что для $n \gg 0$ и $i > 0$ она обращается в 0 по теореме 5.2. С другой стороны, справа при $i > 0$ всегда стоит нуль по 6.3, следовательно, для $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ предложение доказано.

Случай локально свободного пучка сводится к рассмотренному случаю $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ согласно 6.7.

Наконец, если $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный пучок, то его можно представить в виде факторпучка локально свободного пучка $\mathcal{E}$ (5.18 гл. II), так что имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0,$$

где $\mathcal{R}$ обозначает ядро гомоморфизма $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$. Поскольку $\mathcal{E}$ локально свободен, то для него утверждение верно по доказанному. Поэтому для $n \gg 0$ мы имеем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{G}(n)) \to \\ \to \mathrm{Hom}(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \to 0$$

и изоморфизмы $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{i+1}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n))$ для всех $i > 0$. Аналогичная последовательность и изоморфизмы имеют место для пучков $\mathcal{H}om$ и $\mathcal{E}xt$. Теперь по упр. 5.10 последовательность глобальных сечений пучковой последовательности после небольшой подкрутки становится точной, так что из случая $i = 0$, используя 6.7, мы получаем случай $i = 1$ для $\mathcal{F}$. Но пучок $\mathcal{R}$ также когерентный, поэтому общий случай получается по индукции.

Замечание 6.9.1. Более общим образом, на любом окольцованном пространстве X соотношения между глобальными группами Ext и пучками $\mathcal{E}xt$ выражаются с помощью спектральной последовательности (см. Гротендик [1] или Годеман [1, гл. II, 7.3.3]).

Теперь для удобства ссылок напомним понятие проективной размерности модуля над кольцом. Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. *Проективной резольвентой* M называется комплекс $L_{\bullet}$ проективных A-модулей, такой, что последовательность

$$\ldots \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

точна. Если $L_i = 0$ для $i > n$ и $L_n \neq 0$, то говорят, что резольвента имеет длину n. Определим *проективную размерность* $\mathrm{pd}(M)$ модуля M как наименьшую из длин проективных резольвент для M (или ∞, если не существует проективной резольвенты конечной длины).

Предложение 6.10A. *Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Тогда*

(a) *M проективен в том и только том случае, когда $\mathrm{Ext}^1(M, N) = 0$ для всех A-модулей N;*

(b) *$\mathrm{pd}(M) \leqslant n$ в том и только том случае, когда $\mathrm{Ext}^i(M, N) = 0$ для всех $i > n$ и всех модулей N.*

Доказательство. См. Мацумура [2, стр. 127—128].

Предложение 6.11A. *Пусть A — регулярное локальное кольцо. Тогда*

(a) $\mathrm{pd}(M) \leqslant \dim A$ *для любого* M;

(b) $\mathrm{pd}(k) = \dim A$, *где* $k = A/\mathfrak{m}$.

Доказательство. См. Мацумура [2, теорема 42, стр. 131].

Предложение 6.12A. *Пусть A — регулярное локальное кольцо размерности n и M — конечно порожденный A-модуль. Тогда*

$$\mathrm{pd}(M) + \mathrm{depth}(M) = n.$$

Доказательство. См. Мацумура [2, стр. 113, упр. 4] или Серр [11, IV, предложение 21].

Упражнения

6.1. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство и $\mathcal{F}', \mathcal{F}'' \in \mathfrak{Mod}(X)$. *Расширением* пучка $\mathcal{F}''$ при помощи пучка $\mathcal{F}'$ называется всякая короткая точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

в категории $\mathfrak{Mod}(X)$. Два расширения считаются *изоморфными*, если существует изоморфизм соответствующих точных последовательностей, индуцирующий тождественные отображения на $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$. Для указанного выше расширения рассмотрим длинную точную последовательность, возникающую из применения функтора $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \cdot)$, в частности рассмотрим отображение

$$\delta\colon \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{F}'') \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{F}'),$$

и пусть $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{F}')$ — элемент $\delta(1_{\mathcal{F}''})$. Показать, что таким способом устанавливается взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных расширений $\mathcal{F}''$ при помощи $\mathcal{F}'$ и элементами группы $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{F}')$. Подробности см. Хилтон и Штаммбах [1, гл. III].

6.2. Пусть $X = \mathbf{P}^1_k$, где k — бесконечное поле.

(a) Показать, что не существует проективного объекта $\mathcal{P} \in \mathfrak{Mod}(X)$, отображающегося на все $\mathcal{O}_X$, т. е. не существует точной последовательности $\mathcal{P} \to \mathcal{O}_X \to 0$. [*Указание.* Рассмотреть сюръекции вида $\mathcal{O}_V \to k(x) \to 0$, где $x \in X$ — замкнутая точка, V — открытая окрестность x и $\mathcal{O}_V = j_!(\mathcal{O}_X|_V)$, где $j\colon V \to X$ — естественное вложение.]

(b) Показать, что не существует проективного объекта в $\mathfrak{Qco}(X)$ или $\mathfrak{Coh}(X)$, сюръективно отображающегося на $\mathcal{O}_X$. [*Указание.* Рассмотреть сюръекции вида $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes k(x) \to 0$, где $x \in X$ — замкнутая точка и $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X.]

6.3. Пусть X — нётерова схема и $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$.

(a) Показать, что если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ когерентны, то пучки $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ тоже когерентны для всех $i \geqslant 0$.

(b) Показать, что если $\mathcal{F}$ когерентен, а $\mathcal{G}$ квазикогерентен, то $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ квазикогерентен для каждого $i \geqslant 0$.

6.4. Пусть X — нётерова схема, и предположим, что всякий когерентный пучок на X является факторпучком некоторого локально свободного пучка. В таком случае мы будем говорить, что $\mathfrak{Coh}(X)$ имеет *достаточно много локально свободных* объектов. Показать, что тогда для любого $\mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$ δ-функтор $\mathcal{E}xt^i(\cdot, \mathcal{G})$ из $\mathfrak{Coh}(X)$ в $\mathfrak{Mod}(X)$ является контравариантным универсальным δ-функтором. [*Указание.* Показать, что функтор $\mathcal{E}xt^i(\cdot, \mathcal{G})$ является стирающим (см. § 1) для всех $i > 0$.]

6.5. Пусть X — нётерова схема, и предположим, что $\mathfrak{Coh}(X)$ имеет достаточно много локально свободных объектов (упр. 6.4). Тогда для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ определим его *гомологическую размерность* $\mathrm{hd}(\mathcal{F})$ как наименьшую из длин локально свободных резольвент для $\mathcal{F}$ (или ∞, если не существует такой резольвенты конечной длины). Показать, что

(a) $\mathcal{F}$ является локально свободным $\Longleftrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ для всех $\mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$;

(b) $\mathrm{hd}(\mathcal{F}) \leqslant n \Longleftrightarrow \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ для всех $i > n$ и всех $\mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$;

(c) $\mathrm{hd}(\mathcal{F}) = \sup_x \mathrm{pd}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x$.

6.6. Пусть A — регулярное локальное кольцо и M — конечно порожденный A-модуль. В таком случае результаты 6.10A могут быть усилены следующим образом.

(a) M проективен тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^i(M, A) = 0$ для всех $i > 0$. [*Указание.* Воспользоваться 6.11A и убывающей индукцией по i и показать, что $\mathrm{Ext}^i(M, N) = 0$ для всех $i > 0$ и всех конечно порожденных A-модулей N. Затем показать, что M есть прямое слагаемое свободного A-модуля (см. Мацумура [2, стр. 129]).]

(b) Воспользоваться (a) и показать, что $\mathrm{pd}\, M \leqslant n$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^i(M, A) = 0$ для всех $i > n$ (n любое).

6.7. Пусть $X = \mathrm{Spec}\, A$ — аффинная нётерова схема, M и N суть A-модули и модуль M конечно порожден. Показать, что тогда имеют место изоморфизмы

$$\mathrm{Ext}^i_X(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, N)$$

и

$$\mathcal{E}xt^i_X(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, N)^\sim.$$

6.8. Доказать следующую теорему Клеймана (см. Борелли [1]). Пусть X — нётерова целая отделимая локально факториальная схема, тогда всякий когерентный пучок на X является факторпучком некоторого локально свободного пучка (конечного ранга).

(a) Показать прежде всего, что открытые множества вида X_s для всевозможных $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ и всевозможных обратимых пучков $\mathcal{L}$ на X образуют базис топологии на X. [*Указание.* Показать, что для заданной точки $x \in X$ и открытой окрестности $U \ni x$ существуют $\mathcal{L}$ и s, такие, что $x \in X_s \subset U$. Сначала свести к случаю, когда $Z = X - U$ неприводимо. Тогда пусть ζ — общая точка Z и $f \in K(X)$ — рациональная функция, такая, что $f \in \mathcal{O}_x$, $f \notin \mathcal{O}_\zeta$. Пусть $D = (f)_\infty$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$ и $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D))$ — сечение, соответствующее D (см. § 6 гл. II).]

(b) Теперь воспользоваться 5.14 гл. II и показать, что всякий когерентный пучок является факторпучком прямой суммы $\bigoplus \mathcal{L}_i^{n_i}$ некоторых степеней n_i обратимых пучков $\mathcal{L}_i$.

6.9. Пусть X — нётерова целая отделимая регулярная схема. (Напомним, что схема называется *регулярной*, если все ее локальные кольца регулярны.) По аналогии с определением *группы Гротендика* $K(X)$ (см. упр. 6.10 гл. II) определим группу $K_1(X)$, используя вместо всех когерентных только локально свободные пучки, а именно $K_1(X)$ — это факторгруппа свободной абелевой группы, порожденной всеми локально свободными (когерентными) пучками, по подгруппе, порожденной всеми выражениями вида $\mathcal{E} - \mathcal{E}' - \mathcal{E}''$, где $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ — короткая точная последовательность локально свободных пучков. Очевидно, что существует естественный гомоморфизм групп $\varepsilon\colon K_1(X) \to K(X)$. Показать, что он является изоморфизмом (см. Борель и Серр [1, § 4]) следующим образом:

(a) Показать сначала, используя упр. 6.8, что всякий когерентный пучок $\mathcal{F}$ обладает локально свободной резольвентой $\mathcal{E}_\bullet \to \mathcal{F} \to 0$. Затем воспользоваться предложением 6.11A и упр. 6.5 и показать, что он обладает также конечной локально свободной резольвентой

$$0 \to \mathcal{E}_n \to \ldots \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

(b) Для каждого $\mathcal{F}$ выберем некоторую его конечную локально свободную резольвенту $\mathcal{E}_\bullet \to \mathcal{F} \to 0$ и положим $\delta(\mathcal{F}) = \sum (-1)^i \gamma(\mathcal{E}_i)$ в $K_1(X)$. Показать, что $\delta(\mathcal{F})$ не зависит от выбора резольвенты и определяет гомоморфизм $K(X)$ в $K_1(X)$. Показать, наконец, что гомоморфизм δ является обратным к ε.

6.10. *Двойственность для конечных плоских морфизмов.*

(a) Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм нётеровых схем. Тогда для всякого квазикогерентного $\mathcal{O}_Y$-модуля $\mathcal{G}$ пучок $\mathcal{H}om_Y(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{G})$ является квазикогерентным $f_*\mathcal{O}_X$-модулем и, следовательно, соответствует некоторому квазикогерентному $\mathcal{O}_X$-модулю, который мы обозначали через $f^!\mathcal{G}$ (упр. 5.17(e) гл. II).

(b) Показать, что для всякого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X и квазикогерентного пучка $\mathscr{G}$ на Y имеет место естественный изоморфизм

$$f_* \mathscr{H}om_X(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_Y(f_*\mathscr{F}, \mathscr{G}).$$

(c) Показать, что для каждого $i \geqslant 0$ существует естественное отображение

$$\varphi_i\colon \operatorname{Ext}^i_X(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G}) \to \operatorname{Ext}^i_Y(f_*\mathscr{F}, \mathscr{G}).$$

[*Указание.* Сначала построить отображение

$$\operatorname{Ext}^i_X(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G}) \to \operatorname{Ext}^i_Y(f_*\mathscr{F}, f_*f^!\mathscr{G}),$$

затем составить композицию с подходящим отображением из $f_*f^!\mathscr{G}$ в $\mathscr{G}$.]

(d) Предположим теперь, что схема X отделима, $\mathfrak{Coh}(X)$ имеет достаточно много локально свободных объектов и что $f_*\mathcal{O}_X$ является локально свободным пучком на Y (это эквивалентно тому, что морфизм f является плоским, см. § 9). Показать, что φ_i является изоморфизмом для каждого i и всех когерентных пучков $\mathscr{F}$ на X и квазикогерентных пучков $\mathscr{G}$ на Y. [*Указание.* Сначала рассмотреть случай $i = 0$. Затем, используя упр. 4.1, исследовать случай $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$ и случай, когда $\mathscr{F}$ локально свободен. Наконец, индукцией по i доказать общий случай, представляя $\mathscr{F}$ в виде факторпучка некоторого локально свободного пучка.]

§ 7. Теорема двойственности Серра

В этом параграфе мы докажем теорему двойственности Серра для когомологий когерентных пучков на проективной схеме. Сначала будет рассмотрен случай проективного пространства, когда все легко получается из явных вычислений § 5. Затем мы покажем, что на произвольной проективной схеме X существует когерентный пучок ω_X°, который в теории двойственности играет роль, аналогичную роли канонического обратимого пучка на неособом многообразии. В частности, для схемы Коэна — Маколея X мы установим в точности такую же теорему двойственности, как для проективного пространства. Наконец, для неособого многообразия X над алгебраически замкнутым полем k мы покажем, что дуализирующий пучок ω_X° совпадает с каноническим пучком ω_X. В конце параграфа будет упомянута связь между двойственностью и вычетами дифференциальных форм.

Пусть k — поле $X \simeq \mathbf{P}^n_k$ — проективное n-мерное пространство над k и $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}$ — канонический пучок на X (см. § 8 гл. II).

Теорема 7.1 (двойственность для $\mathbf{P}^n_k$). *Пусть $X = \mathbf{P}^n_k$ над полем k. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) $H^n(X, \omega_X) \simeq k$;

(b) *для всякого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X естественное спаривание*

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \omega) \times H^n(X, \mathscr{F}) \to H^n(X, \omega) \simeq k$$

является совершенным спариванием конечномерных векторных пространств над k;

(c) *для каждого $i \geqslant 0$ существует естественный функториальный изоморфизм*

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega) \simeq H^{n-i}(X, \mathscr{F})',$$

где $'$ обозначает двойственное векторное пространство, который при $i = 0$ индуцирован спариванием из (b).

Доказательство. (a) Из 8.13 гл. II следует, что $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(-n-1)$ (см. 8.20.1 гл. II). Следовательно, утверждение (a) является следствием 5.1(c).

(b) Гомоморфизм $\mathscr{F}$ в ω индуцирует отражение групп когомологий $H^n(X, \mathscr{F}) \to H^n(X, \omega)$. Это дает указанное естественное спаривание. Если $\mathscr{F} \simeq \mathcal{O}(q)$ для некоторого $q \in \mathbf{Z}$, то $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \omega) \simeq H^0(X, \omega(-q))$, так что в этом случае утверждение следует из 5.1(d). Поэтому утверждение (b) справедливо также и для конечных прямых сумм пучков вида $\mathcal{O}(q_i)$. Пусть $\mathscr{F}$ — произвольный когерентный пучок, тогда мы можем представить его как коядро $\mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F} \to 0$ гомоморфизма некоторых локально свободных пучков $\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1$, каждый из которых является прямой суммой пучков $\mathcal{O}(q_i)$. Далее, $\operatorname{Hom}(\cdot, \omega)$ и $H^n(X, \cdot)'$ являются контравариантными точными слева функторами, следовательно, по лемме о пяти гомоморфизмах мы получаем изоморфизм $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \omega) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathscr{F})'$, что означает совершенность спаривания (b).

(c) Здесь с обеих сторон стоят контравариантные δ-функторы от $\mathscr{F} \in \mathfrak{Coh}(X)$, занумерованные индексами $i \geqslant 0$. При $i = 0$ они, как мы только что установили, изоморфны. Поэтому по 1.3A для доказательства их изоморфности при всех i достаточно показать, что они являются стирающими при $i > 0$. Как следует из доказательства 5.18 гл. II, когерентный пучок $\mathscr{F}$ можно представить в виде факторпучка пучка $\mathscr{E} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}(-q)$ для $q \gg 0$. Тогда по 5.1 $\operatorname{Ext}^i(\mathscr{E}, \omega) = \bigoplus H^i(X, \omega(q)) = 0$ для $i > 0$. С другой стороны, $H^{n-i}(X, \mathscr{E})' = \bigoplus H^{n-i}(X, \mathcal{O}(-q))'$, что равно 0 при $i > 0$ и $q > 0$, как это опять следует из 5.1. Таким образом, мы установили стираемость рассматриваемых функторов при $i > 0$, так что они являются универсальными δ-функторами и, следовательно, изоморфны.

Замечание 7.1.1. Можно спросить, зачем в 7.1 оперировать пучком ω_X, когда можно просто писать $\mathcal{O}_X(-n-1)$, что, собственно говоря, только и использовалось в доказательстве? Одно из соображений заключается в том, что именно в таком виде теорема обобщается на другие схемы. Но более глубокое соображение состоит в том, что при таком способе записи изоморфизм из (a) можно сделать инвариантным (т. е. не зависящим от выбора координат в $\mathbf{P}^n$) и, следовательно, инвариантным относительно автоморфизмов $\mathbf{P}^n$. Это именно то, что называется *естественным* изоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим коцикл Чеха

$$\alpha = \frac{x_0^n}{x_1 \ldots x_n}\, d\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_0}\right)$$

в $C^n(\mathfrak{U}, \omega)$, где $\mathfrak{U}$ — стандартное открытое покрытие. Тогда можно показать, что α является образующим $H^n(X, \omega)$, который инвариантен относительно замены переменных.

Для обобщения теоремы 7.1 на другие схемы мы будем руководствоваться свойствами (a) и (b) как основными и дадим следующее определение.

Определение. Пусть X — собственная схема размерности n над полем k. Когерентный пучок ω_X° на X вместе с морфизмом *следа* t: $H^n(X, \omega_X^\circ) \to k$ будем называть *дуализирующим пучком* на X, если для всякого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X естественное спаривание

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \omega_X^\circ) \times H^n(X, \mathscr{F}) \to H^n(X, \omega_X^\circ)$$

с последующим гомоморфизмом следа t дает изоморфизм

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \omega_X^\circ) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathscr{F})'.$$

Предложение 7.2. *Пусть X — схема, собственная над k. Тогда если на X существует дуализирующий пучок, то он единствен. Более точно, пусть ω° со следом t и ω' со следом t' — дуализирующие пучки на X, тогда существует единственный изоморфизм φ: $\omega^\circ \xrightarrow{\sim} \omega'$, такой, что $t = t' \circ H^n(\varphi)$.*

Доказательство. Так как ω' — дуализирующий пучок, то имеет место изоморфизм $\operatorname{Hom}(\omega^\circ, \omega') \simeq H^n(\omega^\circ)'$. Следовательно, существует единственный морфизм φ: $\omega^\circ \to \omega'$, соответствующий элементу $t \in H^n(\omega^\circ)'$, т. е. такой, что $t' \circ H^n(\varphi) = t$. Аналогично для дуализирующего пучка ω° существует единственный морфизм ψ: $\omega' \to \omega^\circ$, такой, что $t \circ H^n(\psi) = t'$. Отсюда следует, что $t \circ H^n(\psi \circ \varphi) = t$. Но снова поскольку ω° дуализирующий, то $\psi \circ \varphi$ является тождественным отображением ω° в себя. Аналогично $\varphi \circ \psi$ является тождественным отображением ω' в себя, так что φ — изоморфизм. (Это частный случай доказательства единственности объекта, представляющего функтор; см. Гротендик [EGA I, новое изд., гл. 0, § 1]). По определению

(ω°, t) представляет функтор $\mathscr{F} \mapsto H^n(X, \mathscr{F})'$ из $\mathfrak{Coh}(X)$ в $\mathfrak{Mod}(k)$.

Вопрос о существовании дуализирующего пучка более труден. На самом деле он существует для любой схемы X, собственной над k, но мы докажем его существование только для проективных схем. Прежде всего нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Лемма 7.3. *Пусть X — замкнутая подсхема коразмерности r в $P = \mathbf{P}_k^N$. Тогда $\mathscr{E}xt_P^i(\mathcal{O}_X, \omega_P) = 0$ для всех $i < r$.*

Доказательство. Для любого i пучок $\mathscr{F}^i = \mathscr{E}xt_P^i(\mathcal{O}_X, \omega_P)$ когерентен на P (упр. 6.3), следовательно, после подкрутки на достаточно большое целое число q он будет порождаться своими глобальными сечениями (5.17 гл. II). Поэтому для доказательства того, что $\mathscr{F}^i = 0$, достаточно показать, что $\Gamma(P, \mathscr{F}^i(q)) = 0$ для всех $q \gg 0$. Но, согласно 6.7 и 6.9, мы имеем изоморфизм

$$\Gamma(P, \mathscr{F}^i(q)) \simeq \operatorname{Ext}_P^i(\mathcal{O}_X, \omega_P(q))$$

для $q \gg 0$. С другой стороны, согласно 7.1, группы Ext, стоящие справа, двойственны $H^{N-i}(P, \mathcal{O}_X(-q))$, которые обращаются в нуль для $i < r$, $N - i > \dim X$ (см. 2.7 и упр. 4.8(d)).

Лемма 7.4. *В тех же предположениях, что в 7.3, пусть $\omega_X^\circ = \mathscr{E}xt_P^r(\mathcal{O}_X, \omega_P)$. Тогда для всякого $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathscr{F}$ существует функториальный изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}_X(\mathscr{F}, \omega_X^\circ) \simeq \operatorname{Ext}_P^r(\mathscr{F}, \omega_P).$$

Доказательство. Пусть $0 \to \omega_P \to \mathscr{I}^\cdot$ — инъективная резольвента пучка ω_P в категории $\mathfrak{Mod}(P)$. Тогда $\operatorname{Ext}_P^i(\mathscr{F}, \omega_P)$ можно вычислить как когомологии h^i комплекса $\operatorname{Hom}_P(\mathscr{F}, \mathscr{I}^\cdot)$. Но поскольку $\mathscr{F}$ является $\mathcal{O}_X$-модулем, то любой морфизм $\mathscr{F} \to \mathscr{I}^i$ пропускается через $\mathscr{J}^i = \mathscr{H}om_P(\mathcal{O}_X, \mathscr{I}^i)$. Следовательно, мы имеем

$$\operatorname{Ext}_P^i(\mathscr{F}, \omega_P) = h^i(\operatorname{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{J}^\cdot)).$$

Далее, каждый из $\mathscr{J}^i$ является *инъективным* $\mathcal{O}_X$-модулем. Действительно, если $\mathscr{F} \in \mathfrak{Mod}(X)$, то $\operatorname{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{J}^i) = \operatorname{Hom}_P(\mathscr{F}, \mathscr{I}^i)$, так что $\operatorname{Hom}_X(\cdot, \mathscr{J}^i)$ является точным функтором. Более того, по 7.3 $h^i(\mathscr{J}^\cdot) = 0$ при $i < r$, поэтому комплекс $\mathscr{J}^i$ точен до r-го члена. Так как $\mathscr{J}^i$ инъективны, то этот комплекс на самом деле расщепляется вплоть до r-го члена. Это означает, что его можно представить в виде прямой суммы двух инъективных комплексов: $\mathcal{Y}^{\cdot} = \mathcal{Y}_1^{\cdot} \oplus \mathcal{Y}_2^{\cdot}$, где $\mathcal{Y}_1^{\cdot}$ содержит члены степеней $0 \leqslant i \leqslant r$ и точен, а $\mathcal{Y}_2^{\cdot}$ содержит члены степеней $i \geqslant r$. Отсюда следует, что $\omega_X^\circ = \ker (d^r\colon \mathcal{Y}_2^r \to \mathcal{Y}_2^{r+1})$ и что для любого $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{F}$ имеет место требуемый изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_X(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \simeq \operatorname{Ext}_P^r(\mathcal{F}, \omega_P).$$

(Отсюда следует также, что $\operatorname{Exp}_P^i(\mathcal{F}, \omega_P) = 0$ при $i < r$, но это нам не понадобится.)

Предложение 7.5. *Пусть X — прективная схема над полем k, тогда она обладает дуализирующим пучком.*

Доказательство. Вложим X в качестве замкнутой подсхемы в $P = \mathbf{P}_k^N$ для некоторого N; пусть r — ее коразмерность в этом вложении и $\omega_X^\circ = \mathcal{E}xt_P^r(\mathcal{O}_X, \omega_P)$. Тогда по 7.4 для любого $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{F}$ мы имеем изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_X(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \simeq \operatorname{Ext}_P^r(\mathcal{F}, \omega_P).$$

С другой стороны, теорема двойственности 7.1 для P и когерентного $\mathcal{F}$ дает изоморфизм

$$\operatorname{Ext}_P^r(\mathcal{F}, \omega_P) \simeq H^{N-r}(P, \mathcal{F})'.$$

Но $N - r = n = \dim X$ и $\mathcal{F}$ — пучок на X, так что для $\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}(X)$ мы получаем функториальный изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_X(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \simeq H^n(X, \mathcal{F})'.$$

В частности, при $\mathcal{F} = \omega_X^\circ$ элементу $1 \in \operatorname{Hom}(\omega_X^\circ, \omega_X^\circ)$ соответствует гомоморфизм $t\colon H^n(X, \omega_X^\circ) \to k$, который мы возьмем в качестве гомоморфизма следа. Тогда по функториальности очевидно, что (ω_X°, t) является дуализирующим пучком на X.

Теперь мы в состоянии доказать теорему двойственности для любой проективной схемы X. Напомним, что схема называется *схемой Коэна — Маколея*, если все ее локальные кольца являются кольцами Коэна — Маколея (см. § 8 гл. II).

Теорема 7.6 (двойственность для проективной схемы). *Пусть X — проективная схема размерности n над алгебраически замкнутым полем k, ω_X° — дуализирующий пучок на X и $\mathcal{O}(1)$ — очень обильный пучок на X. Тогда*

(a) *для каждого $i \geqslant 0$ и любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существует естественное функториальное отображение*

$$\theta^i\colon \operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \to H^{n-i}(X, \mathcal{F})',$$

такое, что θ^i совпадает с отображением, указанным в определении дуализирующего пучка;

(b) *следующие условия эквивалентны:*

(i) *X является равноразмерной (т. е. все ее неприводимые компоненты имеют одинаковую размерность) схемой Коэна — Маколея;*

(ii) *для всякого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X $H^i(X, \mathcal{F}(-q)) = 0$ при $i < n$ и $q \gg 0$;*

(iii) *отображения θ^i из (a) являются изоморфигмами для всех $i \geqslant 0$ и любых когерентных пучков $\mathcal{F}$ на X.*

Доказательство. (a) Как и в доказательстве теоремы 7.1(c), мы можем представить любой когерентный пучок $\mathcal{F}$ как факторпучок пучка $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X(-q)$ с $q \gg 0$. Тогда $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}, \omega_X^\circ) \simeq \oplus H^i(X, \omega_X^\circ(q))$, что по 5.2 равно 0 при $i > 0$ и $q \gg 0$. Следовательно, при $i > 0$ функтор $\operatorname{Ext}^i(\cdot, \omega_X^\circ)$ является стирающим, так что по 1.3A мы имеем универсальный контравариантный δ-функтор. С правой стороны стоит тоже контравариантный δ-функтор, индексированный $i \geqslant 0$, стало быть, существует единственный морфизм δ-функторов (θ^i), совпадающий с заданным морфизмом θ^0 при $i = 0$.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii). Вложим X в качестве замкнутой подсхемы в $P = \mathbf{P}_k^N$. Тогда для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X и любой замкнутой точки $x \in X$ имеем $\operatorname{depth} \mathcal{F}_x = n$, поскольку X — равноразмерная схема Коэна — Маколея размерности n. Пусть $A = \mathcal{O}_{P,x}$ — локальное кольцо точки x на P. Тогда A является регулярным локальным кольцом размерности N. (Так как поле k алгебраически замкнуто и x — точка, рациональная над k, то регулярность A можно проверить непосредственно. Она следует также из того факта, что P — неособое многообразие над k (см. § 8 гл. II). Глубина $\operatorname{depth} \mathcal{F}_x$ не зависит от того, вычислена ли она над $\mathcal{O}_{X,x}$ или над A. Поэтому из 6.12A мы заключаем, что $\operatorname{pd}_A \mathcal{F}_x = N - n$. Следовательно, по 6.8 и 6.10A имеем

$$\mathcal{E}xt_P^i(\mathcal{F}, \cdot) = 0$$

при $i > N - n$.

С другой стороны, используя 7.1, находим, что $H^i(X, \mathcal{F}(-q))$ двойственно $\operatorname{Ext}_P^{N-i}(\mathcal{F}, \omega_P(q))$. При $q \gg 0$ этот Ext, согласно 6.9, изоморфен $\Gamma(P, \mathcal{E}xt_P^{N-i}(\mathcal{F}, \omega_P(q)))$. Но это, как мы уже видели, равно 0 при $N - i > N - n$. Иначе говоря, $H^i(X, \mathcal{F}(-q)) = 0$ при $i < n$ и $q \gg 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Повторяя предыдущие рассуждения в обратном порядке, используя условие (ii) с $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, находим, что

$$\mathcal{E}xt_P^i(\mathcal{O}_X, \omega_P) = 0$$

при $i > N - n$. Это означает, что над локальным кольцом $A =$

$= \mathcal{O}_{P,x}$ мы имеем $\operatorname{Ext}^i_A(\mathcal{O}_{X,x}, A) = 0$ при $i > N - n$. Следовательно, в силу упр. 6.6 имеем $\operatorname{pd}_A \mathcal{O}_{X,x} \leqslant N - n$ и в силу 6.12A depth $\mathcal{O}_{X,x} \geqslant n$. Но поскольку $\dim X = n$, то для каждой замкнутой точки x в X должно выполняться равенство. Согласно 8.21A(b) гл. II, это означает, что X является схемой Коэна — Маколея и равноразмерна.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Как мы уже видели, $\operatorname{Ext}^i(\cdot, \omega_X^\circ)$ образуют универсальный контравариантный δ-функтор. Поэтому для доказательства того, что θ^i являются изоморфизмами, достаточно показать, что δ-функтор $(H^{n-i}(X, \cdot)')$ также универсален. Для этого в свою очередь по 1.3A достаточно проверить, что функторы $H^{n-i}(X, \cdot)'$ являются стирающими для всех $i > 0$. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок, представим его в виде факторпучка пучка $\mathcal{E} = \oplus\, \mathcal{O}(-q)$ с $q \gg 0$. Тогда по (ii) $H^{n-i}(X, \mathcal{E})' = 0$ при $i > 0$, а это и доказывает, что функтор $H^{n-i}(X, \cdot)$ стирающий.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть θ^i — изоморфизм, тогда для любого локально свободного $\mathcal{F}$ имеем изоморфизм

$$H^i(X, \mathcal{F}(-q)) \simeq \operatorname{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}(-q), \omega_X^\circ)'.$$

Но по 6.3 и 6.7 этот Ext изоморфен $H^{n-i}(X, \check{\mathcal{F}} \otimes \omega_X^\circ(q))$, так что по 5.2 он равен 0 при $n - i > 0$ и $q \gg 0$. Теорема полностью доказана.

Замечание 7.6.1. В частности, если схема X неособа над k или, более общим образом, является локально полным пересечением, то по 8.21A гл. II и 8.23 гл. II она является схемой Коэна — Маколея, так что в этих случаях θ^i — изоморфизмы. Здесь можно показать непосредственно (ср. доказательство теоремы 7.11), что $\operatorname{pd}_P \mathcal{O}_X = N - n$, и тем самым избежать использование алгебраических результатов 6.12A и упр. 6.6.

Следствие 7.7. *Пусть X — проективная равноразмерная схема Коэна — Маколея размерности n над k. Тогда для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X имеют место естественные изморфизмы*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^{n-i}(X, \check{\mathcal{F}} \otimes \omega_X^\circ)'.$$

Доказательство. Воспользоваться предл. 6.3 и 6.7.

Следствие 7.8. (лемма Энриквеса — Севери — Зарисского (см. Зарисский [4])). *Пусть X — нормальная проективная схема размерности $\geqslant 2$. Тогда для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X имеем*

$$H^1(X, \mathcal{F}(-q)) = 0$$

для $q \gg 0$.

Доказательство. Так как схема X нормальна и $\dim X \geqslant 2$, то depth $\mathcal{F}_x \geqslant 2$ для каждой замкнутой точки $x \in X$ (см. 8.22A гл. II). Поэтому доказательство этого утверждения получается тем же методом, что и доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в теореме 7.6(b).

Следствие 7.9. *Пусть X — целое нормальное проективное многообразие размерности $\geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем k и Y — подмногообразие коразмерности 1, являющееся носителем эффективного обильного дивизора. Тогда Y связно.*

Доказательство. Согласно 7.6 гл. II, можно предполагать, что Y — носитель очень обильного дивизора D. Пусть $\mathcal{O}(1)$ — соответствующий очень обильный обратимый пучок. Для каждого $q > 0$ пусть Y_q обозначает замкнутую подсхему с носителем Y, соответствующую дивизору qD (см. 6.17.1 гл. II). Тогда мы имеем точную последовательность (6.18 гл. II)

$$0 \to \mathcal{O}_X(-q) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{Y_q} \to 0.$$

Переходя к когомологиям и используя 7.8, находим, что при $q \gg 0$ отображение

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \to H^0(Y, \mathcal{O}_{Y_q}) \to 0$$

сюръективно. Но $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ (см. 3.4(a) гл. I) и $H^0(Y, \mathcal{O}_{Y_q})$ содержит k, поэтому мы заключаем, что $H^0(Y, \mathcal{O}_{Y_q}) = k$. Следовательно, Y связно. (В противном случае $H^0(Y, \mathcal{O}_{Y_q})$ содержало бы по меньшей мере столько экземпляров слагаемых k, сколько имеется связных компонент у Y.)

Замечание 7.9.1. Отсюда следует, что схемы $H \cap X$, участвующие в теореме Бертини 8.18 гл. II, являются на самом деле *неприводимыми* и неособыми, если только $\dim X \geqslant 2$. В самом деле, согласно 7.9, они связны. С другой стороны, по 8.18 гл. II они регулярны. Следовательно, их локальные кольца являются целостными, чего не может быть для локального кольца точки из пересечения двух неприводимых компонент.

Теперь, когда основная теорема двойственности 7.6 доказана, мы возвратимся к исследованию дальнейших свойств дуализирующего пучка ω_X° для некоторых частных случаев. Нам понадобятся опять некоторые предварительные алгебраические результаты.

Пусть A — кольцо и $f_1, \ldots, f_r \in A$ — некоторые элементы. Определим *комплекс Кошуля* $K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)$ следующим образом: K_1 — это свободный A-модуль ранга r с базисом $e_1, \ldots, e_r$;

$K_p = \bigwedge^p K_1$ для каждого $p = 0, \ldots, r$. Граничный оператор $d\colon K_p \to K_{p-1}$ определяется на базисных векторах формулой

$$d(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \sum (-1)^{j-1} f_{i_j} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.$$

Таким образом, $K_.(f_1, \ldots, f_r)$ — это (гомологический) комплекс A-модулей. Для любого A-модуля M положим $K_.(f_1, \ldots, f_r; M) = K_.(f_1, \ldots, f_r) \otimes_A M$.

Предложение 7.10А. *Пусть A — кольцо, $f_1, \ldots, f_r \in A$ и M — некоторый A-модуль. Тогда если $f_1, \ldots, f_r$ образуют регулярную последовательность для M, то*

$$h_i(K_.(f_1, \ldots, f_r; M)) = 0 \quad \text{при} \quad i > 0$$

и

$$h_0(K_.(f_1, \ldots, f_r; M)) \simeq M/(f_1, \ldots, f_r) M.$$

Доказательство. См. Мацумура [2, теорема 43, стр. 135] или Серр [11, IV.A].

Теорема 7.11. *Пусть X — замкнутая подсхема в $P = \mathbf{P}_k^N$, являющаяся локально полным пересечением коразмерности r, и пусть $\mathcal{J}$ — пучок идеалов X. Тогда $\omega_X^\circ \simeq \omega_P \otimes \bigwedge^r (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^\vee$. В частности, ω_X° является обратимым пучком на X.*

Доказательство. Вычислим $\omega_X^\circ = \mathcal{E}xt_P^r(\mathcal{O}_X, \omega_P)$. Пусть U — открытое аффинное подмножество, над которым $\mathcal{J}$ может быть порожден r элементами $f_1, \ldots, f_r \in A = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Тогда поскольку коразмерность X равна r и A локально является кольцом Коэна — Маколея, то $f_1, \ldots, f_r$ образуют регулярную последовательность для A (см. 8.21А гл. II). Следовательно, комплекс Кошуля $K_.(f_1, \ldots, f_r)$ дает свободную резольвенту модуля $A/(f_1, \ldots, f_r)$ над A. Переходя к соответствующим пучкам, получаем свободную резольвенту пучка $\mathcal{O}_X$ над U, которую мы обозначим через $K_.(f_1, \ldots, f_r; \mathcal{O}_P)$. Воспользуемся этой резольвентой для вычисления $\mathcal{E}xt_P^r(\mathcal{O}_X, \omega_P)$ над U (см. 6.5). Получаем изоморфизм

$$h^r(\mathcal{H}om(K_.(f_1, \ldots, f_r; \mathcal{O}_P), \omega_P)) \simeq \omega_P/(f_1, \ldots, f_r)\omega_P.$$

Иначе говоря,

$$\mathcal{E}xt_P^r(\mathcal{O}_X, \omega_P) \simeq \omega_P \otimes \mathcal{O}_X$$

над U. Однако этот изоморфизм зависит от выбора базиса $f_1, \ldots, f_r$ для $\mathcal{J}$. Пусть $g_i = \sum c_{ij} f_j$, $i = 1, \ldots, r$, — другой базис, тогда внешние степени матрицы $|c_{ij}|$ дают изоморфизм соответствующих комплексов Кошуля. В частности, на K_r возникает множитель $\det|c_{ij}|$, так что построенный изоморфизм пучка

$\mathcal{E}xt^r$ при переходе к другому базису изменяется на множитель $\det|c_{ij}|$.

Для того чтобы выправить ситуацию, рассмотрим пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ на X, который является локально свободным и имеет ранг r (см. 8.21А гл. II). В частности, он свободен над U и $f_1, \ldots, f_r$ — его базис. Следовательно, пучок $\bigwedge^r(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ является свободным пучком ранга 1 с базисным элементом $f_1 \wedge \ldots \wedge f_r$. Если поменять базис на $g_1, \ldots, g_r$, то этот элемент изменится на множитель $\det|c_{ij}|$. Поэтому предыдущий изоморфизм можно сделать инвариантным, если правую сторону тензорно домножить на пучок $\bigwedge^r(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^\vee$ (проверить это!):

$$\mathcal{E}xt_P^r(\mathcal{O}_X, \omega_P) \simeq \omega_P \otimes \mathcal{O}_X \otimes \bigwedge^r(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^\vee.$$

Этот изоморфизм, определенный над U, не зависит от выбора базиса. Следовательно, если мы покроем P такими открытыми множествами, то эти изоморфизмы склеятся вместе и мы получим требуемый изоморфизм $\omega_X^\circ \simeq \omega_P \otimes \bigwedge^r(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^\vee$.

Следствие 7.12. *Пусть X — проективное неособое многообразие над алгебраически замкнутым полем k. Тогда дуализирующий пучок ω_X° изоморфен каноническому пучку ω_X.*

Доказательство. Вложим X в $P = \mathbf{P}_k^N$. Тогда X будет локально полным пересечением в P (см. 8.17 гл. II) и $\omega_X \simeq \omega_P \otimes \bigwedge^r(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ по 8.20 гл. II.

Замечание 7.12.1. Таким образом, для проективного неособого многообразия X теорема двойственности 7.6 и ее следствие 7.7 выполняются с ω_X вместо ω_X°. В частности, мы получаем изоморфизм $H^n(X, \omega_X) \simeq k$, существование которого отнюдь не очевидно a priori.

Замечание 7.12.2. Если X — проективная неособая кривая, то мы получаем, что пространства $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ и $H^0(X, \omega_X)$ двойственны друг другу. Следовательно, арифметический род $p_a = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ и геометрический род $p_g = \dim \Gamma(X, \omega_X)$ в этом случае равны (см. упр. 5.3(a) и 8.18.2 гл. II).

Замечание 7.12.3. Если X — проективная неособая поверхность, то $H^0(X, \omega_X)$ двойственно $H^2(X, \mathcal{O}_X)$, так что $p_g = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X)$. С другой стороны, $p_a = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (см. упр. 5.3(a)). Следвателоно, $p_g \geqslant p_a$. Разность $p_g - p_a = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ обычно обозначается через q и называется *иррегулярностью* поверхности X. Например, иррегулярность поверхности из упр. 8.3(c) гл. II равна 2.

Следствие 7.13. *Пусть X — неособое проективное многообразие размерности n, и пусть $\Omega^p = \bigwedge^p \Omega_{X/k}$ — пучок дифферен-*

циальных p-форм для любого $p = 0, 1, \ldots, n$. *Тогда для каждых* $p, q = 0, 1, \ldots, n$ *мы имеем естественный изоморфизм*

$$H^q(X, \Omega^p) \simeq H^{n-q}(X, \Omega^{n-p})'.$$

Доказательство. Действительно, согласно упр. 5.16 гл. II, $\Omega^{n-p} \simeq (\Omega^p)^\vee \otimes \omega$ для любого p. Остается применить 7.7.

Замечание 7.13.1. Числа $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega^p)$ являются важными бирегулярными инвариантами многообразия X.

Замечание 7.14. (вычеты дифференциалов на кривых). Слабость теоремы двойственности в доказанном нами варианте заключается в том, что даже в случае неособого проективного многообразия X мы не получаем никакой информации об отображении следа $t: H^n(X, \omega) \to k$. Известно только, что это отображение существует. В случае кривых имеется другой способ доказательства теоремы двойственности с использованием вычетов, который проясняет ситуацию.

Пусть X — полная неособая кривая над алгебраически замкнутым полем k и K — поле функций на X. Пусть Ω_X — пучок дифференциалов на X над k, и для каждой замкнутой точки $P \in X$ пусть Ω_P обозначает его слой в P. Обозначим через Ω_K модуль дифференциалов поля K над k. Доказывается прежде всего следующая

Теорема 7.14.1 (существование вычетов). *Для каждой замкнутой точки* $P \in X$ *существует единственное* k*-линейное отображение* $\text{res}_P: \Omega_K \to k$ *со следующими свойствами:*

(a) $\text{res}_P(\tau) = 0$ *для всех* $\tau \in \Omega_P$;

(b) $\text{res}_P(f^n df) = 0$ *для всех* $f \in K^*$ *и всех* $n \neq -1$;

(c) $\text{res}_P(f^{-1}df) = v_P(f)\cdot 1$, *где* v_P — *нормирование, ассоциированное с точкой* P.

Из этих свойств непосредственно видно, как вычислять вычет любого дифференциала. Действительно, пусть $t \in \mathcal{O}_P$ — униформизирующий параметр. Тогда dt является образующим модуля Ω_K как векторного пространства над K, поэтому любой дифференциал $\tau \in \Omega_K$ можно записать в виде $g\,dt$ для некоторого $g \in K$. Более того, так как $\mathcal{O}_P$ является кольцом дискретного нормирования, то g можно представить в виде $g = \sum_{i<0} a_i t^i + h$, $a_i \in k$, $h \in \mathcal{O}_P$, где сумма конечна. Тогда $\tau = \sum a_i t^i dt + h\,dt$. Теперь по линейности и свойствам (a), (b) и (c) находим, что

(d) $\text{res}_P \tau = a_{-1}$.

Таким образом, единственность res_P очевидна.

Вопрос существования является более трудным. Один из подходов предложен Серром [7, гл. II]. Он заключается в том, чтобы

взять свойство (d) в качестве определения вычета. Но тогда нужно доказывать его независимость от выбора униформизирующего параметра, что не очевидно, особенно в характеристике $p > 0$. Другой подход Тэйта [2] дает инвариантную конструкцию отображения вычета, искусно использующую некоторые k-линейные преобразования K.

Теорема 7.14.2 (теорема о вычетах). *Для всякого* $\tau \in \Omega_K$ *имеем* $\sum_{P \in X} \text{res}_P \tau = 0$.

В варианте Серра эта теорема доказывается сначала на $\mathbf{P}^1$ с помощью явных вычислений. Общий случай затем получается с помощью рассмотрения конечного морфизма $f: X \to \mathbf{P}^1$ и изучения связи между вычетами на X и на $\mathbf{P}^1$. В варианте Тейта теорема о вычетах непосредственно вытекает из конструкции отображения вычета.

После того как теория вычетов построена, теорема двойственности для X может быть доказана методом Вейля с использованием распределений. За подробностями и историческими справками мы отсылаем читателя к прозрачным изложениям Серра и Тэйта, упомянутым выше.

Связь с нашим подходом может быть установлена следующим образом. Точная последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{K}_X \to \mathcal{K}_X/\mathcal{O}_X \to 0,$$

где $\mathcal{K}_X$ — постоянный пучок поля рациональных функций на X, является плоской резольвентой пучка $\mathcal{O}_X$ (ср. упр. 2.2). Более того,

$$\mathcal{K}_X/\mathcal{O}_X = \bigoplus_{P \in X} i_*(K_X/\mathcal{O}_P),$$

где $K_X/\mathcal{O}_P$ рассматривается как $\mathcal{O}_P$-модуль и $i: \{P\} \to X$ — отображение вложения. Умножая эту последовательность тензорно на Ω_X, получаем плоскую резольвенту для пучка Ω_X

$$0 \to \Omega_X \to \Omega_X \otimes \mathcal{K}_X \to \bigoplus_{P \in X} i_*(\Omega_K/\Omega_P) \to 0.$$

Переходя к когомологиям, получаем следующую точную последовательность:

$$\Omega_K \to \bigoplus_{P \in X} \Omega_K/\Omega_P \to H^1(X, \Omega_X) \to 0.$$

Определим отображение

$$\bigoplus_{P \in X} \Omega_K/\Omega_P \to k$$

как сумму всех отображений вычетов $\text{res}_P: \Omega_K/\Omega_P \to k$. Тогда по 7.14.2 это отображение обращается в нуль на образе Ω_K, а следовательно, продолжается на соответствующий фактор и дает отображение $t\colon H^1(X, \Omega_X) \to k$. Это не что иное, как отображение следа в теореме двойственности, которое приобрело здесь более явный вид.

Замечание 7.15 (теорема Кодаиры об отображении в нуль). Наше обсуждение когомологий проективных многообразий не было бы полным без упоминания теоремы Кодаиры об обращении в нуль. Она утверждает, что если $\mathscr{L}$ — обильный обратимый пучок на неособом проективном многообразии X размерности n над $\mathbf{C}$, то

(a) $H^i(X, \mathscr{L}\otimes\omega) = 0$ при $i > 0$;

(b) $H^i(X, \mathscr{L}^{-1}) = 0$ при $i < n$.

Разумеется, утверждения (a) и (b) эквивалентны по двойственности Серра. Теорема Кодаиры доказывается с помощью средств комплексно-аналитической дифференциальной геометрии. По настоящее время нет ее чисто алгебраического доказательства. С другой стороны, как показал недавно Рейно, этот результат неверен в характеристике $p > 0$.

Первое доказательство теоремы Кодаиры об обращении в нуль было дано Кодаирой [1]. Другие доказательства, включая обобщенный вариант Накано, см. Уэллс [1, гл. VI, § 2], Мамфорд [3] и Рамануджам [1]. Относительный вариант этой теоремы см. Грауэрт и Риманшнайдер [1].

Ссылки для теоремы двойственности. Впервые теорема двойственности была доказана Серром в [2] (в форме 7.7) для локально свободных пучков на компактном комплексном многообразии и в [1] в случае абстрактной алгебраической геометрии. Наше доказательство следует доказательству Гротендика [5] и [SGA 2, exp. XII] с некоторыми усовершенствованиями, предложенными Липманом. Теорема двойственности и теория вычетов были обобщены на случай произвольных собственных морфизмов Гротендиком — см. Гротендик [4] и Хартсхорн [2]. Делинь дал другое доказательство существования дуализирующего пучка, а Вердье [1] показал, что для неособых многообразий этот пучок совпадает с пучком ω. Кунц [1] предложил другую конструкцию, использующую дифференциалы дуализирующего пучка ω_X° для целых проективных схем X над полем k.

Теорема двойственности была обобщена также на случай собственных морфизмов комплексно-аналитических пространств, см. Рами и Руже [1] и Рами, Руже и Вердье [1]. Обобщение на компактные комплексные многообразия см. Суоминен [1].

В случае кривых теорема двойственности является наиболее существенным моментом в доказательстве теоремы Римана — Роха (см. § 1 гл. IV). По этому поводу см. Серр [7, гл. II], а также Ганнинг [1] (на языке компактных римановых поверхностей).

Упражнения

7.1. Пусть X — целая проективная схема размерности $\geqslant 1$ над полем k и $\mathscr{L}$ — обильный обратимый пучок на X. Показать, что тогда $H^0(X, \mathscr{L}^{-1}) = 0$. (Это легкий частный случай теоремы Кодаиры об обращении в нуль.)

7.2. Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм проективных схем над полем k и ω_Y° — дуализирующий пучок на Y.

(a) Показать, что $f^!\omega_Y^\circ$ является дуализирующим пучком на X (определение $f^!$ см. в упр. 6.10).

(b) Показать, что в случае неособых X и Y над алгебраически замкнутым полем k существует естественное отображение следа $t\colon f_*\omega_X \to \omega_Y$.

7.3. Пусть $X = \mathbf{P}_k^n$. Показать, что $H^q(X, \Omega_X^p)$ равно 0, если $p \neq q$, и равно k, если $p = q$, $0 \leqslant p, q \leqslant n$.

*7.4. *Класс когомологий подмногообразия.* Пусть X — неособое проективное многообразие размерности n над алгебраически замкнутым полем k и Y — неособое подмногообразие в X коразмерности p (следовательно, размерности $n-p$). Из естественного отображения $\Omega_X \otimes \mathscr{O}_Y \to \Omega_Y$ (см. 8.12 гл. II) было получено отображение $\Omega_X^{n-p} \to \Omega_Y^{n-p}$. Оно индуцирует отображение когомологий $H^{n-p}(X, \Omega_X^{n-p}) \to H^{n-p}(Y, \Omega_Y^{n-p})$. Здесь $\Omega_Y^{n-p} = \omega_Y$ — дуализирующий пучок для Y, так что мы получаем отображение следа $t_Y\colon H^{n-p}(Y, \Omega_Y^{n-p}) \to k$. Композиция с предыдущим отображением дает линейное отображение $H^{n-p}(X, \Omega_X^{n-p}) \to k$ над k. Согласно 7.13, это отображение соответствует некоторому элементу $\eta(Y) \in H^p(X, \Omega_X^p)$, который мы будем называть *классом когомологий подмногообразия* Y.

(a) Показать, что если $P \in X$ — замкнутая точка, то $t_X(\eta(P)) = 1$, где $\eta(P) \in H^n(X, \Omega_X^n)$ и t_X — отображение следа.

(b) В случае $X = \mathbf{P}^n$ отождествить $H^p(X, \Omega_X^p)$ с k (см. упр. 7.3) и показать, что $\eta(Y) = (\deg Y)\cdot 1$, где $\deg Y$ — *степень* проективного многообразия Y (см. § 7 гл. I). [*Указание.* Пересекая с гиперплоскостью $H \subset X$ и используя теорему Бертини 8.18 гл. II, свести к случаю, когда Y является конечным множеством точек.]

(c) Для любой схемы конечного типа над k определим гомоморфизм пучков абелевых групп $d\log\colon \mathscr{O}_X^* \to \Omega_X$, полагая $d\log(f) = f^{-1}\,df$. Здесь $\mathscr{O}_X^*$ — пучок групп по умножению, а Ω_X — пучок групп по сложению. Это отображение индуцирует отображение когомологий $\operatorname{Pic} X = H^1(X, \mathscr{O}_X^*) \to H^1(X, \Omega_X)$, которое мы будем обозначать буквой c, см. упр. 4.5.

(d) В предыдущих обозначениях пусть $p = 1$. Показать, что $\eta(Y) = c(\mathscr{L}(Y))$, где $\mathscr{L}(Y)$ — обратимый пучок, соответствующий дивизору Y. Дальнейшие обсуждения этого вопроса см. Мацумура [1].

§ 8. Высшие прямые образы пучков

В оставшейся части этой главы мы будем изучать различные семейства схем. Напомним (§ 3 гл. II), что семейство схем — это просто морфизм $f\colon X \to Y$, а элементами семейства являются его слои $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$ над всевозможными точками $y \in Y$. Для изучения семейств нам понадобится некоторый вариант относительных когомологий X над Y, или когомологий вдоль слоев морфизма $f\colon X \to Y$. Такими когомологиями будут служить функторы высших прямых образов R^if_*, которые мы сейчас определим. Точная связь этих функторов с когомологиями слоев X_y будет изучаться в § 11, 12.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Определим *функторы высших прямых образов* $R^if_*\colon \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}(Y)$ как правые производные функторы от функтора прямого образа f_* (см. § 1 гл. II).

Это определение имеет смысл, так как функтор f_* является, очевидно, точным слева и категория $\mathfrak{Ab}(X)$ имеет достаточно много инъективных объектов (см. 2.3).

Предложение 8.1. *Для каждого $i \geqslant 0$ и любого $\mathcal{F} \in \mathfrak{Ab}(X)$ $R^if_*(\mathcal{F})$ является пучком на Y, ассоциированным с предпучком*

$$V \to H^i(f^{-1}(V),\ \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{H}^i(X, \mathcal{F})$ пучок, ассоциированный с указанным в формулировке предложения предпучком. Тогда поскольку функтор перехода к пучку, ассоциированному с предпучком, точен, то $\mathcal{H}^i(X, \cdot)$ образуют δ-функтор из $\mathfrak{Ab}(X)$ в $\mathfrak{Ab}(Y)$. При $i = 0$ имеем $f_*\mathcal{F} = \mathcal{H}^0(X, \mathcal{F})$ по определению f_*. Более того, для любого инъективного объекта $\mathcal{I} \in \mathfrak{Ab}(X)$ и для $i > 0$ имеем $R^if_*(\mathcal{I}) = 0$, так как R^if_* — производный функтор. С другой стороны, для всякого открытого множества V пучок $\mathcal{I}|_{f^{-1}(V)}$ инъективен в $\mathfrak{Ab}(f^{-1}(V))$ по 6.1 (здесь X рассматривается как окольцованное пространство с постоянным пучком $\mathbf{Z}$), так что $\mathcal{H}^i(X, \mathcal{I})$ также обращаются в нуль при $i > 0$. Следовательно, существует единственный изоморфизм δ-функторов $R^if_*(\cdot) \simeq \mathcal{H}^i(X, \cdot)$ (см. 1.3A).

Следствие 8.2. *Пусть $V \subset Y$ — любое открытое подмножество, тогда*

$$R^if_*(\mathcal{F})|_V = R^if'_*(\mathcal{F})|_{f^{-1}(V)},$$

где $f'\colon f^{-1}(V) \to V$ — ограничение отображения f.

Доказательство. Очевидно.

Следствие 8.3. *Пусть $\mathcal{F}$ — плоский пучок на X, тогда $R^if_*(\mathcal{F}) = 0$ для всех $i > 0$.*

Доказательство. Так как ограничение плоского пучка на открытое подмножество является плоским, то утверждение немедленно вытекает из 2.5.

Предложение 8.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм окольцованных пространств. Тогда функторы R^if_* могут быть вычислены в $\mathfrak{Mod}(X)$ как производные функторы от функтора $f_*\colon \mathfrak{Mod}(X) \to \mathfrak{Mod}(Y)$.*

Доказательство. Для вычисления производных функторов от f_* в $\mathfrak{Mod}(X)$ воспользуемся инъективной резольвентой, состоящей из инъективных объектов категории $\mathfrak{Mod}(X)$. Согласно 2.4, всякий инъективный пучок из $\mathfrak{Mod}(X)$ является плоским, а следовательно, по 8.3 ациклическим для f_* в $\mathfrak{Ab}(X)$, так что R^if_* действительно можно вычислять с помощью такой резольвенты (см. 1.2A).

Предложение 8.5. *Пусть X — нётерова схема и $f\colon X \to Y$ — морфизм X в аффинную схему $Y = \operatorname{Spec} A$. Тогда для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X имеем изоморфизм*

$$R^if_*(\mathcal{F}) \simeq H^i(X, \mathcal{F})^\sim.$$

Доказательство. Согласно 5.8 гл. II, пучок $f_*\mathcal{F}$ квазикогерентен на Y. Следовательно, $f_*\mathcal{F} \simeq \Gamma(Y, f_*\mathcal{F})^\sim$. Но $\Gamma(Y, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$, что дает требуемый изоморфизм при $i = 0$.

Так как функтор $^\sim$ из $\mathfrak{Mod}(A)$ в $\mathfrak{Mod}(Y)$ точен, то с обеих сторон требуемого изоморфизма стоят δ-функторы из $\mathfrak{Qco}(X)$ в $\mathfrak{Mod}(Y)$. Более того, по 3.6 любой квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ на X может быть вложен в некоторый плоский квазикогерентный пучок. Следовательно, оба δ-функтора являются стирающими при $i > 0$. Из 1.3A мы заключаем, что тогда существует единственный изоморфизм этих δ-функторов, индуцирующий заданный изоморфизм при $i = 0$.

Отметим, что если $\mathcal{F}$ не является квазикогерентным, то утверждение неверно, вообще говоря, даже в случае $i = 0$.

Следствие 8.6. *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем, причем схема X нётерова. Тогда для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X пучки $R^if_*(\mathcal{F})$ квазикогерентны на Y.*

Доказательство. Утверждение локально по Y, так что можно воспользоваться предложением 8.5.

Предложение 8.7. *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм отделимых нётеровых схем, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X, $\mathfrak{U} = (U_i)$ — открытое аффинное покрытие X и $\mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ — резольвента Чеха пучка $\mathcal{F}$, определенная в 4.2. Тогда для каждого $p \geqslant 0$ имеет место изоморфизм*

$$R^pf_*(\mathcal{F}) \simeq h^p(f_*\mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})).$$

Доказательство. Для любого открытого аффинного подмножества $V \subset Y$ все открытые подмножества $U_i \cap f^{-1}(V)$ на X аффинны (проверить это! — см. упр. 4.3 гл. II). Поэтому можно свести все к случаю, когда Y аффинна. Тогда все пучки $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ квазикогерентны, следовательно, по 5.8 гл. II имеет место изоморфизм

$$f_*\mathscr{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \simeq C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F})^\sim.$$

Утверждение следует теперь из 4.5 и 8.5.

Теорема 8.8. *Пусть $f\colon X \to Y$ — проективный морфизм нётеровых схем, $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильный пучок на X относительно Y и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *естественное отображение $f^*f_*(\mathscr{F}(n)) \to \mathscr{F}(n)$ сюръективно для всех $n \gg 0$;*

(b) *$R^if_*(\mathscr{F})$ являются когерентными пучками на Y для всех $i \geqslant 0$;*

(c) *$R^if_*(\mathscr{F}(n)) = 0$ для $i > 0$ и $n \gg 0$.*

Доказательство. Так как Y квазикомпактно и утверждения локальны по Y, то можно считать Y аффинным, скажем $Y = \operatorname{Spec} A$. Тогда в силу 8.5 утверждение (a) означает, что $\mathscr{F}(n)$ порождается своими глобальными сечениями, что вытекает из теоремы 5.17 гл. II. Утверждение (b) означает, что $H^i(X, \mathscr{F})$ — конечно порожденный A-модуль, что следует из теоремы 5.2(a). Наконец, утверждение (c) означает, что $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$, что вытекает из теоремы 5.2(b).

Замечание 8.8.1. Утверждение (b) этой теоремы верно в более общей ситуации, а именно для собственных морфизмов нётеровых схем, см. Гротендик [EGA III, 3.2.1]. Аналогичная теорема для собственных морфизмов комплексно-аналитических пространств была доказана Грауэртом [1].

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, $\mathscr{F}$ — пучок абелевых групп на X, и предположим, что $R^if_*(\mathscr{F}) = 0$ для всех $i > 0$. Показать, что для всех $i \geqslant 0$ существуют естественные изоморфизмы

$$H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^i(Y, f_*\mathscr{F}).$$

(Это вырожденный случай спектральной последовательности, см. Годеман [1, II, 4.17.1].)

8.2. Пусть $f\colon X \to Y$ — аффинный морфизм схем (упр. 5.17 гл. II), причем схема X нётерова, и пусть $\mathscr{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Показать, что тогда выполнены предположения упр. 8.1 и, следовательно, для каждого i имеет место изоморфизм $H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^i(Y, f_*\mathscr{F})$. (Это другое доказательство упр. 4.1.)

8.3. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм окольцованных пространств, $\mathscr{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль и $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей конечного ранга. Доказать следующую *формулу проекции* (ср. упр. 5.1 гл. II):

$$R^if_*(\mathscr{F} \otimes f^*\mathscr{E}) \simeq R^if_*(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{E}.$$

8.4. Пусть Y — нётерова схема и $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей ранга $n+1$, $n \geqslant 1$. Пусть $X = \mathbf{P}(\mathscr{E})$ (см. § 7 гл. II) с обратимым пучком $\mathcal{O}_X(1)$ и морфизмом проекции $\pi\colon X \to Y$.

(a) Показать, что тогда $\pi_*(\mathcal{O}(l)) \simeq S^l(\mathscr{E})$ для $l \geqslant 0$, $\pi_*(\mathcal{O}(l)) = 0$ для $l < 0$ (7.11 гл. II); $R^i\pi_*(\mathcal{O}(l)) = 0$ для $0 < i < n$ и всех $l \in \mathbf{Z}$; $R^n\pi_*(\mathcal{O}(l)) = 0$ для $l > -n-1$.

(b) Показать, что имеет место естественная точная последовательность

$$0 \to \Omega_{X/Y} \to (\pi^*\mathscr{E})(-1) \to \mathcal{O} \to 0$$

(ср. 8.13 гл. II); вывести отсюда, что *относительный канонический пучок* $\omega_{X/Y} = \bigwedge^n \Omega_{X/Y}$ изоморфен $(\pi^* \bigwedge^{n+1}\mathscr{E})(-n-1)$. Далее показать, что существует естественный изоморфизм $R^n\pi_*(\omega_{X/Y}) \simeq \mathcal{O}_Y$ (ср. 7.1.1).

(c) Показать теперь, что для любого $l \in \mathbf{Z}$

$$R^n\pi_*(\mathcal{O}(l)) \simeq \pi_*(\mathcal{O}(-l-n-1))^\smile \otimes (\bigwedge^{n+1}\mathscr{E})^\smile.$$

(d) Показать, что $p_a(X) = (-1)^n p_a(Y)$ (воспользоваться упр. 8.1) и что $p_g(X) = 0$ (воспользоваться 8.11 гл. II).

(e) Показать, в частности, что если Y — неособая проективная кривая рода g и $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга 2, то X — проективная поверхность с $p_a = -g$, $p_g = 0$ и с иррегулярностью g (см. 7.12.3). Такого типа поверхности называются *геометрически линейчатыми*, см. § 2 гл. V.

§ 9. Плоские морфизмы

В этом параграфе мы определим понятие плоского морфизма схем. Слои такого морфизма составляют плоское семейство. В сжатом виде оно выражает интуитивно расплывчатое понятие непрерывного семейства схем. С помощью различных утверждений и на примерах мы постараемся показать, насколько понятие плоского морфизма естественно, полезно и удобно при изучении семейств схем.

Напомним прежде всего чисто алгебраическое понятие плоского модуля. Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Модуль M называется *плоским* над A, если функтор $N \mapsto M \otimes_A N$ является точным функтором от $N \in \mathfrak{Mod}(A)$. Пусть $A \to B$ — гомоморфизм колец. Будем говорить, что B *плоско* над A, если оно плоско как A-модуль.

Предложение 9.1A. (a) *A-модуль M является плоским тогда и только тогда, когда для всякого конечно порожденного идеала $\mathfrak{a} \subset A$ отображение $\mathfrak{a} \otimes M \to M$ инъективно.*

(b) Расширение базы: *пусть M — плоский A-модуль и $A \to B$ — гомоморфизм колец, тогда $M \otimes_A B$ является плоским B-модулем.*

(c) Транзитивность: *пусть B — плоская A-алгебра и N — плоский B-модуль, тогда N является также плоским A-модулем.*

(d) Локализация: *модуль M является плоским над A тогда и только тогда, когда $M_\mathfrak{p}$ является плоским над $A_\mathfrak{p}$ для всякого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.*

но свести все к случаю, когда Y аффинна. Тогда все пучки $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ квазикогерентны, следовательно, по 5.8 гл. II имеет место изоморфизм

$$f_*\mathscr{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \simeq C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F})^\sim.$$

Утверждение следует теперь из 4.5 и 8.5.

Теорема 8.8. *Пусть $f: X \to Y$ — проективный морфизм нётеровых схем, $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильный пучок на X относительно Y и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *естественное отображение $f^*f_*(\mathscr{F}(n)) \to \mathscr{F}(n)$ сюръективно для всех $n \gg 0$;*

(b) *$R^if_*(\mathscr{F})$ являются когерентными пучками на Y для всех $i \geqslant 0$;*

(c) *$R^if_*(\mathscr{F}(n)) = 0$ для $i > 0$ и $n \gg 0$.*

Доказательство. Так как Y квазикомпактно и утверждения локальны по Y, то можно считать Y аффинным, скажем $Y = \operatorname{Spec} A$. Тогда в силу 8.5 утверждение (a) означает, что $\mathscr{F}(n)$ порождается своими глобальными сечениями, что вытекает из теоремы 5.17 гл. II. Утверждение (b) означает, что $H^i(X, \mathscr{F})$ — конечно порожденный A-модуль, что следует из теоремы 5.2(a). Наконец, утверждение (c) означает, что $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$, что вытекает из теоремы 5.2(b).

Замечание 8.8.1. Утверждение (b) этой теоремы верно в более общей ситуации, а именно для собственных морфизмов нётеровых схем, см. Гротендик [EGA III, 3.2.1]. Аналогичная теорема для собственных морфизмов комплексно-аналитических пространств была доказана Грауэртом [1].

Упражнения

8.1. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, $\mathscr{F}$ — пучок абелевых групп на X, и предположим, что $R^if_*(\mathscr{F}) = 0$ для всех $i > 0$. Показать, что для всех $i \geqslant 0$ существуют естественные изоморфизмы

$$H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^i(Y, f_*\mathscr{F}).$$

(Это вырожденный случай спектральной последовательности, см. Годеман [1, II, 4.17.1].)

8.2. Пусть $f: X \to Y$ — аффинный морфизм схем (упр. 5.17 гл. II), причем схема X нётерова, и пусть $\mathscr{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Показать, что тогда выполнены предположения упр. 8.1 и, следовательно, для каждого i имеет место изоморфизм $H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^i(Y, f_*\mathscr{F})$. (Это другое доказательство упр. 4.1.)

8.3. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм окольцованных пространств, $\mathscr{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль и $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей конечного ранга. Доказать следующую *формулу проекции* (ср. упр. 5.1 гл. II):

$$R^if_*(\mathscr{F} \otimes f^*\mathscr{E}) \simeq R^if_*(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{E}.$$

8.4. Пусть Y — нётерова схема и $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей ранга $n+1$, $n \geqslant 1$. Пусть $X = \mathbf{P}(\mathscr{E})$ (см. § 7 гл. II) с обратимым пучком $\mathcal{O}_X(1)$ и морфизмом проекции $\pi: X \to Y$.

(a) Показать, что тогда $\pi_*(\mathcal{O}(l)) \simeq S^l(\mathscr{E})$ для $l \geqslant 0$, $\pi_*(\mathcal{O}(l)) = 0$ для $l < 0$ (7.11 гл. II); $R^i\pi_*(\mathcal{O}(l)) = 0$ для $0 < i < n$ и всех $l \in \mathbf{Z}$; $R^n\pi_*(\mathcal{O}(l)) = 0$ для $l > -n-1$.

(b) Показать, что имеет место естественная точная последовательность

$$0 \to \Omega_{X/Y} \to (\pi^*\mathscr{E})(-1) \to \mathcal{O} \to 0$$

(ср. 8.13 гл. II); вывести отсюда, что *относительный канонический пучок* $\omega_{X/Y} = \bigwedge^n \Omega_{X/Y}$ изоморфен $(\pi^* \bigwedge^{n+1}\mathscr{E})(-n-1)$. Далее показать, что существует естественный изоморфизм $R^n\pi_*(\omega_{X/Y}) \simeq \mathcal{O}_Y$ (ср. 7.1.1).

(c) Показать теперь, что для любого $l \in \mathbf{Z}$

$$R^n\pi_*(\mathcal{O}(l)) \simeq \pi_*(\mathcal{O}(-l-n-1))^\smile \otimes (\bigwedge^{n+1}\mathscr{E})^\smile.$$

(d) Показать, что $p_a(X) = (-1)^n p_a(Y)$ (воспользоваться упр. 8.1) и что $p_g(X) = 0$ (воспользоваться 8.11 гл. II).

(e) Показать, в частности, что если Y — неособая проективная кривая рода g и $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга 2, то X — проективная поверхность с $p_a = -g$, $p_g = 0$ и с иррегулярностью g (см. 7.12.3). Такого типа поверхности называются *геометрически линейчатыми*, см. § 2 гл. V.

§ 9. Плоские морфизмы

В этом параграфе мы определим понятие плоского морфизма схем. Слои такого морфизма составляют плоское семейство. В сжатом виде оно выражает интуитивно расплывчатое понятие непрерывного семейства схем. С помощью различных утверждений и на примерах мы постараемся показать, насколько понятие плоского морфизма естественно, полезно и удобно при изучении семейств схем.

Напомним прежде всего чисто алгебраическое понятие плоского модуля. Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Модуль M называется *плоским* над A, если функтор $N \mapsto M \otimes_A N$ является точным функтором от $N \in \mathfrak{Mod}(A)$. Пусть $A \to B$ — гомоморфизм колец. Будем говорить, что B *плоско* над A, если оно плоско как A-модуль.

Предложение 9.1A. (a) *A-модуль M является плоским тогда и только тогда, когда для всякого конечно порожденного идеала $\mathfrak{a} \subset A$ отображение $\mathfrak{a} \otimes M \to M$ инъективно.*

(b) Расширение базы: *пусть M — плоский A-модуль и $A \to B$ — гомоморфизм колец, тогда $M \otimes_A B$ является плоским B-модулем.*

(c) Транзитивность: *пусть B — плоская A-алгебра и N — плоский B-модуль, тогда N является также плоским A-модулем.*

(d) Локализация: *модуль M является плоским над A тогда и только тогда, когда $M_\mathfrak{p}$ является плоским над $A_\mathfrak{p}$ для всякого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.*

(e) *Пусть* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — *точная последовательность A-модулей. Тогда если модули M' и M'' плоские, то M также плоский; если M и M'' плоские, то M' также плоский.*

(f) *Конечно порожденный модуль M над локальным нётеровым кольцом A является плоским тогда и только тогда, когда он свободен.*

Доказательство. См. Мацумура [2, гл. 2, § 3] или Бурбаки [1, гл. 1].

Пример 9.1.1. Пусть A — кольцо и $S \subset A$ — некоторая мультипликативная система, тогда локализация $S^{-1}A$ является плоской A-алгеброй. Пусть $A \to B$ — гомоморфизм колец, тогда если M есть B-модуль, который является плоским над A, и если S — мультипликативная система в B, то модуль $S^{-1}M$ также является плоским над A.

Пример 9.1.2. Пусть A — нётерово кольцо и $\mathfrak{a}$ — его идеал. Тогда $\mathfrak{a}$-адическое пополнение $\hat{A}$ является плоской A-алгеброй (9.3A гл. II).

Пример 9.1.3. Пусть A — целостное кольцо главных идеалов. A-модуль M является плоским тогда и только тогда, когда он без кручения. Действительно, согласно 9.1A(a), надо проверить только, что для каждого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ отображение $\mathfrak{a} \otimes M \to M$ инъективно. Но поскольку идеал $\mathfrak{a}$ главный, скажем порождающийся элементом t, то это утверждение равносильно тому, что t не является делителем нуля в M, т. е. M не имеет кручения.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем и $\mathscr{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль. Будем говорить, что $\mathscr{F}$ *является плоским над Y в точке* $x \in X$, если слой $\mathscr{F}_x$ является плоским $\mathcal{O}_{y,Y}$-модулем, где $y = f(x)$ и $\mathscr{F}_x$ рассматривается как $\mathcal{O}_{y,Y}$-модуль с помощью естественного отображения $f^\#\colon \mathcal{O}_{y,Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$. Будем говорить, что $\mathscr{F}$ *плоский над Y*, если он плоский для каждой точки $x \in X$. Будем говорить, что X *является плоской над Y*, если пучок $\mathcal{O}_X$ плоский над Y; в этом случае морфизм $f\colon X \to Y$ называется *плоским*.

Предложение 9.2. (a) *Открытое вложение является плоским морфизмом.*

(b) Замена базы: *пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм, $\mathscr{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль, плоский над Y, и пусть $g\colon Y' \to Y$ — произвольный морфизм. Положим $X' = X \times_Y Y'$ и обозначим через $f'\colon X' \to Y'$ проекцию на второй множитель. Пусть $\mathscr{F}' = p_1^*(\mathscr{F})$, тогда $\mathscr{F}'$ является плоским над Y'.*

(c) Транзитивность: *пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — два морфизма, $\mathscr{F}$ — некоторый $\mathcal{O}_X$-модуль, плоский над Y, и предположим, что Y является плоским над Z. Тогда пучок $\mathscr{F}$ является плоским над Z.*

(d) *Пусть $A \to B$ — гомоморфизм колец и M — некоторый B-модуль. Пусть $f\colon X = \operatorname{Spec} B \to Y = \operatorname{Spec} A$ — соответствующий морфизм аффинных схем и $\mathscr{F} = \tilde{M}$. Пучок $\mathscr{F}$ тогда и только тогда является плоским над Y, когда модуль M является плоским над A.*

(e) *Пусть X — нётерова схема и $\mathscr{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль. $\mathscr{F}$ является плоским над X тогда и только тогда, когда он локально свободен.*

Доказательство. Все эти утверждения непосредственно следуют из соответствующих утверждений для модулей в силу того, что функтор ~ совместим с тензорным умножением $\otimes$ (см. 5.2 гл. II).

Теперь в качестве иллюстрации важности понятия плоского морфизма покажем, что когомологии коммутируют с плоской заменой базы.

Предложение 9.3. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отделимый морфизм конечного типа нётеровых схем и $\mathscr{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Пусть $u\colon Y' \to Y$ — плоский морфизм нётеровых схем, и пусть*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

— *соответствующая диаграмма расширения базы. Тогда для всех $i \geqslant 0$ имеют место естественные изоморфизмы*

$$u^* R^i f_*(\mathscr{F}) \simeq R^i g_*(v^*\mathscr{F}).$$

Доказательство. Утверждение локально по Y и Y', так что мы можем считать их аффинными: $Y = \operatorname{Spec} A$, $Y' = \operatorname{Spec} A'$. Тогда по 8.5 утверждение сводится к тому, чтобы доказать изоморфизм

$$H^i(X, \mathscr{F}) \otimes_A A' \simeq H^i(X', \mathscr{F}').$$

Поскольку схема X отделима и нётерова и пучок $\mathscr{F}$ квазикогерентен, то $H^i(X, \mathscr{F})$ можно вычислять как когомологии Чеха некоторого аффинного покрытия $\mathfrak{U}$ схемы X (см. 4.5). С другой стороны, $\{v^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ образуют открытое аффинное покрытие $\mathfrak{U}'$ схемы X', и очевидно, что комплекс Чеха $C^\cdot(\mathfrak{U}', v^*\mathscr{F})$ есть в точности комплекс $C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \otimes_A A'$. Так как A' является плоским над A, то функтор $\cdot \otimes_A A'$ коммутирует с взятием групп когомологий комплекса Чеха, откуда и следует требуемый результат. Отметим, что морфизм g тоже отделим и имеет конечный тип над Y', поэтому схема X' тоже нётерова и отделима. Это обосновывает возможность применения теоремы 4.5 к X'.

Замечание 9.3.1. Из предыдущего доказательства видно, что если даже морфизм u не является плоским, тем не менее существует естественное отображение

$$u^* R^i f_* (\mathcal{F}) \to R^i g^* (v^* \mathcal{F}).$$

Следствие 9.4. *Пусть f: $X \to Y$ и $\mathcal{F}$ такие же, как и в 9.3, и предположим, что схема Y аффинна. Для каждой точки $y \in Y$ обозначим через X_y слой над y, и пусть $\mathcal{F}_y$ — индуцированный пучок на X_y. Пусть $k(y)$ обозначает постоянный пучок на замкнутом подмножестве $\{y\}$ в Y, где $k(y)$ — поле вычетое точки $y \in Y$. Тогда для всех $i \geqslant 0$ имеют место естественные изоморфизмы*

$$H^i (X_y, \mathcal{F}_y) \simeq H^i (X, \mathcal{F} \otimes k(y)).$$

Доказательство. Пусть $Y' \subset Y$ — подсхема $\overline{\{y\}}$ с приведенной индуцированной структурой, и пусть $X' = X \times_Y Y'$ — соответствующая замкнутая подсхема в X. Тогда оба объекта, изоморфизм которых мы хотим установить, зависят только от пучка $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes k(y)$ на X'. Поэтому X, Y и $\mathcal{F}$ мы можем заменить на X', Y' и $\mathcal{F}'$ соответственно, т. е. можем считать, что Y является целой аффинной схемой и $y \in Y$ — ее общая точка. В этом случае $\operatorname{Spec} k(y) \to Y$ является плоским морфизмом, так что можно применить предложение 9.3 и получить из него, что

$$H^i (X_y, \mathcal{F}_y) \simeq H^i (X, \mathcal{F}) \otimes k(y).$$

Но, согласно сделанной редукции, $H^i(X, \mathcal{F})$ уже является $k(y)$-модулем, поэтому тензорное умножение его на $k(y)$ ничего не меняет, и мы получаем требуемый результат. (Этот результат будет использоваться в § 12.)

Плоские семейства

Иметь хорошее понятие алгебраического семейства многообразий или схем важно по многим соображениям. Самое «наивное» определение состоит в том, чтобы считать членами семейства слои произвольного морфизма схем. Однако для того, чтобы получить «хорошее» определение семейства, мы должны потребовать, чтобы некоторые численные инварианты оставались постоянными для всех членов семества (например, размерность слоев морфизма). Оказывается, что если мы имеем дело с неособыми (или даже только

нормальными) многообразиями над полем, то наивное определение уже является хорошим. Очевидность этого устанавливает теорема 9.13: арифметический род в таком семействе остается постоянным.

С другой стороны, если рассматривать не обязательно нормальные многообразия или, более общим образом, схемы, то наивное определение уже не всегда будет хорошим. Поэтому мы ограничиаемся рассмотрением только плоских семейств схем, иначе говоря, семейств слоев плоских морфизмов. Это определение уже достаточно хорошее. Совершенно непонятно, почему алгебраическое условие плоскости структурных пучков должно гарантировать хорошее определение семейства. Но мы по крайней мере, оправдаем наш выбор, показав, что плоские семейства обладают рядом замечательных свойств, а в некоторых частных случаях дадим необходимые и достаточные условия плоскости. В частности, покажем, что семейство замкнутых подсхем проективного пространства (над целой схемой) является плоским тогда и только тогда, когда все они имеют один и то же многочлен Гильберта.

Предложение 9.5. *Пусть f: $X \to Y$ — плоский морфизм конечного типа нётеровых схем. Для любой точки $x \in X$ пусть $y = f(x)$. Тогда*

$$\dim_x (X_y) = \dim_x X - \dim_y Y.$$

Здесь $\dim_x X$ (для любой схемы X и точки $x \in X$) *означает размерность локального кольца $\mathcal{O}_{x,X}$*.

Доказательство. Прежде всего сделаем замену базы $Y' \to Y$, где $Y' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{y,Y}$, и рассмотрим новый морфизм f': $X' \to Y'$, где $X' = X \times_Y Y'$. Тогда, согласно 9.2, морфизм f' тоже является плоским, точка x поднимается на X' и все три члена в требуемом равенстве остаются теми же самыми. Поэтому можно считать, что y — замкнутая точка в Y и $\dim_y Y = \dim Y$.

Теперь воспользуемся индукцией по $\dim Y$. Если $\dim Y = 0$, то X_y определяется нильпотентным идеалом в X, так что $\dim_x (X_y) = \dim_x X$ и $\dim_y Y = 0$. Если $\dim Y > 0$, то мы сделаем замену базы $Y_{\text{red}} \to Y$. Поэтому, ничего не меняя в утверждении, мы можем считать схему Y приведенной. Пусть $t \in \mathfrak{m}_y \subset \mathcal{O}_{y,Y}$ — элемент, не являющийся делителем нуля, и пусть $Y' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{y,Y}/(t)$. Сделаем замену базы $Y' \to Y$. Тогда по 1.8A гл. I и 1.11A гл. I $\dim Y' = \dim Y - 1$. Поскольку морфизм f плоский, то элемент $f^\# t \in \mathfrak{m}_x$ также не является делителем нуля. Поэтому по тем же соображениям $\dim_x X' = \dim_x X - 1$. Ясно, что при замене базы слой X_y не изменяется, так что требуемую формулу достаточно доказать только для морфизма f': $X' \to Y'$. Но в этом случае она следует, как только что было показано, из предположений индукции.

Следствие 9.6. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем конечного типа над полем k, и предположим, что схема Y неприводима. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *каждая неприводимая компонента X имеет размерность, равную* $\dim Y + n$;

(ii) *для любой точки $y \in Y$ (не обязательно замкнутой) каждая неприводимая компонента слоя X_y имеет размерность n.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Для заданной точки $y \in Y$ пусть $Z \subset X_y$ — неприводимая компонента и $x \in Z$ — замкнутая точка, не содержащаяся ни в какой другой неприводимой компоненте X_y. Из предложения 9.5 имеем

$$\dim_x Z = \dim_x X - \dim_y Y.$$

Но $\dim_x Z = \dim Z$, так как x — замкнутая точка (упр. 3.20 гл. II). С другой стороны, поскольку схема Y неприводима, а схема X равноразмерна и обе они имеют конечный тип над k, то (см. упр. 3.20 гл. II)

$$\dim_x X = \dim X - \dim \{x\}^-,$$
$$\dim_y Y = \dim Y - \dim \{y\}^-.$$

Наконец, так как x — замкнутая точка слоя X_y, то $k(x)$ является конечным алгебраическим расширением поля $k(y)$, поэтому

$$\dim \{x\}^- = \dim \{y\}^-.$$

Комбинируя эти равенства и используя условие (i), получаем, что $\dim Z = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть теперь Z — неприводиаая компонента X и $x \in Z$ — замкнутая точка, не содержащаяся ни в какой другой неприводимой комноненте X. Тогда из предложения 9.5 имеем

$$\dim_x (X_y) = \dim_x X - \dim_y Y.$$

Но $\dim_x (X_y) = n$ по условию (ii), $\dim_x X = \dim Z$ и $\dim_y Y = \dim Y$, так как $y = f(x)$ должна быть замкнутой точкой в Y. Таким образом.

$$\dim Z = \dim Y + n,$$

что и требовалось доказать.

Определение. Точка x схемы X называется *ассоциированной точкой* этой схемы, если максимальный идеал $\mathfrak{m}_x$ является ассоциированным простым идеалом нулевого идеала в локальном кольце $\mathcal{O}_{x,X}$ или, другими словами, если каждый элемент из $\mathfrak{m}_x$ является делителем нуля.

Предложение 9.7. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем, где Y — целая регулярная схема размерности 1. Морфизм f тогда и только тогда является плоским, когда каждая ассоциированная точка $x \in X$ отображается в общую точку схемы Y. В частности, если схема X приведена, то это равносильно тому, что каждая неприводимая компонента X доминирует над Y.*

Доказательство. Предположим сначала, что морфизм f плоский, и пусть $x \in X$ — точка, образ $y = f(x)$ которой является замкнутой точкой в Y. Тогда $\mathcal{O}_{y,Y}$ — кольцо дискретного нормирования. Пусть $t \in \mathfrak{m}_y - \mathfrak{m}_y^2$ — униформизующий параметр. Тогда t не является делителем нуля в $\mathcal{O}_{y,Y}$. Поскольку морфизм f плоский, то $f^\# t \in \mathfrak{m}_x$ тоже не является делителем нуля, так что x не является ассоциированной точкой X.

Обратно, предположим, что каждая ассоциированная точка X отображается в общую точку Y. Для доказательства плоскости морфизма f нам надо показать, что при любой точке $x \in X$ локальное кольцо $\mathcal{O}_{x,X}$ плоско над $\mathcal{O}_{y,Y}$, где $y = f(x)$. Если y — общая точка, то $\mathcal{O}_{y,Y}$ является полем, так что доказывать нечего. Если точка y замкнута, то $\mathcal{O}_{y,Y}$—кольцо дискретного нормирования, поэтому в силу 9.13 мы должны показать, что $\mathcal{O}_{x,X}$ не имеет кручения как модуль над $\mathcal{O}_{y,Y}$. Если это не так, то $f^\# t$ должен быть делителем нуля в $\mathfrak{m}_x$, где t — униформизующий параметр в $\mathcal{O}_{y,Y}$. Поэтому он должен содержаться в некотором ассоциированном простом идеале $\mathfrak{p}$ нулевого идеала (0) в $\mathcal{O}_{x,X}$ (см. Мацумура [2, следствие 2, стр. 50]). Идеал $\mathfrak{p}$ определяет точку $x' \in X$, являющуюся ассоциированной точкой схемы X и образ которой при морфизме f есть замкнутая точка y. Противоречие!

Отметим, наконец, что если схема X приведена, то все ее ассоциированные точки — это в точности общие точки неприводимых компонент. Следовательно, условие плоскости в этом случае означает, что каждая неприводимая компонента X доминирует над Y.

Пример 9.7.1. Пусть Y — кривая с одной обыкновенной двойной точкой и $f : X \to Y$ — отображение ее нормализации. Тогда f не является плоским. Действительно, если бы это было так, то пучок $f_*\mathcal{O}_X$ был бы плоским пучком $\mathcal{O}_Y$-модулей. Поскольку он когерентный, то он должен быть локально свободным (см. 9.2(e)). Далее, так как он имеет ранг 1, то должен быть обратимым пучком на Y. Но на X есть две точки P_1, P_2, склеивающиеся в одну особую точку Q на Y, поэтому $(f_*\mathcal{O}_X)_Q$ имеет два образующих как $\mathcal{O}_{Q,Y}$-модуль, следовательно, пучок $f_*\mathcal{O}_X$ не может быть обратимым.

Пример 9.7.2. Утверждение 9.7 неверно также, если Y — регулярная схема размерности >1. Например, пусть $Y = \mathbf{A}^2$ и X — схема, полученная из Y раздутием одной точки. Тогда X и Y

неособы, X доминирует над Y, но соответствующий морфизм f не является плоским, поскольку размерность слоя над раздутой точкой больше, чем размерность остальных слоев, которая равна 0 (см. 9.6.)

Предложение 9.8. *Пусть Y — регулярная целая схема размерности* 1, *$P \in Y$ — замкнутая точка и $X \subset \mathbf{P}^n_{Y}$ — замкнутая подсхема, являющаяся плоской над $Y - P$. Тогда существует единственная замкнутая подсхема $\overline{X} \subset \mathbf{P}^n_Y$, плоская над Y, ограничение которой на $\mathbf{P}^n_{Y-P}$ совпадает с X.*

Доказательство. Возьмем за $\overline{X}$ теоретико-схемное замыкание X в $\mathbf{P}^n_Y$ (см. упр. 3.11(d) гл. II). Тогда все ассоциированные точки $\overline{X}$ — это в точности ассоциированные точки X, так что по 9.7 $\overline{X}$ будет плоской над Y. Более того, схема $\overline{X}$ единственна, поскольку любое другое расширение X в $\mathbf{P}^n_Y$ должно иметь те же ассоциированные точки, отображающиеся в P.

Замечание 9.8.1. Это предложение утверждает, что можно переходить к пределу в случае, когда мы имеем плоское семейство замкнутых подсхем в $\mathbf{P}^n$ над кривой с выколотой точкой. Следовательно, отсюда вытекает, что схема Гильберта является собственной. Схема Гильберта — это схема H, параметризующая все замкнутые подсхемы в $\mathbf{P}^n_k$. Она обладает следующим свойством универсальности: задание замкнутой подсхемы $X \subset \mathbf{P}^n_T$, плоской над T, для любой схемы T эквивалентно заданию морфизма $\varphi : T \to H$. Здесь, конечно, для любого $t \in T$ точка $\varphi(t)$ в H соответствует слою $X_t \subset \mathbf{P}^n_{k(t)}$.

Поскольку существование схемы Гильберта показано (см. Гротендик [5, exp. 221]), то вопрос о ее собственности может быть решен с помощью валюативного критерия 4.7 гл. II. И то, что мы только что доказали, является существенным моментом в проверке собственности каждой связной компоненты схемы H.

Пример 9.8.2. Хотя размерность слоев в плоском семействе одна и та же, мы ничего не можем сказать о неприводимости и приведенности этих слоев. Взять, например, семейства из примеров 3.3.1 и 3.3.2 гл. II. В каждом из этих случаев все пространство X является целым, база Y является неособой кривой и морфизм $f : X \to Y$ сюръективен; поэтому каждое из семейств плоско над Y. Почти все слои в обоих семействах являются целыми. Однако в одном случае специальный слой является двойной прямой (т. е. не приведен), а в другом — состоит из двух прямых (т. е. приводим).

Пример 9.8.3 (проекция из точки). Используя 9.8, внесем некоторый новый вклад в понимание геометрической операции проектирования из точки (см. упр. 3.14 гл. II). Пусть $P = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbf{P}^{n+1}$ и $\varphi : \mathbf{P}^{n+1} - \{P\} \to \mathbf{P}^n$ — проекция из точки P, определяемая формулой $(x_0, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_0, \ldots, x_n)$. Для каждого $a \in k$, $a \neq 0$, рассмотрим автоморфизм σ_a пространства $\mathbf{P}^{n+1}$, определенный формулой $(x_0, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_0, \ldots, x_n, ax_{n+1})$. Далее пусть X_1 — закнутая подсхема в $\mathbf{P}^{n+1}$, не содержащая P, и для каждого $a \neq 0$ пусть $X_a = \sigma_a(X_1)$. Тогда X_a образуют плоское семейство, параметризованное $\mathbf{A}^1 - \{0\}$. Тот факт, что оно плоское, следует из того, что все слои X_a изоморфны между собой как абстрактные схемы, и на самом деле все семейство изоморфно $X_1 \times (\mathbf{A}^1 - \{0\})$, если отвлечься от вложения в $\mathbf{P}^{n+1}$.

Согласно 9.8, это семейство единственным образом продолжается до семейства над всем $\mathbf{A}^1$ и ясно, что слой X_0 над точкой 0 совпадает, по крайней мере теоретико-множественно, с $\varphi(X_1)$ —

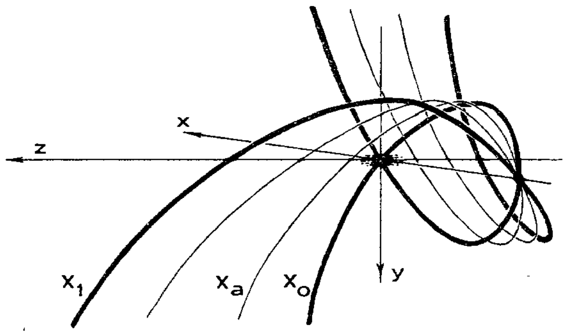


Рис. 11. Плоское семейство подсхем в $\mathbf{P}^3$.

образом X_1 при проекции φ. Таким образом, мы видим, что существует плоское семейство над $\mathbf{A}^1$, все слои которого, кроме X_0, изоморфны X_1, а X_0 — некоторая схема с таким же базисным топологическим пространством, что и $\varphi(X_1)$.

Пример 9.8.4. Изучим подробнее только что построенное семейство в частном случае, когда X_1 — пространственная кубическая кривая в $\mathbf{P}^3$, φ — проекция $\mathbf{P}^3$ в $\mathbf{P}^2$ и $\varphi(X_1)$ — плоская кубическая кривая с обыкновенной двойной точкой. Окажется, что это семейство обладает следующим замечательным свойством: специальный слой семейства X_0 состоит из кривой $\varphi(X_1)$ и некоторых нильпотентных элементов в двойной точке. В таком случае говорят, что X_0 — схема с вложенной точкой. Дело здесь, по-видимому, в том, что эти нильпотентные элементы позволяют слою X_0 сохранить информацию о том, что он является пределом пространственных кривых, в то время как $\varphi(X_1)$ — плоская кривая. В частности, X_0 не является замкнутой подсхемой в $\mathbf{P}^2$ (см. рис. 11).

Теперь займемся вычислениями. Нам интересно, что происходит вблизи двойной точки, поэтому мы будем пользоваться аффинными координатами x, y в $\mathbf{A}^2$ и x, y, z в $\mathbf{A}^3$. Пусть кривая X_1 задана параметрическими уравнениями

$$x = t^2 - 1,$$
$$y = t^3 - t,$$
$$z = t.$$

Тогда, поскольку $t = z$, $t^2 = x + 1$, $t^3 = y + z$, мы узнаем в ней пространственную кубическую кривую (см. упр. 1.2 гл. I).

Для любого $a \neq 0$ схема X_a задается следующими уравнениями:

$$x = t^2 - 1,$$
$$y = t^3 - t,$$
$$z = at.$$

Для определения идеала $I \subset k[a, x, y, z]$ полного семейства $\overline{X}$, продолженного на все $\mathbf{A}^1$, исключим t из этих параметрических уравнений и убедимся, что a не является делителем нуля в $k[a, x, y, z]/I$, так что схема $\overline{X}$ будет плоской над $\mathbf{A}^1$. Имеем

$$I = (a^2(x+1) - z^2,\ ax(x+1) - yz,\ xz - ay,\ y^2 - x^2(x+1)).$$

Отсюда, полагая $a = 0$, получаем идеал $I_0 \subset k[x, y, z]$ слоя X_0, который имеет вид

$$I_0 = (z^2,\ yz,\ xz,\ y^2 - x^2(x+1)).$$

Отсюда видно, что X_0 — схема с носителем, равным плоской кубической кривой $y^2 = x^2(x+1)$ с обыкновенной двойной точкой $(0,0)$. Для любой точки, где $x \neq 0$, мы получаем, что $z \in I_0$, так что X_0 приведена в этой точке. В локальном же кольце точки $(0, 0, 0)$ имеем $z^2 = 0$, стало быть, оно содержит нильпотентный элемент $z \neq 0$.

Итак, мы получили пример плоского семейства кривых, общий член которого является неособой кривой, а специальный является особым с вложенной точкой. См. также 9.10.1 и упр. 3.5 гл. IV.

Пример 9.8.5. (алгебраическое семейство дивизоров). Пусть X — схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k, T — неособая кривая над k и D — эффективный дивизор Картье на $X \times T$ (см. § 6 гл. II). Тогда D можно представлять себе как замкнутую подсхему в $X \times T$, локально в маленькой окрестности U задаваемую как нули единственного элемента $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, не являющегося делителем нуля. Для любой замкнутой точки $t \in T$ пусть X_t $(\simeq X)$ — слой над t семейства $X \times I$. Будем говорить, что дивизор пересечения $D_t = D \cdot X_t$ *определен*, если в каждой точке слоя X_t образ $\bar{f} \in \Gamma(U \cap X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ локального уравнения f дивизора D не является делителем нуля. В таком случае покрытие $\{U \cap X_t\}$ и элементы $\bar{f}$ определяют дивизор Картье D_t на X_t. Если D_t определен для всех t, то мы будем говорить, что дивизоры $\{D_t \mid t \in T\}$ образуют *алгебраическое семейство дивизоров на* X, *параметризованное* T.

Это определение, являющееся естественным с точки зрения теории дивизоров Картье, следующим образом связано с понятием плоскости: исходный дивизор Картье D, рассматриваемый как схема над T, является плоским над T тогда и только тогда, когда $D_t = D \cdot X_t$ определен для всех t. Действительно, пусть $x \in D$ — произвольная точка, $A = \mathcal{O}_{x, X \times T}$ — локальное кольцо точки x на $X \times T$, $f \in A$ — локальное уравнение для D, $p_1(x) = t$ и $u \in \mathcal{O}_{t,T}$ — униформизующий параметр. Тогда $D \cdot X_t$ определен в x, если и только если $\bar{f} \in A/uA$ не является делителем нуля. Поскольку u автоматически не является делителем нуля в A, то это равносильно утверждению, что (u, f) образуют регулярную последовательность в A (см. § 8 гл. II). С другой стороны, D плоский над T в точке x, если и только если $\mathcal{O}_{x,D}$ плоско над $\mathcal{O}_{t,T}$. По 9.1.3 это равносильно тому, что $\mathcal{O}_{x,D}$ не имеет кручения, т. е. u — неделитель нуля в $\mathcal{O}_{x,D}$. Но $\mathcal{O}_{x,D} \simeq A/fA$, так что элементы (f, u) образуют регулярную последовательность в A. Так как регулярность последовательности не зависит от порядка элементов в ней (см. Мацумура [2, теорема 28, стр. 102]), то утверждение доказано.

Теорема 9.9. *Пусть T — целая нётерова схема и $X \subset \mathbf{P}^n_T$ — некоторая замкнутая подсхема. Для каждой точки $t \in T$ рассмотрим многочлен Гильберта $P_t \in \mathbf{Q}[z]$ слоя X_t, рассматриваемого как замкнутая подсхема в $\mathbf{P}^n_{k(t)}$. Тогда X является плоской над T в том и только том случае, когда многочлен Гильберта P_t не зависит от t.*

Доказательство. Многочлен Гильберта был определен в § 7 гл. I, см. также упр. 5.2, где дано другое определение многочлена Гильберта. Здесь мы пользуемся следующим определением

$$P_t(m) = \dim_{k(t)} H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m))$$

для всех $m \gg 0$.

Здесь можно заменить пучок $\mathcal{O}_X$ на любой когерентный пучок $\mathcal{F}$ и рассматривать многочлен Гильберта пучка $\mathcal{F}_t$. Благодаря этому можно считать $X = \mathbf{P}^n_T$. Далее утверждение теоремы локально по T. В самом деле, при сравнении слоев над разными точками мы можем в качестве одной из них взять общую точку. Поэтому достаточно рассматривать случай $T = \operatorname{Spec} A$, где A — *локальное* нётерово кольцо.

Итак, пусть $T = \operatorname{Spec} A$, A — локальное нётерово целостное кольцо, $X = \mathbf{P}_T^n$ и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Мы будем доказывать, что следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathscr{F}$ плоский над T;

(ii) $H^0(X, \mathscr{F}(m))$ — свободный A-модуль конечного ранга для всех $m \gg 0$;

(iii) многочлен Гильберта P_t пучка $\mathscr{F}_t$ на $X_t = \mathbf{P}^n_{k(t)}$ не зависит от t для любого $t \in T$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Вычислим $H^i(X, \mathscr{F}(m))$ с помощью когомологий Чеха стандартного открытого аффинного покрытия $\mathfrak{U}$ пространства X. Имеем

$$H^i(X, \mathscr{F}(m)) = h^i(C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(m))).$$

Так как пучок $\mathscr{F}$ плоский, то каждый член $C^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(m))$ комплекса Чеха является плоским модулем над A. С другой стороны, если $m \gg 0$, то $H^i(X, \mathscr{F}(m)) = 0$ для всех $i > 0$ (см. 5.2). Следовательно, комплекс $C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(m))$ является резольвентой A-модуля $H^0(X, \mathscr{F}(m))$, т. е. имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}(m)) \to C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(m)) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(m)) \to \ldots$$
$$\ldots \to C^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(m)) \to 0.$$

Расщепляя ее в короткие точные последоватеьности и пользуясь 9.1A(e) и тем фактом, что все C^i являются плоскими A-модулями, мы заключаем отсюда, что $H^0(X, \mathscr{F}(m))$ — тоже плоский A-модуль. Так как он конечно порожден (см. 5.2), то является, следовательно, свободным модулем конечного ранга (см. 9.1A(f)).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $S = A[x_0, \ldots, x_n]$ и M — градуированный S-модуль,

$$M = \bigoplus_{m \geqslant m_0} H^0(X, \mathscr{F}(m)),$$

где m_0 выбрано настолько большим, чтобы модули $H^0(X, \mathscr{F}(m))$ были свободными для всех $m \geqslant m_0$. Тогда $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ по 5.15 гл. II. Отметим, что M и $\Gamma_*(\mathscr{F})$ одинаковы в больших степенях $m \geqslant m_0$, так что $\widetilde{M} = \Gamma_*(\mathscr{F})^\sim$. Так как M — свободный (и, следовательно, плоский) A-модуль, то отсюда следует, что $\mathscr{F}$ плоский над A (см. 9.1.1).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Здесь достаточно показать, что

$$P_t(m) = \operatorname{rank}_A H^0(X, \mathscr{F}(m))$$

для $m \gg 0$. Для этого мы докажем, что для любого $t \in T$ имеет место изоморфизм

$$H^0(X_t, \mathscr{F}_t(m)) \simeq H^0(X, \mathscr{F}(m)) \otimes_A k(t)$$

для всех $m \gg 0$. Прежде всего положим $T' = \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал, соответствующий точке t, и сделаем плоскую замену базы $T' \to T$. Таким образом, по 9.3 мы сводим все к случаю, когда t — замкнутая точка T. Обозначим замкнутый слой X_t через X_0, $\mathscr{F}_t$ через $\mathscr{F}_0$ и $k(t)$ через k. Рассмотрим следующее представление k над A:

$$A^q \to A \to k \to 0.$$

Теперь в силу упр. 5.10 для $m \gg 0$ имеем точную последовательность

$$H^0(X, \mathscr{F}(m)^q) \to H^0(X, \mathscr{F}(m)) \to H^0(X_0, \mathscr{F}_0(m)) \to 0.$$

С другой стороны, последовательность $A^q \to A \to k \to 0$ можно тензорно умножить на $H^0(X, \mathscr{F}(m))$. Сравнивая результаты, заключаем, что

$$H^0(X_0, \mathscr{F}_0(m)) \simeq H^0(X, \mathscr{F}(m)) \otimes_A k$$

для всех $m \gg 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Согласно 8.9 гл. II, тот факт, что модуль $H^0(X, \mathscr{F}(m))$ плоский, можно проверить, сравнивая его ранг в общей точке с рангом в замкнутой точке $t \in T$. В таком случае рассуждения из доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) обратимы. Теорема полностью доказана.

Следствие 9.10. *Пусть T — связная нётерова схема и $X \subset \mathbf{P}_T^n$ — замкнутая подсхема, плоская над T. Для любой точки $t \in T$ пусть X_t обозначает слой над ней, рассматриваемый как замкнутая подсхема в $\mathbf{P}^n_{k(t)}$. Тогда размерность, степень и арифметический род слоя X_t не зависят от t.*

Доказательство. С помощью замены базы T на ее неприводимые компоненты с приведенной индуцированной структурой сводим все к случаю, когда схема T целая. В этом случае утверждение вытекает из только что доказанной теоремы и из следующих фактов (см. § 7 гл. I и упр. 5.3):

$$\dim X_t = \deg P_t,$$
$$\deg X_t = (r!) \cdot (\text{старший коэффициент многочлена } P_t),$$
$$p_a(X_t) = (-1)^r (P_t(0) - 1),$$

где $r = \dim X$.

Определение Пусть k — алгебраически замкнутое поле, $f: X \to T$ — сюръективный морфизм многообразий над k, и предположим, что для каждой замкнутой точки $t \in T$ выполняются следующие условия:

(1) $f^{-1}(t)$ неприводимо;

(2) если $\mathfrak{m}_t \subset \mathcal{O}_{t,T}$ — максимальный идеал и $\zeta \in f^{-1}(t)$ — общая точка, то $f^{\#}\mathfrak{m}_t$ порождает максимальный идеал $\mathfrak{m}_\zeta \subset \mathcal{O}_{\zeta,X}$.

При этих условиях обозначим через $X_{(t)}$ многообразие $f^{-1}(t)$ (с приведенной индуцированной структурой) и будем говорить, что $X_{(t)}$ образуют *алгебраическое семейство многообразий*, параметризованных T. Второе условие необходимо для того, чтобы $X_{(t)}$ входило в семейство с кратностью один. Оно эквивалентно утверждению, что схемный слой X_t является приведенным в общей точке.

Пример 9.10.1. Если в плоском семействе примера 9.8.4 слои рассматривать с их приведенной индуцированной структурой, то мы получим алгебраическое семейство многообразий $X_{(t)}$, параметризованных $\mathbf{A}^2$. При $t \neq 0$ это неособые рациональные кривые, а при $t = 0$ — плоская кубическая кривая с обыкновенной двойной точкой. Отметим, что арифметический род не постоянен в этом семействе: $p_a(X_{(t)}) = 0$ при $t \neq 0$ и $p_a(X_{(0)}) = 1$. Это происходит за счет появления нильпотентных элементов в схемном слое X_0, поскольку в плоском семействе схем p_a постоянен по 9.10. Вложенная точка в 0 изменяет свободный член многочлена Гильберта, так что $p_a(X_0) = 0$.

Теорема 9.11. *Пусть $X_{(t)}$ — алгебраическое семейство нормальных многообразий, параметризованных неособой кривой T над алгебраически замкнутым полем k. Тогда $X_{(t)}$ является плоским семейством схем.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to T$ — морфизм, определяющий семейство. Тогда по 9.7 f является плоским. Поэтому нам надо показать только, что для каждой замкнутой точки $t \in T$ схемный слой X_t совпадает с многообразием $X_{(t)}$. Иначе говоря, мы должны показать, что слой $X_{(t)}$ приведен. Для любой точки $x \in X$ пусть $A = \mathcal{O}_{x,X}$ — ее локальное кольцо, $f(x) = t$ и буквой t будем обозначать также униформизующий параметр в локальном кольце $\mathcal{O}_{t,T}$. Тогда A/tA является локальным кольцом точки x на $X_{(t)}$. По предположению $X_{(t)}$ неприводимо, поэтому t имеет единственный ассоциированный минимальный простой идеал $\mathfrak{p}$ в A. Более того, t порождает максимальный идеал локального кольца общей точки $X_{(t)}$ на X, следовательно, t — образующий максимального идеала кольца $A_\mathfrak{p}$. Наконец, локальное кольцо точки x на $X_{(t)}$ есть $A/\mathfrak{p}$, так что по предположению $A/\mathfrak{p}$ нормально. Утверждение теоремы вытекает теперь из следующей леммы, которая показывает, что $\mathfrak{p} = tA$, а следовательно, $X_{(t)} = X_t$.

Лемма 9.12 (Хиронака [1]). *Пусть A — локальное целостное нётерово кольцо, являющееся локализацией алгебры конечного типа над полем k, и $t \in A$ — некоторый элемент. Предположим, что*

(1) *tA имеет только один ассоциированный простой идеал $\mathfrak{p}$,*

(2) *t порождает максимальный идеал кольца $A_\mathfrak{p}$,*

(3) *факторкольцо $A/\mathfrak{p}$ нормально.*

Тогда $\mathfrak{p} = tA$ и кольцо A нормально.

Доказательство. Пусть $\widetilde{A}$ — нормализация A. Тогда кольцо $\widetilde{A}$ является конечно порожденным A-модулем (см. 3.9А гл. I). Покажем, что отображения

$$\varphi\colon A/tA \to \widetilde{A}/t\widetilde{A}$$

и

$$\psi\colon A/tA \to A/\mathfrak{p}$$

являются изоморфизмами.

Сначала рассмотрим их локализации относительно $\mathfrak{p}$. Тогда ψ будет изоморфизмом по предположению. Поэтому $A_\mathfrak{p}$ является кольцом дискретного нормирования и, следоватеьно, нормально, так что $\widetilde{A}_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$ и φ тоже изоморфизм.

Теперь предположим, что по крайней мере одно из отображений φ, ψ не является изоморфизмом. Тогда после локализации A относительно подходящего простого идеала можно считать, что φ и ψ являются изоморфизмами для каждой локализации $A_\mathfrak{q}$ при $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$ и что по крайней мере одно из них не является изоморфизмом для локализации относительно $\mathfrak{m}$. Тогда по доказанному выше $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, поэтому $\dim A \geqslant 2$. Стало быть, $\widetilde{A}$ — нормальное кольцо размерности $\geqslant 2$, следовательно, $\operatorname{depth} \widetilde{A} \geqslant 0$ (см. 8.22А гл. II), так что $\widetilde{A}/t\widetilde{A}$ имеет глубину $\geqslant 1$. Поэтому $\mathfrak{m}$ не может быть для него ассоциированным простым идеалом. С другой стороны, $\widetilde{A}/t\widetilde{A}$ совпадает с $A/\mathfrak{p}$ вне $\mathfrak{m}$, откуда следует, что кольцо $\widetilde{A}/t\widetilde{A}$ является целостным. Следовательно, мы имеем естественное отображение $(A/tA)_{\mathrm{red}} \to \widetilde{A}/t\widetilde{A}$. Но $(A/tA)_{\mathrm{red}} \simeq A/\mathfrak{p}$, так как ψ — изоморфизм вне $\mathfrak{m}$. Тогда кольцо $\widetilde{A}/t\widetilde{A}$ является конечно порожденным $(A/\mathfrak{p})$-модулем с тем же самым полем частных. Так как $A/\mathfrak{p}$ нормально по предположению, то мы заключаем отсюда, что $\widetilde{A}/t\widetilde{A} \simeq A/\mathfrak{p}$. Следовательно, отображение φ сюръективно, поэтому можно записать $\widetilde{A} = A + t\widetilde{A}$. По лемме Накаямы отсюда следует $A = \widetilde{A}$. Таким образом, $A/t\widetilde{A} \simeq A/\mathfrak{p}$ и оба отображения φ и ψ — изоморфизмы. Тем самым мы получили противоречие, которое показывает, что φ и ψ были изоморфизмами до перехода от A к локализации.

Для завершения доказательства леммы заметим, что $\mathfrak{p} = tA$, потому что ψ — изоморфизм. Далее, так как φ — изоморфизм, то $\widetilde{A} = A + t\widetilde{A}$, следовательно, по лемме Накаямы, как и раньше, получаем, что $A = \widetilde{A}$, так что кольцо A нормально.

Следствие 9.13 (Игуза [1]). *Пусть $X_{(t)}$ — алгебраическое семейство нормальных многообразий в $\mathbf{P}_k^n$, параметризованных многообразием T. Тогда многочлен Гильберта $X_{(t)}$, а следовательно, также и арифметический род $p_a(X_{(t)})$ не зависят от t.*

Доказательство. Любые две замкнутые точки T либо лежат на образе некоторого морфизма $g\colon T' \to T$, где T' — неособая кривая, либо могут быть соединены конечным числом таких кривых, поэтому с помощью замены базы мы можем свести все к случаю, когда T — неособая кривая. В таком случае утверждение вытекает из 9.10 и 9.11.

Пример 9.13.1 (инфинитезимальные деформации). Теперь, после того как мы убедились, что плоскость семейства является естественным условием для семейств алгебраических многообразий, приведем один важный неклассический пример плоского морфизма в категории схем. Пусть X_0 — схема конечного типа над полем k и $D = k[t]/(t^2)$ — *кольцо дуальных чисел* над k. *Инфинитезимальной деформацией* X_0 называется схема X', плоская над D и такая, что $X' \otimes_D k \simeq X_0$.

Инфинитезимальная деформация возникает в следующей геометрической ситуации. Пусть $f\colon X \to T$ — произвольное плоское семейство с фиксированной точкой $t \in T$, для которой $X_t \simeq X_0$, тогда говорят, что задана (глобальная) деформация схемы X_0. В этом случае для некоторого элемента касательного пространства Зарисского к T в точке t мы имеем морфизм $\operatorname{Spec} D \to T$ (см. упр. 2.8 гл. II). С помощью замены базы мы получаем схему X', плоскую над $\operatorname{Spec} D$, с замкнутым слоем X_0. Таким образом, изучение инфинитезимальных деформаций будет способствовать в конечном счете изучению глобальных деформаций.

Пример 9.13.2. Продолжая разговор о деформациях, отметим, что часто оказывается возможным получить полное описание инфинитезимальных деформаций схемы X. Например, если X — неособое многообразие над алгебраически замкнутым полем k, то мы сейчас покажем, что множество всех инфинитезимальных деформаций схемы X с точностью до изоморфизма находится в естественном взаимно однозначном соответствии с группой когомологий $H^1(X, \mathscr{T}_X)$, где $\mathscr{T}_X$ — касательный пучок.

Действительно, для заданной плоской схемы X' над D рассмотрим точную последовательность D-модулей

$$0 \to k \xrightarrow{t} D \to k \to 0.$$

В силу того, что X' плоская над D, мы получаем следующую точную последовательность $\mathcal{O}_{X'}$-модулей:

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Тогда схема X' является инфинитезимальным расширением схемы X посредством пучка $\mathcal{O}_X$ в смысле упр. 8.7 гл. II. Обратно, всякое такое расширение дает схему X', плоскую над D. Но, как мы уже видели в упр. 4.10, все такие расширения описываются группой когомологий $H^1(X, \mathscr{T}_X)$.

Замечание 9.13.3. Существует целый раздел алгебраической геометрии, называемый *теорией деформаций*, изучающий деформации схем или многообразий над полем k. Он тесно связан и даже является составной частью теории модулей, цель которой — классифицировать все многообразия, разбив их на алгебраические семейства. Теория деформаций изучает только те из них, которые тесно связаны с заданным X_0.

Теория деформации — это область алгебраической геометрии, где значение теории схем огромно. Действительно, даже если мы интересуемся в первую очередь многообразием X_0 над полем k, все равно работать нам приходится в категории схем, рассматривая плоские семейства над произвольными артиновыми кольцами с полем вычетов k, замкнутый слой которых есть X_0. Беря предел артиновых колец, можно изучать плоские семейства над полным локальным кольцом. Но все эти типы семейств являются промежуточными между многообразием X_0 и глобальной деформацией $f\colon X \to T$, где T — некоторое другое многообразие. Таким образом, они являются мощным средством для изучения всех деформаций X_0. По поводу теории деформаций см., например, Шлессингер [1] или Морроу и Кодаира [1, гл. 4].

Упражнения

9.1. Показать, что плоский морфизм конечного типа нётеровых схем $f\colon X \to Y$ является открытым, т. е. для каждого открытого подмножества $U \subset X$ множество $f(U)$ открыто в Y. [*Указание.* Показать, что $f(U)$ конструктивно и стабильно относительно генеризаций (см. упр. 3.18 и 3.19 гл. II.)]

9.2. Провести вычисления, аналогичные вычислениям в 9.8.4, для кривой из упр. 3.14 гл. I. Показать, что в результате специальный слой будет содержать вложенную точку в каспидальной особой точке плоской кубической кривой.

9.3. *Некоторые примеры плоских и неплоских морфизмов.*

(a) Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный сюръективный морфизм неособых многообразий над алгебраически замкнутым полем k. Показать, что он является плоским.

(b) Пусть X — объединение двух плоскостей, пересекающихся в одной точке, каждая из которых отображается на плоскость Y. Показать, что морфизм $f\colon X \to Y$ не является плоским. Например, взять $Y = \operatorname{Spec} k[x, y]$ и $X = \operatorname{Spec} k[x, y, z, w]/(z, w) \cap (x + z, y + w)$.

(c) Пусть опять $Y = \operatorname{Spec} k[x, y]$, а $X = \operatorname{Spec} k[x, y, z, w]/(z^2, zw, w^2, xz - yw)$. Показать, что $X_{\mathrm{red}} \simeq Y$, X не имеет вложенных точек, но f не является плоским.

9.4. *Свойство открытости плоского морфизма.* Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм конечного типа нётеровых схем. Показать, что тогда множество $\{x \in X \mid f$

плоский в $x\}$ открыто в X (возможно, что оно пусто), см. Гротендик [EGA IV$_3$, 11.1.1].

9.5. *Очень плоские семейства.* Для каждой замкнутой подсхемы $X \subset \mathbf{P}^n$ обозначим через $C(X) \subset \mathbf{P}^{n+1}$ проективный конус над X (упр. 2.10 гл. I). Если $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ — (наибольший) однородный идеал подсхемы X, то $C(X)$ определяется однородным идеалом, порожденным I в кольце $k[x_0, \ldots, x_{n+1}]$.

(a) Показать на примере, что если $\{X_t\}$ — плоское семейство замкнутых подсхем в $\mathbf{P}^n$, то $\{C(X_t)\}$ может не быть плоским семейством в $\mathbf{P}^{n+1}$.

(b) Чтобы исправить положение дел, введем следующее определение. Пусть $X \subset \mathbf{P}^n_T$ — замкнутая подсхема, где T — некоторая нётерова целая схема. Для каждой точки $t \in T$ пусть $I_t \subset S_t = k(t)[x_0, \ldots, x_n]$ — однородный идеал схемы X_t в $\mathbf{P}^n_{k(t)}$. Будем говорить, что семейство $\{X_t\}$ является *очень плоским*, если $\dim_{k(t)} (S_t/I_t)_d$ не зависит от t ни для какого $d \geqslant 0$. Здесь $(\ \ )_d$ означает однородную компоненту степени d.

(c) Показать, что если $\{X_t\}$ — очень плоское семейство в $\mathbf{P}^n$, то оно плоское. Показать, что тогда $\{C(X_t)\}$ также является очень плоским и, следовательно, плоским семейством в $\mathbf{P}^{n+1}$.

(d) Показать, что если $\{X_{(t)}\}$ — алгебраическое семейство проективно нормальных многообразий в $\mathbf{P}^n_k$, параметризованных неособой кривой T над алгебраически замкнутым полем k, то оно является очень плоским семейством схем.

9.6. Пусть $Y \subset \mathbf{P}^n$ — неособое многообразие размерности $\geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что $\mathbf{P}^{n-1}$ — гиперплоскость в $\mathbf{P}^n$, не содержащая Y и такая, что схема $Y' = Y \cap \mathbf{P}^{n-1}$ тоже неособа. Доказать, что Y тогда и только тогда является полным пересечением в $\mathbf{P}^n$, когда Y' является полным пересечением в $\mathbf{P}^{n-1}$. [*Указание.* См. упр. 8.4 гл. II. Далее воспользоваться леммой 9.12, применив ее к аффинным конусам над Y и Y'.]

9.7. Пусть $Y \subset X$ — замкнутая подсхема, где X — схема конечного типа над полем k, и $D = k[t]/(t^2)$ — кольцо дуальных чисел. Определим *инфинитезимальную деформацию Y как замкнутой подсхемы в X* как замкнутую подсхему $Y' \subset X \times_k D$, плоскую над D, замкнутый слой которой совпадает с Y. Показать, что все такие Y' классифицируются пространством $H^0(Y, \mathscr{N}_{Y/X})$, где

$$\mathscr{N}_{Y/X} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{J}_Y/\mathscr{J}_Y^2, \mathcal{O}_Y).$$

*9.8. Пусть A — конечно порожденная k-алгебра. Представим A в виде факторкольца кольца многочленов P над k и обозначим через J его ядро:

$$0 \to J \to P \to A \to 0.$$

Рассмотрим точную последовательность из 8.4А гл. II:

$$J/J^2 \to \Omega_{P/k} \otimes_P A \to \Omega_{A/k} \to 0.$$

Применим к ней функтор $\operatorname{Hom}_A(\cdot, A)$ и обозначим через $T^1(A)$ соответствующее коядро:

$$\operatorname{Hom}_A(\Omega_{P/k} \otimes A, A) \to \operatorname{Hom}_A(J/J^2, A) \to T^1(A) \to 0.$$

Теперь, воспользовавшись конструкцией из упр. 8.6 гл. II, показать, что $T^1(A)$ классифицирует инфинитезимальные деформации алгебры A, т. е. алгебры A', плоские над $D = k[t]/(t^2)$ и такие, что $A' \otimes_D k \simeq A$. Отсюда будет следовать, что $T^1(A)$ не зависит от представления A в виде факторкольца кольца многочленов. (Дальнейшие подробности см. Лихтенбаум и Шлессингер [1].)

9.9. k-алгебра A называется *жесткой*, если она не имеет инфинитезимальных деформаций или в силу упр. 9.8 если $T^1(A) = 0$. Пусть $A = \operatorname{Spec} k[x, y, z, w]/(x, y) \cap (z, w)$. Показать, что тогда A является жесткой. Она соответствует аффинной схеме, состоящей из двух плоскостей в $\mathbf{A}^4$, пересекающихся в одной точке.

9.10. Схема X_0 над полем k называется *жесткой*, если она не имеет инфинитезимальных деформаций.

(a) Показать, что $\mathbf{P}^1_k$ жестко (воспользоваться 9.13.2).

(b) Можно подумать, что если X_0 — схема, жесткая над k, то всякая глобальная деформация X_0 локально тривиальна. Показать, что это не так, построив собственный плоский морфизм $f\colon X \to \mathbf{A}^2$ над алгебраически замкнутым полем k, такой, что $X_0 \simeq \mathbf{P}^1_k$, но не существует никакой открытой окрестности U точки 0 в $\mathbf{A}^2$, для которой $f^{-1}(U) \simeq U \times \mathbf{P}^1$.

*(c) Показать, что можно, однако, тривиализовать глобальную деформацию $\mathbf{P}^1$, сделав некоторую плоскую замену базы, в следующем смысле. Пусть $f\colon X \to T$ — плоский проективный морфизм, где T — неособая кривая над алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что существует замкнутая точка $t \in T$, для которой $X_t \simeq \mathbf{P}^1_k$. Тогда существует неособая кривая T' и плоский морфизм $g\colon T' \to T$, образ которого содержит t, такой, что если $X' = X \times_T T'$ — замена базы, то новое семейство $f'\colon X' \to T'$ изоморфно семейству $\mathbf{P}^1_{T'} \to T'$.

9.11. Пусть Y — неособая кривая степени d в $\mathbf{P}^n_k$ над алгебраически замкнутым полем k. Показать, что

$$0 \leqslant p_a(Y) \leqslant \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

[*Указание.* Сравнить Y с подходящей проекцией Y в $\mathbf{P}^2$, как в 9.8.3 и 9.8.4.]

§ 10. Гладкие морфизмы

Понятие гладкого морфизма является относительным вариантом понятия неособого многообразия над полем. В этом параграфе мы изложим некоторые основные результаты, касающиеся гладких морфизмов. В качестве приложения приведем элегантное доказательство Клеймана теоремы Бертини в характеристике 0. Дальнейшую информацию о гладких и этальных морфизмах см. Альтман и Клейман [I, гл. VI, VII], Мацумура [2, гл. II] и Гротендик [SGA 1, exp. I, II, III].

Будем предполагать для простоты, что все схемы в этом параграфе являются схемами конечного типа над полем k.

Определение. Морфизм $f\colon X \to Y$ схем конечного типа над полем k называется *гладким относительной размерности n*, если выполняются следующие условия:

(1) f плоский;

(2) если $X' \subset X$ и $Y' \subset Y$ — неприводимые компоненты, такие, что $f(X') \subset Y'$, то $\dim X' = \dim Y' + n$;

(3) для каждой точки $x \in X$ (не обязательно замкнутой)

$$\dim_{k(x)} (\Omega_{X/Y} \otimes k(x)) = n.$$

Пример 10.0.1. $\mathbf{A}^n_Y$ и $\mathbf{P}^n_Y$ над Y являются гладкими относительной размерности n над Y для любого Y.

Пример 10.0.2. Если схема X целая, то условие (3) эквивалентно утверждению, что пучок $\Omega_{X/Y}$ локально свободен на X и имеет ранг n (см. 8.9 гл. II).

Пример 10.0.3. Если $Y = \operatorname{Spec} k$ и поле k алгебраически замкнуто, то X тогда и только тогда является гладким над k, когда оно регулярно и имеет размерность n. В частности, если схема X неприводима и отделима над k, то она является гладкой тогда и только тогда, когда она неособа. Ср. 8.8 и 8.15 гл. II.

Предложение 10.1. (a) *Открытое вложение является гладким морфизмом относительной размерности* 0.

(b) Замена базы. *Пусть $f: X \to Y$ — гладкий морфизм относительной размерности n и $g: Y' \to Y$ — произвольный морфизм, тогда морфизм $f': X' \to Y'$, полученный с помощью расширения базы, является также гладким относительной размерности n.*

(c) Композиция. *Пусть $f: X \to Y$ — гладкий морфизм относительной размерности n и $g: Y \to Z$ — гладкий морфизм относительной размерности m, тогда морфизм $g \circ f: X \to Z$ также является гладким относительной размерности $n+m$.*

(d) Произведение. *Пусть X и Y — гладкие схемы над Z относительной размерности m и n, соответственно, тогда схема $X \times_Z Y$ является гладкой над Z относительной размерности $n+m$.*

Доказательство. (a) тривиально.

(b) Морфизм f' является плоским по 9.2. Согласно 9.6, условие (2) в определении гладкости эквивалентно утверждению, что каждая неприводимая компонента каждого слоя X_y морфизма f имеет размерность n. Это условие, очевидно, сохраняется при расширении базы (см. упр. 3.20 гл. II). Наконец, $\Omega_{X/Y}$ инвариантен относительно расширения базы (см. 8.10 гл. II), поэтому число $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(x))$ также не меняется. Следовательно, f' — гладкий морфизм.

(c) Морфизм $g \circ f$ является плоским по 9.2. Пусть $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ и $Z' \subset Z$ — неприводимые компоненты, такие, что $f(X') \subset \subset Y'$ и $g(Y') \subset Z'$, тогда ясно, что $\dim X' = \dim Z' + n + m$ по предположению. Для проверки последнего условия воспользуемся точной последовательностью из 8.11 гл. II

$$f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z} \to \Omega_{X/Y} \to 0.$$

Умножая ее тензорно на $k(x)$, получаем

$$f^*\Omega_{Y/Z} \otimes k(x) \to \Omega_{X/Z} \otimes k(x) \to \Omega_{X/Y} \otimes k(x) \to 0.$$

Здесь первый член имеет размерность m, а последний n по предположению. Поэтому размерность среднего члена $\leqslant n + m$.

С другой стороны, пусть $z = g(f(x))$. Тогда

$$\Omega_{X/Z} \otimes k(x) = \Omega_{X_z/k(z)} \otimes k(x),$$

так как относительные дифференциалы коммутируют с отображением замены базы. Пусть X' — неприводимая компонента слоя X_z, содержащая точку x, с приведенной индуцированной структурой. Тогда по 8.12 гл. II мы имеем сюръективное отображение

$$\Omega_{X_z/k(z)} \otimes k(x) \to \Omega_{X'/k(z)} \otimes k(x) \to 0.$$

Но X' — целая схема конечного типа над $k(z)$ размерности $n+m$ (см. 9.6), так что по 8.6A гл. II $\Omega_{X'/k(z)}$ является когерентным пучком ранга $\geqslant n+m$. Следовательно, в каждой точке он имеет по меньшей мере $n+m$ образующих, поэтому

$$\dim_{k(x)}(\Omega_{X'/k(z)} \otimes k(x)) \geqslant n+m.$$

Комбинируя это неравенство с неравенством, полученным выше, получаем, что

$$\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Z} \otimes k(x)) = n+m,$$

как и требовалось.

(d) Это утверждение является следствием утверждений (b) и (c), поскольку морфизм $X \times_Z Y \to Z$ можно разложить в композицию $X \times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y \to Z$. Предложение доказано.

Теорема 10.2. *Пусть $f: X \to Y$ — морфизм схем конечного типа над k. Тогда f является гладким морфизмом относительной размерности n, если и только если выполняются следующие условия:*

(1) *f плоский;*

(2) *для каждой точки $y \in Y$ пусть $X_{\bar{y}} = X_y \otimes_{k(y)} \overline{k(y)}$, где $\overline{k(y)}$ — алгебраическое замыкание поля $k(y)$; тогда $X_{\bar{y}}$ является равноразмерным размерности n и регулярным. (В таком случае будем говорить, что слои f* геометрически регулярны эквиразмерности *n.)*

Доказательство. Если f — гладкий морфизм относительной размерности n, то он остается таким при любой замене базы. В частности, $X_{\bar{y}}$ является гладким относительной размерности n над $\overline{k(y)}$, поэтому он регулярен (см. 10.0.3).

Обратно, предположим, что условия (1) и (2) выполнены. Тогда по условию (1) морфизм f плоский. Из условия (2) мы заключаем, что каждая неприводимая компонента слоя X_y имеет размерность n, т. е. по 9.6 выполняется условие (2) определения гладкости. Наконец, поскольку поле $\overline{k(y)}$ алгебраически замкнуто, то из регулярности $X_{\bar{y}}$ вытекает, что пучок $\Omega_{X_{\bar{y}}/\overline{k(y)}}$ локально свободен ранга n (см. 10.0.3). Оказывается, что из этого следует, что пучок

$\Omega_{X_y/k(y)}$ также локально свободен и ранга n (см., например, Мацумура [2, 4E, стр. 29]), так что для любого $x \in X$ имеем

$$\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(x)) = \dim_{k(x)}(\Omega_{X_y/k(y)} \otimes k(x)) = n,$$

что и требовалось доказать.

Теперь будем изучать условия гладкости морфизмов неособых многообразий. Напомним (упр. 2.8 гл. II), что для каждой точки $x \in X$ определено *касательное пространство Зарисского* T_x, двойственное векторному $k(x)$-пространству $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Если $f\colon X \to Y$ — морфизм и $y = f(x)$, то существует естественное индуцированное отображение на касательных пространствах

$$T_f\colon T_x \to T_y \otimes_{k(y)} k(x).$$

Прежде чем сформулировать критерии гладкости, напомним следующий алгебраический факт.

Лемма 10.3A. *Пусть $A \to B$ — локальный гомоморфизм локальных нётеровых колец, M — конечно порожденный B-модуль и $t \in A$ — элемент, не являющийся делителем нуля. Тогда модуль M будет плоским над A в том и только том случае, когда выполняются следующие условия:*

(1) *t не является делителем нуля в M;*

(2) *модуль M/tM является плоским над A/tA*

Доказательство. Это частный случай локального критерия плоскости, см. Бурбаки [1, III, § 5] ли Альтман и Клейман [1, V, § 3].

Предложение 10.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм неособых многообразий над алгебраически замкнутым полем k и $n = \dim X - \dim Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *f — гладкий относительной размерности n;*

(ii) *$\Omega_{X/Y}$ — локально свободный ранга n на X;*

(iii) *для каждой замкнутой точки $x \in X$ индуцированное отображение касательных пространств Зарисского $T_f\colon T_x \to T_y$ сюръективно.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Это вытекает из определения гладкости, поскольку схема X целая (см. 10.0.2).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Из точной последовательности 8.11 гл. II, тензорно умноженной на $k(x)$, получаем точную последовательность

$$f^*\Omega_{Y/k} \otimes k(x) \to \Omega_{X/k} \otimes k(x) \to \Omega_{X/Y} \otimes k(x) \to 0.$$

Так как X и Y гладки над k, то размерность каждого из этих векторных пространств равна $\dim Y$, $\dim X$ и n соответственно. Поэтому левое отображение должно быть инъективным. Но для

замкнутой точки $k(x) \simeq k$, так что из 8.7 гл. II мы видим, что оно в точности совпадает с отображением

$$\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2,$$

индуцированным морфизмом f. Переходя к двойственным пространствам, получаем требуемое сюръективно отображение T_f.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Покажем прежде всего, что морфизм f является плоским. Для этого по свойству локализации плоскости достаточно показать, что $\mathcal{O}_x$ плоско над $\mathcal{O}_y$ для каждой *замкнутой* точки $x \in X$, где $y = f(x)$. Так как X и Y неособы, то оба этих локальных кольца регулярны. Более того, поскольку отображение T_f сюръективно, то отображение $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ инъективно, как и выше. Пусть $t_1, \ldots, t_r$ — регулярная система параметров в $\mathcal{O}_y$. Тогда их образы в $\mathcal{O}_x$ образуют часть регулярной системы параметров в кольце $\mathcal{O}_x$. Далее, поскольку $\mathcal{O}_x/(t_1, \ldots, t_r)$ автоматически плоско над $\mathcal{O}_Y/(t_1, \ldots, t_i) = k$, то мы можем воспользоваться 10.3A и показать с помощью убывающей индукции по i, что кольцо $\mathcal{O}_x/(t_1, \ldots, t_i)$ является плоским над $\mathcal{O}_y/(t_1, \ldots, t_i)$ для каждого i. В частности, для $i = 0$ мы получаем, что $\mathcal{O}_x$ плоско над $\mathcal{O}_y$. Таким образом, f является плоским морфизмом.

Теперь, повторив рассуждения из доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) в обратном порядке, заключаем, что для каждой замкнутой точки $x \in X$

$$\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(x)) = n.$$

С другой стороны, так как морфизм f плоский, то он доминантный, поэтому для общей точки $\zeta \in X$ по 8.6A гл. II имеем

$$\dim_{k(\zeta)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(\zeta)) \geqslant n.$$

Отсюда заключаем, что пучок $\Omega_{X/Y}$ когерентен ранга $\geqslant n$, поэтому по 8.9 гл. II он должен быть локально свободным ранга n. Следовательно, $\Omega_{X/Y} \otimes k(x)$ имеет размерность n в каждой точке $x \in X$, и, стало быть, f является гладким относительной размерности n. Предложение доказано.

Теперь приведем некоторые частные результаты, касающиеся свойств плоских морфизмов в характеристике нуль.

Лемма 10.5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — доминантный морфизм целых схем конечного типа над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0. Тогда существует непустое открытое множество $V \subset X$, такое, что $f\colon U \to Y$ является гладким.*

Доказательство. Заменив X и Y подходящими их открытыми подмножествами, можно считать, что оба они являются неособыми многообразиями над k (см. 8.16 гл. II). Далее, так как $\operatorname{char} k = 0$, то поле $K(X)$ сепарабельно порождено над $K(Y)$

(4.8А гл. I). Согласно 8.6А гл. II, пучок $\Omega_{X/Y}$ в общей точке схемы X свободен и имеет ранг $n = \dim X - \dim Y$. Следовательно, он локально свободен на некотором непустом открытом подмножестве $U \subset X$. В силу 10.4 мы получаем отсюда, что морфизм $f\colon U \to Y$ гладкий.

Пример 10.5.1. Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики p, $X = Y = \mathbf{P}_k^1$ и $f\colon X \to Y$ — морфизм Фробениуса (см. упр. 3.2 гл. I). Тогда f не является гладким ни на каком открытом подмножестве в X. Действительно, так как $d(t^p) = 0$, то естественное отображение $f^*\Omega_{Y/k} \to \Omega_{X/k}$ является нулевым, и поэтому $\Omega_{X/Y} \simeq \Omega_{X/k}$ является локально свободным ранга 1. Но относительная размерность f равна нулю, так что он нигде не гладкий.

Предложение 10.6. *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем конечного типа над алгебраически замкнутым полем k характеристики* 0. *Для любого r пусть*

$$X_r = \{\textit{замкнутые точки } x \in X \mid \operatorname{rank} T_{f,x} \leqslant r_x\}.$$

Тогда $\dim \overline{f(X_r)} \leqslant r$.

Доказательство. Пусть Y' — любая неприводимая компонента $\overline{f(X_r)}$, и пусть X' — неприводимая компонента $\overline{X}_r$, доминирующая над Y'. Снабдим X' и Y' приведенной индуцированной структурой и рассмотрим соответствующий доминантный морфизм $f'\colon X' \to Y'$. Тогда по 10.5 существует непустое открытое подмножество $U' \subset X'$, такое, что $f'\colon U' \to Y'$ — гладкий морфизм. Пусть теперь $x \in U' \cap X_r$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму отображений касательных пространств Зарисского:

$$\begin{tikzcd}
T_{x,U'} \arrow[r] \arrow[d, "T_{f',x}"'] & T_{x,X} \arrow[d, "T_{f,x}"] \\
T_{y,Y'} \arrow[r] & T_{y,Y}
\end{tikzcd}$$

Здесь горизонтальные стрелки инъективны, потому что U' и Y' — локально змакнутые подсхемы в X и Y соответственно. С другой стороны, $\operatorname{rank} T_{f,x} \leqslant r$, поскольку $x \in X_r$, и $T_{f',x}$ сюръективно, поскольку f' гладкий (см. 10.4). Отсюда мы заключаем, что $\dim T_{y,Y'} \leqslant r$ и, следовательно, $\dim Y' \leqslant r$.

Следствие 10.7 (гладкость почти всюду). *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм многообразий над алгебраически замкнутым полем k характеристики* 0, *и предположим, что многообразие X неособо. Тогда существует непустое открытое подмножество $V \subset Y$, такое, что $f\colon f^{-1}V \to V$ — гладкий морфизм.*

Доказательство. По 8.16 гл. II мы можем считать Y неособым. Пусть $r = \dim Y$ и $X_{r-1} \subset X$ — замкнутое подмножество, определенное в 10.6. Тогда по 10.6 $\dim \overline{f(X_{r-1})} \leqslant r-1$, так что, выкидывая $\overline{f(X_{r-1})}$ из Y, можно считать, что $\operatorname{rank} T_f \geqslant r$ для каждой замкнутой точки в X. Но поскольку Y неособо и $\dim Y = r$, это означает, что T_f сюръективно в каждой замкнутой точке из X. Следовательно, f гладок по 10.4.

Отметим, что если исходный морфизм f не был доминантным, то может быть, что $V \subset Y - \overline{f(X)}$ и $f^{-1}(V)$ пусто.

Для дальнейших результатов нам понадобится понятие группового многообразия. Напомним (см. упр. 3.21 гл. I), что *групповым* многообразием над алгебраически замкнутым полем k называется многообразие G вместе с морфизмами $\mu\colon G \times G \to G$ и $\rho\colon G \to G$, такими, что множество $G(k)$ k-рациональных точек из G (поскольку k алгебраически замкнуто, то оно совпадает с множеством всех замкнутых точек из G) снабжено структурой группы относительно операции, индуцированной морфизмом μ, и с обратным, индуцированным ρ.

Будем говорить, что групповое многообразие G *действует* на многообразии X, если задан морфизм $\theta\colon G \times X \to X$, который индуцирует гомоморфизм групп $G(k) \to \operatorname{Aut} X$.

Многообразие X вместе с групповым многообразием G, действующим на нем, называется *однородным пространством*, если группа $G(k)$ действует транзитивно на множестве $X(k)$ k-рациональных точек из X.

Замечание 10.7.1. Всякое групповое многообразие является однородным пространством, например, относительно действия самого на себе умножением слева.

Пример 107.2. Проективное пространство $\mathbf{P}_k^n$ является однородным пространством относительно действия группы $G = \mathrm{PGL}(n)$; см. 7.1.1. гл. II.

Пример 10.7.3. Однородное пространство обязательно является неособым. Действительно, согласно 9.16 гл. II, оно обладает неособым открытым подмножеством, и на нем действует транзитивная группа автоморфизмов, так что оно неособо всюду.

Теорема 10.8 (Клейман [3]). *Пусть X — однородное пространство с групповым многообразием G над алгебраически замкнутым полем k характеристики* 0. *Пусть $f\colon Y \to X$ и $g\colon Z \to X$ — морфизмы неособых многообразий Y, Z в X. Для любого $\sigma \in G(k)$ пусть Y^σ обозначает Y с морфизмом $\sigma \circ f$ в X. Тогда существует непустое открытое подмножество $V \subset G$, такое, что для каждого*

$\sigma \in V(k)$ *многообразие* $Y^\sigma \times_X Z$ *неособо и либо является пустым, либо имеет рагмерность, равную* $\dim Y + \dim Z - \dim X$.

Доказательство. Рассмотрим прежде всего морфизм

$$h : G \times Y \to X,$$

определенный как композиция морфизма f с морфизмом группового действия $\theta: G \times X \to Y$. Многообразие G неособо как групповое многообразие (10.7.3) и Y неособо по предположению, поэтому $G \times Y$ также неособо по 10.1. Так как $\operatorname{char} k = 0$, то мы можем применить к h утверждение 10.7 и вывести из этого, что существует непустое открытое подмножество $U \subset X$, такое, что морфизм $h: h^{-1}(U) \to U$ является гладким. Далее, G действует на $G \times Y$ умножениями слева на G, а на X с помощью θ, причем эти действия согласованы с морфизмом h по построению. Следовательно, для любого $\sigma \in G(k)$ морфизм $h: h^{-1}(U^\sigma) \to U^\sigma$ также является гладким. Но поскольку U^σ покрывают все X, то отсюда следует, что морфизм h является гладким всюду.

Рассмотрим теперь расслоенное произведение

$$W = (G \times Y) \times_X Z$$

с проекциями g' и h' на $G \times Y$ и Z соответственно, как показано на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ G \times Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_1"'] & X \\ G & \end{tikzcd}$$

Так как морфизм h гладкий, то h' тоже гладкий как морфизм, полученный из h с помощью расширения базы (см. 10.1). Далее, поскольку Z неособо, оно гладко над k, поэтому, согласно 10.1, W также гладко над k и, значит, неособо.

Рассмотрим морфизм

$$q = p_1 \circ g' : W \to G.$$

Применяя к нему следствие 10.7, заключаем, что существует непустое открытое подмножество $V \subset G$, такое, что морфизм $q: q^{-1}(V) \to V$ является гладким. Следовательно, если $\sigma \in V(k)$ — любая замкнутая точка, то слой W_σ над ней будет неособым. Но $W_\sigma = Y^\tau \times_X Z$, и тем самым мы показали то, что хотели показать. Отметим, что W_σ может не быть неприводимым, но тогда то,

что мы доказали, означает, что каждая связная компонента W_σ является неособым многообразием.

Для вычисления размерности W_σ заметим прежде всего, что h — гладкий морфизм относительной размерности, равной

$$\dim G + \dim Y - \dim X.$$

Следовательно, h' имеет ту же самую относительную размерность, и мы видим, что

$$\dim W = \dim G + \dim Y - \dim X + \dim Z.$$

Если W непусто, то морфизм q на $q^{-1}(V)$ имеет относительную размерность, равную $\dim W - \dim G$, так что для каждого σ мы имеем

$$\dim W_\sigma = \dim Y + \dim Z - \dim X.$$

Следствие 10.9. (Бертини). *Пусть X — неособое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k характеристики* 0. *Пусть $\mathfrak{d}$ — линейная система без базисных точек на X. Тогда почти каждый элемент из $\mathfrak{d}$, рассматриваемый как замкнутая подсхема в X, является неособым* (*но может быть приводимым*).

Доказательство. Пусть $f: X \to \mathbf{P}^n$ — морфизм, определяемый линейной системой $\mathfrak{d}$ (см. 7.8.1 гл. II). Рассмотрим $\mathbf{P}^n$ как однородное пространство относительно действия $G = \mathrm{PGL}(n)$ (см. 10.7.2). Применим теперь теорему 10.8, взяв за $g: H \to \mathbf{P}^n$ вложение гиперплоскости $H \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ в $\mathbf{P}^n$. В результате получим, что для почти всех $\sigma \in G(k)$ многообразие $X \times_{\mathbf{P}^n} H^\sigma = f^{-1}(H^\sigma)$ неособо. Но дивизоры $f^{-1}(H^\sigma)$ — это не что иное, как элементы линейной системы $\mathfrak{d}$ по построению f. Таким образом, доказано, что почти все элементы из $\mathfrak{d}$ являются неособыми многообразиями

Замечание 10.9.1. Позднее (упр. 11.3) мы увидим, что если $\dim f(X) \geqslant 2$, то все дивизоры в $\mathfrak{d}$ связны. Следовательно, тогда почти все они неприводимы и неособы.

Замечаоие 10.9. . Предположение, что X проективно, не обязательно, если мы имеем дело с конечномерной линейной системой $\mathfrak{d}$. Например, если X проективно и $\mathfrak{d}$ имеет базисное множество Σ, то, рассматривая ограничение $\mathfrak{d}$ на $X - \Sigma$, мы получаем более общее утверждение: общий элемент линейной системы $\mathfrak{d}$ может иметь особенности только в базисных точках этой линейной системы

Замечание 10.9.3. В характеристике $p > 0$ это утверждение неверно. Например, в 10.5.1 морфизм f задается одномерной линейной системой $\{pP \mid P \in \mathbf{P}^1\}$. Следовательно, каждый дивизор в $\mathfrak{d}$ является точкой, взятой с кратностью p.

Замечание 10.9.4. Сравните полученный результат с теоремой Бертини из 8.18 гл. II.

Упражнения

10.1. Над несовершенным полем гладкость и регулярность не равносильны. Например, пусть k_0 — поле характеристики $p > 0$, $k = k_0(t)$, и пусть $X \subset \mathbf{A}_k^2$ — кривая, определенная уравнением $y^2 = x^p - t$. Показать, что каждое локальное кольцо схемы X регулярно, но X не является гладкой над k.

10.2. Пусть $f\colon X \to Y$ — собственный плоский морфизм многообразий над k. Предположим, что для некоторой точки $y \in Y$ ее слой X_y является гладким над $k(y)$. Показать, что существует открытая окрестность U точки y в Y, такая, что морфизм $f\colon f^{-1}(U) \to U$ является гладким.

10.3. Морфизм $f\colon X \to Y$ схем конечного типа над k называется *этальным*, если он гладкий относительной размерности 0. Морфизм f называется *неразветвленным* в точке x, если $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{O}_x$, где $y = f(x)$ и $k(x)$ — сепарабельное алгебраическое расширение поля $k(y)$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) f этален;

(ii) f плоский и $\Omega_{X/Y} = 0$;

(iii) f плоский и неразветвленный.

10.4. Показать, что морфизм $f\colon X \to Y$ схем конечного типа над k этален тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие. Для каждой точки $x \in X$ и $y = f(x)$ пусть $\hat{\mathcal{O}}_x$ и $\hat{\mathcal{O}}_y$ — пополнения локальных колец в x и y соответственно. Выберем поля представителей (см. 8.25А гл. II) $k(x) \subset \hat{\mathcal{O}}_x$ и $k(y) \subset \hat{\mathcal{O}}_y$, так чтобы $k(y) \subset k(x)$ при естественном отображении $\hat{\mathcal{O}}_y \to \hat{\mathcal{O}}_x$. Условие заключается в том, что для каждой точки $x \in X$ поле $k(x)$ является сепарабельным алгебраическим расширением поля $k(y)$ и естественное отображение

$$\hat{\mathcal{O}}_y \otimes_{k(y)} k(x) \to \hat{\mathcal{O}}_x$$

является изоморфизмом.

10.5. Пусть $x \in X$ — некоторая точка. Определим *этальную окрестность* точки x как этальный морфизм $f\colon U \to X$ вместе с точкой $x' \in U$, такой, что $f(x') = x$. В качестве примера на использование этальных окрестностей доказать следующее утверждение. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, и предположим, что для каждой точки $x \in X$ существует этальная окрестность U, для которой $f^*\mathcal{F}$ — свободный $\mathcal{O}_U$-модуль, где $f\colon U \to X$ — естественное вложение. Тогда $\mathcal{F}$ является локально свободным на X.

10.6. Пусть Y — плоская кубическая кривая с обыкновенной двойной точкой $y^2 = x^2(x + 1)$. Показать, что Y обладает конечным этальным покрытием X степени 2, состоящим из двух неприводимых компонент, каждая из которых изоморфна нормализации Y, см. рис. 12.

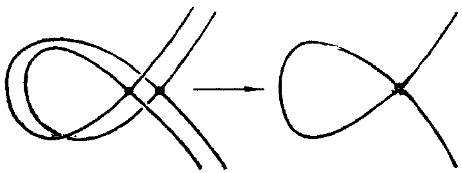


Рис. 12. Конечное этальное накрытие.

10.7 (Серр). *Линейная система с переменными особыми точками.* Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики 2, $P_1, \ldots, P_7 \in \mathbf{P}_k^2$ — семь точек проективной плоскости, определенных над простым полем $\mathbf{F}_2 \subset k$, и пусть $\mathfrak{d}$ — линейная система кубических кривых на $\mathbf{P}_k^2$, проходящих через эти точки.

(a) Показать, что линейная система $\mathfrak{d}$ имеет размерность 2 и базисные точки $P_1, \ldots, P_7$ и задает несепарабельный морфизм степени 2 $\mathbf{P}_k^2 - \{P_1, \ldots, P_7\} \to \mathbf{P}^2$.

(b) Показать, что каждая кривая $C \in \mathfrak{d}$ особа. Более точно, кривая C либо состоит из трех прямых, проходящих через одну из точек P_i, либо является неприводимой каспидальной кубической кривой с особой точкой $P \neq P_i$ для любого i. Более того, соответствие $C \mapsto$ (особая точка C) является взаимно однозначным соответствием между элементами $\mathfrak{d}$ и точками $\mathbf{P}^2$. Таким образом, особые точки кривых из $\mathfrak{d}$ заметают все $\mathbf{P}^2$.

10.8. *Линейная система с переменными особыми точками, содержащимися в базисном множестве (в любой характеристике).* Рассмотрим аффинное трехмерное пространство $\mathbf{A}^3$ с координатами x, y, z. Пусть C — коника $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ в плоскости (x, y) и P — точка $(0, 0, t)$ на оси z. Обозначим через Y_t замыкание в $\mathbf{P}^3$ конуса над C с вершиной P. Показать, что при переменном t поверхности $\{Y_t\}$ образуют линейную систему размерности 1 с переменными особенностями в P и что базисное множество этой линейной системы состоит из коники C и оси z.

10.9. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм многообразий над k. Предположим, что Y регулярно, а X является многообразием Коэна — Маколея и что каждый слой f имеет размерность, равную $\dim X - \dim Y$. Показать, что тогда морфизм f плоский. [*Указание.* Имитировать доказательство предложения 10.4, используя теорему 8.21А гл. II.]

§ 11. Теорема о формальных функциях

В этом параграфе мы докажем так называемую теорему о формальных функциях и ее важные следствия: основную теорему Зарисского и теорему о разложении Штейна. Сама теорема сравнивает когомологии инфинитезимальной окрестности слоя проективного морфизма со слоями высших прямых образов пучков. В приложениях используется только случай $i = 0$ (который может быть установлен и без когомологий), однако доказательство теоремы проводится с помощью убывающей индукции по i и для этого необходима вся когомологическая техника. Первоначальное доказательство Зарисского [2] его основной теоремы было дано с помощью совершенно иного метода, не использующего когомологии.

Пусть $f\colon X \to Y$ — проективный морфизм нётеровых схем, $\mathcal{F}$ — когерентных пучок на X и $y \in Y$ — некоторая точка. Для каждого $n \geqslant 1$ положим

$$X_n = X \times_Y \operatorname{Spec} \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n.$$

Тогда при $n = 1$ мы получим слой X_y, а при $n > 1$ — схему с нильпотентными элементами с тем же самым базисным тополо-

23—01390

гическим пространством, что и X_y. Это своего рода утолщение слоя X_y над точкой y.

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Пусть $\mathscr{F}_n = v^*\mathscr{F}$, где $v\colon X_n \to X$ — естественное отображение. Тогда по 9.3.1 для каждого n мы имеем естественные отображения

$$R^i f_* (\mathscr{F}) \otimes \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n \to R^i f'_* (\mathscr{F}_n).$$

Так как схема $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n$ аффинна и сконцентрирована в одной точке, то по 8.5 справа стоит не что иное, как группа $H_i(X_n, \mathscr{F}_n)$. При переменном n обе стороны образуют обратные системы (по поводу обратных систем и обратных пределов см. § 9 гл. II). Следовательно, переходя к пределам, мы получаем естественное отображение

$$R^i f_* (\mathscr{F})\hat{_y} \to \varprojlim H^i (X_n, \mathscr{F}_n).$$

Теорема 11.1 (теорема о формальных функциях). *Пусть $f\colon X \to Y$ — проективный морфизм нётеровых схем, $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X и $y \in Y$ — некоторая точка. Тогда естественное отображение*

$$R^i f_* (\mathscr{F})\hat{_y} \to \varprojlim H^i (X_n, \mathscr{F}_n)$$

является изоморфизмом для всякого $i \geqslant 0$.

Доказательство. Вложим X в некоторое проективное пространство $\mathbf{P}^N_Y$ и рассмотрим $\mathscr{F}$ как когерентный пучок на $\mathbf{P}^N_Y$. Тем самым мы сведем все к случаю $X = \mathbf{P}^N_Y$.

Далее, пусть $A = \mathcal{O}_y$ и сделаем плоскую замену базы $\operatorname{Spec} A \to Y$. Тем самым с помощью 9.3 мы сводим все к случаю, когда схема Y аффинна и является спектром локального нётерова кольца A с замкнутой точкой y. Тогда, согласно 8.5, мы можем воспринимать доказываемое утверждение как утверждение о существовании изоморфизма A-модулей

$$H^i (X, \mathscr{F})\hat{\ } \xrightarrow{\sim} \varprojlim H^i (X_n, \mathscr{F}_n).$$

Предположим теперь, что $\mathscr{F}$ — пучок вида $\mathcal{O}(q)$ на $X = \mathbf{P}^N_A$ для некоторого $q \in \mathbf{Z}$. Тогда $\mathscr{F}_n$ — это в точности пучок $\mathcal{O}(q)$, только на схеме $X_n = \mathbf{P}^N_{A/\mathfrak{m}^n}$. Из явных вычислений в 5.1 получаем, что для каждого n имеет место изоморфизм

$$H^i (X_n, \mathscr{F}_n) \simeq H^i (X, \mathscr{F}) \otimes_A A/\mathfrak{m}^n.$$

Следовательно, по определению пополнения имеем в этом случае

$$H^i (X, \mathscr{F})\hat{\ } \simeq \varprojlim H^i (H_n, \mathscr{F}_n).$$

Ясно, что подобные вычисления проходят и для любой конечной суммы пучков вида $\mathcal{O}(q_i)$.

Теперь будем доказывать теорему для произвольного когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X с помощью убывающей индукции по i. При $i > N$ обе стороны обращаются в 0, так как X может быть покрыт $N+1$ аффинными открытыми подмножествами (см. упр. 4.8), так что можно предполагать, что теорема доказана для $i+1$ и любого когерентного пучка.

Как следует из 5.18 гл. II, всякий когерентный пучок $\mathscr{F}$ на X можно представить в виде факторпучка пучка $\mathscr{E}$, являющегося конечной прямой суммой пучков $\mathcal{O}(q_i)$ для подходящих $q_i \in \mathbf{Z}$. Пусть $\mathscr{R}$ — соответствующее ядро, т. е. имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathscr{R} \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0. \qquad (1)$$

К сожалению, функтор тензорного умножения на $\mathcal{O}_{X_n}$ не является точным, а будет только точным справа, поэтому мы получаем следующую точную последовательность пучков на X_n для каждого n:

$$\mathscr{R}_n \to \mathscr{E}_n \to \mathscr{F}_n \to 0.$$

Обозначим через $\mathscr{T}_n$ и $\mathscr{S}_n$ образ и ядро отображения $\mathscr{R}_n \to \mathscr{E}_n$ соответственно, тогда мы получаем точные последовательности вида

$$0 \to \mathscr{S}_n \to \mathscr{R}_n \to \mathscr{T}_n \to 0, \qquad (2)$$

$$0 \to \mathscr{T}_n \to \mathscr{E}_n \to \mathscr{F}_n \to 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H^i(X,\mathscr{R})\hat{\ } \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & H^i(X,\mathscr{E})\hat{\ } \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha_2"] & H^i(X,\mathscr{F})\hat{\ } \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha_3"] & H^{i+1}(X,\mathscr{R})\hat{\ } \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & H^{i+1}(X,\mathscr{E})\hat{\ } \arrow[dd, "\alpha_5"] \\ \varprojlim H^i(X_n,\mathscr{R}_n) \arrow[d, "\beta_1"] & & & \varprojlim H^{i+1}(X_n,\mathscr{R}_n) \arrow[d, "\beta_2"] & \\ \varprojlim H^i(X_n,\mathscr{T}_n) \arrow[r] & \varprojlim H^i(X_n,\mathscr{E}_n) \arrow[r] & \varprojlim H^i(X_n,\mathscr{F}_n) \arrow[r] & \varprojlim H^{i+1}(X_n,\mathscr{T}_n) \arrow[r] & \varprojlim H^{i+1}(X_n,\mathscr{E}_n). \end{tikzcd}$$

Здесь верхняя последовательность возникает из когомологической последовательности, соответствующей точной последовательности (1), путем перехода к пополнениям. Пополнение здесь является точным функтором, поскольку все промежуточные члены — конечно порожденные A-модули (см. 9.3A гл. II). Нижняя последовательность получается из когомологической последовательности, соответствующей точной последовательности (3), путем перехода к обратным пределам. Здесь все промежуточные группы являются конечно порожденными $A/\mathfrak{m}^n$-модулями и удовлетворяют условию обрыва убывающих цепочек подмодулей. Следовательно, для соответствующих обратных систем выполняется условие Миттаг-Лефлера (9.1.2 гл. II), и, стало быть, нижняя последовательность является точной. Вертикальные стрелки $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ — это отображения из условия теоремы. Здесь α_2 является изоморфизмом, потому что $\mathscr{E}$ — прямая сумма пучков $\mathcal{O}(q_i)$, α_4 и α_5 являются изоморфизмами по предположению индукции. Наконец, β_1 и β_2 — это отображения, индуцированные точной последовательностью (2).

Мы покажем чуть ниже, что они тоже являются изоморфизмами. А пока что предположим, что это так. Тогда из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что отображение α_3 сюръективно. Поскольку это верно для любого когерентного пучка на X, то отображение α_1 тоже должно быть сюръективным. Но тогда α_3 — изоморфизм, что мы и хотели установить.

Осталось доказать, что β_1 и β_2 — изоморфизмы. Переходя в (2) к точной последовательности когомологий и беря их обратные пределы (используя 9.1 гл. II), достаточно показать, что для всех $i \geqslant 0$

$$\varprojlim H^i(X_n, \mathscr{S}_n) = 0.$$

Чтобы это установить, покажем, что для любого n существует $n' > n$, такое, что отображение пучков $\mathscr{S}_{n'} \to \mathscr{S}_n$ является нулевым. В силу квазикомпактности утверждение локально по X, поэтому X можно считать аффинным, скажем $X = \operatorname{Spec} B$. Обозначим через R, E, S_n B-модули, соответствующие пучкам $\mathscr{R}$, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{S}_n$, и пусть $\mathfrak{a}$ обозначает идеал $\mathfrak{m}B$.

Напомним, что R является подмодулем E и что

$$S_n = \ker(R/\mathfrak{a}^n R \to E/\mathfrak{a}^n E).$$

Следовательно, $S_n = (R \cap \mathfrak{a}^n E)/\mathfrak{a}^n R$. По теореме Крулля 3.1A $\mathfrak{a}$-адическая топология на R индуцирует $\mathfrak{a}$-адическую топологию на E. Иначе говоря, для любого n существует $n' > n$, такое, что $R \cap \mathfrak{a}^{n'} E \subset \mathfrak{a}^n R$. Но в таком случае отображение $S_{n'} \to S_n$ нулевое, что и требовалось доказать.

Замечание 11.1.1. Эта теорема доказана Гротендиком [EGA III, § 4] в более общей ситуации, а именно для произвольных собственных морфизмов.

Замечание 11.1.2. Во многих приложениях этой теоремы используется только случай $i = 0$. В этом случае с правой стороны стоит

$\Gamma(\hat{X}, \hat{\mathscr{F}})$, где $\hat{X}$ — формальное пополнение X вдоль X_y, а $\hat{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}$ (см. 9.2 гл. II). В частности, если $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$, то оно равно $\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$, которое называется кольцом *формальных регулярных функций* (иногда называемое также кольцом *голоморфных функций*) на X вдоль X_y. Отсюда и название теорем.

Замечание 11.1.3. Можно также ввести когомологии $H^i(\hat{X}, \hat{\mathscr{F}})$ пучка $\hat{\mathscr{F}}$ на формальной схеме $\hat{X}$ и доказать, что они изоморфны любому из двух объектов (для заданного i), участвующих в формулировке теоремы, см. [EGA III, § 4].

Следствие 11.2. *Пусть $f: X \to Y$ — проективный морфизм нётеровых схем и $r = \max\{\dim X_y \mid y \in Y\}$. Тогда $R^i f_*(\mathscr{F}) = 0$ для всех $i > r$ и любого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X.*

Доказательство. Для всякой точки $y \in Y$ схема X_n имеет то же базисное топологическое пространство, что и X_y. Следовательно, $H^i(X_n, \mathscr{F}_n) = 0$ при $i > r$ (см. 2.7). Отсюда вытекает, что $R^i f_*(\mathscr{F})\hat{}_y = 0$ для всех $y \in Y$ и $i > r$, и так как по 8.8 пучки $R^i f_*(\mathscr{F})$ когерентны, то они должны равняться нулю при $i > r$, что и требовалось доказать.

Следствие 11.3. *Пусть $f: X \to Y$ — проективный морфизм нётеровых схем, и предположим, что $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Тогда слой $f^{-1}(y)$ связен для любой точки $y \in Y$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $f^{-1}(y) = X' \cup X''$, где X' и X'' — непересекающиеся замкнутые подмножества. Тогда для каждого n мы будем иметь равенство

$$H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}) = H^0(X'_n, \mathcal{O}_{X_n}) \oplus H^0(X''_n, \mathcal{O}_{X_n}).$$

С другой стороны, по теореме о формальных функциях имеем

$$\hat{\mathcal{O}}_y = (f_*\mathcal{O}_X)\hat{}_y = \varprojlim H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}).$$

Следовательно, $\hat{\mathcal{O}}_y = A' \oplus A''$, где

$$A' = \varprojlim H^0(X'_n, \mathcal{O}_{X_n}) \text{ и } A'' = \varprojlim H^0(X''_n, \mathcal{O}_{X_n}).$$

Но это невозможно, потому что локальное кольцо не может быть прямой суммой двух других колец. Действительно, пусть e' и e'' — единичные элементы колец A' и A'' соответственно. Тогда $e' + e'' = 1$ в $\hat{\mathcal{O}}_y$. Но $e'e'' = 0$, поэтому они не могут быть обратимыми в $\hat{\mathcal{O}}_y$ и, стало быть, содержатся в максимальном идеале $\mathfrak{m}_y$, так что их сумма не может быть 1 (ср. упр. 2.19 гл. II).

Следствие 11.4 (основная теорема Зарисского). *Пусть $f: X \to Y$ — бирациональный проективный морфизм нётеровых целых схем, и предположим, что схема Y нормальна. Тогда для каждой точки $y \in Y$ слой $f^{-1}(y)$ связен (см. также 5.2 гл. V).*

Доказательство. По предыдущему результату нам надо проверить только, что $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Это утверждение локально по Y, поэтому можно считать схему Y аффинной, скажем равной $\operatorname{Spec} A$. В таком случае поскольку $f_*\mathcal{O}_X$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр, то кольцо $B = \Gamma(Y, f_*\mathcal{O}_X)$ является конечно порожденным A-модулем. Но A и B — целостные кольца с одним и тем же полем частных и кольцо A целозамкнуто, поэтому $A = B$. Следовательно, $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ и утверждение доказано.

Следствие 11.5 (разложение Штейна). *Пусть $f: X \to Y$ — проективный морфизм нётеровых схем. Тогда f можно разложить в композицию $g \circ f'$, где $f': X \to Y'$ — проективный морфизм со связными слоями, а морфизм $g: Y' \to Y$ конечен.*

Доказательство. Пусть $Y' = \mathbf{Spec}\, f_*\mathcal{O}_X$ (см. упр. 5.17 гл. II). Тогда поскольку $f_*\mathcal{O}_X$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр, то естественное отображение $g: Y' \to Y$ конечно. С другой стороны, ясно, что f пропускается через g, так что мы получаем морфизм $f': X \to Y'$. Поскольку морфизм g отделим, то по упр. 4.9 гл. II заключаем, что f' — проективный морфизм. По построению $f'_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y'}$, так что f' имеет по 11.3 связные слои. Доказательство закончено.

Упражнения

11.1. Показать, что утверждение 11.2 неверно без предположения о проективности морфизма f. Например, пусть $X = \mathbf{A}_k^n$, $P = (0, 0, \ldots, 0)$, $U = X - P$ и $f: U \to X$ — вложение. Тогда все слои f нульмерны, но $R^{n-1}f_*\mathcal{O}_U \neq 0$.

11.2. Показать, что всякий проективный морфизм с конечными слоями (т. е. проективный и квазиконечный, см. упр. 35 гл. II) является конечным.

11.3. Пусть X — нормальное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k, $\mathfrak{d}$ — линейная система (эффективных дивизоров Картье) без базисных точек, и предположим, что $\mathfrak{d}$ *не составлена из пучка*; это означает, что $\dim f(X) \geqslant 2$, где $f: X \to \mathbf{P}_k^n$ — морфизм, определяемый $\mathfrak{d}$. Показать, что тогда каждый дивизор из $\mathfrak{d}$ связен. Это усиливает теорему Бертини 10.9.1. [*Указание*. Воспользоваться 11.5, упр. 5.7 и 7.9.]

11.4. *Принцип связности*. Пусть $\{X_t\}$ — плоское семейство замкнутых подсхем в $\mathbf{P}_k^n$, параметризованных неприводимой кривой T конечного типа над k. Предположим, что существует непустое открытое множество $U \subset T$, такое, что для всякой замкнутой точки $t \in U$ слой X_t связен. Показать, что тогда X_t связен и для любой точки $t \in T$.

***11.5.** Пусть Y — гиперповерхность в $X = \mathbf{P}_k^N$, где $N \geqslant 4$, и $\hat{X}$ — формальное пополнение X вдоль Y (см. § 9 гл. II). Доказать, что естественное

отображение $\operatorname{Pic} \hat{X} \to \operatorname{Pic} Y$ является изоморфизмом. [*Указание*. Воспользоваться упр. 9.6 гл. II и рассмотреть отображения $\operatorname{Pic} X_{n+1} \to \operatorname{Pic} X_n$ для каждого n, см. упр. 4.6 и 5.5.]

11.6. Пусть опять Y — гиперповерхность в $X = \mathbf{P}_k^N$, где $N \geqslant 2$.

(a) Показать, что для локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X естественное отображение

$$H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}})$$

является изоморфизмом.

(b) Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) для каждого локально свободного пучка $\mathfrak{F}$ на $\hat{X}$ существует когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X, такой, что $\mathfrak{F} \simeq \hat{\mathcal{F}}$ (т. е. пучок $\mathfrak{F}$ *алгебраизуем*);

(ii) для каждого локально свободного пучка $\mathfrak{F}$ на $\hat{X}$ существует целое n_0, такое, что $\mathfrak{F}(n)$ порождается своими глобальными сечениями для всех $n \geqslant n_0$.

[*Указание*. Для доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) показать, что на X можно найти пучки $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$, являющиеся прямыми суммами пучков вида $\mathcal{O}(-q_i)$ и такие, что на $\hat{X}$ имеет место точная последовательность $\hat{\mathcal{E}}_1 \to \hat{\mathcal{E}}_0 \to \mathfrak{F} \to 0$. Затем применить утверждение (a) к пучку $\mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_0)$.]

(c) Показать, что из условий (i) и (ii) в (b) вытекает, что естественное отображение $\operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} \hat{X}$ является изоморфизмом.

Замечание. В действительности если $N \geqslant 3$, то условия (i) и (ii) выполняются всегда. Этот факт вместе с упр. 11.5 приводит к доказательству Гротендика [SGA 2] теоремы Лефшеца, утверждающей, что если Y — гиперповерхность в $\mathbf{P}_k^N$, где $N \geqslant 4$, то $\operatorname{Pic} Y$ изоморфен $\mathbf{Z}$ и порождается пучком $\mathcal{O}_X(1)$. См. Хартсхорн [5, гл. IV].

11.7. Пусть теперь Y — кривая в $X = \mathbf{P}_k^2$.

(a) Используя метод упр. 11.5, показать, что отображение $\operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} Y$ сюръективно и его ядро является бесконечномерным векторным пространством над k.

(b) Вывести отсюда, что существует обратимый пучок $\mathfrak{L}$ на $\hat{X}$, который не алгебраизуется.

(c) Вывести отсюда также, что существует локально свободный пучок $\mathfrak{F}$ на $\hat{X}$, такой, что никакой из подкрученных пучков $\mathfrak{F}(n)$ не порождается глобальными сечениями. Ср. 9.9.1 гл. II.

11.8. Пусть $f: X \to Y$ — проективный морфизм, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, являющийся плоским над Y, и предположим, что $H^i(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$ для некоторого i и некоторой точки $y \in Y$. Показать, что тогда $R^if_*(\mathcal{F})$ равен 0 в некоторой окрестности точки y.

§ 12. Теорема полунепрерывности

В этом параграфе мы будем изучать, как меняются когомологии слоев $H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$ (как функции от $y \in Y$) в случае проективного морфизма $f: X \to Y$ и когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X, плоского над Y. Для этого мы установим связь между этими когомологиями и слоями пучков $R^if_*(\mathcal{F})$. Основными результатами здесь являются теорема полунепрерывности 12.8 и теорема о когомологиях и замене базы 12.11.

Поскольку изучаемый вопрос локален по Y, то наше внимание будет сконцентрировано в основном на случае, когда $Y = \operatorname{Spec} A$ аффинна. В таком случае речь будет идти о сравнении A-модулей $H^i(X_y, \mathscr{F}_y)$ и $H^i(X, \mathscr{F})$. Согласно 9.4, когомологии слоя равны $H^i(X, \mathscr{F} \otimes k(y))$, но мы будем следовать Гротендику и изучать более общую ситуацию $H^i(X, \mathscr{F} \otimes_A M)$ для любого A-модуля M, рассматривая $H^i(X, \mathscr{F} \otimes_A M)$ как функтор от M.

Определение. Пусть A — нётерово кольцо, $Y = \operatorname{Spec} A$, $f\colon X \to Y$ — проективный морфизм, и пусть $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X, плоский над Y. (Эти данные будут оставаться фиксированными на протяжении всего параграфа.) Тогда для каждого A-модуля M и любого $i \geqslant 0$ положим

$$T^i(M) = H^i(X, \mathscr{F} \otimes_A M).$$

Предложение 12.1. *Для каждого $i \geqslant 0$ T^i является аддитивным ковариантным точным в среднем члене функтором из категории A-модулей в себя. Набор $(T^i)_{i \geqslant 0}$ образует δ-функтор* (см. § 1).

Доказательство. Ясно, что T^i — аддитивный ковариантный функтор. Так как пучок $\mathscr{F}$ плоский над Y, то для любой точной последовательности A-модулей вида

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

мы получаем следующую точную последовательность пучков на X:

$$0 \to \mathscr{F} \otimes M' \to \mathscr{F} \otimes M \to \mathscr{F} \otimes M'' \to 0.$$

Рассматривая соответствующую длинную точную последовательность когомологий, видим, что каждый из T^i является точным в среднем члене и что все вместе они образуют δ-функтор.

Следующее утверждение позволяет производить вычисления функторов T^i только с помощью A-модулей.

Предложение 12.2. *В тех же предположениях, что и выше, существует комплекс $L^\cdot$ конечно порожденных свободных A-модулей, ограниченный сверху* (т. е. $L^n = 0$ для $n \gg 0$) *и такой, что для любого A-модуля M и любого $i \geqslant 0$ имеет место игоморфизм*

$$T^i(M) = h^i(L^\cdot \otimes_A M)$$

и этот изоморфизм является изоморфизмом δ-функторов.

Доказательство. Для любого A-модуля M пучок $\mathscr{F} \otimes_A M$ квазикогерентен на X, поэтому для вычисления $H^i(X, \mathscr{F} \otimes_A M)$ мы можем воспользоваться когомологиями Чеха. Пусть

$\mathfrak{U} = (U_i)$ — открытое аффинное покрытие X и $C^\cdot = C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ — комплекс Чеха пучка $\mathscr{F}$ (см. § 4). Тогда для любых $i_0, \ldots, i_p$ имеем

$$\Gamma(U_{i_0, \ldots, i_p}, \mathscr{F} \otimes_A M) = \Gamma(U_{i_0, \ldots, i_p}, \mathscr{F}) \otimes_A M,$$

так что

$$C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes_A M) = C^\cdot \otimes_A M.$$

Следовательно, для каждого M мы получаем изоморфизм

$$T^i(M) = h^i(C^\cdot \otimes_A M).$$

Это верный шаг в направлении доказательства, поскольку комплекс $C^\cdot$ ограничен сверху. Однако A-модули C^i почти никогда не бывают конечно порожденными. Тем не менее комплекс $C^\cdot$ обладает рядом хороших свойств для каждого i, а именно C^i являются *плоскими* A-модулями (так как пучок $\mathscr{F}$ плоский над Y) и когомологии $h^i(C^\cdot) = H^i(X, \mathscr{F})$ являются конечно порожденными A-модулями, так как пучок $\mathscr{F}$ когерентен и морфизм f проективен. В таком случае предложение вытекает из следующего алгебраического результата.

Лемма 12.3. *Пусть A — нётерово кольцо и $C^\cdot$ — комплекс A-модулей, ограниченный сверху и такой, что каждого i $h^i(C^\cdot)$ являются конечно порожденными A-модулями. Тогда существует комплекс $L^\cdot$ конечно порожденных свободных A-модулей, также ограниченный сверху, и морфизм комплексов $g\colon L^\cdot \to C^\cdot$, такой, что индуцированное им отображение когомологий $h^i(L^\cdot) \to h^i(C^\cdot)$ является изоморфизмом для каждого $i \geqslant 0$. Более того, если каждый из A-модулей C^i плоский, то отображение*

$$h^i(L^\cdot \otimes M) \to h^i(C^\cdot \otimes M)$$

является изоморфизмом для любого $A^\cdot$-модуля M.

Доказательство. Прежде всего зафиксируем обозначения. Для любого комплекса $N^\cdot$ положим

$$Z^n(N^\cdot) = \ker(d^n\colon N^n \to N^{n+1})$$

и

$$B^n(N^\cdot) = \operatorname{im}(d^{n-1}\colon N^{n-1} \to N^n).$$

Следовательно,

$$h^n(N^\cdot) = Z^n(N^\cdot)/B^n(N^\cdot).$$

Далее, для больших n имеем $C^n = 0$, поэтому положим также $L^n = 0$. Сделаем предположение индукции, что комплекс $L^\cdot$

и морфизм комплексов $g\colon L^\cdot \to C^\cdot$ построены в степенях $i > n$, причем так, что выполняются следующие условия:

$$h^i(L^\cdot) \xrightarrow{\sim} h^i(C^\cdot) \quad \text{для всех} \quad i > n+1, \qquad (1)$$

и отображение

$$Z^{n+1}(L^\bullet) \to h^{n+1}(C^\bullet) \text{ сюръективно.} \qquad (2)$$

Теперь будем строить L^n, $d\colon L^n \to L^{n+1}$ и $g\colon L^n \to C^n$ так, чтобы продвинуть выполнение этих свойств еще на один шаг.

Выберем образующие $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ A-модуля $h^n(C^\cdot)$, что можно сделать в силу его конечной порожденности. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — некоторые их прообразы в $Z^n(C^\cdot)$. Далее, пусть $y_{r+1}, \ldots, y_s$ — образующие модуля $g^{-1}(B^{n+1}(C^\cdot))$, который является подмодулем в L^{n+1} и потому конечно порожден. Положим $g(y_i) = \bar{y}_i \in B^{n+1}(C^\cdot)$ и поднимем $\bar{y}_i$ до элементов $x_{r+1}, \ldots, x_s \in C^n$.

В качестве L^n возьмем теперь свободный A-модуль с s образующими $e_1, \ldots, e_s$ и определим отображение $d\colon L^n \to L^{n+1}$, полагая $de_i = 0$ для $i = 1, \ldots, r$ и $de_i = y_i$ для $i = r+1, \ldots, s$.

Отображение $g\colon L^n \to C^n$ определим формулой $g(e_i) = x_i$ для всех i. Тогда легко проверяется, что g коммутирует с d, что $h^{n+1}(L^\cdot) \to h^{n+1}(C^\cdot)$ — изоморфизм и что отображение $Z^n(L^\cdot) \to h^n(C^\cdot)$ сюръективно. Следовательно, по индукции мы построили требуемый комплекс $L^\cdot$.

Предположим теперь, что каждый из A-модулей C^i является плоским. Тогда с помощью убывающей индукции по i докажем, что отображение

$$h^i(L^\bullet \otimes M) \to h^i(C^\bullet \otimes M)$$

является изоморфизмом для всякого A-модуля M. При $i \gg 0$ модули L^i и C^i обращаются в нуль, поэтому предположим, что это отображение является изоморфизмом для $i+1$. Так как всякий A-модуль есть прямой предел конечно порожденных A-модулей и функторы $\otimes$ и h^i перестановочны с прямыми пределами, то утверждение достаточно доказать только для конечно порожденных A-модулей. Итак, пусть M — конечно порожденный A-модуль. Представим как его фактормодуль свободного конечно порожденного A-модуля E с ядром R, так что следующая последовательность точна:

$$0 \to R \to E \to M \to 0.$$

Поскольку каждый из модулей C^i плоский по предположению, а каждый из L^i свободный, а значит, и плоский, то мы получаем следующую точную коммутативную диаграмму комплексов:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & L^\bullet \otimes R & \to & L^\bullet \otimes E & \to & L^\bullet \otimes M & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & C^\bullet \otimes R & \to & C^\bullet \otimes E & \to & C^\bullet \otimes M & \to 0. \end{array}$$

Применяя функторы h^i, получаем соответствующую коммутативную диаграмму длинных точных последовательностей. Так как по индукции утверждение верно при $i+1$ и для E, поскольку модуль E свободен и $h^i(L^\cdot) \to h^i(C^\cdot)$ — изоморфизм, то по лемме о пяти гомоморфизмах оно верно также и для любого M. Лемма доказана.

Теперь изучим условия точности (точности слева, справа) функторов T^i. Для любого комплекса $N^\cdot$ положим

$$W^i(N^\bullet) = \operatorname{coker}(d^{i-1}\colon N^{i-1} \to N^i),$$

так что имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \to h^i(N^\bullet) \to W^i(N^\bullet) \to N^{i+1}.$$

Предложение 12.4. *Следующие условия эквивалентны:*
(i) T^i *точен слева;*
(ii) $W^i = W^i(L^\cdot)$ *— проективный A-модуль;*
(iii) *существует конечно порожденный A-модуль Q, такой, что*

$$T^i(M) = \operatorname{Hom}_A(Q, M)$$

для всякого M.
Более того, Q единствен.

Доказательство. Так как функтор тензорного умножения точен справа, то

$$W^i(L^\bullet \otimes M) = W^i(L^\bullet) \otimes M$$

для любого A-модуля M. Далее, вместо $W^i(L^\cdot)$ будем писать просто W^i. Следовательно,

$$T^i(M) = \ker(W^i \otimes M \to L^{i+1} \otimes M).$$

Пусть $0 \to M' \to M$ — вложение модулей. Тогда мы получаем следующую точную коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 \to & T^i(M') & \to & W^i \otimes M' & \to & L^{i+1} \otimes M' \\ & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & T^i(M) & \to & W^i \otimes M & \to & L^{i+1} \otimes M. \end{array}$$

Здесь третье вертикальное отображение инъективно, поскольку L^{i+1} — свободный модуль. Простой диаграммный поиск показывает, что α тогда и только тогда инъективно, когда инъективно β. Поскольку это утверждение верно для любой точной последовательности $0 \to M' \to M$, то отсюда вытекает, что T^i точен слева тогда и только тогда, когда модуль W^i плоский. (Напомним, что T^i всегда точен в среднем члене, см. 12.1.) Но так как модуль W^i конечно порожден, то это эквивалентно тому, что W^i проективен (см. 9.1A). Это доказывает импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii).

Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) очевидна.

Докажем (ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $\check{L}^{i+1}$ и $\check{M}^i$ — двойственные проективные модули. Положим

$$Q = \operatorname{coker}(\check{L}^{i+1} \to \check{W}^i).$$

Тогда для каждого M-модуля M имеем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(Q, M) \to \operatorname{Hom}(\check{W}^i, M) \to \operatorname{Hom}(\check{L}^{i+1}, M).$$

Последние две группы здесь изоморфны $W^i \otimes M$ и $L^{i+1} \otimes M$ соответственно, следовательно, $T^i(M) = \operatorname{Hom}(Q, M)$.

Осталось доказать единственность Q. Пусть Q' — другой модуль, для которого $T^i(M) = \operatorname{Hom}(Q', M)$ для всякого M. Тогда

$$\operatorname{Hom}(Q, M) = \operatorname{Hom}(Q', M)$$

для всех M. В частности, элементы

$$1 \in \operatorname{Hom}(Q, Q) = \operatorname{Hom}(Q', Q)$$

и

$$1' \in \operatorname{Hom}(Q', Q') = \operatorname{Hom}(Q, Q')$$

определяют канонические изоморфизмы Q и Q', обратные друг другу. Предложение полностью доказано.

Замечание 12.4.1. Существует общая теорема о том, что всякий точный слева функтор T на категории A-модулей, перестановочный с прямыми суммами, имеет вид $\operatorname{Hom}(Q, \cdot)$ для некоторого A-модуля Q. Но если даже функтор T переводит конечно порожденные модули в конечно порожденные, модуль Q может не быть конечно порожденным. Поэтому то, что в случае (iii) из 12.4 наш модуль Q оказался конечно порожденным, является глубоким свойством функтора T^i.

Рассмотрим пример. Пусть A — нётерово кольцо с бесконечным множеством максимальных идеалов $\mathfrak{m}_i$, $Q = \sum A/\mathfrak{m}_i$ и T — функтор $\operatorname{Hom}(Q, \cdot)$. Тогда модуль Q не является конечно порожденным, но для любого конечно порожденного A-модуля M модуль $T(M)$ конечно порожден, потому что $\operatorname{Hom}(A/\mathfrak{m}_i, M) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}_i \in \operatorname{Ass} M$, где $\operatorname{Ass} M$ — множество ассоциированных простых идеалов для M, которое конечно.

Предложение 12.5. *Для любого модуля M существует естественное отображение*

$$\varphi\colon T^i(A) \otimes M \to T^i(M).$$

Более того, следующие условия эквивалентны:

(i) *T^i точен справа;*
(ii) *φ — изоморфизм для всякого M;*
(iii) *φ сюръективно для всякого M.*

Доказательство. Поскольку T^i — функтор, то для любого M мы имеем естественное отображение

$$M = \operatorname{Hom}(A, M) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Hom}(T^i(A), T^i(M)).$$

Определим теперь φ, полагая

$$\varphi\left(\sum a_i \otimes m_i\right) = \sum \psi(m_i)\, a_i.$$

Далее, так как функторы T^i и $\otimes$ перестановочны с прямыми пределами, то достаточно ограничиться рассмотрением только конечно порожденных A-модулей M. Представим M в виде

$$A^r \to A^s \to M \to 0.$$

Тогда мы имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
T^i(A) \otimes A^r & \to & T^i(A) \otimes A^s & \to & T^i(A) \otimes M & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\
T^i(A^r) & \longrightarrow & T^i(A^s) & \longrightarrow & T^i(M) & &
\end{array}$$

где нижняя последовательность не обязательно точна. Здесь первые две вертикальные стрелки являются изоморфизмами. Поэтому если функтор T^i точен справа, то φ — тоже изоморфизм. Это доказывает импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii).

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна. Осталось доказать только импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Для этого мы должны показать, что если

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

— короткая точная последовательность A-модулей, то последовательность

$$T^i(M') \to T'(M) \to T^i(M'') \to 0$$

точна. По 12.1 она точна в среднем члене, поэтому надо показать только, что отображение $T^i(M) \to T^i(M'')$ сюрьективно. Это вытекает из рассмотрения диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T(A) \otimes M & \to & T^i(A) \otimes M'' \to 0 \\ {\scriptstyle\varphi(M)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi(M'')} \\ T^i(M) & \longrightarrow & T^i(M'') \end{array}$$

и того факта, что отображение $\varphi(M'')$ сюръективно.

Следствие 12.6. *Следующие условия эквивалентны:*
(i) T^i *точен:*
(ii) T^i *точен справа и модуль* $T^i(A)$ *проективен.*

Доказательство. В любом случае T^i точен справа, так что по 12.5 имеем $T^i(M) \simeq T^i(A) \otimes M$ для всякого A-модуля M. Следовательно, T^i точен тогда и только тогда, когда $T^i(A)$ является плоским. Но поскольку модуль $T^i(A)$ конечно порожден, то его плоскость равносильна тому, что он локально свободен, а значит, проективен.

Теперь рассмотрим вышеизложенное в локальной ситуации. Для любой точки $y \in Y = \operatorname{Spec} A$ обозначим через T^i_y ограничение функтора T^i на категорию $A_\mathfrak{p}$-модулей, где $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал, соответствующий точке y. Тогда утверждение «T^i точен слева в y» будет означать, что функтор T^i_y точен слева и аналогично для точности и точности справа. Отметим, что $T^i_y(N) = h^i(L^\bullet_\mathfrak{p} \otimes N)$ для любого $A_\mathfrak{p}$-модуля N. Отметим также, что T^i точен слева тогда и только тогда, когда он точен слева для всех точек $y \in Y$; аналогично для точности и точности справа. Наконец, поскольку когомологии коммутируют с плоской заменой базы (см. 9.3), то функтор T^i_y — это функтор T^i, ассоциированный с морфизмом $f': X' \to Y'$, полученным из морфизма f посредством плоской замены базы $Y' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_y \to Y$. Поэтому результаты 12.4, 12.5 и 12.6 применимы к каждому из локальных функторов T^i_y.

Предложение 12.7. *Пусть* T^i *точен слева* (соответственно точен справа или точен) *в некоторой точке* $y_0 \in Y$. *Тогда то же самое верно и для всех точек* y *в подходящей открытой окрестности* U *точки* y_0.

Доказательство. По 12.4 функтор T^i точен слева в y_0 тогда и только тогда, когда $W^i_{y_0}$ свободен. Но так как пучок $\widetilde{W}^i$ когерентен на Y, то он локально свободен в некоторой окрестности U точки y_0 и, следовательно, T^i точен слева во всех точках из U.

По 12.1 функтор T^i точен справа в точке y тогда и только тогда, когда функтор T^{i+1} точен слева в y. Поэтому второе утверждение следует из первого для функтора T^{i+1}.

Функтор T^i точен в некоторой точке тогда и только тогда, когда он точен в ней слева и справа. Поэтому третье утверждение является объединением первых двух.

Определение. Пусть Y — топологическое пространство. Функция $\varphi: Y \to \mathbf{Z}$ называется *полунепрерывной сверху*, если для каждой точки $y \in Y$ существует открытая окрестность $U \ni y$, такая, что $\varphi(y') \leqslant \varphi(y)$ для всех $y' \in U$. Интуитивно это означает, что φ может подскакивать только в специальных точках.

Замечание 12.7.1. Функция $\varphi: Y \to \mathbf{Z}$ полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbf{Z}$ множество $\{y \in Y \mid \varphi(y) \geqslant n\}$ замкнуто в Y.

Пример 12.7.2. Пусть Y — нётерова схема и $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на Y. Тогда функция

$$\varphi(y) = \dim_{k(y)}(\mathscr{F} \otimes k(y))$$

является полунепрерывной сверху. В самом деле, по лемме Накаямы $\varphi(y)$ равна минимальному числу образующих $\mathcal{O}_y$-модуля $\mathscr{F}_y$. Но если $s_1, \ldots, s_r \in \mathscr{F}_y$ — минимальное множество образующих, то они продолжаются до сечений $\mathscr{F}$ в некоторой окрестности точки y и в некоторой окрестности порождают $\mathscr{F}$, поскольку пучок $\mathscr{F}$ когерентен. Поэтому если y' принадлежит этой окрестности, то $\varphi(y')$ как минимальное число образующих $\mathscr{F}_{y'}$ меньше либо равно $\varphi(y) = r$.

Теорема 12.8 (полунепрерывность). *Пусть* $f: X \to Y$ — *проективный морфизм нётеровых схем и* $\mathscr{F}$ — *когерентный пучок на* X, *плоский над* Y. *Тогда для каждого* $i \geqslant 0$ *функция*

$$h^i(y, \mathscr{F}) = \dim_{k(y)} H^i(X_y, \mathscr{F}_y)$$

полунепрерывна сверху на Y.

Доказательство. Утверждение локально по Y, поэтому можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$ аффинна, где A — нётерово кольцо. Тогда мы можем воспользоваться предыдущими результатами из этого параграфа. По 9.4

$$h^i(y, \mathscr{F}) = \dim_{k(y)} T^i(k(y)),$$

и, как в доказательстве 12.4, имеем

$$T^i(k(y)) = \ker(W^i \otimes k(y) \to L^{i+1} \otimes k(y)).$$

С другой стороны, имеет место следующая точная последовательность:

$$W^i \to L^{i+1} \to W^{i+1} \to 0.$$

Умножая ее тензорно на $k(y)$, получаем четырехчленную точную последовательность вида

$$0 \to T^i(k(y)) \to W^i \otimes k(y) \to L^{i+1} \otimes k(y) \to W^{i+1} \otimes k(y) \to 0.$$

Следовательно, подсчитывая размерности, находим

$$h^i(y, \mathcal{F}) = \dim_{k(y)} W^i \otimes k(y) + \\ + \dim_{k(y)} W^{i+1} \otimes k(y) - \dim_{k(y)} L^{i+1} \otimes k(y).$$

Но W^i и W^{i+1} — конечно порожденные A-модули, поэтому в силу 12.7.2 первые два члена этой суммы являются полунепрерывными сверху функциями от y. Модуль L^{i+1} свободен, так что последний член является постоянной функцией от y. Отсюда мы заключаем, что функция $h^i(y, \mathcal{F})$ полунепрерывна сверху, что и утверждалось.

Следствие 12.9 (Грауэрт). *В предположениях предыдущей теоремы пусть, кроме того, схема Y целая и для некоторого i функция $h^i(y, \mathcal{F})$ постоянна на Y. Тогда пучок $R^if_*(\mathcal{F})$ локально свободен на Y и для каждого y естественное отображение*

$$R^if_*(\mathcal{F}) \otimes k(y) \to H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Как и выше, можно считать Y аффинной. Пользуясь выражением для $h^i(y, \mathcal{F})$, полученным в доказательстве теоремы, заключаем, что функции $\dim W^i \otimes k(y)$ и $\dim W^{i+1} \otimes k(y)$ должны быть постоянными. Но это означает (см. 8.9 гл. II), что соответствующие пучки $\widetilde{W}^i$ и $\widetilde{W}^{i+1}$ локально свободны на Y. Поэтому (см. 12.4) функторы $\widetilde{T}^i$ и $\widetilde{T}^{i+1}$ являются точными слева; следовательно, функтор T^i точен и по 12.6 $T^i(A)$ — проективный A-модуль. Но $R^if_*(\mathcal{F})$ — это в точности пучок $T^i(A)^\sim$, стало быть, он локально свободен на Y. Наконец, из 12.5 мы заключаем, что отображение

$$R^if_*(\mathcal{F}) \otimes k(y) \to H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$$

является изоморфизмом для любой точки $y \in Y$.

Пример 12.9.1. Пусть $\{X_t\}$ — плоское семейство целых кривых в $\mathbf{P}^n_k$, где k — алгебраически замкнутое поле. Тогда для каждой замкнутой точки $t \in T$ имеем $H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = k$. С другой стороны, по 9.10 арифметический род $p_a = 1 - \chi(\mathcal{O}_{X_t})$ остается постоянным, следовательно, в этом случае обе функции $h^0(t, \mathcal{O}_X)$ и $h^1(t, \mathcal{O}_X)$ являются постоянными на T.

Пример 12.9.2. В плоском семействе из 9.8.4 имеем $h^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 1$, если $t \neq 0$, и $h^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 2$, если $t = 0$, потому что X_0 содержит нильпотентные элементы. С другой стороны, $h^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$ при $t \neq 0$, так как кривая X_t рациональна, и $h^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = h^1(X_0, (\mathcal{O}_{X_0})_{\mathrm{red}}) = 1$, так как $(X_0)_{\mathrm{red}}$ — плоская кубическая кривая. Следовательно, в этом случае обе функции h^0 и h^1 подскакивают при $t = 0$.

Пример 12.9.3. Пусть $\{X_t\}$ — алгебраическое семейство неособых проективных многообразий над $\mathbf{C}$, параметризованных многообразием T, тогда функции $h^i(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ являются на самом деле постоянными для всех i. Доказательство этого факта использует трансцендентные методы, а именно вырождение спектральной последовательности Ходжа, см. Делинь [4].

Теперь мы хотим получить некоторую более точную информацию о том, когда отображение

$$T^i(A) \otimes k(y) \to T^i(k(y))$$

является изоморфизмом. Для этого привлечем еще одно средство для исследования, а именно теорему о формальных функциях 11.1.

Предложение 12.10. *Предположим, что для некоторых i и y отображение*

$$\varphi\colon T^i(A) \otimes k(y) \to T^i(k(y))$$

сюръективно. Тогда функтор T^i является точным справа в точке y (обратное верно по предложению 12.5).

Доказательство. Сделав, если нужно (см. 9.3), плоскую замену базы $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_y \to Y$, можно считать, что y — замкнутая точка в Y; A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и $k(y) = k = A/\mathfrak{m}$. Согласно 12.5, достаточно показать, что отображение

$$\varphi(M)\colon T^i(A) \otimes M \to T^i(M)$$

сюръективно для всякого A-модуля M. Так как функторы T^i и тензорное умножение перестановочны с прямыми пределами, то можно ограничиться рассмотрением только конечно порожденных A-модулей M.

Рассмотрим сначала A-модули M конечной длины и покажем с помощью индукции по длине M, что отображение $\varphi(M)$ сюръективно. Если длина равна 1, то $M = k$ и $\varphi(k)$ сюръективно по предположению. В общем случае запишем

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

24-01390

где M' и M'' имеют длину, меньшую, чем длина M. Тогда, используя 12.1, имеем следующую коммутативную диаграмму с точными строчками:

$$\begin{array}{ccccccc} T^i(A)\otimes M' & \to & T^i(A)\otimes M & \to & T^i(A)\otimes M'' & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T^i(M') & \longrightarrow & T^i(M) & \longrightarrow & T^i(M'') & & \end{array}$$

Здесь две крайние вертикальные стрелки сюръективны по предположению индукции, поэтому средняя стрелка также сюръективна.

Пусть теперь M — произвольный конечно порожденный A-модуль. Для каждого n модуль $M/\mathfrak{m}^nM$ имеет конечную длину, так что по предыдущему случаю отображение

$$\varphi_n\colon T^i(A)\otimes M/\mathfrak{m}^nM \to T^i(M/\mathfrak{m}^nM)$$

сюръективно. Отметим, что $\ker\varphi_n$ является A-модулем конечной длины, поэтому обратная система $(\ker\varphi_n)$ удовлетворяет условию Миттаг-Лефлера (9.12 гл. II). Следовательно, по 9.1 гл. II отображение

$$\varprojlim \varphi_n\colon (T^i(A)\otimes M)^\wedge \to \varprojlim T^i(M/\mathfrak{m}^nM)$$

тоже сюръективно. Но из теоремы о формальных функциях 11.1 (примененной к пучку $\mathcal{F}\otimes_A M$ на X) мы видим, что справа стоит не что иное, как $T^i(M)^\wedge$. Стало быть, мы имеем сюръективное отображение

$$(T^i(A)\otimes M)^\wedge \to T^i(M)^\wedge.$$

Теперь поскольку пополнение является вполне строгим функтором для конечно порожденных A-модулей, то отсюда вытекает, что отображение

$$\varphi(M)\colon T^i(A)\otimes M \to T^i(M)$$

сюръективно, что и требовалось доказать.

Комбинируя этот факт с предыдущими результатами, получаем следующую теорему.

Теорема 12.11 (когомологии и замена базы). *Пусть $f\colon X\to Y$ — проективный морфизм нётеровых схем, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, плоский над Y, и $y\in Y$ — некоторая точка. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *Пусть естественное отображение*

$$\varphi^i(y)\colon R^if_*(\mathcal{F})\otimes k(y)\to H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$$

сюръективно, Тогда оно является изоморфизмом и это верно для любой точки y' из подходящей окрестности точки y.

(b) *Предположим, что отображение $\varphi^i(y)$ сюръективно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *отображение $\varphi^{i-1}(y)$ сюръективно;*

(ii) *пучок $R^if_*(\mathcal{F})$ локально свободен в некоторой окрестности точки y.*

Доказательство. Утверждение (a) следует из 12.10, 12.7 и 12.5. Утверждение (b) следует из 12.10 12.6 и 12.5 с использованием того факта, что T^i тогда и только точен, когда T^{i-1} и T^i точны справа.

Ссылки для § 12. Теорема полунепрерывности впервые была доказана Грауэртом [1] в комплексно-аналитическом случае. В алгебраическом случае эта теорема принадлежит Гротендику [EGA III, 7.7]. Наше доказательство следует основной идее Гротендика с упрощениями, принадлежащими Мамфорду [5, II, § 5].

Упражнения

12.1. Пусть Y — схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k. Показать, что функция

$$\varphi(y) = \dim_k(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2)$$

полунепрерывна сверху на множестве замкнутых точек схемы Y.

12.2. Пусть $\{X_t\}$ — семейство гиперповерхностей одинаковой степени в $\mathbf{P}_k^n$. Показать, что для каждого i функция $h^i(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ является постоянной функцией от t.

12.3. Пусть $X_1\subset \mathbf{P}_k^4$ — *рациональная нормальная кривая четвертой степени* (т. е. образ 4-кратного вложения $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^4$) и $X_0\subset\mathbf{P}_k^3$ — неособая рациональная кривая четвертой степени, такая же, как и в упр. 3.18 в гл. I. Воспользоваться 9.8.3 и построить плоское семейство $\{X_t\}$ кривых в $\mathbf{P}^4$, параметризованных $T=\mathbf{A}^1$, со слоями X_1 при $t=1$ и X_0 при $t=0$.

Пусть $\mathcal{J}\subset\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4\times T}$ — пучок идеалов семейства $X\subset\mathbf{P}^4\times T$. Показать, что пучок $\mathcal{J}$ плоский над T. Показать далее, что

$$h^0(t,\mathcal{J}) = \begin{cases} 0 & \text{при } t\neq 0,\\ 1 & \text{при } t=0 \end{cases}$$

и

$$h^1(t,\mathcal{J}) = \begin{cases} 0 & \text{при } t\neq 0,\\ 1 & \text{при } t=0. \end{cases}$$

Это еще один пример, когда группы когомологий подскакивают в специальной точке.

12.4. Пусть Y — целая схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k, $f\colon X\to Y$ — плоский проективный морфизм, слоями которого являются целые схемы, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — обратимые пучки на X, и предположим, что для каждой точки $y\in Y$ $\mathcal{L}_y\simeq\mathcal{M}_y$ на слое X_y. Показать, что тогда существует обратимый пучок $\mathcal{N}$ на Y, такой, что $\mathcal{L}\simeq\mathcal{M}\otimes f^*\mathcal{N}$. [*Указание.*

Воспользоваться результатами этого параграфа и показать, что пучок $f_*(\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{-1})$ локально свободен и имеет ранг 1 на Y.]

12.5. Пусть Y — целая схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на Y и $X = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, см. § 7 гл. II. Показать, что тогда $\operatorname{Pic} X \simeq (\operatorname{Pic} Y) \times \mathbf{Z}$. Это усиление результата из упр. 7.9 гл. II.

***12.6.** Пусть X — целая проективная схема над алгебраически замкнутым полем k, такая, что $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, и пусть T — связная схема конечного типа над k.

(a) Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на $X \times T$. Показать, что тогда обратимые пучки $\mathscr{L}_t$ на $X = X \times \{t\}$ изоморфны для всех замкнутых точек $t \in T$.

(b) Показать, что $\operatorname{Pic}(X \times T) = \operatorname{Pic} X \times \operatorname{Pic} T$ (даже *не* предполагая, что схема T приведена!). Ср. упр. 4.10 гл. IV и упр. 1.6 гл. V, где $\operatorname{Pic}(X \times T) \neq \operatorname{Pic} X \times \operatorname{Pic} T$. [*Указание.* Применить теорему 12.11 при $i = 0, 1$ для подходящих обратимых пучков на $X \times T$.]

Глава IV

КРИВЫЕ

В этой главе техника, развитая в предыдущих главах, применяется к изучению кривых. Но в действительности, кроме двойственности Серра в доказательстве теоремы Римана — Роха 1.3, мы используем лишь очень немногое из фундаментальной теории схем и когомологий, так что если читатель примет на веру теорему Римана — Роха, то он может читать эту главу на ранней стадии изучения алгебраической геометрии. С педагогической точки зрения, возможно, это и хорошо, потому что читатель познакомится с некоторыми приложениями общей теории и, в частности, оценит значение теоремы Римана — Роха. Ее доказательство в этом смысле мало что дает.

После краткого обзора в § 1 того, что нам понадобится из предыдущих глав книги, в § 2 и 3 мы будем изучать различные явные задания кривых. Один из способов такого явного задания — это представление кривой в виде разветвленного накрытия прямой $\mathbf{P}^1$. Поэтому в § 2 мы изучаем общий вид разветвленных накрытий кривых. Центральным результатом здесь является теорема Гурвица 2.4, устанавливающая связь между каноническими дивизорами обеих кривых.

В § 3 приводятся еще два способа задания кривых. Показывается, что любая неособая проективная кривая может быть вложена в $\mathbf{P}^3$ и что она может быть также отображена бирационально на плоскую кривую в $\mathbf{P}^2$, имеющую, самое большее, обыкновенные двойные особенности. Доказательство последней теоремы в характеристике $p > 0$ требует исключительной изворотливости.

В § 4 мы исследуем один частный случай, а именно кривые рода 1, т. е. так называемые эллиптические кривые. Это целый самостоятельный раздел, который не зависит от остальной части книги. Недостаток места позволяет только мельком ознакомиться с некоторыми аспектами этой очаровательной теории.

В § 5 и 6 изучается каноническое вложение абстрактных кривых и некоторые вопросы классификации кривых в $\mathbf{P}^3$.

Воспользоваться результатами этого параграфа и показать, что пучок $f_*(\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{-1})$ локально свободен и имеет ранг 1 на Y.]

12.5. Пусть Y — целая схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на Y и $X = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, см. § 7 гл. II. Показать, что тогда $\operatorname{Pic} X \simeq (\operatorname{Pic} Y) \times \mathbf{Z}$. Это усиление результата из упр. 7.9 гл. II.

***12.6.** Пусть X — целая проективная схема над алгебраически замкнутым полем k, такая, что $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, и пусть T — связная схема конечного типа над k.

(a) Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на $X \times T$. Показать, что тогда обратимые пучки $\mathscr{L}_t$ на $X = X \times \{t\}$ изоморфны для всех замкнутых точек $t \in T$.

(b) Показать, что $\operatorname{Pic}(X \times T) = \operatorname{Pic} X \times \operatorname{Pic} T$ (даже *не* предполагая, что схема T приведена!). Ср. упр. 4.10 гл. IV и упр. 1.6 гл. V, где $\operatorname{Pic}(X \times T) \neq \operatorname{Pic} X \times \operatorname{Pic} T$. [*Указание.* Применить теорему 12.11 при $i = 0, 1$ для подходящих обратимых пучков на $X \times T$.]

Глава IV

КРИВЫЕ

В этой главе техника, развитая в предыдущих главах, применяется к изучению кривых. Но в действительности, кроме двойственности Серра в доказательстве теоремы Римана — Роха 1.3, мы используем лишь очень немногое из фундаментальной теории схем и когомологий, так что если читатель примет на веру теорему Римана — Роха, то он может читать эту главу на ранней стадии изучения алгебраической геометрии. С педагогической точки зрения, возможно, это и хорошо, потому что читатель познакомится с некоторыми приложениями общей теории и, в частности, оценит значение теоремы Римана — Роха. Ее доказательство в этом смысле мало что дает.

После краткого обзора в § 1 того, что нам понадобится из предыдущих глав книги, в § 2 и 3 мы будем изучать различные явные задания кривых. Один из способов такого явного задания — это представление кривой в виде разветвленного накрытия прямой $\mathbf{P}^1$. Поэтому в § 2 мы изучаем общий вид разветвленных накрытий кривых. Центральным результатом здесь является теорема Гурвица 2.4, устанавливающая связь между каноническими дивизорами обеих кривых.

В § 3 приводятся еще два способа задания кривых. Показывается, что любая неособая проективная кривая может быть вложена в $\mathbf{P}^3$ и что она может быть также отображена бирационально на плоскую кривую в $\mathbf{P}^2$, имеющую, самое большее, обыкновенные двойные особенности. Доказательство последней теоремы в характеристике $p > 0$ требует исключительной изворотливости.

В § 4 мы исследуем один частный случай, а именно кривые рода 1, т. е. так называемые эллиптические кривые. Это целый самостоятельный раздел, который не зависит от остальной части книги. Недостаток места позволяет только мельком ознакомиться с некоторыми аспектами этой очаровательной теории.

В § 5 и 6 изучается каноническое вложение абстрактных кривых и некоторые вопросы классификации кривых в $\mathbf{P}^3$.

§ 1. Теорема Римана — Роха

В этой главе слово «кривая» будет обозначать полную неособую кривую над алгебраически замкнутым полем k. Иначе говоря (см. § 6 гл. II), кривая — это целая схема размерности 1, собственная над k, все локальные кольца которой регулярны. Всякая такая кривая обязательно проективна (см. 6.7 гл. II). В случае когда мы захотим рассматривать кривые более общего типа, то будем пользоваться термином «схема» с подходящими эпитетами, например целая схема конечного типа и размерности 1 над k. Слово «точка» будет обозначать всегда замкнутую точку, кроме специфического термина «общая точка».

Начнем с обзора некоторых понятий из предыдущих глав книги, которые понадобятся при изучении кривых. Наиболее важным и единственным дискретным инвариантом кривой является род. Существует несколько его эквивалентных определений. Если X — проективная кривая, то для нее определен арифметический род $p_a(X)$ как $1 - P_X(0)$, где P_X — многочлен Гильберта X (см. упр. 7.2 гл. I). С другой стороны, для всякой кривой X определен ее геометрический род $p_g(X)$ как $\dim_k \Gamma(X, \omega_X)$, где ω_X — канонический пучок на X (см. 8.12.2 гл. II).

Предложение 1.1. *Пусть X — кривая, тогда*

$$p_a(X) = p_g(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X),$$

так что это число будем называть просто родом кривой X и обозначать через g.

Доказательство. Равенство $p_a(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ уже было установлено в упр. 5.3 гл. III. Равенство $p_g(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ является следствием теоремы двойственности Серра (7.12.2 гл. III).

Замечание 1.1.1. Из этого, что $g = p_g$, видно, что род кривой не может быть отрицательным. С другой стороны, для любого $g \geqslant 0$ всегда существует кривая с таким родом g. Например, рассмотрим дивизоры типа $(g + 1, 2)$ на неособой квадрике в $\mathbf{P}^3$. Тогда среди них существует неприводимый и неособый дивизор, род p_a которого равен g (упр. 5.6 гл. III).

Дивизором (*Вейля*) на кривой X называется элемент свободной абелевой группы, порожденной множеством точек этой кривой (см. § 6 гл. II). Любой дивизор будем записывать в виде $D = \sum n_i P_i$, где $n_i \in \mathbf{Z}$, $P_i \in X$. Его *степенью* называется целое число $\sum n_i$. Два дивизора называются *линейно эквивалентными*, если их разность является дивизором рациональной функции. Как было установлено в 6.10 гл. II, степень дивизора зависит только от класса его линейной эквивалентности. Поскольку кривая X неособа, то каждому дивизору D соответствует обратимый пучок $\mathcal{L}(D)$, причем это соответствие $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ задает изоморфизм группы классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$ по модулю линейной эквивалентности на группу $\mathrm{Pic}\, X$ обратимых пучков на X с точностью до изоморфизма (см. 6.16 гл. II).

Дивизор $D = \sum n_i P_i$ на X называется *эффективным*, если все $n_i \geqslant 0$. Множество эффективных дивизоров, линейно эквивалентных данному дивизору D, называется *полной линейной системой* (см. § 7 гл. II) и обозначается через $|D|$. Элементы из $|D|$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками пространства

$$(H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \{0\})/k^*,$$

так что $|D|$ наделено структурой множества замкнутых точек проективного пространства (см. 7.7 гл. II). Через $l(D)$ мы обозначаем $\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D))$, следовательно, *размерность* линейной системы $|D|$ равна $l(D) - 1$; $l(D)$ конечна в силу 5.19 гл. II или 5.2 гл. III.

Как следствие этих соглашений и отождествлений получаем следующий элементарный, но полезный результат.

Лемма 1.2. *Пусть D — дивизор на кривой X. Тогда если $l(D) \neq 0$, то $\deg D \geqslant 0$. Более того, если $l(D) \neq 0$ и $\deg D = 0$, то $D \sim 0$, т. е. $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{O}_X$.*

Доказательство. Если $l(D) \neq 0$, то полная линейная система $|D|$ непуста. Следовательно, D линейно эквивалентен некоторому эффективному дивизору. Так как степень дивизора зависит только от его класса линейной эквивалентности и степень эффективного дивизора неотрицательна, то получаем, что $\deg D \geqslant 0$. Если $\deg D = 0$, то D линейно эквивалентен эффективному дивизору степени 0. Но существует только один такой дивизор, а именно нулевой.

Через $\Omega_{X/k}$ или просто через Ω_X будем обозначать пучок относительных дифференциалов кривой X над k (см. § 8 гл. II). Поскольку размерность X равна 1, то он является обратимым пучком на X и совпадает с каноническим пучком ω_X на X. Любой дивизор из соответствующего ему класса линейной эквивалентности дивизоров будем называть *каноническим* дивизором и обозначать через K. (Буква K используется иногда также и для обозначения поля функций на X, но всякий раз из контекста будет ясно, что именно имеется в виду.)

Теорема 1.3. (теорема Римана — Роха). *Пусть D — дивизор на кривой X рода g. Тогда имеет место равенство*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g.$$

Доказательство. Дивизору $K-D$ соответствует обратимый пучок $\omega_X \otimes \mathscr{L}(D)^{\vee}$. Так как кривая X проективна (см. 6.7 гл. II), то можно воспользоваться теоремой двойственности Серра (7.12.1 гл. III). Из нее следует, что пространство $H^0(X, \omega_X \otimes \otimes \mathscr{L}(D)^{\vee})$ двойственно пространству $H^1(X, \mathscr{L}(D))$. Таким образом, для любого дивизора D нам надо установить равенство

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \deg D + 1 - g,$$

где для любого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X $\chi(\mathscr{F})$ обозначает его эйлерову характеристику

$$\chi(\mathscr{F}) = \dim H^0(X, \mathscr{F}) - \dim H^1(X, \mathscr{F}).$$

Рассмотрим сначала случай $D=0$. Тогда доказываемая формула принимает вид

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0 + 1 - g.$$

Это равенство верно, потому что $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ для любого проективного многообразия X (см. 3.4 гл. I) и $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$ по 1.1.

Далее, пусть D — произвольный дивизор и P — любая точка на X. Покажем, что формула Римана — Роха тогда и только тогда выполняется для D, когда она выполняется для $D+P$. Поскольку любой дивизор можно получить из 0 за конечное число шагов, заключающихся в прибавлении или вычитании одной точки, то отсюда будет следовать, что формула справедлива для всех D.

Рассмотрим точку P как замкнутую подсхему в X. Ее структурный пучок будет пучком-небоскребом k, сконцентрированным в одной точке P. Обозначим его через $k(P)$. Пучком идеалов точки P является пучок $\mathscr{L}(-P)$ (см. 6.18 гл. II). Стало быть, мы имеем точную последовательность

$$0 \to \mathscr{L}(-P) \to \mathcal{O}_X \to k(P) \to 0.$$

Умножая ее тензорно на пучок $\mathscr{L}(D+P)$, получаем точную последовательность вида

$$0 \to \mathscr{L}(D) \to \mathscr{L}(D+P) \to k(P) \to 0.$$

(Поскольку пучок $\mathscr{L}(D+P)$ локально свободен ранга 1, то тензорное умножение его на $k(P)$ не меняет $k(P)$.) Теперь воспользуемся аддитивностью эйлеровой характеристики на коротких точных последовательностях (упр. 5.1 гл. III) и тем, что $\chi(k(P)) = 1$. В результате получаем

$$\chi(\mathscr{L}(D+P)) = \chi(\mathscr{L}(D)) + 1.$$

С другой стороны, $\deg(D+P) = \deg D + 1$. Тем самым установлено, что формула Римана — Роха верна для D тогда и только тогда, когда она верна для $D+P$, что и требовалось доказать.

Замечание 1.3.1. Пусть X — кривая степени d в $\mathbf{P}^n$ и D — ее гиперплоское сечение $X \cap H$, так что $\mathscr{L}(D) = \mathcal{O}_X(1)$, тогда ее многочлен Гильберта (упр. 5.2 гл. III) имеет вид

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = d + 1 - p_a.$$

Это частный случай теоремы Римана — Роха.

Замечание 1.3.2. Теорема Римана — Роха предназначена для решения проблемы Римана — Роха (см. упр. 7.6 гл. II) для дивизора D на кривой X. Если $\deg D < 0$, то $\dim |nD| = -1$ для всех $n > 0$. Если $\deg D = 0$, то $\dim |nD| = 0$ или -1 в зависимости от того, эквивалентен дивизор nD нулю или нет. Если $\deg D > 0$, то $l(K-nD) = 0$, как только $n \cdot \deg D > \deg K$ (см. 1.2), поэтому для $n \gg 0$ имеет место равенство

$$\dim |nD| = n \cdot \deg D - g.$$

Пример 1.3.3. Канонический дивизор K на кривой X рода g имеет степень $2g-2$. В самом деле, по теореме Римана — Роха 1.3 для $D=K$ с учетом того, что $l(K) = p_g = g$ и $l(0) = 1$, имеем

$$g - 1 = \deg K + 1 - g.$$

Отсюда $\deg K = 2g-2$.

Пример 1.3.4. Дивизор D называется *специальным*, если $l(K-D) > 0$; число $l(K-D)$ в таком случае называется его *индексом специальности*. В противном случае D называется *неспециальным*. Если $\deg D > 2g-2$, то по 1.3.3 $\deg(K-D) < 0$, поэтому $l(K-D) = 0$ (см. 1.2). Значит, всякий такой дивизор D неспециален.

Пример 1.3.5. Напомним, что кривая называется *рациональной*, если она бирационально эквивалентна $\mathbf{P}^1$ (упр. 6.1 гл. I). Так как в этой главе все кривые полные и неособые по определению, то кривая X рациональна тогда и только тогда, когда она изоморфна $\mathbf{P}^1$ (см. 6.12 гл. I). Теперь с помощью теоремы Римана — Роха 1.3 покажем, что X рациональна тогда и только тогда, когда $g=0$. Согласно упр. 7.2 гл. I, мы уже знаем, что $p_a(\mathbf{P}^1) = 0$, поэтому нужно доказать только обратное утверждение. Пусть P, Q — две различные точки на X. Применим теорему Римана — Роха к дивизору $D = P - Q$. Так как по 1.3.3 $\deg(K-D) = -2$, то $l(K-D) = 0$ и, следовательно, $l(D) = 1$. Но $\deg D = 0$, поэтому, согласно 1.2, $D \sim 0$, т. е. $P \sim Q$, а это означает, что кривая X рациональна (см. 6.10.1 гл. II).

Пример 1.3.6. Кривая X называется *эллиптической*, если $g=1$. Но на эллиптической кривой степень канонического дивизора K равна 0 (см. 1.3.3). С другой стороны, $l(K) = p_g = 1$, поэтому из 1.2 мы заключаем, что $K \sim 0$.

Пример 1.3.7. Пусть X — эллиптическая кривая, P_0 — точка на X, и пусть $\operatorname{Pic}^\circ X$ обозначает подгруппу группы $\operatorname{Pic} X$, соответствующую подгруппе классов дивизоров степени 0. Тогда отображение $P \to \mathscr{L}(P - P_0)$ задает взаимно однозначное соответствие между точками кривой X и элементами группы $\operatorname{Pic}^\circ X$. Таким образом, на множестве точек X возникает групповая структура (с нулем в точке P_0). Это — обобщение примера 6.10.2 гл. II.

Для доказательства этого достаточно показать, что для любого дивизора D степени 0 существует единственная точка $P \in X$, такая, что $D \sim P - P_0$. Применяя теорему Римана — Роха к дивизору $D + P_0$, получаем

$$l(D + P_0) - l(K - D - P_0) = 1 + 1 - 1.$$

Но так как $\deg K = 0$, то $\deg(K - D - P_0) = -1$ и поэтому $l(K - D - P_0) = 0$. Следовательно, $l(D + P_0) = 1$, т. е. $\dim |D + P_0| = 0$. Это означает, что существует единственный эффективный дивизор, линейно эквивалентный $D + P_0$, и так как его степень равна 1, то это может быть только единственная точка $P \sim D + P_0$, т. е. $D \sim P - P_0$.∎

Замечание 1.3.8. Другие доказательства теоремы Римана — Роха см. Серр [7, гл. II] и Фултон [1].

Упражнения

1.1. Пусть X — кривая и $P \in X$ — некоторая точка. Показать, что тогда существует непостоянная рациональная функция $f \in K(X)$, которая регулярна всюду вне P.

1.2. Пусть опять X — кривая и $P_1, \ldots, P_r \in X$ — некоторые точки. Показать, что тогда существует рациональная функция $f \in K(X)$, имеющая полюсы (некоторых порядков) в каждой из точек P_i и регулярная всюду вне них.

1.3. Пусть X — целая отделимая регулярная одномерная схема конечного типа над k, *не* являющаяся собственной над k. Показать, что тогда X аффинна. [*Указание.* Вложить X в некоторую (собственную) кривую $\bar{X}$ над k и воспользоваться упр. 1.2 для построения морфизма $f: \bar{X} \to \mathbf{P}^1$, такого, что $f^{-1}(\mathbf{A}^1) = X$.]

1.4. Показать, что отделимая одномерная схема конечного типа над k, у которой ни одна из ее неприводимых компонент не является собственной над k, аффинна. [*Указание.* Скомбинировать упр. 1.3 с упр. 3.1, 3.2 и 4.2 гл. II.]

1.5. Показать, что для любого эффективного дивизора D на кривой X рода g справедливо неравенство $\dim |D| \leqslant \deg D$. Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда либо $D = 0$, либо $g = 0$.

1.6. Пусть X — кривая рода g. Показать, что существует конечный морфизм $f: X \to \mathbf{P}^1$ степени $\leqslant g + 1$. (Напомним, что степень конечного морфизма кривых $f: X \to Y$ определяется как степень соответствующего расширения полей $[K(X) : K(Y)]$ (см. § 6 гл. II).)

1.7. Кривая X называется *гиперэллиптической*, если $g \geqslant 2$ и существует конечный морфизм $f: X \to \mathbf{P}^1$ степени 2.

(a) Пусть X — кривая рода $g = 2$. Показать, что канонический дивизор определяет полную линейную систему без базисных точек $|K|$ степени 2 и размерности 1. Воспользоваться 7.8.1 гл. II и показать, что кривая X является гиперэллиптической.

(b) Показать, что кривая, построенная в 1.1.1, обладает морфизмом степени 2 на $\mathbf{P}^1$. Отсюда будет следовать, что существуют гиперэллиптические кривые любого рода $g \geqslant 2$.

Замечание. Позднее в упр. 3.2 мы увидим, что существуют негиперэллиптические кривые. См. также упр. 2.10 гл. V.

1.8. *Арифметический род p_a особой кривой.* Пусть X — целая проективная схема размерности 1 над k, и пусть $\tilde{X}$ — ее нормализация (упр. 3.8 гл. II). Тогда существует следующая точная последовательность пучков на X:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to \sum_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P / \mathcal{O}_P \to 0,$$

где $\tilde{\mathcal{O}}_P$ — целое замыкание кольца $\mathcal{O}_P$. Для каждой точки $P \in X$ пусть $\delta_P = \operatorname{length}(\tilde{\mathcal{O}}_P / \mathcal{O}_P)$.

(a) Показать, что $p_a(X) = p_a(\tilde{X}) + \sum_{P \in X} \delta_P$. [*Указание.* Воспользоваться упр. 4.1 и 5.3 гл. III.]

(b) Показать, что если $p_a(X) = 0$, то схема X неособа и изоморфна $\mathbf{P}^1$. Это — усиление утверждения 1.3.5.

*(c) Показать, что $\delta_P = 1$ в случае, когда P — обыкновенная двойная или обыкновенная каспидальная точка. [*Указание.* Показать сначала, что δ_P зависит только от класса аналитического изоморфизма особенности P. Затем вычислить δ_P для обыкновенной или каспидальной особенности подходящей плоской кубической кривой. Другой способ см. в 3.9.3 гл. V.]

*1.9. *Теорема Римана — Роха для особых кривых.* Пусть X — целая проективная схема размерности 1 над k, и пусть X_{reg} — множество ее регулярных точек.

(a) Пусть $D = \sum n_i P_i$ — дивизор с носителем в X_{reg}, т. е. все $P_i \in X_{\mathrm{reg}}$. Положим $\deg D = \sum n_i$. Показать, что если $\mathscr{L}(D)$ — соответствующий обратимый пучок на X, то

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \deg D + 1 - p_a.$$

(b) Показать, что любой дивизор Картье на X представим в виде разности двух очень обильных дивизоров Картье. (Воспользоваться упр. 7.5 гл. II).

(c) Вывести отсюда, что каждый обратимый пучок $\mathscr{L}$ на X изоморфен пучку вида $\mathscr{L}(D)$ для некоторого дивизора D с носителем в X_{reg}.

(d) Предположим далее, что X является локально полным пересечением в некотором проективном пространстве. Тогда, согласно 7.11 гл. III, дуализирующий пучок ω_X° обратим на X, так что можно определить соответствующий ω_X° *канонический дивизор* K с носителем в X_{reg}. В таком случае формула из (a) принимает вид

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - p_a.$$

1.10. Пусть X — целая проективная схема размерности 1 над k, являющаяся локально полным пересечением, и пусть $p_a(X) = 1$. Зафиксируем некоторую точку $P_0 \in X_{\mathrm{reg}}$. Аналогично 1.3.7 показать, что отображение $P \to \mathscr{L}(P - P_0)$ задает взаимно однозначное соответствие между точками X_{reg} и элементами группы $\operatorname{Pic}^\circ X$. Это — обобщение 6.11.4 гл. II и упр. 6.7 гл. II.

§ 2. Теорема Гурвица

В этом параграфе мы изучим связь между каноническими дивизорами X и Y для конечного морфизма кривых $f: X \to Y$. Полученная в итоге формула Гурвица будет содержать род кривой X, род кривой Y и число точек ветвления морфизма f.

Напомним, что *степень* конечного морфизма кривых $f: X \to Y$ определяется как степень расширения соответствующих полей $[K(X) : K(Y)]$ (см. § 6 гл. II).

Для любой точки $P \in X$ определим *индекс ветвления* e_P следующим образом. Пусть $Q = f(P)$, $t \in \mathcal{O}_Q$ — локальный параметр в точке Q. Будем рассматривать t как элемент кольца $\mathcal{O}_P$ с помощью естественного отображения $f^{\#}: \mathcal{O}_Q \to \mathcal{O}_P$ и положим

$$e_P = v_P(t),$$

где v_P — нормирование, ассоциированное с кольцом нормирования $\mathcal{O}_P$. Если $e_P > 1$, то говорят, что морфизм f *разветвлен* в P

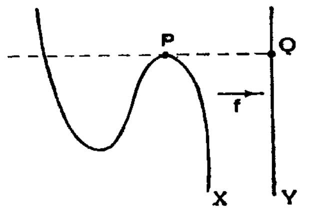


Рис. 13. Конечный морфизм кривых.

и Q — *точка ветвления* f (см. рис. 13). Если $e_P = 1$, то говорят, что морфизм f *неразветвлен* в P. Это определение согласуется с определением неразветвленности, данным в упр. 10.3 гл. III, поскольку в нашем случае поле k алгебраически замкнуто и, следовательно, $k(P) = k(Q)$ для любой точки $P \in X$. В частности, получаем, что если морфизм f всюду неразветвлен, то он этален, поскольку он всегда плоский по 9.7 гл. III.

Если $\operatorname{char} k = 0$ или если $\operatorname{char} k = p$ и p не делит e_P, то говорят, что ветвление *слабое*; если же p делит e_P, то ветвление *сильное*.

Напомним, что в § 6 гл. II был определен гомоморфизм групп дивизоров $f^*: \operatorname{Div} Y \to \operatorname{Div} X$ с помощью формулы

$$f^*(Q) = \sum_{P \to Q} e_P \cdot P$$

для любой точки $Q \in Y$, продолженной по линейности на произвольные дивизоры D. Отображение групп дивизоров f^* согласовано с отображением $f^*: \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X$ обратимых пучков.

Морфизм $f: X \to Y$ называется *сепарабельным*, если $K(X)$ — сепарабельное расширение поля $K(Y)$.

Предложение 2.1. *Пусть $f: X \to Y$ — конечный сепарабельный морфизм. Тогда имеет место следующая точная последовательность пучков на X:*

$$0 \to f^*\Omega_Y \to \Omega_X \to \Omega_{X/Y} \to 0.$$

Доказательство. Без 0 слева эта последовательность написана в 8.11 гл. II. Поэтому нам надо доказать только инъективность отображения $f^*\Omega_Y \to \Omega_X$. Так как оба пучка здесь обратимы, то достаточно показать, что это отображение не является нулевым в общей точке. Но поскольку поле $K(X)$ сепарабельно над $K(Y)$, то в общей точке на X пучок $\Omega_{X/Y}$ равен нулю согласно 8.6А гл. II. Следовательно, отображение $f^*\Omega_Y \to \Omega_X$ сюръективно в общей точке и, значит, не является нулевым.

Так как пучки Ω_Y и Ω_X соответствуют каноническим дивизорам на Y и X, то из предыдущей последовательности видно, что пучок $\Omega_{X/Y}$ измеряет их разницу на X. Для любой точки $P \in X$ пусть $Q = f(P)$, t — локальный параметр в Q и u — локальный параметр в P. Тогда dt — образующий свободного $\mathcal{O}_Q$-модуля $\Omega_{Y,Q}$ и du — образующий свободного $\mathcal{O}_P$-модуля $\Omega_{X,P}$ (см. 8.7 и 8.8 гл. II). В частности, существует единственный элемент $g \in \mathcal{O}_P$, такой, что $f^*dt = g \cdot du$. Обозначим его через dt/du.

Предложение 2.2. *Пусть $f: X \to Y$ — конечный сепарабельный морфизм кривых. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *$\Omega_{X/Y}$ является пучком кручения на X с носителем в множестве точек ветвления f; в частности, f имеет не более конечного числа точек ветвления;*

(b) *для каждой точки $P \in X$ слой $(\Omega_{X/Y})_P$ является главным $\mathcal{O}_P$-модулем конечной длины, равной $v_P(dt/du)$;*

(c) *если f слабо разветвлен в P, то*

$$\operatorname{length}(\Omega_{X/Y})_P = e_P - 1;$$

если он сильно разветвлен, то эта длина $> e_P - 1$.

Доказательство. (a) Тот факт, что $\Omega_{X/Y}$ — пучок кручения, следует из предложения 2.1, поскольку пучки $f^*\Omega_Y$ и Ω_X обратимы на X. Далее $(\Omega_{X/Y})_P = 0$ тогда и только тогда, когда f^*dt является образующим для $\Omega_{X,P}$. Но это происходит тогда и только тогда, когда t — локальный параметр в $\mathcal{O}_P$, т. е. когда f неразветвлен в P.

(b) Точная последовательность из 2.1 дает $(\Omega_{X/Y})_P \simeq \Omega_{X,P}/f^*\Omega_{Y,Q}$, что, как $\mathcal{O}_P$-модуль, изоморфно $\mathcal{O}_P/(dt/du)$.

(c) Пусть индекс ветвления морфизма f в P равен $e = e_P$, тогда можно записать $t = au^e$, где a — некоторый обратимый элемент кольца $\mathcal{O}_P$. Тогда

$$dt = aeu^{e-1}\,du + u^e\,da.$$

Если ветвление слабое, то e — ненулевой элемент в k, поэтому $v_P(dt/du) = e - 1$. В противном случае $v_P(dt/du) \geqslant e$.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный сепарабельный морфизм кривых. Определим его *дивизор ветвления* R, полагая

$$R = \sum_{P \in X} \operatorname{length} (\Omega_{X/Y})_P \cdot P.$$

Предложение 2.3. *Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный сепарабельный морфизм кривых, а K_X и K_Y — канонические дивизоры на X и Y соответственно. Тогда*

$$K_X \sim f^*K_Y + R.$$

Доказательство. Рассматривая дивизор R как замкнутую подсхему в X, видим из 2.2, что ее структурный пучок $\mathcal{O}_R$ изоморфен $\Omega_{X/Y}$. Умножая точную последовательность из 2.1 тензорно на Ω_X^{-1}, получаем точную последовательность вида

$$0 \to f^*\Omega_Y \otimes \Omega_X^{-1} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_R \to 0.$$

Но по 6.18 гл. II пучок идеалов дивизора R изоморфен $\mathcal{L}(-R)$, так что мы имеем

$$f^*\Omega_Y \otimes \Omega_X^{-1} \cong \mathcal{L}(-R).$$

Утверждение следует отсюда путем перехода к соответствующим дивизорам. (Можно также получить доказательство этого предложения, применив операцию det из упр. 6.11 гл. II к точной последовательности из 2.1.)

Следствие 2.4 (Гурвиц). *Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный сепарабельный морфизм кривых, $n = \deg f$. Тогда имеет место следующая формула:*

$$2g(X) - 2 = n \cdot (2g(Y) - 2) + \deg R.$$

Более того, если f имеет только слабые ветвления, то

$$\deg R = \sum_{P \in X} (e_P - 1).$$

Доказательство. Напишем соответствующее соотношение для степеней дивизоров в 2.3 с учетом того, что степень канонического дивизора равна по 1.3.3 $2g - 2$ и f^* соответствует умножению на n (см. 6.9 гл. II). Если f имеет только слабые ветвления, то $\deg R = \sum (e_P - 1)$ по 2.2.

Изучим теперь чисто несепарабельный случай. Начнем с определения морфизма Фробениуса.

Определение. Пусть X — схема, все локальные кольца которой имеют характеристику p (т. е. содержат $\mathbf{Z}/p$). Определим *морфизм Фробениуса* $F\colon X \to X$ следующим образом. На топологическом пространстве X морфизм F действует как тождественное отображение, а на структурном пучке $F^\#\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ действует как возведение в p-ю степень. Так как характеристика локальных колец равна p, то $F^\#$ индуцирует локальный гомоморфизм на каждом локальном кольце схемы X, поэтому F действительно является морфизмом схем.

Замечание 2.4.1. Пусть $\pi\colon X \to \operatorname{Spec} k$ — схема над полем k характеристики p, тогда отображение $F\colon X \to X$ не является линейным над k. Напротив, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, "F"] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

где морфизм Фробениуса F на $\operatorname{Spec} k$ соответствует возведению в степень p элементов поля k.

Определим новую схему X_p над k как ту же схему X, но со структурным морфизмом $F \circ \pi\colon X \to \operatorname{Spec} k$, так что k будет действовать на $\mathcal{O}_{X_p}$ умножением на p-е степени. Тогда F превратится в k-линейный морфизм $F'\colon X_p \to X$. Будем называть F' *k-линейным морфизмом Фробениуса*.

Пример 2.4.2. Пусть X — схема над k, тогда схема X_p может быть, а может и не быть изоморфной X как схема над k. Например, пусть $X = \operatorname{Spec} k[t]$, где k — совершенное поле, тогда X_p изоморфна X, поскольку отображение возведения в p-ю степень биективно на k. В этом случае k-линейный морфизм Фробениуса $F'\ X \to X$ соответствует гомоморфизму $k[t] \to k[t]$, определенному формулой $t \mapsto t^p$. Это тот же морфизм, что и в упр. 3.2 гл. I.

Пример 2.4.3. Пусть X — кривая над алгебраически замкнутым полем k характеристики p, тогда $F'\colon X_p \to X$ — конечный морфизм степени p. Он соответствует вложению полей $K \hookrightarrow K^{1/p}$, где K — поле функций на X и $K^{1/p}$ — поле корней p-й степени из элементов поля K в некотором фиксированном алгебраическом замыкании поля K.

Предложение 2.5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм кривых, и предположим, что поле $K(X)$ является чисто несепарабельным расширением поля $K(Y)$. Тогда X и Y изоморфны как абстрактные схемы и f является композицией k-линейных морфизмов Фробениуса. В частности, $g(X) = g(Y)$.*

Доказательство. Пусть степень f равна p^r. Тогда $K(X)^{p^r} \subset K(Y)$ или, иначе говоря, $K(X) \subset K(Y)^{1/p^r}$. С другой стороны, рассмотрим последовательность k-линейных морфизмов Фробениуса

$$Y_{p^r} \xrightarrow{F'} Y_{p^{r-1}} \to \ldots \to Y_p \xrightarrow{F'} Y,$$

где $Y_{p^i} = (Y_{p^{i-1}})_p$ для каждого i. Композиция этих морфизмов является морфизмом f': $Y_{p^r} \to Y$ той же степени p^r. Поскольку $K(X) \subset K(Y)^{1/p^r}$ и оба этих поля имеют одинаковую степень над $K(Y)$, то $K(X) = K(Y)^{1/p^r}$. Так как кривая однозначно определяется своим полем функций (см. 6.12 гл. I), то $X \simeq Y_{p^r}$ и $f = f'$. Следовательно, X и Y изоморфны как абстрактные схемы и имеют одинаковые роды (которые от k-структуры не зависят).

Пример 2.5.1. Если $X = Y_p$ и f: $X \to Y$ есть k-линейный морфизм Фробениуса, то f всюду разветвлен с индексом ветвления p. Действительно, по определению f тождествен на множестве точек и является возведением в p-ю степень на структурных пучках. Поэтому если $t \in \mathcal{O}_P$ — локальный параметр, то $f^\# t = t^p$. Так как $d(t^p) = 0$, то отображение $f^*\Omega_Y \to \Omega_X$ является нулевым. следовательно, $\Omega_{X/Y} \simeq \Omega_X$.

Пример 2.5.2. Если f: $X \to Y$ — сепарабельный морфизм, то степень дивизора ветвления — четное число. Это непосредственно следует из формулы, найденной в 2.4.

Пример 2.5.3. *Этальным накрытием* схемы Y называется схема X вместе с конечным этальным морфизмом f: $X \to Y$. Оно называется *тривиальным*, если X изоморфна конечному несвязному объединению нескольких экземпляров Y. Схема Y называется *односвязной*, если она не имеет нетривиальных этальных накрытий.

Покажем, что $\mathbf{P}^1$ односвязно. Пусть f: $X \to \mathbf{P}^1$ — некоторое этальное накрытие. Будем предполагать, что схема X связна. Тогда поскольку f этален (10.1 гл. III), то схема X гладка над k, и поскольку f конечен, то X собственна над k. Поэтому X является кривой в смысле этой главы. Снова используя этальность f, получаем, что он сепарабелен, так что можно применить к нему теорему Гурвица. В силу неразветвленности f имеем $R = 0$, в результате получаем

$$2g(X) - 2 = n(-2).$$

Но $g(X) \geqslant 0$, поэтому это равенство возможно только в одном случае, а именно когда $g(X) = 0$ и $n = 1$. Следовательно, $X = \mathbf{P}^1$.

Пример 2.5.4. Пусть f: $X \to Y$ — произвольный конечный морфизм кривых, тогда $g(X) \geqslant g(Y)$. Действительно, расширение полей $K(Y) \subset K(X)$ можно разложить на сепарабельное и затем чисто несепарабельное расширения. Так как при чисто несепарабельном расширении род не меняется (см. 2.5), то остается рассмотреть только случай сепарабельного морфизма f. Если $g(Y) = 0$, то доказывать нечего, поэтому будем считать $g(Y) \geqslant 1$. В таком случае перепишем формулу из 2.4 в виде

$$g(X) = g(Y) + (n-1)(g(Y)-1) + \frac{1}{2}\deg R.$$

Так как $n-1 \geqslant 0$, $g(Y) - 1 \geqslant 0$ и $\deg R \geqslant 0$, то отсюда получаем требуемый результат, причем эта формула показывает, что равенство возможно (в случае сепарабельного морфизма), только если $n = 1$ или $g(Y) = 1$ и f неразветвлен.

Пример 2.5.5 (теорема Люрота). Эта теорема утверждает, что если L — подполе чисто трансцендентного расширения $k(t)$ поля k, то L тоже чисто трансцендентное расширение k. Можно считать, что $L \neq k$, тогда L имеет степень трансцендентности, равную 1 над k. Следовательно, L является полем функций на некоторой кривой Y и вложению $L \subset k(t)$ соответствует конечный морфизм f: $\mathbf{P}^1 \to Y$. Согласно 2.5.4, имеем $g(Y) = 0$, так что по 1.3.5 $Y \simeq \mathbf{P}^1$. Следовательно, $L \simeq k(u)$ для некоторого u.

Замечание. Мы привели доказательство только для случая алгебраически замкнутого поля k, но на самом деле теорема верна и над любым основным полем k. Аналогичный результат над алгебраически замкнутым полем верен также и в размерности 2 (см. 6.2.1 гл. V). В размерности 3 соответствующее утверждение, вообще говоря, неверно: существуют унирациональные, но не рациональные трехмерные многообразия, см. Клеменс и Гриффитс [1] и Исковских и Манин [1].

Упражнения

2.1. Пользуясь 2.5.3, показать, что $\mathbf{P}^n$ односвязно.

2.2. *Классификация кривых рода* 2. Зафиксируем некоторое алгебраически замкнутое поле k характеристики $\neq 2$.

(a) Пусть X — кривая рода 2 над k, тогда каноническая линейная система $|K|$ определяет конечный морфизм f: $X \to \mathbf{P}^1$ степени 2 (см. упр. 1.7). Показать, что он разветвлен ровно в шести точках и индекс ветвления в каждой из них равен 2. Отметим, что морфизм f определен однозначно с точностью до автоморфизмов $\mathbf{P}^1$, поэтому X определяется заданием (неупорядоченного) множества из 6 точек в $\mathbf{P}^1$ с точностью до автоморфизмов $\mathbf{P}^1$.

(b) Обратно, пусть заданы шесть различных элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_6 \in k$, и пусть K — расширение поля $k(x)$, определенное уравнением $z^2 = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_6)$. Обозначим через f: $X \to \mathbf{P}^1$ соответствующий морфизм кривых. Показать, что $g(X) = 2$, морфизм f совпадает с морфизмом, определяемым канонической линейной системой на X, и f разветвлен только в шести точках $x = \alpha_i$ прямой $\mathbf{P}^1$ и нигде больше (ср. упр. 6.4 гл. II).

(c) Используя упр. 6.6 гл. I, показать, что если P_1, P_2, P_3 — три различные точки в $\mathbf{P}^1$, то существует единственный автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} \mathbf{P}^1$, такой, что $\varphi(P_1) = 0$, $\varphi(P_2) = 1$ и $\varphi(P_3) = \infty$. Таким образом, если в (a) мы упорядочим 6 точек из $\mathbf{P}^1$ и нормализуем их так, чтобы первые три из них были соответственно точки 0, 1 и ∞, то можно считать, что X имеет ветвление над точками $0, 1, \infty, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, где β_1, β_2 и β_3 — три различных элемента поля k, отличные от 0 и 1.

(d) Пусть Σ_6 — симметрическая группа перестановок из 6 элементов. Определим действие Σ_6 на множестве троек различных элементов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ поля k, отличных от 0 и 1, следующим образом. Подействуем элементом $\sigma \in \Sigma_6$ на $0, 1, \infty, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и затем нормализуем полученные 6 точек так, чтобы опять первые три были 0, 1 и ∞. Тогда три последние $\beta_1', \beta_2', \beta_3'$ и будут являться образами тройки точек $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ при действии σ.

(e) Вывести отсюда, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфных кривых рода 2 над k и множеством классов эквивалентности троек различных элементов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ поля k, отличных от 0 и 1, относительно действия группы Σ_6, описанного в (d). В частности, существует бесконечно много неизоморфных кривых рода 2. Можно утверждать, что кривые рода 2 зависят от трех параметров, поскольку они соответствуют точкам некоторого открытого подмножества $\mathbf{A}_k^3$ по модулю действия конечной группы.

2.3. *Плоские кривые.* Пусть X — кривая степени d в $\mathbf{P}^2$. Для каждой точки $P \in X$ пусть $T_P(X)$ обозначает касательную прямую к X в точке P (см. упр. 7.3 гл. I). Рассмотрим $T_P(X)$ как точку двойственной проективной плоскости $(\mathbf{P}^2)^*$; отображение $P \to T_P(X)$ задает морфизм X в двойственную кривую X^* в $(\mathbf{P}^2)^*$ (см. упр. 7.3 гл. I). Отметим, что, хотя кривая X неособа, двойственная кривая X^*, вообще говоря, имеет особенности. Ниже предполагается, что $\operatorname{char} k = 0$.

(a) Зафиксируем некоторую прямую $L \subset \mathbf{P}^2$, не являющуюся касательной к X, и определим морфизм $\varphi: X \to L$, полагая $\varphi(P) = T_P(X) \cap L$ для каждой точки $P \in X$. Показать, что морфизм φ тогда и только тогда разветвлен в P, когда либо (1) $P \in L$, либо (2) P — *точка перегиба* кривой X. Свойство (2) означает, что кратность пересечения (упр. 5.4 гл. I) прямой $T_P(X)$ с X в точке P больше либо равна 3. Вывести отсюда, что X имеет не более конечного числа точек перегиба.

(b) Прямая в $\mathbf{P}^2$ называется *кратной касательной* к X, если она касается X более чем в одной точке. Она называется *бикасательной*, если касается X ровно в двух точках. Пусть L — кратная касательная к X, касающаяся X в точках $P_1, \ldots, P_r$ и ни одна из этих точек не является точкой перегиба. Показать, что соответствующая точка на двойственной кривой X^* является *обыкновенной r-кратной особой точкой*, т. е. имеет r различных касательных направлений (упр. 5.3 гл. I). Вывести отсюда, что X имеет не более конечного числа кратных касательных.

(c) Пусть $O \in \mathbf{P}^2$ — некоторая точка, не лежащая ни на X, ни на касательных к точкам перегиба X, ни на кратных касательных. Пусть L — прямая в $\mathbf{P}^2$, не проходящая через O, и пусть $\psi: X \to L$ — морфизм, определяемый проекцией из точки O. Показать, что ψ разветвлен в точке $P \in X$ тогда и только тогда, когда прямая OP касается X в P, и что индекс ветвления в этом случае равен 2. Пользуясь теоремой Гурвица и упр. 7.2 гл. I, вывести отсюда, что существует ровно $d(d-1)$ касательных к X, проходящих через O. Следовательно, степень двойственной кривой (иногда называемой *классом* кривой X) равна $d(d-1)$.

(d) Показать, что через каждую, кроме конечного числа, точку O кривой X проходит ровно $(d+1)(d-2)$ касательных к X, не считая касательной в точке O.

(e) Показать, что степень морфизма φ из (a) равна $d(d-1)$. Вывести отсюда, что если $d \geqslant 2$, то X имеет $3d(d-2)$ точек перегиба, должным образом подсчитанных. (Если $T_P(X)$ имеет пересечение с X в P кратности r, то P как точка перегиба должна засчитываться $r-2$ раз. Если $r = 3$, то это *обычная точка перегиба*.) Показать, что обычной точке перегиба на X соответствует обыкновенная каспидальная точка на двойственной кривой X^*.

(f) Пусть теперь X — плоская кривая степени $d \geqslant 2$, и предположим, что двойственная кривая X^* имеет только обыкновенные двойные точки и обыкновенные каспидальные точки в качестве особенностей (это должно выполняться для любой достаточно общей кривой X). Показать, что тогда X имеет ровно $^1/_2 d(d-2)(d-3)(d+3)$ бикасательных. [*Указание.* Показать, что X является нормализацией X^*. Затем вычислить $p_a(X^*)$ двумя способами: как для плоской кривой степени $d(d-1)$, а также с помощью упр. 1.8.]

(g) Плоская кубическая кривая, например, имеет ровно 28 точек перегиба, все обычные. Прямая, проходящая через любые две из них, пересекает кривую обязательно в третьей точке перегиба.

(h) Плоская кривая четвертого порядка имеет ровно 28 бикасательных. (Это верно, даже если кривая имеет четырехкратную касательную, в этом случае двойственная кривая имеет особую точку возврата.)

2.4. *Замечательная кривая в характеристике p.* Пусть X — плоская кривая четвертого порядка $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ над полем характеристики 3. Показать, что X неособа, каждая ее точка является точкой перегиба и двойственная кривая X^* изоморфна X, а естественное отображение $X \to X^*$ чисто несепарабельно.

2.5. *Автоморфизмы кривых рода $g \geqslant 2$.* Доказать теорему Гурвица [1] о том, что кривая X рода $g \geqslant 2$ над полем характеристики 0 имеет самое большее $84(g-1)$ автоморфизмов. Позднее в упр. 5.2 или в упр. 1.11 гл. V будет установлено, что группа $G = \operatorname{Aut} X$ конечна. Итак, пусть порядок G равен n. Группа G действует на поле функций $K(X)$, и пусть L — подполе неподвижных элементов. Тогда вложению полей $L \subset K(X)$ соответствует конечный морфизм кривых $f: X \to Y$ степени n.

(a) Пусть $P \in X$ — точка ветвления и $e_P = r$. Показать, что $f^{-1}f(P)$ состоит ровно из n/r точек, каждая из которых является точкой ветвления с индексом ветвления r. Пусть $P_1, \ldots, P_s$ — максимальное множество точек ветвления кривой X, лежащих над разными точками кривой Y, и пусть $e_{P_i} = r_i$. Показать, что из теоремы Гурвица вытекает следующее равенство:

$$(2g-2)/n = 2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^{s} (1 - 1/r_i).$$

(b) Так как $g \geqslant 2$, то левая сторона этого равенства >0. Показать, что если $g(Y) \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $r_i \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, s$,— целые числа, удовлетворяющие неравенству

$$2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^{s} (1 - 1/r_i) > 0,$$

то минимальное значение выражения слева равно 1/42. Вывести отсюда, что $n \leqslant 84(g-1)$. (См. в упр. 5.7 пример, когда этот максимум достигается.)

Замечание. Известно, что этот максимум достигается для бесконечно многих значений g (см. Макбет [1]). Над полем характеристики $p > 0$ та же оценка верна при условии, что $p > g + 1$, за исключением одной лишь гиперэллиптической кривой $y^2 = x^p - x$, для которой $p = 2g + 1$ и которая имеет $2p(p^2-1)$ автоморфизмов (см. Рокетт [1]). Другие границы для порядков групп автоморфизмов в характеристике p см. Сингх [1] и Штихтенот [1].

2.6. *Отображение f_* для дивизоров.* Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм кривых степени n. Определим гомоморфизм $f_*\colon \operatorname{Div} X \to \operatorname{Div} Y$, полагая $f_*(\sum n_i P_i) = \sum n_i f(P_i)$ для любого дивизора $D = \sum n_i P_i$ на X.

(a) Для любого локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на Y ранга r положим $\det \mathscr{E} = \bigwedge^r \mathscr{E} \in \operatorname{Pic} Y$ (см. упр. 6.11 гл. II). В частности, для любого обратимого пучка $\mathscr{M}$ на X пучок $f_*\mathscr{M}$ локально свободен и имеет ранг n на Y, так что определен пучок $\det f_*\mathscr{M} \in \operatorname{Pic} Y$. Показать, что для любого дивизора D на X имеет место изоморфизм

$$\det (f_*\mathscr{L}(D)) \simeq (\det f_*\mathscr{O}_X) \otimes \mathscr{L}(f_*D).$$

Отметим, в частности, что, вообще говоря, $\det (f_*\mathscr{L}(D)) \neq \mathscr{L}(f_*D)$! [*Указание.* Сначала рассмотреть случай эффективного дивизора D, применив f_* к точной последовательности $0 \to \mathscr{L}(-D) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_D \to 0$. Затем воспользоваться упр. 6.11 гл. II.]

(b) Вывести отсюда, что f_*D зависит только от класса линейной эквивалентности D, так что определен индуцированный гомоморфизм $f_*\colon \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} Y$. Показать, что $f_* \circ f^*\colon \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} Y$ является умножением на n.

(c) Воспользоваться двойственностью для конечного плоского морфизма (упр. 6.10 и упр. 7.2 гл. III) и показать, что

$$\det f_*\Omega_X \simeq (\det f_*\mathscr{O}_X)^{-1} \otimes \Omega_{Y_i}^{\otimes n}.$$

(d) Предположим теперь, что морфизм f сепарабелен, и пусть R — его дивизор ветвления на X. Определим *дивизор ветвления* B на Y как f_*R. Показать, что

$$(\det f_*\mathscr{O}_X)^2 \simeq \mathscr{L}(-B).$$

2.7. *Этальные накрытия степени* 2. Пусть Y — кривая над полем k характеристики $\neq 2$. Покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между конечными этальными морфизмами $f\colon X \to Y$ степени 2 и элементами 2-кручения в группе $\operatorname{Pic} Y$, т. е. такими обратимыми пучками $\mathscr{L}$ на Y, что $\mathscr{L}^2 \simeq \mathscr{O}_Y$.

(a) Пусть задан этальный морфизм $f\colon X \to Y$ степени 2, тогда существует естественное отображение $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$. Пусть $\mathscr{L}$ — его коядро. Тогда $\mathscr{L} \simeq \det f_*\mathscr{O}_X$ — обратимый пучок ка Y и $\mathscr{L}^2 \simeq \mathscr{O}_Y$ (см. упр. 2.6). Поэтому каждому этальному морфизму степени 2 соответствует элемент 2-го порядка в группе $\operatorname{Pic} Y$.

(b) Обратно, пусть задан элемент второго порядка $\mathscr{L}$ в группе $\operatorname{Pic} Y$. Определим на $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{L}$ структуру $\mathscr{O}_Y$-алгебры, полагая $\langle a, b\rangle \cdot \langle a', b'\rangle = \langle aa' + \varphi(b \otimes b'), ab' + a'b\rangle$, где φ — изоморфизм $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L} \to \mathscr{O}_Y$, и рассмотрим $X = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{L})$ (см. упр. 5.17 гл. II). Показать, что тогда X является этальным накрытием Y.

(c) Показать, что соответствия, определенные в (a) и (b), взаимно обратны. [*Указание.* Пусть $\tau\colon X \to X$ — инволюция, переставляющая точки в каждом слое морфизма f. Используя *отображение следа* $a \mapsto a + \tau(a)$ из $f_*\mathscr{O}_X$ в $\mathscr{O}_Y$, показать, что последовательность $\mathscr{O}_Y$-модулей

$$0 \to \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X \to \mathscr{L} \to 0$$

расщепляется.]

Замечание. Это частный случай более общего факта, что при $(n, \operatorname{char} k) = 1$ этальные накрытия Галуа кривой Y с группой Галуа $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ классифицируются одномерной группой этальных когомологий $H^1_{\text{et}}(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, которая изоморфна подгруппе n-кручений в $\operatorname{Pic} Y$ (см. Серр [6]).

§ 3. Вложения в проективное пространство

В этом параграфе мы изучаем вложения кривых в проективное пространство. Будет показано, что всякая кривая может быть вложена в $\mathbf{P}^3$. Более того, всякая кривая может быть отображена бирационально на некоторую плоскую кривую в $\mathbf{P}^2$, имеющую в качестве особенностей лишь обыкновенные двойные точки.

Напомним, что обратимый пучок $\mathscr{L}$ на кривой X называется *очень обильным* (§ 5 гл. II), если он изоморфен пучку вида $\mathscr{O}_X(1)$ при некотором вложении X в проективное пространство. Обратимый пучок называется *обильным* (§ 7 гл. II), если для любого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X пучок $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$ порождается своими глобальными сечениями для $n \gg 0$. Как уже было показано, пучок $\mathscr{L}$ обилен тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}^n$ очень обилен для некоторого $n > 0$ (см. 7.6 гл. II). Мы будем говорить, что дивизор D на X *обилен* или *очень обилен*, если обильным или очень обильным является соответствующий ему обратимый пучок $\mathscr{L}(D)$.

Напомним, что *линейной системой* $\mathfrak{d}$ называется множество эффективных дивизоров, которые образуют линейное подпространство в проективном пространстве полной линейной системы $|D|$. Точка P называется *базисной точкой* линейной системы $\mathfrak{d}$, если $P \in \operatorname{Supp} D$ для всех $D \in \mathfrak{d}$. Как было показано, полная линейная система $|D|$ тогда и только тогда не имеет базисных точек, когда пучок $\mathscr{L}(D)$ порождается своими глобальными сечениями (см. 7.8 гл. II).

Первый результат, который мы установим в этом параграфе, — это переизложение для случая кривых критерия из § 7 гл. II вложимости кривой в проективное пространство с помощью заданной линейной системы.

Предложение 3.1. *Пусть D — дивизор на кривой X. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *полная линейная система $|D|$ не имеет базисных точек тогда и только тогда, когда для каждой точки $P \in X$*

$$\dim |D - P| = \dim |D| - 1;$$

(b) *дивизор D очень обилен тогда и только тогда, когда для любых двух точек $P, Q \in X$ (возможно, совпадающих)*

$$\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2.$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathscr{L}(D - P) \to \mathscr{L}(D) \to k(P) \to 0.$$

Беря соответствующие глобальные сечения, получаем

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{L}(D-P)) \to \Gamma(X, \mathscr{L}(D)) \to k,$$

поэтому мы видим, что в любом случае $\dim |D - P|$ равно либо $\dim |D|$, либо $\dim |D| - 1$. Более того, сопоставление дивизору E дивизора $E + P$ определяет линейное отображение

$$\varphi\colon |D - P| \to |D|,$$

которое, очевидно, инъективно. Следовательно, размерности этих двух линейных систем равны тогда и только тогда, когда отображение φ сюръективно. С другой стороны, φ сюръективно тогда и только тогда, когда P — базисная точка линейной системы $|D|$. Это доказывает критерий (a).

При доказательстве (b) мы можем считать, что $|D|$ не имеет базисных точек. Действительно, это так, если дивизор D очень обилен. С другой стороны, если D удовлетворяет условию (b), то тем более должно выполняться равенство

$$\dim |D - P| = \dim |D| - 1$$

для каждой точки $P \in X$, так что $|D|$ не имеет базисных точек.

Итак, можно считать, что $|D|$ определяет морфизм X в $\mathbf{P}^n$ (см. 7.1 и 7.8.1 гл. II), и вопрос состоит только в том, когда этот морфизм является замкнутым вложением. Воспользуемся критерием 7.3 гл. II и 7.8.2 гл. II, согласно которому нам надо проверить, разделяет $|D|$ точки и касательные направления или нет. Заметим, что условие разделения точек на языке линейных систем означает, что для любых двух точек $P, Q \in X$ точка Q не является базисной в линейной системе $|D - P|$. В силу (a) это равносильно тому, что

$$\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2.$$

Условие разделения касательных векторов означает, что для любой точки $P \in X$ существует дивизор $D' \in |D|$, такой, что P входит в D' с кратностью 1, так как $\dim T_P(X) = 1$ и $\dim T_P(D')$ равна 0, если P имеет кратность 1 в D', и 1, если кратность P в D' больше 1. Но это равносильно тому, что P не является базисной точкой в линейной системе $|D - P|$ или, опять в силу (a),

$$\dim |D - 2P| = \dim |D| - 2.$$

Таким образом, утверждение (b) является следствием общего критерия 7.3 гл. II.

Следствие 3.2. *Пусть D — дивизор на кривой X рода g.*
(a) *Если* $\deg D \geqslant 2g$, *то* $|D|$ *не имеет базисных точек.*
(b) *Если* $\deg D \geqslant 2g + 1$, *то* D *очень обилен.*

Доказательство. В случае (a) дивизоры D и $D - P$ неспециальны (см. 1.3.4), поэтому из теоремы Римана — Роха получаем $\dim |D - P| = \dim |D| - 1$. В случае (b) дивизоры D и $D - P - Q$ тоже неспециальны, потому $\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2$ опять по теореме Римана — Роха.

Следствие 3.3. *Дивизор D на кривой X обилен тогда и только тогда, когда* $\deg D > 0$.

Доказательство. Пусть дивизор D обилен, тогда некоторый кратный ему является очень обильным дивизором, так что $nD \sim H$, где H — гиперплоское сечение X в некотором проективном вложении, стало быть, $\deg H > 0$ и, следовательно, $\deg D > 0$. Обратно, пусть $\deg D > 0$, тогда $\deg nD > 2g(X) + 1$ для $n \gg 0$, так что по 3.2 дивизор nD является очень обильным и, следовательно, дивизор D обилен (см. 7.6 гл. II).

Пример 3.3.1. Пусть $g = 0$, тогда D обилен $\Leftrightarrow D$ очень обилен $\Leftrightarrow \deg D > 0$. Так как в этом случае $X \simeq \mathbf{P}^1$ (см. 1.3.5), то это в точности 7.6.1 гл. II.

Пример 3.3.2. Пусть X — кривая и D — очень обильный дивизор на X, соответствующий замкнутому вложению $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^n$. Тогда степень $\varphi(X)$ (см. § 7 гл. I) в точности равна $\deg D$ (упр. 6.2 гл. II).

Пример 3.3.3. Пусть X — эллиптическая кривая, т. е. $g(X) = 1$ (1.3.6). Тогда любой дивизор D степени 3 на X является очень обильным. Такой дивизор неспециален, поэтому по теореме Римана — Роха $\dim |D| = 2$. Следовательно, всякая эллиптическая кривая вкладывается в $\mathbf{P}^2$ в качестве кривой третьей степени. (Обратное, конечно, тоже верно: всякая неособая плоская кубическая кривая является эллиптической по формуле для рода (упр. 7.2 гл. I).)

В действительности в случае $g = 1$ можно утверждать, что D очень обилен $\Leftrightarrow \deg D \geqslant 3$. Поскольку если $\deg D = 2$, то по теореме Римана — Роха $\dim |D| = 1$, стало быть, $|D|$ определяет морфизм X на $\mathbf{P}^1$, который не может быть вложением.

Пример 3.3.4. Пусть $g = 2$, тогда любой дивизор степени 5 очень обилен. По теореме Римана — Роха $\dim |D| = 3$, следовательно, любая кривая рода 2 может быть вложена в $\mathbf{P}^3$ в качестве кривой степени 5.

Пример 3.3.5. Результаты из 3.2, вообще говоря, не лучшие из возможных. Например, пусть X — плоская кривая степени 4, тогда дивизор $D = X \cdot H$ очень обилен и имеет степень 4, но $g = 3$, поэтому $2g + 1 = 7$.

Наша ближайшая цель — показать, что любая кривая может быть вложена в $\mathbf{P}^3$. Для этого мы будем рассматривать проекции кривой $X \subset \mathbf{P}^n$ в $\mathbf{P}^{n-1}$ из точек $O \in \mathbf{P}^n$, не лежащих на X (см.

упр. 3.14 гл. I), и изучать, в каких случаях такая проекция будет изоморфизмом кривой X с ее образом в $\mathbf{P}^{n-1}$.

Каждые две различные точки P, Q на X определяют секущую — прямую в $\mathbf{P}^n$, проходящую через точки P и Q. Для каждой точки $P \in X$ определена *касательная прямая* — это такая прямая L в $\mathbf{P}^n$, проходящая через P, для которой ее касательное пространство $T_P(L)$ совпадает с касательным пространством $T_P(X)$ как подпространства в $T_P(\mathbf{P}^n)$.

Предложение 3.4. *Пусть X — кривая в $\mathbf{P}^n$, O — точка, не лежащая на X, и φ: $X \to \mathbf{P}^{n-1}$ — морфизм, определяемый проекцией из точки O. Морфизм φ тогда и только тогда является замкнутым вложением, когда выполняются следующие условия:*

(1) *O не лежит ни на одной секущей прямой кривой X;*

(2) *O не лежит ни на одной касательной прямой к X.*

Доказательство. Морфизм φ задается линейной системой (см. 7.8.1 гл. II), высекаемой на X гиперплоскостями H в $\mathbf{P}^n$, проходящими через точку O. Поэтому φ тогда и только тогда является замкнутым вложением, когда эта линейная система разделяет точки и касательные векторы на X (см. 7.8.2 гл. II). Пусть P, Q — две различные точки на X, морфизм φ разделяет их тогда и только тогда, когда существует гиперплоскость H, содержащая O и P, но не содержащая Q. Это возможно тогда и только тогда, когда O не лежит на прямой PQ. Пусть теперь $P \in X$ — произвольная точка. Морфизм φ тогда и только тогда разделяет касательные векторы в P, когда существует гиперплоскость H, содержащая O и P и пересекающая X в P с кратностью 1. Это возможно тогда и только тогда, когда O не лежит на касательной прямой к X в точке P.

Предложение 3.5. *Пусть X — кривая в $\mathbf{P}^n$, где $n \geqslant 4$. Тогда существует точка $O \notin X$, такая, что проекция из O дает замкнутое вложение X в $\mathbf{P}^{n-1}$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Sec} X$ обозначает объединение всех секущих прямых к X. Будем называть его *многообразием секущих* кривой X. Оно является локально замкнутым подмножеством в $\mathbf{P}^n$ размерности $\leqslant 3$, поскольку (по крайней мере локально) оно есть образ морфизма $(X \times X - \Delta) \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^n$, сопоставляющего точке $\langle P, Q, t\rangle$ точку t на секущей прямой PQ, подходящим образом параметризованной.

Пусть $\operatorname{Tan} X$ обозначает *касательное многообразие* кривой X, которое является объединением всех касательных прямых к X. Это замкнутое подмножество в $\mathbf{P}^n$ размерности $\leqslant 2$, поскольку локально оно есть образ поверхности $X \times \mathbf{P}^1$.

Так как $n \geqslant 4$, то $\operatorname{Sec} X \cup \operatorname{Tan} X \neq \mathbf{P}^n$ и, следовательно, можно найти сколько угодно точек O, не лежащих на секущих и касательных прямых к X. Тогда по 3.4 проекция из O дает требуемое замкнутое вложение.

Следствие 3.6. *Любая кривая может быть вложена в* $\mathbf{P}^3$.

Доказательство. Вложим сначала X в некоторое проективное пространство $\mathbf{P}^n$. Для этого достаточно взять на X дивизор D степени $d \geqslant 2g + 1$ и воспользоваться 3.2. Так как тогда D будет очень обилен, то полная линейная система $|D|$ определит вложение X в $\mathbf{P}^n$ с $n = \dim |D|$. Если $n \leqslant 3$, то $\mathbf{P}^n$ — подпространство $\mathbf{P}^3$ и доказывать нечего. Если $n \geqslant 4$, то, применив несколько раз предложение 3.5, получим требуемое вложение X в $\mathbf{P}^3$.

Теперь изучим проекции кривой $X \subset \mathbf{P}^3$ в $\mathbf{P}^2$. Вообще говоря, многообразие секущих заполняет все $\mathbf{P}^3$, поэтому при проекции X в $\mathbf{P}^2$ образ должен быть особой кривой. Однако мы увидим, что можно выбрать центр проекции O так, чтобы соответствующий морфизм φ из X в $\mathbf{P}^2$ был бирациональным отображением X на ее образ $\varphi(X)$ и кривая $\varphi(X)$ имела бы, самое большее, обыкновенные двойные точки.

Напомним (см. упр. 5.6 гл. I), что *обыкновенной двойной точкой* плоской кривой называется особая точка кратности 2 с различными касательными направлениями. Прямую в $\mathbf{P}^3$, которая пересекает кривую $X \subset \mathbf{P}^3$ в трех или более точках, будем называть *кратной секущей* этой кривой. *Секущая с компланарными касательными прямыми* — это секущая прямая, соединяющая точки P, Q на X, касательные прямые L_P, L_Q в которых лежат в одной плоскости, или, что равносильно L_P и L_Q пересекаются в $\mathbf{P}^3$.

Предложение 3.7. *Пусть X — кривая в $\mathbf{P}^3$, O — точка, не лежащая на X, и φ: $X \to \mathbf{P}^2$ — морфизм, определяемый проекцией из O. Морфизм φ бирационально отображает X на ее образ $\varphi(X)$ и $\varphi(X)$ имеет, самое большее, обыкновенные двойные особые точки тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) *O лежит только на конечном множестве секущих X;*

(2) *O не лежит ни на одной касательной прямой к X;*

(3) *O не лежит ни на какой кратной секущей X;*

(4) *O не лежит ни на какой секущей с компланарными касательными прямыми.*

Доказательство. Возвращаясь к доказательству 7.3 гл. II, замечаем, что условие (1) означает, что морфизм φ взаимно однозначно отображает X на ее образ почти всюду и, следовательно, бирационален. В случае когда O лежит на секущей прямой, условия (2), (3) и (4) вместе означают, что секущая прямая пересекает X ровно в двух точках P и Q и не касается X ни в одной из них и что касательные прямые к X в точках P и Q отображаются в различные прямые в $\mathbf{P}^2$. Следовательно, кривая $\varphi(X)$ имеет в этом случае обыкновенную двойную точку.

Для того чтобы показать, что точка O, удовлетворяющая условиям (1) — (4) предложения 3.7, существует, воспользуемся счетом констант, как и в доказательстве 3.5. А именно, мы вычислим размерности многообразий плохих точек. Трудный момент здесь — показать, что не всякая секущая прямая является кратной секущей и что не всякая секущая имеет компланарные касательные прямые. Над полем $\mathbf{C}$ это нетрудно установить, исходя из дифференциально-геометрических соображений. Однако мы приводим другое доказательство, пригодное во всех характеристиках, которое достигается с помощью интересного применения теоремы Гурвица.

Предложение 3.8. *Пусть X — кривая в $\mathbf{P}^3$, не содержащаяся ни в какой плоскости. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(a) *каждая секущая к кривой X является кратной секущей;*

(b) *для любых двух точек $P, Q \in X$ касательные прямые L_P и L_Q компланарны.*

Тогда существует точка $A \in \mathbf{P}^3$, которая лежит на каждой касательной прямой к X.

Доказательство. Покажем прежде всего, что из (a) следует (b). Зафиксируем точку R на X и рассмотрим морфизм ψ: $X - R \to \mathbf{P}^2$, индуцированный проекцией из точки R. Так как каждая секущая является кратной, то отображение ψ многолистно. Если ψ несепарабельно, то для любой точки $P \in X$ касательная прямая L_P к X проходит через R. Это дает (b), и в таком случае утверждение очевидно, так что можно считать, что любое такое отображение ψ сепарабельно. В этом случае пусть T — неособая точка $\psi(X)$, над которой ψ неразветвлено. Если $P, Q \in \psi^{-1}(T)$, то касательные прямые L_P и L_Q к X проектируются на касательную прямую L_T к $\psi(X)$ в точке T. Поэтому L_P и L_Q лежат в одной плоскости, порожденной точкой R и прямой L_T, и, следовательно, компланарны.

Таким образом, мы показали, что для любой точки $R \in X$ и почти всех точек $P, Q \in X$, таких, что P, Q и R коллинеарны, прямые L_P и L_Q компланарны. Следовательно, существует открытое множество пар точек $\langle P, Q\rangle$ в $X \times X$, для которых касательные прямые L_P и L_Q компланарны. Но свойство касательных L_P и L_Q быть компланарными является замкнутым условием, стало

быть, отсюда вытекает, что L_P и L_Q компланарны для всех точек $P, Q \in X$. Тем самым установлено, что из (a) следует (b).

Предположим теперь, что выполнено условие (b). Возьмем любые две точки $P, Q \in X$ с различными касательными, и пусть $A = L_P \cap L_Q$ — точка пересечения этих касательных. По условию X не содержится ни в какой плоскости, поэтому, в частности, $X \cap \pi$, где π — плоскость прямых L_P и L_Q, состоит из конечного числа точек. Для любой точки $R \in X - X \cap \pi$ касательная прямая L_R должна пересекать обе прямые L_P и L_Q. Но поскольку $L_R \not\subset \pi$, то она должна проходить через точку A. Стало быть, существует открытое подмножество в X, состоящее из точек R, таких, что $A \in L_R$. Поскольку это условие замкнуто, то мы заключаем отсюда, что $A \in L_R$ для всех $R \in X$.

Определение. Кривая X в $\mathbf{P}^n$ называется *необыкновенной*, если существует точка A в $\mathbf{P}^n$, лежащая на всех касательных прямых к X.

Пример 3.8.1. Прямая $\mathbf{P}^1$ является необыкновенной (в этом смысле). Действительно, касательная прямая в каждой точке $\mathbf{P}^1$ совпадает с самой прямой $\mathbf{P}^1$, поэтому любая точка $A \in \mathbf{P}^1$ обладает требуемым свойством.

Пример 3.8.2. Коника в $\mathbf{P}^2$ над полем характеристики 2 является необыкновенной. В качестве примера возьмем конику $y = x^2$. Тогда $dy/dx \equiv 0$, поэтому все касательные прямые к ней горизонтальны и, следовательно, проходят через точку в бесконечности, соответствующую направлению оси x.

Теорема 3.9 (Самюэль [2]). *Необыкновенными кривыми в $\mathbf{P}^n$ являются только прямая* (3.8.1) *и коника в характеристике* 2 (3.8.2).

Доказательство. В силу предложения 3.5 можно считать, что X лежит в $\mathbf{P}^3$. Выберем $\mathbf{A}^3$ в $\mathbf{P}^3$ с аффинными координатами x, y, z таким образом, чтобы

(1) точка A (существующая по определению необыкновенной кривой) лежала в бесконечности по направлению оси x;

(2) если $A \in X$, то касательная прямая L_A в ней не лежит в плоскости xz;

(3) ось z не пересекает X;

(4) X не пересекает бесконечную прямую в плоскости xz ни в какой точке, кроме, быть может, точки A (см. рис. 14).

Спроектируем сначала X из точки A на yz-плоскость. Так как точка A лежит на каждой касательной прямой к X, то соответствующий морфизм X в $\mathbf{P}^2$ будет всюду разветвлен. Поэтому либо его образом является точка (в этом случае X — прямая), либо он несепарабелен (см. 2.2). Отсюда мы заключаем, что функции y и z, ограниченные на X, принадлежат полю $K(X)^p$, где $p = \operatorname{char} k > 0$.

Спроектируем теперь X из оси z на бесконечно удаленную прямую M в плоскости xy. Иначе говоря, для каждой точки $P \in X$

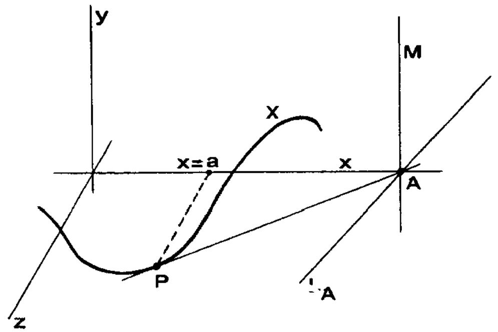


Рис. 14. К доказательству теоремы 3.9.

определим $\varphi(P)$ как точку пересечения плоскости, порожденной точкой P и осью z, с прямой M. Мы получаем морфизм $\varphi: X \to M$ степени $d = \deg X$. Отметим, что φ разветвлен только в точках кривой X, которые лежат на конечной части плоскости xz, но не в A.

Применим к морфизму φ теорему Гурвица 2.4. Для любой точки $P \in X \cap (xz$-плоскость) возьмем $u = x - a$ в качестве локальной координаты, где $a \in k$, $a \neq o$, и возьмем $t = y/x$ в качестве локальной координаты в точке A на M. Тогда по 2.2 нам надо вычислить $v_P(dt/du)$. Запишем $x = u + a$, так что $t = y(u+a)^{-1}$. Так как $y \in K(X)^p$, то $dy/du = 0$, поэтому

$$dt/du = -y(u+a)^{-2}.$$

Но $u + a$ обратим в локальном кольце $\mathcal{O}_P$, стало быть,

$$v_P(dt/du) = v_P(y).$$

Пусть $P_1, \ldots, P_r$ — все множество точек $X \cap (xz$-плоскость), тогда формула Гурвица для φ запишется в виде

$$2g - 2 = -2d + \sum_{i=1}^{r} v_{P_i}(y).$$

Рассмотрим теперь два случая.

Случай 1. Пусть $A \notin X$, тогда плоскость xz пересекает X только в точках P_i. Так как эта плоскость определяется уравнением $y = 0$, то степень кривой X можно вычислить как индекс пересечения этой плоскости с X, а именно

$$d = \sum_{i=1}^{r} v_{P_i}(y).$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получаем

$$2g - 2 = -d,$$

что возможно, только если $g = 0$ и $d = 2$. Следовательно, $X \simeq \mathbf{P}^1$ как абстрактная кривая (см. 1.3.5), и ее вложение в проективное пространство задано дивизором D степени 2. По теореме Римана — Роха $\dim |D| = 2$, поэтому X является коникой в плоскости $\mathbf{P}^2$. Для того чтобы коника была необыкновенной, необходимо, чтобы $\operatorname{char} k = 2$.

Случай 2. Пусть $A \in X$, тогда поскольку плоскость xz пересекает X в A трансверсально, то аналогично предыдущему случаю имеем

$$d = \sum_{i=1}^{r} v_{P_i}(y) + 1.$$

Следовательно,

$$2g - 2 = -d - 1,$$

откуда вытекает, что $g = 0$ и $d = 1$, т. е. $X = \mathbf{P}^1$ — прямая. Теорема полностью доказана.

Теорема 3.10. *Пусть X — кривая в $\mathbf{P}^3$. Тогда существует точка $O \notin X$, такая, что проекция из нее определяет бирациональный морфизм $\varphi: X \to \varphi(X) \subset \mathbf{P}^2$ и что кривая $\varphi(X)$ имеет, самое большее, обыкновенные двойные особые точки.*

Доказательство. Если X содержится в некоторой плоскости, то любая точка вне этой плоскости будет удовлетворять требованиям теоремы. Поэтому можно считать, что X не содержится ни в какой плоскости. Тогда, в частности, X не может быть прямой или коникой и, следовательно, по 3.9 X не является необыкновенной. Стало быть, согласно 3.8, X обладает секущей, не являющейся кратной, и имеет секущую, соответствующие касательные прямые для которой не компланарны. Поскольку эти свойства должны выполняться и для близких секущих, то мы видим, что существует открытое подмножество в $X \times X$, состоящее из пар точек $\langle P, Q\rangle$, таких, что секущая прямая PQ не является кратной секущей и соответствующие касательные прямые L_P и L_Q не компланарны. Следовательно, подмножество в $X \times X$, состоящее из пар точек $\langle P, Q\rangle$, для которых секущая является кратной или имеет компланарные касательные, представляет собой собственное подмножество и имеет, следовательно, размерность $\leqslant 1$. Поэтому объединение в $\mathbf{P}^3$ соответствующих секущих имеет размерность $\leqslant 2$. Комбинируя это с тем фактом, что касательное многообразие к X имеет размерность $\leqslant 2$ (см. 3.5), заключаем, что в $\mathbf{P}^3$ существует открытое подмножество точек O, удовлетворяющих условиям (2), (3) и (4) из предложения 3.7.

Чтобы завершить доказательство теоремы, согласно 3.7, мы должны показать, что точку O можно выбрать так, чтобы она лежала только на конечном множестве секущих X. Для этого рассмотрим морфизм $(X \times X - \Delta) \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$ (определенный по крайней мере локально), сопоставляющий тройке $\langle P, Q, t\rangle$ точку t на секущей прямой, проходящей через P и Q. Если образ его имеет размерность <3, то точку O можно выбрать не лежащей на секущих. Если образ имеет размерность 3, то φ — морфизм многообразий одинаковой размерности, поэтому, согласно упр. 3.7 гл. II, можно найти открытое подмножество точек в $\mathbf{P}^3$, слои над которыми конечны. Следовательно, такие точки лежат только на конечном множестве секущих, что и требовалось доказать.

Следствие 3.11. *Любая кривая бирационально эквивалентна плоской кривой с, самое большее, обыкновенными двойными особыми точками.*

Доказательство. Это следует из 3.6 и 3.10.

Замечание 3.11.1. В силу 3.1.1 один из подходов к проблеме классификации кривых состоит в изучении семейств плоских кривых степени d с r обыкновенными двойными точками для любых d и r. Семейство всех плоских кривых степени d является линейной системой размерности $1/2d\,(d+3)$, так что оно параметризуется проективным пространством такой размерности. Внутри этого проективного пространства (неприводимые) кривые с r обыкновенными двойными точками образуют локально замкнутое подмножество $V_{d,r}$. Пусть X — такая кривая, тогда род ее нормализации $\widetilde{X}$ равен

$$g=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)-r$$

(см. упр. 1.8). Поэтому для того, чтобы $V_{d,r}$ не было пустым, необходимо, чтобы

$$0\leqslant r\leqslant 1/2\,(d-1)\,(d-2).$$

Более того, обе границы достигаются. Действительно, как следует из теоремы Бертини (см. 8.20.2 гл. II), для любого d существует неприводимая неособая кривая степени d в $\mathbf{P}^2$. Это дает случай $r=0$. С другой стороны, для любого d можно вложить $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^d$ как кривую степени d (упр. 3.4), затем спроектировать в $\mathbf{P}^2$ по 3.5 и 3.10 и в результате получить кривую X степени d в $\mathbf{P}^2$, имеющую только обыкновенные двойные особые точки и с $g(\widetilde{X}) = 0$. Это дает случай $r = 1/2\,(d-1)\,(d-2)$.

Общая проблема изучения структуры $V_{d,r}$ очень трудна. Севери [2] утверждает, что для каждых d и r, удовлетворяющих условию $0\leqslant r\leqslant 1/2\,(d-1)\,(d-2)$, алгебраическое множество $V_{d,r}$ неприводимо и непусто и имеет размерность $\frac{1}{2}d\,(d+3)-r$. Однако его доказательство не полно.

Упражнения

3.1. Пусть X — кривая рода 2, показать, что дивизор D очень обилен $\Leftrightarrow$ $\deg D \geqslant 5$. Это усиление 3.3.4.

3.2. Пусть X — плоская кривая степени 4.

(a) Показать, что все эффективные канонические дивизоры на X высекаются прямыми L в $\mathbf{P}^2$.

(b) Показать, что если D — эффективный дивизор степени 2 на X, то $\dim |D| = 0$.

(c) Вывести отсюда, что кривая X не гиперэллиптическая (см. упр. 1.7).

3.3. Показать, что если X — кривая рода $g\geqslant 2$, являющаяся полным пересечением (упр. 8.4 гл. II) в некотором проективном пространстве $\mathbf{P}^n$, то канонический дивизор K очень обилен. Вывести отсюда, что кривая рода 2 не может быть полным пересечением ни в каком $\mathbf{P}^n$, ср. упр. 5.1.

3.4. Пусть X — образ d-кратного вложения (упр. 2.12 гл. I) $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^d$ для любого $d\geqslant 1$. Будем называть X *рациональной нормальной кривой степени d в* $\mathbf{P}^d$.

(a) Показать, что кривая X проективно нормальна и что ее однородный идеал порождается элементами степени 2.

(b) Пусть X — произвольная кривая степени d в $\mathbf{P}^n$, где $d\leqslant n$, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости $\mathbf{P}^{n-1}$. Показать, что тогда на самом деле $d=n$, $g(X)=0$ и X отличается от рациональной нормальной кривой степени d только на автоморфизм пространства $\mathbf{P}^n$, ср. 7.8.5 гл. II.

(c) Показать, в частности, что всякая кривая степени 2 в $\mathbf{P}^n$ является коникой в некоторой плоскости $\mathbf{P}^2$.

(d) Показать, что всякая кривая степени 3 в $\mathbf{P}^n$ является либо плоской кубикой, либо пространственной кубической кривой в $\mathbf{P}^3$.

3.5. Пусть X — кривая в $\mathbf{P}^3$, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости.

(a) Пусть $O\notin X$ — точка, такая, что проекция из O индуцирует бирациональный морфизм $\varphi\colon X\to\varphi(X)\subset\mathbf{P}^2$. Показать, что кривая $\varphi(X)$ *должна* быть особой. [*Указание.* Вычислить $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ двумя способами.]

(b) Пусть степень X равна d, а его род равен g. Показать, что тогда $g < {}^1/_2\,(d-1)\,(d-2)$. [Воспользоваться упр. 1.8.]

(с) Пусть теперь $\{X_t\}$ — плоское семейство кривых, индуцированное проекцией (см. 9.8.3 гл. III), слой которого в $t = 1$ равен X, а в $t = 0$ — схеме X_0 с носителем $\varphi(X)$. Показать, что X_0 всегда имеет нильпотентные элементы. Так что пример (9.8.4 гл. III) является типичным в этой ситуации.

3.6. *Кривые степени* 4.

(а) Показать, что если X — кривая степени 4 в некотором проективном пространстве $\mathbf{P}^n$, то возможен только один из следующих случаев:

(1) $g = 0$, тогда X — либо рациональная нормальная кривая в $\mathbf{P}^4$ (упр. 3.4), либо рациональная кривая четвертой степени в $\mathbf{P}^3$;

(2) $X \subset \mathbf{P}^2$, тогда $g = 3$;

(3) $X \subset \mathbf{P}^3$ и $g = 1$.

(b) В случае $g = 1$ показать, что X является полным пересечением двух неприводимых квадрик в $\mathbf{P}^3$ (упр. 5.11 гл. I). [*Указание.* Воспользоваться точной последовательностью $0 \to \mathcal{J}_X \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0$, вычислить $\dim H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_X(2))$ и заключить из этого, что X содержится по крайней мере в двух неприводимых квадриках в $\mathbf{P}^3$.]

3.7. На основании 3.10 можно задать вопрос: верно ли обратное утверждение, т. е. каждая ли плоская кривая с обыкновенными двойными точками является проекцией некоторой неособой кривой в $\mathbf{P}^3$? Показать, что кривая $xy + x^4 + y^4 = 0$ (предполагается, что $\operatorname{char} k \neq 2$) дает отрицательный ответ на этот вопрос.

3.8. Целую кривую в $\mathbf{P}^n$ будем называть *необыкновенной*, если существует точка в $\mathbf{P}^n$, лежащая на всех касательных прямых к X во всех ее неособых точках.

(а) Существует много особых необыкновенных кривых, например кривые, заданные параметрически уравнениями $x = t$, $y = t^p$, $z = t^{2p}$ над полем характеристики $p > 0$.

(b) Показать, что в случае $\operatorname{char} k = 0$, однако, не существует даже особых необыкновенных кривых, кроме $\mathbf{P}^1$.

3.9. Доказать следующую теорему Бертини. Пусть X — кривая степени d в $\mathbf{P}^3$, не содержащаяся ни в какой плоскости. Тогда для почти всех плоскостей $H \subset \mathbf{P}^3$ (составляющих открытое подмножество Зарисского в двойственном проективном пространстве $(\mathbf{P}^3)^*$) пересечение $X \cap H$ состоит в точности из d различных точек, никакие три из которых не коллинеарны.

3.10. Обобщить утверждение «не всякая секущая прямая является кратной секущей» следующим образом. Пусть X — кривая в $\mathbf{P}^n$, не содержащаяся ни в каком $\mathbf{P}^{n-1}$, и пусть $\operatorname{char} k = 0$. Показать, что для почти всех наборов из $n - 1$ точек $P_1, \ldots, P_{n-1}$ на X линейное пространство L^{n-2}, порожденное P_i, не содержит заданную точку $P \in X$.

3.11. (а) Показать, что если X — неособое многообразие размерности r в $\mathbf{P}^n$ и $n > 2r + 1$, то существует точка $O \notin X$, такая, что проекция из O индуцирует замкнутое вложение X в $\mathbf{P}^{n-1}$.

(b) Пусть X — поверхность Веронезе в $\mathbf{P}^5$, т. е. 2-кратное вложение $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}^5$ (см. упр. 2.13 гл. I). Показать, что тогда всякая точка любой секущей прямой поверхности X лежит на бесконечном множестве других секущих прямых. Следовательно, многообразие секущих для X имеет размерность 4, и, стало быть, в этом случае существует проекция, которая индуцирует замкнутое вложение X в $\mathbf{P}^4$ (упр. 7.7 гл. II). (Теорема Севери [1] утверждает, что поверхность Веронезе является единственной поверхностью в $\mathbf{P}^5$, для которой существует проекция, индуцирующая замкнутое вложение ее в $\mathbf{P}^4$. Обычно при проекции получается поверхность с конечным числом двойных точек с трансверсальными касательными плоскостями.)

3.12. Показать, что для любого из значений $d = 2, 3, 4, 5$ и r, удовлетворяющих условию $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, существует неприводимая плоская кривая степени d с r обыкновенными двойными точками, не имеющая других особенностей.

§ 4. Эллиптические кривые

Теория эллиптических кривых (т. е. кривых рода 1) является разносторонней и богатой. Она доставляет пример глубокой взаимосвязи абстрактной алгебраической геометрии, комплексного анализа и теории чисел. В этом параграфе мы кратко остановимся на некоторых вопросах, касающихся эллиптических кривых, чтобы продемонстрировать некоторые аспекты этой теории. Прежде всего определим j-инвариант, который описывает все эллиптические кривые с точностью до изоморфизма. Затем речь пойдет о групповой структуре на эллиптической кривой и будет показано, что всякая эллиптическая кривая является своим якобиевым многообразием. Далее мы напомним без доказательства основные результаты об эллиптических функциях комплексной переменной и выведем из них некоторые факты об эллиптических кривых над $\mathbf{C}$. После этого мы определим инвариант Хассе кривой над полем характеристики p и, наконец, рассмотрим группу рациональных точек эллиптической кривой, определенной над полем $\mathbf{Q}$.

Для простоты случай $\operatorname{char} k = 2$ будет опускаться. Хотя большинство результатов этого параграфа будет оставаться верным и в этом случае, но их доказательства требуют дополнительных рассуждений. См., например, Тэйт [3] или обзор Делиня и Тэйта в сборнике Бёрча, Куйка и др. [1].

j-инвариант

Начнем с определения j-инварианта эллиптической кривой и покажем, что он классифицирует эллиптические кривые с точностью до изоморфизма. Инвариант j может принимать любое значение из основного поля k, поэтому многообразием модулей для эллиптических кривых над k является аффинная прямая $\mathbf{A}_k^1$.

Пусть X — эллиптическая кривая над алгебраически замкнутым полем k и $P_0 \in X$ — некоторая точка. Рассмотрим линейную систему $|2P_0|$ на X. Тогда поскольку дивизор $2P_0$ неспециален, то по теореме Римана — Роха $\dim |2P_0| = 1$. Эта линейная система не имеет базисных точек, иначе кривая X была бы рациональной. Следовательно, $|2P_0|$ определяет морфизм $f\colon X \to \mathbf{P}^1$ степени 2 и можно считать, что $f(P_0) = \infty$, сделав, если нужно, подходящую замену координат на $\mathbf{P}^1$.

Так как мы предполагаем, что $\operatorname{char} k \neq 2$, то из теоремы Гурвица следует, что f разветвлен ровно в 4 точках, одна из которых P_0. Пусть a, b, c — три другие точки ветвления на $\mathbf{P}^1$, тогда существует единственный автоморфизм $\mathbf{P}^1$, оставляющий ∞ на месте и переводящий a в 0 и b в 1, а именно автоморфизм, задаваемый формулой $x' = (x - a)/(b - a)$. Применив этот автоморфизм, мы можем считать, что точками ветвления морфизма f на $\mathbf{P}^1$ являются точки 0, 1, λ, ∞, где $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, 1. Тем самым мы определили некоторый параметр λ. Определим теперь $j = j(\lambda)$ следующей формулой:

$$j = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (\lambda - 1)^2}.$$

Это и есть j-инвариант кривой X. (Коэффициент 2^8 вводится для того, чтобы j-инвариантом можно было пользоваться в случае char $k = 2$, несмотря на видимость противоречия!). Основным результатом здесь является следующая

Теорема 4.1. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики $\neq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *для любой эллиптической кривой над k определенный выше инвариант j зависит только от X;*

(b) *две эллиптические кривые X и X' над k изоморфны тогда и только тогда, когда $j(X) = j(X')$;*

(c) *всякий элемент поля k является значением j-инварианта для некоторой эллиптической кривой над k.*

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфизмов эллиптических кривых над k и множеством элементов поля k, задаваемое формулой $X \mapsto j(X)$.

Мы докажем эту теорему после нескольких предварительных результатов.

Лемма 4.2. *Для любых двух точек $P, Q \in X$ (включая случай $P = Q$) существует автоморфизм σ кривой X, такой, что $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $\sigma(P) = Q$ и для любой точки $R \in X$ имеем $R + \sigma(R) \sim P + Q$.*

Доказательство. Линейная система $|P + Q|$ имеет размерность 1 и не имеет базисных точек. Следовательно, она определяет морфизм $g\colon X \to \mathbf{P}^1$ степени 2. Он сепарабелен, поскольку $X \not\approx \mathbf{P}^1$ (см. 2.5), поэтому $K(X)$ является расширением Галуа поля $K(\mathbf{P}^1)$. Пусть σ обозначает нетривиальный автоморфизм порядка 2 поля $K(X)$ над $K(\mathbf{P}^1)$. Тогда σ действует на X, переставляя точки в слоях морфизма g. Следовательно, $\sigma(P) = Q$ и для любой точки $R \in X$ $R + \sigma(R)$ является слоем морфизма g, так как $R + \sigma(R) \in |P + Q|$, т. е. $R + \sigma(R) \sim P + Q$, что и требовалось доказать.

Следствие 4.3. *Группа* Aut X *автоморфизмов X транзитивна на X.*

Лемма 4.4. *Пусть $f_1\colon X \to \mathbf{P}^1$ и $f_2\colon X \to \mathbf{P}^1$ — любые два морфизма степени 2 эллиптической кривой X на $\mathbf{P}^1$. Тогда существуют автоморфизмы $\sigma \in \mathrm{Aut}\, X$ и $\tau \in \mathrm{Aut}\, \mathbf{P}^1$, такие, что $f_2 \circ \sigma = \tau \circ f_1$, т. е. коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

Доказательство. Пусть $P_1 \in X$ — точка ветвления f_1 и $P_2 \in X$ — точка ветвления f_2. Тогда по 4.3 существует автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}\, X$, такой, что $\sigma(P_1) = P_2$. С другой стороны, f_1 определяется линейной системой $|2P_1|$, а f_2 — линейной системой $|2P_2|$. Поскольку σ переводит одну в другую, то морфизмы f_1 и $f_2 \circ \sigma$ определяются одной и той же линейной системой, поэтому они отличаются только на некоторый автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}\, \mathbf{P}^1$ (см. 7.8.1 гл. II).

Лемма 4.5. *Пусть симметрическая группа Σ_3 действует на множестве $k - \{0, 1\}$ следующим образом. Для заданного $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, 1, элемент $\alpha \in \Sigma_3$ переставляет 0, 1, λ, затем полученные элементы с помощью линейного преобразования координаты x переводят в 0, 1, $\alpha(\lambda)$, где $\alpha(\lambda)$ и есть требуемый образ λ при действии α. Тогда орбита λ состоит из следующих 6 элементов:*

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

Доказательство. Так как линейное преобразование, переводящее элементы a, b в 0, 1, имеет вид $x' = (x - a)/(b - a)$, то надо только написать все выражения $(c - a)/(b - a)$, где $\{a, b, c\} = \{0, 1, \lambda\}$.

Предложение 4.6. *Пусть X — эллиптическая кривая над k,* char $k \neq 2$, *и $P_0 \in X$ — замкнутая точка. Тогда существует замкнутое вложение $X \to \mathbf{P}^2$, такое, что образом является кривая*

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda),$$

где $\lambda \in k$ и точке P_0 соответствует точка $(0, 1, 0)$ в бесконечности на оси y. Более того, здесь λ то же, что и раньше, определенное с точностью до действия Σ_3, так в 4.5.

Доказательство. Вложим X в $\mathbf{P}^2$ с помощью линейной системы $|3P_3|$, что возможно в силу 3.3.3. Координаты в $\mathbf{P}^2$ выберем следующим образом. Рассмотрим векторные пространства $H^0(\mathcal{O}(nP_0))$ как вложенные одно в другое:

$$k = H^0(\mathcal{O}) \subset H^0(\mathcal{O}(P_0)) \subset H^0(\mathcal{O}(2P_0)) \subset \ldots.$$

По теореме Римана — Роха имеем при $n > 0$

$$\dim H^0(\mathcal{O}(nP_0)) = n.$$

Возьмем элемент $x \in H^0(\mathcal{O}(2P_0))$ так, чтобы 1, x образовывали базис в $H^0(\mathcal{O}(2P_0))$, и возьмем $y \in H^0(\mathcal{O}(3P_0))$ так, чтобы 1, x, y образовывали базис $H^0(\mathcal{O}(3P_0))$. Тогда семь элементов 1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2 в $H^0(\mathcal{O}(6P_0))$ будут линейно зависимы, так как размерность этого пространства равна 6. Более того, элементы x^3 и y^2 должны входить в соотношение линейной зависимости с коэффициентами, отличными от нуля, поскольку только они имеют полюсы порядка 6 в P_0. Умножая x и y на подходящие скалярные множители, можно считать, что эти коэффициенты равны 1. Следовательно, имеет место соотношение

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

где $a_i \in k$ — некоторые элементы.

Теперь будем делать линейные замены координат для того, чтобы получить уравнение требуемого вида. Сначала дополним до полного квадрата выражение, стоящее с левой стороны, заменив y на

$$y' = y + \frac{1}{2}(a_1x + a_3)$$

(здесь мы пользуемся тем, что $\operatorname{char} k \neq 2$). Полученное в результате этой замены соотношение можно записать в виде

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$$

для подходящих a, b, $c \in k$. Сделаем теперь линейную замену x переводящую a, b в 0, 1, и в результате получим требуемое уравнение

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

Так как x и y имеют полюс в точке P_0, то P_0 является единственной точкой кривой, лежащей на бесконечно удаленной прямой, и имеет координаты $(0, 1, 0)$.

Если взять проекцию из точки P_0 на ось x, то получим конечный морфизм степени 2, отображающий P_0 в ∞ и ветвящийся в точках 0, 1, λ, ∞. Следовательно, λ такое же, как и раньше.

Доказательство теоремы 4.1.

(a) Для доказательства того, что j зависит только от X, предположим, что морфизмы $f_1\colon X \to \mathbf{P}^1$ и $f_2\colon X \to \mathbf{P}^1$ определяются выбором двух фиксированных точек P_1 и $P_2 \in X$ соответственно. Тогда по 4.4 мы можем найти автоморфизмы $\sigma \in \operatorname{Aut} X$ и $\tau \in \operatorname{Aut} \mathbf{P}^1$, такие, что $f_2 \circ \sigma = \tau \circ f_1$. Более того, σ можно выбрать так, чтобы $\sigma(P_1) = P_2$, тогда $\tau(\infty) = \infty$. Но τ переводит точки ветвления 0, 1, λ_1 морфизма f_1 в точки ветвления 0, 1, λ_2 морфизма f_2, возможно, с перестановкой. Следовательно, в силу 4.5 λ_1 и λ_2 отличаются только на действие некоторого элемента $\alpha \in \Sigma_3$, как в 4.5. Поэтому остается только показать, что $j(\lambda) = j(\alpha(\lambda))$ для любого $\alpha \in \Sigma_3$. Так как Σ_3 порождается любыми двумя элементами порядка 2, то достаточно показать, что $j(\lambda) = j(1/\lambda)$ и $j(\lambda) = j(1-\lambda)$, что легко проверяется непосредственно. Таким образом, доказано, что j зависит только от X.

(b) Предположим теперь, что эллиптические кривые X и X' имеют параметры λ и λ', такие, что $j(\lambda) = j(\lambda')$. Заметим прежде всего, что j является рациональной функцией от λ степени 6, т. е. соответствие $\lambda \mapsto j(\lambda)$ определяет конечный морфизм $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ степени 6. Более того, этот морфизм является накрытием Галуа с группой Галуа Σ_3 относительно действия, описанного в 4.5. Следовательно, $j(\lambda) = j(\lambda')$ тогда и только тогда, когда $\lambda = \alpha(\lambda')$ для некоторого $\alpha \in \Sigma_3$.

Далее, согласно 4.6, кривые X и X' могут быть вложены в $\mathbf{P}^2$ так, что их уравнения будут иметь вид $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ и $y^2 = x(x-1)(x-\lambda')$. Поскольку λ и λ' отличаются на действие некоторого элемента из Σ_3, то после подходящей линейной замены переменной x мы будем иметь $\lambda = \lambda'$. Это показывает, что кривые X и X' изоморфны как задающиеся одним и тем же уравнением в $\mathbf{P}^2$.

(c) Для любого заданного $j \in k$ мы должны решить полиномиальное уравнение

$$2^8(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 - j\lambda^2(\lambda - 1)^2 = 0$$

относительно λ. Все полученные решения λ обязательно отличны от 0 и 1, и для любого из них уравнение $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ определяет неособую кривую степени 3 в $\mathbf{P}^2$, являющуюся, следовательно, эллиптической кривой с заданным значением $j \in k$ в качестве j-инварианта. Теорема полностью доказана.

Пример 4.6.1. Кривая $y^2 = x^3 - x$ из упр. 6.2 гл. I является неособой над произвольным полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$. Для нее $\lambda = -1$, и, следовательно, $j = 2^6 \cdot 3^3 = 1728$.

Пример 4.6.2. Кривая Ферма $x^3 + y^3 = z^3$ неособа над любым полем k, $\operatorname{char} k \neq 3$. Сделав замену $x = x' + z$ и положив $x' = -1/3$, получаем

$$z^2 - \frac{1}{3}z = y_3 - \frac{1}{27}.$$

Это уравнение можно записать в стандартной форме, как в доказательстве предложения 4.6, с $\lambda = -\omega$ или $-\omega^2$, где $\omega^3 = 1$. Следовательно, $j = 0$.

Следствие 4.7. *Пусть X — эллиптическая кривая над k,* $\operatorname{char} k \neq 2$, *$P_0 \in X$ — некоторая точка и $G = \operatorname{Aut}(X, P_0)$ — группа автоморфизмов кривой X, оставляющих точку P_0 на месте. Тогда G — конечная группа порядка*

2, *если* $j \neq 0, 1728$;
4, *если* $j = 1728$ *и* $\operatorname{char} k \neq 3$;
6, *если* $j = 0$ *и* $\operatorname{char} k \neq 3$;
12, *если* $j = 0\ (=1728)$ *и* $\operatorname{char} k = 3$.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to \mathbf{P}^1$ — морфизм степени 2 с $f(P_0) = \infty$, разветвленный над точками $0, 1, \lambda, \infty$, как и раньше. Если $\sigma \in G$, то по 4.4 существует автоморфизм $\tau \in \operatorname{Aut} \mathbf{P}^1$, оставляющий точку ∞ на месте и такой, что $f \circ \sigma = \tau \circ f$. В частности, τ переставляет точки $\{0, 1, \lambda\}$. Если $\tau = \mathrm{id}$, то σ — либо тождественный автоморфизм, либо автоморфизм, переставляющий листы накрытия f. Таким образом, в G всегда содержится подгруппа порядка 2.

Если $\tau \neq \mathrm{id}$, то τ переставляет точки $0, 1, \lambda$, так что λ переводится в одно из выражений, указанных в 4.5. Это может произойти только в следующих случаях:

(1) $\lambda = -1$, $1/2$ или 2 и $\operatorname{char} k \neq 3$, тогда λ совпадает с некоторым другим элементом своей орбиты под действием группы Σ_3, так что G имеет порядок 4; это случай $j = 1728$;

(2) $\lambda = -\omega$ или $-\omega^2$ и $\operatorname{char} k \neq 3$, тогда λ совпадает с двумя другими элементами своей орбиты, так что G имеет порядок 6; в этом случае $j = 0$;

(3) $\operatorname{char} k = 3$ и $\lambda = -1$, тогда все элементы орбиты одинаковы, так что G имеет порядок 12; в этом случае $j = 0 = 1728$.

Групповая структура на эллиптической кривой

Пусть X — эллиптическая кривая и $P_0 \in X$ — фиксированная точка. Как мы уже видели в качестве следствия теоремы Римана — Роха 1.3.7, отображение $P \mapsto \mathscr{L}(P - P_0)$ индуцирует биективное соответствие множества точек кривой X с группой $\operatorname{Pic}^\circ X$. Следовательно, множество точек кривой X образует абелеву группу с P_0 в качестве элемента 0 и закон сложения характеризуется условием: $P + Q = R$ тогда и только тогда, когда $P + Q \sim R + P_0$ как дивизоры на X. Это и есть групповая структура на (X, P_0).

Вложим X в $\mathbf{P}^2$ с помощью линейной системы $|3P_0|$. Тогда три точки P, Q, R на образе этой кривой будут коллинеарны тогда и только тогда, когда $P + Q + R \sim 3P_0$. В смысле групповой структуры на X это равносильно тому, что $P + Q + R = 0$.

Отсюда видно, что групповой закон на X при заданном вложении X в $\mathbf{P}^2$ может быть описан в геометрических терминах. Частный случай такого геометрического задания группового закона рассматривался в 6.10.2 гл. II.

Покажем теперь, что X является групповым многообразием в смысле упр. 3.2.21 гл. I.

Предложение 4.8. *Пусть (X, P_0) — эллиптическая кривая с заданной на ней групповой структурой. Тогда отображения $\rho\colon X \to X$ и $\mu\colon X \times X \to X$, определяемые формулами $P \mapsto -P$ и $\langle P, Q\rangle \mapsto P + Q$ соответственно, являются морфизмами алгебраических многообразий.*

Доказательство. По лемме 4.2 для $P = Q = P_0$ существует автоморфизм $\sigma \in \operatorname{Aut} X$, такой, что $R + \sigma(R) \sim 2P_0$ для любой точки $R \in X$. Иначе говоря, $\sigma(R) = -R$ в смысле группового закона, так что σ и есть требуемый морфизм ρ.

Теперь применим лемму 4.2 к точкам P и P_0. В результате получим автоморфизм $\sigma \in \operatorname{Aut} X$, такой, что $R + \sigma(R) \sim P + P_0$, т. е. $\sigma(R) = P - R$ в смысле группового закона. Компонуя это σ с ρ, получаем, что $R \mapsto P + R$, т. е. сдвиг на P является морфизмом для любой точки $P \in X$.

Возьмем теперь две различные точки $P, Q \in X$ и вложим X в $\mathbf{P}^2$ с помощью линейной системы $|3P_0|$. Тогда уравнение прямой L, проходящей через точки P и Q, зависит от координат этих точек. Рассмотрим пересечение L с X, в результате получим кубическое уравнение относительно параметра на прямой L. При этом две точки пересечения P и Q нам известны, поэтому координаты третьей точки пересечения R запишутся в виде рациональных функций от координат точек P и Q. Так как $R = -P - Q$ в смысле группового закона, то это показывает, что отображение $(X \times X - \Delta) \to X$, определенное формулой $\langle P, Q\rangle \mapsto -P - Q$, является морфизмом. Компонуя его с ρ, получаем, что μ является морфизмом для пар различных точек на X.

Для доказательства того, что μ является морфизмом также и на парах точек вида $\langle P, P\rangle$, рассмотрим произвольную точку $Q \neq 0$. Сдвинем вторую переменную на точку Q, применим μ к точкам вида $\langle P, P + Q\rangle$ и результат сдвинем на $-Q$. Так как мы показали, что сдвиги являются морфизмами, то мы получаем в итоге, что μ продолжается до морфизма $X \times X \to X$.

Пример 4.8.1. Итерируя морфизмы μ и ρ, получаем, что для любого целого n умножение на n является морфизмом $n_X\colon X \to X$. Позднее мы увидим, что для любого $n \neq 0$ морфизм n_X конечен и имеет степень n^2. Его ядро изоморфно группе $\mathbf{Z}/n \times \mathbf{Z}/n$, если $(n, p) = 1$, где $p = \operatorname{char} k$, и группе $\mathbf{Z}/p$ или 0, если $n = p$, в зависимости от инварианта Хассе кривой X. См. 4.10, 4.17 и упр. 4.6, 4.7, 4.15.

Пример 4.8.2. Пусть P — точка порядка 2 на X, тогда $2P \sim \sim 2P_0$, поэтому P является одной из точек ветвления морфизма $f\colon X \to \mathbf{P}^1$, определенного линейной системой $|2P_0|$, и f сепарабелен, поскольку $X \neq \mathbf{P}^1$ (см. 2.5). Отсюда следует, что таких точек конечное число и что если $\operatorname{char} k \neq 2$, то их ровно 4. Таким образом, морфизм 2_X всегда конечен и, если $\operatorname{char} k \neq 2$, то степень его равна 4 и ядро изоморфно $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$.

Пример 4.8.3. Пусть P — точка порядка 3 на X, тогда $3P \sim \sim 3P_0$, поэтому P является точкой перегиба при вложении X в $\mathbf{P}^2$ с помощью линейной системы $|3P_0|$. Если $\operatorname{char} k \neq 2, 3$, то по упр. 2.3 на X существует ровно 9 таких точек. Таким образом, морфизм 3_X имеет степень 9 и его ядро изоморфно $\mathbf{Z}/3 \times \mathbf{Z}/3$. Геометрическим следствием этого является тот факт, что прямая, соединяющая две точки перегиба P и Q, пересекает X в третьей точке перегиба R. Действительно, $R = -P - Q$, поэтому порядок точки R тоже равен 3.

Лемма 4.9. *Пусть (X, P_0) и (X', P_0') — две эллиптические кривые с групповыми структурами и $f\colon X \to X'$ — морфизм, переводящий P_0 в P_0'. Тогда f является гомоморфизмом групповых структур.*

Доказательство. Если $P + Q = R$ на X, то $P + Q \sim \sim R + P_0$ как дивизоры. Отсюда следует, что $f(P) + f(Q) \sim \sim f(R) + f(P_0)$ (см. упр. 2.6), и поскольку $f(P_0) = P_0'$, то $f(P) + f(Q) = f(R)$ в смысле группового закона на X'.

Определение. Пусть f, g — два морфизма эллиптической кривой (X, P_0) в себя, переводящие P_0 в P_0. Определим морфизм $f + g$ как композицию морфизма $f \times g\colon X \to X \times X$ с морфизмом μ. Иначе говоря, $(f+g)(P) = f(P) + g(P)$ для всех точек $P \in X$. Определим морфизм $f \cdot g$ как композицию $f \circ g$. Тогда множество всех морфизмов из X в X, переводящих P_0 в P_0, образует кольцо $R = \operatorname{End}(X, P_0)$, которое будем называть *кольцом эндоморфизмов* кривой (X, P_0). Нулевым элементом 0 в этом кольце служит морфизм $X \to P_0$. Единичным элементом 1 является тождественное отображение, а -1 является морфизмом отражения ρ. Закон дистрибутивности $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$ следует из того факта (см. 4.9), что f является гомоморфизмом групп.

Предложение 4.10. *Предположим, что $\operatorname{char} k \neq 2$. Тогда отображение $n \mapsto n_X$ определяет инъективный гомоморфизм колец $\mathbf{Z} \to \operatorname{End}(X, P_0)$. В частности, для всех $n \neq 0$ n_X является конечным морфизмом.*

Доказательство. Покажем по индукции, что $n_X \neq 0$ для любого $n \geqslant 1$. Отсюда будет следовать, что n_X — конечный морфизм (см. 6.8 гл. II). Для $n = 1$ утверждение очевидно, для $n = 2$ оно уже было доказано в 4.8.2, так что пусть $n > 2$. Если $n = 2r + 1$ нечетное и $n_X = 0$, то $(2r)_X = \rho$. Но ρ имеет степень 1, а $(2r)_X = 2_X \cdot r_X$ является конечным морфизмом (по индуктивному предположению для r) степени $\geqslant 4$, поскольку 2_X имеет степень 4 (см. 4.8.2). Следовательно, мы получаем противоречие с предположением $n_X = 0$.

Если $n = 2r$ четно, то $n_X = 2_X \cdot r_X$ — конечный морфизм по предположению индукции.

Замечание 4.10.1. Кольцо эндоморфизмов R является важным, но не очень просто вычисляемым инвариантом эллиптической кривой. Отметим, что группа обратимых элементов R^* кольца R — это в точности группа $G = \operatorname{Aut}(X, P_0)$, рассмотренная в 4.7. В частности, если $j = 0$ или 1728, то G больше, чем $\{\pm 1\}$, так что R в этих случаях определенно больше, чем $\mathbf{Z}$.

Якобиево многообразие эллиптической кривой

Приведем теперь другое более естественное доказательство существования группового закона на эллиптической кривой, снабдив ее структурой группового многообразия. Предыдущие доказательства основывались на геометрических свойствах вложения кривой в $\mathbf{P}^2$. Вместо этого мы покажем ниже, что группа $\operatorname{Pic}^\circ X$ обладает структурой алгебраического многообразия и тем самым автоматически является групповым многообразием. Этот подход имеет смысл для кривых произвольного рода и приводит к понятию якобиева многообразия кривой. Идея здесь заключается в том, чтобы построить универсальное параметрическое пространство для классов дивизоров степени 0.

Пусть X — кривая над k. Для любой схемы T над k определим $\operatorname{Pic}^\circ(X \times T)$ как подгруппу группы $\operatorname{Pic}(X \times T)$, состоящую из обратимых пучков, ограничения которых на каждый слой X_t, $t \in T$, имеют степень нуль. Пусть $p\colon X \times T \to T$ — проекция на второй множитель. Тогда для любого обратимого пучка $\mathcal{N}$ на T имеем $p^*\mathcal{N} \in \operatorname{Pic}^\circ(X \times T)$, потому что этот пучок в действительности тривиален на каждом слое. Положим $\operatorname{Pic}^\circ(X/T) = \operatorname{Pic}^\circ(X \times T)/p^*\operatorname{Pic} T$ и будем рассматривать $\operatorname{Pic}^\circ(X/T)$ как семейство обратимых пучков степени 0 на X, параметризованных схемой T. Оправданием этому служит тот факт, что в случае, когда схема T целая конечного типа над k и $\mathscr{L}$, $\mathscr{M} \in \operatorname{Pic}(X \times T)$, то $\mathscr{L}_t \simeq \mathscr{M}_t$ на X_t для всех $t \in T$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{L} \times \mathscr{M}^{-1} \in p^* \operatorname{Pic} T$ (см. упр. 12.4 гл. III).

Определение. Пусть X — кривая (любого рода) над k. *Якобиевым многообразием* кривой X называется схема J конечного типа над k вместе с обратимым пучком $\mathscr{L} \in \operatorname{Pic}^\circ(X/J)$, обладающим следующим свойством универсальности: для всякой схемы конечного типа T над k и любого обратимого пучка $M \in \operatorname{Pic}^\circ(X/T)$ существует единственный морфизм $f\colon T \to J$, такой, что $f^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{M}$ в $\operatorname{Pic}^\circ(X/T)$. (Отметим, что гомоморфизм $f^*\colon \operatorname{Pic}^\circ(X/J) \to \operatorname{Pic}^\circ(X/T)$ здесь индуцируется морфизмом $f\colon X \times T \to X \times J$.)

Замечание 4.10.2. На языке представимых функторов это определение означает, что J представляет функтор $T \to \operatorname{Pic}^\circ(X/T)$.

Замечание 4.10.3. Так как схема J определяется посредством свойства универсальности, то она единственна, если только существует. Ниже мы докажем, что J существует в случае, когда X — эллиптическая кривая и в действительности совпадает с X. Для кривых рода $g \geqslant 2$ теорема существования является более трудной. См., например, Чжоу [3], Мамфорд [2] и Гротендик [5].

Замечание 4.10.4. Предположим, что схема J существует, тогда ее замкнутые точки находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\operatorname{Pic}^\circ X$. Действительно, задать некоторую замкнутую точку J — это все равно, что задать морфизм $\operatorname{Spec} k \to J$, а по свойству универсальности это все равно, что задать некоторый элемент из $\operatorname{Pic}^\circ(X/k) = \operatorname{Pic}^\circ X$.

Определение. Схема X над схемой S называется *групповой схемой над* S, если существует морфизм-сечение $e\colon S \to X$ (единица), морфизм $\rho\colon X \to X$ над S (обращение) и морфизм $\mu\colon X \times X \to X$ над S (групповой закон), такие, что выполняются следующие условия:

(1) композиция $\mu \circ (\mathrm{id} \times \rho)\colon X \to X$ совпадает с композицией морфизма проекции $X \to S$ и морфизма e;

(2) морфизмы $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id})$ и $\mu \circ (\mathrm{id} \times \mu)$ из $X \times X \times X$ в X совпадают.

Замечание 4.10.5. Понятие групповой схемы является обобщением понятия группового многообразия (упр. 3.21 гл. I). Действительно, пусть $S = \operatorname{Spec} k$ и X — групповое многообразие над k, тогда e — это вложение точки 0 в X, условия (1) и (2) проверяются на замкнутых точках X: условие (1) означает, что ρ является морфизмом обращения, а условие (2) — что групповой закон ассоциативен.

Замечание 4.10.6. Якобиево многообразие J кривой X автоматически является групповой схемой над k. Действительно, пользуясь свойством универсальности, определим морфизмы $e\colon \operatorname{Spec} k \to J$, $\rho\colon J \to J$ и $\mu\colon J \times J \to J$ как соответствующие пучкам $0 \in \operatorname{Pic}^\circ(X/k)$, $\mathscr{L}^{-1} \in \operatorname{Pic}^\circ(X/J)$ и $p_1^*\mathscr{L} \times p_2^*\mathscr{L} \in \operatorname{Pic}^\circ(X/J \times J)$. Условия (1) и (2) проверяются тогда непосредственно, исходя из свойства универсальности $(J, \mathscr{L})$.

Замечание 4.10.7. Определим касательное пространство Зарисского в нуле к J. Задать элемент этого касательного пространства — это все равно, что задать морфизм $T = \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ в J, отображающий $\operatorname{Spec} k$ в 0 (см. упр. 2.8 гл. II). По определению J это эквивалентно заданию пучка $\mathscr{M} \in \operatorname{Pic}^\circ(X/T)$, ограничение которого на $\operatorname{Pic}^\circ(X/k)$ равно 0. Согласно упр. 4.6 гл. III, существует точная последовательность $0 \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Pic} X[\varepsilon] \to \operatorname{Pic} X \to 0$. Поэтому мы получаем отсюда, что касательное пространство Зарисского к J в 0 — это в точности пространство $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Замечание 4.10.8. Схема J собственна над k. Проверим это с помощью валюативного критерия собственности (4.7 гл. II). Достаточно показать (см. упр. 4.11 гл. II), что если R — произвольное кольцо дискретного нормирования, содержащее k, с полем частных K, то морфизм $\operatorname{Spec} K$ в J однозначно продолжается до морфизма $\operatorname{Spec} R$ в J. Иначе говоря, мы должны показать, что обратимый пучок $\mathscr{M}$ на $X \times \operatorname{Spec} K$ однозначно продолжается до обратимого пучка на $X \times \operatorname{Spec} R$. Так как схема $X \times \operatorname{Spec} R$ регулярна, то это следует из 6.5 гл. II (отметим, что замкнутый слой $X \times \operatorname{Spec} R$ над $\operatorname{Spec} R$ как дивизор на $X \times \operatorname{Spec} R$ линейно эквивалентен 0).

Замечание 4.10.9. Зафиксируем точку $P_0 \in X$, тогда для любого $n \geqslant 1$ существует морфизм $\varphi_n\colon X^n \to J$, определенный формулой $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \to \mathscr{L}(P_1 + \ldots + P_n - nP_0)$. (Задать φ_n означает соорудить подходящий обратимый пучок на $X \times X^n$.) Отображение φ_n при $n \geqslant g$, где g — род X, сюръективно, потому что по теореме Римана—Роха любой класс дивизоров степени $n \geqslant g$ содержит эффективный дивизор. Слоем морфизма φ_n над точкой из J является множество всевозможных наборов точек $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle$, таких, что соответствующие дивизоры $P_1 + \ldots + P_n$ образуют полную линейную систему.

Если $n = g$, то для почти всех наборов $P_1, \ldots, P_g$ имеем $l(P_1 + \ldots + P_g) = 1$. Действительно, по теореме Римана — Роха

$$l(P_1 + \ldots + P_g) = g + 1 - g + l(K - P_1 - \ldots - P_g).$$

Но $l(K) = g$. Возьмем за P_1 любую небазисную точку $|K|$, тогда $l(K - P_1) = g - 1$. И так далее, на каждом шаге беря в качестве P_i любую небазисную точку линейной системы $|K - P_1 - \ldots - P_{i-1}|$, получаем в результате, что $l(K - P_1 - \ldots - P_g) = 0$. Следовательно, почти все слои морфизма φ_g состоят из одной точки. Отсюда мы заключаем, что J неприводимо и что $\dim J = g$. С другой стороны, по 4.10.7 касательное пространство Зарисского к J в 0 есть $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, а его размерность равна g, поэтому J неособо в 0. Поскольку J — групповая схема, то она является однородным пространством и, следовательно, неособа всюду. Стало быть, J является неособым многообразием.

Теорема 4.11. *Пусть X — эллиптическая кривая и $P_0 \in X$ — фиксированная точка. Положим $J = X$ и возьмем в качестве $\mathcal{L}$ на $X \times J$ пучок $\mathcal{L}(\Delta) \otimes p_1^* \mathcal{L}(-P_0)$, где $\Delta \subset X \times X$ — диагональ. Тогда пара $(J, \mathcal{L})$ является якобиевым многообразием для X. Более того, структура группового многообразия на J (см. 4.10.6) индуцирует ту же групповую структуру на (X, P_0), которая была определена ранее.*

Доказательство. Последнее утверждение теоремы очевидно из определения. Поэтому надо показать только, что если T — произвольная схема конечного типа над k и $\mathcal{M} \in \operatorname{Pic}^\circ(X/T)$, то существует единственный морфизм $f\colon T \to J$, такой, что $f^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{M}$.

Пусть $p\colon X \times T \to T$ — проекция на второй множитель и $q\colon X \times T \to X$ — проекция на первый множитель. Положим $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \otimes q^*\mathcal{L}(P_0)$. Тогда пучок $\mathcal{M}'$ имеет степень 1 на каждом слое морфизма p. Следовательно, для любой замкнутой точки $t \in T$ по теореме Римана—Роха для $\mathcal{M}'_t$ на $X_t = X$ находим

$$\dim H^0(X, \mathcal{M}'_t) = 1,$$
$$\dim H^1(X, \mathcal{M}'_t) = 0.$$

Так как морфизм p проективен и пучок $\mathcal{M}'$ плоский над T, то можно воспользоваться теоремой о когомологиях и замене базы (12.11 гл. III). Рассмотрим сначала $R^1p_*(\mathcal{M}')$. Поскольку когомологии $H^1(X, \mathcal{M}'_t)$ на слоях обращаются в нуль, то отображение $\varphi^1(t)$ из (12.11 гл. III) автоматически сюръективно, следовательно, является изоморфизмом. Отсюда мы получаем, что пучок $R^1p_*(\mathcal{M}')$ равен 0. В частности, он локально свободен, поэтому из утверждения (b) теоремы 12.11 гл. III вытекает, что

отображение $\varphi^0(t)$ также сюръективно. Следовательно, оно является изоморфизмом, и поскольку отображение $\varphi^{-1}(t)$ всегда сюръективно, то мы заключаем, что пучок $p_*(\mathcal{M}')$ локально свободен и имеет ранг 1.

Заменив теперь $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M} \otimes p^*p_*(\mathcal{M}')^{-1}$ в $\operatorname{Pic}^\circ(X/T)$, можно считать, что $p_*(\mathcal{M}') \simeq \mathcal{O}_T$. Тогда единичное сечение $1 \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ дает некоторое сечение $s \in \Gamma(X \times T, \mathcal{M}')$, которое определяет эффективный дивизор Картье $Z \subset X \times T$. По построению Z пересекает каждый слой морфизма p ровно в одной точке, и на самом деле нетрудно видеть, что ограничение морфизма p на Z является изоморфизмом $p\colon Z \xrightarrow{\sim} T$. Таким образом, мы получаем сечение $s\colon T \to Z \subset X \times T$. Композиция его с морфизмом q дает требуемый морфизм $f\colon T \to X$.

Действительно, так как Z является графиком f, то $Z = f^*\Delta$, где $\Delta \subset X \times X$ — диагональ. Поэтому для соответствующих обратимых пучков имеет место изоморфизм: $\mathcal{M}' \simeq f^*\mathcal{L}(\Delta)$. Подкручивая его на $-P_0$, получаем требуемый изоморфизм $\mathcal{M} \simeq f^*\mathcal{L}$. Единственность f очевидна по тем же соображениям.

Эллиптические функции

Трудно изучать теорию эллиптических кривых без рассмотрения теории эллиптических функций комплексного переменного. Эта классическая область комплексного анализа дает возмож-

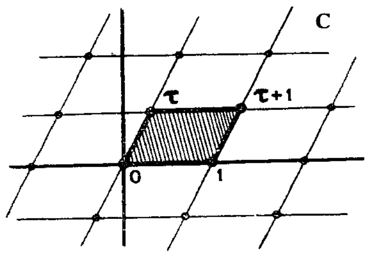


Рис. 15. Решетка с параллелограммом периодов в C.

ность глубоко проникнуть в теорию эллиптических кривых над C, чего мы не могли бы достичь чисто алгебраическими методами. Поэтому мы напомним здесь некоторые определения и результаты, в основном без доказательств, теории эллиптических функций (к номеру соответствующего утверждения этой теории мы будем приписывать справа букву B). Подробности и доказательства см. в книге Куранта и Гурвица [1].

Зафиксируем комплексное число $\tau \in \mathbf{C}$, $\tau \notin \mathbf{R}$, и пусть Λ — решетка в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, состоящая из всех чисел вида $n + m\tau$, где $n, m \in \mathbf{Z}$ (см. рис. 15).

Определение. *Эллиптической функцией* (относительно решетки Λ) называется мероморфная функция $f(z)$ комплексной переменной z, такая, что $f(z+\omega) = f(z)$ для всех $\omega \in \Lambda$. (Иногда такие функции называют *двоякопериодическими*, поскольку они периодичны с периодами 1 и τ.)

В силу периодичности всякая эллиптическая функция определяется своими значениями в *параллелограмме периодов*, ограниченном точками 0, 1, τ и $\tau + 1$ (рис. 15).

Важным примером эллиптической функции является *$\wp$-функция Вейерштрасса*, определяемая формулой

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda'} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

где $\Lambda' = \Lambda - \{0\}$. Доказывается (см. Курант и Гурвиц [1, ч. II, гл. I, § 6]), что этот ряд сходится для всех $z \notin \Lambda$ и определяет мероморфную эллиптическую функцию с полюсами второго порядка в точках решетки Λ. Ее производная

$$\wp'(z) = \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{-2}{(z-\omega)^3}$$

также является эллиптической функцией.

Сложение, умножение и деление эллиптических функций с периодами в Λ снова дают эллиптические функции. Следовательно, эллиптические функции с данной решеткой Λ образуют поле.

Теорема 4.12B. *Поле эллиптических функций с данной решеткой Λ порождается над $\mathbf{C}$ $\wp$-функцией Вейерштрасса и ее производной $\wp'$. Функции $\wp$ и $\wp'$ связаны соотношением*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

где

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda'} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda'} \frac{1}{\omega^6}.$$

Доказательство. См. Курант и Гурвиц [1, ч. II, гл. I, § 8,9].

Таким образом, если рассмотреть отображение $\varphi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, определяемое формулой $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ в аффинных координатах (x, y) в $\mathbf{P}^2$, то мы получим голоморфное отображение, образ которого лежит на алгебраической кривой X с уравнением

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

В действительности φ индуцирует биективное отображение $\mathbf{C}/\Lambda$ на X (см. Курант и Гурвиц [1, ч. II, гл. 5, § 1]) и кривая X неособа, следовательно, является эллиптической кривой. При таком отображении поле эллиптических функций отождествляется с полем функций на кривой X. Таким образом, для любой эллиптической функции имеет смысл понятие ее *дивизора* $\sum n_i(a_i)$, где $a_i \in \mathbf{C}/\Lambda$.

Теорема 4.13B. *Пусть $a_1, \ldots, a_q \in \mathbf{C}/\Lambda$ — различные точки и $n_1, \ldots, n_q$ — произвольные целые числа. Для того чтобы существовала эллиптическая функция с дивизором $\sum n_i(a_i)$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum n_i = 0$ и $\sum n_ia_i = 0$ в группе* $\mathbf{C}/\Lambda$.

Доказательство. См. Курант и Гурвиц [1, ч. II, гл. I, § 5,14].

В частности, $a_1 + a_2 \equiv b \pmod \Lambda$ тогда и только тогда, когда существует эллиптическая функция с нулями a_1 и a_2 и полюсами b и 0. Так как такая функция является рациональной функцией на кривой X, то это равносильно тому, что $\varphi(a_1) + \varphi(a_2) \sim \varphi(b) + \varphi(0)$ как дивизоры на X. Если мы положим $P_0 = \varphi(0)$ (это бесконечно удаленная точка по оси y) и рассмотрим на X групповую структуру с нулем в P_0, то это эквивалентно утверждению, что $\varphi(a_1) + \varphi(a_2) = \varphi(b)$ в смысле групповой структуры на X. Иначе говоря, отображение φ задает изоморфизм группы группы $\mathbf{C}/\Lambda$ по сложению и группы точек кривой X при ее групповой структуре с нулем в точке P_0.

Теорема 4.14B. *Пусть заданы $g_2, g_3 \in \mathbf{C}$ с $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, тогда существует $\tau \in \mathbf{C}$, $\tau \notin \mathbf{R}$, такое, что g_2 и g_3 определяются решеткой $\Lambda = (1, \tau)$ по формулам, указанным в теореме* 4.12B.

Доказательство. См. Курант и Гурвиц [1, ч. II, гл. 4, § 4].

Это показывает, что всякая эллиптическая кривая X над $\mathbf{C}$ получается описанным выше способом. Действительно, пусть X — произвольная эллиптическая кривая над $\mathbf{C}$. Вложим X в $\mathbf{P}^2$ так, чтобы она имела уравнение вида $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, где $\lambda \neq 0, 1$ (см. 4.6). Линейной заменой переменной x это уравнение можно привести к виду $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, где $g_2 = (\sqrt[3]{4/3})(\lambda^2 - \lambda + 1)$ и $g_3 = (1/27)(\lambda + 1)(2\lambda^2 - 5\lambda + 2)$. Тогда $\Delta = \lambda^2(\lambda - 1)^2$ отлично от нуля, поскольку $\lambda \neq 0, 1$.

Другой способ установить это основан на том, что эллиптическая кривая над $\mathbf{C}$ является компактной комплексной группой ли размерности 1 и, следовательно, имеет вид $\mathbf{C}/\Lambda$ для некоторой решетки Λ.

Определим теперь $J(\tau)$, полагая $J(\tau) = g_2^3/\Delta$. Тогда определенный ранее j-инвариант эллиптической кривой X связан с этим $J(\tau)$ равенством $j = 1728 \cdot J(\tau)$. Следовательно, $J(\tau)$, также классифицирует эллиптические кривые X над $\mathbf{C}$ с точностью до изоморфизма.

Теорема 4.15B. *Пусть τ, τ' — два комплексных числа. Тогда $J(\tau) = J(\tau')$, если и только если существуют целые числа a, b, c, $d \in \mathbf{Z}$, такие, что $ad - bc = \pm 1$ и*

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{a\tau + d}.$$

Более того, для данного τ' существует единственное τ с $J(\tau) = J(\tau')$, такое, что оно принадлежит области G (рис. 16), *определенной условиями:*

$$-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} \tau < \frac{1}{2}$$

и

$$|\tau| \geqslant 1, \text{ если } \operatorname{Re}\tau \leqslant 0,$$
$$|\tau| > 1, \text{ если } \operatorname{Re}\tau > 0.$$

Доказательство. См. Курант и Гурвиц [1, ч. II, лг. 4, § 3].

Теперь мы начнем извлекать следствия из описанной теории.

Теорема 4.16. *Пусть X — эллиптическая кривая над $\mathbf{C}$. Тогда как абстрактная группа она изоморфна $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. В частности, для любого n подгруппа точек порядка n изоморфна $\mathbf{Z}/n \times \mathbf{Z}/n$.*

Доказательство. Группа X изоморфна $\mathbf{C}/\Lambda$, а $\mathbf{C}/\Lambda$, очевидно, изоморфна $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Действительно, точки конечного порядка n представляются в виде $(a/n) + (b/n)\tau$, $a, b = 0, 1, \ldots, n - 1$, а точки, координаты которых не являются рациональными комбинациями 1 и τ, имеют бесконечный порядок.

Следствие 4.17. *Морфизм $n_X\colon X \to X$ умножения на n является конечным и имеет степень n^2.*

Доказательство. Так как этот морфизм сепарабелен и является гомоморфизмом групп, то его степень совпадает с порядком его ядра, который равен n^2.

Теперь займемся изучением кольца эндоморфизмов $R = \operatorname{End}(X, P_0)$ эллиптической кривой X, определенной эллиптическими функциями с периодами 1, τ.

Предложение 4.18. *Существует взаимно однозначное соответствие между эндоморфизмами $f \in R$ и комплексными числами $\alpha \in \mathbf{C}$, такими, что $\alpha \cdot \Lambda \subset \Lambda$. Это соответствие задает инъективный гомоморфизм колец $R \to \mathbf{C}$.*

Доказательство. Пусть $f \in R$, тогда, как было показано в 4.9, f является групповым гомоморфизмом X в X. Сле-

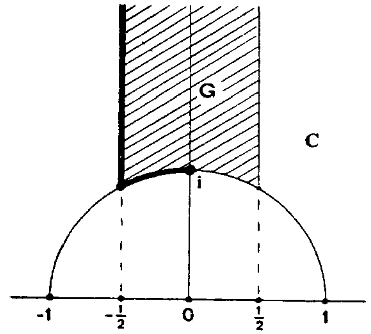


Рис. 16. Область G.

довательно, при отождествлении X с $\mathbf{C}/\Lambda$ он индуцирует гомоморфизм групп $\bar{f}$ из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$, такой, что $\bar{f}(\Lambda) \subset \Lambda$. С другой стороны, поскольку f — морфизм, то индуцированное отображение $\bar{f}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ голоморфно. Представляя $\bar{f}$ в виде степенного ряда в окрестности начала координат и имея в виду, что $\bar{f}(z + w) = \bar{f}(z) + \bar{f}(w)$ для любых z и w, находим, что $\bar{f}$ должно быть умножением на некоторое комплексное число α.

Обратно, пусть $\alpha \in \mathbf{C}$ такое, что $\alpha \cdot \Lambda \subset \Lambda$, тогда, очевидно, что умножение на α индуцирует гомоморфизм f группы $\mathbf{C}/\Lambda$ в себя и, следовательно, группы X в себя. Но гомоморфизм f, очевидно, голоморфен, так что в действительности он является морфизмом X в себя (см. GAGA = Серр [4], а также упр. 6.6 добавления В).

Очевидно, что при этом отображении кольцевым операциям в R соответствует сложение и умножение комплексных чисел $\alpha \in \mathbf{C}$.

Замечание 4.18.1. Отметим, что морфизму $n_X \in R$, являющемуся умножением на n в групповой структуре (4.8.1), соответствует умножение на n в $\mathbf{C}$. Это дает другое доказательство предложения 4.10 в случае эллиптических кривых над $\mathbf{C}$.

Определение. Говорят, что эллиптическая кривая над $\mathbf{C}$ обладает *комплексным умножением*, если кольцо ее эндоморфизмов R строго больше, чем $\mathbf{Z}$. Выбор этой терминологии объясняется предложением 4.18.

Теорема 4.19. *Пусть эллиптическая кривая X обладает комплексным умножением, тогда $\tau \in \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ для некоторого $d \in \mathbf{Z}$, $d > 0$, и в таком случае R является подкольцом ($\neq \mathbf{Z}$) кольца целых поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. Обратно, если $\tau = r + s\sqrt{-d}$, где $r, s \in \mathbf{Q}$, то X обладает комплексным умножением и*

$$R = \{a + b\tau \mid a, \ b \in \mathbf{Z} \ \text{ и } \ 2br, \ b(r^2 + ds^2) \in \mathbf{Z}\}.$$

Доказательство. Для заданного τ кольцо R можно определить как множество всех $\alpha \in \mathbf{C}$, таких, что $\alpha \cdot \Lambda \subset \Lambda$. Необходимым и достаточным условием для этого является существование целых чисел a, b, c, e, таких, что

$$\alpha = a + b\tau,$$
$$\alpha\tau = c + e\tau.$$

Если $\alpha \in \mathbf{R}$, то α — целое и мы получаем, что $R \cap \mathbf{R} = \mathbf{Z}$. С другой стороны, если X обладает комплексным умножением, то существует $\alpha \notin \mathbf{R}$ и в этом случае $b \neq 0$.

Исключая α из этих уравнений, получаем соотношение

$$b\tau^2 + (a - e)\tau - c = 0,$$

которое показывает, что τ принадлежит квадратичному расширению поля $\mathbf{Q}$. Так как $\tau \notin \mathbf{R}$, то оно должно принадлежать мнимому квадратичному полю, так что $\tau \in \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ для некоторого $d \in \mathbf{Z}$, $d > 0$.

Исключая τ из тех же уравнений, получаем соотношение

$$\alpha^2 - (a - e)\alpha + (ae - bc) = 0,$$

которое показывает, что α цело над $\mathbf{Z}$. Следовательно, R должно быть подкольцом кольца целых поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$.

Обратно, предположим, что $\tau = r + s\sqrt{-d}$, где $r, s \in \mathbf{Q}$. Тогда кольцо R можно определить как множество всех $\alpha = a + b\tau$ с $a, b \in \mathbf{Z}$, таких, что $\alpha\tau \in \Lambda$. Так как $\alpha\tau = a\tau + b\tau^2$, то мы должны иметь $b\tau^2 \in \Lambda$. Но $\tau^2 = r^2 - ds^2 + 2rs\sqrt{-d}$, что можно переписать в виде

$$\tau^2 = -(r^2 + ds^2) + 2r\tau.$$

Поэтому для того, чтобы $b\tau^2 \in \Lambda$, нужно, чтобы $2br \in \mathbf{Z}$ и $b(r^2 + ds^2) \in \mathbf{Z}$. Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы получить требуемые свойства R. В частности, $R \supset \mathbf{Z}$ и $R \neq \mathbf{Z}$, так что X обладает комплексным умножением.

Следствие 4.20. *Существует только счетное число значений $j \in \mathbf{C}$, для которых соответствующая эллиптическая кривая X обладает комплексным умножением.*

Доказательство. Действительно, множество элементов всех квадратичных расширений поля $\mathbf{Q}$ счетно.

Пример 4.20.1. Пусть $\tau = i$, тогда R — кольцо целых гауссовых чисел $\mathbf{Z}[i]$. В этом случае группа обратимых элементов R^* кольца R состоит из элементов ± 1, $\pm i$, так что $R^* \simeq \mathbf{Z}/4$. Это означает, что группа автоморфизмов кривой X имеет порядок 4, поэтому, согласно 4.7, $j = 1728$. Таким образом, окольным путем мы установили, что $J(\tau) = 1$, если $\tau = i$. Другой способ показать это заключается в следующем. Так как $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}i$, то решетка Λ инвариантна относительно умножения на i. Следовательно,

$$g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda'} \omega^{-6} = 146 \sum_{\omega \in \Lambda'} i^{-6}\omega^{-6} = -g_3$$

и, стало быть, $g_3 = 0$, откуда следует, что $J(\tau) = 1$. Уравнение X в этом случае имеет вид

$$y^2 = x^3 - Ax.$$

Пример 4.20.2. Если $\tau = \omega$, где $\omega^3 = 1$, то $R = \mathbf{Z}[\omega]$, а это кольцо целых поля $\mathbf{Q}\sqrt{-3}$. В этом случае $R^* = \{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$ и изоморфно $\mathbf{Z}/6$. Опять в силу 4.7 получаем, что $j = 0$. Это можно установить и непосредственно, как в 4.20.1, показав, что $g_2 = 0$. Уравнение кривой X можно записать так: $y^2 = x^3 - B$.

Пример 4.20.3. Пусть $\tau = 2i$, тогда $R = \mathbf{Z}[2i]$. В этом случае R является собственным подкольцом кольца целых в квадратичном поле $\mathbf{Q}(i)$ с кондуктором 2 (см. упр. 4.21).

Замечание 4.20.4. Несмотря на то что мы получили хороший критерий существования комплексного умножения на X в терминах τ, соотношение между τ и j вычислить не очень просто. Например, если кривая задана в $\mathbf{P}^2$ явным уравнением или известен ее j-инвариант, то, вообще говоря, трудно сказать, обладает она комплексным умножением или нет, см. упр. 4.5 и 4.12. Существует обширная классическая литература, посвященная связи комплексного умножения с теорией полей классов, см., например, Дойринг [2] и статью Серра в книге Касселса и Фрёлиха [1, гл. XIII]. Отметим некоторые основные результаты в этом направлении. Пусть X — эллиптическая кривая с комплексным умножением, $R = \operatorname{End}(X, P_0)$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ — поле частных кольца R (см. 4.19) и j — значение j-инварианта кривой X. Тогда

(1) j — целое алгебраическое число;

(2) поле $K(j)$ является абелевым расширением поля K степени $h_R = \# \operatorname{Pic} R$;

(3) $j \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow h_R = 1$ и существует ровно 13 таких значений j.

Инвариант Хассе

Пусть X — эллиптическая кривая над полем k характеристики $p>0$, тогда для нее определен важный инвариант, так называемый инвариант Хассе, который строится следующим образом. Пусть $F\colon X\to X$ — морфизм Фробениуса (2.4.1). Тогда F индуцирует отображение когомологий

$$F^*\colon H^1(X, \mathcal{O}_X)\to H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

Это отображение не является линейным, но оно *р-линейно* в том смысле, что $F^*(\lambda a)=\lambda^p F^*(a)$, $\lambda\in k$, $a\in H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Так как для эллиптической кривой X пространство $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ одномерно и поскольку поле k совершенно, то отображение F^* является либо нулевым, либо биективным.]

Определение. Если $F^*=0$, то говорят, что X имеет *инвариант Хассе* 0 или что она *суперсингулярна*; в противном случае говорят, что X имеет *инвариант Хассе, равный* 1.

Другие интерпретации инварианта Хассе см в упр. 4.15 и 4.16.

Предложение 4.21. *Пусть эллиптическая кривая X вложена в $\mathbf{P}^2$ как кубическая кривая с однородным уравнением $f(x, y, z)=0$. Инвариант Хассе X тогда и только тогда равен 0, когда коэффициент при $(xyz)^{p-1}$ в f^{p-1} равен 0.*

Доказательство. Пучок идеалов кривой X в $\mathbf{P}^2$ изоморфен $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)$, так что имеет место последовательность

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)\xrightarrow{f}\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}\to\mathcal{O}_X\to 0.$$

Отсюда, переходя к когомологиям и замечая, что $H^i(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2})=0$ при $i=1, 2$, получаем изоморфизм

$$H^1(X, \mathcal{O}_X)\to H^2(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)).$$

Напомним (5.1 гл. III), что $H^2(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3))$ является одномерным векторным пространством с естественным базисом $(xyz)^{-1}$.

Используя это вложение, вычислим действие морфизма Фробениуса на когомологиях. Пусть F_1 — морфизм Фробениуса на $\mathbf{P}^2$, тогда F_1^* переводит $\mathcal{O}_X$ в $\mathcal{O}_{X^p}$, где X^p — подсхема в $\mathbf{P}^2$, определенная уравнением $f^p=0$. С другой стороны, X является замкнутой подсхемой в X^p, так что мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3p) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} & \to & \mathcal{O}_{X^p} & \to 0\\
 & \Big\downarrow{\scriptstyle f^{p-1}} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & \\
0\to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} & \to & \mathcal{O}_X & \to 0.
\end{array}$$

Отсюда мы получаем такую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "F_1^*"] \arrow[dd, bend right=60, "F^*"'] & H^2(\mathbf{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)) \arrow[d, "F_1^*"] \\
H^1(X^p,\mathcal{O}_{X^p}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^2(\mathbf{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3p)) \arrow[d, "f^{p-1}"] \\
H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\sim"] & H^2(\mathbf{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3))
\end{tikzcd}$$

где F — морфизм Фробениуса X. Но $F_1^*((xyz)^{-1})=(xyz)^{-p}$, и его образ в $H^2(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3))$ равен $f^{p-1}\cdot(xyz)^{-p}$. С другой стороны, $H^2(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3))$ имеет естественный базис $(xyz)^{-1}$ и любой моном, имеющий неотрицательные степени от x,y или z, равен 0. Таким образом, $f^{p-1}\cdot(xyz)^{-p}$ в $H^2(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3))$ равен коэффициенту при члене $(xyz)^{p-1}$ в f^{p-1}, и, следовательно, инвариант Хассе X равен 0 или 1 в зависимости от того, обращается этот коэффициент в нуль или нет.

Следствие 4.22. *Предположим, что $p\neq 2$, и пусть кривая X задана уравнением $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$, где $\lambda\neq 0, 1$. Тогда ее инвариант Хассе обращается в нуль, если и только если $h_p(\lambda)=0$, где*

$$h_p(\lambda)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\lambda^i,\quad k=\frac{1}{2}(p-1).$$

Доказательство. Воспользуемся критерием 4.21. В этом случае $f=y^2z-x(x-z)(x-\lambda z)$. Для того чтобы в f^{p-1} получить член $(xyz)^{p-1}$, надо иметь члены $(y^2z)^k$ и $(x(x-z)(x-\lambda z))^k$. Тогда в разложении $((x-z)(x-\lambda z))^k$ нам нужен коэффициент при x^kz^k. Он образуется из коэффициентов при x^iz^{k-i} в $(x-z)^k$ и коэффициентов при $x^{k-i}z^i$ в $(x-\lambda z)^k$. В итоге коэффициент при $(xyz)^{p-1}$ в f^{p-1} имеет вид

$$(-1)^k\binom{p-1}{k}\sum\binom{k}{i}^2\lambda^i.$$

Так как коэффициент перед знаком суммы сравним с единицей по модулю p, то мы получаем требуемую формулу для $h_p(\lambda)$.

Следствие 4.23. *Для заданного p существует только конечное число эллиптических кривых (с точностью до изоморфизма) над k с инвариантом Хассе, равным 0. На самом деле существует не более $[p/12]+2$ таких кривых.*

Доказательство. Степень многочлена $h_p(\lambda)$ от λ равна $k = {}^1/_2(p-1)$, поэтому он имеет не более k различных корней. В частности, существует только конечное множество соответствующих значений j. Так как отображение $\lambda \mapsto j$ шестилистно с двумя исключениями, то мы получаем не более $(k/6)+2$ и, следовательно, не более чем $[p/12]+2$ значений j.

Замечание. В действительности Игуза [2] показал, что корни многочлена $h_p(\lambda)$ всегда различны. Пользуясь этим фактом, легко найти точное число значений j, для которых соответствующая кривая имеет нулевой инвариант Хассе: $j=0 \Longleftrightarrow p\equiv 2 \pmod 3$ (см. упр. 4.14); $j=1728 \Longleftrightarrow p\equiv 3 \pmod 4$ (см. 4.23.5); число значений $j\neq 0{,}1728$ в точности равно $[p/12]$. Для маленьких p имеются таблицы таких значений j, см. Дойринг [1] и Бёрч и Куик [1, табл. 6].

Пример 4.23.1. Пусть $p=3$, тогда $h_p(\lambda)=\lambda+1$. Единственное решение этого уравнения $\lambda=-1$ соответствует значению $j=0=1728$.

Пример 4.23.2. Пусть $p=5$, тогда $h_p(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+1\equiv\lambda^2-\lambda+1 \pmod 5$. Его корнями являются $-\omega$ и $-\omega^2$ в квадратичном расширении поля $\mathbf{F}_p$, где $\omega^3=1$, так что здесь тоже $j=0$.

Пример 4.23.3. Пусть $p=7$, тогда $h_p(\lambda)=\lambda^3+9\lambda^2+9\lambda+1$. Он имеет корни -1, 2 и 4, что соответствует значению $j=1728$.

Замечание 4.23.4. При изучении поведения инварианта Хассе фиксированной кривой X при переменном значении p возникает одна очень интересная задача. Сформулируем ее точнее. Рассмотрим кубическую кривую $X\subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{Z}}$, определенную уравнением $f(x,y,z)=0$ с целыми коэффициентами, и предположим, что X неособа как кривая над $\mathbf{C}$. Тогда для почти всех значений p кривая $X_{(p)}\subset\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_p}$, полученная редукцией коэффициентов f по mod p, будет неособой над полем $k_{(p)}=\overline{\mathbf{F}}_p$. Рассмотрим множество $\mathfrak{P}=\{p \text{ простое } \mid X_{(p)}$ неособа над $k_{(p)}$ и ее инвариант Хассе равен $0\}$. Что можно сказать об этом множестве? Известно (мы не будем здесь этого доказывать), что для кривой X над $\mathbf{C}$ с комплексным умножением множество $\mathfrak{P}$ имеет плотность ${}^1/_2$. Здесь плотность определяется как

$$\lim_{x\to\infty}\#\{p\in\mathfrak{P}\mid p\leqslant x\}/\#\{p \text{ простое } \mid p\leqslant x\}.$$

На самом деле если $X_{(p)}$ неособа, то ее инвариант Хассе равен 0 тогда и только тогда, когда p — либо точка ветвления, либо остается простым элементом в мнимом квадратичном поле, содержащем кольцо комплексного умножения X (см. Дойринг [1]).

В случае когда X не имеет комплексного умножения, множество $\mathfrak{P}$ имеет плотность 0, но ни для одной эллиптической кривой не известно, конечно или бесконечно это множество. Однако существует большое количество численных свидетельств, подтверждающих гипотезу Ленга и Троттера [1] о том, что множество $\mathfrak{P}$ бесконечно, точнее, что при $x\to\infty$

$$\#\{p\in\mathfrak{P}\mid p\leqslant x\}\sim c\sqrt{x}/\log x,$$

где $c>0$ — некоторая константа.

Пример 4.23.5. Пусть X — кривая $y^2=x^3-x$, тогда $j=1728$ и, как мы уже видели в 4.20.1, X обладает комплексным умножением на i. Для любого $p\neq 2$ кривая $X_{(p)}$ неособа, и ее инвариант Хассе можно вычислить с помощью критерия 4.21. Для этого, полагая $k={}^1/_2(p-1)$, надо найти коэффициент при x^k в разложении бинома $(x^2-1)^k$. Вычисляя, находим, что в случае нечетного k он равен 0, а в случае четного $k=2m$ равен $(-1)^m\binom{k}{m}\neq 0$. Отсюда получаем, что

$$\text{инвариант Хассе} = \begin{cases} 1, & \text{если } p\equiv 1 \pmod 4,\\ 0, & \text{если } p\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Следовательно, $\mathfrak{P}=\{p \text{ простое } \mid p\equiv 3 \pmod 4\}$. Согласно теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии (см., например, Серр [14, гл. VI, § 4]), это множество простых имеет плотность ${}^1/_2$. В частности, существует бесконечно много таких простых чисел. Отметим, что $p\equiv 3 \pmod 4$ тогда и только тогда, когда p просто в кольце целых гауссовых чисел $\mathbf{Z}[i]$.

Пример 4.23.6. Пусть X — кривая $y^2=x(x-1)(x+2)$, так что $\lambda=-2$ и $j=2^6\cdot 3^{-2}\cdot 7^3$. Тогда $X_{(p)}$ неособа для $p\neq 2$ и 3. С помощью критерия 4.22 показывается, что среди всех простых $p\leqslant 73$ только для $p=23$ кривая $X_{(p)}$ имеет инвариант Хассе, равный 0. Поэтому можно предполагать, что плотность $\mathfrak{P}$ равна 0 и что X не имеет комплексного умножения, но доказать ничего не удается. Более обширные вычисления можно найти в монографии Ленга и Троттера [1].

Рациональные точки на эллиптической кривой

Пусть X — эллиптическая кривая над алгебраически замкнутым полем k, $P_0\in X$ — некоторая фиксированная точка, и пусть X вложена в $\mathbf{P}^2_k$ с помощью линейной системы $|3P_0|$. Предположим, что X можно задать уравнением $f(x,y,z)=0$ с коэффициентами из некоторого меньшего поля $k_0\subset k$ и что координаты точки P_0 принадлежат k_0. В таком случае будем говорить, что (X, P_0) *определена над* k_0. Если (X, P_0) определена над k_0, то из геометрической природы группового закона на X видно, что множество $X(k_0)$ точек X с координатами в k_0 образует подгруппу группы всех точек на X. Изучить структуру этой подгруппы — интересная арифметическая задача.

Пусть, в частности, $k = \mathbf{C}$ и $k_0 = \mathbf{Q}$, тогда ввиду однородности уравнения $f(x, y, z) = 0$ можно считать, что оно имеет целые коэффициенты, и можно рассматривать только целые решения x, y, z, так что мы имеем кубическое диофантово уравнение с тремя неизвестными.

Теорема Морделла утверждает, что группа $X(\mathbf{Q})$ является конечно порожденной абелевой группой. Мы не будем ее доказывать, а вместо этого приведем несколько примеров. Прекрасные обзоры по этой теме см. Касселс [1] и Тэйт [3].

Пример 4.23.7. Рассмотрим уравнение Ферма $x^3 + y^3 = z^3$, определенное над $\mathbf{Q}$. Так как теорема Ферма доказана для показателя 3, то $X(\mathbf{Q})$ содержит только три точки, а именно $(1, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$. Это три точки перегиба кривой X. Выбирая одну из них в качестве 0, получаем, что группа $X(\mathbf{Q})$ изоморфна $\mathbf{Z}/3$.

Пример 4.23.8. Кривая $y^2 + y = x^3 - x$ определена над $\mathbf{Q}$. Возьмем точку $P_0 = (0, 1, 0)$ на ней в качестве 0 групповой струк-

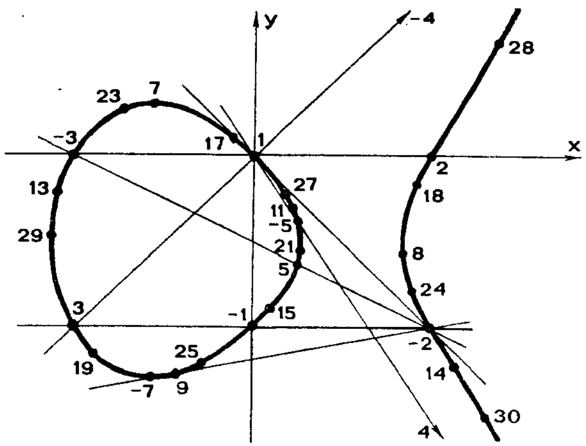


Рис. 17. Рациональные точки на кривой $y^2 + y = x^3 - x$.

туры. Тогда (согласно Тэйту [3]) группа $X(\mathbf{Q})$ является бесконечной циклической, порожденной точкой P с аффинными координатами $(0, 0)$. Эта кривая изображена на рис. 17, где точки вида nP отмечены просто числом n для всевозможных целых n.

Упражнения

4.1. Пусть X — эллиптическая кривая над k, $\operatorname{char} k \neq 2$, $P \in X$ — некоторая точка и $R = \bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nP))$ — градуированное кольцо. Показать, что для подходящих t, x, y имеет место изоморфизм градуированных колец

$$R \simeq k[t, x, y]/(y^2 - x(x - t^2)(x - \lambda t^2)),$$

где градуировка кольца $k[t, x, y]$ определяется так: $\deg t = 1$, $\deg x = 2$ и $\deg y = 3$.

4.2. Показать, что образ при вложении эллиптической кривой X в $\mathbf{P}^n$ с помощью полной линейной системы $|D|$ степени $\deg D \geqslant 3$ проективно нормален.

Замечание. Верно более общее утверждение: пусть D — дивизор степени $\geqslant 2g + 1$ на кривой рода g, тогда образ X при вложении полной линейной системой $|D|$ проективно нормален (см. Мамфорд [4, стр. 55]).

4.3. Пусть эллиптическая кривая X задана в $\mathbf{P}^2$ уравнением $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$. Показать, что любой автоморфизм кривой X, оставляющий точку $P_0 = (0, 1, 0)$ на месте, индуцируется автоморфизмом $\mathbf{P}^2$, который в аффинных координатах имеет вид

$$\begin{cases} x' = ax + b, \\ y' = cy. \end{cases}$$

В каждом из четырех случаев 4.7 описать эти автоморфизмы явно и тем самым выяснить структуру группы $G = \operatorname{Aut}(X, P_0)$.

4.4. Пусть X — эллиптическая кривая в $\mathbf{P}^2$, заданная уравнением вида

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

Показать, что ее j-инвариант представляется в виде рациональной функции от a_i с коэффициентами в $\mathbf{Q}$. В частности, если все a_i принадлежат некоторому полю $k_0 \subset k$, то j также принадлежит k_0. Более того, для каждого элемента $\alpha \in k_0$ существует эллиптическая кривая, определенная над k_0, со значением j-инварианта, равным α.

4.5. Пусть (X, P_0) — эллиптическая кривая, обладающая некоторым эндоморфизмом $f\colon X \to X$ степени 2.

(a) Представим X в виде двойного накрытия $\pi\colon X \to \mathbf{P}^1$, разветвленного в P_0, как в 4.4. Показать, что существует другой морфизм $\pi'\colon X \to \mathbf{P}^1$ и морфизм $g\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$, тоже степени 2, такие, что $\pi \circ f = g \circ \pi'$.

(b) Показать, что при подходящем выборе координат в обоих экземплярах $\mathbf{P}^1$ морфизм g имеет вид $x \to x^2$.

(c) Показать теперь, что g ветвится только над двумя точками ветвления морфизма π и что g^{-1} от двух других точек ветвления π состоит из четырех точек ветвления морфизма π'. Вывести отсюда соотношение на параметр λ.

(d) Показать, используя предыдущие утверждения, что существуют только три значения j, соответствующие эллиптическим кривым с эндоморфизмом степени 2, и найти эти значения λ и j. [*Ответ*: $j = 2^63^3$; $j = 2^65^3$; $j = -3^35^3$.]

4.6. (a) Пусть X — кривая рода g, вложенная бирационально в $\mathbf{P}^2$ как кривая степени d с r обыкновенными двойными точками. Обобщая метод упр. 2.3, показать, что X имеет $6(g - 1) + 3d$ точек перегиба. Двойные точки при этом не считаются точками перегиба, и характеристика поля k предполагается равной 0.

(b) Пусть теперь кривая X рода g вложена в $\mathbf{P}^n$, $n \geqslant 3$, как кривая степени d, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости $\mathbf{P}^{n-1}$. Для каждой точки $P \in X$ существует единственная гиперплоскость H, содержащая P, такая, что в пересечении $H \cap X$ точка P содержится по крайней мере с кратностью n; H называется *соприкасающейся гиперплоскостью* к кривой X в точке P. Это — обобщение понятия касательной прямой к плоской кривой. Если точка P входит в пересечение $H \cap X$ с кратностью по меньшей мере $n+1$, то H называется *гиперсоприкасающейся гиперплоскостью*, а точка P — точкой гиперсоприкосновения. Используя теорему Гурвица, с помощью индукции по n показать, что X имеет $n(n+1)(g-1)+(n+1)d$ точек гиперсоприкосновения.

(c) Пусть X — эллиптическая кривая, вложенная как кривая степени $d \geqslant 3$ в $\mathbf{P}^{d-1}$. Вывести из предыдущего, что X имеет ровно d^2 точек порядка d в групповой структуре на X.

4.7. *Двойственный морфизм*. Пусть X и X' — эллиптические кривые над k с базисными точками P_0 и P_0'.

(a) Пусть $f\colon X \to X'$ — произвольный морфизм. Пользуясь 4.11, показать, что $f^*\colon \operatorname{Pic} X' \to \operatorname{Pic} X$ индуцирует гомоморфизм $\hat{f}\colon (X', P_0') \to (X, P_0)$. Он называется морфизмом, *двойственным к* f.

(b) Пусть $f\colon X \to X'$ и $g\colon X' \to X''$ — два морфизма, показать, что тогда $(g \circ f)^\wedge = \hat{f} \circ \hat{g}$.

(c) Предположим, что $f(P_0) = P_0'$, и пусть $\deg f = n$. Показать, что если $Q \in X$ — произвольная точка и $f(Q) = Q'$, то $\hat{f}(Q') = n_X(Q)$. (Рассмотреть отдельно сепарабельный и чисто несепарабельный случаи, а затем их комбинацию.) Вывести отсюда, что $f \circ \hat{f} = n_{X'}$ и $\hat{f} \circ f = n_X$.

*(d) Пусть $f, g\colon X \to X'$ — морфизмы, сохраняющие базисные точки P_0, P_0', показать, что тогда $(f+g)^\wedge = \hat{f} + \hat{g}$. [*Указание*. Достаточно показать, что для любого $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X'$ имеем $(f+g)^*\mathcal{L} \simeq f^*\mathcal{L} \otimes g^*\mathcal{L}$. Пусть $\Gamma_f\colon X \to X \times X'$ — график морфизма $f\colon X \to X'$. Тогда достаточно показать (для $\mathcal{L}' = p_2^*\mathcal{L}$), что

$$\Gamma_{f+g}^*(\mathcal{L}') = \Gamma_f^*\mathcal{L}' \otimes \Gamma_g^*\mathcal{L}'.$$

Пусть $\sigma\colon X \to X \times X'$ — сечение $x \mapsto (x, P_0')$. Определим подгруппу $\operatorname{Pic}_\sigma^\circ$ в $\operatorname{Pic}(X \times X')$ следующим образом:

$$\operatorname{Pic}_\sigma^\circ = \{\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(X \times X') \mid \deg \mathcal{L} = 0 \text{ на каждом слое } p_1 \text{ и } \sigma^*\mathcal{L} = 0 \text{ в } \operatorname{Pic} X\}.$$

Отметим, что эта подгруппа изоморфна группе $\operatorname{Pic}^\circ(X'/X)$, которая участвует в определении якобиева многообразия. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между морфизмами $f\colon X \to X'$ и элементами $\mathcal{L}_f \in \operatorname{Pic}_\sigma$ (это соответствие рассматривается как определение $\mathcal{L}_f$).

Теперь для доказательства утверждения надо воспользоваться тем, что $\mathcal{L}_{f+g} = \mathcal{L}_f \otimes \mathcal{L}_g$ и что для любого $\mathcal{L}$ на X' $p_2^*\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}_\sigma^\circ$].

(e) Используя утверждение (d), показать, что $\hat{n}_X = n_X$ для любого $n \in \mathbf{Z}$. Вывести отсюда, что $\deg n_X = n^2$.

(f) Показать, что $\deg \hat{f} = \deg f$ для любого морфизма f.

4.8. Для любой кривой X определена *алгебраическая фундаментальная группа* $\pi_1(X)$ как $\varprojlim \operatorname{Gal}(K'/K)$, где K — поле функций на X, а K' пробегает все расширения Галуа поля K, соответствующие этальным накрытиям кривых $X' \to X$ (см. упр. 10.3 гл. III). Так, например, $\pi_1(\mathbf{P}^1) = 1$ (см. 2.5.3).

Показать, что для эллиптической кривой X

$$\pi_1(X) = \prod_{l \text{ простое}} \mathbf{Z}_l \times \mathbf{Z}_l, \text{ если } \operatorname{char} k = 0,$$

$$\pi_1(X) = \prod_{l \neq p} \mathbf{Z}_l \times \mathbf{Z}_l, \text{ если } \operatorname{char} k = p \text{ и инвариант Хассе кривой } X \text{ равен } 0,$$

$$\pi_1(X) = \mathbf{Z}_p \times \prod_{l \neq p} \mathbf{Z}_l \times \mathbf{Z}_l, \text{ если } \operatorname{char} k = p \text{ и инвариант Хассе кривой } X \text{ не равен } 0,$$

где $\mathbf{Z}_l = \varprojlim \mathbf{Z}/l^n$ — группа целых l-адических чисел. [*Указание*. Всякая кривая X', этально накрывающая эллиптическую кривую, также является эллиптической кривой. Если степень накрытия X' над X взаимно проста с p, то X' доминируется накрытием вида $n_X\colon X \to X$ для некоторого целого n, $(n, p) = 1$. Группа Галуа накрытия n_X изоморфна $\mathbf{Z}/n \times \mathbf{Z}/n$. Этальные накрытия степеней, делящихся на p, могут существовать только у эллиптических кривых с инвариантом Хассе, отличным от нуля.]

Замечание. Более общо, Гротендик [SGA 1, X.2.6, стр. 272] показал, что алгебраическая фундаментальная группа кривой рода g изоморфна некоторой факторгруппе пополнения по подгруппам конечного индекса обычной топологической фундаментальной группы компактной римановой поверхности рода g, т. е. группы с $2g$ образующими $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ и единственным соотношением $(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) \ldots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) = 1$.

4.9. Говорят, что две эллиптические кривые X и X' *изогенны*, если существует конечный морфизм $f\colon X \to X'$.

(a) Показать, что изогения является отношением эквивалентности.

(b) Показать, что множество эллиптических кривых X', изогенных данной кривой X с точностью до изоморфизма, счетно. [*Указание*. Кривая X' однозначно определяется кривой X и $\ker f$.]

4.10. Пусть X — эллиптическая кривая, показать, что имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \to p_1^* \operatorname{Pic} X \oplus p_2^* \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic}(X \times X) \to R \to 0,$$

где $R = \operatorname{End}(X, P_0)$. В частности, отсюда видно, что $\operatorname{Pic}(X \times X)$ больше чем сумма групп Пикара сомножителей. Ср. упр. 12.6 гл. III и упр. 1.6 гл. V.

4.11. Пусть X — эллиптическая кривая над $\mathbf{C}$, определенная эллиптическими функциями с периодами 1, τ, и R — кольцо ее эндоморфизмов.

(a) Показать, что если $f \in R$ — ненулевой эндоморфизм, соответствующий комплексному умножению на число α, как в 4.18, то $\deg f = |\alpha|^2$.

(b) В обозначениях (a) показать, что двойственный морфизм $\hat{f}$ (упр. 4.7) соответствует умножению на комплексно-сопряженное к α число $\bar{\alpha}$.

(c) Показать, что $R = \mathbf{Z}[\tau]$, если $\tau \in \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ цело над $\mathbf{Z}$.

4.12. Пусть опять X — эллиптическая кривая над $\mathbf{C}$, определенная эллиптическими функциями с периодами 1, τ, и предположим, что τ лежит в области G, указанной в 4.15B.

(a) Показать, что если X обладает автоморфизмом, оставляющим P_0 на месте, отличным от ± 1, то τ равно либо i, либо ω, как в 4.20.1 и 4.20.2. Это дает другое доказательство того факта (4.7), что существуют только две кривые с точностью до изоморфизма, обладающие автоморфизмами, отличными от ± 1.

(b) Показать теперь, что существуют только три значения τ, для которых X обладает эндоморфизмами степени 2. Как соотносятся эти значения τ с тремя значениями j, определенными в упр. 4.5? [*Ответ*: $\tau = i$, $\tau = \sqrt{-2}$, $\tau = {}^1/_2(-1 + \sqrt{-7})$.]

4.13. Показать, что при $p = 13$ существует ровно одно значение j, для которого инвариант Хассе соответствующей кривой равен нулю. Найти это значение. [*Ответ*: $j = 5 \pmod{13}$.]

4.14. В любой характеристике $p \neq 3$ кривая Ферма X: $x^3 + y^3 = z^3$ является неособой эллиптической кривой. Вычислить множество $\mathfrak{P} = \{p \neq 3 \mid X_{(p)}$ имеет инвариант Хассе, равный $0\}$ и показать (используя теорему Дирихле), что плотность его равна ${}^1/_2$.

4.15. Пусть X — эллиптическая кривая над полем k характеристики p. Пусть F': $X_p \to X$ есть k-линейный морфизм Фробениуса (2.4.1). Используя 4.10.7, показать, что двойственный морфизм $\hat{F}'$: $X \to X_p$ сепарабелен тогда и только тогда, когда инвариант Хассе кривой X равен 1. Теперь воспользоваться упр. 4.7 и показать, что если инвариант Хассе равен 1, то подгруппа точек порядка p на X изоморфна $\mathbf{Z}/p$, а если инвариант Хассе равен 0, то эта группа нулевая.

4.16. Пусть снова X — эллиптическая кривая над полем k характеристики p, и предположим, что X определена над полем $\mathbf{F}_q$ из $q = p^r$ элементов, т. е. $X \subset \mathbf{P}^2$ может быть задана уравнением с коэффициентами из $\mathbf{F}_q$. Предположим также, что X имеет рациональную точку над $\mathbf{F}_q$. Пусть F': $X_q \to X$ есть k-линейный морфизм Фробениуса относительно q.

(a) Показать, что $X_q \simeq X$ как схемы над k и при их отождествлении F': $X \to X$ является отображением возведения в q-ю степень координат точек кривой X, вложенной в $\mathbf{P}^2$.

(b) Показать, что морфизм $1_X - F'$ сепарабелен и его ядро — это множество $X(\mathbf{F}_q)$ точек кривой X с координатами в $\mathbf{F}_q$.

(c) Используя упр. 4.7, показать, что $F' + \hat{F}' = a_X$ для некоторого целого a и что $N = q - a + 1$, где $N = \# X(\mathbf{F}_q)$.

(d) Воспользоваться тем фактом, что $\deg(m + nF') > 0$ для всех $m, n \in \mathbf{Z}$, и показать, что $|a| \leqslant 2\sqrt{q}$. Это — доказательство Хассе аналога гипотезы Римана для эллиптических кривых (см. добавление С, упр. 5.6).

(e) Предположим теперь, что $q = p$. Показать, что инвариант Хассе кривой X тогда и только тогда равен 0, когда $a \equiv 0 \pmod{p}$. Вывести отсюда, что при $p \geqslant 5$ инвариант Хассе X равен 0, если и только если $N = p + 1$.

4.17. Пусть X — кривая $y^2 + y = x^3 - x$ из 4.23.8.

(a) Пусть $Q = (a, b)$ — точка на кривой X; найти координаты точки $P + Q$, где $P = (0, 0)$ как функции от a, b. Пользуясь полученными формулами, вычислить координаты точек nP, $n = 1, 2, \ldots, 10$. [*Проверка*: $6P = (6,14)$.]

(b) Показать, что для всех $p \neq 37$ редуцированная кривая $X_{(p)}$ неособа.

4.18. Пусть X — кривая $y^2 = x^3 - 7x + 10$. Тогда эта кривая имеет не менее 26 точек с целыми координатами. Найти их с помощью вычислительных средств и проверить, что все они принадлежат подгруппе (может ли эта подгруппа совпадать со всей группой $X(\mathbf{Q})$?), порожденной точками $P = (1,2)$ и $Q = (2,2)$.

4.19. Пусть (X, P_0) — эллиптическая кривая, определенная над $\mathbf{Q}$ и заданная в $\mathbf{P}^2$ уравнением с целыми коэффициентами. Тогда X можно рассматривать как слой над общей точкой схемы $\bar{X}$ над $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$. Пусть $T \subset \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ — открытое подмножество, состоящее из всех простых $p \neq 2$, таких, что слой $X_{(p)}$ над точкой p неособый. Показать, что для любого n морфизм n_X: $X \to X$ определен над T и является плоским. Показать, что его ядро также плоско над T. Вывести отсюда, что для любого $p \in T$ естественное отображение $X(\mathbf{Q}) \to X_{(p)}(\mathbf{F}_p)$ групп рациональных точек *инъективно* отображает точки периода n из $X(\mathbf{Q})$ в подгруппу кручения группы $X_{(p)}(\mathbf{F}_p)$ для любых $(n, p) = 1$.

Этим способом легко можно показать, что группа $X(\mathbf{Q})$ в упр. 4.17 и упр. 4.18 не имеет кручения.

4.20. Пусть X — эллиптическая кривая над полем k характеристики $p > 0$ и $R = \operatorname{End}(X, P_0)$ — ее кольцо эндоморфизмов.

(a) Пусть X_p — кривая над k, определенная посредством изменения k-структуры на X в смысле 2.4.1. Показать, что $j(X_p) = j(X)^{1/p}$. Таким образом, $X \simeq X_p$ над k тогда и только тогда, когда $j \in \mathbf{F}_{p^2}$.

(b) Показать, что эндоморфизм p_X в R раскладывается в произведение $\pi\hat{\pi}$ двух эндоморфизмов степени p тогда и только тогда, когда $X \simeq X_p$. В таком случае инвариант Хассе кривой X равен 0 тогда и только тогда, когда элементы π и $\hat{\pi}$ ассоциированы в R (т. е. отличаются на обратимый элемент кольца R). (Воспользоваться предложением 2.5.)

(c) Показать, что если инвариант Хассе кривой X равен 0, то $j \in \mathbf{F}_{p^2}$.

(d) Для любого $f \in R$ определено отображение f^*: $H^1(\mathcal{O}_X) \to H^1(\mathcal{O}_X)$. Оно должно быть умножением на некоторый элемент $\lambda_f \in k$, так что мы получаем гомоморфизм колец φ: $R \to k$, определенный сопоставлением $f \mapsto \lambda_f$. Показать, что любой эндоморфизм $f \in R$ коммутирует с (нелинейным) морфизмом Фробениуса F: $X \to X$, и вывести отсюда, что если инвариант Хассе кривой X отличен от 0, то образ φ совпадает с $\mathbf{F}_p$. Следовательно, в этом случае R содержит простой идеал $\mathfrak{p}$, такой, что $R/\mathfrak{p} \simeq \mathbf{F}_p$.

4.21. Пусть O — кольцо целых в квадратичном числовом поле $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. Показать, что любое подкольцо $R \subset O$, $R \neq \mathbf{Z}$, имеет вид $\mathbf{Z} + f \cdot O$, где f — однозначно определенное целое число $\geqslant 1$. Оно называется *кондуктором* кольца R.

***4.22.** Пусть $X \to \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ — семейство эллиптических кривых, обладающее сечением. Показать, что тогда это семейство тривиально. [*Указание*. С помощью сечения на каждом слое зафиксировать групповую структуру. Затем показать, что точки порядка 2 на слоях образуют этальное накрытие $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$, которое должно быть тривиальным, поскольку схема $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ односвязна. Отсюда видно, что параметр λ может быть определен на всем семействе. Он задает отображение $A^1_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}} - \{0, 1\}$. Но любое такое отображение постоянно, следовательно, λ — константа, так что семейство $X \to A^1_{\mathbf{C}}$ тривиально.]

§ 5. Каноническое вложение

Возвратимся теперь к изучению кривых произвольного рода и будем рассматривать их рациональное отображение в проективное пространство, определенное канонической линейной системой. Для негиперэллиптической кривой рода $g \geqslant 3$ будет показано, что это отображение является вложением, которое мы будем называть каноническим вложением кривой. С этими вопросами тесно связана теорема Клиффорда о специальных линейных системах, которая будет доказана также в этом параграфе. Полученные результаты будут использованы для обсуждения проблемы классификации кривых.

На протяжении всего параграфа X обозначает кривую рода g над алгебраически замкнутым полем k и $|K|$ будет обозначать каноническую линейную систему на X. В случае $g = 0$ линейная система $|K|$ пуста. Если $g = 1$, то $|K| = 0$, и она определяет постоянное отображение X в точку. Но для $g \geqslant 2$, как будет сейчас показано, $|K|$ является эффективной линейной системой без базисных точек, так что она задает морфизм X в проективное пространство. Этот морфизм мы называем *каноническим*.

Лемма 5.1. *Пусть $g \geqslant 2$, тогда каноническая линейная система не имеет базисных точек.*

Доказательство. Согласно 3.1, нам надо показать, что для каждой точки $P \in X$ выполняется равенство $|K-P| = \dim|K| - 1$. Имеем $\dim|K| = \dim H^0(X, \omega_X) - 1 = g - 1$. С другой стороны, поскольку кривая X не рациональна, то для любой точки P $\dim|P| = 0$, так что по теореме Римана—Роха находим $\dim|K-P| = g-2$, что и требовалось доказать.

Напомним, что кривая X рода $g \geqslant 2$ называется *гиперэллиптической* (упр. 1.7), если существует конечный морфизм $f\colon X \to \mathbf{P}^1$ степени 2. Рассматривая соответствующую этому морфизму линейную систему, замечаем, что X гиперэллиптична тогда и только тогда, когда она обладает линейной системой размерности 1 и степени 2. Здесь удобно пользоваться классическими обозначениями: *символом* g_d^r обозначается линейная система (линейный ряд) размерности r и степени d на X. Таким образом, X гиперэллиптична тогда и только тогда, когда имеет линейный ряд g_2^1.

Если X — кривая рода 2, то $|K| = g_2^1$ (см. упр. 1.7). В этом случае кривая всегда является гиперэллиптической с каноническим морфизмом $f\colon X \to \mathbf{P}^1$ в качестве определяющего.

Предложение 5.2. *Пусть X — кривая рода $g \geqslant 2$. Каноническая линейная система $|K|$ на ней очень обильна тогда и только тогда, когда кривая X не гиперэллиптична.*

Доказательство. Воспользуемся критерием 3.1. Так как $\dim|K| = g-1$, то мы видим, что $|K|$ очень обильна тогда и только тогда, когда для любых двух точек $P, Q \in X$ (возможно, совпадающих) $\dim|K-P-Q| = g-3$. Применяя теорему Римана—Роха к дивизору $P+Q$, получаем

$$\dim|P+Q| - \dim|K-P-Q| = 2+1-g.$$

Теперь вопрос только в том, когда $\dim|P+Q| = 0$. Если X — гиперэллиптическая кривая, то для любого дивизора $P+Q$ из линейной системы g_2^1 имеем $\dim|P+Q| = 1$. Обратно, если $\dim|P+Q| > 0$ для некоторых точек P, Q, то линейная система $|P+Q|$ содержит g_2^1 (на самом деле совпадает с g_2^1), поэтому X гиперэллиптична. Это завершает доказательство.

Определение. Пусть X — негиперэллиптическая кривая рода $g \geqslant 3$, тогда вложение $X \to \mathbf{P}^{g-1}$, задаваемое канонической линейной системой, называется *каноническим вложением* X (определенным с точностью до автоморфизма $\mathbf{P}^{g-1}$) и его образ, являющийся кривой степени $2g-2$, называется *канонической кривой.*

Пример 5.2.1. Пусть X — негиперэллиптическая кривая рода 3, тогда образом ее канонического вложения является кривая четвертого порядка в $\mathbf{P}^2$. Обратно, любая неособая кривая четвертого порядка в $\mathbf{P}^2$ является канонической кривой, поскольку для нее $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(1)$ (см. 8.20.3 гл. II). В частности, существуют негиперэллиптические кривые рода 3 (см. также упр. 3.2).

Пример 5.2.2. Пусть X — негиперэллиптическая кривая рода 4, тогда ее образом при каноническом вложении является кривая степени 6 в $\mathbf{P}^3$. Покажем сейчас, что X содержится в единственной неприводимой квадрике Q в $\mathbf{P}^3$ и является на самом деле полным пересечением Q с некоторой неприводимой кубической поверхностью F в $\mathbf{P}^3$. Обратно, если X — неособое полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbf{P}^3$, то $\deg X = 6$, $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(1)$ (см. упр. 8.4 гл. II), так что X является канонической кривой рода 4. В частности, по теореме Бертини такие неособые полные пересечения существуют и, следовательно, существуют негиперэллиптические кривые рода 4.

Докажем теперь предыдущие утверждения. Пусть X — кривая рода 4 в $\mathbf{P}^3$ и $\mathcal{J}$ — ее пучок идеалов. Тогда мы имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Подкручивая ее на 2 и переходя к когомологиям, получаем точную последовательность вида

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}(2)) \to H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(2)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(2)) \to \ldots$$

Здесь размерность среднего пространства равна 10, а правого 9 по теореме Римана—Роха на X (отметим, что пучку $\mathcal{O}_X(2)$ соответствует дивизор $2K$, который неспециален и $\deg 2K = 12$). Отсюда $\dim H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}(2)) \geqslant 1$. Ненулевые элементы этого пространства соответствуют с точностью до скалярного множителя квадрикам в $\mathbf{P}^3$, проходящим через X. Каждая из них неприводима и приведена, поскольку X не содержится ни в какой плоскости $\mathbf{P}^2$. Кривая X не может содержаться в двух различных квадриках Q, Q', иначе она содержалась бы в их пересечении $Q \cap Q'$, которое является кривой степени 4, что невозможно, так как $\deg X = 6$. Таким образом, показано, что X содержится в единственной квадрике Q.

Подкручивая ту же последовательность на 3 и переходя к когомологиям, с помощью аналогичных вычислений получаем, что $\dim H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}(3)) \geqslant 5$. Этому пространству соответствует пространство кубических форм, в котором содержится подпространство размерности 4, состоящее из произведений построенной выше квадратичной формы на произвольные линейные формы. Отсюда видно, что существует неприводимая кубическая поверхность F, содержащая X. Поскольку X должна тогда содержаться в полном пересечении $Q \cap F$ и так как степени обеих кривых равны 6, то $X = Q \cap F$ — требуемое полное пересечение.

Предложение 5.3. *Пусть X — гиперэллиптическая кривая $g \geqslant 2$. Тогда X имеет только одну линейную систему g_2^1. Если f_0: $X \to \mathbf{P}^1$ — соответствующий морфизм степени 2, то канонический морфизм f: $X \to \mathbf{P}^{g-1}$ представляется в виде композиции f_0 и $(g-1)$-кратного вложения $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^{g-1}$. В частности, его образом $X' = f(X)$ является рациональная нормальная кривая степени $g-1$* (упр. 3.4) *и степень f: $X \to X'$ равна 2. Наконец, каждый эффективный канонический дивизор на X представляется в виде суммы $g-1$ дивизоров из единственной линейной системы g_2^1, так что можно записать $|K| = \sum_1^{g-1} g_2^1$.*

Доказательство. Пусть X' — образ канонического морфизма f: $X \to \mathbf{P}^{g-1}$. Поскольку X — гиперэллиптическая кривая, она обладает линейной системой g_2^1 по определению. Пока мы не знаем, что эта линейная система единственна, поэтому зафиксируем ее на некоторое время. Для любого дивизора $P + Q \in g_2^1$ из доказательства предложения 5.2 видно, что Q является базисной точкой в линейной системе $|K - P|$, поэтому $f(P) = f(Q)$. Так как в g_2^1 содержится бесконечно много дивизоров, то морфизм f не может быть бирациональным. Пусть степень отображения f: $X \to X'$ равна $\mu \geqslant 2$ и $d = \deg X'$. Тогда $d\mu = 2g - 2$, поскольку $\deg K = 2g - 2$, и, следовательно, $d \leqslant g - 1$.

Далее пусть $\tilde{X}'$ — нормализация кривой X' и $\mathfrak{d}$ — линейная система на $\tilde{X}'$, задающая морфизм $\tilde{X}' \to X' \subset \mathbf{P}^{g-1}$. Тогда степень $\mathfrak{d}$ равна d, а ее размерность равна $g-1$. Так как $d \leqslant g-1$, то мы заключаем отсюда (см. упр. 1.5), что $d = g - 1$ и род $\tilde{X}'$ равен 0, так что $\tilde{X}' \simeq \mathbf{P}^1$ и $\mathfrak{d}$ — единственная полная линейная система на $\mathbf{P}^1$ степени $g-1$, а именно $|(g-1)P|$. Следовательно, X' является образом $(g-1)$-кратного вложения $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^{g-1}$. В частности, X' неособа и является рациональной нормальной кривой в смысле упр. 3.4.

Теперь из того, что $d\mu = 2g - 2$, заключаем, что $\mu = 2$. Поскольку f уже склеивает пары точек из g_2^1, как было показано выше, то он должен представляться в виде композиции отображения f_0: $X \to \mathbf{P}^1$, определенного линейной системой g_2^1, и $(g-1)$-кратного вложения $\mathbf{P}^1$. Таким образом, линейный ряд g_2^1 определяется морфизмом f, стало быть, он однозначно определен на X.

Наконец, любой эффективный канонический дивизор K на X является прообразом некоторого гиперплоского сечения кривой X'. Поэтому он представляется в виде суммы $g-1$ дивизоров из g_2^1. Обратно, любой набор из $g-1$ точек X' является гиперплоским сечением X', поэтому каноническую линейную систему $|K|$ можно отождествить с суммой $g-1$ экземпляров линейной системы g_2^1, т. е.

$$|K| = \sum_1^{g-1} g_2^1.$$

Предложение доказано.

Докажем теперь теорему Клиффорда. Смысл ее заключается в следующем. Пусть D — неспециальный дивизор на X, тогда $\dim |D|$ можно точно вычислить по теореме Римана—Роха как функцию от $\deg D$. Однако если дивизор D специален, то $\dim |D|$ зависит не только от степени. Поэтому полезно иметь некоторую оценку для $\dim |D|$, которую и дает теорема Клиффорда.

Теорема 5.4 (Клиффорд). *Пусть D — эффективный специальный дивизор на кривой X. Тогда имеет место неравенство*

$$\dim |D| \leqslant \frac{1}{2} \deg D.$$

Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда либо $D = 0$, либо $D = K$, либо X — гиперэллиптическая кривая и $|D|$ — некоторое кратное линейной системы g_2^1 на X.

Лемма 5.5. *Пусть D и E — эффективные дивизоры на X. Тогда*

$$\dim |D| + \dim |E| \leqslant \dim |D + E|.$$

Доказательство. Определим отображение множеств

$$\varphi\colon\ |D| \times |E| \to |D + E|,$$

сопоставляя любой паре $\langle D', E' \rangle$ дивизоров $D' \in |D|$ и $E' \in |E|$ дивизор $D' + E' \in |D + E|$. Отображение φ конечно, потому что любой заданный эффективный дивизор можно только конечным числом способов представить в виде суммы двух эффективных дивизоров. С другой стороны, поскольку φ соответствует естественному билинейному отображению векторных пространств

$$H^0(X, \mathcal{L}(D)) \times H^0(X, \mathcal{L}(E)) \to H^0(X, \mathcal{L}(D + E)),$$

то мы видим, что он является морфизмом соответствующих проективных пространств. Тогда так как φ конечен, то размерность его образа в точности равна $\dim|D| + \dim|E|$. Отсюда немедленно вытекает требуемое неравенство.

Доказательство теоремы 5.4 (по Сен-Дона [1, § 1]). Пусть D — эффективный специальный дивизор, тогда дивизор $K - D$ тоже эффективен, и мы можем воспользоваться предыдущей леммой и получить, что

$$\dim|D| + \dim|K - D| \leqslant \dim|K| = g - 1.$$

С другой стороны, по теореме Римана—Роха имеем

$$\dim|D| - \dim|K - D| = \deg D + 1 - g.$$

Складывая эти два выражения, получаем, что

$$2\dim|D| \leqslant \deg D$$

или

$$\dim|D| \leqslant \frac{1}{2}\deg D.$$

Это доказывает первое утверждение теоремы. Отсюда ясно также, что в случае $D = 0$ или K имеет место равенство.

Для доказательства второго утверждения предположим, что $D \neq 0$, K, и что $\dim|D| = \frac{1}{2}\deg D$. Тогда надо доказать, что кривая X гиперэллиптична и $|D|$ кратно g_2^1. Сделаем это с помощью индукции по $\deg D$ (которая обязательно должна быть четной). Если $\deg D = 2$, то $|D| = g_2^1$, так что кривая X гиперэллиптическая и доказывать больше нечего. Предположим теперь, что $\deg D \geqslant 4$ и, следовательно, $\dim|D| \geqslant 2$. Зафиксируем дивизор $E \in |K - D|$ и две точки $P, Q \in X$, такие, что $P \in \operatorname{Supp} E$ и $Q \notin \operatorname{Supp} E$. Так как $\dim|D| \geqslant 2$, то можно найти дивизор $D \in |D|$, носитель которого содержит P и Q. Пусть теперь $D' = D \cap E$ — наибольший дивизор, содержащийся в D и E. Покажем, что для D' выполнены предположения индукции.

Отметим прежде всего, что так как $Q \in \operatorname{Supp} D$, но $Q \notin \operatorname{Supp} E$, то $Q \notin \operatorname{Supp} D'$, поэтому $\deg D' < \deg D$. С другой стороны, $\deg D' > 0$, поскольку $P \in \operatorname{Supp} D'$.

Далее по построению D' существует следующая точная последовательность:

$$0 \to \mathcal{L}(D') \to \mathcal{L}(D) \oplus \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(D + E - D') \to 0,$$

где все пучки рассматриваются как подпучки постоянного пучка $\mathcal{K}$ на X и первое отображение является сложением, а второе — вычитанием (имея в виду, что $\mathcal{L}(D) = \{f \in K(X) \mid (f) \geqslant -D\}$, см. 7.7 гл. II). Следовательно, рассматривая глобальные сечения соответствующих пучков, имеем

$$\dim|D| + \dim|E| \leqslant \dim|D'| + \dim|D + E - D'|.$$

Но $E \sim K - D$ и $D + E - D' \sim K - D'$, поэтому левая сторона этого неравенства равна $\dim|D| + \dim|K - D|$, что должно быть равно $\dim|K| = g - 1$, так как по предположению $\dim|D| = {}^1/_2 \deg D$. С другой стороны, применяя 5.5 к D', получаем, что правая сторона неравенства меньше либо равна $g - 1$. Поэтому неравенство является на самом деле равенством. Тогда, как и выше, мы заключаем, что $\dim|D'| = {}^1/_2 \deg D'$. Отсюда по предположению индукции следует, что кривая X гиперэллиптическая.

Теперь предположим опять, что $D \neq 0$, K и что $\dim|D| = {}^1/_2 \deg D$. Пусть $r = \dim|D|$. Рассмотрим линейную систему $|D| + (g - 1 - r)g_2^1$. Она имеет степень $2g - 2$ и размерность $\geqslant g - 1$, поэтому, снова по 5.5, она должна совпадать с канонической линейной системой $|K|$. Но, как уже было показано в 5.3, $|K| = (g - 1)g_2^1$. Отсюда $D = rg_2^1$, и теорема полностью доказана.

Классификация кривых

Кривые классифицируются прежде всего по их роду, который, как мы уже видели (см. 1.1.1), может принимать любое целое значение $g \geqslant 0$. В случае $g = 0$ всякая кривая X изоморфна $\mathbf{P}^1$ (см. 1.3.5), и к этому больше добавить нечего. В случае $g = 1$ кривые классифицируются посредством их j-инварианта (4.1), так что здесь тоже имеется вполне удовлетворительное решение задачи классификации. При $g \geqslant 2$ проблема классификации кривых уже очень трудна и, кроме нескольких частных случаев (см., например, упр. 2.2), далека пока от своего полного решения.

При $g \geqslant 3$ множество $\mathfrak{M}_g$ всех кривых рода g можно разбить на классы в зависимости от того, какими линейными системами (какой степени и размерности) они обладают. Например, класс гиперэллиптических кривых X выделяется условием существования на X линейной системы g_2^1. Гиперэллиптические кривые, как было показано в упр. 1.7, существуют для всех $g \geqslant 2$ и, как мы видели в 5.2.1 и 5.2.2, по крайней мере для $g = 3$ и 4 существуют и негиперэллиптические кривые.

Можно поставить общий вопрос: какие кривые обладают линейными системами g_d^1 для различных d? В частности, если X имеет g_3^1, то она называется *тригональной*.

Замечание 5.5.1. В этом направлении известен следующий результат. Для любого $d \geqslant {}^1/_2 g + 1$ всякая кривая рода g обладает линейной системой g_d^1; для $d < {}^1/_2 g + 1$ существуют кривые рода g, не имеющие g_d^1. Доказательство см. Клейман и Лаксов [1]. Отметим, в частности, что отсюда вытекает существование негиперэллиптических кривых любого рода $g \geqslant 3$ (см. упр. 2.10 гл. V). Приведем несколько примеров по поводу указанного результата.

Пример 5.5.2. При $g = 3$ и 4 этот результат дает доказательство существования негиперэллиптических кривых (что нам уже известно) и показывает, что каждая такая кривая обладает линейной системой g_3^1. Разумеется, если X — гиперэллиптическая кривая, то последний факт тривиален, достаточно к g_2^1 добавить одну какую-нибудь точку. Если X имеет род 3 и не является гиперэллиптической, то она канонически вкладывается в $\mathbf{P}^2$ как кривая 4-го порядка (5.2.1). Проектируя ее из любой точки X на $\mathbf{P}^1$, получаем g_3^1. Таким образом, кривая X рода 3 имеет бесконечно много g_3^1.

Пусть X — негиперэллиптическая кривая рода 4, тогда образ ее канонического вложения в $\mathbf{P}^3$ лежит на единственной неприводимой квадрике Q (см. 5.2.2). Если Q неособая, то X имеет тип (3,3) на Q (см. 6.6.1 гл. II) и каждое из двух семейств прямых на Q высекает на X линейный ряд g_3^1, так что в этом случае X обладает двумя g_3^1 (то, что нет других, можно показать с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям в 5.5.3 ниже). Если квадрика Q особа, т.е. является квадратичным конусом, то на ней существует только одно семейство прямых, которое высекает на X единственный ряд g_3^1.

Пример 5.5.3. Пусть $g = 5$. Тогда из утверждения 5.5.1 следует. что каждая кривая этого рода имеет линейный ряд g_4^1 и существуют кривые, не имеющие g_3^1. Пусть X — негиперэллиптическая кривая рода 5 в каноническом вложении в $\mathbf{P}^4$ как кривая степени 8. Покажем сначала, что X тогда и только тогда обладает линейным рядом g_3^1, когда она имеет три-секущую[1]) в этом вложении. Пусть $P, Q, R \in X$, тогда по теореме Римана—Роха имеем

$$\dim |P + Q + R| = \dim |K - P - Q - R| - 1.$$

С другой стороны, так как X канонически вложена, то $\dim |K - P - Q - R|$ — это размерность линейной системы гиперплоскостей в $\mathbf{P}^4$, проходящих через три точки P, Q, R. Следовательно, $\dim |P + Q + R| = 1$ тогда и только тогда, когда P, Q и R содержатся в двумерном семействе гиперплоскостей $\mathbf{P}^4$, что равносильно тому, что точки P, Q и R коллинеарны. Стало быть, X имеет g_3^1 тогда и только тогда, когда она имеет три-секущую (и в таком случае она имеет одномерное семейство три-секущих).

Пусть теперь X — неособое полное пересечение трех квадрик в $\mathbf{P}^4$. Тогда $\deg X = 8$ и $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(1)$, так что X — каноническая кривая рода 5. Если X имеет три-секущую L, то L должна пересекать каждую из этих квадрик в трех точках и, следовательно, должна содержаться в них, т. е. $L \subset X$, что невозможно. Тем самым показано, что существуют кривые рода 5, не имеющие g_3^1.

Спроектируем теперь такую кривую X из точки на ней в $\mathbf{P}^3$. В результате получим кривую $X' \subset \mathbf{P}^3$ степени 7, которая не имеет особых точек, потому что X не имеет три-секущих. Кривая X' уже должна иметь три-секущие, поскольку в противном случае проекция из некоторой точки на ней будет неособой плоской кривой степени 6, которая имеет больший род. Итак, пусть Q, R, S — точки X', лежащие на некоторой ее три-секущей. Тогда их прообразы на X вместе с точкой P — четыре точки, лежащие в плоскости в $\mathbf{P}^4$. Те же рассуждения, что и выше, показывают, что X имеет линейный ряд g_4^1.

Возвратимся теперь к общей проблеме классификации кривых, одна из первых задач которой — снабдить множество $\mathfrak{M}_g$ всех кривых рода g с точностью до изоморфизма структурой алгебраического многообразия, так называемого *многообразия модулей* кривых рода g. Например, в случае $g = 1$ таким многообразием является $\mathbf{A}^1$ — многообразие значений j-инвариантов эллиптических кривых.

Лучший способ задания алгебраической структуры на $\mathfrak{M}_g$ заключается в требовании, чтобы оно было универсальным параметрическим многообразием для семейств кривых рода g в следующем смысле. Требуется, чтобы существовало плоское семейство $\mathfrak{X} \to \mathfrak{M}_g$ кривых рода g, такое, что для всякого другого плоского семейства таких кривых $X \to T$ существовал единственный морфизм $T \to \mathfrak{M}_g$, такой, что X индуцируется семейством $\mathfrak{X}$. В таком случае $\mathfrak{M}_g$ называется *тонким многообразием модулей*. К сожалению, имеется несколько причин, по которым универсальное семейство кривых существовать не может. Одна из них — это существование нетривиальных семейств кривых, все слои которых изоморфны друг другу (упр. 9.10 гл. III).

Однако, как показал Мамфорд, для любого $g \geqslant 2$ существует *грубое многообразие модулей* $\mathfrak{M}_g$ (Мамфорд [1, теорема 5.11]), которое обладает следующими свойствами:

(1) множество замкнутых точек $\mathfrak{M}_g$ находится во взаимно

[1]) Или три-хорду, т. е. прямую в $\mathbf{P}^4$, пересекающую X по $n \geqslant 3$ точкам.— *Прим. перев.*

однозначном соответствии с множеством классов изоморфных кривых рода g;

(2) пусть $f\colon X \to T$ — любое плоское семейство кривых рода g, тогда существует морфизм $g\colon T \to \mathfrak{M}_g$, такой, что для каждой замкнутой точки $t \in T$ ее слой X_t принадлежит классу изоморфных кривых, определяемому точкой $g(t)$.

В случае $g = 1$ аффинная j-прямая является грубым многообразием модулей для семейств эллиптических кривых, обладающих сечением. Условие (2) проверяется здесь с помощью того факта, что j является рациональной функцией от коэффициентов уравнения плоского вложения кривой (см. упр. 4.4).

Замечание 5.5.4. Многообразие $\mathfrak{M}_g$ для $g \geqslant 2$, как показали Делинь и Мамфорд [1], является на самом деле неприводимым квазипроективным многообразием размерности $3g - 3$ над любым алгебраически замкнутым полем.

Пример 5.5.5. Предполагая, что $\mathfrak{M}_g$ существует, мы можем установить некоторые его свойства. Например, пользуясь упр. 2.2, можно показать, что гиперэллиптические кривые рода g определяются как двулистные накрытия $\mathbf{P}^1$ с ветвлением в точках $0, 1, \infty$ и еще в $2g - 1$ других точках с точностью до действия некоторой конечной группы. Отсюда видно, что гиперэллиптические кривые составляют неприводимое подмногообразие размерности $2g - 1$ в $\mathfrak{M}_g$. Если $g = 2$, то оно совпадает со всем пространством, что подтверждает неприводимость трехмерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ в этом случае.

Пример 5.5.6. Пусть $g = 3$. Тогда гиперэллиптические кривые образуют неприводимое подмногообразие размерности 5 в $\mathfrak{M}_3$. Негиперэллиптические кривые рода 3 представляются как неособые плоские кривые четвертого порядка. Так как это представление каноническое, то они изоморфны как абстрактные кривые тогда и только тогда, когда отличаются на действие некоторого автоморфизма плоскости $\mathbf{P}^2$. Семейство всех таких кривых параметризуется некоторым открытым множеством $U \subset \mathbf{P}^N$, где $N = 14$, поскольку формы степени 14 от трех переменных имеют 15 коэффициентов, так что существует морфизм $U \to \mathfrak{M}_3$, слои которого являются образами группы PGL (2), размерность которой равна 8. Так как всякая отдельная кривая имеет только конечное число автоморфизмов (упр. 5.2), то слои тоже имеют размерность 8 и, следовательно, размерность образа U равна $14 - 8 = 6$. Это подтверждает то, что $\dim \mathfrak{M}_3 = 6$.

Упражнения

5.1. Показать, что гиперэллиптическая кривая не может быть полным пересечением ни в каком проективном пространстве (ср. упр. 3.3).

5.2. Показать, что если X — кривая рода $g \geqslant 2$ над полем характеристики 0, то группа ее автоморфизмов Aut X конечна. [*Указание.* В случае когда кривая гиперэллиптическая, воспользоваться единственностью g_2^1 и показать, что Aut X переставляет точки ветвления двулистного накрытия $X \to \mathbf{P}^1$. Если X не гиперэллиптическая, показать, что Aut X переставляет точки гиперсоприкосновения (упр. 4.6) в каноническом вложении. Ср. упр. 2.5.]

5.3. *Модули кривых рода* 4. Показать, что гиперэллиптические кривые рода 4 образуют неприводимое семейство размерности 7, а негиперэллиптические — неприводимое семейство размерности 9. Среди них кривые, обладающие единственным линейным рядом g_3^1, составляют неприводимое семейство размерности 8. [*Указание.* Воспользоваться 5.2.2 и вычислить размерность семейства полных пересечений $Q \cap F_3$.]

5.4. Еще один способ исследования кривых — выяснить, с какой наименьшей степенью кривая рода g может быть представлена бирационально в виде плоской кривой с обыкновенными особенностями (см. 3.11). Пусть X — негиперэллиптическая кривая рода 4. Показать, что тогда

(a) если X обладает двумя линейными рядами g_3^1, то она может быть представлена в виде плоской квинтики с двумя обыкновенными двойными точками; верно и обратное утверждение;

(b) если X обладает только одним g_3^1, то она может быть представлена в виде плоской квинтики с точкой самоприкосновения (упр. 5.14d гл. I), но наименьшая степень представления ее в виде плоской кривой с обыкновенными двойными особенностями равна 6.

5.5. *Кривые рода* 5. (a) Показать, что кривые рода 5, каноническая модель которых в $\mathbf{P}^4$ является полным пересечением трех квадрик, образуют семейство размерности 12.

(b) Показать, что X тогда и только тогда имеет линейный ряд g_3^1, когда она может быть представлена в виде плоской квинтики с одной обыкновенной двойной точкой. Такие кривые образуют неприводимое семейство размерности 11. [*Указание.* Рассмотреть отображение $X \to \mathbf{P}^2$, задаваемое линейной системой $|K - D|$, где $D \in g_3^1$.]

*(c) В случае (b) коники в $\mathbf{P}^2$, проходящие через особую точку X, высекают на X каноническую линейную систему (не имеющую базисных точек вне особой точки). Отображая $\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^4$ с помощью этой линейной системы коник, показать, что каноническая кривая X лежит на кубической поверхности $V \subset \mathbf{P}^4$, где V изоморфна раздутию $\mathbf{P}^2$ в одной точке (упр. 7.7 гл. II). Более того, V является объединением всех три-секущих кривой X, соответствующих дивизорам из g_3^1 (см. 5.5.3), так что V содержится в пересечении всех квадрик в $\mathbf{P}^4$, проходящих через X. Таким образом, поверхность V и ряд g_3^1 на X однозначно определены.

Замечание. Если X не имеет g_3^1, то ее каноническая модель является полным пересечением трех квадрик, как в (a). Более общо, классическая теорема Энриквеса и Петри утверждает, что каноническая модель любой негиперэллиптической кривой рода $g \geqslant 3$ проективно нормальна и является пересечением квадрик, проходящих через X, кроме случаев, когда X имеет g_3^1 и когда $g = 6$ и X имеет g_5^2. См. Сен-Дона [1].

5.6. Показать, что неособая плоская кривая степени 5 не имеет g_3^1. Показать далее, что существуют негиперэллиптические кривые рода 6, которые не могут быть представлены в виде неособых плоских кривых пятого порядка.

5.7. (a) Показать, что любой автоморфизм кривой X рода 3 индуцируется автоморфизмом $\mathbf{P}^2$ в каноническом вложении $X \subset \mathbf{P}^2$.

*(b) Пусть X — кривая, заданная уравнением

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Показать, что Aut X является простой группой порядка 168, т. е. максимально возможного порядка 84 (g — 1), согласно упр. 2.5. См. Бернсайд [1, § 232] и Клейн [1].

*(c) Показать, что почти все кривые рода 3 не имеют автоморфизмов, кроме тождественного. [*Указание*. Для каждого n вычислить размерность семейства кривых, обладающих автоморфизмом T порядка n. Например, пусть $n = 2$, тогда при подходящем выборе координат автоморфизм T может быть записан как $x \to -x$, $y \to y$, $z \to z$. Тогда существует 8-мерное семейство кривых, инвариантных относительно T; делая замену, получаем 4-мерное семейство автоморфизмов T, в итоге кривые, обладающие автоморфизмом порядка 2, образуют семейство размерности 12 в 14-мерном семействе всех плоских кривых степени 4.]

Замечание. Верно и более общее утверждение (по крайней мере над $\mathbf{C}$): любая достаточно общая кривая рода $g \geqslant 3$ не имеет автоморфизмов, кроме тождественного, см. Бейли [1].

§ 6. Классификация кривых в $\mathbf{P}^3$

В 1882 г. была предложена денежная премия (премия Штейнера) за лучшую работу по классификации пространственных кривых. Она была вручена сразу двум геометрам: М. Нётеру и Г. Альфану, каждый из которых представил 200-страничный трактат на эту тему (см. М. Нётер [1], Альфан [1]). В каждом из этих трактатов вначале развивалась общая теория, которая иллюстрировалась затем исчерпывающими таблицами кривых малых степеней (примерно до степени 20).

Современный аспект этой проблемы хорошо понятен. Используя конструкцию многообразия Чжоу или схемы Гильберта, можно показать, что неособые кривые заданной степени d и рода g в $\mathbf{P}^3$ параметризуются конечным объединением квазипроективных многообразий, причем очень естественным способом. Однако более тонкий вопрос определения числа и размерностей этих параметризующих многообразий для всевозможных значений d, g остается открытым. Не ясно даже, для каких пар целых d, g существует кривая степени d и рода g в $\mathbf{P}^3$. (Правда, Альфан утверждает, что эта задача им решена, но за его доказательством трудно проследить.)

В этом параграфе мы приведем несколько основных фактов, касающихся кривых в $\mathbf{P}^3$, и в качестве иллюстрации опишем классификацию кривых степени $\leqslant 7$ в $\mathbf{P}^3$.

Начнем с исследования того, в каких случаях кривая обладает неспециальным очень обильным дивизором заданной степени. Если $g = 0$ или 1, то ответ на этот вопрос был дан в 3.3.1 и 3.3.3, поэтому мы будем рассматривать случай $g \geqslant 2$.

Предложение 6.1 (Альфан). *Кривая X рода $g \geqslant 2$ тогда и только тогда обладает неспециальным очень обильным дивизором D степени d, когда $d \geqslant g + 3$.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость этого условия. Пусть D — неспециальный и очень обильный дивизор степени d, тогда по теореме Римана—Роха имеем $\dim |D| = d - g$ и линейная система $|D|$ задает вложение X в $\mathbf{P}^{d-g}$. Так как $X \simeq \mathbf{P}^1$, то $d - g \geqslant 2$, т. е. $d \geqslant g + 2$. Но если $d = g + 2$, то X — плоская кривая степени d. В этом случае $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(d-3)$ и для того, чтобы дивизор D был неспециальным, нужно, чтобы $d \leqslant 3$. Но тогда $g = 0$ или 1, что противоречит предположению. Поэтому мы заключаем, что $d \geqslant g + 3$.

Пусть теперь $d \geqslant g + 3$, и будем искать неспециальные очень обильные дивизоры D степени g. Согласно 3.1, для того, чтобы D был очень обилен, необходимо и достаточно, чтобы для всех P, $Q \in X$

$$\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2.$$

Поскольку дивизор D неспециален, то по теореме Римана—Роха это равносильно тому, что дивизор $D - P - Q$ также неспециален. Заменяя, если нужно, D линейно эквивалентным ему дивизором D', можно считать, что дивизор $D' - P - Q$ эффективен.

Рассмотрим d-кратное прямое произведение X^d кривой X на себя. Элементу $\langle P_1, \ldots, P_d \rangle \in X^d$ и всем его перестановкам соответствует эффективный дивизор $D = P_1 + \ldots + P_d$, поэтому для простоты обозначений будем писать $D \in X^d$. Покажем, что множество S дивизоров $D \in X^d$, для которых существует $D' \sim D$ и точки P, $Q \in X$, такие, что дивизор $E = D' - P - Q$ эффективен и специален, имеет размерность $\leqslant g + 2$. Так как $d \geqslant g + 3$, то из этого будет следовать, что $S \neq X^d$. В таком случае любой дивизор $D \notin S$ будет удовлетворять требованиям предложения.

Пусть E — эффективный специальный дивизор степени $d - 2$. Так как $\dim |K| = g - 1$ и так как всякий эффективный специальный дивизор содержится в некотором эффективном каноническом дивизоре, то мы видим, что множество всех таких E как подмножество в X^{d-2} имеет размерность $\leqslant g - 1$. Следовательно, множество дивизоров вида $E + P + Q$ в X^d имеет размерность $\leqslant g + 1$. Далее, поскольку специальные дивизоры в X^d образуют подмножество размерности $\leqslant g - 1$, то ими можно по тем же соображениям пренебречь и, стало быть, можно считать, что дивизор $E + P + Q$ неспециален.

Так как E специален, то по теореме Римана—Роха $\dim |E| \geqslant d - 1 - g$. С другой стороны, поскольку $E + P + Q$ неспециален, то $\dim |E + P + Q| = d - g$. Отсюда видно, что множество дивизоров $D \in X^d$, линейно эквивалентных дивизорам вида $E + P + Q$, имеет размерность $\leqslant g + 2$, что и требовалось показать.

Следствие 6.2. *Пусть X — кривая степени d и рода g в* $\mathbf{P}^3$. *Ее гиперплоское сечение D тогда и только тогда является неспециальным дивизором, когда выполнено одно из следующих условий:*
(1) $g = 0$ *и* $d \geqslant 1$;
(2) $g = 1$ *и* $d \geqslant 3$;
(3) $g \geqslant 2$ *и* $d \geqslant g + 3$;

Доказательство. Это немедленно вытекает из 3.3.1, 3.3.3 и предыдущего предложения. Действительно, если D — очень обильный дивизор на X, то полная линейная система $|D|$ задает вложение X в $\mathbf{P}^n$ для некоторого n и при $n > 3$ мы можем спроектировать ее в $\mathbf{P}^3$, как в предложении 3.5.

Предложение 6.3. *Пусть X — кривая в* $\mathbf{P}^3$, *не лежащая ни в какой плоскости, гиперплоское сечение D которой является специальным дивизором. Тогда $d \geqslant 6$ и $g \geqslant {}^1/_2 d + 1$. Более того, при $d = 6$ такой кривой является только каноническая кривая рода 4 (см.* 5.2.2).

Доказательство. Если дивизор D специален, то по теореме Клиффорда 5.4 имеем $\dim |D| \leqslant {}^1/_2 d$. Так как X не лежит ни в какой плоскости, то $\dim |D| \geqslant 3$, так что $d \geqslant 6$. Далее, поскольку D специален, то $d \leqslant 2g - 2$, следовательно, $g \geqslant {}^1/_2 d + 1$. Теперь если $d = 6$, то в теореме Клиффорда в этом случае мы имеем равенство, и поскольку $D \neq 0$, то либо $D = K$ и X — каноническая кривая рода 4, либо X — гиперэллиптическая кривая и $|D|$ — некоторое кратное линейного ряда g_2^1. Но последний случай невозможен, потому что в противном случае линейная система $|D|$ не разделяла бы точки и не была бы, следовательно, очень обильной.

Докажем теперь следующий важный результат, который ограничивает сверху род пространственной кривой через ее степень.

Теорема 6.4 (Кастельнуово [1]). *Пусть X — кривая степени d и рода g в* $\mathbf{P}^3$, *не содержащаяся ни в какой плоскости. Тогда $d \geqslant 3$ и имеет место следующая оценка сверху:*

$$g \leqslant \begin{cases} \frac{1}{4} d^2 - d + 1, & \text{если } d \text{ четно}, \\ \frac{1}{4}(d^2 - 1) - d + 1, & \text{если } d \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Более того, равенство достигается для каждого $d \geqslant 3$ и любая кривая, для которой имеет место равенство, лежит на квадрике в $\mathbf{P}^3$.

Доказательство. Пусть D — гиперплоское сечение X. Идея доказательства заключается в том, чтобы оценить разность $\dim |nD| - \dim |(n-1)D|$ для любого n и затем все сложить. Прежде всего выберем гиперплоское сечение $D = P_1 + \ldots + P_d$ на X так, чтобы никакие три точки P_i не лежали на одной прямой. Это можно сделать, потому что не всякая секущая является кратной секущей (см. 3.8, 3.9 и упр. 3.9).

Теперь я утверждаю, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, \min(d, 2n+1)$ точка P_i не является базисной точкой линейной системы $|nD - P_1 - \ldots - P_{i-1}|$. Чтобы это доказать, достаточно найти поверхность степени n в $\mathbf{P}^3$, содержащую $P_1, \ldots, P_{i-1}$, но не содержащую P_i. На самом деле такую поверхность можно построить как объединение плоскостей. В качестве первой плоскости возьмем плоскость в $\mathbf{P}^3$, содержащую P_1 и P_2, но не содержащую других точек P_j, что возможно, поскольку никакие три P_i не коллинеарны. Вторую плоскость выберем так, чтобы она содержала P_3 и P_4 и не содержала ни одну из оставшихся точек, и так далее. В результате объединение построенных таким образом плоскостей будет содержать точки $P_1, \ldots, P_{i-1}$, но не будет содержать точку P_i. Остальные плоскости можно взять любыми не содержащими ни одной из точек P_j. Это можно сделать для любого i, такого, что $i - 1 \leqslant 2n$ и, конечно, $i \leqslant d$, поскольку всего имеется только d точек.

Отсюда для любого $n \geqslant 1$ имеем

$$\dim |nD| - \dim |(n-1)D| \geqslant \min(d, 2n+1),$$

поскольку $(n-1)D = nD - P_1 - \ldots - P_d$ и каждый раз из линейной системы удаляется небазисная точка, так что ее размерность падает на 1.

Теперь возьмем $n \gg 0$ и сложим все полученные неравенства, начиная с 1 и кончая n и используя тот факт, что $\dim |0 \cdot D| = 0$. Положим $r = [{}^1/_2 (d-1)]$, тогда полученное в итоге неравенство можно записать в виде

$$\dim |nD| \geqslant 3 + 5 + \ldots + (2r+1) + (n-r)d$$

или

$$\dim |nD| \geqslant r(r+2) + (n-r)d.$$

С другой стороны, при больших n дивизор nD будет неспециальным, поэтому по теореме Римана—Роха имеем

$$\dim |nD| = nd - g.$$

Подставляя это в предыдущее неравенство, получаем

$$g \leqslant rd - r(r+2).$$

Чтобы получить окончательный ответ, рассмотрим два случая. В случае когда d четно, $r = {}^1/_2 d - 1$ и мы получаем оценку

$$g \leqslant \frac{1}{4} d^2 - d + 1.$$

Если d нечетно, то $r = {}^1/_2 (d - 1)$ и в этом случае

$$g \leqslant \frac{1}{4}(d^2 - 1) - d + 1,$$

как и утверждалось в теореме.

Пусть теперь X — кривая, для которой достигается равенство, тогда равенство должно выполняться на каждом шаге предыдущих оценок. В частности, $\dim |2D| = 8$ (и даже меньше, если $d < 5$), откуда следует, что X содержится в некоторой квадрике в $\mathbf{P}^3$. Действительно, из точной последовательности пучков

$$0 \to \mathcal{J}_X \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

получаем следующую точную последовательность когомологий:

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_X(2)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_X(2)) \to \ldots .$$

Здесь $\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(2)) = 10$ и $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2)) = 9$ (или меньше, если $d < 5$, как и выше), поэтому $\dim H^0(\mathcal{J}_X(2)) \neq 0$, а следовательно, X содержится в некоторой квадрике.

Наконец, для того, чтобы доказать, что равенство достигается для любого $d \geqslant 3$, построим соответствующие кривые на неособой квадрике Q. Пусть d четно, $d = 2s$, тогда рассмотрим кривую типа (s, s), которая имеет степень d и род $s^2 - 2s + 1 = {}^1/_4 d^2 - d + 1$ (см. упр. 5.6 гл. III). Такая кривая высекается на Q некоторой поверхностью степени s и, следовательно, существует. Если d нечетно, $d = 2s + 1$, то в качестве X возьмем кривую типа $(s, s + 1)$ на Q, степень которой равна d и род равен $s^2 - s = {}^1/_4 (d^2 - 1) - d + 1$. Теорема полностью доказана.

Замечание 6.4.1. Подытожим все, что мы знаем о кривых в $\mathbf{P}^3$. Прежде всего перечислим те классы кривых, о существовании которых нам известно.

(a) Для каждого $d \geqslant 1$ существуют неособые плоские кривые степени d, и для них $g = {}^1/_2 (d - 1)(d - 2)$. См. 8.20.2 гл. II и упр. 8.4 гл. II.

(b) Для любых целых $a, b \geqslant 1$ существуют неособые кривые, являющиеся полными пересечениями поверхностей степеней a и b в $\mathbf{P}^3$. Для них $d = ab$ и $g = {}^1/_2 ab(a + b - 4) + 1$ (упр. 8.4. гл. II).

(c) Для любых целых $a, b \geqslant 1$ существуют неособые кривые типа (a, b) на неособой квадрике в $\mathbf{P}^3$. Для них $d = a - b$ и $g = ab - a - b + 1$ (упр. 5.6 гл. III).

(d) Позднее в упр. 2.9 гл. V мы покажем, что на квадратичном конусе Q в $\mathbf{P}^3$ существуют два типа кривых: когда $d = 2a$ четно и X высекается на Q некоторой поверхностью степени a, так что $g = a^2 - 2a + 1$, и когда $d = 2a + 1$ нечетно и род X равен $a^2 - a$. Сопоставляя это со случаем (c), замечаем, что эти значения d и g содержатся среди значений на неособой квадрике.

Пример 6.4.2. Приведем теперь классификацию кривых степени $d \leqslant 7$ в $\mathbf{P}^3$.

$d = 1$. Единственная кривая степени 1 — это прямая $\mathbf{P}^1$ (см. упр. 7.6 гл. I).

$d = 2$. Единственная кривая степени 2 — это коника в $\mathbf{P}^2$ (см. упр. 7.8 гл. I).

$d = 3$. Здесь имеется плоская кубическая кривая с $g = 1$ и пространственная кубическая кривая с $g = 0$. Ими исчерпываются все кривые степени 3 в $\mathbf{P}^3$ (см. упр. 3.4).

$d = 4$. Плоская кривая четвертой степени с $g = 3$; рациональная кривая четвертой степени в $\mathbf{P}^3$ и эллиптическая кривая четвертой степени в $\mathbf{P}^3$, в последнем случае кривая является полным пересечением двух квадрик (см. упр. 3.6).

$d = 5$. Плоская квинтика рода 6; в $\mathbf{P}^3$ существуют кривые с неспециальным гиперплоским сечением родов 0, 1 и 2 (см. 6.2) и, согласно 6.3, других нет.

$d = 6$. Плоская секстика рода 10; в $\mathbf{P}^3$ существуют кривые с неспециальным гиперплоским сечением родов $g = 0, 1, 2$ и 3 (см. 6.2) и канонические кривые рода 4, являющиеся полными пересечениями квадрик и кубик (см. 6.3).

$d = 7$. Плоская кривая седьмой степени рода $g = 15$; в $\mathbf{P}^3$ существуют кривые с неспециальным гиперплоским сечением родов 0, 1, 2, 3 и 4 и всякая кривая с $g \leqslant 4$ имеет неспециальное гиперплоское сечение. С другой стороны, на неособой квадрике в $\mathbf{P}^3$ кривая типа (3, 4) имеет $g = 6$. Так как это максимально возможное значение для рода при $d = 7$, то по 6.4 любая кривая с $g = 6$ должна лежать на квадрике.

Итак, осталось неясным, существуют ли в $\mathbf{P}^3$ кривые степени 7 с $g = 5$. Согласно 6.4.1, такая кривая не может лежать на квадрике. Поэтому мы подойдем к этому вопросу с другой стороны, а именно постараемся выяснить, может ли кривая рода 5 вкладываться в $\mathbf{P}^3$ как кривая степени 7. Для положительного ответа на этот вопрос на X надо найти очень обильный дивизор D степени 7 с $\dim |D| \geqslant 3$. По теореме Римана — Роха всякий такой дивизор должен быть специальным. Так как $\deg K = 8$, то D можно представить в виде $K - P$, поэтому $\dim |D| = 3$. Для проверки того, что D очень обилен, нужно для любых $Q, R \in X$ установить равенство

$$\dim |K - P - Q - R| = \dim |K - P| - 2.$$

По теореме Римана — Роха это равенство равносильно тому, что для любых Q и R

$$\dim |P+Q+R| = 0.$$

Но это возможно тогда и только тогда, когда X не имеет g_3^1. Действительно, если X не имеет g_3^1, то $\dim |P+Q+R| = 0$ для всех $P, Q, R \in X$. С другой стороны, если на X существует g_3^1, то для любой точки P можно подобрать точки Q и R, такие, что $\dim |P+Q+R| = 1$.

В итоге мы получаем, что абстрактная кривая X рода 5 тогда и только тогда вкладывается в $\mathbf{P}^3$ как кривая степени 7, когда она не имеет линейного ряда g_3^1. Согласно 5.5.3, такие кривые

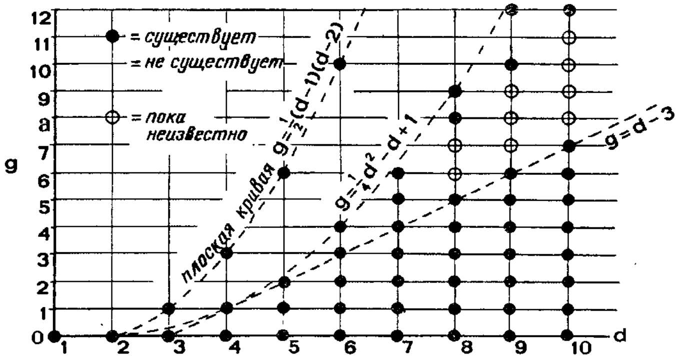


Рис. 18. Кривые степени d и рода g в $\mathbf{P}^3$.

существуют, стало быть, существуют и кривые степени 7 и рода 5 в $\mathbf{P}^3$. Этот пример показывает, какого порядка трудности следует ожидать при классификации кривых больших степеней и родов в $\mathbf{P}^3$.

На рис. 18 изображено, что нам известно из этого параграфа о классификации кривых степени d и рода g в $\mathbf{P}^3$ для $d \leqslant 10$ и $g \leqslant 12$. Дальнейшую информацию об этом см. в 4.13.1 гл. V и упр. 4.14 гл. V.

Пример 6.4.3. Рассмотрим теперь кривые степени 9 и рода 10 в $\mathbf{P}^3$. Это первый случай, когда существуют два различных семейства кривых одной и той же степени и одинакового рода, ни одно из которых не является частным случаем другого.

Первое семейство состоит из полных пересечений двух кубических поверхностей. Для кривых X этого семейства $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(2)$ (см. упр. 8.4 гл. II), так что пучок $\mathcal{O}_X(2)$ специален и $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2)) = 10$. Более того, поскольку X проективно нормально (упр. 8.4 гл. II), то естественное отображение $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_X(2))$ сюръективно. Отсюда мы получаем, что $H^0(\mathcal{J}_X(2)) = 0$, поскольку $\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(2))$ тоже равна 10, и, следовательно, X не содержится ни в какой квадрике в $\mathbf{P}^3$.

Второе семейство состоит из кривых типа (3, 6) на неособой квадрике Q в $\mathbf{P}^3$. В этом случае с помощью точной последовательности когомологий (упр. 5.6 гл. III), соответствующей точной последовательности пучков

$$0 \to \mathcal{O}_Q(-3, -6) \to \mathcal{O}_Q \to \mathcal{O}_X \to 0,$$

подкрученной на 2, находим, что $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2)) = 9$. Таким образом, $\mathcal{O}_X(2)$ неспециален. С другой стороны, поскольку X не может содержаться в двух различных квадриках, то $\dim H^0(\mathcal{J}_X(2)) = 1$.

Так как по теореме о полунепрерывности 12.8 гл. III размерности групп когомологий при специализации могут только увеличиваться, то мы видим, что ни одно из описанных семейств не является специализацией другого. Действительно, $\dim H^0(\mathcal{J}_X(2))$ возрастает при переходе от первого семейства ко второму, в то время как $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2))$ убывает.

Для полноты картины покажем, что всякая кривая степени 9 и рода 10 принадлежит одному из этих двух семейств. Если $\mathcal{O}_X(2)$ неспециален на X, то $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2)) = 9$, поэтому кривая X должна лежать на некоторой квадрике в $\mathbf{P}^3$. Эти значения d и g встречаются в примере 6.4.1, так что X лежит на неособой квадрике Q и имеет тип (3, 6). С другой стороны, если $\mathcal{O}_X(2)$ специален, то X не может лежать ни на какой квадрике (в противном случае она принадлежала бы второму семейству, где $\mathcal{O}_X(2)$ неспециален). Так как $\mathcal{O}_X(3)$ неспециален (его степень $>2g-2$), то $\dim H^0(\mathcal{O}_X(3)) = 18$, поэтому $\dim H^0(\mathcal{J}_X(3)) \geqslant 2$. Соответствующая кубическая поверхность должна быть неприводимой, так что X содержится в пересечении двух кубических поверхностей и из-за равенства степеней совпадает с этим пересечением. Следовательно, X принадлежит первому семейству.

Упражнения

6.1. Показать, что рациональная кривая степени 4 в $\mathbf{P}^3$ содержится в единственной квадрике в $\mathbf{P}^3$ и эта квадрика должна быть неособой.

6.2. Показать, что рациональная кривая степени 5 в $\mathbf{P}^3$ всегда лежит на кубической поверхности и существуют такого типа кривые, не лежащие ни на какой квадрике.

6.3. Показать, что кривая степени 5 и рода 2 в $\mathbf{P}^3$ содержится в единственной квадрике Q в $\mathbf{P}^3$. Показать далее, что любая абстрактная кривая X рода 2 может быть вложена в $\mathbf{P}^3$ как кривая степени 5 так, что соответствующая квадрика Q неособа, и что существует другое ее вложение, для которого квадрика Q особа.

6.4. Показать, что в $\mathbf{P}^3$ не существует кривых степени 9 и рода 11. [*Указание*. Показать, что они должны лежать на квадрике в $\mathbf{P}^3$, затем воспользоваться 6.4.1.]

6.5. Показать, что если X — полное пересечение поверхностей степеней a и b в $\mathbf{P}^3$, то X не лежит ни на какой поверхности степени $<\min(a, b)$.

6.6. Пусть X — проективно нормальная кривая в $\mathbf{P}^3$, не содержащаяся ни в какой плоскости. Показать, что если $d = 6$, то $g = 3$ или 4, если $d = 7$, то $g = 5$ или 6. Ср. упр. 8.4 гл. II и упр. 5.6 гл. III.

6.7. Показать, что прямая, коника, пространственная кубическая кривая и эллиптическая кривая четвертого порядка в $\mathbf{P}^3$ не имеют кратных секущих и что всякая другая кривая в $\mathbf{P}^3$ обладает бесконечным множеством кратных секущих. [*Указание*. Рассмотреть проекцию в $\mathbf{P}^2$ из некоторой точки на кривой.]

6.8. Показать, что кривая X рода g обладает неспециальным дивизором D степени d, таким, что линейная система $|D|$ не имеет базисных точек, если и только если $d \geqslant g + 1$.

*6.9. Пусть X — неприводимая неособая кривая в $\mathbf{P}^3$. Тогда для всякого $m \gg 0$ существует неособая поверхность F степени m, содержащая X. [*Указание*. Пусть $\pi\colon \widetilde{P} \to \mathbf{P}^3$ — раздутие X и $Y = \pi^{-1}(X)$. Воспользоваться теоремой Бертини при проективном вложении $\widetilde{P}$ с помощью обратимого пучка $\mathcal{J}_Y \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(m)$.]

Глава V

ПОВЕРХНОСТИ

В этой главе мы даем введение в теорию алгебраических поверхностей. Она содержит основные факты о геометрических свойствах поверхностей и о бирациональных отображениях между ними. В качестве иллюстрации общей теории изучаются отдельные классы поверхностей, таких, как линейчатые поверхности и неособые кубические поверхности в $\mathbf{P}^3$. Это можно рассматривать также как первый шаг в более глубоком исследовании различных типов поверхностей.

Настоящая глава должна дать читателю предварительную подготовку для изучения более глубоких работ по теории алгебраических поверхностей, таких, как Мамфорд [2], Зарисский [5], Шафаревич и др. [1] и Бомбьери и Хьюзмоллер [1] [1]). О классификации поверхностей мы очень бегло упоминаем в § 6, поскольку она подробно излагается почти во всех упомянутых работах.

Параграфы 1, 3 и 5 посвящены общей теории. В § 1 излагается теория пересечения на поверхности и доказывается теорема Римана — Роха. В качестве приложения этой теоремы доказывается теорема Ходжа об индексе и критерий обильности Накаи — Мойшезона. В § 3 изучается поведение геометрических свойств поверхности и кривых на ней при моноидальном преобразовании — раздутии точки. Затем в § 5 доказывается теорема о разложении любого бирационального морфизма поверхностей в композицию моноидальных преобразований. Здесь доказывается также критерий Кастельнуово стягиваемости исключительной кривой первого рода на поверхности.

В § 2 исследуется класс линейчатых поверхностей. Для изучения таких поверхностей хорошим подспорьем служит теория кривых, поскольку многие свойства линейчатой поверхности извлекаются из рассмотрения некоторых линейных систем на ее базисной кривой. Существует также тесная связь между линейчатыми поверхностями над кривой C и локально свободными пучками ранга 2 на C, так что в качестве побочного продукта мы получаем некоторую информацию о классификации таких локально свободных пучков на кривой C.

[1]) См. также Beauville A. Surfaces algebriques complexes. Asterisque 54, Soc. Math. France, Paris, 1978. — *Прим. перев.*

29—01390

6.4. Показать, что в $\mathbf{P}^3$ не существует кривых степени 9 и рода 11. [*Указание*. Показать, что они должны лежать на квадрике в $\mathbf{P}^3$, затем воспользоваться 6.4.1.]

6.5. Показать, что если X — полное пересечение поверхностей степеней a и b в $\mathbf{P}^3$, то X не лежит ни на какой поверхности степени $<\min(a, b)$.

6.6. Пусть X — проективно нормальная кривая в $\mathbf{P}^3$, не содержащаяся ни в какой плоскости. Показать, что если $d = 6$, то $g = 3$ или 4, если $d = 7$, то $g = 5$ или 6. Ср. упр. 8.4 гл. II и упр. 5.6 гл. III.

6.7. Показать, что прямая, коника, пространственная кубическая кривая и эллиптическая кривая четвертого порядка в $\mathbf{P}^3$ не имеют кратных секущих и что всякая другая кривая в $\mathbf{P}^3$ обладает бесконечным множеством кратных секущих. [*Указание*. Рассмотреть проекцию в $\mathbf{P}^2$ из некоторой точки на кривой.]

6.8. Показать, что кривая X рода g обладает неспециальным дивизором D степени d, таким, что линейная система $|D|$ не имеет базисных точек, если и только если $d \geqslant g + 1$.

*6.9. Пусть X — неприводимая неособая кривая в $\mathbf{P}^3$. Тогда для всякого $m \gg 0$ существует неособая поверхность F степени m, содержащая X. [*Указание*. Пусть $\pi\colon \widetilde{P} \to \mathbf{P}^3$ — раздутие X и $Y = \pi^{-1}(X)$. Воспользоваться теоремой Бертини при проективном вложении $\widetilde{P}$ с помощью обратимого пучка $\mathcal{J}_Y \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(m)$.]

Глава V

ПОВЕРХНОСТИ

В этой главе мы даем введение в теорию алгебраических поверхностей. Она содержит основные факты о геометрических свойствах поверхностей и о бирациональных отображениях между ними. В качестве иллюстрации общей теории изучаются отдельные классы поверхностей, таких, как линейчатые поверхности и неособые кубические поверхности в $\mathbf{P}^3$. Это можно рассматривать также как первый шаг в более глубоком исследовании различных типов поверхностей.

Настоящая глава должна дать читателю предварительную подготовку для изучения более глубоких работ по теории алгебраических поверхностей, таких, как Мамфорд [2], Зарисский [5], Шафаревич и др. [1] и Бомбьери и Хьюзмоллер [1] [1]). О классификации поверхностей мы очень бегло упоминаем в § 6, поскольку она подробно излагается почти во всех упомянутых работах.

Параграфы 1, 3 и 5 посвящены общей теории. В § 1 излагается теория пересечения на поверхности и доказывается теорема Римана — Роха. В качестве приложения этой теоремы доказывается теорема Ходжа об индексе и критерий обильности Накаи — Мойшезона. В § 3 изучается поведение геометрических свойств поверхности и кривых на ней при моноидальном преобразовании — раздутии точки. Затем в § 5 доказывается теорема о разложении любого бирационального морфизма поверхностей в композицию моноидальных преобразований. Здесь доказывается также критерий Кастельнуово стягиваемости исключительной кривой первого рода на поверхности.

В § 2 исследуется класс линейчатых поверхностей. Для изучения таких поверхностей хорошим подспорьем служит теория кривых, поскольку многие свойства линейчатой поверхности извлекаются из рассмотрения некоторых линейных систем на ее базисной кривой. Существует также тесная связь между линейчатыми поверхностями над кривой C и локально свободными пучками ранга 2 на C, так что в качестве побочного продукта мы получаем некоторую информацию о классификации таких локально свободных пучков на кривой C.

[1]) См. также Beauville A. Surfaces algebriques complexes. Asterisque 54, Soc. Math. France, Paris, 1978.— *Прим. перев.*

В § 4 изучаются неособые кубические поверхности в $\mathbf{P}^3$ и знаменитые 27 прямых, лежащих на каждой из таких поверхностей. С помощью представления кубической поверхности в виде раздутия 6 точек на плоскости $\mathbf{P}^2$ изучение линейных систем на ней сводится к изучению некоторых линейных систем плоских кривых с предписанными базисными точками. Это классические вопросы. По ним были написаны целые книги, а здесь они излагаются на современном языке.

§ 1. Геометрия на поверхности

Начнем с изучения внутренней геометрии поверхности. Дивизор на поверхности — это сумма кривых с кратностями, так что нельзя, вообще говоря (безотносительно к какому-нибудь проективному вложению), говорить о степени дивизора, как в случае кривых. Однако имеет смысл говорить о пересечении двух дивизоров на поверхности, и это составляет основу теории пересечения. Теорема Римана — Роха для поверхностей устанавливает связь между размерностью полной линейной системы $|D|$, которая представляет собой, в сущности, когомологический инвариант, и некоторыми индексами пересечений на поверхности. Как и в случае кривых, теорема Римана — Роха занимает центральное место во всем дальнейшем изучении поверхностей, особенно в задаче их классификации.

На протяжении этой главы мы будем называть *поверхностью* неособую проективную поверхность над алгебраически замкнутым полем k. Известно, что всякая полная неособая поверхность проективна (ср. 4.10.2 гл. II), однако так как мы не будем этого доказывать, то всюду предполагается, что поверхность проективна. *Кривой* на поверхности называется любой эффективный дивизор. В частности, кривая может быть особой, приводимой и даже содержать кратные компоненты. Под *точкой* всегда понимается замкнутая точка, если не оговорено противное.

Пусть X — некоторая поверхность. Для любых двух дивизоров C, D на X мы хотим определить их индекс пересечения $C\cdot D$ как обобщение понятия кратности пересечения, определенного в упр. 5.4 гл. I и § 7 гл. I. Пусть C и D — кривые на X и $P \in C \cap D$ — точка их пересечения. Будем говорить, что кривые C и D пересекаются в P *трансверсально*, если их локальные уравнения f и g в точке P порождают максимальный идеал $\mathfrak{m}_P$ в $\mathcal{O}_{P,X}$. Отсюда следует, что в таком случае кривые C и D должны быть неособыми в P, потому что f порождает максимальный идеал P в $\mathcal{O}_{P,D} = \mathcal{O}_{P,X}/(g)$, и наоборот.

Пусть C и D — неособые кривые, пересекающиеся трансверсально в конечном числе точек $P_1, \ldots, P_r$, тогда ясно, что индекс их пересечения $C\cdot D$ должен равняться r. Этот факт вместе с некоторыми естественными свойствами, которыми должен обладать индекс пересечения, возьмем в качестве определяющих для теории пересечений на поверхности. Обозначим через $\operatorname{Div} X$ группу дивизоров на X и через $\operatorname{Pic} X$ группу обратимых пучков, с точностью до изоморфизма, которая изоморфна группе классов дивизоров по модулю линейной эквивалентности (§ 6 гл. II).

Теорема 1.1. *Для любых C, $D \in \operatorname{Div} X$ существует единственное спаривание $\operatorname{Div} X \times \operatorname{Div} X \to \mathbf{Z}$, обозначаемое через $C\cdot D$, такое, что выполняются следующие условия:*

(1) *если C и D — неособые кривые, пересекающиеся трансверсально, то $C\cdot D = \#(C \cap D)$, т. е. $C\cdot D$ равно числу точек пересечения кривых C и D;*

(2) *симметричность: $C\cdot D = D\cdot C$;*

(3) *аддитивность: $(C_1 + C_2)\cdot D = C_1\cdot D + C_2 D$;*

(4) *спаривание зависит только от классов линейной эквивалентности: если $C_1 \sim C_2$, то $C_1\cdot D = C_2\cdot D$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые предварительные результаты. Основным инструментом в доказательстве будет служить теорема Бертини, которая позволит выразить любой дивизор, с точностью до линейной эквивалентности, в виде разности неособых кривых.

Лемма 1.2. *Пусть $C_1, \ldots, C_r$ — неприводимые кривые на поверхности X и D — очень обильный дивизор. Тогда почти все кривые D' в полной линейной системе $|D|$ неприводимы, неособы и пересекают каждую из кривых C_i трансверсально.*

Доказательство. Вложим X в проективное пространство $\mathbf{P}^n$ с помощью очень обильного дивизора D. Тогда из теоремы Бертини 8.18 гл. II и замечания 7.9.1 гл. III, примененных к X и $C_1, \ldots, C_r$, получаем, что почти все $D' \in |D|$ являются неприводимыми и неособыми кривыми на X и что пересечения $C_i \cap D'$ неособы, т. е. являются точками с кратностями 1, иначе говоря, C_i и D' пересекаются трансверсально. Так как мы не предполагали, что C_i неособы, то следует воспользоваться еще 8.18.1 гл. II.

Лемма 1.3. *Пусть C — неприводимая неособая кривая на X и D — произвольная кривая, пересекающая C трансверсально. Тогда*

$$\#(C \cap D) = \deg_C(\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_C).$$

Доказательство. Здесь $\mathcal{L}(D)$ обозначает обратимый пучок, соответствующий дивизору D (см. § 7 гл. II), и $\deg_C$ обозначает степень обратимого пучка $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_C$ на кривой C (см. § 1 гл. IV). Воспользуемся тем фактом (6.18 гл. II), что

$\mathscr{L}(-D)$ является пучком идеалов кривой D на X. Поэтому после тензорного умножения на $\mathcal{O}_C$ мы получаем точную последовательность

$$0 \to \mathscr{L}(-D) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C \cap D} \to 0,$$

где $C \cap D$ обозначает теперь схемное пересечение C и D, так что $\mathscr{L}(D) \otimes \mathcal{O}_C$ — обратимый пучок на C, соответствующий дивизору $C \cap D$. Поскольку пересечение предполагается трансверсальным, то степень дивизора $C \cap D$ на C в точности равна числу точек пересечения $\#(C \cap D)$.

Доказательство теоремы 1.1. Докажем сначала единственность спаривания. Зафиксируем на X обильный дивизор H. Тогда для любых двух дивизоров C и D на X можно найти целое число $n > 0$, такое, что дивизоры $C + nH$, $D + nH$ и nH будут очень обильными. В самом деле, выберем сначала $k > 0$, такое, что пучки $\mathscr{L}(C + kH)$, $\mathscr{L}(D + kH)$ и $\mathscr{L}(kH)$ порождаются своими глобальными сечениями. Это можно сделать по определению обильности (см. § 7 гл. II). Затем выберем $l > 0$, такое, что дивизор в lH будет очень обильным (см. 7.6 гл. II). Тогда, полагая $n = k + l$, получаем, что дивизоры $C + nH$, $D + nH$ и nH также будут очень обильными (упр. 7.5 гл. II).

Теперь по лемме 1.2 можно выбрать неособые кривые

$C' \in |C + nH|$,

$D' \in |D + nH|$, трансверсальную к C',

$E' \in |nH|$, трансверсальную к D',

$F' \in |nH|$, трансверсальную к C' и E'.

Тогда $C \sim C' - E'$ и $D \sim D' - F'$, так что в силу свойств (1) — (4) теоремы 1.1 имеем

$$C \cdot D = \#(C' \cap D') - \#(C' \cap F') - \#(E' \cap D') + \#(E' \cap F').$$

Это показывает, что индекс пересечения любых двух дивизоров однозначно определяется свойствами (1) — (4), следовательно, спаривание, задаваемое индексом пересечения, единственно.

Для доказательства существования воспользуемся тем же методом, т. е. определим $C \cdot D$ с помощью предыдущего равенства и проверим корректность этого определения. Для ясности изложения доказательство проведем в два шага. Пусть $\mathfrak{P} \subset \operatorname{Div} X$ — множество очень обильных дивизоров. Тогда $\mathfrak{P}$ является конусом в том смысле, что сумма двух обильных дивизоров тоже очень обильный дивизор. Для $C, D \in \mathfrak{P}$ определим их индекс пересечения следующим образом. По лемме 1.2 выберем неособую кривую $C' \in |C|$ и неособую и трансверсальную к C' кривую $D' \in |D|$ и положим $C \cdot D = \#(C' \cap D')$.

Для проверки корректности этого определения зафиксируем сначала кривую C', и пусть $D'' \in |D|$ — другая, отличная от D', неособая кривая, трансверсальная к C'. Тогда по лемме 1.3 для D' имеем

$$\#(C' \cap D') = \deg \mathscr{L}(D') \otimes \mathcal{O}_{C'},$$

и аналогичное равенство выполняется для D''. Но $D' \sim D''$, так что $\mathscr{L}(D') \simeq \mathscr{L}(D'')$ и, стало быть, числа $\#(C' \cap D')$ и $\#(C' \cap D'')$ одинаковы. Следовательно, индекс пересечения в этом случае не зависит от выбора D'. Теперь пусть $C'' \in |C|$ — другая неособая кривая, отличная от C'. По предыдущему можно считать, что кривая D' трансверсальна как к C', так и к C''. Тогда с помощью тех же рассуждений, ограничивая все на кривую D', получаем, что $\#(C' \cap D') = \#(C'' \cap D')$.

Итак, мы имеем корректно определенное спаривание $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \to \mathbf{Z}$, которое, очевидно, симметрично и по определению зависит только от классов линейной эквивалентности дивизоров. Из 1.3 следует также, что оно аддитивно, поскольку $\mathscr{L}(D_1 + D_2) \simeq \mathscr{L}(D_1) \otimes \mathscr{L}(D_2)$ и степень дивизора аддитивна на кривой. Наконец, это спаривание на $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ удовлетворяет условию (1) по построению.

Распространим теперь это спаривание на всю группу $\operatorname{Div} X$. Пусть C и D — любые два дивизора на X. Тогда, как и выше, можно записать $C \sim C' - E'$ и $D \sim D' - F'$, где C', D', E' и F' принадлежат $\mathfrak{P}$. Поэтому можно положить

$$C \cdot D = C' \cdot D' - C' \cdot F' - E' \cdot D' + E' \cdot F'.$$

Если в этом определении взять, например, другое выражение $C \sim C'' - E''$, где C'' и E'' — также очень обильные дивизоры, то

$$C' + E'' \sim C'' + E'$$

и по свойствам спаривания на $\mathfrak{P}$ имеем

$$C' \cdot D' + E'' \cdot D' = C'' \cdot D' + E' \cdot D'$$

и аналогичное равенство справедливо, если D' заменить на F'. Таким образом, оба выражения для $C \cdot D$ оказываются в результате одинаковыми, поэтому спаривание $C \cdot D$ корректно определено на всей группе $\operatorname{Div} X$. По построению оно удовлетворяет условиям (2), (3) и (4). Для проверки условия (1) надо воспользоваться еще раз леммой 1.3. Теорема доказана.

Теперь полезно было бы иметь способ вычисления индексов пересечения, не использующий процедуру сдвига дивизоров в разность неособых кривых. Для этого определим *кратность пересечения* $(C \cdot D)_P$ кривых C и D, не имеющих общих неприводимых компонент, в точке P как *длину* k-модуля (т. е. размерность векторного пространства над k) $\mathcal{O}_{P, X}/(f, g)$, где f и g — локальные уравнения C и D в точке P (см. упр. 5.4 гл. I).

Предложение 1.4. *Пусть C и D — кривые на X, не имеющие общих неприводимых компонент, тогда*

$$C\cdot D=\sum_{P\in C\cap D}(C\cdot D)_P.$$

Доказательство. Как и в доказательстве 1.3, пусть $\mathcal{L}(D)$ — обратимый пучок, соответствующий дивизору D. Тогда имеет место точная последовательность

$$0\to\mathcal{L}(-D)\otimes\mathcal{O}_C\to\mathcal{O}_C\to\mathcal{O}_{C\cap D}\to 0,$$

где $C\cap D$ рассматривается как схема. Носитель схемы $C\cap D$ сосредоточен в точках пересечения кривых C и D, а ее структурный пучок в любой точке P имеет вид $\mathcal{O}_{P,X}/(f,\ g)$. Поэтому

$$\dim_k H^0(X,\ \mathcal{O}_{C\cap D})=\sum_{P\in C\cap D}(C\cdot D)_P.$$

С другой стороны, размерность слева можно вычислить из точной когомологической последовательности, соответствующей предыдущей точной последовательности пучков. Имеем

$$\dim H^0(X,\ \mathcal{O}_{C\cap D})=\chi(\mathcal{O}_C)-\chi(\mathcal{L}(-D)\otimes\mathcal{O}_C),$$

где, как обычно, для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$

$$\chi(\mathcal{F})=\sum(-1)^i\dim_k H^i(X,\ \mathcal{F})$$

обозначает эйлерову характеристику пучка $\mathcal{F}$ (см. упр. 5.1 гл. III).

Это показывает, что $\sum(C\cdot D)_P$ зависит только от класса линейной эквивалентности кривой D. По симметрии она зависит также только от класса линейной эквивалентности кривой C. Заменяя C и D разностями неособых трансверсальных друг другу кривых, как в доказательстве теоремы 1.1, получаем, что эта сумма равна индексу пересечения $C\cdot D$, определенному в 1.1.

Пример 1.4.1. Пусть D — произвольный дивизор на поверхности X, тогда определен его индекс *самопересечения* $D\cdot D$, обозначаемый обычно через D^2. Даже в случае, когда C — неособая кривая на X, ее индекс самопересечения C^2 не может быть вычислен непосредственно с помощью метода 1.4. Для его вычисления нужно использовать сдвиг в классе линейной эквивалентности. Однако, согласно 1.3, $C^2=\deg_C(\mathcal{F}(C)\otimes\mathcal{O}_C)$. Чтобы придать этому геометрическую интерпретацию, заметим, что пучком идеалов $\mathcal{J}$ кривой C на X является пучок $\mathcal{L}(-C)$ (см. 6.18 гл. II), и мы имеем $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\simeq\mathcal{L}(-C)\otimes\mathcal{O}_C$. Следовательно, двойственный к этому пучку, т. е. *нормальный пучок* $\mathcal{N}_{C/X}\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Hom}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2,\ \mathcal{O}_C)$ (см. § 8 гл. II), изоморфен пучку $\mathcal{L}(C)\otimes\mathcal{O}_C$. Отсюда мы получаем, что $C^2=\deg_C\mathcal{N}_{C/X}$.

Пример 1.4.2. Пусть $X=\mathbf{P}^2$. Тогда $\mathrm{Pic}\,X\simeq\mathbf{Z}$, и пусть h — класс прямой в $\mathrm{Pic}\,X$. Так как все прямые линейно эквивалентны и так как две различные прямые пересекаются в одной точке, то $h^2=1$. По линейности это задает спаривание на всей группе $\mathrm{Pic}\,X$. Таким образом, если C и D — кривые степеней n и m соответственно, то $C\sim nh$ и $D\sim mh$, поэтому $C\cdot D=nm$. Если кривые C и D не имеют общих компонент, то их индекс пересечения $C\cdot D$ можно представить как сумму локальных кратностей пересечений (см. 1.4) и получить тем самым новое доказательство теоремы Безу (7.8 гл. I).

Пример 1.4.3. Пусть X — неособая квадрика в $\mathbf{P}^3$. Тогда $\mathrm{Pic}\,X\simeq\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ (см. 6.6.1 гл. II) и в качестве образующих этой группы можно взять классы прямых l типа $(1,\ 0)$ и m типа $(0,\ 1)$ из двух различных семейств прямых на X. Тогда $l^2=0$, $m^2=0$ и $l\cdot m=1$, поскольку прямые из одного семейства не пересекаются, а из разных — пересекаются по одной точке. Это определяет спаривание на всей группе $\mathrm{Pic}\,X$. Например, пусть C — кривая типа $(a,\ b)$, а D — кривая типа $(a',\ b')$, тогда $C\cdot D=ab'+a'b$.

Пример 1.4.4. С помощью индекса самопересечения можно определить еще один численный инвариант поверхности. А именно, пусть $\Omega_{X/k}$ — пучок дифференциалов на X над k и $\omega_X=\bigwedge^2\Omega_{X/k}$ — *канонический пучок* на X, определенный в § 8 гл. II. Любой дивизор K в классе линейной эквивалентности дивизоров, соответствующем пучку ω_X, называется *каноническим дивизором*. Тогда индекс самопересечения K^2 канонического дивизора K зависит только от X и, следовательно, определяет новый численный инвариант X. Например, пусть $X=\mathbf{P}^2$, тогда $K=-3h$ и $K^2=9$. В случае когда X — квадрика в $\mathbf{P}^3$ (см. 1.4.3), K имеет тип $(-2,\ -2)$ (см. упр. 8.4 гл. II), так что $K^2=8$.

Предложение 1.5 (формула присоединения). *Пусть C — неособая кривая рода g на поверхности X и K — канонический дивизор на X, тогда имеет место следующая формула* (*присоединения*):

$$2g-2=C\cdot(C+K).$$

Доказательство. Согласно 8.20 гл. II, имеем $\omega_C\simeq\omega_X\otimes\mathcal{L}(C)\otimes\mathcal{O}_C$. По 1.3.3 гл. IV степень ω_C равна $2g-2$. С другой стороны, по 1.3 имеем

$$\deg_C(\omega_X\otimes\mathcal{L}(C)\otimes\mathcal{O}_C)=C\cdot(C+K),$$

что доказывает требуемую формулу.

Пример 1.5.1. Формула присоединения дает быстрый способ вычисления рода кривой на поверхности. Например, пусть C —

кривая степени d на $\mathbf{P}^2$, тогда

$$2g-2=d(d-3),$$

откуда $g={}^1/_2(d-1)(d-2)$. Ср. упр. 8.4 гл. II.

Пример 1.5.2. Пусть C — кривая типа (a, b) на квадрике в $\mathbf{P}^3$, тогда дивизор $C+K$ имеет тип $(a-2, b-2)$ и

$$2g-2=a(b-2)+(a-2)b,$$

откуда $g=ab-a-b+1$. Ср. упр. 5.6 гл. III.

Теперь докажем теорему Римана — Роха на поверхности. Для любого дивизора D на поверхности X положим $l(D)=\dim_k H^0(X, \mathscr{L}(D))$. Тогда $l(D)=\dim|D|+1$, где $|D|$ обозначает полную линейную систему дивизора D. Определим *сверхизбыточность* $s(D)$ как $\dim H^1(X, \mathscr{L}(D))$. Этот термин был введен до появления когомологий, когда формула Римана — Роха записывалась в виде неравенства, содержащего с левой стороны только члены $l(D)$ и $l(K-D)$: сверхизбыточность — это тот излишек, который препятствовал выполнению равенства. Напомним, что арифметический род p_a многообразия X определяется формулой $p_a=\chi(\mathcal{O}_X)-1$ (см. упр. 5.3 гл. III).

Теорема 1.6 (Римана — Роха). *Пусть D — любой дивизор на поверхности X, тогда имеет место равенство*

$$l(D)-s(D)+l(K-D)=\frac{1}{2}D\cdot(D-K)+1+p_a.$$

Доказательство. По двойственности Серра (7.7 гл. III) имеем

$$l(K-D)=\dim H^0(X, \mathscr{L}(D)^{\check{}}\otimes\omega_X)=\dim H^2(X, \mathscr{L}(D)).$$

Тогда левая сторона доказываемой формулы — это в точности эйлерова характеристика пучка $\mathscr{L}(D)$, так что нужно доказать равенство

$$\chi(\mathscr{L}(D))=\frac{1}{2}D\cdot(D-K)+1+p_a.$$

Поскольку обе стороны этого равенства зависят только от класса линейной эквивалентности, то, как и в 1.1, мы можем представить D в виде разности $C-E$ двух неособых кривых. Теперь займемся вычислениями. Пучки $\mathscr{L}(-C)$ и $\mathscr{L}(-E)$ являются пучками идеалов для C и E соответственно, поэтому после тензорного умножения на $\mathscr{L}(C)$ мы получаем следующие две точные последовательности:

$$0\to\mathscr{L}(C-E)\to\mathscr{L}(C)\to\mathscr{L}(C)\otimes\mathcal{O}_E\to 0,$$

$$0\to\mathcal{O}_X\to\mathscr{L}(C)\to\mathscr{L}(C)\otimes\mathcal{O}_C\to 0.$$

Так как эйлерова характеристика χ аддитивна на коротких точных последовательностях (см. упр. 5.1 гл. III), то мы имеем

$$\chi(\mathscr{L}(C-E))=\chi(\mathcal{O}_X)+\chi(\mathscr{L}(C)\otimes\mathcal{O}_C)-\chi(\mathscr{L}(C)\otimes\mathcal{O}_E).$$

Здесь $\chi(\mathcal{O}_X)=1+p_a$ по определению p_a. Далее по теореме Римана — Роха для кривых C и E (см. 1.3 гл. IV) и по формуле из 1.3 для степени находим, что

$$\chi(\mathscr{L}(C)\otimes\mathcal{O}_C)=C^2+1-g_C$$

$$\chi(\mathscr{L}(C)\otimes\mathcal{O}_E)=C\cdot E+1-g_E.$$

Наконец, по формуле присоединения вычислим род кривых C и E:

$$g_C=\frac{1}{2}C\cdot(C+K)+1,$$

$$g_E=\frac{1}{2}E\cdot(E+K)+1.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для эйлеровых характеристик, получаем

$$\chi(\mathscr{L}(C-E))=\frac{1}{2}(C-E)\cdot(C-E-K)+1+p_a,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1.6.1. Существует еще одна формула, которая иногда рассматривается как часть теоремы Римана — Роха, а именно

$$12(1+p_a)=K^2+c_2,$$

где c_2 — второй класс Чженя касательного пучка на X. Она является следствием теоремы Римана — Роха в обобщенном варианте Гротендика — Хирцебруха (см. добавление А, 4.1.2).

В качестве первых приложений теоремы Римана — Роха докажем теорему Ходжа об индексе и критерий обильности Накаи.

Замечание 1.6.2. Для дальнейшего отметим, что если на поверхности X фиксирован очень обильный дивизор H, то для всякой кривой C на X индекс пересечения $C\cdot H$ — это не что иное, как степень C в проективном вложении, определяемом дивизором H (упр. 1.2). В частности, $C\cdot H$ всегда положительно. Более общо, если H — фиксированный обильный дивизор на X, то число $C\cdot H$ играет роль, аналогичную степени дивизора на кривой.

Лемма 1.7. *Пусть H — обильный дивизор на поверхности X. Тогда существует целое n_0, такое, что для любого дивизора D $H^2(X, \mathscr{L}(D))=0$, если $D\cdot H>n_0$.*

Доказательство. По двойственности Серра на X для любого D имеем $\dim H^2(X, \mathcal{L}(D)) = l(K - D)$. Если $l(K - D) > 0$, то дивизор $K - D$ эффективен, поэтому $(K - D)H > 0$, т. е. $D \cdot H < K \cdot H$. Возьмем $n_0 = K \cdot H$, тогда утверждение леммы будет, очевидно, выполняться.

Замечание 1.7.1. Это утверждение можно рассматривать как аналог того, что если на кривой X $\deg D > n_0 = 2g_X - 2$, то $H^1(X, \mathcal{L}(D)) = 0$ (1.3.4 гл. IV).

Следствие 1.8. *Пусть H — обильный дивизор на X и D — дивизор с $C \cdot H > 0$ и $D^2 > 0$. Тогда для всех $n \gg 0$ дивизор nD эффективен.*

Доказательство. Применим теорему Римана — Роха к дивизору nD. Так как $D \cdot H > 0$, то $nD \cdot H > n_0$ для достаточно больших n, так что по 1.7 $l(K - nD) = 0$. Далее, так как $s(n \cdot D) \geqslant 0$, то по теореме Римана — Роха

$$l(nD) \geqslant \frac{1}{2} n^2 D^2 - \frac{1}{2} nD \cdot K + 1 + p_a.$$

Поскольку теперь $D^2 > 0$, то правая сторона при больших n растет, поэтому $l(nD) \to \infty$ при $n \to \infty$. В частности, дивизор nD эффективен для всех $n \gg 0$.

Определение. Дивизор D на поверхности X называется *численно эквивалентным нулю*, что записывается как $D \equiv 0$, если $D \cdot E = 0$ для всех дивизоров E. Дивизоры D и E называются *численно эквивалентными*, $D \equiv E$, если $D - E \equiv 0$.

Теорема 1.9 (теорема Ходжа об индексе). *Пусть H — обильный дивизор на поверхности X и D — дивизор, численно не эквивалентный нулю и такой, что $D \cdot H = 0$. Тогда $D^2 < 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $D^2 \geqslant 0$, и рассмотрим два случая. Пусть сначала $D^2 > 0$ и $H' = D + nH$. Тогда для $n \gg 0$ дивизор H' обилен, как и в доказательстве 1.1. Более того, $D \cdot H' = D^2 > 0$, поэтому по 1.8 mD эффективен для всех $m \gg 0$. Но тогда $mD \cdot H > 0$ (так как $mD \cdot nD > 0$ в проективном вложении, определяемом nH), следовательно, $D \cdot H > 0$. Противоречие!

Пусть теперь $D^2 = 0$, тогда из условия $D \not\equiv 0$ вытекает, что существует дивизор E с $D \cdot E \neq 0$. Заменяя E на $E' = (H^2)E - (E \cdot H)H$, можно считать, кроме того, что $E \cdot H = 0$. Положим $D' = nD + E$. Тогда $D' \cdot H = 0$ и $D'^2 = 2nD \cdot E + E^2$. Так как $D \cdot E \neq 0$, то при подходящем выборе $n \in \mathbf{Z}$ можно сделать $D'^2 > 0$. Но тогда рассуждения из первого случая, примененные к дивизору D', снова приводят к противоречию. Теорема доказана.

Замечание 1.9.1. Поясним название этой теоремы. Пусть $\mathrm{Pic}^n X$ — подгруппа в $\mathrm{Pic}\, X$, состоящая из классов дивизоров, численно эквивалентных нулю, и $\mathrm{Num}\, X = \mathrm{Pic}\, X/\mathrm{Pic}^n X$. Тогда, очевидно, индекс пересечения индуцирует невырожденное билинейное спаривание $\mathrm{Num}\, X \times \mathrm{Num}\, X \to \mathbf{Z}$. Из теоремы Нерона — Севери (упр. 1.7) следует, что $\mathrm{Num}\, X$ является свободной абелевой группой конечного ранга (см. также упр. 1.8), так что $\mathrm{Num}\, X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$ с индуцированной билинейной формой на нем. По теореме Сильвестра (Ленг [2, гл. XIV, § 7]) эта билинейная форма может быть приведена к сумме квадратов с коэффициентами ± 1. Разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов называется *сигнатурой* или *индексом* билинейной формы. В нашем случае теорема 1.9 утверждает, что приведенное к диагональному виду билинейное спаривание пересечения имеет один положительный квадрат, соответствующий (вещественному) кратному H, а все остальные — отрицательные квадраты.

Пример 1.9.2. На квадрике X в $\mathbf{P}^3$ (см. 1.4.3) возьмем в качестве H дивизор типа $(1, 1)$ и в качестве D дивизор типа $(1, -1)$. Тогда $H^2 = 2$, $H \cdot D = 0$, $D^2 = -2$ и D, H образуют базис в $\mathrm{Pic}\, X$. В этом случае численно эквивалентным нулю дивизором является только 0, так что $\mathrm{Pic}\, X = \mathrm{Num}\, X$. Спаривание на $\mathrm{Num}\, X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ диагонализируется выбором базиса $(1/\sqrt{2})H$, $(1/\sqrt{2})D$.

Теорема 1.10 (критерий Накаи — Мойшезона). *Дивизор D на поверхности X обилен тогда и только тогда, когда $D^2 > 0$ и $C \cdot D > 0$ для всех неприводимых кривых C на X.*

Доказательство. Эти условия, очевидно, необходимы, поскольку если D обилен, то mD очень обилен для некоторого $m > 0$ и тогда m^2D^2 — это степень X в соответствующем проективном вложении, а $mD \cdot C$ — степень кривой C, и обе они должны быть положительными (см. упр. 1.2).

Обратно, предположим, что $D^2 > 0$ и $D \cdot C > 0$ для всякой неприводимой кривой C. Пусть H — очень обильный дивизор на X, тогда H эквивалентен некоторой неприводимой кривой и $D \cdot H > 0$ по предположению. Поэтому по 1.8 некоторое кратное mD для $m > 0$ является эффективным дивизором. Заменяя D на mD, можно считать, следовательно, что дивизор D эффективен, т. е. D — кривая на X, возможно особая, приводимая и неприведенная.

Далее положим $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$. Покажем сначала, что пучок $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ обилен на схеме D. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_{\mathrm{red}}}$ обилен на соответствующей приведенной схеме D_{red} (см. упр. 5.7 гл. III), и если D_{red} есть объединение неприводимых кривых $C_1, \ldots, C_r$, то достаточно показать, что $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i}$

обилен на каждой из C_i (см. там же). Наконец, если $f\colon \tilde{C}_i \to C_i$ — нормализация C_i, то, поскольку f — конечный сюръективный морфизм, достаточно показать, что $f^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i})$ обилен на $\tilde{C}_i$ (см. там же). Но $\deg f^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i})$ равна $D \cdot C_i > 0$, поскольку $\mathcal{L}$ можно представить разностью двух неособых кривых, пересекающихся с C_i трансверсально, так что индекс пересечения $D \cdot C_i$ будет сохраняться при взятии f^*. Поскольку этот индекс положителен, то пучок $f^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i})$ обилен на неособой кривой $\tilde{C}_i$ (см. 3.3 гл. IV). Следовательно, пучок $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ обилен на D.

Теперь докажем, что пучок $\mathcal{L}^n$ порождается своими глобальными сечениями для $n \gg 0$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

Умножая ее тензорно на $\mathcal{L}^n$ и переходя к когомологиям, получаем следующую точную последовательность:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{L}^{n-1}) \to H^0(X, \mathcal{L}^n) \to H^0(D, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D) \to$$
$$\to H^1(X, \mathcal{L}^{n-1}) \to H^1(X, \mathcal{L}^n) \to H^1(D, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D) \to \dots .$$

Здесь $H^1(D, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D) = 0$ для $n \gg 0$, поскольку пучок $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ обилен на D (см. 5.3 гл. III). Поэтому для каждого $n \gg 0$ имеем

$$\dim H^1(X, \mathcal{L}^n) \leqslant \dim H^1(X, \mathcal{L}^{n-1}).$$

Так как размерности этих пространств конечны, то в действительности они должны быть равными. Следовательно, отображение $H^0(X, \mathcal{L}^n) \to H^0(D, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D)$ сюръективно для всех $n \gg 0$. Снова в силу обильности $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ на D пучок $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D$ порождается своими глобальными сечениями для всех $n \gg 0$. Эти сечения поднимаются до глобальных сечений пучка $\mathcal{L}^n$ на X, как только что было показано, поэтому по лемме Накаямы глобальные сечения пучка $\mathcal{L}^n$ порождают его слой в каждой точке D. Но поскольку $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$, то существует его сечение, которое обращается в нуль только вдоль дивизора D, так что в действительности $\mathcal{L}^n$ порождается своими глобальными сечениями всюду.

Зафиксируем n, такое, что $\mathcal{L}^n$ порождается своими сечениями, и рассмотрим морфизм $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^N$, определяемый пучком $\mathcal{L}_N$ (см. 7.1 гл. II). Покажем, что φ имеет конечные слои. Если это не так, то в X должна существовать неприводимая кривая C, такая, что $\varphi(C)$ — точка. В таком случае прообраз гиперплоского сечения в $\mathbf{P}^N$, не проходящего через эту точку, будет эффективным дивизором $E \sim nD$ с $E \cap C = \varnothing$, так что $E \cdot C = 0$. Это противоречит предположению $D \cdot C > 0$ для всех C. Итак, доказано, что слои морфизма φ конечны.

В действительности, как следует из теоремы о разложении Штейна (11.5 гл. III), φ в этом случае является конечным морфизмом (упр. 11.2 гл. III). Следовательно, пучок $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{L}^n$ обилен на X по упр. 5.7 гл. III и тем самым доказана обильность дивизора D.

Пример 1.10.1. На квадрике X в $\mathbf{P}^3$ (см. 1.4.3) эффективные дивизоры — это дивизоры типа (a, b) с $a, b \geqslant 0$. Поэтому дивизор D типа (a, b) обилен тогда и только тогда, когда $a = D \cdot (1, 0) > 0$ и $b = D \cdot (0, 1) > 0$ (см. 7.6.2 гл. II). В этом случае условие $D \cdot C > 0$ для всех неприводимых кривых влечет за собой условие $D^2 > 0$. Однако имеется пример, принадлежащий Мамфорду, когда для дивизора D на поверхности X выполняется условие $D \cdot C > 0$ для каждой неприводимой кривой C, но $D^2 = 0$, следовательно, D в этом случае не является обильным. См. Хартсхорн [5, гл. I, 10.6].

Ссылки для § 1. Другой подход к теории пересечения на поверхности имеется в книге Мамфорда [2]. Наше доказательство теоремы Римана — Роха следует доказательству в книге Серра [7, гл. IV, 8]. Доказательство теоремы Ходжа об индексе принадлежит Гротендику [2]. Критерий обильности дивизора был установлен Накаи [1] и независимо Мойшезоном [1]. По поводу теории пересечения и теоремы Римана — Роха в высших размерностях см. добавление А.

Упражнения

1.1. Пусть C, D — два дивизора на поверхности X и $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ — соответствующие им обратимые пучки. Показать, что тогда

$$C \cdot D = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}^{-1}) - \chi(\mathcal{M}^{-1}) + \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}).$$

1.2. Пусть H — очень обильный дивизор на поверхности X, соответствующий проективному вложению $X \subset \mathbf{P}^N$. Запишем многочлен Гильберта X (упр. 5.2 гл. III) в виде

$$P(z) = \frac{1}{2} az^2 + bz + c.$$

Показать, что тогда $a = H^2$, $b = {}^1/_2 H^2 + 1 - \pi$, где π — род неособой кривой, представляющей H, и $c = 1 + p_a$. Таким образом, степень поверхности X в $\mathbf{P}^N$, определенная как в § 7 гл. I,— это не что иное, как H^2. Показать также, что *степень* любой кривой C на X в $\mathbf{P}^N$ равна индексу пересечения $C \cdot H$.

1.3. Напомним, что *арифметический род* проективной схемы D размерности 1 определяется формулой $p_a = 1 - \chi(\mathcal{O}_D)$ (см. упр. 5.3 гл. III).

(a) Пользуясь теоремой Римана — Роха, показать, что если D — эффективный дивизор на поверхности X, то $2p_a - 2 = D \cdot (D + K)$.

(b) Показать, что $p_a(D)$ зависит только от класса линейной эквивалентности дивизора D на X.

(c) Более общим образом, для любого дивизора D на X определим его *виртуальный арифметический род* p_a (который для эффективного дивизора D будет совпадать с обычным арифметическим родом D) той же формулой: $2p_a - 2 = D\cdot(D + K)$. Показать, что для любых дивизоров C, D на X имеют место формулы

$$p_a(-D) = D^2 - p_a(D) + 2,$$
$$p_a(C + D) = p_a(C) + p_a(D) + C\cdot D - 1.$$

1.4. (a) Пусть поверхность X степени d в $\mathbf{P}^3$ содержит прямую $C = \mathbf{P}^1$. Показать, что тогда $C^2 = 2 - d$.

(b) Пусть char $k = 0$. Показать, что для каждого $d \geqslant 1$ существует неособая поверхность X степени d в $\mathbf{P}^3$, содержащая прямую $x = y = 0$.

1.5. (a) Показать, что для поверхности X степени d в $\mathbf{P}^3$ $K^2 = d\,(d-4)^2$.

(b) Пусть X — произведение двух неособых кривых C и C' родов g и g' соответственно. Показать, что тогда $K^2 = 8\,(g-1)\,(g'-1)$. Ср. упр. 8.3 гл. II.

1.6. (a) Показать, что если C — кривая рода g, то индекс самопересечения диагонали $\Delta \subset C \times C$ равен $2 - 2g$. (Воспользоваться определением $\Omega_{C/k}$ из § 8 гл. II.)

(b) Пусть $l = C \times \mathrm{pt}$ и $m = \mathrm{pt} \times C$, где pt обозначает одну точку. Показать, что l, m и Δ линейно независимы в Num $(C \times C)$. Поэтому ранг Num $(C \times C)$ больше либо равен 3 и, в частности, Pic $(C \times C) \neq p_1^*$ Pic $C \oplus$ $\oplus\, p_2^*$ Pic C. Ср. упр. 12.6 гл. III и упр. 4.10 гл. IV.

1.7. *Алгебраическая эквивалентность дивизоров.* Пусть X — некоторая поверхность. Напомним, что алгебраическое семейство эффективных дивизоров на X, параметризованных неособой кривой T, определяется как эффективный дивизор Картье D на $X \times T$, плоский над T (см. 9.8.5 гл. III). В этом случае для любых двух замкнутых точек $0, 1 \in T$ мы будем говорить, что соответствующие дивизоры D_0, D_1 на X *предалгебраически эквивалентны*. Два произвольных дивизора будем называть *предалгебраически эквивалентными*, если они отличаются на предалгебраически эквивалентные эффективные дивизоры. Дивизоры D и D' называются *алгебраически эквивалентными*, если существует конечная последовательность $D = D_0, D_1, \ldots, D_n = D'$, в которой дивизоры D_i и D_{i+1} для каждого i предалгебраически эквивалентны.

(a) Показать, что алгебраически эквивалентные нулю дивизоры образуют подгруппу в группе Div X.

(b) Показать, что линейно эквивалентные дивизоры являются также и алгебраически эквивалентными. [*Указание.* Рассмотреть главный дивизор $(tf - u)$ на $X \times \mathbf{P}^1$, где t, u — однородные координаты на $\mathbf{P}^1$.]

(c) Показать, что алгебраически эквивалентные дивизоры являются также и численно эквивалентными. [*Указание.* Используя 9.9 гл. III, показать, что для любого очень обильного дивизора H, если дивизоры D и D' алгебраически эквивалентны, то $D\cdot H = D'\cdot H$.]

Замечание. Теорема Нерона — Севери утверждает, что группа классов дивизоров относительно алгебраической эквивалентности, так называемая группа *Нерона — Севери*, является конечно порожденной абелевой группой. Над полем $\mathbf{C}$ это может быть легко доказано с помощью трансцендентных методов (добавление B, § 5) или как в упр. 1.8 ниже. Доказательство над полем произвольной характеристики см. Ленг и Нерон [1], дальнейшие обсуждения см. Хартсхорн [6]. Поскольку Num X является факторгруппой группы Нерона — Севери, то она также конечно порождена и, следовательно, свободна, потому что она не имеет кручений по построению.

1.8. *Класс когомологий дивизора.* Для любого дивизора D на X определим его класс когомологий $c\,(D) \in H^1(X, \Omega_X)$, используя изоморфизм Pic $X \cong$ $\cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ (см. упр. 4.5 гл. III) и гомоморфизм пучков $d\log\colon \mathcal{O}^* \to \Omega_X$ (см. упр. 7.4c гл. III). Таким образом, мы получаем гомоморфизм групп c: Pic $X \to H^1(X, \Omega_X)$. С другой стороны, пространство $H^1(X, \Omega_X)$ двойственно самому себе по двойственности Серра (7.13 гл. III), так что мы имеем невырожденное билинейное спаривание

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H^1(X, \Omega_X) \times H^1(X, \Omega_X) \to k.$$

(a) Доказать, что это спаривание согласовано с индексом пересечения в следующем смысле: для любых дивизоров D, E на X имеет место равенство в k

$$\langle c\,(D),\ c\,(E)\rangle = D\cdot E\cdot 1.$$

[*Указание.* Свести к случаю, когда D и E — неособые кривые, пересекающиеся трансверсально. Затем рассмотреть аналогичное отображение c: Pic $D \to$ $\to H^1(D, \Omega_D)$ и воспользоваться тем фактом, что c отображает класс точки в 1 при естественном изоморфизме $H^1(D, \Omega_D) \cong k$.]

(b) Пусть char $k = 0$. Пользуясь тем, что $H^1(X, \Omega_X)$ — конечномерное векторное пространство, показать, что Num X является конечно порожденной свободной абелевой группой.

1.9. (a) Показать, что если H — обильный, а D — произвольный дивизоры на X, то

$$(D^2)(H^2) \leqslant (D\cdot H)^2.$$

(b) Пусть теперь X является произведением двух кривых $X = C \times C'$, $l = C \times \mathrm{pt}$ и $m = \mathrm{pt} \times C'$. Для любого дивизора D на X пусть $a = D\cdot l$ и $b = D\cdot m$. В таком случае будем говорить, что D имеет *тип* (a, b). Показать, что если D — дивизор типа (a, b) с $a, b \in \mathbb{Z}$, то

$$D^2 \leqslant 2ab$$

и равенство выполняется тогда и только тогда, когда $D \equiv bl + am$. [*Указание.* Показать, что дивизор $H = bl + am$ обилен, и воспользоваться упражнением (a). Это неравенство принадлежит Кастельнуово и Севери. См. Гротендик [2].]

1.10. *Доказательство А. Вейля* [2] *аналога гипотезы Римана для кривых.* Пусть C — кривая рода g, определенная над конечным полем $\mathbf{F}_q$, и N — число точек C, рациональных над $\mathbf{F}_q$. Тогда $N = 1 - a + q$, где $|a| \leqslant$ $\leqslant 2g\sqrt{q}$. Чтобы это доказать, рассмотрим C как кривую над алгебраическим замыканием k поля $\mathbf{F}_q$. Пусть $f\colon C \to C$ — k — линейный морфизм Фробениуса возвышения в q-ю степень; это имеет смысл, поскольку C определена над $\mathbf{F}_q$, так что $C_q \cong C$ (см. 2.4.1 гл. IV). Пусть $\Gamma \subset C \times C$ — график морфизма f и $\Delta \subset C \times C$ — диагональ. Показать, что $\Gamma^2 = q\,(2 - 2g)$ и $\Gamma\cdot\Delta = N$. Затем, применяя упр. 1.9 к $D = r\Gamma + s\Delta$ для любых r и, получить требуемое неравенство. Дальнейшую интерпретацию этого результата см. в упр. 5.7 добавления C.

1.11. В этом упражнении предполагается, что X — поверхность, для которой группа Num X конечно порождена (т. е. любая поверхность, если принять на веру теорему Нерона — Севери, см. упр. 1.7).

(a) Пусть H — обильный дивизор на X и $d \in \mathbf{Z}$. Показать, что множество эффективных дивизоров D с $D\cdot H = d$ по модулю численной эквивалентности конечно. [*Указание.* Воспользоваться формулой присоединения, тем, что для неприводимой кривой $p_a \geqslant 0$, и тем, что билинейная форма индекса пересечения отрицательно определена на $H^\perp$ в Num X.]

(b) Пусть теперь C — кривая рода $g \geqslant 2$. Используя утверждение (a), показать, что группа автоморфизмов C конечна. Для этого рассмотреть график $\Gamma \subset X = C \times C$ любого автоморфизма σ кривой C и показать, что если $\Gamma \equiv \Delta$, то $\Gamma = \Delta$, пользуясь тем, что $\Delta^2 < 0$ при $g \geqslant 2$ (упр. 1.6). Затем воспользоваться утверждением (a). Ср. упр. 2.5 гл. IV.

1.12. Показать, что если D — обильный дивизор на поверхности X и $D' \equiv$ $\equiv D$, то D' также обилен. Привести пример, показывающий, что D' может не быть очень обильным, если D очень обилен.

§ 2. Линейчатые поверхности

В этом параграфе иллюстрируются некоторые общие положения, развитые в § 1, применительно к изучению класса линейчатых поверхностей. Используя также некоторые результаты из теории кривых, мы получаем достаточно полное и точное описание таких поверхностей и кривых, лежащих на них.

Начнем с установления общих свойств линейчатых поверхностей. Затем мы определим для них инвариант e и приведем несколько примеров. После этого дадим классификацию эллиптических линейчатых поверхностей, подробно опишем рациональные линейчатые поверхности и охарактеризуем обильные дивизоры на линейчатой поверхности произвольного рода.

Определение. *Геометрически линейчатой* (или просто *линейчатой*) *поверхностью* называется поверхность X вместе с сюръективным морфизмом $\pi: X \to C$ на (неособую) кривую C, такая, что для каждой точки $y \in C$ слой X_y изоморфен $\mathbf{P}^1$ и морфизм π обладает сечением (т. е. существует морфизм $\sigma: C \to X$ с $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_C$).

Замечание. В действительности, используя теорему Цзена, можно показать, что существование сечения является следствием остальных требований определения, см., например, Шафаревич и др. [1].

Пример 2.0.1. Пусть C — кривая, тогда $C \times \mathbf{P}^1$ с проекцией на первый сомножитель является, очевидно, линейчатой поверхностью. В частности, квадрика в $\mathbf{P}^3$ имеет две структуры линейчатой поверхности. Говоря о линейчатой поверхности, мы подразумеваем, что для нее заданы π и C.

Лемма 2.1. *Пусть $\pi: X \to C$ — линейчатая поверхность, D — дивизор на X, и предположим, что $D \cdot f = n \geqslant 0$, где f — слой морфизма π. Тогда $\pi_* \mathscr{L}(D)$ является локально свободным пучком ранга $n+1$ на C. В частности, $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что все слои морфизма π алгебраически эквивалентны как дивизоры на X, поскольку они параметризованы кривой C. Следовательно, они являются также и численно эквивалентными (упр. 1.7), поэтому $D \cdot f$ не зависит от выбора слоя.

Теперь для любой точки $y \in C$ рассмотрим пучок $\mathscr{L}(D)_y$ на слое X_y — это обратимый пучок степени n на $X_y \simeq \mathbf{P}^1$, так что $\dim H^0(\mathscr{L}(D)_y) = n+1$. Поскольку это не зависит от y, то по теореме Грауэрта (12.9 гл. III) пучок $\pi_* \mathscr{L}(D)$ локально свободен и имеет ранг $n+1$.

В случае $D = 0$ пучок $\pi_* \mathcal{O}_X$ локально свободен ранга 1. Но тогда по 12.9 гл. III естественное отображение

$$\pi_* \mathcal{O}_X \otimes k(y) \to H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$$

является изоморфизмом для каждого y. Пространство справа здесь изоморфно k. Следовательно, образ глобального сечения 1 пучка $\mathcal{O}_C$ при структурном отображении $\mathcal{O}_C \to \pi_* \mathcal{O}_X$ порождает слой в каждой точке $y \in C$. Это показывает, что $\pi_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_C$.

Предложение 2.2. *Пусть $\pi: X \to C$ — линейчатая поверхность, тогда существует локально свободный пучок $\mathscr{E}$ ранга 2 на C, такой, что $X \simeq \mathbf{P}(\mathscr{E})$ над C (определение $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ см. в § 7 гл. II). Обратно, каждая такая схема $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ является линейчатой поверхностью над C. Если $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ — два локально свободных пучка ранга 2 на C, то $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ и $\mathbf{P}(\mathscr{E}')$ изоморфны как линейчатые поверхности тогда и только тогда, когда существует обратимый пучок $\mathscr{L}$ на C, такой, что $\mathscr{E}' \simeq \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}$.*

Доказательство. По определению линейчатая поверхность $\pi: X \to C$ обладает сечением σ. Пусть $D = \sigma(C)$, тогда D — дивизор на X и $D \cdot f = 1$ для любого слоя f. По предыдущей лемме $\mathscr{E} = \pi_* \mathscr{L}(D)$ — локально свободный пучок ранга 2 на C. Более того, существует естественное отображение $\pi^* \mathscr{E} = \pi^* \pi_* \mathscr{L}(D) \to \mathscr{L}(D)$ на X. Оно сюръективно. Действительно, по лемме Накаямы достаточно проверить это на любом слое X_y. Но $X_y \simeq \mathbf{P}^1$ и $\mathscr{L}(D)$ — обратимый пучок степени 1, который порождается своими глобальными сечениями. Тогда отображение $\mathscr{E} \otimes k(y) \to H^0(\mathscr{L}(D)_y)$ сюръективно по 12.9 гл. III.

Теперь из 7.12 гл. II мы выводим, что сюръекция $\pi^* \mathscr{E} \to \mathscr{L}(D) \to 0$ определяет морфизм $g: X \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ над C с $\mathscr{L}(D) \simeq g^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$. Так как $\mathscr{L}(D)$ очень обилен на каждом слое, то g — изоморфизм на каждом слое и, следовательно, является изоморфизмом всюду.

Обратно, пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга 2 на C, $X = \mathbf{P}(\mathscr{E})$ и $\pi: X \to C$ — естественная проекция. Тогда X — неособая проективная поверхность над k и каждый слой π изоморфен $\mathbf{P}^1$. Для того чтобы доказать существование сечения, рассмотрим открытое подмножество $U \subset C$, на котором $\mathscr{E}$ свободен. Тогда $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbf{P}^1$, поэтому можно определить сечение $\sigma: U \to \pi^{-1}(U)$ формулой $y \mapsto y \times \mathrm{pt}$. Тогда поскольку X проективно, то по 6.8 гл. I это сечение однозначно продолжается до отображения $\sigma: C \to X$, которое обязательно должно быть сечением морфизма π.

Для доказательства последнего утверждения см. упр. 7.9 гл. II.

Замечание 2.2.1. Поверхность X называется *бирационально линейчатой*, если она бирационально эквивалентна произведению $C \times \mathbf{P}^1$ для некоторой кривой C. (Сюда входят и рациональные поверхности, поскольку $\mathbf{P}^2$ бирационально $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.) Из 2.2 следует, что всякая линейчатая поверхность является и бирационально линейчатой.

Предложение 2.3. *Пусть π: $X \to C$ — линейчатая поверхность, $C_0 \subset X$ — ее сечение и f — ее слой. Тогда*

$$\operatorname{Pic} X \simeq \mathbf{Z} \oplus \pi^* \operatorname{Pic} C,$$

где группа $\mathbf{Z}$ порождена классом сечения C_0, и

$$\operatorname{Num} X \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$$

с образующими C_0 и f, которые удовлетворяют условиям $C_0 \cdot f = 1$ и $f^2 = 0$.

Доказательство. Очевидно, что $C_0 \cdot f = 1$, потому что C_0 и f пересекаются только по одной точке и пересечение трансверсально. Далее, так как два различных слоя не пересекаются, то $f^2 = 0$.

Теперь если $D \in \operatorname{Pic} X$, то пусть $n = D \cdot f$ и $D' = D - nC_0$. Тогда $D' \cdot f = 0$. Следовательно, по 2.1 $\pi_* \mathcal{L}(D')$ — обратимый пучок на C и, очевидно, $\mathcal{L}(D') \simeq \pi^* \pi_* (\mathcal{L}(D'))$. Так как отображение π^*: $\operatorname{Pic} C \to \operatorname{Pic} X$, очевидно, инъективно, то отсюда следует, что $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbf{Z} \oplus \pi^* \operatorname{Pic} C$. Далее, поскольку все слои численно эквивалентны между собой, то $\operatorname{Num} X \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ порождено C_0 и f. См. также упр. 7.9 гл. II и упр. 12.5 гл. III.

Лемма 2.4. *Пусть D — дивизор на линейчатой поверхности X, и предположим, что $D \cdot f \geqslant 0$. Тогда $R^i \pi_* \mathcal{L}(D) = 0$ при $i > 0$ и для всех i имеет место изоморфизм*

$$H^i(X, \mathcal{L}(D)) \simeq H^i(C, \pi_* \mathcal{L}(D)).$$

Доказательство. Так как $\mathcal{L}(D)_y$ — обратимый пучок на $X_y \simeq \mathbf{P}^1$ степени, равной $D \cdot f \geqslant 0$, то $H^i(X_y, \mathcal{L}(D)_y) = 0$ для всех $i > 0$. Поэтому $R^i \pi_* \mathcal{L}(D) = 0$ при $i > 0$ (см. упр. 11.8 гл. III и 12.9 гл. III). Второе утверждение леммы следует из упр. 8.1 гл. III.

Следствие 2.5. *Пусть род кривой C равен g, тогда $p_a(X) = -g$, $p_g(X) = 0$ и $q(X) = g$.*

Доказательство. Арифметический род p_a определяется из формулы $1 + p_a = \chi(\mathcal{O}_X)$. Так как $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$ (см. 2.1), то по 2.4 $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$, $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$ и $\dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Поэтому $p_a = -g$. По 7.12.3 гл. III геометрический род p_g равен $\dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и иррегулярность q равна $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$. См. также упр. 8.4 гл. III.

Предложение 2.6. *Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга 2 на кривой C и X — линейчатая поверхность $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. Пусть $\mathcal{O}_X(1)$ — обратимый пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)$ (см. § 7 гл. II), тогда существует взаимно однозначное соответствие между сечениями σ: $C \to X$ и сюръекциями $\mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$, где $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на C, задаваемое формулой $\mathcal{L} = \sigma^* \mathcal{O}_X(1)$. В этом соответствии если $\mathcal{N} = \ker(\mathcal{E} \to \mathcal{L})$, то $\mathcal{N}$ — обратимый пучок на C, изоморфный $\pi_*(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D))$, где $D = \sigma(C)$ и $\pi^* \mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D)$.*

Доказательство. Соответствие между сечениями σ и сюръекциями $\mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$ задается в 7.12 гл. II, см. также упр. 7.8 гл. II. Для заданного σ с $\sigma(C) = D$ рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D) \to \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_D \to 0.$$

Применяя к ней π_*, получаем точную последовательность вида

$$0 \to \pi_*(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D)) \to \mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0,$$

где справа стоит 0, потому что $R^1\pi_*(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D)) = 0$ по 2.4. Средний член здесь $\mathcal{E}$ по 7.11 гл. II, а правый $\mathcal{L}$, поскольку $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_D$ — это пучок на $D \simeq C$. Поэтому σ^* и π_* ничего не меняют. Отсюда мы получаем, что $\mathcal{N} \simeq \pi_*(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D))$. Далее, так как пучок $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D)$ имеет степень 0 на каждом слое, то по 2.3 он изоморфен $\pi^* \mathcal{N}$ и по 2.1 пучок $\mathcal{N}$ обратим.

Следствие 2.7. *Всякий локально свободный пучок ранга 2 на кривой C представляется в виде расширения обратимых пучков.*

Доказательство. Так как $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ обладает сечением (см. 2.2), то мы имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0,$$

где $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$ — обратимые пучки. Это вытекает также из упр. 8.2 гл. II.

Замечание 2.7.1. То же утверждение верно и для локально свободных пучков произвольного ранга на C (см. упр. 3.3).

Предложение 2.8. *Пусть π: $X \to C$ — линейчатая поверхность, тогда она может быть представлена в виде $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на C с условием $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$, но $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$ для всех обратимых пучков $\mathcal{L}$ на C с $\deg \mathcal{L} < 0$. В таком случае целое число $e = -\deg \mathcal{E}$ является инвариантом* *поверхности X. Более того, существует сечение σ_0: $C \to X$ с образом C_0, такое, что $\mathscr{L}(C_0) \simeq \mathscr{O}_X(1)$.*

Доказательство. Пусть $X \simeq \mathbf{P}(\mathscr{E}')$ для некоторого локально свободного пучка $\mathscr{E}'$ на C (см. 2.2). Заменим $\mathscr{E}'$ на $\mathscr{E} = \mathscr{E}' \otimes \mathscr{M}$ для подходящего обратимого пучка $\mathscr{M}$ на C так, чтобы $H^0(\mathscr{E}) \neq 0$, а $H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}) = 0$ для всех $\mathscr{L}$ с $\deg \mathscr{L} < 0$. По 3.3 гл. IV обратимый пучок положительной степени на C обилен, поэтому, взяв $\mathscr{M}$ с достаточно большим $\deg \mathscr{M}$, можно добиться того, чтобы $H^0(\mathscr{E}) \neq 0$. С другой стороны, поскольку $\mathscr{E}'$ представляется в виде расширения обратимых пучков (см. 2.7) и так как обратимый пучок отрицательной степени не может иметь глобальных сечений, то $H^0(\mathscr{E}) = 0$ для $\mathscr{M}$ с достаточно большим по модулю отрицательным $\deg \mathscr{M}$. Поэтому мы получим требуемый результат, если в качестве $\mathscr{M}$ выберем обратимый пучок наименьшей степени с $H^0(\mathscr{E}' \otimes \mathscr{M}) \neq 0$.

Так как все возможные представления X в виде $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ исчерпываются пучками $\mathscr{E} = \mathscr{E}' \otimes \mathscr{M}$ (см. 2.2), то целое число $e = -\deg \mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ такое же, как выше, зависит только от X. (*Степень* $\mathscr{E}$ определяется как степень обратимого пучка $\bigwedge^2 \mathscr{E}$, см. упр. 6.12 гл. II.)

Наконец, пусть $s \in H^0(\mathscr{E})$ — ненулевое сечение. Оно определяет инъективное отображение $0 \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{E}$. Я утверждаю, что фактор $\mathscr{L} = \mathscr{E}/\mathscr{O}_C$ является обратимым пучком на C. Поскольку C — неособая кривая и ранг $\mathscr{L}$ равен 1, то достаточно проверить, что $\mathscr{L}$ не имеет кручений. В противном случае пусть $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ — прообраз подпучка кручений пучка $\mathscr{L}$ при отображении $\mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$. Тогда пучок $\mathscr{F}$ не имеет кручения и ранга 1 на C, следовательно, он обратим. Более того, $\mathscr{O}_C \subsetneqq \mathscr{F}$, так что $\deg \mathscr{F} > 0$, но тогда поскольку $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$, то $H^0(\mathscr{E} \otimes \check{\mathscr{F}}) \neq 0$ и $\deg \check{\mathscr{F}} < 0$, что противоречит выбору $\mathscr{E}$.

Теперь поскольку пучок $\mathscr{L}$ обратим, то по 2.6 он задает сечение σ_0: $C \to X$. Пусть C_0 — образ $\sigma_0(C)$. Тогда $\mathscr{N} = \mathscr{O}_C$ в обозначениях 2.6, поэтому $\mathscr{O}_X(1) \otimes \mathscr{L}(-C_0) \simeq \mathscr{O}_X$, откуда следует, что $\mathscr{L}(C_0) \simeq \mathscr{O}_X(1)$.

Обозначения 2.8.1. В оставшейся части этого параграфа мы будем придерживаться следующих обозначений (рис. 19). Пусть C — кривая рода g и π: $X \to C$ — линейчатая поверхность над C. Представим X в виде $\mathbf{P}(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ удовлетворяет условиям 2.8, в таком случае мы будем называть пучок *нормализованным*. Этим пучок $\mathscr{E}$ не определяется, вообще говоря, однозначно, но $\deg \mathscr{E}$ уже определено однозначно. Пусть теперь $\mathfrak{e}$ — дивизор на C, соответствующий обратимому пучку $\bigwedge^2 \mathscr{E}$, так что $e = -\deg \mathfrak{e}$. (Здесь знак выбран в соответствии с традицией.) Через C_0 будем обозначать сечение с $\mathscr{L}(C_0) \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$. Пусть $\mathfrak{b}$ — произвольный дивизор на C, тогда дивизор $\pi^*\mathfrak{b}$ на X будем обозначать для простоты через $\mathfrak{b}f$. Таким образом, всякий элемент из $\operatorname{Pic} X$

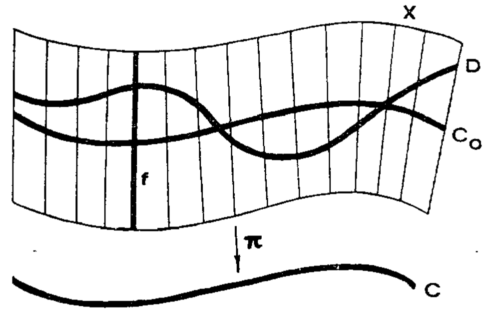


Рис. 19. Линейчатая поверхность.

может быть записан как $aC_0 + \mathfrak{b}f$, где $a \in \mathbf{Z}$ и $\mathfrak{b} \in \operatorname{Pic} C$. Любой элемент из $\operatorname{Num} X$ может быть представлен в виде $aC_0 + bf$, где $a, b \in \mathbf{Z}$.

Предложение 2.9. *Пусть D — произвольное сечение X, соответствующее сюръекции $\mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$, и пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathfrak{d})$ для некоторого дивизора $\mathfrak{d}$ на C, тогда $\deg \mathfrak{d} = C_0 \cdot D$ и*

$$D \sim C_0 + (\mathfrak{d} - \mathfrak{e}) f.$$

В частности, $C_0^2 = \deg \mathfrak{e} = -e$.

Доказательство. Так как $\mathscr{L} = \sigma^*(\mathscr{L}(C_0) \otimes \mathscr{O}_D)$, то по 1.1 и 1.3 $\deg \mathscr{L} = C_0 \cdot D$. Запишем

$$0 \to \mathscr{N} \to \mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0,$$

тогда $\mathscr{L}(C_0 - D) \simeq \pi^* \mathscr{N}$ по 2.6 и выбору C_0 (2.8.1). Но $\mathscr{N} = \mathscr{L}(\mathfrak{e} - \mathfrak{d})$, так что $D \sim C_0 + (\mathfrak{d} - \mathfrak{e}) f$ в $\operatorname{Pic} X$. Наконец, в случае $D = C_0$ мы имеем $\mathscr{N} = \mathscr{O}_{C_0}$, так что $\mathfrak{d} = \mathfrak{e}$ и $C_0^2 = \deg \mathfrak{e} = -e$.

Лемма 2.10. *Канонический дивизор K на X имеет вид*

$$K \sim -2C_0 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{n}) f,$$

где $\mathfrak{k}$ — канонический дивизор на C.

Доказательство. Пусть $K \sim aC_0 + \mathfrak{b}f$. По формуле присоединения 1.5 для слоя f находим

$$-2 = f \cdot (f + K) = a.$$

Теперь воспользуемся формулой присоединения для C_0 в пучковой форме (8.20 гл. II), в результате получим

$$\omega_{C_0} \simeq \omega_X \otimes \mathscr{L}(C_0) \otimes \mathscr{O}_{C_0} \simeq \mathscr{L}(-C_0 + \mathfrak{b}f) \otimes \mathscr{O}_{C_0}.$$

При отождествлении C_0 с C посредством π соответствующее утверждение для дивизоров на C принимает вид $\mathfrak{k} = -\mathfrak{e} + \mathfrak{b}$, так что $\mathfrak{b} = \mathfrak{e} + \mathfrak{k}$. Это следует также из упр. 8.4 гл. III.

Следствие 2.11. *Имеет место численная эквивалентность*

$$K \equiv -2C_0 + (2g - 2 - e) f$$

и, следовательно, $K^2 = 8(1 - g)$.

Доказательство. Имеем $\deg \mathfrak{k} = 2g - 2$ (см. 1.3.3 гл. IV) и $\deg \mathfrak{e} = -e$. Теперь K^2 можно вычислить с помощью 2.3 и 2.9.

Пример 2.11.1. Для любой кривой C линейчатой поверхности $X = C \times \mathbf{P}^1$ соответствует (нормализованный) локально свободный пучок $\mathscr{E} = \mathscr{O}_C \oplus \mathscr{O}_C$ на C. В этом случае $e = 0$ и C_0 — любой слой проекции на P^1.

Пример 2.11.2. Пусть C — кривая рода $g \geqslant 1$ и $\mathscr{E} = \mathscr{O}_C \oplus \mathscr{L}$, где $\deg \mathscr{L} = 0$, но $\mathscr{L} \not\simeq \mathscr{O}_C$, тогда нормализованный пучок $\mathscr{E}$ может быть выбран двумя способами, а именно сам $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}^{-1}$. В этом случае $e = 0$, $\deg \mathfrak{e} = 0$, но $\mathfrak{e}$ определен только с точностью до знака. Кривая C_0 здесь может быть выбрана только двумя способами, и в любом случае $C_0^2 = 0$.

Пример 2.11.3. На любой кривой C пусть $\mathscr{E} = \mathscr{O}_C \oplus \mathscr{L}$ с $\deg \mathscr{L} < 0$, тогда нормализованный пучок $\mathscr{E}$ выбирается однозначно, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathfrak{e})$ и дивизор $\mathfrak{e}$ определен однозначно. Сечение C_0 тоже единственно при условии $C_0^2 = -e < 0$. В этом случае $e = -\deg \mathscr{L} > 0$.

Пример 2.11.4. Пусть C — произвольная кривая степени d в $\mathbf{P}^n$ и X_0 — конус над C в $\mathbf{P}^{n+1}$ с вершиной P_0 (см. упр. 2.10 гл. I). Если раздуть точку P_0, то получится линейчатая поверхность X над C типа 2.11.3 с $\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_C(-1)$. В частности, $e = d$ и прообраз P_0 в X является сечением C_0 с $C_0^2 = -d$.

Для того чтобы это доказать, покажем сначала, что $\mathbf{P}^{n+1}$ с раздутой точкой изоморфно $\mathbf{P}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1))$ над $\mathbf{P}^n$. Пусть $x_0, \ldots, x_{n+1}$ — координаты в $\mathbf{P}^{n+1}$. Раздувая точку $P_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, мы получаем многообразие $V \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n+1}$, определенное уравнениями $x_iy_j = x_jy_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$, где $y_1, \ldots, y_{n+1}$ — однородные координаты в $\mathbf{P}^n$ (см. 7.12.1 гл. II). С другой стороны, пусть $\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)$ на $\mathbf{P}^n$, тогда $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ определяется как $\operatorname{Proj} S(\mathscr{E})$, где $S(\mathscr{E})$ — симметрическая алгебра, порожденная $\mathscr{E}$ (§ 7 гл. II). Пучок $\mathscr{E}$ порождается глобальными сечениями 1 пучка $\mathscr{O}$ и $y_1, \ldots, y_{n+1}$ пучка $\mathscr{O}(1)$. Поэтому $S(\mathscr{E})$ является факторалгеброй алгебры многочленов $\mathscr{O}[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ при отображении $x_0 \mapsto 1$, $x_i \mapsto y_i$, $i = 1, \ldots$

$\ldots, n+1$. Ядром этого отображения служит идеал, порожденный выражениями вида $x_iy_j - x_jy_i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Следовательно, $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ изоморфно подсхеме в $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n+1}$, определяемой этими уравнениями, и, значит, совпадает с многообразием V, которое определяется теми же уравнениями. Тогда проекция V на первый множитель — это структурный морфизм $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to \mathbf{P}^n$, а проекция на второй множитель — это раздутие $V \to \mathbf{P}^n$ точки на $\mathbf{P}^n$.

Пусть теперь Y — произвольное подмногообразие в $\mathbf{P}^n$ и X_0 — конус над ним в $\mathbf{P}^{n+1}$ с вершиной P_0. Раздувая P_0 на X_0, получаем многообразие X — собственный прообраз X_0 в V (см. 7.15.1 гл. II). С другой стороны, многообразие X является, очевидно, прообразом Y при проекции π: $V \simeq \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to \mathbf{P}^n$, откуда видно, что $X \simeq \mathbf{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y(1))$. Подкручивая пучок на $\mathscr{O}_Y(-1)$, что не изменяет многообразия, получаем, что $X \simeq \mathbf{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y(-1))$.

В частности, если Y — неособая кривая C степени d в $\mathbf{P}^n$, то $\mathscr{L} = \mathscr{O}_C(-1)$ имеет степень $-d$.

Пример 2.11.5. Как частный случай 2.11.4 мы видим, что $\mathbf{P}^2$ с раздутой точкой изоморфно рациональной линейчатой поверхности над $\mathbf{P}^1$, определяемой пучком $\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(-1)$, для которой $e = 1$.

Пример 2.11.6. Приведем пример линейчатой поверхности с $e < 0$. Пусть C — эллиптическая кривая и $P \in C$ — некоторая точка. Построим локально свободный пучок $\mathscr{E}$ ранга 2 как расширение

$$0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{E} \to \mathscr{L}(P) \to 0,$$

определяемое ненулевым элементом $\xi \in \operatorname{Ext}^1(\mathscr{L}(P), \mathscr{O})$ (см. упр. 6.1 гл. III). Здесь $\operatorname{Ext}^1(\mathscr{L}(P), \mathscr{O}) \simeq H^1(C, \mathscr{L}(-P))$ (см. 6.3 и 6.7 гл. III), это пространство двойственно $H^0(C, \mathscr{L}(P))$ и, следовательно, имеет размерность 1. Таким образом, элемент ξ определен однозначно с точностью до скалярного множителя и $\mathscr{E}$ определен однозначно с точностью до изоморфизма.

Мы утверждаем, что пучок $\mathscr{E}$ нормализован. Действительно, $H^0(\mathscr{E}) \neq 0$ по построению. Далее, пусть $\mathscr{M}$ — произвольный обратимый пучок, тогда мы имеем точную последовательность

$$0 \to \mathscr{M} \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{M} \to \mathscr{L}(P) \otimes \mathscr{M} \to 0.$$

Если $\deg \mathscr{M} < 0$, то $H^0(\mathscr{M}) = 0$ и $H^0(\mathscr{L}(P) \otimes \mathscr{M}) = 0$, поэтому и $H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{M}) = 0$, кроме случая $\mathscr{M} = \mathscr{L}(-P)$. В этом случае рассмотрим соответствующую когомологическую последовательность

$$0 \to H^0(\mathscr{M}) \to H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{M}) \to H^0(\mathscr{L}(P) \otimes \mathscr{M}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathscr{M}) \to \ldots.$$

Здесь образ $1 \in H^0(\mathscr{L}(P) \otimes \mathscr{M}) = H^0(\mathscr{O}_C)$ при гомоморфизме δ есть не что иное, как элемент ξ, определяющий $\mathscr{E}$ (см. упр. 6.1

гл. III), который отличен от нуля. Следовательно, гомоморфизм δ сюръективен и поэтому $H^0(\mathscr{E}\otimes\mathscr{M})=0$. Стало быть, пучок $\mathscr{E}$ нормализован.

Взяв $X=\mathbf{P}(\mathscr{E})$, получаем эллиптическую линейчатую поверхность с $e=-1$.

Теперь, после того, как мы установили некоторые общие факты о линейчатых поверхностях и рассмотрели конкретные примеры, остановимся подробнее на изучении некоторых частных случаев линейчатых поверхностей. Начнем с обсуждения возможных значений инварианта e.

Теорема 2.12. *Пусть X — линейчатая поверхность над кривой C рода g, определенная нормализованным локально свободным пучком $\mathscr{E}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *Если пучок $\mathscr{E}$ разложим (т. е. является прямой суммой двух обратимых пучков), то $\mathscr{E}\simeq\mathcal{O}_C\oplus\mathscr{L}$ для некоторого $\mathscr{L}$ с $\deg\mathscr{L}\leqslant 0$. Следовательно, $e\geqslant 0$ и все значения $e\geqslant 0$ реализуются.*

(b) *Если пучок $\mathscr{E}$ неразложим, то $-2g\leqslant e\leqslant 2g-2$. (На самом деле существуют даже более сильные ограничения на e, см. упр. 2.5.)*

Доказательство. Пусть пучок $\mathscr{E}$ разложим, тогда $\mathscr{E}\simeq\mathscr{L}_1\oplus\mathscr{L}_2$, где $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — обратимые пучки на C. Так как $\mathscr{E}$ нормализован, то $\deg\mathscr{L}_i\leqslant 0$ и $H^0(\mathscr{L}_i)\neq 0$ по крайней мере для одного из $\mathscr{L}_i$. Тогда один из $\mathscr{L}_i$ изоморфен $\mathcal{O}_C$, так что $\mathscr{E}\simeq\mathcal{O}_C\oplus\mathscr{L}$ с $\deg\mathscr{L}\leqslant 0$. Теперь из 2.11.1, 2.11.2 и 2.11.3 следует, что все возможности $e\geqslant 0$ реализуются.

Пусть теперь пучок $\mathscr{E}$ неразложим. Тогда сечение C_0 определяет точную последовательность

$$0\to\mathcal{O}_C\to\mathscr{E}\to\mathscr{L}\to 0,$$

где $\mathscr{L}$ — некоторый обратимый пучок (см. 2.8). Это расширение должно быть нетривиальным и, следовательно, должно определяться некоторым ненулевым элементом $\xi\in\operatorname{Ext}^1(\mathscr{L},\mathcal{O}_C)\simeq H^1(C,\check{\mathscr{L}})$ (см. упр. 6.1 гл. III). В частности, $H^1(\check{\mathscr{L}})\neq 0$, так что $\deg\check{\mathscr{L}}\leqslant 2g-2$ (см. 1.3.4 гл. IV). Поскольку $e=-\deg\mathscr{L}$, то отсюда $e\leqslant 2g-2$.

С другой стороны, $H^0(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})=0$ для всех $\mathscr{M}$ с $\deg\mathscr{M}<0$, так как пучок $\mathscr{E}$ нормализован. В частности, выбрав $\mathscr{M}$ с $\deg\mathscr{M}=-1$, имеем точную последовательность

$$0=H^0(\mathscr{E}\otimes\mathscr{M})\to H^0(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})\to H^1(\mathscr{M})\to\ldots,$$

поэтому $\dim H^0(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})\leqslant\dim H^1(\mathscr{M})$. Так как $\deg\mathscr{M}<0$, то $H^0(\mathscr{M})=0$, так что по теореме Римана — Роха $H^1(\mathscr{M})=g$. С другой стороны, также по теореме Римана — Роха

$$\dim H^0(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})\geqslant\deg\mathscr{L}-1+1-g.$$

В результате получаем, что $\deg\mathscr{L}\leqslant 2g$ и, следовательно, $e\geqslant -2g$. Теорема доказана.

Следствие 2.13. *Пусть $g=0$, тогда $e\geqslant 0$ и для каждого $e\geqslant 0$ существует только одна рациональная линейчатая поверхность с инвариантом e, определяемая пучком $\mathscr{E}=\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-e)$ над $C=\mathbf{P}^1$.*

Доказательство. При $g=0$ случай (b) в 2.12 не реализуется. Следовательно, $\mathscr{E}\simeq\mathcal{O}_C\oplus\mathscr{L}$. Но на $\mathbf{P}^1$ всякий обратимый пучок имеет вид $\mathcal{O}(n)$ для $n\in\mathbf{Z}$ (см. 6.4 гл. II). Поэтому для каждого $e\geqslant 0$ существует только одна возможность $\mathscr{E}=\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-e)$.

Следствие 2.14. *Каждый локально свободный пучок $\mathscr{E}$ ранга 2 на $\mathbf{P}^1$ разложим.*

Доказательство. После тензорного домножения на подходящим образом подобранный обратимый пучок можно считать, что пучок $\mathscr{E}$ нормализован. В таком случае по 2.13 он изоморфен пучку вида $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-e)$. Обобщение этого результата см. в упр. 2.6.

Теорема 2.15. *Пусть X — линейчатая поверхность над эллиптической кривой C, соответствующая неразложимому пучку $\mathscr{E}$, тогда $e=0$ или -1 и для каждого из этих значений существует только одна такая линейчатая поверхность над C.*

Доказательство. Согласно 2.12, $e=0$, -1 или -2. Если $e=0$, то мы имеем точную последовательность

$$0\to\mathcal{O}_C\to\mathscr{E}\to\mathscr{L}\to 0$$

с $\deg\mathscr{L}=0$. Этому расширению соответствует ненулевой элемент $\xi\in H^1(\check{\mathscr{L}})$. В частности, $H^1(\check{\mathscr{L}})\neq 0$. Двойственным к этому пространству является пространство $H^0(\mathscr{L})$. Поэтому $\mathscr{L}$ должно быть изоморфно $\mathcal{O}_C$. Обратно, взяв $\mathscr{L}=\mathcal{O}_C$, имеем $\dim H^1(\mathcal{O}_C)=1$, так что существует только одно нетривиальное расширение

$$0\to\mathcal{O}_C\to\mathscr{E}\to\mathcal{O}_C\to 0,$$

соответствующее любому ненулевому элементу $\xi\in H^1(\mathcal{O}_C)$. Очевидно, что пучок $\mathscr{E}$ нормализован. Кроме того, он неразложим, иначе, будучи нормализованным, он был бы изоморфен $\mathcal{O}_C\oplus\mathscr{L}$ для некоторого $\mathscr{L}$ (см. 2.12). Но $\bigwedge^2\mathscr{E}\simeq\mathcal{O}_C$, так что $\mathscr{L}\simeq\mathcal{O}_C$ и расширение было бы расщепляющимся, что не так. Таким образом, мы получаем только одну эллиптическую линейчатую поверхность X с $e=0$ и неразложимым $\mathscr{E}$.

Пусть $e=-1$, тогда мы имеем точную последовательность

$$0\to\mathcal{O}_C\to\mathscr{E}\to\mathscr{L}(P)\to 0,$$

где $P \in C$ — некоторая точка, так как любой обратимый пучок степени 1 на C имеет вид $\mathscr{L}(P)$ (см. 1.3.7 гл. IV). Более того, для каждой точки P существует такой нормализованный пучок, единственный с точностью до изоморфизма (см. 2.11.6). Для доказательства того, что существует только одна эллиптическая линейчатая поверхность с $e = -1$, достаточно показать, что если $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ определяются точками P и $Q \neq P$ соответственно, то существует обратимый пучок $\mathscr{M}$ на C, такой, что $\mathscr{E}' \simeq \mathscr{E} \otimes \mathscr{M}$.

Выберем точку $R \in C$, такую, что $2R \sim P + Q$. Это можно сделать, поскольку линейная система $|P + Q|$ задает двулистное накрытие $C \to \mathbf{P}^1$, разветвленное в четырех точках (предполагается, что char $k \neq 2$), и в качестве R можно взять одну из точек ветвления (см. § 4 гл. IV). Покажем, что $\mathscr{E}' \simeq \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}(R - P)$. В любом случае имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathscr{L}(R-P) \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}(R-P) \to \mathscr{L}(R) \to 0.$$

В соответствующей когомологической последовательности

$$H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}(R-P)) \neq 0,$$

поскольку $H^0(\mathscr{L}(R)) \neq 0$ и $H^1(\mathscr{L}(R-P)) = 0$. Поэтому мы получаем точную последовательность вида

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}(R-P) \to \mathscr{N} \to 0,$$

где пучок $\mathscr{N}$ должен быть обратимым, как и в доказательстве 2.8, так что

$$\mathscr{N} \simeq \bigwedge^2(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}(R-P)) \simeq (\bigwedge^2\mathscr{E}) \otimes \mathscr{L}(2R-2P).$$

Так как $\bigwedge^2\mathscr{E} \simeq \mathscr{L}(P)$, то $\mathscr{N} \simeq \mathscr{L}(2R-P) \simeq \mathscr{L}(Q)$. Следовательно, $\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}(R-P) \simeq \mathscr{E}'$, что и требовалось получить. Это доказывает единственность эллиптической линейчатой поверхности с $e = -1$.

Наконец, покажем, что случай $e = -2$ не реализуется. Предположим, что он реализуется. Тогда должен существовать нормализованный пучок $\mathscr{E}$, включающийся в точную последовательность вида

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{E} \to \mathscr{L}(P+Q) \to 0,$$

где P, Q — некоторые точки на C, поскольку любой обратимый пучок степени 2 на C имеет такой вид. Выберем любую пару точек $R, S \in C$, такую, что $R + S \sim P + Q$, и положим $\mathscr{M} = \mathscr{L}(-R)$. Тогда поскольку пучок $\mathscr{E}$ нормализован, то $H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{M}) = 0$, так что отображение γ: $H^0(\mathscr{L}(P+Q-R)) \to H^1(\mathscr{L}(-R))$ должно быть инъективным. С другой стороны, пусть $\xi \in H^1(\mathscr{L}(-P-Q))$ — элемент, определяющий расширение $\mathscr{E}$. Тогда имеет место следующая коммутативная диаграмма с пучком $\mathscr{L}(P+Q-R)$, записанным как $\mathscr{L}(S)$:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathscr{O}_C) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\mathscr{L}(-P-Q)) \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ H^0(\mathscr{L}(S)) & \xrightarrow{\gamma} & H^1(\mathscr{L}(-R)), \end{array}$$

где $\delta(1) = \xi$, $\alpha(1) = t$ — ненулевое сечение, определяющее дивизор S, и отображение β индуцировано отображением $\mathscr{O}_C \to \mathscr{L}(S)$, соответствующим сечению t. Отображение β двойственно отображению

$$\beta'\colon H^0(\mathscr{L}(R)) \to H^0(\mathscr{L}(P+Q)),$$

также индуцированному сечением t. Отображение β' переводит любой ненулевой элемент из $H^0(\mathscr{L}(R))$ в сечение $H^0(\mathscr{L}(P+Q))$, соответствующее эффективному дивизору $R + S \in |P+Q|$.

При переменных R и S мы получаем любой дивизор из линейной системы $|P+Q|$. Следовательно, при переменном R образ отображения β' заполняет все двумерное векторное пространство $H^0(\mathscr{L}(P+Q))$. В частности, R можно выбрать так, что образ β' попадает в ядро ξ, рассматриваемого как линейный функционал на $H^0(\mathscr{L}(P+Q))$. В таком случае $\beta(\xi) = 0$, что противоречит инъективности γ. Стало быть, случай $e = -2$ не реализуется.

Предостережение 2.15.1. Следует обратить внимание на один из вопросов, с которым мы столкнулись в первой части доказательства предыдущей теоремы. Дело в том, что разложимый локально свободный пучок ранга 2 может представляться в виде нетривиального расширения обратимых пучков. Например, пучок дифференциалов на $\mathbf{P}^1$ изоморфен $\mathscr{O}(-2)$, поэтому имеет место точная последовательность (см. 8.13 гл. II)

$$0 \to \mathscr{O}(-2) \to \mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(-1) \to \mathscr{O} \to 0.$$

Эта последовательность не может расщепляться (потому что, например, $H^0(\mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(-1)) = 0$), но пучок, стоящий в середине, очевидно, разложим.

Следствие 2.16 (Атья). *Для каждого целого n существует естественное взаимно однозначное соответствие (явно описанное в доказательстве) между множеством классов изоморфных неразложимых локально свободных пучков ранга 2 и степени n на эллиптической кривой C и множеством точек кривой C.*

Доказательство. Пусть $P_0 \in C$ — некоторая фиксированная точка. Согласно 2.2, 2.8 и 2.15, для любого неразложимого локально свободного пучка ранга 2 на C существует (единственный) обратимый пучок $\mathscr{L}$ на C, такой, что $\mathscr{E}' \otimes \mathscr{L}$ является либо однозначно определенным нетривиальным расширением $\mathscr{E}_0$

пучка $\mathcal{O}_C$ при помощи $\mathcal{O}_C$, либо однозначно определенным нетривиальным расширением $\mathcal{E}_1$ пучка $\mathcal{L}(P_0)$ при помощи $\mathcal{O}_C$. (Первый случай возникает, когда степень $\deg \mathcal{E}'$ четна, а второй — когда нечетна.) Утверждение следует теперь из того, что обратимые пучки фиксированной степени, с точностью до изоморфизма, находятся во взаимно однозначном соответствии с точками кривой C (см. § 4 гл. IV).

Замечание 2.16.1. Рассмотрим общую задачу классификации с точностью до изоморфизма локально свободных пучков $\mathcal{E}$ на алгебраической кривой C рода g. Пусть r — ранг и d — степень (т. е. $\deg \bigwedge^r \mathcal{E}$) пучка $\mathcal{E}$ — это основные численные инварианты $\mathcal{E}$. Для любых r и d за некоторыми исключениями такие пучки образуют непрерывное семейство. При $g=0$ все локально свободные пучки являются прямыми суммами обратимых (упр. 2.6). При $g=1$ общая классификация аналогична приведенной выше классификации локально свободных пучков ранга 2 и была установлена Атьей [1]. При $g \geqslant 2$ ситуация оказывается более сложной. Здесь среди всех неразложимых локально свободных пучков выделяются так называемые *стабильные* пучки (упр. 2.8) в смысле Мамфорда. Стабильные пучки образуют хорошие алгебраические семейства, в то время как остальные — нет. См., например, Нарасимхан и Сешадри [1]. Аналогично *стабильные* линейчатые поверхности, т. е. поверхности с $e<0$, образуют хорошие алгебраические семейства, а все остальные нет.

Теперь изучим случай рациональных линейчатых поверхностей, которые были описаны в 2.13.

Теорема 2.17. *Пусть X_e, где $e \geqslant 0$ — любое целое, — рациональная линейчатая поверхность, определенная локально свободным пучком $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-e)$ на $C = \mathbf{P}^1$ (см. 2.13). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *Сечение $D \sim C_0 + nf$ существует тогда и только тогда, когда $n=0$ или $n \geqslant e$. В частности, существует сечение $C_1 \sim C_0 + ef$ с $C_0 \cap C_1 = \varnothing$ и $C_1^2 = e$.*

(b) *Линейная система $|C_0+nf|$ тогда и только тогда не имеет базисных точек, когда $n \geqslant e$.*

(c) *Линейная система $|C_0+nf|$ обильна тогда и только тогда, когда $n>e$.*

Доказательство. (a) Согласно 2.6 и 2.9, задать сечение $D \sim C_0+nf$ — это все равно, что задать сюръективное отображение $\mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$, где $\mathcal{L}$ — обратимый пучок с $\deg \mathcal{L} = C_0 \cdot D = n-e$. Так как $C = \mathbf{P}^1$, то это означает, что мы должны иметь сюръективное отображение

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-e) \to \mathcal{O}(n-e) \to 0.$$

Если $n<e$, то не существует ненулевых отображений $\mathcal{O}$ в $\mathcal{O}(n-e)$, поэтому отображение $\mathcal{O}(-e) \to \mathcal{O}(n-e)$ должно быть изоморфизмом и, следовательно, $n=0$. Это соответствует сечению C_0, которое однозначно определено, если $e>0$. С другой стороны, мы имеем $n \geqslant e$ и любое такое n допустимо. Достаточно только взять отображения $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(n-e)$ и $\mathcal{O}(-e) \to \mathcal{O}(n-e)$, соответствующие эффективным дивизорам степени $n-e$ и n на C соответственно, которые не пересекаются. Тогда соответствующее отображение $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-e) \to \mathcal{O}(n-e)$ будет сюръективным.

В частности, если $n=e$, то существует сечение $C_1 \sim C_0 + ef$. Имеем $C_1^2 = e$ и $C_0 \cdot C_1 = 0$, так что $C_0 \cap C_1 = \varnothing$.

(b) Пусть линейная система $|C_0+nf|$ не имеет базисных точек, тогда $C_0 \cdot (C_0+nf) \geqslant 0$, так что $n \geqslant e$. Обратно, пусть $n \geqslant e$, тогда $C_0 + nf \sim C_1 + (n-e)f$, и поскольку $C_0 \cap C_1 = \varnothing$ и все слои линейно эквивалентны между собой, то можно найти дивизор вида C_0+nf или $C_1+(n-e)f$, не проходящий через любую наперед заданную точку.

(c) Предположим, что дивизор $D = C_0+nf$ очень обилен, тогда мы должны иметь $D \cdot C_0 > 0$, так что $n>e$. Обратно, пусть $n>e$, тогда докажем, что D очень обилен, показав, что линейная система $|D|$ разделяет точки и касательные векторы (7.8.2 гл. II).

Случай 1. Пусть $P \neq Q$ — две различные точки, не лежащие одновременно ни на C_0, ни на каком-либо слое. Тогда дивизор вида C_0+nf для подходящего слоя f разделяет эти точки.

Случай 2. Пусть P — точка и t — касательный вектор в P, не лежащие одновременно ни на C_0, ни на каком-либо слое. Тогда дивизор вида $C_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i$ для подходящим образом выбранных слоев f_i будет содержать точку P, но не будет касаться вектора t.

Случай 3. Предположим, что точки P, Q или точка P и касательный вектор t лежат на C_0. Тогда их будет разделять дивизор вида $C_1 + \sum_{i=1}^{n-e} f_i$.

Случай 4. Предположим, что P, Q или P, t лежат на одном и том же слое f. Тогда поскольку $D \cdot f = 1$, то обратимый пучок $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_f$ очень обилен на $f \simeq \mathbf{P}^1$. Поэтому для доказательства того, что точки P, Q или P и касательный вектор t разделяются, достаточно показать, что естественное отображение $H^0(X, \mathcal{L}(D)) \to H^0(f, \mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_f)$ сюръективно. Коядро этого отображения принадлежит $H^1(X, \mathcal{L}(D-f))$, что по 2.4 изоморфно $H^1(C, \pi_* \mathcal{L}(D-f))$. Но $D-f \sim C_0 + (n-1)f$, так что по формуле проекции (упр. 5.1 гл. II) имеем

$$\pi_*(\mathcal{L}(D-f)) \simeq \pi_*(\mathcal{L}(C_0)) \otimes \mathcal{O}_C(n-1).$$

Далее $\pi_*(\mathscr{L}(C_0) \simeq \mathscr{E}$ по 2.8 и 7.11 гл. II, так что

$$\pi_*(\mathscr{L}(D-f)) \simeq \mathcal{O}(n-1) \oplus \mathcal{O}(n-e-1).$$

Теперь поскольку $n > e \geqslant 0$, то $n-1 \geqslant 0$ и $n-e-1 \geqslant 0$ и, следовательно, $H^1(C, \pi_*\mathscr{L}(D-f)) = 0$, т. е. предыдущее отображение сюръективно. Теорема полностью доказана.

Следствие 2.18. *Пусть D — дивизор вида $aC_0 + bf$ на рациональной линейчатой поверхности X_e, $e \geqslant 0$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *D очень обилен $\Leftrightarrow$ D обилен $\Leftrightarrow$ $a > 0$ и $b > ae$;*

(b) *линейная система $|D|$ содержит неприводимую неособую кривую $\Leftrightarrow$ $|D|$ содержит неприводимую кривую $\Leftrightarrow$ $a = 0$, $b = 1$ (т. е. $D = f$), или $a = 1$, $b = 0$ (т. е. $D = C_0$), или $a > 0$, $b > ae$, или $e > 0$, $a > 0$, $b = ae$.*

Доказательство. (a) Если дивизор D очень обилен, то он, конечно, обилен (7.4.3 гл. II) и $D \cdot f > 0$, $D \cdot C_0 > 0$, поэтому $a > 0$ и $b > ae$ (см. 1.6.2). Предположим теперь, что $a > 0$ и $b > ae$. Тогда можно записать $D = (a-1)(C_0 + ef) + (C_0 + (b - ae + e)f)$. Так как линейная система $|C_0 + ef|$ не имеет базисных точек и дивизор $C_0 + (b - ae + e)f$ очень обилен (2.17), то отсюда мы заключаем, что дивизор D также очень обилен (см. упр. 7.5 гл. II).

(b) Пусть $|D|$ содержит неприводимую неособую кривую, тогда, в частности, $|D|$ содержит и просто неприводимую кривую. Пусть D — такая неприводимая кривая, тогда либо $D = f$ ($a = 0$ и $b = 1$), либо $D = C_0$ ($a = 1$, $b = 0$); в любом другом случае π отображает D сюръективно на C, так что $D \cdot f = a > 0$, и $D \cdot C_0 \geqslant 0$, так что $b \geqslant ae$. Если $e = 0$ и $b = ae$, то $b = 0$ и $D = aC_0$. Но в этом случае $X_0 \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и C_0 — одна из прямолинейных образующих X_0, поэтому для того, чтобы D был неприводимым, a должно равняться 1. Итак, необходимость ограничений на a и b доказана. Осталось показать, что если $a > 0$, $b > ae$ или $e > 0$, $a > 0$, $b = ae$, то линейная система $|D|$ содержит неприводимую неособую кривую. В первом случае D очень обилен согласно (a), поэтому наше утверждение вытекает из теоремы Бертини (8.18 гл. II). Во втором случае воспользуемся тем, что X_e может быть получена из конуса Y над неособой рациональной кривой C степени $e > 0$ в некотором проективном пространстве $\mathbf{P}^n$ с помощью раздутия вершины (см. 2.11.4). В таком случае кривая C_1 на X_e является собственным прообразом гиперплоского сечения H конуса Y. По теореме Бертини для очень обильного дивизора aH на Y (8.18.1 гл. II) в линейной системе $|aH|$ можно найти неособую неприводимую кривую, не содержащую вершину конуса Y. Тогда ее собственный прообраз на X_e будет требуемой

неприводимой и неособой кривой в линейной системе $|aC_1| = |D|$.

Замечание 2.18.1. В случае $e = 0$ получается новое доказательство результатов о кривых на неособой квадрике, которая изоморфна X_0, см. 7.6.2 гл. II, упр. 5.6 гл. III и 1.10.1.

Следствие 2.19. *Для каждого $n > e \geqslant 0$ существует вложение рациональной линейчатой поверхности X_e в качестве линейчатой поверхности степени $d = 2n - e$ в $\mathbf{P}^{d+1}$ (т. е. линейчатой поверхности, все слои которой являются прямыми в $\mathbf{P}^{d+1}$).*

Доказательство. Это вложение задается очень обильным дивизором $D = C_0 + nf$. Тогда $D \cdot f = 1$, поэтому слои линейчатой поверхности X отображаются на прямые в $\mathbf{P}^N$. Далее, $D^2 = 2n - e$, так что образ X имеет степень $d = 2n - e$. Для определения N надо вычислить размерность $H^0(X, \mathscr{L}(D))$. Как и в доказательстве 2.17, находим

$$H^0(X, \mathscr{L}(D)) = H^0(C, \pi_*\mathscr{L}(D)) = H^0(C, \mathscr{E} \otimes \mathcal{O}(n)) = H^0(\mathcal{O}(n)) \oplus H^0(\mathcal{O}(n-e)).$$

Отсюда $\dim H^0(X, \mathscr{L}(D)) = 2n + 2 - e$, так что $N = 2n + 1 - e = d + 1$.

Пример 2.19.1. В случае $e = 0$ и $n = 1$ получаем неособую квадрику в $\mathbf{P}^3$.

В случае $e = 1$ и $n = 2$ получаем рациональную линейчатую поверхность в $\mathbf{P}^4$ степени 3, которая изоморфна плоскости $\mathbf{P}^2$ с одной раздутой точкой (упр. 7.7 гл. II).

В $\mathbf{P}^5$ существуют два разных типа рациональных линейчатых поверхностей степени 4, соответствующих значениям $e = 0$, $n = 2$ и $e = 2$, $n = 3$.

Замечание 2.19.2. Известно на самом деле, что каждая неособая поверхность степени d в $\mathbf{P}^{d+1}$, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости, является либо рациональной линейчатой поверхностью (2.19), либо $\mathbf{P}^2$ ($d = 1$), либо поверхностью Веронезе в $\mathbf{P}^5$ (упр. 2.13 гл. I). См., например, Нагата [5, I, теорема 7].

Теперь попробуем описать обильные дивизоры на линейчатой поверхности над кривой произвольного рода, используя критерий обильности Накаи (1.10). Для того чтобы иметь возможность применить этот критерий, мы должны знать, какие классы численной эквивалентности дивизоров на поверхности содержат неприводимую кривую. На произвольной линейчатой поверхности мы не можем дать исчерпывающий ответ на этот вопрос, как в случае рациональных линейчатых поверхностей, но получим некоторые оценки, достаточные для применения критерия обильности.

Предложение 2.20. *Пусть X — линейчатая поверхность над кривой C с инвариантом $e \geqslant 0$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *Пусть $Y \equiv aC_0 + bf$ — неприводимая кривая, отличная от C_0 и f, тогда $a > 0$ и $b > ae$.*

(b) *Дивизор $D \equiv aC_0 + bf$ обилен, если и только если $a > 0$ и $b > ae$.*

Доказательство. (a) Так как $Y \neq f$, то отображение $\pi\colon Y \to C$ сюръективно, значит, $Y \cdot f = a > 0$, и так как $Y \neq C_0$, то $Y \cdot C_0 = b - ae \geqslant 0$.

(b) Пусть дивизор D обилен, тогда $D \cdot f = a > 0$ и $D \cdot C_0 = b - ae > 0$. Обратно, пусть $a > 0$ и $b - ae > 0$, тогда $D \cdot f > 0$, $D \cdot C_0 > 0$, $D^2 = 2ab - a^2e > 0$, и если $Y = a'C_0 + b'f$ — любая неприводимая кривая, отличная от C_0 и f, то

$$D \cdot Y = ab' + a'b - aa'e > aa'e + aa'e - aa'e = aa'e \geqslant 0.$$

Следовательно, по 1.10 дивизор D обилен.

Предложение 2.21. *Пусть X — линейчатая поверхность над кривой C рода g с инвариантом $e < 0$, и предположим, кроме того, что либо $\operatorname{char} k = 0$, либо $g \leqslant 1$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *Пусть $Y \equiv aC_0 + bf$ — неприводимая кривая, отличная от C_0 и f, тогда либо $a = 1$ и $b \geqslant 0$, либо $a \geqslant 2$ и $b \geqslant {}^1/_2 ae$.*

(b) *Дивизор $D \equiv aC_0 + bf$ обилен, если и только если $a > 0$ и $b > {}^1/_2 ae$.*

Доказательство. (a) Воспользуемся теоремой Гурвица 2.4 гл. IV, чтобы получить некоторую информацию о кривой Y. Пусть $\tilde{Y}$ — нормализация Y. Рассмотрим композицию естественного отображения $\tilde{Y} \to Y$ с проекцией $\pi\colon Y \to C$. Если $\operatorname{char} k = 0$, то это — конечное сепарабельное отображение степени a, поэтому по 2.4 гл. IV имеем

$$2g(\tilde{Y}) - 2 = a(2g - 2) + \deg R,$$

где R — (эффективный) дивизор ветвления. С другой стороны, по упр. 1.8 гл. IV $p_a(Y) \geqslant g(\tilde{Y})$, так что

$$2p_a(Y) - 2 \geqslant a(2g - 2).$$

Более того, последнее неравенство верно в любой характеристике, если $g = 0$ или 1, так как всегда $p_a(Y) \geqslant g$ (см. 2.5.4. гл. IV).

По формуле присоединения из 1.5 имеем

$$2p_a(Y) - 2 = Y \cdot (Y + K).$$

Подставляя сюда $Y \equiv aC_0 + bf$ и $K = -2C_0 + (2g - 2 - e)f$ (см. 2.11) и комбинируя это с предыдущим неравенством, получаем, что

$$b(a - 1) \geqslant \frac{1}{2} ae(a - 1).$$

Следовательно, если $a \geqslant 2$, то $b \geqslant {}^1/_2 ae$, как и требовалось. Но в любом случае $Y \cdot f = a > 0$, поэтому остается показать, что если $a = 1$, то $b \geqslant 0$. Если $a = 1$, то Y является сечением, соответствующим сюръективному отображению $\mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$. Так как пучок $\mathscr{E}$ нормализован, то $\deg \mathscr{L} \geqslant \deg \mathscr{E}$. Но $\deg \mathscr{L} = C_0 \cdot Y$ (см. 2.9), откуда $b - e \geqslant -e$ и, следовательно, $b \geqslant 0$.

(b) Пусть дивизор D обилен, тогда $D \cdot f = a > 0$ и $D^2 = 2ab - a^2e > 0$, так что $b > {}^1/_2 ae$. Обратно, пусть $a > 0$, $b > {}^1/_2 ae$, тогда $D \cdot f > 0$, $D^2 > 0$, $D \cdot C_0 = b - ae > -{}^1/_2 ae > 0$, и если $Y \equiv a'C_0 + b'f$ — любая неприводимая кривая, отличная от C_0 и f, то

$$D \cdot Y = ab' + a'b - aa'e.$$

Если $a' = 1$, то $b' \geqslant 0$, поэтому $D \cdot Y > {}^1/_2 ae - ae = -{}^1/_2 ae > 0$. Если $a' \geqslant 2$, то $b' \geqslant {}^1/_2 a'e$, поэтому $D \cdot Y > {}^1/_2 aa'e + {}^1/_2 aa'e - aa'e = 0$. Следовательно, по 1.10 дивизор D обилен.

Замечание 2.21.1. В оставшемся случае $e < 0$, $\operatorname{char} k = p > 0$ и $g \geqslant 2$ мы не можем дать необходимые и достаточные условия обильности D, а получим только некоторые частные результаты в этом направлении (см. упр. 2.14 и упр. 2.15).

Замечание 2.21.2. Задача описания обильных дивизоров на линейчатой поверхности с $g \geqslant 1$ является более тонкой, чем в рациональном случае (2.18), поскольку они зависят не только от классов численной эквивалентности дивизоров (см. упр. 2.11 и упр. 2.12).

Ссылки для § 2. Теория линейчатых поверхностей очень древняя, поэтому я не смог отыскать первоисточники приведенных выше результатов. Вместо этого я приведу просто список нескольких недавних работ в этой области: Атья [1], Хартсхорн [4], Маруяма [1], Нагата [5], Шафаревич и др. [1, гл. IV, V], Тюрин [1, 2] [1].

Упражнения

2.1. Пусть X — бирационально линейчатая поверхность, бирационально эквивалентная $\mathbf{P}^1 \times C$. Показать, что кривая C однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется поверхностью X.

2.2. Пусть X — линейчатая поверхность $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ над кривой C. Показать, что $\mathscr{E}$ разложим тогда и только тогда, когда существуют два непересекающихся сечения C' и C'' поверхности X.

2.3. (a) Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга r на (неособой) кривой C. Показать, что тогда существует последовательность подпучков

[1] См. также лекции Бовилла, указанные в примечании в начале главы.— *Прим. перев.*

пучка $\mathscr{E}$

$$0=\mathscr{E}_0\subset\mathscr{E}_1\subset\ldots\subset\mathscr{E}_r=\mathscr{E},$$

таких, что пучки $\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}$ обратимы для каждого $i=1, \ldots, r$. В таком случае мы говорим, что $\mathscr{E}$ является *последовательным расширением* обратимых пучков. [*Указание*. Воспользоваться упр. 8.2 гл. II.]

(b) Показать, что аналогичное утверждение неверно в размерности $\geqslant 2$. В частности, пучок дифференциалов Ω на $\mathbf{P}^2$ не является расширением обратимых пучков.

2.4. Пусть C — кривая рода g и $X = C\times\mathbf{P}^1$ — линейчатая поверхность. Выяснить, для каких целых значений $s\in\mathbf{Z}$ существуют сечения $D\subset X$ с $D^2=s$. Показать прежде всего, что s должно быть четным, скажем $s=2r$.

(a) Показать, что случаи $r=0$ и $r\geqslant g+1$ всегда реализуются. Ср. упр. 6.8 гл. IV.

(b) Пусть $g=3$. Показать, что случай $r=1$ не реализуется и реализуется только одно из двух значений $r=2$ и 3 в зависимости от того, является кривая C гиперэллиптической или нет.

2.5. *Оценки для инварианта e*. Пусть C — кривая рода $g\geqslant 1$.

(a) Показать, что для каждого $0\leqslant e\leqslant 2g-2$ существует линейчатая поверхность X над C с инвариантом e, соответствующая неразложимому пучку $\mathscr{E}$. Ср. 2.12.

(b) Пусть $e<0$ и D — произвольный дивизор степени $d=-e$, и пусть $\xi\in H^1(\mathscr{L}(-D))$ — ненулевой элемент, определяющий расширение

$$0\to\mathcal{O}_C\to\mathscr{E}\to\mathscr{L}(D)\to 0.$$

Пусть $H\subset|D+K|$ — линейная подсистема коразмерности 1, определяемая как $\ker\xi$, где ξ рассматривается как линейный функционал на $H^0(\mathscr{L}(D+K))$. Для любого эффективного дивизора E степени $d-1$ пусть $L_E\subset|D+K|$ — линейная подсистема вида $|D+K-E|+E$. Показать, что пучок нормализован тогда и только тогда, когда для каждого такого дивизора E $L_E\not\subset H$. Ср. доказательство 2.15.

(c) Показать теперь, что если $-g\leqslant e<0$, то существует линейчатая поверхность X над C с инвариантом e. [*Указание*. Показать, что для любого дивизора D, такого, как в (b), существует подходящий элемент ξ, используя рассуждения, аналогичные доказательству 8.18 гл. II.]

(d) Пусть $g=2$. Показать, что условие $e\geqslant -2$ необходимо для существования X.

Замечание. Известно, что $e\geqslant -g$ для любой линейчатой поверхности (Нагата [8]).

2.6. Показать, что всякий локально свободный пучок конечного ранга на $\mathbf{P}^1$ изоморфен прямой сумме обратимых пучков. [*Указание*. Выбрать обратимый подпучок максимальной степени и воспользоваться индукцией по рангу.]

2.7. Показать, что на эллиптической линейчатой поверхности X (2.11.6) сечения C_0 с $C_0^2=1$ образуют одномерное алгебраическое семейство, параметризованное точками базисной кривой C, и что никакие два из них не являются линейно эквивалентными.

2.8. Локально свободный пучок $\mathscr{E}$ на кривой C называется *стабильным*, если для каждого его локально свободного фактора $\mathscr{E}\to\mathscr{F}\to 0$, $\mathscr{F}\neq 0$, $\mathscr{F}\neq\mathscr{E}$, имеет место неравенство

$$(\deg\mathscr{F})/\operatorname{rank}\mathscr{F}>(\deg\mathscr{E})/\operatorname{rank}\mathscr{E}.$$

Если здесь вместо $>$ поставить знак $\geqslant$, то получится определение *полустабильности* $\mathscr{E}$.

(a) Показать, что разложимый пучок никогда не является стабильным.

(b) Показать, что нормализованный пучок $\mathscr{E}$ ранга 2 стабилен (соответственно полустабилен), если и только если $\deg\mathscr{E}>0$ (соответственно $\deg\mathscr{E}\geqslant 0$).

(c) Показать, что неразложимые локально свободные пучки $\mathscr{E}$ ранга 2, не являющиеся полустабильными, описываются с точностью до изоморфизма заданием целого числа $0<e\leqslant 2g-2$, обратимого пучка $\mathscr{L}\in\operatorname{Pic}C$ степени $-e$ и ненулевого элемента $\xi\in H^1(\mathscr{L})$, определенного с точностью до скалярного множителя.

2.9. Пусть Y — неособая кривая на квадратичном конусе X_0 в $\mathbf{P}^3$. Показать, что Y либо является полным пересечением X_0 с некоторой поверхностью степени $a\geqslant 1$ и в этом случае $\deg Y=2a$, $g(Y)=(a-1)^2$, либо $\deg Y$ нечетно, скажем $2a+1$ и $g(Y)=a^2-a$. Ср. 6.4.1 гл. IV. [*Указание*. Воспользоваться 2.11.4.]

2.10. Для любых $n>e\geqslant 0$ пусть X — рациональная линейчатая поверхность степени $d=2n-1$ в $\mathbf{P}^{d+1}$, рассмотренная в 2.19. Показать, что если $n\geqslant 2e-2$, то X содержит неособую кривую Y рода $g=d+2$, являющуюся канонической кривой в этом вложении. Вывести отсюда, что для каждого $g\geqslant 4$ существует негиперэллиптическая кривая рода g, которая обладает линейным рядом g_3^1. Ср. § 5 гл. IV.

2.11. Пусть X — линейчатая поверхность над кривой C, определенная нормализованным локально свободным пучком $\mathscr{E}$, и пусть $\mathfrak{e}$ — дивизор на C, для которого $\mathscr{L}(\mathfrak{e})\simeq\bigwedge^2\mathscr{E}$ (см. 2.8.1). Пусть $\mathfrak{b}$ — произвольный дивизор на C. Показать, что

(a) если линейные системы $|\mathfrak{b}|$ и $|\mathfrak{b}+\mathfrak{e}|$ не имеют базисных точек и если $\mathfrak{b}$ неспециален, то существует сечение $D\sim C_0+\mathfrak{b}f$ и линейная система $|D|$ не имеет базисных точек;

(b) если дивизоры $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}+\mathfrak{e}$ очень обильны на C и для каждой точки $P\in C$ дивизоры $\mathfrak{b}-P$ и $\mathfrak{b}+\mathfrak{e}-P$ неспециальны, то дивизор $C_0+\mathfrak{b}f$ очень обилен на X.

2.12. Пусть X — линейчатая поверхность с инвариантом e над эллиптической кривой C и $\mathfrak{b}$ — дивизор на C.

(a) Показать, что сечение $D\sim C_0+\mathfrak{b}f$, такое, что $|D|$ не имеет базисных точек, существует тогда и только тогда, когда $\deg\mathfrak{b}\geqslant e+2$.

(b) Показать, что линейная система $|C_0+\mathfrak{b}f|$ очень обильна на X тогда и только тогда, когда $\deg\mathfrak{b}\geqslant e+3$.

Замечание. Случай $e=-1$ требует отдельного рассмотрения.

2.13. Показать, что для каждых $e\geqslant -1$ и $n\geqslant e+3$ существует эллиптическая линейчатая поверхность степени $d=2n-e$ в $\mathbf{P}^{d-1}$. В частности, существует такая поверхность степени 5 в $\mathbf{P}^4$.

2.14. Пусть X — линейчатая поверхность над кривой C рода g с инвариантом $e<0$, и предположим, что $\operatorname{char}k=p>0$ и $g\geqslant 2$.

(a) Показать, что если $Y\equiv aC_0+bf$ — неприводимая кривая, отличная от C_0 и f, то либо $a=1$, $b\geqslant 0$, либо $2\leqslant a\leqslant p-1$, $b\geqslant {}^1/_2ae$, либо $a\geqslant p$, $b\geqslant {}^1/_2ae+1-g$.

(b) Показать, что если $a>0$ и $b>a\,({}^1/_2e+(1/p)\,(g-1))$, то дивизор $D\equiv aC_0+bf$ обилен. С другой стороны, если D обилен, то $a>0$ и $b>{}^1/_2ae$.

2.15. *Необычное поведение в характеристике p*. Пусть C — плоская кривая $x^3y+y^3z+z^3x=0$ над полем k характеристики 3 (см. упр. 2.4 гл. IV).

(a) Показать, что действие k-линейного морфизма Фробениуса f на $H^1(C,\mathcal{O}_C)$ является нулевым (ср. 4.21 гл. IV).

(b) Показать, что для фиксированной точки $P\in C$ существует ненулевой элемент $\xi\in H^1(\mathscr{L}(-P))$, такой, что $f^*\xi=0$ в $H^1(\mathscr{L}(-3P))$.

(c) Пусть теперь $\mathscr{E}$ определяется элементом ξ как расширение вида

$$0\to\mathcal{O}_C\to\mathscr{E}\to\mathscr{L}(P)\to 0,$$

и пусть X — соответствующая линейчатая поверхность над C. Показать, что X содержит неособую кривую $Y\equiv 3C_0-3f$, такую, что морфизм π:

$Y \to C$ является чисто несепарабельным. Показать, что дивизор $D = 2C_0$ удовлетворяет предположениям 2.21 (b), но не является обильным.

2.16. Пусть C — неособая аффинная кривая. Показать, что два локально свободных пучка $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ одного и того же ранга изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их классы в группе Гротендика $K(X)$ (см. упр. 6.10 и упр. 6.11 гл. II). Это неверно для проективной кривой.

*2.17. (a) Пусть φ: $\mathbf{P}_k^1 \to \mathbf{P}_k^3$ есть 3-кратное вложение (упр. 2.12 гл. I), и пусть $\mathscr{J}$ — пучок идеалов пространственной кубической кривой — образа морфизма φ. Тогда $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ является локально свободным пучком ранга 2 на C, так что $\varphi^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$ — локально свободный пучок ранга 2 на $\mathbf{P}^1$. По 2.14, следовательно, $\varphi^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) \simeq \mathcal{O}(l) \oplus \mathcal{O}(m)$ для некоторых l, $m \in \mathbf{Z}$. Найти эти числа l и m.

(b) Сделать то же, что и в (a), для вложения φ: $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$, заданного формулами $x_0 = t^4$, $x_1 = t^3u$, $x_2 = tu^3$, $x_3 = u^4$, образом которого является неособая рациональная кривая степени 4. [*Ответ.* Если char $k \neq 2$, то $l = m = -7$; если char $k = 2$, то $l = -6$, $m = -8$.]

§ 3. Моноидальные преобразования

Моноидальным преобразованием поверхности X мы будем называть операцию раздутия одной точки P на ней. Это частный случай, который мы отмечаем новым термином, более общего понятия раздутия произвольной замкнутой подсхемы некоторой схемы (см. § 7 гл. II). В литературе иногда встречаются разные другие обозначения этого процесса, а именно: локально квадратичное преобразование, дилатация, σ-процесс, отображение Хопфа.

Позднее в 5.5 будет показано, что любое бирациональное преобразование поверхностей может быть разложено в композицию моноидальных преобразований и им обратных. Таким образом, моноидальное преобразование является основным понятием в бирациональной геометрии поверхностей.

В этом параграфе мы изучаем, как меняются геометрические свойства поверхности при одном моноидальном преобразовании. В качестве приложения будет указан процесс разрешения особенностей кривой на поверхности при помощи моноидальных преобразований самой поверхности и будет начато изучение различных типов особенностей на кривых.

Прежде всего зафиксируем обозначения. Пусть X — поверхность и $P \in X$ — точка на ней. Моноидальное преобразование с центром P мы будем обозначать символом π: $\tilde{X} \to X$. Известно (§ 4 гл. I и § 7 гл. II), что в таком случае π индуцирует изоморфизм $\tilde{X} - \pi^{-1}(P) \xrightarrow{\sim} X - P$. Прообразом точки P является кривая E, которую мы будем называть *исключительной кривой* (см. 4.9.1 гл. I).

Предложение 3.1. *В предыдущих обозначениях $\tilde{X}$ является неособой проективной поверхностью. Кривая E изоморфна $\mathbf{P}^1$, и индекс ее самопересечения E^2 на $\tilde{X}$ равен -1.*

Доказательство. Поскольку точка является неособой подсхемой в X, то первое утверждение предложения следует из 8.24 гл. II. Из 7.16 гл. II известно, что $\tilde{X}$ проективно, имеет размерность 2 и бирационально X. Тот факт, что $E \simeq \mathbf{P}^1$, следует опять из 8.24 гл. II, поскольку E — это проективизация над точкой P двумерного векторного пространства $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Наконец, нормальный пучок $\mathscr{N}_{E/\tilde{X}}$ — это в точности пучок $\mathcal{O}_E(-1)$, так что по 1.4.1 $E^2 = -1$.

Замечание 3.1.1. Существует обращение этого результата, которое будет доказано позднее в 5.7, а именно всякая кривая $E \simeq \mathbf{P}^1$ на поверхности X' с $E^2 = -1$ является исключительной кривой моноидального преобразования некоторой поверхности X.

Предложение 3.2. *Естественные отображения* π^*: Pic $X \to$ Pic $\tilde{X}$ *и* $\mathbf{Z} \to$ Pic $\tilde{X}$, *определяемое соответствием* $1 \mapsto 1\cdot E$, *устанавливают изоморфизм* Pic $\tilde{X} \simeq$ Pic $X \oplus \mathbf{Z}$. *Пересечение на $\tilde{X}$ задается следующими формулами:*

(a) $(\pi^*C)\cdot(\pi^*D) = C\cdot D$ *для любых* C, $D \in$ Pic X;

(b) $(\pi^*C)\cdot E = 0$ *для любого* $C \in$ Pic X;

(c) $E^2 = -1$;

(d) $(\pi^*C)\cdot D = C\cdot(\pi_*D)$, *где* π_*: Pic $\tilde{X} \to$ Pic X — *проекция на первое слагаемое, для любых* $C \in$ Pic X, $D \in$ Pic $\tilde{X}$.

Доказательство. Из 6.5 гл. II Pic $X \simeq$ Pic $(X - P)$. Но $X - P \simeq \tilde{X} - E$, поэтому, согласно 6.5 гл. II, мы имеем следующую точную последовательность:

$$\mathbf{Z} \to \operatorname{Pic} \tilde{X} \to \operatorname{Pic} X \to 0,$$

где первое отображение переводит 1 в $1\cdot E$. Поскольку для любого $n \neq 0$ имеем $(nE)^2 = -n^2 \neq 0$, то это отображение инъективно. С другой стороны, π^* дает расщепления этой точной последовательности, так что мы получаем изоморфизм Pic $\tilde{X} \simeq$ Pic $X \oplus \mathbf{Z}$.

Далее мы уже знаем, что $E^2 = -1$. Для доказательства формул (a) и (b) воспользуемся тем фактом (§ 1), что C и D линейно эквивалентны разностям неособых кривых, пересекающихся трансверсально и не содержащих точку P. Как и в доказательстве 1.2, мы можем потребовать также, чтобы кривая D' проходила вне любого заданного конечного множества точек. Тогда π^* не изменяет пересечения кривых, что доказывает формулу (a). Ясно также, что π^*C не пересекает E, поэтому $(\pi^*C)\cdot E = 0$. Те же рассуждения доказывают и формулу (d), так как можно считать, что C является разностью кривых, не содержащих точку P. (См. также упр. 8.5 гл. II.)

Предложение 3.3. *Канонический дивизор на* X *имеет вид* $K_{\tilde X} = \pi^* K_X + E$. *Следовательно,* $K_{\tilde X}^2 = K_X^2 - 1$.

Доказательство. Так как канонические дивизоры на $\tilde X - E$ и $X - P$ совпадают, то ясно, что $K_{\tilde X} = \pi^* K_X + nE$ для некоторого $n \in \mathbf{Z}$. Для вычисления n воспользуемся формулой присоединения из 1.5 для кривой E. Имеем $-2 = E(E + K_{\tilde X})$, отсюда, используя 3.2, находим $n = 1$. Теперь $K_{\tilde X}^2$ можно вычислить с помощью формул из 3.2. (См. также упр. 8.5 гл. II.)

Замечание 3.3.1. Таким образом, K^2 не является бирациональным инвариантом поверхности. Вот конкретный пример: K^2 на $\mathbf{P}^2$ равен 9 (см. 1.4.4), а K^2 на рациональной линейчатой поверхности X_1 равен 8 (см. 2.11) и поверхность X_1 изоморфна моноидальному преобразованию плоскости $\mathbf{P}^2$ (см. 2.11.5).

Теперь мы хотим показать, что арифметический род поверхности p_a не меняется при моноидальном преобразовании. Для этого надо сравнить когомологии структурных пучков на X и на $\tilde X$. Для вычисления $R^i \pi_* \mathcal{O}_{\tilde X}$ воспользуемся теоремой о формальных функциях 11.1 гл. III.

Предложение 3.4. *Имеем* $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde X} = \mathcal{O}_X$ *и* $R^i \pi_* \mathcal{O}_{\tilde X} = 0$ *при* $i > 0$. *Следовательно,* $H^i(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^i(\tilde X, \mathcal{O}_{\tilde X})$ *для всех* $i \geqslant 0$.

Доказательство. Так как π устанавливает изоморфизм $\tilde X - E$ с $X - P$, то ясно, что естественное отображение $\mathcal{O}_X \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde X}$ является изоморфизмом всюду, кроме, быть может, точки P, и что пучки $\mathcal{F}^i = R^i \pi_* \mathcal{O}_{\tilde X}$ при $i > 0$ сконцентрированы в точке P. Для вычисления $\mathcal{F}^i$ воспользуемся теоремой о формальных функциях 11.1 гл. III. Имеем, переходя к пополнениям слоев в точке P,

$$\hat{\mathcal{F}}^i \simeq \varprojlim H^i(E_n, \mathcal{O}_{E_n}),$$

где E_n — замкнутая подсхема в $\tilde X$, определенная пучком идеалов $\mathcal{I}^n$, где $\mathcal{I}$ — пучок идеалов E. Существует естественная точная последовательность для каждого n

$$0 \to \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \to \mathcal{O}_{E_{n+1}} \to \mathcal{O}_{E_n} \to 0.$$

Более того, по 8.24 гл. II $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \mathcal{O}_E(1)$ и по 8.21A(e) гл. II $\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \simeq S^n(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \simeq \mathcal{O}_E(n)$. Но $E \simeq \mathbf{P}^1$, поэтому $H^1(E, \mathcal{O}_E(n)) = 0$ при $i > 0$ и всех $n > 0$. Так как $E_1 = E$, то из длинной точной последовательности когомологий, соответствующей предыдущей точной последовательности пучков, индукцией по n получаем, что $H^i(\mathcal{O}_{E_n}) = 0$ для всех $i > 0$ и всех $n \geqslant 1$.

Отсюда следует, что $\hat{\mathcal{F}}^i = 0$ при $i > 0$. Так как $\mathcal{F}^i$ — когерентный пучок с носителем в точке P, то $\mathcal{F}^i = \hat{\mathcal{F}}^i$, так что $\mathcal{F}^i = 0$ при $i > 0$.

Тот факт, что $\mathcal{O}_X \simeq \pi_* \mathcal{O}_{\tilde X}$, вытекает просто из того, что поверхность X нормальна и морфизм π бирационален. Ср. доказательство 11.4 гл. III.

Далее, из упр. 8.1 гл. III заключаем, что $H^i(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^i(\tilde X, \mathcal{O}_{\tilde X})$ для всех $i \geqslant 0$.

Следствие 3.5. *Пусть* $\pi: \tilde X \to X$ — *моноидальное преобразование. Тогда* $p_a(X) = p_a(\tilde X)$.

Доказательство. Из упр. 5.3 гл. III получаем $p_a(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ и аналогичное равенство имеет место для $p_a(X)$. В таком случае утверждение непосредственно вытекает из предыдущего предложения.

Замечание 3.5.1. Из 3.4 следует также, что X и $\tilde X$ имеют одинаковые иррегулярности ($q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$) и геометрические роды ($p_g(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X)$) (см. 7.12.3 гл. III). Доказанная инвариантность p_g относительно моноидального преобразования является, конечно, следствием общего факта о бирациональной инвариантности p_g (8.19 гл. II).

Теперь изучим поведение кривой на поверхности при моноидальном преобразовании. Пусть C — эффективный дивизор на X и $\pi: \tilde X \to X$ — моноидальное преобразование с центром в P. Напомним, что собственный прообраз $\tilde C$ дивизора C определяется как замкнутая подсхема в $\tilde X$, полученная раздутием P на C (7.15 гл. II). Он является также замыканием $\pi^{-1}(C \cap (X - P))$ в $\tilde X$ (см. 7.15.1 гл. II). Таким образом, ясно, что $\tilde C$ может быть получено из $\pi^* C$ выбрасыванием E (с той кратностью, с которой она входит в $\pi^* C$).

Кратность E в $\pi^* C$ зависит от поведения C в точке P. Поэтому мы дадим следующее определение кратности кривой в точке, обобщающее определение кратности плоской кривой (упр. 5.3 гл. I).

Определение. Пусть C — эффективный дивизор Картье на поверхности X и f — его локальное уравнение в точке P на X. Определим *кратность* $\mu_P(C)$ дивизора C в точке P как наибольшее целое число r, такое, что $f \in \mathfrak{m}_P^r$, где $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{P, X}$ — максимальный идеал точки P.

Замечание 3.5.2. Как обычно, $\mu_P(C) \geqslant 0$, поскольку $f \in \mathcal{O}_{P, X}$. Далее, $\mu_P(C) \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $P \in C$, и равенство выполняется тогда и только тогда, когда C неособа в P, поскольку в таком случае $\mathfrak{m}_{P, C}$ будет главным идеалом, так что $f \notin \mathfrak{m}_{P, X}^2$.

Предложение 3.6. *Пусть C — эффективный дивизор на X, P — точка кратности r на C и π: $\tilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в точке P. Тогда*

$$\pi^* C = \tilde{C} + rE.$$

Доказательство. Вспомним определение раздутия и посмотрим, что происходит в окрестности точки P, проследив за локальными уравнениями C на X и $\pi^* C$ на $\tilde{X}$. Пусть $\mathfrak{m}$ — пучок идеалов точки P в X. Тогда $\tilde{X}$ определяется как $\operatorname{Proj} \mathscr{S}$, где $\mathscr{S}$ — пучок градуированных алгебр $\mathscr{S} = \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathfrak{m}^d$ (§ 7 гл. II). Пусть x, y — локальные параметры в точке P. Тогда они порождают $\mathfrak{m}$ в некоторой окрестности U точки P, которую можно считать аффинной, скажем $U = \operatorname{Spec} A$. Напишем для $\mathfrak{m}$ над U резольвенту (см. 7.10А гл. III)

$$0 \to \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U^2 \to \mathfrak{m} \to 0,$$

где стрелка $\mathcal{O}_U^2 \to \mathfrak{m}$ переводит образующие t, u пучка $\mathcal{O}_U^2$ в x, y соответственно. Ее ядро, следовательно, порождено элементом $ty - ux$. Стало быть, пучок $\mathscr{S}$ над U ассоциирован с A-алгеброй $A[t, u]/(ty - ux)$, так что $\tilde{X}$ является замкнутой подсхемой в $\mathbf{P}_U^1$, определяемой уравнением $ty - ux = 0$, где t, u — однородные координаты $\mathbf{P}^1$. (Отметим, что это — обобщение конструкции примера 4.9.1 гл. I.)

Пусть теперь f — локальное уравнение C на U (где U, если нужно, уменьшено). Тогда по определению кратности можно записать

$$f = f_r(x, y) + g,$$

где f_r — ненулевой однородный многочлен степени r с коэффициентами в k и $g \in \mathfrak{m}^{r+1}$. Действительно, $f \in \mathfrak{m}^r$, $f \notin \mathfrak{m}^{r+1}$ и $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ — векторное пространство над k с базисом $x^r, x^{r-1}y, \ldots, y^r$, так что такая запись очевидна.

Рассмотрим открытое аффинное подмножество $V \subset \mathbf{P}_U^1$, определенное условием $t = 1$. Тогда на $\tilde{X} \cap V$ имеем $y = ux$, так что можно записать

$$\pi^* f = x^r (f_r(1, u) + xh),$$

где $h \in A[u]$ — некоторый элемент. Действительно, идеал $\mathfrak{m}^{r+1}A[u]$ порождается элементами $x^{r+1}, x^{r+1}u, \ldots, x^{r+1}u^{r+1}$, так что $\pi^* g$ делится на x^{r+1}.

Но x является локальным уравнением E и $f_r(1, u)$ обращается в нуль только в конечном числе точек из E, следовательно, отсюда видно, что E входит в $\pi^* C$, локально определяемое уравнением $\pi^* f$, в точности с кратностью r. Предложение доказано.

Следствие 3.7. *В условиях предложения* 3.6 *имеем*

$$\tilde{C} \cdot E = r \quad \text{и} \quad p_a(\tilde{C}) = p_a(C) - \frac{1}{2} r(r-1).$$

Доказательство. Так как $\tilde{C} = \pi^* C - rE$, то $\tilde{C} \cdot E = r$ по 3.2. Арифметический род $p_a(\tilde{C})$ вычислим по формуле присоединения 1.5 и упр. 1.3

$$\begin{aligned} 2p_a(\tilde{C}) - 2 &= \tilde{C} \cdot (\tilde{C} + K_{\tilde{X}}) = \\ &= (\pi^* C - rE)(\pi^* C - rE + \pi^* K_X + E) = \\ &= 2p_a(C) - 2 - r(r-1), \end{aligned}$$

откуда

$$p_a(\tilde{C}) = p_a(C) - \frac{1}{2} r(r-1).$$

Предложение 3.8. *Пусть C — неприводимая кривая на поверхности X. Тогда существует конечная последовательность моноидальных преобразований (с подходящими центрами) $X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \to X_0 = X$, такая, что собственный прообраз C_n на X_n кривой C является неособой кривой.*

Доказательство. Если C неособа, то $n = 0$. В противном случае пусть $P \in C$ — некоторая особая точка и $r \geqslant 2$ — ее кратность. Пусть $X_1 \to X$ — моноидальное преобразование с центром P и C_1 — собственный прообраз C. Тогда из 3.7 видим, что $p_a(C_1) < p_a(C)$. Если C_1 неособа, то все доказано. Если же она особая, то возьмем одну из особых точек C_1 и продолжим процесс. В результате получим последовательность моноидальных преобразований

$$\ldots \to X_2 \to X_1 \to X_0 = X,$$

в которой для собственных прообразов C_i кривой C на X_i выполняется неравенство $p_a(C_i) < p_a(C_{i-1})$ для всех i. Поскольку арифметический род неприводимой кривой неотрицателен ($p_a(C_i) = \dim H^1(\mathcal{O}_{C_i})$, упр. 5.3 гл. III), то этот процесс должен обрываться. Таким образом, найдется n, для которого кривая C_n будет неособой.

Замечание 3.8.1. Общая проблема *разрешения особенностей* заданного многообразия V заключается в том, чтобы найти собственный бирациональный морфизм f: $V' \to V$, где V' — неособое многообразие. Как мы знаем, в случае кривых эта проблема разрешима, поскольку каждый класс бирациональной эквивалентности кривых содержит единственную неособую проективную кривую (см. 6.11 гл. I). На самом деле в этом случае в качестве V'

достаточно взять нормализацию кривой V. Но в размерностях, больших 1, этого уже недостаточно.

Один из подходов к решению общей проблемы заключается в следующем. Раздувается некоторое подмногообразие, содержащееся в множестве особых точек многообразия V, в результате получается собственный морфизм f_1: $V_1 \to V$ и т. д. Затем показывается (и это наиболее трудная часть), что особенности V_1 в некотором смысле лучше, чем особенности V, так что продолжение процесса должно привести в конце концов к неособому многообразию.

При таком подходе очень скоро прояснились следующие два важных момента. Во-первых, чтобы осуществлять разумный контроль особенностей, надо раздувать только такие подмногообразия, которые сами являются неособыми (точки, например). Во-вторых, чтобы иметь возможность проводить индукцию по размерности V, надо ставить и решать проблему *вложенного разрешения*. Она заключается в следующем: для заданного многообразия V, содержащегося в неособом многообразии W, найти собственный бирациональный морфизм g: $W' \to W$ с неособым W', такой, что не только собственный прообраз $\tilde{V}$ многообразия V в W' неособ, но и полный прообраз $g^{-1}(V)$ является *дивизором с нормальными пересечениями* в W', т. е. каждая неприводимая компонента $g^{-1}(V)$ неособа, и если r неприводимых компонент $Y_1, \ldots, Y_r$ дивизора $g^{-1}(V)$ пересекаются в точке P, то их локальные уравнения $f_1, \ldots, f_r$ образуют часть регулярной системы параметров в P (иначе говоря, $f_1, \ldots, f_r$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{m}_P^2$).

Только что доказанное предложение 3.8 означает, что особенности кривой C, лежащей на некоторой неособой поверхности, можно разрешить с помощью последовательности моноидальных преобразований поверхности. Более сильная теорема о вложенном разрешении для кривых будет доказана ниже (3.9).

Состояние общей проблемы разрешения особенностей в настоящее время таково. Разрешение особенностей кривых было известно еще в конце XIX века. Разрешать особенности поверхностей (над $\mathbf{C}$) умели итальянцы, но первое строгое доказательство было дано Уокером в 1935 г. Первое чисто алгебраическое доказательство разрешения особенностей поверхностей (в $\operatorname{char} k = 0$) дал Зарисский в 1939 г. Затем в 1944 г. он решил задачу вложенного разрешения для поверхностей и задачу разрешения для трехмерных многообразий ($\operatorname{char} k = 0$). В характеристике $p > 0$ разрешение для поверхностей было дано Абъянкаром в 1956 г., а в 1966 г. им было установлено разрешение особенностей трехмерных многообразий в характеристике $p > 5$. Тем временем в 1964 г. Хиронака доказал теорему о разрешении и о вложенном разрешении особенностей для всех размерностей в характеристике 0. Подробности и более точные ссылки по проблеме разрешения см. Липман

[1], Хиронака [4] и вводную статью Хиронаки к собранию статей Зарисского по разрешению (см. Зарисский [8]).

Теорема 3.9 (вложенное разрешение кривых на поверхностях). *Пусть Y — произвольная кривая на поверхности X. Тогда существует конечная последовательность моноидальных преобразований $X' = X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_0 = X$, такая, что полный прообраз $f^{-1}(Y)$ кривой Y на X' является дивизором с нормальными пересечениями* (3.8.1), *где f: $X' \to X$ обозначает композицию этих моноидальных преобразований.*

Доказательство. Ясно, что Y можно считать связным. Более того, поскольку кратности неприводимых компонент не участвуют в определении нормального пересечения, то можно предполагать Y приведенным, т. е. предполагать, что все неприводимые компоненты Y имеют кратность 1. Далее, для всякого бирационального морфизма f: $X' \to X$ через $f^{-1}(Y)$ будем обозначать *приведенный полный прообраз* $f^*(Y)_{\mathrm{red}}$. Иначе говоря, $f^{-1}(Y)$ — это сумма всех неприводимых компонент дивизора $f^*(Y)$ с кратностями 1. Если f является композицией моноидальных преобразований, то $f^{-1}(Y)$ будет также связным и приведенным, так что $H^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(Y)}) = k$ и $p_a(f^{-1}(Y)) = \dim H^1(\mathcal{O}_{f^{-1}(Y)}) \geqslant 0$.

Пусть π: $\tilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в точке P, и пусть $\mu_P(Y) = r$. Тогда дивизор $\pi^{-1}(Y)$ равен $\tilde{Y} + E = \pi^*(Y) - (r-1)E$ по 3.6, поэтому по формуле присоединения (как и в 3.7) можно легко вычислить его арифметический род

$$p_a(\pi^{-1}(Y)) = p_a(Y) - \frac{1}{2}(r-1)(r-2).$$

Для доказательства теоремы мы поступим следующим образом. Сначала применим предложение 3.8 к каждой неприводимой компоненте Y и, таким образом, сведем все к случаю, когда все компоненты Y неособы, так как все добавляющиеся исключительные кривые уже являются неособыми. Затем если кривая Y обладает особой точкой P, отличной от обыкновенной двойной, то раздуем ее.

Пусть $\mu_P(Y) \geqslant 3$, тогда $p_a(\pi^{-1}(Y)) < p_a(Y)$, так что может существовать не более конечного числа шагов такого типа. Если $\mu_P(Y) = 2$, то $p_a(\pi^{-1}(Y)) = p_a(Y)$ и этот случай требует более внимательного рассмотрения. В этом случае по 3.7 имеем $\tilde{Y} \cdot E = 2$. Возникают следующие три возможности. Первая: $\tilde{Y}$ пересекает E трансверсально в двух точках, тогда наш процесс заканчивается. Вторая: $\tilde{Y}$ пересекает E только в одной точке R, $\tilde{Y}$ неособа в Q, но пересекает E в Q с кратностью 2. В этом случае раздутие точки Q приводит к тройной точке (проверить это!), так что последующее раздутие уменьшает $p_a(Y)$. Третья возможность — это когда $\tilde{Y}$ имеет особую точку Q кратности 2, в которой пересекает E. В этом случае $\widetilde{Y}+E$ имеет кратность 3 в Q, так что раздутие Q опять уменьшает p_a.

Таким образом, любые особенности, кроме обыкновенных двойных, возникающие при моноидальном преобразовании или конечной последовательности их, приводят к уменьшению p_a. Следовательно, процесс должен обрываться. В результате $f^{-1}(Y)$ будет дивизором с нормальными пересечениями, потому что каждая его неприводимая компонента неособа и $f^{-1}(Y)$ имеет, самое большее, обыкновенные двойные особенности. Теорема доказана.

Пример 3.9.1. Пусть Y — плоская каспидальная кривая $y^2 = x^3$, тогда ее особенность разрешается одним моноидальным

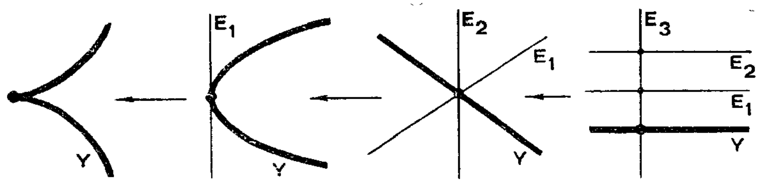


Рис. 20. Вложенное разрешение каспидальной особенности.

преобразованием. Однако для того, чтобы $f^{-1}(Y)$ было дивизором с нормальными пересечениями, надо сделать три моноидальных преобразования (см. рис. 20).

В контексте последовательных моноидальных преобразований удобно ввести понятие бесконечно близких точек.

Определение. Пусть X — поверхность. Тогда любая точка на любой поверхности X', полученной из X конечной последовательностью моноидальных преобразований, называется *бесконечно близкой точкой* поверхности X. Пусть $g\colon X'' \to X'$ — дальнейшая последовательность моноидальных преобразований и $Q'' \in X''$ — точка, принадлежащая открытому множеству, на котором g является изоморфизмом, тогда мы будем отождествлять бесконечно близкие точки Q'' и $g(Q'')$ поверхности X. В частности, все обычные точки X содержатся среди бесконечно близких. Будем говорить, что точка Q бесконечно близка к P, если P лежит на некоторой поверхности X', полученной из X конечной последовательностью моноидальных преобразований, и Q лежит на исключительной кривой E, полученной раздутием точки P. Пусть C — кривая на X и $Q' \in X'$ — бесконечно близкая точка поверхности X, тогда точку Q' будем называть *бесконечно близкой точкой* кривой C, если Q' лежит на собственном прообразе кривой C на X'.

Пример 3.9.2. Пусть C — неприводимая кривая на поверхности X и $\widetilde{C}$ — ее нормализация. Тогда

$$g(\widetilde{C}) = p_a(C) - \sum_P \frac{1}{2} r_P (r_P - 1),$$

где r_P обозначает кратность и суммирование проводится по всем особым точкам P кривой C, включая и бесконечно близкие особые точки. Действительно, согласно 3.8, $\widetilde{C}$ получается из C последовательным раздутием особых точек, пока они не кончатся. Каждый раз арифметический род по 3.7 уменьшается на $^1/_2 r(r-1)$. Это приводит к предыдущей формуле.

Замечание 3.9.3. В частности, если ограничиться рассмотрением инфинитезимальной окрестности одной точки, то целое число δ_P из упр. 1.8 гл. IV можно вычислять как $^1/_2 \sum r_Q (r_Q - 1)$ по всем бесконечно близким особым точкам Q, лежащим над P, включая P.

Замечание 3.9.4 (классификация особенностей кривых). Пользуясь результатами настоящего параграфа, можно предложить другую классификацию возможных особенностей (приведенной) кривой, лежащей на поверхности, которая несколько грубее, чем классификация с точностью до аналитического изоморфизма, введенная в 5.6.1 гл. I и в упр. 5.14 гл. I, см. также упр. 3.6. Для ссылок см. Уокер [1, гл. III, § 7] и Зарисский [10, гл. I].

Главным инвариантом особой точки P на кривой C (всегда лежащей на поверхности X) является ее кратность. Затем идут кратности бесконечно близких особых точек C и их расположение относительно P. Этого уже достаточно, чтобы вычислить δ_P (см. 3.9.3).

Определим теперь несколько более сложный, но все еще дискретный инвариант особой точки (или множества особых точек), как класс эквивалентности по следующему отношению эквивалентности. Кривая C (приведенная) в открытом множестве U на поверхности X считается *эквивалентной* кривой $C' \subset U' \subset X'$, если существуют последовательности моноидальных преобразований $U_n \to U_{n-1} \to \ldots \to U_0 = U$ и $U'_n \to U'_{n-1} \to \ldots \to U'_0 = U'$, являющиеся вложенным разрешением для кривых C и C' соответственно, и если существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми компонентами приведенных полных прообразов кривых C и C' и их особыми точками на каждом шаге, сохраняющее кратности особых точек и инцидентность компонент и согласованное с отображениями $U_i \to U_{i-1}$ и $U'_i \to U'_{i-1}$ для каждого i. Легко проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Для определения класса эквивалентности одной особой точки $P \in C$ надо выбрать U настолько малым, чтобы кривая $C \cap U$ не имела других особенностей.

Пример 3.9.5. В качестве иллюстрации опишем классы двойных точек с точностью до определенной выше эквивалентности. Пусть $P \in C$ — двойная точка и π: $\widetilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в P. Тогда, как и в доказательстве 3.9, имеются три возможности:

(a) $\widetilde{C}$ пересекает E трансверсально в двух точках, в этом случае P — обыкновенная двойная точка;

(b) $\widetilde{C}$ касается E в одной точке, в этом случае P — каспидальная особая точка;

(c) $\widetilde{C}$ особая кривая с двойной точкой Q, в которой она пересекает E. В этом случае E не должна касаться ни одной из ветвей $\widetilde{C}$ в точке Q, поскольку $\widetilde{C} \cdot E = 2$. Следовательно, класс эквивалентности точки Q определяет класс эквивалентности точки P.

Таким образом, двойные точки можно классифицировать по числу раздутий, которые надо сделать, чтобы получить неособую кривую $\widetilde{C}$, и по тому, какая из возможностей (a) и (b) реализуется на последнем шаге.

Оказывается, что в этом случае классификация с точностью до эквивалентности совпадает с классификацией с точностью до аналитического изоморфизма, хотя в общем случае это не так (см. упр. 3.6). Действительно, с точностью до аналитического изоморфизма всякая двойная точка задается уравнением $y^r = x^r$ для некоторого $r \geqslant 2$ (упр. 5.14d гл. I). При ее раздутии $y = ux$ получаем $u^2 = x^{r-2}$. Отсюда по индукции устанавливаем, что класс эквивалентности этой двойной точки определяется числом $n = \left[\frac{r}{2}\right]$ и типом (a), если r четно, и (b), если r нечетно.

Упражнения

3.1. Пусть X — неособое проективное многообразие произвольной размерности, Y — неособое подмногообразие в X и π: $\widetilde{X} \to X$ — раздутие Y. Показать, что $p_a(\widetilde{X}) = p_a(X)$.

3.2. Пусть C и D — кривые на поверхности X, пересекающиеся в точке P, и пусть π: $\widetilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в P. Показать, что $\widetilde{C} \cdot \widetilde{D} = C \cdot D - \mu_P(C) \cdot \mu_P(D)$. Вывести отсюда, что $C \cdot D = \sum \mu_P(C) \cdot \mu_P(D)$, где суммирование происходит по всем точкам пересечения C и D, включая бесконечно близкие точки пересечения.

3.3. Пусть π: $\widetilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование и D — очень обильный дивизор на X. Показать, что дивизор $2\pi^n D - E$ обилен на $\widetilde{X}$. [*Указание.* Воспользоваться подходящим образом обобщенным на кривые в $\mathbf{P}^n$ упр. 7.5 гл. I.]

3.4. *Кратность локального кольца.* (См. Нагата [7, гл. III, § 23] или Зарисский — Самюэль [1, т. 2, гл. VIII, § 10].) Пусть A — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Для любого $l > 0$ положим $\psi(l) = \operatorname{length}(A/\mathfrak{m}^l)$ и будем называть ψ *функцией Гильберта — Самюэля* кольца A.

(a) Показать, что существует многочлен $P_A[z] \in \mathbb{Q}[z]$, такой, что $P_A(l) = \psi(l)$ для всех $l \gg 0$. Он называется *многочленом Гильберта — Самюэля.* [*Указание.* Рассмотреть градуированное кольцо $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A = \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathfrak{m}^d/\mathfrak{m}^{d+1}$ и применить теорему 7.5 гл. I.]

(b) Показать, что $\deg P_A = \dim A$.

(c) Пусть $n = \dim A$. Определим *кратность* $\mu(A)$ локального кольца A как $n!$ (старший коэффициент P_A). *Кратность* $\mu_P(X)$ точки P на нётеровой схеме X определим как $\mu(\mathcal{O}_{P,X})$.

(d) Показать, что для точки P на кривой C, лежащей на поверхности X, определение кратности $\mu_P(C)$ совпадает с определением кратности, данным в тексте перед п. 3.5.2.

(e) Пусть Y — многообразие степени d в $\mathbf{P}^n$, показать, что кратность вершины конуса над Y равна d.

3.5. Пусть $a_1, \ldots, a_r$, $r \geqslant 5$,— различные элементы поля k и C — кривая в $\mathbf{P}^2$, заданная (аффинным) уравнением $y^2 = \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)$. Показать, что бесконечно удаленная точка P по оси y является единственной особой точкой кривой C. Вычислить δ_P и $g(\widetilde{Y})$, где $\widetilde{Y}$ — нормализация Y. Показать, что таким способом можно получить гиперэллиптическую кривую любого рода $g \geqslant 2$.

3.6. Показать, что аналитически изоморфные особенности (5.6.1 гл. I) кривых являются эквивалентными в смысле 3.9.4, но не наоборот.

3.7. Для каждой из следующих особенностей в нуле на плоскости построить вложенное разрешение, вычислить δ_P и выяснить, какие из них эквивалентны:

a) $x^3 + y^5 = 0$,
b) $x^3 + x^4 + y^5 = 0$,
c) $x^3 + y^4 + y^5 = 0$,
d) $x^3 + y^5 + y^6 = 0$,
e) $x^3 + xy^3 + y^5 = 0$.

3.8. Показать, что следующие две особенности имеют одинаковые кратности и одинаковые конфигурации бесконечно близких особых точек с теми же самыми кратностями и, следовательно, с тем же самым δ_P, но не являются эквивалентными:

a) $x^4 - xy^4 = 0$,
b) $x^4 - x^2y^3 - x^2y^5 + y^8 = 0$.

§ 4. Кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$

В этом параграфе, как и в § 2, в качестве иллюстрации общих принципов будет рассмотрен специальный класс поверхностей. Основным результатом здесь является доказательство того, что плоскость $\mathbf{P}^2$ с шестью раздутыми точками изоморфна неособой кубической поверхности в $\mathbf{P}^3$. Этот изоморфизм мы используем для изучения геометрии кривых на кубической поверхности. Он устанавливается с помощью линейной системы плоских кубических кривых с шестью базисными точками, поэтому мы начнем с некоторых общих замечаний о линейных системах с базисными точками.

Пример 3.9.5. В качестве иллюстрации опишем классы двойных точек с точностью до определенной выше эквивалентности. Пусть $P \in C$ — двойная точка и π: $\widetilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в P. Тогда, как и в доказательстве 3.9, имеются три возможности:

(a) $\widetilde{C}$ пересекает E трансверсально в двух точках, в этом случае P — обыкновенная двойная точка;

(b) $\widetilde{C}$ касается E в одной точке, в этом случае P — каспидальная особая точка;

(c) $\widetilde{C}$ особая кривая с двойной точкой Q, в которой она пересекает E. В этом случае E не должна касаться ни одной из ветвей $\widetilde{C}$ в точке Q, поскольку $\widetilde{C}\cdot E = 2$. Следовательно, класс эквивалентности точки Q определяет класс эквивалентности точки P.

Таким образом, двойные точки можно классифицировать по числу раздутий, которые надо сделать, чтобы получить неособую кривую $\widetilde{C}$, и по тому, какая из возможностей (a) и (b) реализуется на последнем шаге.

Оказывается, что в этом случае классификация с точностью до эквивалентности совпадает с классификацией с точностью до аналитического изоморфизма, хотя в общем случае это не так (см. упр. 3.6). Действительно, с точностью до аналитического изоморфизма всякая двойная точка задается уравнением $y^r = x^r$ для некоторого $r \geqslant 2$ (упр. 5.14d гл. I). При ее раздутии $y = ux$ получаем $u^2 = x^{r-2}$. Отсюда по индукции устанавливаем, что класс эквивалентности этой двойной точки определяется числом $n = \left[\frac{r}{2}\right]$ и типом (a), если r четно, и (b), если r нечетно.

Упражнения

3.1. Пусть X — неособое проективное многообразие произвольной размерности, Y — неособое подмногообразие в X и π: $\widetilde{X} \to X$ — раздутие Y. Показать, что $p_a(\widetilde{X}) = p_a(X)$.

3.2. Пусть C и D — кривые на поверхности X, пересекающиеся в точке P, и пусть π: $\widetilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в P. Показать, что $\widetilde{C}\cdot\widetilde{D} = C\cdot D - \mu_P(C)\cdot\mu_P(D)$. Вывести отсюда, что $C\cdot D = \sum \mu_P(C)\cdot\mu_P(D)$, где суммирование происходит по всем точкам пересечения C и D, включая бесконечно близкие точки пересечения.

3.3. Пусть π: $\widetilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование и D — очень обильный дивизор на X. Показать, что дивизор $2\pi^n D - E$ обилен на X. [*Указание.* Воспользоваться подходящим образом обобщенным на кривые в $\mathbf{P}^n$ упр. 7.5 гл. I.]

3.4. *Кратность локального кольца.* (См. Нагата [7, гл. III, § 23] или Зарисский — Самюэль [1, т. 2, гл. VIII, § 10].) Пусть A — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Для любого $l > 0$ положим $\psi(l) = \operatorname{length}(A/\mathfrak{m}^l)$ и будем называть ψ *функцией Гильберта — Самюэля* кольца A.

(a) Показать, что существует многочлен $P_A[z] \in \mathbf{Q}[z]$, такой, что $P_A(l) = \psi(l)$ для всех $l \gg 0$. Он называется *многочленом Гильберта — Самюэля.* [*Указание.* Рассмотреть градуированное кольцо $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A = \bigoplus_{d\geqslant 0} \mathfrak{m}^d/\mathfrak{m}^{d+1}$ и применить теорему 7.5 гл. I.]

(b) Показать, что $\deg P_A = \dim A$.

(c) Пусть $n = \dim A$. Определим *кратность* $\mu(A)$ локального кольца A как $n!$ (старший коэффициент P_A). *Кратность* $\mu_P(X)$ точки P на нётеровой схеме X определим как $\mu(\mathcal{O}_{P,X})$.

(d) Показать, что для точки P на кривой C, лежащей на поверхности X, определение кратности $\mu_P(C)$ совпадает с определением кратности, данным в тексте перед п. 3.5.2.

(e) Пусть Y — многообразие степени d в $\mathbf{P}^n$, показать, что кратность вершины конуса над Y равна d.

3.5. Пусть $a_1, \ldots, a_r$, $r \geqslant 5$,— различные элементы поля k и C — кривая в $\mathbf{P}^2$, заданная (аффинным) уравнением $y^2 = \prod_{i=1}^{r}(x - a_i)$. Показать, что бесконечно удаленная точка P по оси y является единственной особой точкой кривой C. Вычислить δ_P и $g(\widetilde{Y})$, где $\widetilde{Y}$ — нормализация Y. Показать, что таким способом можно получить гиперэллиптическую кривую любого рода $g \geqslant 2$.

3.6. Показать, что аналитически изоморфные особенности (5.6.1 гл. I) кривых являются эквивалентными в смысле 3.9.4, но не наоборот.

3.7. Для каждой из следующих особенностей в нуле на плоскости построить вложенное разрешение, вычислить δ_P и выяснить, какие из них эквивалентны:

a) $x^3 + y^5 = 0$,
b) $x^3 + x^4 + y^5 = 0$,
c) $x^3 + y^4 + y^5 = 0$,
d) $x^3 + y^5 + y^6 = 0$,
e) $x^3 + xy^3 + y^5 = 0$.

3.8. Показать, что следующие две особенности имеют одинаковые кратности и одинаковые конфигурации бесконечно близких особых точек с теми же самыми кратностями и, следовательно, с тем же самым δ_P, но не являются эквивалентными:

a) $x^4 - xy^4 = 0$,
b) $x^4 - x^2y^3 - x^2y^5 + y^8 = 0$.

§ 4. Кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$

В этом параграфе, как и в § 2, в качестве иллюстрации общих принципов будет рассмотрен специальный класс поверхностей. Основным результатом здесь является доказательство того, что плоскость $\mathbf{P}^2$ с шестью раздутыми точками изоморфна неособой кубической поверхности в $\mathbf{P}^3$. Этот изоморфизм мы используем для изучения геометрии кривых на кубической поверхности. Он устанавливается с помощью линейной системы плоских кубических кривых с шестью базисными точками, поэтому мы начнем с некоторых общих замечаний о линейных системах с базисными точками.

Пусть X — некоторая поверхность, $|D|$ — полная линейная система кривых на X и $P_1, \ldots, P_r$ — точки на X. Рассмотрим линейную подсистему $\mathfrak{d}$, состоящую из всех дивизоров в $D \in |D|$, которые проходят через точки $P_1, \ldots, P_r$. Будем обозначать ее символом $|D - P_1 - \ldots - P_r|$ и говорить, что $P_1, \ldots, P_r$ являются ее *предписанными базисными точками*.

Пусть $\pi: X' \to X$ — морфизм раздутия точек $P_1, \ldots, P_r$ и $E_1, \ldots, E_r$ — вклеенные исключительные кривые. Тогда существует естественное взаимно однозначное соответствие между элементами $\mathfrak{d}$ на X и элементами полной линейной системы $\mathfrak{d}' = |\pi^*D - E_1 - \ldots - E_r|$ на X', задаваемое сопоставлением $D \mapsto \pi^*D - E_1 - \ldots - E_r$, потому что последний дивизор эффективен на X', если и только если D проходит через $P_1, \ldots, P_r$.

Линейная система $\mathfrak{d}'$ на X' тоже может иметь базисные точки. Тогда любую ее базисную точку, рассматриваемую как бесконечно близкую точку X, будем называть *непредписанной базисной точкой* $\mathfrak{d}$.

Все эти определения имеют смысл, даже если некоторые из P_i сами являются бесконечно близкими точками поверхности X или если они заданы с некоторыми кратностями, большими чем 1. Например, пусть P_2 бесконечно близка к P_1, тогда требуется, чтобы дивизоры $D \in \mathfrak{d}$ содержали P_1 и чтобы $\pi_1^*D - E_1$ содержали P_2, где π_1 — раздутие точки P_1. С другой стороны, если P_1 задана с кратностью $r \geqslant 1$, то мы требуем, чтобы каждый дивизор D проходил через P_1 по меньшей мере с кратностью r, и в определении $\mathfrak{d}'$ берем $\pi^*D - rE_1$.

(Отметим, что если обозначить базисные точки, бесконечно близкие к P, через $Q_1, \ldots, Q_s$, то всякий дивизор, содержащий $Q_1, \ldots, Q_s$, будет автоматически содержать точку P по крайней мере с кратностью 1. Поэтому мы условимся, что каждая базисная точка должна быть предписана с кратностью, не меньшей, чем сумма кратностей предписанных базисных точек, бесконечно близких к P.)

Удобство этого языка состоит в том, что он позволяет работать одновременно с линейными системами на различных раздутых моделях поверхности X в терминах подходящих линейных систем с предписанными базисными точками на X.

Замечание 4.0.1. С помощью этого языка мы можем следующим образом перефразировать условие 7.8.2 гл. II, что полная линейная система $|D|$ очень обильна: линейная система $|D|$ очень обильна тогда и только тогда, когда она не имеет базисных точек и для каждой точки $P \in X$ линейная система $|D - P|$ не имеет непредписанных базисных точек. Действительно, $|D|$ разделяет точки P и Q тогда и только тогда, когда Q не является базисной точкой $|D - P|$, и $|D|$ разделяет касательные векторы в P тогда и только тогда, когда $|D - P|$ не имеет непредписанных базисных точек, бесконечно близких к P.

Замечание 4.0.2. Если заметить, что размерность линейной системы уменьшается ровно на 1, когда предписывается базисная точка, не являющаяся непредписанной базисной точкой этой линейной системы, то условие, что система очень обильна, можно выразить в форме, напоминающей 3.1 гл. IV: линейная система $|D|$ очень обильна тогда и только тогда, когда для любых двух точек $P, Q \in X$, включая случай, когда Q бесконечно близка к P, имеет место ревенство

$$\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2.$$

Замечание 4.0.3. Применяя 4.0.1 к раздутой модели X, замечаем, что если $\mathfrak{d} = |D - P_1 - \ldots - P_r|$ — линейная система с предписанными базисными точками на X, то соответствующая линейная система $\mathfrak{d}'$ на X' очень обильна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{d}$ не имеет непредписанных базисных точек и для каждой точки $P \in X$, включая бесконечно близкие точки X', линейная система $\mathfrak{d} - P$ не имеет непредписанных базисных точек.

Теперь сконцентрируем наше внимание на частном случае описанной ситуации, а именно на линейных системах плоских кривых с предписанными базисными точками. Выясним, в каких случаях такие линейные системы обладают непредписанными базисными точками, и в случаях, когда таких точек нет, изучим соответствующие морфизмы раздутых моделей в проективные пространства. Для получения кубической поверхности в $\mathbf{P}^3$ мы воспользуемся линейной системой плоских кубических кривых с шестью базисными точками. Но прежде всего нам надо рассмотреть линейные системы коник с базисными точками. Здесь слова *коника* и *кубика* используются для обозначения любых эффективных дивизоров степени 2 и 3 соответственно на проективной плоскости.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathfrak{d}$ — линейная система коник в $\mathbf{P}^2$ с предписанными базисными точками $P_1, \ldots, P_r$, и предположим, что никакие три из этих базисных точек не коллинеарны. Тогда если $r \leqslant 4$, то $\mathfrak{d}$ не имеет непредписанных базисных точек. Это утверждение остается верным, если даже P_2 бесконечно близка к P_1.*

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $r = 4$. Предположим сначала, что все P_1, P_2, P_3, P_4 — обычные точки. Пусть L_{ij} обозначает прямую, соединяющую точки P_i и P_j, тогда $\mathfrak{d}$ содержит $L_{12} + L_{34}$ и $L_{13} + L_{24}$. Так как никакие три точки P_i не коллинеарны, то пересечение этих двух дивизоров состоит из точек $P_1, \ldots, P_4$ с кратностью 1 каждая, так что непредписанных базисных точек в этом случае нет.

Предположим теперь, что точка P_2 бесконечно близка к P_1, тогда $\mathfrak{d}$ содержит $L_{12}+L_{34}$ и $L_{13}+L_{24}$. (Здесь L_{12} обозначает, конечно, прямую, проходящую через P_1 в касательном направлении, определяемом точкой P_2.) Их пересечение опять состоит из $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, так что других базисных точек нет и в этом случае.

Следствие 4.2. *В условиях предложения* 4.1

(a) *если* $r \leqslant 5$, *то* $\dim \mathfrak{d} = 5-r$;

(b) *если* $r=5$, *то существует единственная коника, обязательно неприводимая, проходящая через точки* $P_1, \ldots, P_5$.

Более того, утверждение остается верным, если P_5 *является бесконечно близкой к любой из оставшихся точек* $P_1, \ldots, P_4$.

Доказательство. (a) Согласно предложению 4.1, каждый раз мы предписываем новую базисную точку линейной системе, не имеющей непредписанных базисных точек, поэтому ее размерность падает каждый раз на 1. Так как размерность линейной системы всех коник в $\mathbf{P}^2$ равна 5, то это доказывает требуемое утверждение.

(b) При $r=5$ $\dim \mathfrak{d}=0$, так что существует единственная коника, содержащая $P_1, \ldots, P_5$. Она должна быть неприводимой, поскольку никакие три из этих пяти точек не коллинеарны.

Замечание 4.2.1. Последнее утверждение в 4.2 — это классический факт о том, что коника однозначно определяется заданием 5 точек или 4 точек и касательного направления в одной из них, или 3 точек и касательных направлений в двух из них, или даже 3 точек с касательным направлением в одной из них и еще касательным направлением второго порядка в этой же точке (в таком случае P_5 бесконечно близка к P_2, которая бесконечно близка к P_1).

Пример 4.2.2. Пусть $r=1$, тогда $\mathfrak{d}$ не имеет непредписанных базисных точек и для любой точки P линейная система $\mathfrak{d}-P$ тоже не имеет непредписанных базисных точек, следовательно, по 4.0.3 линейная система $\mathfrak{d}'$ очень обильна на X'. Так как $\dim \mathfrak{d}'=4$, то она задает вложение X' в $\mathbf{P}^4$ в качестве поверхности степени 3, равной числу непредписанных точек пересечения двух дивизоров в $\mathfrak{d}$. На самом деле X' — это не что иное, как рациональная линейчатая поверхность с $e=1$ и ее вложением в $\mathbf{P}^4$ как рациональной линейчатой поверхности степени 3 (см. 2.19.1).

Пример 4.2.3. Пусть $r=3$, тогда X' — это $\mathbf{P}^2$ с тремя раздутыми точками и $\dim \mathfrak{d}=2$. Так как $\mathfrak{d}'$ не имеет базисных точек, то она определяет морфизм ψ поверхности X' в $\mathbf{P}^2$. В качестве точек P_1, P_2 и P_3 мы можем взять точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$

соответственно. Тогда векторное пространство $V \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2))$, соответствующее $\mathfrak{d}$, порождается формами x_1x_2, x_0x_2 и x_0x_1, так что отображение ψ может быть задано формулами $y_0=x_1x_2$, $y_1=x_0x_2$, $y_2=x_0x_1$, где y_i — однородные координаты новой плоскости $\mathbf{P}^2$. Рассматривая это как рациональное отображение из $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}^2$, замечаем, что оно является не чем иным, как *квадратичным преобразованием* φ, определенным в упр. 4.6 гл. I.

Покажем теперь, что ψ отождествляет X' со вторым экземпляром плоскости $\mathbf{P}^2$, раздутой в трех точках $Q_1=(1, 0, 0)$, $Q_2=(0, 1, 0)$ и $Q_4=(0, 0, 1)$ таким образом, что исключительная кривая $\psi^{-1}(Q_i)$ является собственным прообразом прямой L_{jk}, соединяющей точки P_j и P_k на первом экземпляре $\mathbf{P}^2$, где $(i, j, k)=(1, 2, 3)$ в некотором порядке. Более того, $\psi(E_i)$ — это прямая M_{jk}, соединяющая Q_j с Q_k для каждых $(i, j, k)=(1, 2, 3)$. Таким образом, можно сказать, что квадратичное преобразование φ — это раздутие трех точек P_1, P_2, P_3 и стягивание прямых $\tilde{L}_{12}$, $\tilde{L}_{13}$, $\tilde{L}_{23}$ (см. рис. 21).

Чтобы это доказать, рассмотрим многообразие V в $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, определенное биоднородными уравнениями $x_0y_0=x_1y_1=x_2y_2$. Я утверждаю, что $V=X'$ и проекция $p_1\colon V \to \mathbf{P}^2$ совпадает

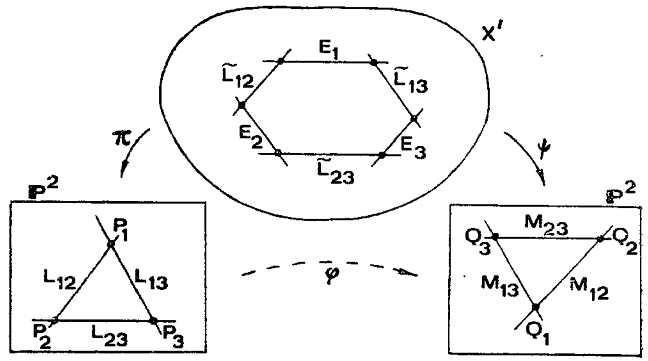


Рис. 21. Квадратичное преобразование $\mathbf{P}^2$.

с морфизмом $X' \to \mathbf{P}^2$ раздутия точек P_1, P_2 и P_3. Проверку этого можно сделать локально, поскольку раздутие точки зависит только от ее окрестности. Рассмотрим открытое множество $U \subset \mathbf{P}^2$, определенное условием $x_0=1$. Тогда $U=\operatorname{Spec} A$, где $A=k[x_1, x_2]$, и $p_1^{-1}(U)$ можно записать так:

$$p_1^{-1}(U)=\operatorname{Proj} A[y_0, y_1, y_2]/(y_0-x_1y_1, x_1y_1-x_2y_2).$$

Мы можем исключить y_0 из градуированного кольца, поэтому

$$p_1^{-1}(U) \simeq \operatorname{Proj} A[y_1, y_2]/(x_1y_1-x_2y_2).$$

Но отсюда видно, что $p_1^{-1}(U)$ изоморфно U с одной раздутой точкой $(x_1x_2) = (0, 0)$, как и в доказательстве 3.6.

Проделав то же самое с открытыми множествами $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$ в $\mathbf{P}^2$, видим, что V с проекцией на первый множитель $\mathbf{P}^2$ совпадает с X' как раздутием трех точек P_1, P_2 и P_3 на $\mathbf{P}^2$. Ввиду симметрии V с проекцией на второй множитель $\mathbf{P}^2$ отождествляется с раздутием трех точек Q_1, Q_2 и Q_3 на втором экземпляре $\mathbf{P}^2$, так что $p_2 \circ p_1^{-1}$ является бирациональным отображением $\mathbf{P}^2$ в себя. Разрешая уравнения $x_0y_0 = x_1y_1 = x_2y_2$, когда $x_0, x_1, x_2 \neq 0$, получаем $y_0 = x_1x_2$, $y_1 = x_0x_2$, $y_2 = x_0x_1$. Отсюда видно, что преобразование $p_2 \circ p_1^{-1}$ совпадает с квадратичным преобразованием φ.

Далее, отображение $\psi\colon X' \to \mathbf{P}^2$ совпадает с $p_2\colon V \to \mathbf{P}^2$, поэтому φ действительно является раздутием трех точек и стягиванием трех прямых. Наконец, как видно из уравнений, $p_2(\tilde{L}_{ij}) = Q_k$ и $p_2(E_i) = M_{jk}$ для всех i, j, k.

Предложение 4.3. *Пусть $\mathfrak{d}$ — линейная система плоских кубических кривых с предписанными базисными точками $P_1, \ldots, P_r$, и предположим, что никакие 4 из P_i не лежат на одной прямой и никакие 7 не лежат на конике. Тогда если $r \leqslant 7$, то $\mathfrak{d}$ не имеет непредписанных базисных точек. Это утверждение остается верным, если точка P_2 бесконечно близка к P_1.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $r = 7$. Покажем прежде всего, что если $P_1, \ldots, P_7$ — обычные точки на $\mathbf{P}^2$, то $\mathfrak{d}$ не имеет непредписанных базисных точек. Для этого достаточно показать, что для каждой точки Q, отличной от точек P_i, существует кубическая кривая, проходящая через точки $P_1, \ldots, P_7$, но не проходящая через точку Q.

Случай 1. Предположим, что существуют некоторые три точки, скажем P_1, P_2 и P_3, лежащие на одной прямой L^* с точкой Q. Тогда точки P_4, P_5, P_6, P_7 не лежат все на одной прямой, так что можно считать, что, например, точки P_4, P_5, P_6 не коллинеарны. В таком случае коника Γ_{12456}, проходящая через точки P_1, P_2, P_4, P_5, P_6, и прямая L_{37}, проходящая через точки P_3 и P_7, составляют кубическую кривую, содержащую $P_1, \ldots, P_7$, но не содержащую Q. Действительно, если $Q \in \Gamma_{12456}$, то эта коника содержит прямую L^*, так что она приводима; в этом случае точки P_4, P_5, P_6 должны быть коллинеарными, что противоречит их выбору. Если $Q \in L_{37}$, то $P_7 \in L^*$, следовательно, точки P_1, P_2, P_3 и P_7 лежат на одной прямой, что противоречит условию предложения.

Случай 2. Предположим, что Q не лежит на одной прямой ни с какой тройкой точек P_i, но лежит на конике Γ^* (обязательно неприводимой), содержащей 6 точек P_i, скажем $P_1, \ldots, P_6$. Тогда $\Gamma_{12347} + L_{56}$ является кубикой, не содержащей точку Q. Действительно, если $Q \in \Gamma_{12347}$, то точки P_1, P_2, P_3, P_4, Q лежат на этой конике и на конике Γ^*, поэтому по (4.2) $\Gamma_{12347} = \Gamma^*$. Но тогда все 7 точек $P_1, \ldots, P_7$ лежат на Γ^*, что противоречит условию. Если $Q \in L_{56}$, то Γ^* приводима. Противоречие!

Случай 3. Точка Q не коллинеарна ни с какой тройкой точек P_i и не лежит на одной конике ни с какими 6 из них. Рассмотрим три кубические кривые $C_i = \Gamma_{1234i} + L_{jk}$, где $(i, j, k) = (5, 6, 7)$ в некотором порядке. Покажем, что одна из них не содержит Q. Если $Q \in L_{56}$, то $Q \notin L_{57}$ и $Q \notin L_{67}$, в противном случае точки P_5, P_6, P_7, Q были бы коллинеарны. Таким образом, отправляясь от C_7, мы можем предполагать, что $Q \notin L_{57}$ и $Q \notin L_{67}$. Тогда если $Q \in C_5$ и $Q \in C_6$, то $Q \in \Gamma_{12345}$ и $Q \in \Gamma_{12346}$. Рассмотрим конику $\Gamma' = \Gamma_{1234Q}$. Если она неприводима, то из 4.2 следует, что все эти коники совпадают и $Q \in \Gamma_{123456}$, что противоречит предположению. Если Γ' приводима, то при подходящем переобозначении либо (a) $\Gamma' = L_{123} + L_Q$, либо (b) $\Gamma' = L_{12Q} + L_{34}$. В случае (a) $\Gamma_{12345} = L_{123} + L_{45}$ и $\Gamma_{12346} = L_{123} + L_{46}$, следовательно, P_4, P_5, P_6 и Q коллинеарны, что опять противоречит предположению. В случае (b) $\Gamma_{12345} = L_{12} + L_{345}$ и $\Gamma_{12346} = L_{12} + L_{346}$ и опять противоречие, поскольку P_3, P_4, P_5, P_6 должны быть в этом случае коллинеарны.

Тем самым доказательство закончено в случае, когда все точки $P_1, \ldots, P_7$ и Q являются обычными точками плоскости $\mathbf{P}^2$. То же доказательство проходит и в случае, когда P_2 бесконечно близка к P_1 или когда Q бесконечно близка к одной из P_i или то и другое вместе. Нумерация точек P_i произвольна, поэтому конструкция имеет смысл, как и в 4.2, также и в случае бесконечно близких точек. (Подробности мы оставляем читателю.)

Следствие 4.4. *В условиях предложения* 4.3

(a) *если* $r \leqslant 8$, *то* $\dim \mathfrak{d} = 9 - r$;

(b) *если* $r = 8$, *то* $\dim \mathfrak{d} = 1$ *и почти каждая кривая в* $\mathfrak{d}$ *неприводима.*

Доказательство. При $r \leqslant 7$ линейная система $\mathfrak{d}$ не имеет непредписанных базисных точек, поэтому добавление каждой предписанной базисной точки уменьшает ее размерность на единицу. Все кубики образуют линейную систему размерности 9. Отсюда непосредственно вытекает утверждение (a). Для доказательства (b) заметим, что при условии, что никакие 4 точки не лежат на одной прямой и никакие 7 — на одной конике, существует только конечное число способов провести три прямые или одну прямую и конику через 8 точек. Это доказывает утверждение (b).

Следствие 4.5. *Пусть $P_1, \ldots, P_8$ — точки плоскости $\mathbf{P}^2$, из которых никакие 4 не коллинеарны и никакие 7 не лежат на одной конике, тогда существует однозначно определенная точка P_9 (возможно, бесконечно близкая), такая, что каждая кубика, проходя-*

щая через точки $P_1, \ldots, P_8$, проходит и через точку P_9. Утверждение остается верным также, если P_2 бесконечно близка к P_1 и P_8 бесконечно близка к любой из точек $P_1, \ldots, P_7$.

Доказательство. По 4.4 размерность линейной системы $\mathfrak{d}$ всех кубик, проходящих через точки $P_1, \ldots, P_8$, равна 1 и, следовательно, в этой линейной системе можно взять две неприводимые линейно независимые кубики C и $C' \in \mathfrak{d}$. Тогде по теореме Безу 1.4.2 (см. также упр. 3.2) кривые C и C' пересекаются в 9 точках, 8 из которых — это $P_1, \ldots, P_8$. Стало быть, существует еще девятая точка P_9, возможно бесконечно близкая к одной из P_i. Далее, поскольку $\dim \mathfrak{d} = 1$, то любая кривая $C'' \in \mathfrak{d}$, приводимая или нет, является линейной комбинацией кривых C и C'. Поэтому она должна проходить также через точку P_9. Таким образом, P_9 является непредписанной базисной точкой системы $\mathfrak{d}$.

Замечание 4.5.1. Этот классический результат имеет несколько интересных геометрических следствий. См. упр. 4.4 и упр. 4.5.

Теорема 4.6. *Пусть $\mathfrak{d}$ — линейная система плоских кубических кривых с предписанными (обычными) базисными точками $P_1, \ldots, P_r$, и предположим, что никакие 3 из P_i не коллинеарны и никакие 6 не лежат на одной конике. Тогда если $r \leqslant 6$, то соответствующая линейная система $\mathfrak{d}'$ на поверхности X', полученной из $\mathbf{P}^2$ раздутием $P_1, \ldots, P_r$, очень обильна.*

Доказательство. Согласно 4.0.3, надо проверить, что $\mathfrak{d}$ не имеет непредписанных базисных точек и что для каждой точки P, возможно бесконечно близкой, линейная система $\mathfrak{d} - P$ также не имеет непредписанных базисных точек. Первое из этих свойств является непосредственным следствием предложения 4.3. Для проверки второго заметим, что поскольку никакие 3 из P_i не коллинеарны и никакие 6 не лежат на одной конике, то $r+1$ точек $P_1, \ldots, P_r, P$ удовлетворяют условиям предложения 4.3. Так что и этот случай вытекает из предложения 4.3.

Следствие 4.7. *В тех же предположениях для каждого $r = 0, 1, \ldots, 6$ поверхность X' вкладывается в $\mathbf{P}^{9-r}$ как поверхность степени $9-r$, канонический пучок $\omega_{X'}$ которой изоморфен $\mathcal{O}_{X'}(-1)$. В частности, при $r = 6$ мы получаем неособую кубическую поверхность в $\mathbf{P}^3$.*

Доказательство. Вложим X' в $\mathbf{P}^N$ с помощью очень обильной линейной системы $\mathfrak{d}'$. Так как по 4.4 $\dim \mathfrak{d} = \dim \mathfrak{d}' = 9 - r$, то $N = 9 - r$. Пусть L — прямая в $\mathbf{P}^2$, тогда $\mathfrak{d}' = |\pi^*3L - E_1 - \ldots - E_r|$, так что для любого $D' \in \mathfrak{d}'$ имеем $D'^2 = 9 - r$. Следовательно, степень X' в $\mathbf{P}^N$ равна $9 - r$. Наконец, так как канонический дивизор на $\mathbf{P}^2$ равен $-3L$, то из 3.3

мы получаем, что $K_{X'} = -\pi^*3L + E_1 + \ldots + E_r$, а это равно $-D'$. Следовательно, $\omega_{X'} \simeq \mathcal{O}_{X'}(-1)$ в данном проективном вложении.

Замечание 4.7.1. Поверхность X степени d в $\mathbf{P}^d$, такая, что $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(-1)$, называется *поверхностью Дель Пеццо*. В 4.6 и 4.7 указан способ построения поверхностей Дель Пеццо степени $d = 3, 4, \ldots, 9$. Классический результат утверждает, что всякая поверхность Дель Пеццо является либо одной из указанных в 4.7 для подходящим образом выбранных точек $P_i \in \mathbf{P}^2$, либо образом 2-кратного вложения неособой квадрики в $\mathbf{P}^3$, являющимся поверхностью Дель Пеццо степени 8 в $\mathbf{P}_8$. В частности, каждая неособая кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$ может быть получена раздутием 6 точек в плоскости. Условие $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(-1)$ для кубической поверхности в $\mathbf{P}^3$ выполнено автоматически (см. упр. 8.4 гл. II). Действительно, см., например, Манин [3, § 24] или Нагата [5, I, теорема 8].

Замечание 4.7.2. В случае кубических поверхностей в $\mathbf{P}^3$ счетом констант можно доказать несколько более слабый результат. Для задания 6 точек на плоскости требуется 12 параметров. Вычитая отсюда 8 параметров группы автоморфизмов $\mathbf{P}^2$ и прибавляя 15 параметров группы автоморфизмов $\mathbf{P}^3$, получаем, что кубические поверхности в $\mathbf{P}^3$, полученные способом 4.7, зависят от 19 параметров. Но семейство всех кубических поверхностей в $\mathbf{P}^3$ имеет размерность, равную $\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(3)) - 1$, т. е. тоже 19. Таким образом, это показывает, что почти все неособые кубические поверхности получаются с помощью конструкции 4.7.

Обозначения 4.7.3. В оставшейся части этого параграфа мы будем рассматривать только случай кубических поверхностей в $\mathbf{P}^3$, поэтому зафиксируем некоторые обозначения. Пусть $P_1, \ldots, P_6$ — шесть точек плоскости, никакие 3 из которых не коллинеарны и все 6 не могут лежать на одной конике. Пусть $\mathfrak{d}$ обозначает линейную систему плоских кубических кривых, проходящих через $P_1, \ldots, P_6$, X — неособая кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$, полученная раздутием этих точек, как в 4.7, и $\pi\colon X \to \mathbf{P}^2$ — соответствующий морфизм. Пусть $E_1, \ldots, E_6 \subset X$ — исключительные кривые и $e_1, \ldots, e_6$ — их классы в $\operatorname{Pic} X$; $l \in \operatorname{Pic} X$ — класс полного прообраза прямой в $\mathbf{P}^2$.

Предложения 4.8. *Пусть X — кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$ (4.7.3). Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) *$\operatorname{Pic} X \simeq \mathbf{Z}^7$ и порождается классами $l, e_1, \ldots, e_6$;*

(b) *пересечение на $\operatorname{Pic} X$ задается формулами $l^2 = 1$, $e_i^2 = -1$, $l \cdot e_i = 0$, $e_i e_j = 0$ для $i \neq j$;*

(c) *гиперплоское сечение h эквивалентно $3l - \sum e_i$;*

(d) *канонический класс* K *равен* $-h = -3l + \sum e_i$;

(e) *пусть* $D \sim al - \sum b_i e_i$ *— эффективный дивизор на* X, *тогда его степень как кривой в* $\mathbf{P}^3$ *равна* $d = 3a - \sum b_i$;

(f) *индекс самопересечения дивизора* D *определяется формулой*

$$D^2 = a^2 - \sum b_i^2;$$

(g) *арифметический род* D *определяется формулой*

$$p_a(D) = \frac{1}{2}(D^2 - d) + 1 = \frac{1}{2}(a-1)(a-2) - \frac{1}{2}\sum b_i(b_i - 1).$$

Доказательство. Все эти утверждения легко следуют из предыдущих результатов: (a) и (b) вытекают из (3.2); (c) получается из конструкции вложения X в $\mathbf{P}^3$; (d) следует из (3.3); (e) вытекает из того факта, что $\deg D = D\cdot h$; (f) немедленно выводится из (b); (g) следует из формулы присоединения $2p_a(D) - 2 = D\cdot(D+K)$ (см. упр. 1.3) и того факта, что, согласно (d), $D\cdot K = -D\cdot h = -d$.

Замечание 4.8.1. Пусть C — любая неприводимая кривая на X, отличная от $E_1, \ldots, E_6$, тогда $\pi(C)$ — неприводимая плоская кривая, скажем C_0, и C является ее собственным прообразом. Пусть степень C_0 равна a, и предположим, что C_0 имеет кратность b_i в каждой точке P_i. Тогда по 3.6 $\pi^* C_0 = C + \sum b_i E_i$. Так как C_0 эквивалентна прямой, взятой с кратностью a, то $C \sim al - \sum b_i e_i$. Таким образом, для любых $a, b_1, \ldots, b_6 \geqslant 0$ всякую кривую C на X в классе $al - \sum b_i e_i$ можно интерпретировать как собственный прообраз плоской кривой степени a, проходящей через точки P_i с кратностями b_i. Таким образом изучение кривых на X сводится к изучению некоторых плоских кривых.

Теорема 4.9 (двадцать семь прямых). *На кубической поверхности* X *в* $\mathbf{P}^3$ *лежит ровно 27 прямых. Индекс самопересечения каждой из них равен* -1, *и они являются единственными неприводимыми кривыми на* X *с отрицательным индексом самопересечения. Этими 27 прямыми являются:*

(a) *исключительные кривые* $E_1, \ldots, E_6$ (*шесть штук*);

(b) *собственные прообразы* F_{ij} *прямых в* $\mathbf{P}^2$, *проходящих через точки* P_i *и* P_j, $1 \leqslant i < j \leqslant 6$ (*пятнадцать штук*);

(c) *собственные прообразы* G_j *коник в* $\mathbf{P}^2$, *проходящих через пять из шести точек* P_i, $i \neq j$, $j = 1, \ldots, 6$ (*шесть штук*).

Доказательство. Прежде всего если L — любая прямая, лежащая на X, то $\deg L = 1$ и $p_a(L) = 0$, поэтому $L^2 = -1$ (см. 4.8, а также упр. 1.4). Обратно, пусть C — неприводимая кривая на X с $C^2 < 0$, тогда, поскольку $p_a(C) \geqslant 0$, то (по 4.8) мы должны иметь $C^2 = -1$, $p_a(C) = 0$ и $\deg C = 1$, так что C — прямая.

Далее, из 4.8.1 мы видим, что $E_i \sim e_i$, $F_{ij} \sim l - e_i - e_j$ и $G_j \sim 2l - \sum\limits_{i\neq j} e_i$, и из 4.8 непосредственно следует, что каждая из этих кривых имеет степень 1, т. е. является прямой на X.

Осталось показать, что если C — любая неприводимая кривая на X с $\deg C = 1$ и $C^2 = -1$, то C — одна из 27 прямых, перечисленных в условии теоремы. Предположим, что C отлична от E_i, тогда по 4.8.1 $C \sim al - \sum b_i e_i$, где $a > 0$ и $b_i \geqslant 0$. Кроме того,

$$\deg C = 3a - \sum b_i = 1,$$

$$C^2 = a^2 - \sum b_i^2 = -1.$$

Покажем, что этим условиям удовлетворяют только такие целые $a, b_1, \ldots, b_6$, которые соответствуют прямым F_{ij} и G_j.

Напомним неравенство Шварца: пусть $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ — две последовательности вещественных чисел, тогда

$$\left|\sum x_i y_i\right|^2 \leqslant \left|\sum x_i^2\right| \cdot \left|\sum y_i^2\right|.$$

Полагая $x_i = 1$, $y_i = b_i$, $i = 1, \ldots, 6$, находим, что

$$\left(\sum b_i\right)^2 \leqslant 6\sum b_i^2.$$

Подставляя сюда $\sum b_i = 3a - 1$ и $\sum b_i^2 = a^2 + 1$ из предыдущих равенств, получаем, что

$$3a^2 - 6a - 5 \leqslant 0.$$

Отсюда находим, что $a \leqslant 1 + {}^2/_3\sqrt{6} < 3$. Следовательно, $a = 1$ или 2. Теперь ничего не стоит найти все возможные значения b_i: если $a = 1$, то $b_i = b_j = 1$ для некоторых i и j, остальные — нули; если $a = 2$, то все b_i равны 1, кроме одного b_j, равного нулю. Это дает соответственно случай F_{ij} и G_j.

Замечание 4.9.1. В классической проективной геометрии существует целый раздел, посвященный 27 прямым на кубической поверхности. Так, например, 12 прямых $E_1, \ldots, E_6, G_1, \ldots, G_6$ в $\mathbf{P}^3$, обладающих свойствами, что E_i попарно скрещиваются между собой, G_i попарно скрещиваются между собой и что E_i пересекается с G_j, если и только если $i \neq j$, называются *двойной шестеркой Шлефли*. Можно показать, что если задана одна прямая E_1 и пять прямых $G_2, \ldots, G_6$, ее пересекающих, а в остальном находящихся в достаточно общем положении, то остальные прямые $E_2, \ldots, E_6$ и G_1 однозначно восстанавливаются до образования двойной шестерки Шлефли. Более того, каждая двойная шестерка содержится в единственной неособой кубической поверхности и, следовательно, составляет часть 27 прямых, лежащих на ней. См. Гильберт и Кон-Фоссен [1, § 25]. Эти 27 прямых на кубической поверхности обладают глубокой симметрией расположения, как мы сейчас увидим.

Предложение 4.10. *Пусть X — кубическая поверхность, как и раньше, $E_1', \ldots, E_6'$ — любая шестерка попарно скрещивающихся прямых из 27 прямых на X. Тогда существует морфизм π': $X \to \mathbf{P}^2$, такой, что X изоморфен раздутию шести точек $P_1', \ldots, P_6'$ на плоскости $\mathbf{P}^2$ (никакие 3 из которых не коллинеарны, и все 6 не могут лежать на одной конике), так что $E_1', \ldots, E_6'$ являются исключительными кривыми для морфизма π'.*

Доказательство. Разобьем его на несколько шагов, работая каждый раз только с одной прямой. Покажем, что можно найти морфизм π', такой, что E_1' является прообразом точки P_1'.

Случай 1. Если E_1' — одна из прямых E_i, то возьмем $\pi' = \pi$, перенумеровав P_i так, чтобы P_1' совпадала с P_i.

Случай 2. Если E_1' — одна из прямых F_{ij}, скажем $E_1' = F_{12}$, то применим к $\mathbf{P}^2$ квадратичное преобразование с центрами P_1, P_2, P_3 (4.2.3). Пусть X_0 — плоскость $\mathbf{P}^2$ с раздутыми точками P_1, P_2, P_3, π_0: $X_0 \to \mathbf{P}^2$ — соответствующий морфизм и ψ: $X_0 \to \mathbf{P}^2$ — отображение на второй экземпляр $\mathbf{P}^2$, как в 4.2.3, так что посредством ψ X_0 представляется как раздутие $\mathbf{P}^2$ в точках Q_1, Q_2, Q_3. Так как π: $X \to \mathbf{P}^2$ — раздутие шести точек $P_1, \ldots, P_6$, то π пропускается через π_0, $\pi = \pi_0 \circ \theta$, где θ: $X \to X_0$ — некоторый морфизм. Определим теперь морфизм π' как композицию $\psi \circ \theta$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{P}^2 \\
X \arrow[r, "\theta"] \arrow[urr, bend left, "\pi'"] \arrow[drr, bend right, "\pi"'] & X_0 \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_0"'] & \\
 & & \mathbf{P}^2 \arrow[uu, dashed, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Тогда, используя обозначения из 4.2.3, имеем $\theta(F_{12}) = \tilde{L}_{12}$, так что $\pi'(F_{12}) = Q_3$. Более того, π' представляет X как раздутие $\mathbf{P}^2$ в точках Q_1, Q_2, Q_3, P_4', P_5', P_6', где P_4', P_5', P_6' — образы P_4, P_5, P_6 при отображении $\psi \circ \pi_0^{-1}$. Полагая теперь $P_1' = Q_3$, $P_2' = Q_1$ и $P_3' = Q_2$, имеем $E_1' = \pi'^{-1}(P_1')$.

Осталось проверить, что никакие 3 из точек Q_1, Q_2, Q_3, P_4', P_5', P_6' не лежат на одной прямой и все 6 не лежат на одной конике. Точки Q_1, Q_2, Q_3 не коллинеарны по построению. Предположим, что Q_1, Q_2, P_4' коллинеарны, тогда $\psi^{-1}(P_4') \in E_3$, так что P_4 должна быть бесконечно близкой точкой к P_3, а это не так по условию. Если Q_1, P_4', P_5' лежат на одной прямой, скажем L', то собственный прообраз L' относительно φ^{-1} будет прямой L, содержащей точки P_1, P_4, P_5. Действительно, φ^{-1} является рациональным отображением, определяемым линейной системой коник, проходящих через Q_1, Q_2, Q_3. Эти коники имеют одну свободную точку пересечения с L', поэтому собственным прообразом L' будет некоторая прямая L. Кроме того, L' пересекает M_{23}, так что L проходит через P_1. Следовательно, L содержит точки P_1, P_4, P_5, что противоречит условию выбора точек $P_1, \ldots, P_6$. Наконец, предположим, что P_4', P_5', P_6' коллинеарны. Тогда, так как отображение φ определяется линейной системой коник, проходящих через точки P_1, P_2, P_3, собственный прообраз прямой L', содержащей точки P_4', P_5', P_6', должен быть коникой Γ, содержащей точки $P_1, \ldots, P_6$, что невозможно по условию. По тем же соображениям если точки Q_1, Q_2, Q_3, P_4', P_5', P_6' лежат на одной конике, то точки P_4, P_5, P_6 должны быть коллинеарны. Это завершает разбор случая 2.

Случай 3. Если E_1' — одна из прямых G_j, скажем $E_1' = G_6$, то опять применим квадратичное преобразование 4.2.3 с центрами P_1, P_2, P_3. Так как $\pi(G_6)$ — коника, проходящая через точки $P_1, \ldots, P_5$, то мы видим, что $\pi'(G_6)$ является прямой, проходящей через точки P_4', P_5'. Таким образом, E_1' является кривой F_{45}' для проекции π' и все сводится к случаю 2.

Итак, мы можем предполагать теперь, что $E_1' = E_1$, и будем рассматривать E_2'. Так как E_2' не пересекает E_1, то возможными кандидатами для E_2' являются $E_2, \ldots, E_6$, F_{ij} с $1 < i$, j или G_1. Воспользуемся тем же методом, что и в случаях 1, 2 и 3. В результате мы получим, что E_2' можно переместить в положение E_2, не затрагивая P_1. При этом мы позволяем себе только перенумеровывать точки $P_2, \ldots, P_5$ и пользоваться квадратичными преобразованиями с центрами в трех точках из $P_2, \ldots, P_5$.

Продолжая таким же образом, мы переместим $E_1', \ldots, E_6'$ в положение $E_1, \ldots, E_6$ и тем самым докажем предложение. Приведем, например, последний шаг. Предположим, что $E_i' = E_i$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда остаются только три прямые, которые не пересекают $E_1, \ldots, E_4$, а именно E_5, E_6 и F_{56}. Так как F_{56} пересекает E_5 и E_6, то прямые E_5' и E_6' должны совпадать с прямыми E_5 и E_6 с точностью до порядка, так что последним шагом является перемещение E_5' в E_6, а шестая прямая занимает свое положение автоматически.

Замечание 4.10.1. Это предложение показывает, что любые шесть попарно не пересекающихся прямых из 27 играют роль $E_1, \ldots, E_6$. Это можно установить и еще одним способом, рассматривая *конфигурацию* всех 27 прямых (лежащих на поверхности X). Это означает, что рассматривается множество из 27 элементов E_i, F_{ij}, G_j (прямых) с соответствующим отношением инцидентности. Отношение инцидентности легко находится из 4.8 и 4.9: E_i не пересекает E_j при $i \neq j$; E_i пересекает F_{jk} тогда и только тогда, когда $i = j$ или $i = k$; E_i пересекает G_j тогда и только тогда, когда $i \neq j$; F_{ij} пересекает F_{kl} тогда и только тогда, когда все индексы i, j, k, l различны; F_{ij} пересекает G_k тогда и только тогда, когда $i = k$ или $j = k$; G_j не пересекает G_k при $j \neq k$.

Теперь тот факт, что набор прямых $E'_1, \ldots, E'_6$ играет роль $E_1, \ldots, E_6$, означает, что можно в другом порядке перенумеровать все 27 прямых, начиная с $E'_1, \ldots, E'_6$, так, чтобы они удовлетворяли тому же самому отношению инцидентности. Иначе говоря, существует некоторый *автоморфизм конфигурации*, т. е. перестановка на множестве из 27 элементов, сохраняющая отношение инцидентности, который переводит $E_1, \ldots, E_6$ в $E'_1, \ldots, E'_6$. Отметим, кроме того, что нумерация $E_1, \ldots, E_6$ однозначно определяет нумерацию оставшихся 21 прямой: F_{ij} — это единственная прямая, пересекающая E_i и E_j и не пересекающая никакую прямую E_k; G_j — это единственная прямая, которая пересекает все E_i, кроме E_j.

Таким образом, 4.10 утверждает, что для каждой (упорядоченной) шестерки попарно не пересекающихся прямых из 27 прямых на X существует единственный автоморфизм всей конфигурации, переводящий $E_1, \ldots, E_6$ в эту шестерку. Поскольку всякий автоморфизм должен переводить непересекающиеся прямые в непересекающиеся, то таким способом мы получаем все элементы группы автоморфизмов конфигурации G. Из явного описания отношения инцидентности легко посчитать все выборы таких шестерок попарно не пересекающихся прямых: имеется 27 выборов для E_1, 16 для E_2, 10 для E_3, 6 для E_4, 2 для E_5 и 1 для E_6. Так что порядок группы G равен $27 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2 = 51\,840$.

Можно показать, что группа G изоморфна *группе Вейля* $\mathbf{E}_6$ и что она содержит нормальную подгруппу индекса 2, которая является простой группой порядка 25 920. См. упр. 4.11 и Манин [3, § 25, 26].

Используем эту симметрию 27 прямых для описания обильных и очень обильных классов дивизоров на кубической поверхности.

Теорема 4.11. *Для любого дивизора D на кубической поверхности X следующие условия эквивалентны:*
(i) *D очень обилен;*
(ii) *D обилен;*
(iii) *$D^2 > 0$ и $D \cdot L > 0$ для каждой прямой $L \subset X$;*
(iv) *$D \cdot L > 0$ для каждой прямой $L \subset X$.*

Доказательство (начало). Из легкой части критерия Накаи 1.10 непосредственно получаем, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). Для доказательства импликации (iv) $\Rightarrow$ (i) нам понадобится следующая

Лемма 4.12. *Пусть $D \sim al - \sum b_i e_i$ — класс дивизоров на кубической поверхности X, и предположим, что $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_6 > 0$ и $a \geqslant b_1 + b_2 + b_5$. Тогда D очень обилен.*

Доказательство. Воспользуемся общим фактом, что сумма очень обильного дивизора и дивизора, варьирующегося в линейной системе без базисных точек, является очень обильным дивизором (упр. 7.5 гл. II). Рассмотрим следующие классы дивизоров:

$$\begin{aligned}
D_0 &= l,\\
D_1 &= l - e_1,\\
D_2 &= 2l - e_1 - e_2,\\
D_3 &= 2l - e_1 - e_2 - e_3,\\
D_4 &= 2l - e_1 - e_2 - e_3 - e_4,\\
D_5 &= 3l - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5,\\
D_6 &= 3l - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6.
\end{aligned}$$

Здесь $|D_0|$ и $|D_1|$ соответствуют линейным системам прямых в $\mathbf{P}^2$ без предписанных базисных точек и с одной предписанной базисной точкой, не имеющим непредписанных базисных точек. Линейные системы $|D_2|$, $|D_3|$ и $|D_4|$ не имеют базисных точек по 4.1, $|D_5|$ не имеет базисных точек по 4.3 и D_6 очень обилен по 4.6. Следовательно, их линейная комбинация $D = \sum c_i D_i$ с $c_i \geqslant 0$ и $c_6 > 0$ будет очень обильным классом дивизоров.

Очевидно, что $D_0, \ldots, D_6$ образуют базис группы $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbf{Z}^7$. Записывая $D \sim al - \sum b_i e_i$, получаем $b_6 = c_6$, $b_5 = c_5 + c_6, \ldots, b_1 = c_1 + \ldots + c_6$, $a = c_1 + 2(c_2 + c_3 + c_4) + 3(c_5 + c_6)$. Отсюда видно, что условия $c_i \geqslant 0$, $c_6 > 0$ эквивалентны условиям $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_6 > 0$ и $a \geqslant b_1 + b_2 + b_5$, поэтому любой дивизор, удовлетворяющий этим условиям, очень обилен.

Доказательство 4.11 (окончание). Предположим, что дивизор D удовлетворяет условию $D \cdot L > 0$ для любой прямой $L \subset X$. Выберем шестерку попарно не пересекающихся прямых $E'_1, \ldots, E'_6$ следующим образом: E'_6 выберем так, чтобы $D \cdot E'_6$ равнялось минимуму значений $D \cdot L$ для любых прямых L; E'_5 — так, чтобы $D \cdot E'_5$ равнялось минимуму значений $D \cdot L$ для таких L, которые не пересекают E'_6, E'_4 и E'_3 выберем аналогично. Тогда останутся только три прямые, которые не пересекают E'_6, E'_5, E'_4 и E'_3, причем одна из них пересекает две другие. Выберем E'_1, E'_2, так чтобы $D \cdot E'_1 \geqslant D \cdot E'_2$.

Теперь, согласно 4.10, можно считать, что $E'_i = E_i$ для каждого i. Записывая $D \sim al - \sum b_i e_i$, имеем $D \cdot E_i = b_i$, так что по построению $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_6 > 0$. С другой стороны, прямая F_{12} — наиболее подходящая кандидатура для выбора E_3, поэтому $D\cdot F_{12} \geqslant D\cdot E_3$. Это означает, что $a - b_1 - b_2 \geqslant b_3$, т.е. что $a \geqslant b_1 + b_2 + b_3$. Так как $b_3 \geqslant b_5$, то условие предыдущей леммы выполняется и, следовательно, D очень обилен. Доказательство теоремы закончено.

Следствие 4.13. *Пусть $D \sim al - \sum b_i e_i$ — класс дивизоров на X. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *D обилен $\Longleftrightarrow$ D очень обилен $\Longleftrightarrow$ $b_i > 0$ для каждого i и $a > b_i + b_j$ для любых i, j и $2a > \sum\limits_{i \neq j} b_i$ для каждого j;*

(b) *в любом классе дивизоров, удовлетворяющем условиям* (a), *существует неприводимая неособая кривая.*

Доказательство. Утверждение (a) — это перефразировка теоремы 4.11 при нумерации 27 прямых, как указано в 4.9. Утверждение (b) следует из теоремы Бертини 8.18 гл. II и 7.9.1 гл. III.

Замечание 4.13.1. Полагая $a = 7$, $b_1 = b_2 = 3$, $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 2$, получаем неприводимую неособую кривую $C \sim al - \sum b_i e_i$, которая, согласно 4.8, имеет степень 7 и род 5. Это еще одно доказательство существования кривой степени 7 и рода 5 в $\mathbf{P}^3$ (см. 6.4.2 гл. IV).

Упражнения

4.1. Показать, что линейная система коник в $\mathbf{P}^2$ с двумя предписанными базисными точками P_1 и P_2 (см. 4.1) определяет морфизм ψ поверхности X' (которая является раздутием $\mathbf{P}^2$ в точках P_1 и P_2) на неособую квадрику Y в $\mathbf{P}^3$ и, кроме того, ψ осуществляет изоморфизм X' на Y с одной раздутой точкой.

4.2. Пусть φ — квадратичное преобразование из 4.2.3 с центрами P_1, P_2, P_3. Показать, что если C — неприводимая кривая степени d в $\mathbf{P}^2$ с кратностями r_1, r_2, r_3 в P_1, P_2, P_3, то ее собственный прообраз C' относительно φ является кривой степени $d' = 2d - r_1 - r_2 - r_3$ с кратностями $d - r_2 - r_3$ в Q_1, $d - r_1 - r_3$ в Q_2 и $d - r_1 - r_2$ в Q_3. Кривая C может иметь и любые другие особенности. [*Указание.* Воспользоваться упр. 3.2.]

4.3. Пусть C — неприводимая кривая в $\mathbf{P}^2$. Показать, что тогда существует конечная последовательность квадратичных преобразований с центрами в подходящих тройках точек, такая, что собственный прообраз C' кривой C будет иметь не более чем *обыкновенные* особенности, т. е. кратные точки с разделенными касательными направлениями ветвей (см. упр. 5.14 гл. I). Воспользоваться 3.8.

4.4. (a) Используя 4.5, доказать следующую лемму о кубических кривых: пусть C — неприводимая плоская кубическая кривая, L — прямая, пересекающая C в трех точках P, Q, R, и L' — прямая, пересекающая C в трех точках P', Q', R', и пусть P'' обозначает третью точку пересечения прямой PP' с C и аналогично выбираются Q'', R'', тогда точки P'', Q'', R'' лежат на одной прямой.

(b) Пусть P_0 — точка перегиба кривой C. *Определим* групповую операцию на множестве регулярных точек C следующим геометрическим правилом: пусть R — третья точка пересечения прямой PQ с C и T — третья точка

пересечения прямой P_0R с C, тогда полагаем $P + Q = T$, как и в 6.10.2 гл. II и в 6.11.4 гл. II. Используя утверждение (a), показать, что эта операция ассоциативна.

4.5. Доказать следующую теорему Паскаля: пусть A, B, C, A', B', C' — шесть точек на конике, тогда точки $P = AB'\cdot A'B$, $Q = AC'\cdot A'C$ и $R = BC'\cdot B'C$ лежат на одной прямой (рис. 22).

4.6. Обобщить упр. 4.5 в следующем смысле. Пусть на плоскости заданы 13 точек $P_1, \ldots, P_{13}$, тогда существуют еще три точки P_{14}, P_{15}, P_{16}, такие,

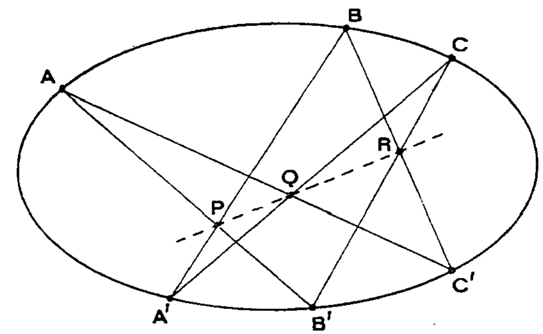


Рис. 22. Теорема Паскаля.

что все кривые четвертого порядка, проходящие через $P_1, \ldots, P_{13}$, проходят также и через P_{14}, P_{15}, P_{16}. Какие условия надо наложить на точки $P_1, \ldots, P_{13}$ для того, чтобы это утверждение выполнялось?

4.7. Пусть D — произвольный дивизор степени d на кубической поверхности (4.7.3). Показать, что

$$p_a(D) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{6}(d-1)(d-2), & \text{если } d \equiv 1, 2 \pmod 3, \\ \frac{1}{6}(d-1)(d-2)+\frac{2}{3}, & \text{если } d \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Показать далее, что для каждого $d > 0$ равенство достигается на некоторой неприводимой неособой кривой.

*4.8. Показать, что класс дивизоров D на кубической поверхности содержит неприводимую кривую $\Longleftrightarrow$ D содержит неособую неприводимую кривую $\Longleftrightarrow$ эта прямая — одна из 27 прямых либо коника с $D^2 = 0$ (она имеет вид $l - e_i$ для некоторого i или $2l - \sum$ (четыре e_i) или $3l - \sum\limits_{i=1}^{6} e_i - e_j$ для некоторого j). [*Указание.* Обобщить теорему 4.11 на поверхности, получаемые раздутием 2, 3, 4 и 5 точек на $\mathbf{P}^2$, и воспользоваться результатами о кривых на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и на рациональной линейчатой поверхности X_1 (2.18).]

4.9. Пусть C — неприводимая неособая кривая степени d и рода $g > 0$ на кубической поверхности, показать, что тогда

$$g \geqslant \begin{cases} \frac{1}{2}(d-6), & \text{если } d \text{ четно и } d \geqslant 8, \\ \frac{1}{2}(d-3), & \text{если } d \text{ нечетно и } d \geqslant 13, \end{cases}$$

и что в этом случае равенство достигается для каждого d в указанных пределах.

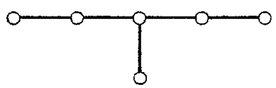
4.10. В качестве следствия импликации (iv) $\Longrightarrow$ (iii) в теореме 4.11 получается следующий любопытный факт. Пусть a, $b_1, \ldots, b_6$ — целые числа, такие, что $b_i > 0$ для каждого i, $a - b_i - b_j > 0$ для каждых i, j и $2a - \sum_{i \neq j} b_i > 0$ для каждого j. Тогда должно обязательно выполняться неравенство $a^2 - \sum b_i^2 > 0$. Доказать это непосредственно (для $a, b_1, \ldots, b_6 \in \mathbf{R}$), пользуясь методами обычного анализа.

4.11. *Группы Вейля.* Пусть задана диаграмма, состоящая из точек и отрезков прямых, соединяющих некоторые из них. Определим по этой диаграмме абстрактную группу с помощью образующих и соотношений: каждой точке в диаграмме сопоставляется образующая x_i с соотношениями $x_i^2 = 1$ для каждого i и $(x_ix_j)^2 = 1$, если i и j не соединены отрезком прямой, $(x_ix_j)^3 = 1$, если i и j соединены отрезком прямой.

(a) *Группа Вейля* $\mathbf{A}_n$ определяется диаграммой

состоящей из $n - 1$ точек, соединенных отрезками, как указано в диаграмме. Показать, что группа $\mathbf{A}_n$ изоморфна симметрической группе Σ_n, причем изоморфизм устанавливается следующим образом: образующим элементам $\mathbf{A}_n$ сопоставляются элементы (12), (23), . . ., $(n-1 \quad n)$ из Σ_n, в результате получается сюръективный гомоморфизм $\mathbf{A}_n \to \Sigma_n$; далее с помощью подсчета числа элементов группы $\mathbf{A}_n$ показывается, что этот гомоморфизм является на самом деле изоморфизмом.

(b) *Группа Вейля* $\mathbf{E}_6$ определяется диаграммой вида



Обозначим ее образующие через $x_1, \ldots, x_5$ и y. Показать, что, сопоставляя образующим $x_1, \ldots, x_5$ перестановки (12), (23), . . ., (56) прямых E_i (см. 4.10.1) соответственно и образующему y элемент, соответствующий квадратичному преобразованию в точках P_1, P_2, P_3, получаем сюръективный гомоморфизм $\mathbf{E}_6 \to G$, где G — группа автоморфизмов конфигурации 27 прямых на кубической поверхности.

*(c) Вычислить число элементов $\mathbf{E}_6$ и заключить отсюда, что $\mathbf{E}_6 \simeq G$.

Замечание. Подробнее о группах Вейля, о системах корней и об исключительных кривых см. Манин [3, § 25, 26].

4.12. Используя теорему 4.11, показать, что если D — любой обильный дивизор на кубической поверхности X, то $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0$. Это теорема Кодаиры об обращении в нуль для кубической поверхности (см. 7.15 гл. III).

4.13. Пусть X — поверхность Дель Пеццо степени 4 в $\mathbf{P}^4$, полученная раздутием 5 точек на $\mathbf{P}^2$ (см. 4.7).

(a) Показать, что X содержит 16 прямых.

(b) Показать, что X является полным пересечением двух квадрик в $\mathbf{P}^4$ (обратное утверждение следует из 4.7.1).

4.14. Используя метод 4.13.1, показать, что в $\mathbf{P}^3$ существуют неособые кривые с $d = 8$, $g = 6, 7$; $d = 9$, $g = 7, 8, 9$; $d = 10$, $g = 8, 9, 10, 11$. Это завершает перечисление всех возможных значений g для кривых степени $d \leqslant 10$ в $\mathbf{P}^3$.

4.15. Пусть $P_1, \ldots, P_r$ — конечный набор (обычных) точек $\mathbf{P}^2$, никакие три из которых не коллинеарны. *Допустимым преобразованием* назовем квадратичное преобразование $\mathbf{P}^2$ (4.2.3) с центрами в любой тройке точек P_i (скажем, P_1, P_2, P_3). Допустимое преобразование переводит $P_1, \ldots, P_r$ в новый набор r точек Q_1, Q_2, Q_3 и образы точек $P_4, \ldots, P_r$. Будем говорить, что точки $P_1, \ldots, P_r$ находятся *в общем положении*, если никакие три из них не коллинеарны и, кроме того, их образы относительной любой конечной последовательности допустимых преобразований тоже обладают этим свойством.

(a) Показать, что 6 точек плоскости тогда и только тогда находятся в общем положении, когда никакие три из них не коллинеарны и все шесть не лежат на одной конике.

(b) Показать, что если точки $P_1, \ldots, P_r$ находятся в общем положении, то их образы относительно любой конечной последовательности допустимых преобразований также находятся в общем положении.

(c) Предположим, что основное поле k содержит несчетное множество элементов. Показать, что тогда для заданных точек $P_1, \ldots, P_r$ в общем положении существует плотное подмножество $V \subset \mathbf{P}^2$, такое, что для любой точки $P_{r+1} \in V$ точки $P_1, \ldots, P_{r+1}$ будут находиться в общем положении. [*Указание.* Доказать лемму о том, что над несчетным полем k алгебраическое многообразие не может быть объединением счетного семейства собственных замкнутых подмножеств.]

(d) Пусть теперь $P_1, \ldots, P_r \in \mathbf{P}^2$ — точки в общем положении и X — поверхность, полученная раздутием $P_1, \ldots, P_r$. Показать, что при $r = 7$ X содержит ровно 56 неприводимых неособых кривых C с $g = 0$ и $C^2 = -1$ и что они и только они являются неприводимыми кривыми на X с отрицательным индексом самопересечения. Аналогично рассмотреть случай $r = 8$ и показать, что в этом случае существует 240 таких кривых.

*(e) Показать, что при $r = 9$ поверхность X (как в упр. (d)) содержит бесконечно много неприводимых неособых кривых C с $g = 0$ и $C^2 = -1$. [*Указание.* Пусть L — прямая, соединяющая P_1 и P_2. Показать, что существует конечная последовательность допустимых преобразований, такая, что собственный прообраз прямой L относительно композиции этих преобразований может иметь сколь угодно большую степень.] Этот пример поверхности с бесконечным множеством исключительных кривых первого рода принадлежит Кодаире, см. Нагата [5, II].

4.16. На *кубической поверхности Ферма* $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ найти явные уравнения всех 27 прямых и проверить их отношения инцидентности. Какова группа автоморфизмов этой поверхности?

§ 5. Бирациональные преобразования

До сих пор мы имели дело только с отдельными поверхностями или поверхностями и их моноидальными преобразованиями. В этом параграфе мы докажем, что любое бирациональное преобразование (неособых проективных) поверхностей может быть разложено в конечную последовательность моноидальных преобразований и обратных к ним. Этот факт подтверждает то обстоятельство, что центральную роль в изучении поверхностей играют моноидальные преобразования. В качестве следствия будет получена *бирациональная* инвариантность арифметического рода поверхности.

В этом параграфе мы докажем также критерий Кастельнуово стягиваемости исключительных кривых первого рода и выведем из него теорему существования относительно минимальных моделей

33—01390

для поверхностей. См. Шафаревич и др. [1, гл. I, II], Зарисский [5] и Зарисский [10, гл. IV] для других ссылок.

Начнем с напоминания некоторых общих фактов о бирациональных преобразованиях многообразий произвольной размерности, включая основную теорему Зарисского.

Пусть X и Y — проективные многообразия произвольной размерности. Напомним (§ 4 гл. I), что задание бирационального преобразования T из X в Y равносильно заданию открытого подмножества $U \subset X$ и морфизма $\varphi\colon U \to Y$, индуцирующего изоморфизм полей функций $K(Y) \simeq K(X)$. При этом если T представлено другим открытым множеством $V \subset X$ и морфизмом $\psi\colon V \to Y$, то φ и ψ совпадают там, где они оба определены, и склеиваются в бирациональный морфизм $U \cup V$ в Y (см. упр. 4.2 гл. I). Поэтому существует наибольшее открытое множество $U \subset X$, на котором T представляется морфизмом $\varphi\colon U \to Y$. В таком случае мы будем говорить, что T *определено* в точках из U, и точки из $X - U$ называть *фундаментальными точками* преобразования T.

Пусть теперь $T\colon X \to Y$ — бирациональное преобразование, представленное морфизмом $\varphi\colon U \to Y$. Обозначим через $\Gamma_0 \subset U \times Y$ график морфизма φ, и пусть $\Gamma \subset X \times Y$ — его замыкание. Замкнутое подмножество $\Gamma \subset X \times Y$ будем называть *графиком* преобразования T. Для любого замкнутого подмножества $Z \subset X$ определим $T(Z)$ как $p_2(p_1^{-1}(Z))$, где p_1 и p_2 — проекции Γ на X и Y соответственно. Множество $T(Z)$ будем называть *полным прообразом* Z относительно T. Если T определено в точке P, то $T(P)$ — это точка $\varphi(P)$. Если же P является фундаментальной точкой T, то $T(P)$ будет состоять, вообще говоря, более чем из одной точки.

Лемма 5.1. *Пусть $T\colon X \to Y$ — бирациональное преобразование проективных многообразий, и предположим, что многообразие X нормально. Тогда фундаментальные точки преобразования T образуют замкнутое подмножество коразмерности $\geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть $P \in X$ — точка коразмерности 1, тогда $\mathcal{O}_{P,X}$ является кольцом дискретного нормирования. Так как преобразование T определено в общей точке X и многообразие Y проективно, а следовательно, собственно над k, то из валюативного критерия собственности 4.7 гл. II следует, что T определено также и в точке P. (Это рассуждение уже использовалось в доказательстве 8.19 гл. II для установления бирациональной инвариантности общей точки.)

Пример 5.1.1. Пусть X — поверхность и $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в P. Тогда π всюду определено. Обратное к нему отображение $\pi^{-1}\colon X \to \tilde{X}$ является бирациональным преобразованием с фундаментальной точкой P.

Теорема 5.2 (основная теорема Зарисского). *Пусть $T\colon X \to Y$ — бирациональное преобразование проективных многообразий, и предположим, что многообразие X нормально. Тогда если P — фундаментальная точка T, то полный прообраз $T(P)$ связен и* $\dim T(P) \geqslant 1$.

Доказательство. Это частный случай общей формы основной теоремы Зарисского 11.4 гл. III. Действительно, пусть Γ — график T и $p_1\colon \Gamma \to X$ — проекция его на X. Тогда p_1 является проективным бирациональным морфизмом, так что по 11.4 гл. III слой $p_1^{-1}(P)$ связен. Если размерность этого слоя равна 0, то это свойство выполняется в некоторой окрестности V точки P (см. упр. 3.2.2 гл. II). В таком случае $p_1^{-1}(V) \to V$ будет проективным бирациональным морфизмом с конечными слоями, следовательно, он конечный морфизм (см. упр. 11.2 гл. III). Но V нормально, так что он должен быть изоморфизмом. Это означает, что T определено в P в противоречие с предположением. Отсюда мы заключаем, что слой $p_1^{-1}(P)$ связен и имеет размерность $\geqslant 1$. Так как $P_1^{-1}(P)$ с помощью p_2 изоморфно отображается на $T(P)$, то это завершает доказательство теоремы.

Теперь докажем основной результат этого параграфа о разложении бирациональных преобразований поверхностей.

Предложение 5.3. *Пусть $f\colon X' \to X$ — бирациональный морфизм (неособых проективных) поверхностей и P — фундаментальная точка отображения f^{-1}. Тогда f пропускается через моноидальное преобразование $\pi\colon \tilde{X} \to X$ с центром в P.*

Доказательство. Пусть T — бирациональное преобразование X' в $\tilde{X}$, определенное как $\pi^{-1} \circ f$. Наша задача — показать, что T является морфизмом. Предположим, что T не является морфизмом, тогда оно обладает фундаментальной (замкнутой) точкой P'. Ясно, что $f(P') = P$. Более того, по 5.2 $T(P')$ имеет размерность $\geqslant 1$ в $\tilde{X}$. Следовательно, $T(P')$ должно быть исключительной кривой E морфизма π.

С другой стороны, по 5.1 преобразование T^{-1} определено всюду, кроме конечного множества точек в $\tilde{X}$, так что можно найти замкнутую точку $Q \in E$, в которой T^{-1} определено и, следовательно, $T^{-1}(Q) = P'$. Покажем, что эта ситуация приводит к противоречию.

Выберем локальные координаты x, y в точке P на X. Тогда, как и в доказательстве 3.6, существует открытая окрестность V точки P, такая, что $\pi^{-1}(V)$ определяется уравнением $ty - ux$ в $\mathbf{P}^1_V$. Посредством линейной замены переменных x, y и t, u можно предполагать, что Q — это точка $t = 0$ и $u = 1$ на E. Тогда t, y образуют локальную систему параметров в Q на $\widetilde{X}$; локальное уравнение E имеет вид $y = 0$ и $x = ty$.

Так как P — фундаментальная точка отображения f^{-1}, то по 5.2 слой $f^{-1}(P)$ связен и имеет размерность $\geqslant 1$, так что существует неприводимая кривая C в $f^{-1}(P)$, содержащая точку P'. Пусть $z = 0$ — локальное уравнение C в P'.

Так как $f^{-1}(P)$ определяется уравнениями $x = y = 0$, то образы x, y в $\mathcal{O}_{P'}$ лежат в идеале, порожденном z, так что можно записать $x = az$, $y = bz$, где $a, b \in \mathcal{O}_{P'}$. С другой стороны, локальное кольцо $\mathcal{O}_Q$ доминирует над $\mathcal{O}_{P'}$. (Здесь $\mathcal{O}_P$, $\mathcal{O}_{P'}$, $\mathcal{O}_Q$ мы рассматриваем как подкольца в общем поле функций K поверхностей X, X', $\widetilde{X}$.) Поскольку t, y — локальные координаты в Q, то $y \notin \mathfrak{m}_Q^2$, поэтому также $y \notin \mathfrak{m}_{P'}^2$ в $\mathcal{O}_{P'}$. Следовательно, элемент b является обратимым в $\mathcal{O}_{P'}$ и $t = x/y = a/b$ принадлежит локальному кольцу $\mathcal{O}_{P'}$. Так как $t \in \mathfrak{m}_Q$, то $t \in \mathfrak{m}_{P'}$.

Теперь воспользуемся тем, что $T(P') = E$. Отсюда мы получаем, что для любого $w \in \mathfrak{m}_{P'}$ образ w в $\mathcal{O}_Q$ должен содержаться в идеале, порожденном y, поскольку y является локальным уравнением для E. В частности, полагая $w = t$, находим, что $t \in (y)$, чего не может быть, поскольку t и y — локальные координаты в Q. Это противоречие доказывает требуемое утверждение.

Следствие 5.4. *Пусть f: $X' \to X$ — бирациональный морфизм поверхностей и $n(f)$ — число неприводимых кривых $C^1 \subset X'$, таких, что $f(c')$ является точкой. Тогда $n(f)$ конечно и f можно разложить в композицию $n(f)$ моноидальных преобразований.*

Доказательство. Пусть $f(C) = P'$, тогда P — фундаментальная точка преобразования f^{-1}. Согласно 5.1, фундаментальные точки f^{-1} образуют конечное множество и прообраз $f^{-1}(P)$ каждой из них является замкнутым подмножеством в X', содержащим только конечное число неприводимых компонент, поэтому множество кривых C', отображающихся в точку, конечно.

Теперь пусть P — фундаментальная точка f^{-1}. Тогда по 5.3 морфизм f пропускается через моноидальное преобразование π: $\widetilde{X} \to X$ с центром в P, т. е. $f = \pi \circ f_1$ для некоторого морфизма f_1: $X' \to \widetilde{X}$. Покажем, что $n(f_1) = n(f) - 1$. Пусть $f_1(C')$ — точка, тогда, разумеется, и $f(C')$ — точка. Обратно, если $f(C')$ — точка, то либо $f_1(C')$ — точка, либо $f_1(C') = E$ — исключительная кривая морфизма π. Кроме того, так как f_1^{-1} является морфизмом всюду, кроме конечного множества точек, то существует единственная неприводимая кривая E' в X' с $f_1(E') = E$. Таким образом, $n(f_1) = n(f) - 1$.

Продолжая в том же духе, через $n(f)$ шагов мы придем к морфизму $f_{n(f)}$ с $n(f_{n(f)}) = 0$. Но тогда, согласно 5.3, отображение $f_{n(f)}^{-1}$ уже не имеет фундаментальных точек и, следовательно, морфизм $f_{n(f)}$ является изоморфизмом. Тем самым доказано, что f раскладывается в композицию $n(f)$ моноидальных преобразований.

Замечание 5.4.1. Интересно сопоставить этот результат со свойством универсальности раздутия (см. 7.14 гл. II). Из него, конечно, следует утверждение 7.14 гл. II в частном случае раздутия точки (поскольку обратимость пучка $f^{-1}\mathfrak{m}_P \cdot \mathcal{O}_{X'}$ влечет за собой то, что $f^{-1}(P)$ имеет размерность 1, так что точка P является фундаментальной), но на самом деле он сильнее, так как опирается на основную теорему Зарисского. Мы не можем вывести 5.3 из 7.14 гл. II, потому что не ясно, как в нашем случае проверять обратимость пучка $f^{-1}\mathfrak{m}_P \cdot \mathcal{O}_{X'}$.

Замечание 5.4.2. Сравнивая результат 5.4 с теоремой 7.17 гл. II, видим, что первый результат является более точным, поскольку в нем используются только моноидальные преобразования вместо произвольных раздутий пучков идеалов, используемых в указанной теореме.

Замечание 5.4.3. Легко видеть, что предложение 5.3 неверно для неособых проективных многообразий размерности $\geqslant 3$. Например, пусть f: $X' \to X$ — раздутие неособой кривой C на неособом проективном трехмерном многообразии X. Тогда любая точка $P \in C$ будет фундаментальной точкой отображения f^{-1}, но f не может быть пропущено через моноидальное преобразование π: $\widetilde{X} \to X$ с центром P, поскольку размерность $f^{-1}(P)$ равна 1, а размерность $\pi^{-1}(P)$ равна 2.

Замечание 5.4.4. Пример 5.4.3 подсказывает формулировку следующей обобщенной задачи: можно ли всякий бирациональный морфизм f: $X' \to X$ неособых проективных многообразий разложить в конечную последовательность моноидальных преобразований с неособыми центрами? Оказывается, что в размерности $\geqslant 3$ ответ тоже является отрицательным: см. Селли [1] и Шеннон [1].

Теорема 5.5. *Пусть T: $X \to X'$ — бирациональное преобразование поверхностей. Тогда T можно разложить в конечную последовательность моноидальных преобразований и им обратных.*

Доказательство. Используя 5.4, достаточно показать, что существует поверхность X'' и бирациональные морфизмы f: $X'' \to X$ и g: $X'' \to X'$, такие, что $T = g \circ f^{-1}$. Для построения X'' мы поступим следующим образом.

Пусть H' — очень обильный дивизор на X' и C' — неприводимая неособая кривая в линейной системе $|2H'|$, которая не проходит ни через одну из фундаментальных точек отображения T^{-1}.

Иначе говоря, C' целиком содержится в наибольшем открытом $U' \subseteq X'$, на котором отображение T^{-1} представляется морфизмом φ: $U' \to X$. Пусть $C = \varphi(C')$ — образ кривой C' в X. Определим целое число m формулой $m = p_a(C) - p_a(C')$. Так как морфизм $C' \to C$ конечен и бирационален, то $m \geqslant 0$ и $m = 0$ тогда и только тогда, когда кривая C' изоморфна кривой C (упр. 1.8 гл. IV). Отметим также, что если кривую C' заменить на линейно эквивалентную ей кривую C'_1, также не проходящую через фундаментальные точки преобразования T^{-1}, то кривая $C_1 = \varphi(C'_1)$ линейно эквивалентна кривой C. В самом деле, если $C' - C'_1 = (f)$ для некоторой рациональной функции f на X', то $C - C_1 = (f)$ на X. Так как арифметический род кривой зависит только от ее класса линейной эквивалентности (упр. 1.3), то отсюда следует, что целое число m зависит только от T и H', а не от выбора конкретной кривой $C' \in |2H'|$.

Зафиксируем на время кривую C'. Если $m > 0$, то кривая C должна быть особой. Пусть P — особая точка C, π: $\tilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в P, и пусть $\tilde{C}$ обозначает собственный прообраз кривой C. Тогда по 3.7 имеем $p_a(\tilde{C}) < p_a(C)$. Таким образом, если $\tilde{T} = T \circ \pi$, то $m(\tilde{T}) < m(T)$. Продолжая в том же духе, как и в доказательстве предложения 3.8, видим, что существует морфизм f: $X'' \to X$, являющийся конечной последовательностью моноидальных преобразований, такой, что если $T' = T \circ f$, то $m(T') = 0$.

Покажем, что на самом деле отображение T' является морфизмом. Пусть это не так, тогда T' имеет фундаментальную точку P. Согласно 5.2, $T'(P)$ содержит неприводимую кривую $E' \subseteq X'$. Так как дивизор H' очень обилен, то $E' \cdot H' > 0$, так что $C' \cdot E' \geqslant 2$ для любой кривой $C' \in |2H'|$. Пусть C' выбрана так, что она не содержит ни одной фундаментальной точки преобразования T'^{-1} и пересекает E' трансверсально (1.2). Тогда C' пересекает E' по крайней мере в двух различных точках, так что соответствующая кривая C в X'' имеет по крайней мере двойную точку в P. Но это противоречит тому, что $m(T') = 0$.

Таким образом, T' является морфизмом из X'' в X' и доказательство теоремы вытекает теперь, как уже упоминалось выше, из следствия 5.4.

Следствие 5.6. *Арифметический род неособой проективной поверхности является бирациональным инвариантом.*

Доказательство. Действительно, p_a не меняется при моноидальном преобразовании 3.5, так что утверждение непосредственно вытекает из только что доказанной теоремы.

Замечание 5.6.1. Хотя теорема о разложении 5.5 в форме, аналогичной 5.4.4, и не верна в размерности $\geqslant 3$, Хиронака [3]

установил бирациональную инвариантность p_a для неособых проективных многообразий над полем характеристики 0, исходя из следующего утверждения, являющегося следствием его теоремы о разрешении особенностей. Пусть T: $X \to X'$ — любое бирациональное преобразование неособых проективных многообразий над полем характеристики 0, тогда существует морфизм f: $X'' \to X$, полученный с помощью конечной последовательности моноидальных преобразований вдоль неособых подмногообразий, такой, что бирациональное отображение $T' = T \circ f$ является морфизмом. Существует другое доказательство бирациональной инвариантности p_a для многообразий над $\mathbf{C}$, принадлежащее Кодаире и Спенсеру [1], использующее равенство $h^{0q} = h^{q0}$ из теории Ходжа и бирациональную инвариантность h^{q0} (см. упр. 8.8 гл. II).

Докажем теперь критерий Кастельнуово стягиваемости кривой на поверхности. Мы видели, что если E — исключительная кривая моноидального преобразования, то $E \simeq \mathbf{P}^1$ и $E^2 = -1$ (см. 3.1). Вообще по классической терминологии любая кривая Y на поверхности X, такая, что $Y \simeq \mathbf{P}^1$ и $Y^2 = -1$, называется *исключительной кривой первого рода*. Следующая теорема утверждает, что всякая исключительная кривая первого рода является исключительной кривой некоторого моноидального преобразования.

Теорема 5.7. (Кастельнуово). *Пусть Y — кривая на поверхности X, такая, что $Y \simeq \mathbf{P}^1$ и $Y^2 = -1$, тогда существует морфизм f: $X \to X_0$ на (неособую проективную) поверхность X_0 и точка $P \in X_0$, такие, что X изоморфно образу моноидального преобразования X_0 с центром P, причем изоморфизм согласован с f, и Y является исключительной кривой этого моноидального преобразования.*

Доказательство. Поверхность X_0 будем строить как образ поверхности X при подходящем морфизме ее в проективное пространство. Выберем очень обильный дивизор H на X, такой, что $H^1(X, \mathscr{L}(H)) = 0$, взяв, например, любой очень обильный дивизор с достаточно большим множителем (см. 5.2 гл. III). Пусть $k = H \cdot Y$, и предположим, что $k \geqslant 2$. Тогда для построения морфизма X в $\mathbf{P}^N$ воспользуемся обратимым пучком $\mathscr{M} = \mathscr{L}(H + kY)$.

Шаг 1. Докажем прежде всего, что $H^1(X, \mathscr{L}(H + (k-1)Y)) = 0$. В действительности будем доказывать более общее утверждение, что $H^1(X, \mathscr{L}(H + iY)) = 0$ для каждого $i = 0, 1, \ldots, k$. При $i = 0$ это верно по предположению, так что можно проводить индукцию по i. Предположим, что утверждение верно для $i - 1$. Рассмотрим следующую точную последовательность пучков:

$$0 \to \mathscr{L}(H + (i-1)Y) \to \mathscr{L}(H + iY) \to \mathcal{O}_Y \otimes \mathscr{L}(H + iY) \to 0.$$

Здесь $Y \simeq \mathbf{P}^1$ и $(H+iY)\cdot Y = k - i$, поэтому

$$\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}(H+iY) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(k-i).$$

Отсюда мы получаем точную последовательность когомологий

$$\ldots \to H^1(X, \mathcal{L}(H+(i-1)Y)) \to H^1(X, \mathcal{L}(H+iY)) \to$$
$$\to H^1(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(k-i)) \to \ldots .$$

Из предположения индукции и из того, что мы знаем когомологии $\mathbf{P}^1$, заключаем, что $H^1(X, \mathcal{L}(H+iY)) = 0$ для любого $i \leqslant k$.

Шаг 2. Покажем теперь, что $\mathcal{M}$ порождается своими глобальными сечениями. Так как дивизор H очень обилен, то соответствующая линейная система $|H+kY|$ не имеет базисных точек вне Y, так что $\mathcal{M}$ порождается глобальными сечениями вне Y. С другой стороны, естественное отображение

$$H^0(X, \mathcal{M}) \to H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_Y)$$

сюръективно, поскольку $\mathcal{M} \otimes \mathcal{J}_Y \simeq \mathcal{L}\ (H+(k-1)Y)$ и $H^1(X, \mathcal{L}(H+(k-1)Y)) = 0$ по шагу 1. Но $(H+kY)\cdot Y = 0$, так что $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_Y$ изоморфен $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$, который порождается глобальным сечением 1. Поднимая это сечение в $H^0(X, \mathcal{M})$ и используя лемму Накаямы, видим, что $\mathcal{M}$ порождается глобальными сечениями также и в каждой точке Y.

Шаг 3. Пучок $\mathcal{M}$, следовательно, определяет морфизм $f_1\colon X \to \mathbf{P}^N$ (см. 7.1 гл. II). Пусть X_1 — его образ. Так как $f_1^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{M}$ и степень пучка $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_Y$ равна 0, то f_1 должен отображать Y в некоторую точку P_1. С другой стороны, так как дивизор H очень обилен, то линейная система $|H+kY|$ разделяет точки и касательные направления всюду вне Y, а также отделяет точки из Y от точек, не лежащих на Y, поэтому f_1 является изоморфизмом $X - Y$ на $X_1 - P_1$ (см. 7.8.2 гл. II).

Шаг 4. Пусть X_0 — нормализация X_1 (упр. 3.8 гл. II). Так как поверхность X неособа, а следовательно, нормальна, отображение f_1 раскладывается в композицию морфизма $f\colon X \to X_0$ и морфизма нормализации $X_0 \to X_1$. Поскольку кривая Y неприводима, то $f(Y)$ состоит из одной точки P, и так как $X_1 - P_1$ было неособым, то $f\colon X - Y \to X_0 - P$ будет оставаться изоморфизмом.

Шаг 5. Покажем теперь, что X_0 неособа и в точке P. Так как заведомо X_0 нормально и морфизм f бирационален, то $f_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{X_0}$ (см. доказательство 11.4 гл. III). Следовательно, можно воспользоваться теоремой о формальных функциях 11.1 гл. III и заключить, что

$$\hat{\mathcal{O}}_P \simeq \varprojlim H^0(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}),$$

где Y_n — замкнутая подсхема в X, определяемая пучком идеалов $\mathfrak{m}_P^n\cdot\mathcal{O}_X$. Но так как $f^{-1}(P) = Y$, то последовательность идеалов $\mathfrak{m}_P^n\cdot\mathcal{O}_X$ является конфинальной с последовательностью идеалов $\mathcal{J}_Y^n$, так что последнюю вместо $\mathfrak{m}_P^n\cdot\mathcal{O}_X$ можно использовать для определения последовательности Y_n (см. 9.3.1 гл. II).

Покажем, что для каждого n $H^0(Y, \mathcal{O}_{Y_n})$ изоморфно кольцу усеченных степенных рядов $A_n = k[[x, y]]/(x, y)^n$. Отсюда будет следовать, что $\hat{\mathcal{O}}_P \simeq \varprojlim A_n \simeq k[[x, y]]$, а последнее кольцо является регулярным локальным кольцом. Это влечет за собой регулярность кольца $\mathcal{O}_P$ (5.4А гл. I), следовательно, P — неособая точка.

При $n = 1$ имеем $H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = k$. При $n > 1$ воспользуемся точной последовательностью

$$0 \to \mathcal{J}_Y^n/\mathcal{J}_Y^{n+1} \to \mathcal{O}_{Y_{n+1}} \to \mathcal{O}_{Y_n} \to 0.$$

Так как $Y \simeq \mathbf{P}^1$ и $Y^2 = -1$, то $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ (см. 1.4.1) и $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)$ для каждого n, как в доказательстве предложения 3.4. Переходя к когомологиям, получаем

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)) \to H^0(\mathcal{O}_{Y_{n+1}}) \to H^0(\mathcal{O}_{Y_n}) \to 0.$$

При $n = 1$ $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))$ является 2-мерным векторным пространством. Выберем в нем базис x, y. Тогда $H^2(\mathcal{O}_{Y_2})$, которое во всяком случае содержит k, очевидно, изоморфно A_2.

Далее по индукции пусть $H^0(\mathcal{O}_{Y_n})$ изоморфно A_n, тогда поднимем элементы x, y в $H^0(\mathcal{O}_{Y_{n+1}})$. Так как $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n))$ является векторным пространством с базисом $x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n$, то легко видеть, что $H^0(\mathcal{O}_{Y_{n+1}}) \simeq A_{n+1}$. Отсюда, как было отмечено выше, следует, что точка P неособа на X_0.

Шаг 6. Для завершения доказательства теоремы воспользуемся теоремой о разложении 5.4. Так как поверхность X_0 неособа, то 5.4 можно применить к морфизму $f\colon X \to X_0$. Имеем $n(f) = 1$ по построению, так что f должен быть моноидальным преобразованием с центром P.

Шаг 7. В качестве дополнения покажем, что на самом деле $X_0 = X_1$, так что нормализация была необязательной. Естественное отображение

$$H^0(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{J}_Y) \to H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{J}_Y/\mathcal{J}_Y^2)$$

сюръективно, потому что следующим членом когомологической последовательности является $H^1(X, \mathcal{L}(H+(k-2)Y))$, который равен 0 по шагу 1. Так как $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_Y$, то отсюда следует, что существуют глобальные сечения $s, t \in H^0(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{J}_Y) \subset$ $\subset H^0(X, \mathcal{M})$, которые отображаются в элементы $x, y \in H^0(\mathcal{O}_{Y_2}) \simeq$

$\simeq A_2$. С другой стороны, эти сечения s, t дают сечения пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}^N$, определяющие гиперплоскости, содержащие P_1. Следовательно, s, t определяют элементы $\bar{s}, \bar{t} \in \mathfrak{m}_{P_1}$, образы которых в $\mathcal{O}_P$ порождают максимальный идеал $\mathfrak{m}_P$. Так как $\mathcal{O}_P$ в любом случае является конечно порожденным $\mathcal{O}_{P_1}$-модулем, то мы заключаем отсюда, что $\mathcal{O}_P \simeq \mathcal{O}_{P_1}$ (см. 7.4 гл. II) и, следовательно, $X_0 \simeq X_1$.

Пример 5.7.1. Пусть $\pi\colon X \to C$ — геометрически линейчатая поверхность (§ 2), P — точка на X и L — слой морфизма π, содержащий P. Пусть $f\colon \tilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром P. Тогда собственный прообраз $\tilde{L}$ слоя L на $\tilde{X}$ изоморфен $\mathbf{P}^1$ и $\tilde{L}^2 = -1$. Действительно, $L^2 = 0$ по 2.3 и P — неособая точка L, так что $\tilde{L} \sim f^*L - E$ по 3.6. Отсюда следует, что $\tilde{L}^2 = -1$. Следовательно, по теореме 5.7 кривую $\tilde{L}$ можно стянуть. Иначе говоря, существует морфизм $g\colon \tilde{X} \to X'$, отображающий $\tilde{L}$ в точку Q и являющийся на самом деле моноидальным преобразованием с центром Q. Пусть $M = g(E)$, тогда $M \simeq \mathbf{P}^1$ и $M^2 = 0$ по тем же соображениям, что и выше. Отметим также, что рациональное отображение $\pi_i\colon X' \to C$, получаемое из π на $X - L \simeq X' - M$, является в действительности морфизмом. Поэтому $\pi'\colon X' \to C$ представляет собой некоторую другую геометрически линейчатую поверхность. Действительно, каждый слой морфизма π' изоморфен $\mathbf{P}^1$, и поскольку морфизм π имел сечение, то собственный прообраз этого сечения на X' будет являться сечением π'. Полученная таким образом линейчатая поверхность называется *образом элементарного преобразования X с центром P* и обозначается символом $\mathrm{elm}_P X$ (рис. 23). Некоторые приложения этой конструкции см. в упр. 5.5.

Замечание 5.7.2. (общая проблема стягивания). В связи с теоремой Кастельнуово 5.7 можно поставить следующую общую задачу: пусть задано многообразие X и его замкнутое подмножество $Y \subset X$, найти необходимые и достаточные условия для существования бирационального морфизма $f\colon X \to X_0$, такого, что $f(Y)$ состоит из одной точки P и $f\colon X - Y \to X_0 - P$ является изоморфизмом. Если такой морфизм существует, то говорят, что Y *стягиваемо* в точку. Отдельные частные случаи этой задачи к настоящему времени разобраны, однако общее решение пока не известно. См. Артин [3], [4], Грауэрт [2] и Мамфорд [6].

Вот что известно в случае, когда Y — неприводимая кривая на поверхности X. Если мы потребуем, чтобы поверхность X_0 была неособой, то теорема 5.7 дает необходимые и достаточные условия стягиваемости, а именно $Y \simeq \mathbf{P}^1$ и $Y^2 = -1$. Если рассматривать и особые X_0, то необходимым условием стягиваемости является условие $Y^2 < 0$ (см. упр. 5.7). Если $Y \simeq \mathbf{P}^1$, то это условие также

и достаточно (упр. 5.2). Если Y — произвольная кривая с $Y^2 < 0$ и если основное поле есть поле комплексных чисел $\mathbf{C}$, то теорема Грауэрта [2] утверждает, что X_0 существует как комплексное аналитическое пространство. Однако Y может не стягиваться на алгебраическое многообразие, как показывает следующий пример.

Пример 5.7.3 (Хиронака). Пусть Y_0 — неособая кубическая кривая в $\mathbf{P}^2$ над несчетным алгебраически замкнутым полем k (например, $k = \mathbf{C}$). Зафиксируем некоторую точку перегиба $P_0 \in Y_0$ в качестве нуля группового закона на Y_0. Так как абелева

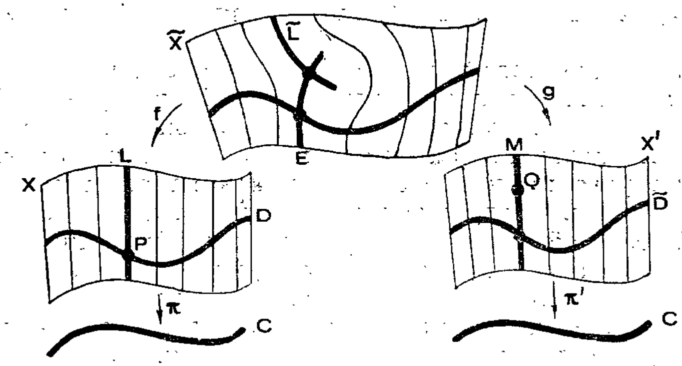


Рис. 23. Элементарное преобразование линейчатой поверхности.

группа Y_0 несчетна и так как точки конечного порядка в ней образуют счетное подмножество (4.8.1 гл. IV), то свободная от кручения часть должна иметь бесконечный ранг. Поэтому можно выбрать 10 точек $P_1, \ldots, P_{10} \in Y_0$ так, чтобы они были линейно независимы над $\mathbf{Z}$ в смысле группового закона.

Далее, раздуем эти 10 точек на $\mathbf{P}^2$. Пусть X — получившаяся в результате поверхность и Y — собственный прообраз Y_0 на ней. Так как $Y_0^2 = 09$ и мы раздули 10 точек на Y_0, то, согласно (3.6), имеем $Y^2 = -1$. Так что если $k = \mathbf{C}$, по по теореме Грауэрта (см. 5.7.2) кривая Y в X должна стягиваться на некоторое комплексное аналитическое пространство. Мы покажем, однако, что Y не может быть стянута в точку P никакой алгебраической поверхности X_0. Предположим, что это так, и пусть $P \in U \subset X_0$ — открытая аффинная окрестность P. Пусть $C_0' \subset U$ — кривая, не содержащая P, и $C_0 \subset X_0$ — ее замыкание, которое также не будет содержать точку P. Тогда ее полный прообраз в X будет являться кривой $C \subset X$, не пересекающей Y. Образ C в $\mathbf{P}^2$ будет кривой C^*, которая не пересекает Y_0, кроме как в точках $P_1, \ldots, P_{10}$.

Но это невозможно. Действительно, пусть $d = \deg C^*$. Тогда по теореме Безу 1.4.2 $C^* \cdot Y_0 = 3d > 0$. Но мы можем записать на Y_0

$$C^* \cdot Y_0 = \sum_{i=1}^{10} n_i P_i,$$

где $n_i \geqslant 0$ и $\sum n_i = 3d$. Имеем $C^* \sim dL$, где L — прямая на $\mathbf{P}^2$ и $L \cdot Y_0 \sim 3P_0$, так что

$$\sum_{i=1}^{10} n_i P_i = 0$$

в смысле группового закона на Y_0 (см. 1.3.7 гл. IV). Это противоречит тому, что $P_1, \ldots, P_{10}$ были выбраны линейно независимыми над $\mathbf{Z}$.

В заключение этого параграфа докажем теорему о существовании относительно минимальных моделей поверхностей. Идея заключается в том, чтобы в каждом классе бирациональной эквивалентности поверхностей выбрать, по возможности канонически, некоторого представителя. Так как на поверхности всегда есть возможность раздуть точку, то никогда не существует единственной неособой проективной модели поля функций на ней, как это обычно бывает в случае кривых. Однако можно, оказывается, выбрать такую неособую поверхность, которая минимальна в смысле отношения доминирования, так что назовем (неособую проективную) поверхность X *относительно минимальной моделью* ее поля функций, если всякий бирациональный морфизм $f\colon X \to X'$ на неособую поверхность X' обязательно является изоморфизмом. Если X — единственная относительно минимальная модель в классе бирациональной эквивалентности, то мы будем называть ее просто *минимальной моделью.* (Это несколько необычное использование слова «минимальная» обусловлено историческими соображениями.)

Теорема 5.8. *Каждая поверхность обладает бирациональным морфизмом на относительно минимальную модель.*

Доказательство. Комбинируя 5.4 и 5.7, видим, что поверхность тогда и только тогда является относительно минимальной моделью, когда она не содержит исключительных кривых первого рода. Итак, пусть задана некоторая поверхность X. Если она уже сама является относительно минимальной поверхностью, то доказывать нечего, если же нет, то на ней существует исключительная кривая первого рода, скажем Y. Тогда по 5.7 существует морфизм $X \to X_1$, стягивающий Y.

Этот процесс мы можем продолжить, стягивая исключительные кривые первого рода, если они имеются, и получить последовательность бирациональных морфизмов $X \to X_1 \to X_2 \to \ldots$. Нам надо показать, что этот процесс обрывается на изоморфизме.

Следующие рассуждения принадлежат Мацумуре [1]. Предположим, что мы имеем последовательность n стягиваний, как и выше,

$$X = X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_n.$$

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ пусть $E_i' \subset X_{i-1}$ — исключительная кривая стягивания $X_{i-1} \to X_i$ и пусть E_i — ее полный прообраз на X. Тогда по 3.2 имеем $E_i^2 = -1$ для каждого i и $E_i \cdot E_j = 0$ для $i \neq j$.

Теперь для каждого i пусть $e_i = c(E_i)$ — класс когомологий E_i в $H^1(X, \Omega)$ (упр. 1.8). Тогда $\langle e_i, e_i \rangle = -1$ и $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ в спаривании пересечения на $H^1(X, \Omega)$ (см. упр. 1.8). Отсюда следует, что $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы в векторном пространстве $H^1(X, \Omega)$ над k.

Из этого мы заключаем, что $n \leqslant \dim_k H^1(X, \Omega)$. Так как это пространство конечномерно, то n ограничено, стало быть, процесс стягивания должен оборваться.

Замечание. Можно дать другое доказательство этого утверждения, показав, что ранг группы Нерона — Севери уменьшается на 1 при каждом стягивании, так что $n \leqslant \operatorname{rank} \mathrm{NS}(X)$, который конечен — ср. упр. 1.7.

Замечание 5.8.1. В духе этого результата утверждение о том, что на поверхности может существовать только конечное число исключительных кривых первого рода, *не* верно. Например, если мы раздуем r точек в общем положении на $\mathbf{P}^2$ с $r \geqslant 9$, то на получившейся поверхности имеется бесконечно много исключительных кривых первого рода (упр. 4.15).

Пример 5.8.2. В классе бирациональной эквивалентности рациональных поверхностей относительно минимальными моделями являются проективная плоскость $\mathbf{P}^2$, а также рациональные линейчатые поверхности X_e для всех $e \geqslant 0$, $e \neq 1$. Это легко следует из описания всех неприводимых кривых на X_e (см. 2.18). Напротив, X_1 не является относительно минимальной моделью (см. 2.11.5).

Пример 5.8.3. В классе поверхностей, бирационально эквивалентных $\mathbf{P}^1 \times C$, где C — кривая рода $g > 0$, всякая геометрически линейчатая поверхность $\pi\colon X \to C$ является относительно минимальной. Действительно, если Y — произвольная рациональная кривая на X, то, согласно 2.5.4 гл. IV, $\pi(Y)$ является точкой на C. Стало быть, кривая Y должна быть слоем π, так что $Y^2 = 0$, и отсюда видно, что X не имеет исключительных кривых первого рода.

Замечание 5.8.4. Классическая теорема, доказанная во всех характеристиках Зарисским [5], [6], [9], утверждает, что, кроме рациональных и линейчатых поверхностей, всякая поверхность бирациональна (единственной) минимальной модели. Можно показать также, что в случае рациональных и линейчатых поверхностей все относительно минимальные модели исчерпываются поверхностями, указанными в 5.8.2 и 5.8.3. См. Нагата [5] и Хартсхорн [4].

Упражнения

5.1. Пусть f — рациональная функция на поверхности X. Показать, что возможно разрешение особенностей функции f в следующем смысле: существует бирациональный морфизм $g\colon X' \to X$, такой, что f индуцирует морфизм $X' \to \mathbf{P}^1$. [*Указание.* Записать дивизор функции f в виде $(f) = \sum n_i C_i$, затем применить теорему о вложенном разрешении 3.9 к кривой $Y = \bigcup C_i$. После этого, если необходимо, раздувать точки пересечения кривой нулей с кривой полюсов до тех пор, пока нули и полюсы функции f не разделятся.]

5.2. Пусть $Y \simeq \mathbf{P}^1$ — кривая на поверхности X с $Y^2 < 0$. Показать, что Y стягиваема (5.7.2) на проективное многообразие X_0 (в общем случае особое).

5.3. Пусть $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром P. Показать, что $H^1(\widetilde{X}, \Omega_{\widetilde{X}}) \simeq H^1(X, \Omega_X) \oplus k$. Это даст другое доказательство теоремы 5.8. [*Указание.* Воспользоваться формулой проекции (упр. 8.3 гл. III) и упр. 8.1 гл. III, чтобы показать, что $H^i(X, \Omega_X) \simeq H^i(\widetilde{X}, \pi^*\Omega_X)$ для каждого i. Далее рассмотреть точную последовательность

$$0 \to \pi^*\Omega_X \to \Omega_{\widetilde{X}} \to \Omega_{\widetilde{X}/X} \to 0$$

и с помощью локальных вычислений в координатах показать, что существует естественный изоморфизм $\Omega_{\widetilde{X}/X} \simeq \Omega_E$, где E — исключительная кривая. Затем написать точную когомологическую последовательность, ассоциированную с предыдущей точной последовательностью пучков (понадобится каждый член), и воспользоваться двойственностью Серра, чтобы получить требуемый результат.]

5.4. Пусть $f\colon X \to X'$ — бирациональный морфизм неособых поверхностей.

(a) Показать, что если $Y \subset X$ — неприводимая кривая, такая, что $f(Y)$ — точка, то $Y \simeq \mathbf{P}^1$ и $Y^2 < 0$.

(b) (Мамфорд [6]). Пусть $P' \in X'$ — фундаментальная точка отображения f^{-1}, и пусть $Y_1, \ldots, Y_r$ — неприводимые компоненты кривой $f^{-1}(P')$. Показать, что матрица $\| Y_i \cdot Y_j \|$ отрицательно определена.

5.5. Пусть C — кривая, и пусть $\pi\colon X \to C$ и $\pi'\colon X' \to C$ — две геометрически линейчатые поверхности над C. Показать, что существует конечная последовательность элементарных преобразований (5.7.1), которая отображает X на X'. [*Указание.* Показать сначала, что если $D \subset X$ — сечение π, содержащее точку P, и если $\widetilde{D}$ — собственный прообраз D при elm_P, то $\widetilde{D}^2 = D^2 - 1$ (рис. 23). Далее показать, что X можно преобразовать в геометрически линейчатую поверхность X'' с инвариантом $e \gg 0$. Затем воспользоваться 2.12 и выяснить поведение линейчатой поверхности $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ с разложимым $\mathscr{E}$ при элементарном преобразовании elm_P.]

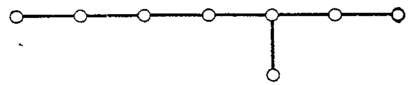
5.6. Пусть X — поверхность с полем функций K. Показать, что каждое кольцо нормирования R поля K/k является одним из трех сортов колец нормирования, описанных в упр. 4.12 гл. II. [*Указание.* В случае (3) пусть $f \in R$, тогда, используя упр. 5.1, показать, что для всех $i \gg 0$ $f \in \mathcal{O}_{X_i}$, так что в действительности $f \in R_0$.]

5.7. Пусть Y — неприводимая кривая на поверхности X, и предположим, что существует морфизм $f\colon X \to X_0$ на проективное многообразие размерности 2, такой, что $f(Y)$ — точка P на X_0 и $f^{-1}(P) = Y$. Показать, что тогда $Y^2 < 0$. [*Указание.* Пусть $|H|$ — очень обильный класс дивизоров (Картье) на X_0, $H_0 \in |H|$ — дивизор, содержащий P, и $H_1 \in |H|$ — дивизор, не содержащий P. Рассмотреть тогда f^*H_0, f^*H_1 и $\widetilde{H}_0 = f^*(H_0 - P)$.]

5.8. *Особенности поверхностей.* Пусть k — алгебраически замкнутое поле и X — поверхность в $\mathbf{A}_k^3$, определенная уравнением $x^2 + y^3 + z^5 = 0$. Она имеет изолированную особенность в начале координат $P = (0, 0, 0)$.

(a) Показать, что аффинное кольцо $A = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^5)$ поверхности X является факториальным кольцом. Для этого положить $t = z^{-1}$, $u = t^3x$, $v = t^2y$ и показать, что элемент z неприводим в A, что $t \in k[u, v]$ и что $A[z^{-1}] = k[u, v, t^{-1}]$. Теперь заключить отсюда, что кольцо A является факториальным.

(b) Показать, что особенность в P можно разрешить с помощью подходящего числа раздутий. Пусть $\widetilde{X}$ — получившаяся в результате разрешения поверхность, тогда прообраз P состоит из восьми проективных прямых, которые пересекаются в соответствии с диаграммой Дынкина $\widetilde{\mathrm{E}}_8$:



Здесь каждый кружок обозначает прямую и два кружка соединены отрезком прямой, если соответствующие прямые пересекаются.

Замечание. Эта особенность обладает интересными связями с локальной алгеброй, теорией инвариантов и топологией.

В случае $k = \mathbf{C}$ Мамфорд [6] показал, что пополнение $\widehat{A}$ кольца A по максимальному идеалу $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ также является факториальным кольцом. Это — замечательное свойство, поскольку пополнение факториального локального кольца, вообще говоря, не является факториальным, хотя обратное утверждение верно (теорема Мори) — см. Самюэль [3]. Брискорн [2] показал, что соответствующее аналитическое локальное кольцо $\mathbf{C}\{x, y, z\}/(x^2 + y^3 + z^5)$ является *единственным* нерегулярным нормальным 2-мерным аналитическим локальным кольцом, которое факториально. Липман [2] обобщил это следующим образом: над любым алгебраически замкнутым полем k характеристики $\neq 2, 3, 5$ единственным нерегулярным нормальным полным 2-мерным локальным факториальным кольцом является кольцо $k[[x, y, z]]/(x^2 + y^3 + z^5)$. См. также обзор Липмана [3] о последних работах, связанных с факториальными кольцами.

Классически эта особенность появилась в работе Клейна об икосаэдре. Группа I вращений икосаэдра, которая изоморфна простой группе порядка 60, действует естественным образом на 2-мерной сфере. Отождествляя двумерную сферу с $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ при помощи стереографической проекции, реализуем группу I как конечную подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$. Тогда ее действие на $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ поднимается до действия на $\mathbf{C}^2$ линейными преобразованиями комплексных переменных t_1 и t_2. Клейн [2, I, 2, § 13] нашел три инвариантных многочлена x, y, z от t_1 и t_2, связанные соотношением $x^2 + y^3 + z^5 = 0$. Стало быть, поверхность X получается как фактор $\mathbf{A}^2$ по действию группы I. В частности, локальная фундаментальная группа X в окрестности P является простой группой, изоморфной I.

При изучении топологии алгебраических многообразий над $\mathbf{C}$ Мамфорд [6] показал, что нормальная алгебраическая поверхность над $\mathbf{C}$, топологическое пространство которой (в обычной топологии) является топологическим многообразием, должна быть неособой. Брискорн показал, что это не так в высших размерностях. Например, топологическое пространство гиперповерхности в $\mathbf{C}^4$, определенной уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3 = 0$, является топологическим многообразием, хотя гиперповерхность, очевидно, имеет особенность в нуле. Позднее Брискорн [1] показал, что если такую особенность пересечь с маленькой сферой вокруг особой точки, то можно получить топологическую сферу с нестандартной дифференцируемой структурой. Так, например, пересекая особенность

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^3+x_5^{6k-1}=0$$

в $\mathbf{C}^5$ с маленькой сферой вокруг начала координат, при $k = 1, 2, \ldots, 28$ получаем все 28 возможных дифференцируемых структур на 7-мерной сфере. По поводу этой работы см. Хирцебрух и Майер [1].

§ 6. Классификация поверхностей

В случае кривых можно получить следующую классификацию. Каждый класс бирациональной эквивалентности содержит единственную проективную модель. Имеется единственный численный инвариант — род g, который может принимать любое целое значение $g \geqslant 0$. При фиксированном g кривые рода g параметризуются точками многообразия модулей $\mathfrak{M}_g$ (§ 5 гл. IV).

Для поверхностей ситуация является более сложной. Прежде всего неособая проективная модель не единственна в своем классе бирациональной эквивалентности. Однако положение дел можно исправить, рассматривая относительно минимальные модели. Для рациональных и линейчатых поверхностей они описаны, а в других классах бирациональной эквивалентности минимальные модели определены однозначно (5.8.4).

Для поверхностей имеются следующие бирациональные инварианты: p_a (5.6), p_g (8.19 гл. II), а также K^2, а точнее, его значение на минимальной модели. Однако неизвестно, какие тройки чисел p_a, p_g, K^2 могут быть реализованы как инварианты поверхности. Как и проблема существования многообразий модулей, этот вопрос остается открытым, кроме некоторых частных случаев, так что приходится исходить из менее полной информации, чем в случае кривых.

В этом параграфе мы упомянем бегло о нескольких основных результатах из классификационной теории поверхностей. За подробностями и дальнейшими ссылками мы отсылаем читателя к статье Бомбьери и Хьюзмоллера [1] и книге Шафаревича и др. [1].

Начнем с определения понятия *кодаировской размерности* $\varkappa(X)$ для любого проективного многообразия X на k. Она определяется как степень трансцендентности над k кольца

$$R = \bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(X, \mathscr{L}(nK))$$

минус 1, где K — канонический дивизор. Как и в доказательстве теоремы 8.19 гл. II, устанавливается, что R, а следовательно, и $\varkappa$ являются бирациональными инвариантами многообразия X. Другое эквивалентное определение инварианта $\varkappa$ состоит в том, что $\varkappa$ — это наибольшая размерность образа X в $\mathbf{P}^N$ при рациональном отображении, определяемом линейной системой $|nK|$ для некоторого $n \geqslant 1$, если $|nK| \neq \varnothing$ для некоторого n. Если $|nK| = \varnothing$ для всех $n \geqslant 1$, то $\varkappa = -1$. Известно, что для многообразий размерности n $\varkappa$ может принимать все значения от -1 до n. Для кривых, например, $\varkappa = -1 \Leftrightarrow g = 0$; $\varkappa = 0 \Leftrightarrow g = 1$; $\varkappa = 1 \Leftrightarrow g \geqslant 2$.

Поверхности классифицируются также по значению $\varkappa = -1, 0, 1, 2$. Некоторая более конкретная информация о каждом классе поверхностей составляет содержание следующих теорем.

Теорема 6.1. $\varkappa = -1 \Leftrightarrow |12K| = \varnothing \Leftrightarrow X$ — *либо рациональная, либо линейчатая поверхность.*

Теорема 6.2 (Кастельнуово). *Поверхность X рациональна $\Leftrightarrow p_a = P_2 = 0$, где $P_2 = \dim H^0(X, \mathscr{L}(2K))$ — двукратный род.*

Доказательство. Современное доказательство над $\mathbf{C}$ принадлежит Кодаире: оно изложено в докладе Серра [13]. В характеристике $p > 0$ доказательство было дано Зарисским [5], [6], [9].

Замечание 6.2.1. В качестве следствия теоремы 6.2 получается доказательство аналога теоремы Люрота (см. 2.5.5. гл. IV) в размерности 2: пусть k — алгебраически замкнутое поле, L — подполе чисто трансцендентного расширения $k(t, u)$ поля k, содержащее k, такое, что $k(t, u)$ — конечное *сепарабельное* расширение поля L, тогда L тоже является чисто трансцендентным расширением поля k. Это классическая теорема Кастельнуово о рациональности плоских инволюций.

Чтобы это доказать, рассмотрим неособую проективную модель X' поля L, и пусть X — неособая проективная модель поля $k(t, u)$. Тогда, как в 8.19 гл. II или упр. 8.8 гл. II, показывается с использованием сепарабельности, что $p_g(X') \leqslant p_g(X)$ и $P_2(X') \leqslant P_2(X)$. Следовательно, $p_g(X') = P_2(X') = 0$, поскольку эти равенства выполняются для X. Надо еще показать, что $q(X') \leqslant q(X)$ для того, чтобы установить равенство $p_a(X') = p_g(X') - q(X') = 0$. В таком случае рациональность X' будет следовать из 6.2, см. Серр [13] и Зарисский [9].

Утверждение перестает быть верным, если не предполагать сепарабельности $k(t, u)$ над L, см. Зарисский [9] и Сиода [1].

Теорема 6.3. $\varkappa = 0 \Leftrightarrow 12K = 0$. *Поверхность из этого класса должна быть одной из следующих* (*предполагается, что* $\operatorname{char} k \neq 2, 3$):

(1) К3-поверхность, *которая определяется как поверхность с* $K = 0$ *и иррегулярностью* $q = 0$, *так что* $p_a = p_g = 1$;
(2) поверхность Энриквеса, *для нее* $p_a = p_g = 0$ *и* $2K = 0$;
(3) *двумерное* абелево многообразие, *для него* $p_a = -1$, $p_g = 1$;
(4) гиперэллиптическая поверхность: *она представляется в виде расслоения над* $\mathbf{P}^1$ *с эллиптическими кривыми в качестве слоев, т. е. обладает пучком эллиптических кривых.*

Теорема 6.4. *Поверхность с* $\varkappa = 1$ *является* эллиптической поверхностью, *т. е. поверхностью* X *с морфизмом* π: $X \to C$ *на кривую* C, *причем почти все слои морфизма* π *являются неособыми эллиптическими кривыми* (предполагается, что $\operatorname{char} k \neq 2, 3$).

Теорема 6.5. $\varkappa = 2$ *тогда и только тогда, когда для некоторого* $n > 0$ *линейная система* $|nK|$ *определяет бирациональный морфизм* X *на свой образ в* $\mathbf{P}^N$. *Такие поверхности называются* поверхностями общего типа.

Упражнения

6.1. Пусть X — поверхность в $\mathbf{P}^n$, $n \geqslant 3$, определенная как полное пересечение гиперповерхностей степеней $d_1, \ldots, d_{n-2}$, где каждое $d_i \geqslant 2$. Показать, что для всех, кроме конечного числа наборов $(n, d_1, \ldots, d_{n-2})$, поверхность X является поверхностью общего типа. Описать исключительные случаи и указать их место в классификационной картине.

6.2. Доказать следующую теорему Чженя и Гриффитса. Пусть X — неособая поверхность степени d в $\mathbf{P}^{n+1}_{\mathbf{C}}$, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости. Тогда если $d < 2n$, то $p_g(X) = 0$, если $d = 2n$, то либо $p_g(X) = 0$, либо $p_g(X) = 1$ и X является $K3$-поверхностью. [*Указание.* Рассмотреть гиперплоское сечение и воспользоваться теоремой Клиффорда 5.4 гл. IV. Для доказательства последнего утверждения воспользоваться теоремой Римана — Роха на X и теоремой Кодаиры об обращении в нуль 7.15 гл. III.]

Добавление A

ТЕОРИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

В этом добавлении мы дадим набросок общей теории пересечений и теоремы Римана — Роха для неособых проективных многообразий любой размерности. Для начала рассмотрим случай кривых и поверхностей, чтобы выяснить, что же надо обобщать. Пусть D — дивизор на кривой X, тогда без двойственности Серра теорему Римана — Роха на X (1.3 гл. IV) можно записать в виде

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \deg D + 1 - g,$$

где χ — эйлерова характеристика (упр. 5.1 гл. III). На поверхности теорема Римана — Роха (1.6 гл. V) выглядит следующим образом:

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \tfrac{1}{2} D \cdot (D - K) + 1 + p_a.$$

В каждом из этих случаев слева стоит выражение от групп когомологий пучка $\mathscr{L}(D)$, а справа — численное выражение от дивизора D, канонического дивизора K и некоторых инвариантов многообразия X. Разумеется, конечной целью теоремы типа Римана — Роха является вычисление размерности линейной системы $|D|$ или $|nD|$ для больших n (упр. 7.6 гл. II). Это достигается путем комбинирования формулы для $\chi(\mathscr{L}(D))$ с некоторыми теоремами обращения в нуль для $H^i(X, \mathscr{L}(D))$ при $i > 0$, такими, как теоремы Серра 5.2 гл. III и Кодаиры 7.15 гл. III.

Мы хотим теперь обобщить предыдущие формулы для $\chi(\mathscr{L}(D))$ на неособые проективные многообразия X произвольной размерности. По ходу дела мы в действительности без особого труда получим формулу для $\chi(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ — произвольный когерентный локально свободный пучок.

Для того чтобы получить нужное выражение в правой стороне равенства, нам понадобится теория пересечений на X. Если $\dim X > 2$, то, например, пересечение двух дивизоров на X — уже не число, а *цикл* коразмерности 2, т. е. линейная комбинация подмногообразий коразмерности 2. Поэтому мы введем общее понятие циклов и определим для них отношение рациональной эквивалентности (обобщающее отношение линейной эквивалентности для дивизоров) в качестве начального шага построения теории пересечений на неособых проективных многообразиях.

(1) К3-поверхность, *которая определяется как поверхность с* $K = 0$ *и иррегулярностью* $q = 0$, *так что* $p_a = p_g = 1$;
(2) поверхность Энриквеса, *для нее* $p_a = p_g = 0$ *и* $2K = 0$;
(3) *двумерное* абелево многообразие, *для него* $p_a = -1$, $p_g = 1$;
(4) гиперэллиптическая поверхность: *она представляется в виде расслоения над* $\mathbf{P}^1$ *с эллиптическими кривыми в качестве слоев, т. е. обладает пучком эллиптических кривых.*

Теорема 6.4. *Поверхность с* $\varkappa = 1$ *является* эллиптической поверхностью, *т. е. поверхностью* X *с морфизмом* π: $X \to C$ *на кривую* C, *причем почти все слои морфизма* π *являются неособыми эллиптическими кривыми* (предполагается, что char $k \neq 2, 3$).

Теорема 6.5. $\varkappa = 2$ *тогда и только тогда, когда для некоторого* $n > 0$ *линейная система* $|nK|$ *определяет бирациональный морфизм* X *на свой образ в* $\mathbf{P}^N$. *Такие поверхности называются* поверхностями общего типа.

Упражнения

6.1. Пусть X — поверхность в $\mathbf{P}^n$, $n \geqslant 3$, определенная как полное пересечение гиперповерхностей степеней $d_1, \ldots, d_{n-2}$, где каждое $d_i \geqslant 2$. Показать, что для всех, кроме конечного числа наборов $(n, d_1, \ldots, d_{n-2})$, поверхность X является поверхностью общего типа. Описать исключительные случаи и указать их место в классификационной картине.

6.2. Доказать следующую теорему Чженя и Гриффитса. Пусть X — неособая поверхность степени d в $\mathbf{P}^{n+1}_{\mathbf{C}}$, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости. Тогда если $d < 2n$, то $p_g(X) = 0$, если $d = 2n$, то либо $p_g(X) = 0$, либо $p_g(X) = 1$ и X является $K3$-поверхностью. [*Указание*. Рассмотреть гиперплоское сечение и воспользоваться теоремой Клиффорда 5.4 гл. IV. Для доказательства последнего утверждения воспользоваться теоремой Римана — Роха на X и теоремой Кодаиры об обращении в нуль 7.15 гл. III.]

Добавление А

ТЕОРИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

В этом добавлении мы дадим набросок общей теории пересечений и теоремы Римана — Роха для неособых проективных многообразий любой размерности. Для начала рассмотрим случай кривых и поверхностей, чтобы выяснить, что же надо обобщать. Пусть D — дивизор на кривой X, тогда без двойственности Серра теорему Римана — Роха на X (1.3 гл. IV) можно записать в виде

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \deg D + 1 - g,$$

где χ — эйлерова характеристика (упр. 5.1 гл. III). На поверхности теорема Римана — Роха (1.6 гл. V) выглядит следующим образом:

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \frac{1}{2} D \cdot (D - K) + 1 + p_a.$$

В каждом из этих случаев слева стоит выражение от групп когомологий пучка $\mathscr{L}(D)$, а справа — численное выражение от дивизора D, канонического дивизора K и некоторых инвариантов многообразия X. Разумеется, конечной целью теоремы типа Римана — Роха является вычисление размерности линейной системы $|D|$ или $|nD|$ для больших n (упр. 7.6 гл. II). Это достигается путем комбинирования формулы для $\chi(\mathscr{L}(D))$ с некоторыми теоремами обращения в нуль для $H^i(X, \mathscr{L}(D))$ при $i > 0$, такими, как теоремы Серра 5.2 гл. III и Кодаиры 7.15 гл. III.

Мы хотим теперь обобщить предыдущие формулы для $\chi(\mathscr{L}(D))$ на неособые проективные многообразия X произвольной размерности. По ходу дела мы в действительности без особого труда получим формулу для $\chi(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ — произвольный когерентный локально свободный пучок.

Для того чтобы получить нужное выражение в правой стороне равенства, нам понадобится теория пересечений на X. Если $\dim X > 2$, то, например, пересечение двух дивизоров на X — уже не число, а *цикл* коразмерности 2, т. е. линейная комбинация подмногообразий коразмерности 2. Поэтому мы введем общее понятие циклов и определим для них отношение рациональной эквивалентности (обобщающее отношение линейной эквивалентности для дивизоров) в качестве начального шага построения теории пересечений на неособых проективных многообразиях.

Нам нужно будет также обобщить соответствие между обратимыми пучками $\mathcal{L}(D)$ и дивизорами D, а именно развить теорию классов Чженя. Каждому локально свободному пучку $\mathcal{E}$ ранга r мы сопоставим набор его классов Чженя $c_1(\mathcal{E}), \ldots, c_r(\mathcal{E})$, где $c_i(\mathcal{E})$ — цикл коразмерности i, определенный с точностью до рациональной эквивалентности.

Таких инвариантов многообразия X, как канонический класс K и арифметический род p_a, оказывается в общем случае недостаточно, поэтому мы расширяем запас инвариантов, рассматривая все классы Чженя касательного пучка на X. В таком случае обобщенная теорема Римана — Роха — это формула, выражающая $\chi(\mathcal{E})$ через некоторые числа пересечений классов Чженя пучка $\mathcal{E}$ и классов Чженя касательного пучка на X.

§ 1. Теория пересечений

Теорию пересечений на поверхности (1.1 гл. V) можно выразить в сжатом виде следующим образом. Существует единственное симметрическое билинейное спаривание $\operatorname{Pic} X \times \operatorname{Pic} X \to \mathbf{Z}$, *нормализованное* требованием, чтобы для любых двух неприводимых неособых кривых C, D, пересекающихся трансверсально, их индекс пересечения $C \cdot D$ равнялся в точности числу точек пересечения C и D. Основным средством в доказательстве теоремы о существовании такого спаривания служила теорема Бертини, которая позволяла сдвинуть любые два дивизора в их классах линейной эквивалентности так, чтобы они стали разностями неприводимых неособых кривых, пересекающихся трансверсально.

В высших размерностях ситуация становится более сложной. Соответствующей леммы о сдвиге здесь недостаточно, так что требуются более сильные нормализационные условия. Оказывается, что наиболее удобный способ построения теории пересечения заключается в том, чтобы развивать ее одновременно для всех многообразий сразу, включив в нее некоторые функториальные отображения f_* и f^*, связанные с морфизмом $f\colon X \to X'$.

Пусть X — произвольное многообразие над k. *Циклом коразмерности* r на X называется элемент свободной абелевой группы, порожденной замкнутыми неприводимыми подмногообразиями коразмерности r в X. Поэтому цикл можно записывать в виде $Y = \sum n_i Y_i$, где Y_i — подмногообразия, а $n_i \in \mathbf{Z}$. Иногда бывает полезно рассматривать цикл, ассоциированный с замкнутой подсхемой. Пусть Z — замкнутая подсхема коразмерности r и $Y_1, \ldots, Y_t$ — неприводимые компоненты Z, имеющие коразмерность r, тогда можно определить *цикл, ассоциированный с* Z, как $\sum n_i Y_i$, где n_i — длина локального кольца $\mathcal{O}_{y_i, Z}$ общей точки y_i подсхемы Y_i на Z.

Пусть $f\colon X \to X'$ — морфизм многообразий, и пусть Y — подмногообразие в X. Если $\dim f(Y) < \dim Y$, то мы положим $f_*(Y) = 0$; если же $\dim f(Y) = \dim Y$, то поле функций $K(Y)$ будет конечным расширением поля $K(f(Y))$ и мы полагаем в этом случае

$$f_*(Y) = [K(Y) : K(f(Y))] \cdot \overline{f(Y)}.$$

Отсюда по линейности определяется гомоморфизм f_* группы циклов на X в группу циклов на X'.

Дадим теперь определение рациональной эквивалентности циклов. Для любого подмногообразия V в X пусть $f\colon \widetilde{V} \to V$ — нормализация V. Тогда $\widetilde{V}$ удовлетворяет условию (*) в § 6 гл. II, поэтому имеет смысл говорить о дивизорах Вейля и об их линейной эквивалентности на $\widetilde{V}$. Пусть D и D' — линейно эквивалентные дивизоры Вейля на $\widetilde{V}$, тогда циклы f_*D и f_*D' будем называть *рационально эквивалентными* на X. В общем случае определим *рациональную эквивалентность* циклов на X как отношение эквивалентности, порожденное эквивалентностями $f_*D \sim f_*D'$ для всех подмногообразий V на X и всех линейно эквивалентных дивизоров Вейля D, D' на V. В частности, если само многообразие X нормально, то рациональная эквивалентность циклов коразмерности 1 в нем совпадает с линейной эквивалентностью дивизоров Вейля.

Для каждого r через $A^r(X)$ будем обозначать группу классов циклов коразмерности r на X относительно рациональной эквивалентности, а через $A(X)$ — градуированную группу $\bigoplus_{r=0}^{n} A^r(X)$, где $n = \dim X$. Отметим, что $A^0(X) = \mathbf{Z}$ и что $A^n(X) = 0$ при $r > \dim X$. Отметим также, что если многообразие X полно, то существует *гомоморфизм степени* из $A^n(X)$ в $\mathbf{Z}$, определяемый формулой $\deg(\sum n_i P_i) = \sum n_i$, где P_i — точки. Гомоморфизм степени корректно определен на классах рациональной эквивалентности согласно 6.10 гл. II.

Теория пересечений на данном классе многообразий $\mathfrak{V}$ состоит из задания спаривания $A^r(X) \times A^s(X) \to A^{r+s}(X)$ для каждых r, s и всякого $X \in \mathfrak{V}$, удовлетворяющего списку аксиом A1 — A7, приведенному ниже. Если $Y \in A^r(X)$ и $Z \in A^s(X)$, то класс их цикла пересечения будем обозначать символом $Y \cdot Z$.

Прежде чем сформулировать аксиомы, предположим, что для любого морфизма $f\colon X \to X'$ многообразий из $\mathfrak{V}$ произведение $X \times X'$ также принадлежит $\mathfrak{V}$, и определим гомоморфизм $f^*\colon A(X') \to A(X)$ следующим образом. Для подмногообразия $Y' \subset X'$

положим

$$f^*(Y') = p_{1*}(\Gamma_f \cdot p_2^{-1}(Y')),$$

где p_1 и p_2 — проекции $X \times X'$ на X и X' и Γ_f — график f, рассмотренный как цикл на $X \times X'$.

Потребуем теперь, чтобы все это удовлетворяло следующим аксиомам.

A1. Спаривание пересечения превращает $A(X)$ в коммутативное ассоциативное градуированное кольцо с единицей для любого многообразия $X \in \mathfrak{V}$. Будем называть $A(X)$ *кольцом Чжоу* многообразия X.

A2. Для любого морфизма $f\colon X \to X'$ многообразий из $\mathfrak{V}$ $f^*\colon A(X') \to A(X)$ является гомоморфизмом колец. Если $g\colon X' \to X''$ другой морфизм, то $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$.

A3. Для любого собственного морфизма $f\colon X \to X'$ многообразий из $\mathfrak{V}$ $f_*\colon A(X) \to A(X')$ является гомоморфизмом градуированных групп (со сдвигом степеней). Если $g\colon X' \to X''$ — другой морфизм, то $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.

A4. *Формула проекции.* Если $f\colon X \to X'$ — собственный морфизм и если $x \in A(X)$ и $y \in A(X')$, то

$$f_*(x \cdot f^* y) = f_*(x) \cdot y$$

A5. *Редукция к диагонали.* Если Y и Z — циклы на X и $\Delta\colon X \to X \times X$ — диагональный морфизм, то

$$Y \cdot Z = \Delta^*(Y \times Z).$$

A6. *Локальность.* Если Y и Z — подмногообразия в X, которые пересекаются *собственно* (это означает, что каждая неприводимая компонента пересечения $Y \cap Z$ имеет коразмерность в X, равную $\operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Z$), то можно записать

$$Y \cdot Z = \sum i(Y, Z; W_j) W_j,$$

где сумма берется по всем неприводимым компонентам W_j пересечения $Y \cap Z$ и целое число $i(Y, Z; W_j)$ зависит только от окрестности общей точки подмногообразия W_j на X. Число $i(Y, Z; W_j)$ будем называть *локальной кратностью* пересечения Y и Z вдоль W_j.

A7. *Нормализация.* Если Y — подмногообразие в X и Z — эффективный дивизор Картье, пересекающий Y собственно, то $Y \cdot Z$ — это в точности цикл, ассоциированный с дивизором Картье $Y \cap Z$ на Y, который определяется посредством ограничения на Y локального уравнения Z в X. (Отсюда следует, в частности, что трансверсальные пересечения неособых подмногообразий имеют кратность 1.)

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{V}$ — класс неособых квазипроективных многообразий над фиксированным алгебраически замкнутым полем k. Тогда существует единственная теория пересечений для классов циклов по модулю рациональной эквивалентности на многообразиях $X \in \mathfrak{V}$, удовлетворяющая аксиомам* A1 — A7.

В доказательстве этой теоремы имеются два основных момента: Один из них — это корректное определение локальных кратностей пересечения; другой — это лемма Чжоу о сдвиге. Существует несколько способов определения кратности пересечения. Мы приведем здесь определение Серра, которое является более современным по сравнению с другими и очень компактно. Пусть Y и Z пересекаются собственно и W — неприводимая компонента $Y \cap Z$. Тогда положим

$$i(Y, Z; W) = \sum (-1)^i \operatorname{length} \operatorname{Tor}_i^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{b}),$$

где A — локальное кольцо $\mathcal{O}_{W,X}$ общей точки W на X и $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы Y и Z в A. Серр [1] показал, что это число является целым неотрицательным и обладает требуемыми свойствами. Отметим, в частности, что наивное определение кратности как длины фактор-кольца $A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b}$, взятое по аналогии со случаем кривых на поверхности (1.4 гл. V), в общем случае оказывается непригодным (см. 1.1.1).

Лемма Чжоу о сдвиге утверждает, что если Y, Z — циклы на неособом квазипроективном многообразии X, то существует цикл Z', рационально эквивалентный Z и такой, что Y и Z' пересекаются собственно. Более того, если Z'' — другой такой цикл, то циклы $Y \cdot Z'$ и $Y \cdot Z''$ рационально эквивалентны. Доказательства этой леммы о сдвиге имеются у Шевалле [2] и Робертса [1].

Единственность теории пересечений доказывается следующим образом. Пусть Y, Z — циклы на X, тогда по лемме о сдвиге можно считать, что их пересечение собственно. Используя редукцию к диагонали A5, сводим к случаю вычисления $\Delta \cdot (Y \times Z)$ на $X \times X$. Преимущество этого случая состоит в том, что Δ является локально полным пересечением. Так как кратность пересечения обладает свойством локальности A6, то можно свести все к случаю, когда один из циклов является полным пересечением дивизоров Картье. Тогда единственность пересечения получается путем многократного применения аксиомы нормализации A7.

По поводу общей теории пересечений см. А. Вейль [1], Шевалле [2], Самюэль [1] и Серр [11]. Обсуждение некоторых других отношений эквивалентности на циклах и подходы к вычислению групп $A^i(X)$ см. в докладе Хартсхорна [6].

Пример 1.1.1. Для того чтобы понять, почему надо рассматривать высшие Tor, рассмотрим следующий пример. Пусть

Y — объединение двух плоскостей в $\mathbf{A}^4$, пересекающихся в одной точке, так что идеал Y имеет вид $(x, y) \cap (z, w) = (xz, xw, yz, yw)$, и пусть Z — плоскость $(x - z, y - w)$. Так как Z пересекает каждую компоненту Y в одной точке P, то мы имеем $i(Y, Z; P) = 2$ по линейности. Однако если мы поступим наивно и вычислим $A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$, где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы Y и Z, то получим

$$k[x, y, z, w]/(xz, xw, yz, yw, x - z, y - w) \simeq k[x, y]/(x', xy, y'),$$

длина которого равна 3.

Пример 1.1.2. Мы не можем ожидать существования похожей теории пересечений на особых многообразиях. Предположим, например, что существует такая теория пересечений на квадратичном конусе Q, заданном уравнением $xy = z^2$ в $\mathbf{P}^3$. Пусть L — образующая $x = z = 0$ и M — образующая $y = z = 0$. Тогда $2M$ линейно эквивалентно гиперплоскому сечению, которое можно выбрать как некоторую конику C на Q, пересекающую каждую из образующих L и M трансверсально по одной точке, так что $1 = L \cdot C = L \cdot 2M$. Отсюда по линейности мы должны иметь $L \cdot M = {}^1/_2$, так что пересечение не является целым числом.

§ 2. Свойства кольца Чжоу

Для любого неособого квазипроективного многообразия X рассмотрим его кольцо Чжоу $A(X)$ и укажем некоторые свойства этого кольца. Доказательства см. Шевалле [2].

A8. Так как циклы коразмерности 1 — это в точности дивизоры Вейля и их рациональная эквивалентность — это то же самое, что и линейная эквивалентность дивизоров и поскольку X неособо, то имеет место изоморфизм $A^1(X) \simeq \operatorname{Pic} X$.

Таким образом, если, например, X — неособая проективная поверхность, то теория пересечений (1.1 гл. V) на X содержится в общей теории пересечений: достаточно рассмотреть спаривание $A^1(X) \times A^1(X) \to A^2(X)$ с последующим гомоморфизмом степени $A^2(X) \to \mathbf{Z}$.

A9. Для любого аффинного пространства $\mathbf{A}^m$ проекция p: $X \times \mathbf{A}^m \to X$ индуцирует изоморфизм $p^*: A(X) \to A(X \times \mathbf{A}^m)$.

A10. *Точность.* Если Y — неособое замкнутое подмногообразие в X и $U = X - Y$, то имеет место следующая точная последовательность:

$$A(Y) \xrightarrow{i_*} A(X) \xrightarrow{j^*} A(U) \to 0,$$

где $i: Y \to X$ и $j: U \to X$ — отображения вложения.

Доказательства этих двух результатов аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для дивизоров 6.5 и 6.6 гл. II.

Пример 2.0.1. $A(\mathbf{P}^n) \simeq \mathbf{Z}[h]/h^{n+1}$, где h — класс гиперплоскости; он имеет степень 1. Это можно доказать по индукции, используя свойства A9 и A10, или же непосредственно, показав, что любое подмногообразие степени d в $\mathbf{P}^n$ рационально эквивалентно d раз взятому линейному пространству той же размерности (упр. 6.3).

Следующее важное свойство будет использоваться в определении классов Чженя в следующем параграфе.

A11. Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга r на X, $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ — ассоциированное с ним расслоение на проективные пространства (§ 7 гл. II), $\xi \in A^1(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ — класс дивизоров, соответствующий обратимому пучку $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$, и пусть $\pi: \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — естественная проекция. Тогда π^* превращает $A(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ в свободный $A(X)$-модуль, порожденный классами $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{r-1}$.

§ 3. Классы Чженя

Мы следуем здесь работе Гротендика [3].

Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга r на неособом квазипроективном многообразии X. Тогда для каждого $i = 0, 1, \ldots, r$ определим его *i-й класс Чженя* $c_i(\mathscr{E}) \in A^i(X)$, полагая $c_0(\mathscr{E}) = 1$ и потребовав, чтобы в обозначениях A11 выполнялось равенство

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \pi^* c_i(\mathscr{E}) \xi^{r-i} = 0$$

в $A^r(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.

Это имеет смысл, потому что по A11 ξ^r можно однозначно записать в виде линейной комбинации $1, \xi, \ldots, \xi^{r-1}$ с коэффициентами из $A(X)$, поднятыми в $A(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ с помощью π^*. Для удобства определим *тотальный класс Чженя*

$$c(\mathscr{E}) = c_0(\mathscr{E}) + c_1(\mathscr{E}) + \ldots + c_r(\mathscr{E})$$

и многочлен Чженя

$$c_t(\mathscr{E}) = c^0(\mathscr{E}) + c_1(\mathscr{E})t + \ldots - c_r(\mathscr{E})t^r.$$

C1. Если $\mathscr{E} \simeq \mathscr{L}(D)$ для дивизора D, то $c_t(\mathscr{E}) = 1 + Dt$. Действительно, в этом случае $\mathbf{P}(\mathscr{E}) = X$, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1) = \mathscr{L}(D)$, так что $\xi = D$ и по определению $1 \cdot \xi - c_1(\xi) \cdot 1 = 0$, откуда $c_1(\mathscr{E}) = D$.

C2. Пусть $f: X^1 \to X$ — морфизм и $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на X, тогда для каждого i

$$c_i(f^*\mathscr{E}) = f^* c_i(\mathscr{E}).$$

Это непосредственно следует из функториальных свойств конструкции $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ и отображения f^*.

C3. Пусть $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ — точная последовательность локально свободных пучков на X, тогда

$$c_t(\mathscr{E}) = c_t(\mathscr{E}') \cdot c_t(\mathscr{E}'').$$

В действительности, забыв на время определение, можно показать, что существует единственная теория классов Чженя, которая каждому локально свободному пучку $\mathscr{E}$ на X сопоставляет набор классов $c_i(\mathscr{E}) \in A^i(X)$, удовлетворяющих условиям C1, C2 и C3. Для доказательства этой единственности, а также для доказательства свойства C3 и других свойств, указанных ниже, используется *принцип расщепления*, смысл которого заключается в следующем: для всякого локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на X существует морфизм $f\colon X' \to X$, такой, что отображение $f^*\colon A(X) \to A(X')$ инъективно и пучок $\mathscr{E}' = f^*\mathscr{E}$ *расщепим*, т. е. в нем имеется фильтрация $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'_0 \supset \ldots \supset \mathscr{E}'_r = 0$, все последовательные факторы которой являются обратимыми пучками. Затем используется следующее свойство.

C4. Пусть $\mathscr{E}$ расщепим и обратимые пучки $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_r$ являются последовательными факторами фильтрации на $\mathscr{E}$, тогда

$$c_t(\mathscr{E}) = \prod_{i=1}^{r} c_t(\mathscr{L}_i)$$

(причем значения $c_t(\mathscr{L}_i)$ нам известны по свойству C1).

С помощью принципа расщепления можно вычислять классы Чженя тензорных и внешних произведений, а также двойственных локально свободных пучков. Пусть $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ — локально свободные пучки рангов r и s соответственно. Запишем

$$c_t(\mathscr{E}) = \prod_{i=1}^{r} (1 + a_i t)$$

и

$$c_t(\mathscr{F}) = \prod_{i=1}^{s} (1 + b_i t),$$

где $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots b_s$ — формальные символы. Тогда имеют место следующие формулы:

C5.
$$c_t(\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}) = \prod_{i,j} (1 + (a_i + b_j) t),$$
$$c_t(\textstyle\bigwedge^p \mathscr{E}) = \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant r} (1 + (a_{i_1} + \ldots + a_{i_p}) t),$$
$$c_t(\mathscr{E}^\vee) = c_{-t}(\mathscr{E}).$$

Эти формулы имеют смысл, потому что после перемножения коэффициенты при степенях t будут симметрическими функциями от a_i и b_j. Следовательно, по хорошо известной теореме о симметрических функциях они могут быть выражены как многочлены от элементарных симметрических функций от a_i и b_j, которые являются не чем иным, как классами Чженя пучков $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Дальнейший формализм в этом плане см. Хирцебрух [1, гл. I, § 4.4].

C6. Пусть $s \in \Gamma(X, \mathscr{E})$ — глобальное сечение локально свободного пучка $\mathscr{E}$ ранга r на X. Тогда s определяет гомоморфизм $\mathcal{O}_X \to \mathscr{E}$ путем сопоставления единичному сечению 1 сечения s. Определим *схему нулей* сечения s как замкнутую подсхему Y в X, задаваемую точной последовательностью

$$\mathscr{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0,$$

где $s^\vee$ — отображение, двойственное отображению $s\colon \mathcal{O}_X \to \mathscr{E}$. Пусть Y обозначает также цикл, ассоциированный с замкнутой подсхемой Y. Тогда если коразмерность Y равна r, то $c_r(\mathscr{E}) = Y$ в $A^r(X)$.

Это — обобщение того факта, что сечение обратимого пучка задает соответствующий ему дивизор (7.7 гл. II).

C7. *Формула самопересечения.* Пусть Y — неособое подмногообразие коразмерности r в X и $\mathscr{N}$ — его нормальный пучок (§ 8 гл. II). Пусть $i\colon Y \to X$ — отображение вложения, тогда

$$i^* i_* (1_Y) = c_r(\mathscr{N}).$$

Отсюда с помощью формулы проекции A4 получаем

$$i_*(c_r(\mathscr{N})) = Y \cdot Y$$

на X.

Этот результат, принадлежащий Мамфорду (см. Ласку, Мамфорд и Скотт [1]), обобщает формулу самопересечения 1.4.1 гл. V для кривых на поверхности.

§ 4. Теорема Римана — Роха

Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга r на неособом проективном многообразии X размерности n, и пусть $\mathscr{T} = \mathscr{T}_X$ — касательный пучок на X (§ 8 гл. II). Мы хотим получить выражение для $\chi(\mathscr{E})$ в терминах классов Чженя пучков $\mathscr{E}$ и $\mathscr{T}$. Для этого введем два элемента из $A(X) \otimes \mathbb{Q}$, которые определяются как некоторые универсальные многочлены от классов Чженя пучка $\mathscr{E}$. Положим, как и выше,

$$c_t(\mathscr{E}) = \prod_{i=1}^{r} (1 + a_i t),$$

где a_i — формальные символы. Определим *экспоненциальный характер Чженя* формулой

$$\operatorname{ch}(\mathscr{E}) = \sum_{i=1}^{r} e^{a_i},$$

где

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \ldots .$$

Определим также *класс Тодда*, полагая

$$\operatorname{td}(\mathscr{E}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i}{1-e^{-a_i}},$$

где

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{720} x^4 + \ldots .$$

Как и раньше, это симметрические выражения от a_i, так что можно записать их в виде многочленов от $c_i(\mathscr{E})$ с рациональными коэффициентами. С помощью элементарных, но довольно скучных вычислений можно показать, что

$$\operatorname{ch}(\mathscr{E}) = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \\ + \frac{1}{24}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4) + \ldots$$

и

$$\operatorname{td}(\mathscr{E}) = 1 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24} c_1c_2 - \\ - \frac{1}{720}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 - 3c_2^2 - c_2c_3 + c_4) + \ldots,$$

где мы полагаем $c_i = c_i(\mathscr{E})$ и $c_i = 0$, если $i > r$.

Теорема 4.1 (Хирцебруха — Римана — Роха). *Для всякого локально свободного пучка $\mathscr{E}$ ранга r на неособом проективном многообразии X размерности n имеет место равенство*

$$\chi(\mathscr{E}) = \deg(\operatorname{ch}(\mathscr{E}) \cdot \operatorname{td}(\mathscr{T}))_n,$$

где $(\ )_n$ обозначает компоненту степени n в $A(X) \otimes \mathbf{Q}$.

Эта теорема была доказана Хирцебрухом [1] над $\mathbf{C}$ и в более общей форме (см. 5.3) Гротендиком над любым алгебраически замкнутым полем k (см. Борель и Серр [1]).

Пример 4.1.1. Пусть X — кривая и $\mathscr{E} = \mathscr{L}(D)$, тогда $\operatorname{ch}(\mathscr{E}) = 1 + D$. Касательный пучок $\mathscr{T}_X$ на X — это пучок, двойственный пучку Ω_X. Следовательно, $\mathscr{T}_X \simeq \mathscr{L}(-K)$, где k — канонический дивизор, так что $\operatorname{td}(\mathscr{T}_X) = 1 - {}^1/_2 K$. Таким образом, 4.1 в этом случае превращается в равенство

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \deg\left((1+D)\left(1 - \frac{1}{2}K\right)\right)_1 = \deg\left(D - \frac{1}{2}K\right).$$

При $D = 0$ получаем $1 - g = -{}^1/_2 \deg K$, так что это равенство можно записать в виде

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \deg D + 1 - g,$$

а это в точности теорема Римана — Роха для кривых, доказанная в гл. V (см. 13 гл. V).

Пример 4.1.2. Теперь пусть X — поверхность, и пусть опять $\mathscr{E} = \mathscr{L}(D)$. Тогда $\operatorname{ch}(\mathscr{E}) = 1 + D + {}^1/_2 D^2$. Обозначим через c_1 и c_2 классы Чженя касательного пучка $\mathscr{T}_X$. Они зависят только от X, поэтому их иногда называют классами Чженя X. Так как пучок $\mathscr{T}_X$ двойствен пучку Ω_X и так как $c_1(\Omega_X) = c_1(\bigwedge^2 \Omega_X)$ (см. C5) и $\bigwedge^2 \Omega_X = \omega_X$ — пучок $\mathscr{L}(K)$, где K — канонический дивизор, то мы видим, что $c_1(\mathscr{T}_X) = -K$. Но класс c_2 (или, скорее, его степень) является новым численным инвариантом поверхности, который не встречался нам раньше.

В терминах $c_1 = -K$ и c_2 получаем

$$\operatorname{td}(\mathscr{T}_X) = 1 - \frac{1}{2}K + \frac{1}{12}(K^2 + c_2).$$

Перемножая и беря степень (для простоты через D^2 мы обозначаем и класс в $A^2(X)$, и его степень), мы можем записать 4.1 в виде

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \frac{1}{2} D \cdot (D - K) + \frac{1}{12}(K^2 + c_2).$$

В частности, при $D = 0$ получаем

$$\chi(\mathscr{O}_X) = \frac{1}{12}(K^2 + c_2).$$

По определению арифметического рода (упр. 5.3 гл. III) это означает, что

$$1 + p_a = \frac{1}{12}(K^2 + c_2).$$

Таким образом, мы получаем не только теорему Римана — Роха для поверхности 1.6 гл. V, но и еще дополнительную информацию, содержащуюся в последнем равенстве, которое позволяет выразить c_2 через инварианты p_a и K^2.

Пример 4.1.3. В качестве приложения выведем формулу, связывающую численные инварианты поверхности, содержащейся в $\mathbf{P}^4$. Для сравнения заметим, что если X — поверхность степени

d в $\mathbf{P}^3$, то ее численные инварианты p_a, K^2, а следовательно, и c_2 однозначно определяются числом d (упр. 7.2 гл. I и упр. 1.5 гл. V). С другой стороны, в $\mathbf{P}^5$ вкладывается любая проективная поверхность (упр. 3.11 гл. IV), поэтому никакой особой связи между инвариантами поверхности в этом случае ожидать не приходится. Однако не всякая поверхность может быть вложена в $\mathbf{P}^4$, так что те поверхности, которые содержатся в $\mathbf{P}^4$, должны, по-видимому, удовлетворять некоторым условиям.

Пусть X — неособая поверхность степени d в $\mathbf{P}^4$. В кольце Чжоу $\mathbf{P}^4$ поверхность X эквивалентна d раз взятой плоскости, так что $X \cdot X = d^2$. С другой стороны, пользуясь формулой самопересечения C7, $X \cdot X$ можно вычислить, как $\deg c_2(\mathcal{N})$, где $\mathcal{N}$ — нормальный пучок на X в $\mathbf{P}^4$. Имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \to \mathcal{T}_X \to i^*\mathcal{T}_{\mathbf{P}^4} \to \mathcal{N} \to 0,$$

где $i\colon X \to \mathbf{P}^4$ — отображение вложения. Мы воспользуемся этой последовательностью для того, чтобы вычислить $c_2(\mathcal{N})$ и получить тем самым нужное условие.

Рассмотрим сначала точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(1)^5 \to \mathcal{T}_{\mathbf{P}^4} \to 0.$$

Обозначая через $h \in A^1(\mathbf{P}^4)$ класс гиперплоскости, имеем

$$c_t(\mathcal{T}_{\mathbf{P}^4}) = (1+ht)^5 = 1 + 5\cdot ht + 10h^2t^2 + \ldots.$$

С другой стороны, как в 4.1.2,

$$c_t(\mathcal{T}_X) = 1 - Kt + c_2t^2.$$

Следовательно, обозначая через $H \in A^1(X)$ класс гиперплоского сечения X, из точной последовательности, приведенной выше, с помощью C3 получаем

$$(1 - Kt + c_2t^2)(1 + c_1(\mathcal{N})\,t + c_2(\mathcal{N})\,t^2) = 1 + 5Ht + 10H^2t^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и t^2 слева и справа, находим

$$c_1(\mathcal{N}) = 5H + K,$$
$$c_2(\mathcal{N}) = 10H^2 - c_2 + 5H\cdot K + K^2.$$

В последнем равенстве перейдем к степеням, учитывая, что $\deg c_2(\mathcal{N}) = d^2$, $\deg H^2 = d$, и используя выражение для c_2 в 4.1.2. В результате получаем соотношение

$$d^2 - 10d - 5H\cdot K - 2K^2 + 12 + 12p_a = 0.$$

Это соотношение выполняется для любой неособой поверхности степени d в $\mathbf{P}^4$. Некоторые его приложения см. в упр. 6.9.

§ 5. Дополнения и обобщения

Развив теорию пересечения на n-мерных многообразиях, можно задаться вопросом: какие из теорем, доказанных для поверхностей в гл. V, могут быть распространены в произвольную размерность? Мы их сейчас сформулируем.

Теорема 5.1 (Критерий Накаи — Мойшезона). *Пусть D — дивизор Картье на схеме X, являющейся собственной над алгебраически замкнутым полем k. Дивизор D обилен тогда и только тогда, когда для каждой целой замкнутой подсхемы $Y \subset X$ (включая $Y = X$, если схема X целая) $D^r\cdot Y > 0$, где $r = \dim Y$.*

Эта теорема была доказана Накаи [1] в случае, когда X проективно над k, и независимо Мойшезоном в случае, когда X — полное абстрактное многообразие. Их доказательства были прояснены и упрощены Клейманом [1]. Строго говоря, доказательство этой теоремы использует несколько иную теорию пересечения, чем та, которую мы здесь изложили. Многообразие X здесь не предполагается неособым и проективным, так что лемма Чжоу о сдвиге на нем, вообще говоря, не имеет места. С другой стороны, от теории пересечений здесь требуется только умение вычислять индексы пересечений дивизоров Картье с замкнутыми подсхемами. Развить такую теорию в действительности гораздо проще, чем изложенную в § 1, см. Клейман [1]. Отметим, что теорема 5.1 на самом деле является обобщением теоремы 1.10 гл. V для поверхностей: беря $Y = X$, мы получаем условие $D^2 > 0$ и для любой кривой Y имеем $D\cdot Y > 0$.

Теорема Ходжа об индексе 1.9 гл. V также допускает обобщение на произвольное неособое проективное многообразие X над $\mathbf{C}$. Пусть X_h обозначает соответствующее комплексное многообразие (см. добавление B) и $H^i(X_h, \mathbf{C})$ — его комплексные когомологии. Для любого цикла Y коразмерности r на X можно определить его класс когомологий $\eta(Y) \in H^{2r}(X_h, \mathbf{C})$. Будем говорить, что Y *гомологически эквивалентен нулю*, и записывать это в виде $Y \sim_{\text{hom}} 0$, если $\eta(Y) = 0$.

Теорема 5.2 (теорема Ходжа об индексе). *Пусть X — неособое проективное многообразие над $\mathbf{C}$ четной размерности $n = 2k$, H — обильный дивизор на X и Y — цикл коразмерности k на X. Предположим, что $Y\cdot H \sim_{\text{hom}} 0$ и $Y \not\sim_{\text{hom}} 0$, тогда $(-1)^kY^2 > 0$.*

Эта теорема доказывается с помощью теории Ходжа гармонических интегралов, см. Вейль [5, теорема 8]. Она является обобщением аналогичной теоремы для поверхностей (1.9 гл. V), поскольку можно показать, что для дивизоров гомологическая и численная эквивалентности совпадают. Как предполагает Гротендик [9], эта теорема верна над произвольным алгебраически замкнутым полем k, где для определения гомологической эквивалентности используются l-адические когомологии. Он считает также, что она, возможно, верна и в смысле численной эквивалентности циклов, но это пока не доказано даже над $\mathbf{C}$, см. Клейман [2], где обсуждаются эти и другие «стандартные гипотезы» об алгебраических циклах.

Обратимся теперь к дальнейшему обобщению теоремы Римана — Роха, следуя статье Бореля и Серра [1]. Первый шаг здесь состоит в том, чтобы распространить определение классов Чженя на элементы группы Гротендика $K(X)$ (упр. 6.10 гл. II). Для неособого многообразия X группу $K(X)$ можно построить с помощью локально свободных пучков (упр. 6.9 гл. III).

В таком случае, пользуясь свойством аддитивности С3 классов Чженя, можно, очевидно, продолжить многочлен Чженя c_t до отображения

$$c_t\colon\ K(X) \to A(X)[t].$$

Таким образом, классы Чженя определяются для каждого элемента из $K(X)$. Экспоненциальный характер Чженя продолжается тогда до отображения

$$\mathrm{ch}\colon\ K(X) \to A(X) \otimes \mathbf{Q}.$$

Можно показать, что $K(X)$ обладает естественной структурой кольца (определяемой тензорным умножением $\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}$ локально свободных пучков $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$) и что экспоненциальный характер ch является гомоморфизмом колец. Для любого морфизма неособых многообразий $f\colon X' \to X$ существует гомоморфизм колец

$$f^!\colon K(X) \to K(X),$$

определяемый сопоставлением $\mathscr{E} \mapsto f^*\mathscr{E}$ для локально свободных пучков $\mathscr{E}$. Экспоненциальный характер Чженя ch коммутирует с гомоморфизмом $f^!$.

Для собственного морфизма $f\colon X \to Y$ определяется аддитивный гомоморфизм (гомоморфизм групп) $f_!\colon K(X) \to K(Y)$ формулой

$$f_!(\mathscr{F}) = \sum (-1)^i R^i f_*(\mathscr{F}),$$

где $\mathscr{F}$ — произвольный когерентный пучок на X.

Отображение $f_!$ не коммутирует с ch. Мера отклонения от коммутирования $f_!$ и ch и есть обобщенная теорема Римана — Роха — Гротендика.

Теорема 5.3 (Гротендик — Риман — Рох). *Пусть $f\colon X \to Y$ — гладкий проективный морфизм неособых проективных многообразий. Тогда для любого $x \in K(X)$ в $A(Y) \otimes \mathbf{Q}$ имеет место формула*

$$\mathrm{ch}(f_!(x)) = f_*(\mathrm{ch}(x)\cdot \mathrm{td}(\mathscr{T}_f)),$$

где $\mathscr{T}_f$ — относительный касательный пучок морфизма f.

В случае когда Y — точка, эта формула сводится к формуле Хирцебруха — Римана — Роха 4.1.

После преодоления трудностей технического характера эта теорема была на парижском семинаре Гротендика [SGA6] обобщена на случай, когда Y — нётерова схема, обладающая обильным обратимым пучком, и f — проективный морфизм, слои которого — локально полные пересечения. Более подробное изложение этой работы см. Манин [1].

Следует также упомянуть еще об одной формуле Римана — Роха для случая замкнутого вложения $f\colon X \to Y$ неособых многообразий, принадлежащей Жуанолу [1]. Для замкнутого вложения формула 5.3 дает способ вычисления классов Чженя $c_i(f_*\mathscr{F})$ для любого конкретного пучка $\mathscr{F}$ на X в терминах $f_*(c_i(\mathscr{F}))$ и $f_*(c_i(\mathscr{N}))$, где $\mathscr{N}$ — нормальный пучок на образе X в Y. Оказывается, что эти соотношения могут быть заданы в виде многочленов с целыми коэффициентами, но способ доказательства теоремы 3.5 приводит к формулам только в $A(Y) \otimes \mathbf{Q}$, т. е. по модулю кручения. Теорема Жуанолу утверждает, что этот результат выполняется в самом кольце $A(Y)$ над $\mathbf{Z}$.

Недавно Баумом, Фултоном и Макферсоном было получено некоторое обобщение теоремы Римана — Роха на особые многообразия, см. Фултон [2].

Упражнения

6.1. Показать, что определение рациональной эквивалентности циклов, приведенное в § 1, равносильно следующему: два цикла Y, Z коразмерности r на X называются эквивалентными, если существует цикл W коразмерности r на $X \times \mathbf{A}^1$, который собственно пересекается с $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$ и такой, что $Y = W\cdot(X \times \{0\})$ и $Z = W\cdot(X \times \{1\})$.

6.2. Доказать следующее утверждение о дивизорах Вейля, обобщающее упр. 6.2 гл. IV и нужное для проверки корректности определения отображения f_* на классах рациональной эквивалентности (А3). Пусть $f\colon X \to X'$ — собственное конечное в общей точке отображение нормальных многообразий и D_1 и D_2 — линейно эквивалентные дивизоры Вейля на X, тогда f_*D_1 и f_*D_2 тоже будут линейно эквивалентными дивизорами Вейля на X'. [*Указание*. Выбросить подмножество коразмерности $\geqslant 2$ из X' так, чтобы f стал конечным плоским морфизмом, затем обобщить на эту ситуацию утверждения из упр. 2.6 гл. IV для случая кривых.]

6.3. Показать непосредственно, используя операцию проектирования по аналогии с 9.8.3 гл. III, что любое многообразие степени d в $\mathbf{P}^n$ рационально эквивалентно d раз взятому (т. е. d-кратному) линейному подпространству той же размерности.

6.4. Пусть $\pi\colon X \to C$ — линейчатая поверхность (§ 2 гл. V) над неособой кривой C. Показать, что группа $A^2(X)$ классов нульмерных циклов по модулю рациональной эквивалентности изоморфна группе Pic C.

6.5. Пусть X — поверхность, $P \in X$ — точка и $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в точке P (§ 3 гл. V). Показать, что $A(\widetilde{X}) \simeq \simeq \pi^* A(X) \oplus \mathbf{Z}$, где группа $\mathbf{Z}$ порождена классом исключительной кривой $E \in A^1(X)$, и что умножение в кольце $A(\widetilde{X})$ определяется умножением в $A(X)$ и формулой $E^2 = -\pi^*(P)$.

6.6. Пусть X — неособое проективное многообразие размерности n и $\Delta \subset X \times X$ — диагональ. Показать, что $c_n(\mathcal{T}_X) = \Delta^2$ в $A^n(X)$ при естественном изоморфизме X и Δ.

6.7. Пусть X — неособое проективное трехмерное многообразие с классами Чженя c_1, c_2 и c_3. Показать, что

$$1 - p_a = \frac{1}{24} c_1 c_2$$

и что для любого дивизора D имеет место формула

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \frac{1}{12} D(D-K)(2D-K) + \frac{1}{12} D \cdot c_2 + 1 - p_a.$$

6.8. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга 2 на $\mathbf{P}^3$ с классами Чженя c_1 и c_2. Поскольку $A(\mathbf{P}^3) = \mathbf{Z}[h]/h^4$, то можно представлять себе, что c_1 и c_2 — некоторые целые числа. Показать, что $c_1 c_2 \equiv 0 \pmod 2$. [*Указание.* В формуле Римана — Роха для $\mathcal{E}$ левая сторона автоматически является целым числом, в то время как правая сторона a priori является лишь числом рациональным.]

6.9. *Поверхности в* $\mathbf{P}^4$.

(a) Проверить формулу из 4.1.3 для рационально линейчатой кубической поверхности в $\mathbf{P}^4$ (2.14.1 гл. V).

(b) Показать, что если X — поверхность K3 в $\mathbf{P}^4$, то ее степень может быть только 4 или 6. (Примерами таких поверхностей являются квартика в $\mathbf{P}^3$ и полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbf{P}^4$.)

(c) Пусть X — абелева поверхность (т. е. двумерное абелево многообразие) в $\mathbf{P}^4$. Показать, что ее степень может равняться только 10. (Хоррокс и Мамфорд [1] показали, что такие абелевы поверхности существуют.)

*(d) Выяснить, какие из рациональных линейчатых поверхностей X_e, $e \geqslant 0$ (§ 2 гл. V), допускают вложение в $\mathbf{P}^4$.

6.10. Используя тот факт, что касательный пучок на абелевом многообразии свободен, показать, что трехмерное абелево многообразие не может быть вложено в $\mathbf{P}^5$.

Добавление B

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Неособое алгебраическое многообразие X над $\mathbf{C}$ можно рассматривать также и как комплексное многообразие. В таком случае X можно изучать также с помощью методов комплексного анализа и дифференциальной геометрии, переводя соответствующие результаты на язык абстрактной алгебраической геометрии.

На этом пути с помощью мощнейших так называемых трансцендентных методов получено (и продолжает получаться) много важных результатов, для многих из которых пока не найдены чисто алгебраические доказательства. С другой стороны, возникает вопрос: какое место занимают алгебраические многообразия в общей теории комплексных многообразий и какими специальными свойствами они характеризуются среди последних?

В этом добавлении мы дадим очень краткий обзор этой обширной и важной области исследований.

§ 1. Комплексное аналитическое пространство, ассоциированное со схемой конечного типа над C

Комплексным аналитическим пространством (в смысле Грауэрта) называется топологическое пространство $\mathfrak{X}$ вместе с пучком колец $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, которое может быть покрыто открытыми множествами, каждое из которых изоморфно как окольцованное пространство одному из объектов Y следующего типа. Пусть $U \subset \mathbf{C}^n$ — полидиск $\{\,|z_i| < 1 \mid i = 1, \ldots, n\,\}$, $f_1, \ldots, f_q$ — голоморфные функции на U и $Y \subset U$ — замкнутое подмножество (в обычной топологии), состоящее из общих нулей функций $f_1, \ldots, f_q$, с пучком колец $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_q)$, где $\mathcal{O}_U$ — пучок ростков голоморфных функций на U. Отметим, что структурный пучок $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ может иметь нильпотентные элементы. Об общей теории комплексных аналитических пространств, когерентных аналитических пучков и их когомологий см. Ганнинг и Росси [1], а также Бэникэ и Стэнэшиле [1], где дается обзор современной техники когомологий комплексных аналитических пространств, развиваемой параллельно соответствующей алгебраической технике гл. III.

Пусть X — схема конечного типа над $\mathbf{C}$. Определим *ассоциированное с ней комплексное аналитическое пространство* X_h следующим образом. Покроем X открытыми аффинными подмножествами $Y_i = \operatorname{Spec} A_i$, тогда каждое из A_i является алгеброй конечного типа над $\mathbf{C}$, так что ее можно записать в виде $A_i \simeq \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_q)$, где $f_1, \ldots, f_q$ — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$. Эти многочлены можно рассматривать как голоморфные функции на $\mathbf{C}^n$, так что множество их общих нулей будет комплексным аналитическим подпространством $(Y_i)_h \subset \mathbf{C}^n$. Схема X получается склеиванием открытых множеств Y_i, стало быть, используя те же данные склеивания, можно склеить аналитические пространства $(Y_i)_h$ в некоторое аналитическое пространство X_h. Это и есть комплексное аналитическое пространство, ассоциированное с X.

Описанная конструкция, очевидно, функториальна, так что мы получаем функтор из категории схем конечного типа над $\mathbf{C}$ в категорию комплексных аналитических пространств. Аналогичным образом, для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X можно определить ассоциированный с ним когерентный аналитический пучок $\mathcal{F}_h$. А именно, пучок $\mathcal{F}$ локально (в топологии Зарисского) представляется в виде коядра морфизма φ свободных пучков:

$$\mathcal{O}_U^m \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_U^n \to \mathcal{F} \to 0.$$

Поскольку обычная топология сильнее топологии Зарисского, то U_h открыто в X_h. Более того, так как φ определяется матрицей локальных сечений пучка $\mathcal{O}_U$, являющихся также сечениями пучка $\mathcal{O}_{U_h}$, то мы можем определить $\mathcal{F}_h$ локально как коядро соответствующего отображения φ_h свободных когерентных аналитических пучков.

Можно легко доказать несколько основных фактов о связи между схемой X и ассоциированным с ней аналитическим пространством X_h (см. Серр [4]). Например, схема X отделима над $\mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда пространство X_h хаусдорфово; X связна в топологии Зарисского тогда и только тогда, когда X_h связно в обычной топологии; X приведена тогда и только тогда, когда X_h приведено; X гладка над $\mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда X_h является комплексным многообразием. Морфизм $f\colon X \to Y$ является собственным тогда и только тогда, когда соответствующий морфизм $f_h\colon X_h \to Y_h$ является собственным в обычном смысле, т. е. прообраз любого компактного подмножества компактен. В частности, схема X собственна над $\mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда пространство X_h компактно.

Имеются также теоремы сравнения когомологий когерентных пучков на X и X_h. Для X и X_h определено непрерывное отображение соответствующих топологических пространств $\varphi\colon X_h \to X$, которое отображает X_h на множество замкнутых точек X, но топологии на них, конечно, различны. Определено также естественное отображение структурных пучков $\varphi^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X_h}$, которое превращает φ в морфизм локально окольцованных пространств. Из приведенных выше определений следует, что для любого когерентного пучка $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ существует изоморфизм $\mathcal{F}_h \simeq \varphi^*\mathcal{F}$. Отсюда уже легко показать, что определены естественные отображения групп когомологий

$$\alpha_i\colon H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X_h, \mathcal{F}_h)$$

для всех i. Когомологии здесь берутся в смысле производных функторов (§ 2 гл. III), но можно показать, что на аналитическом пространстве X_h они совпадают с когомологиями, определенными с помощью любых других когомологических теорий, используемых в литературе, см. историческое замечание в конце § 2 гл. III.

§ 2. Сравнение алгебраической и аналитической категорий

Для того чтобы иметь представление о том, в каком плане нам надо сравнивать схемы конечного типа над $\mathbf{C}$ и ассоциированные с ними комплексные аналитические пространства, сформулируем следующие пять вопросов, которые естественно возникают при рассмотрении функтора h.

Q1. Существует ли для заданного комплексного аналитического пространства $\mathfrak{X}$ схема X, такая, что $X_h \simeq \mathfrak{X}$?

Q2. Пусть X и X' — две схемы, такие, что $X_h \simeq X'_h$. Изоморфны ли тогда X и X'?

Q3. Существует ли для заданной схемы X и когерентного аналитического пучка $\mathfrak{F}$ на X_h когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X, такой, что $\mathcal{F}_h \simeq \mathfrak{F}$?

Q4. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — два когерентных пучка на заданной схеме X, такие, что $\mathcal{E}_h \simeq \mathcal{F}_h$ на X_h. Изоморфны ли тогда пучки $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$?

Q5. Будут ли для заданной схемы X и когерентного пучка $\mathcal{F}$ на ней отображения α_i на когомологиях изоморфизмами?

Как и следует ожидать, в общем случае ответ на все пять вопросов является отрицательным. Довольно легко привести контрпримеры к Q1, Q3 и Q5, см. упр. 6.1, 6.3 и 6.4. Дать отрицательные ответы на вопросы Q2 и Q4 несколько сложнее, поэтому мы разберем здесь следующий пример.

Пример 2.0.1 (Серр). Пусть C — эллиптическая кривая, X — единственная нетривиальная линейчатая поверхность над C с инвариантом $e = 0$ (2.15 гл. V), и пусть C_0 — ее сечение с $C_0^2 = 0$

(2.8.1 гл. V). Положим $U = X - C_0$, и пусть $U' = (\mathbf{A}^1 - \{0\}) \times \times (\mathbf{A}^1 - \{0\})$. Тогда можно показать, что $U_h \simeq U'_h$. Но $U \not\simeq U'$, так как U не является аффинным. В частности, U_h является многообразием Штейна, хотя U и не аффинно. Более того, можно показать, что $\operatorname{Pic} U \simeq \operatorname{Pic} C$, в то время как $\operatorname{Pic} U_h \simeq \mathbf{Z}$. В частности, существуют неизоморфные обратимые пучки $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ на U, такие, что $\mathscr{L}_h \simeq \mathscr{L}'_h$. Подробности см. Хартсхорн [5].

Напротив, если ограничиться рассмотрением только проективных схем, то ответ на все пять вопросов оказывается положительным. Это было доказано Серром в его прекрасной статье GAGA (Серр [4]). Вот его основная теорема.

Теорема 2.1 (Серр). *Пусть X — проективная схема над $\mathbf{C}$. Тогда функтор h индуцирует эквивалентность категорий когерентных пучков на X и когерентных аналитических пучков на X_h. Более того, для каждого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X естественные отображения*

$$\alpha_i\colon H^i(X, \mathscr{F}) \to H^i(X_h, \mathscr{F}_h)$$

являются изоморфизмами для всех i.

Эта теорема дает ответ на вопросы Q3, Q4 и Q5. Для ее доказательства требуется знание аналитических групп когомологий $H^i(\mathbf{P}^n_h, \mathcal{O}(q))$ для всех i, n, q, которые могут быть вычислены с помощью теорем Картана A и B. Ответ оказывается точно таким же, как и в алгебраическом случае (5.1 гл. III). В таком случае теорема доказывается с помощью стандартной техники вложения X в $\mathbf{P}^n$ и выбора резольвенты для пучка $\mathscr{F}$ из пучков вида $\sum \mathcal{O}(q_i)$, как и в § 5 гл. III. Эта теорема была обобщена Гротендиком [SGA 1, XII] также и на случай, когда схема X собственна над $\mathbf{C}$.

В качестве следствия Серр получает новое доказательство следующей теоремы Чжоу (см. Чжоу [1]).

Теорема 2.2 (Чжоу). *Пусть $\mathfrak{X}$ — компактное аналитическое подпространство комплексного многообразия $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$. Тогда существует подсхема $X \subset \mathbf{P}^n$, такая, что $X_h = \mathfrak{X}$.*

Это дает утвердительный ответ на вопрос Q1 в проективном случае. Ответ на вопрос Q2 мы оставляем читателю в качестве упражнения (упр. 6.6).

§ 3. Когда компактное комплексное многообразие является алгебраическим?

Пусть $\mathfrak{X}$ — компактное комплексное многообразие, тогда можно показать, что если существует схема X, такая, что $X_h \simeq \mathfrak{X}$, то она единственна. Поэтому если такая схема X существует, то мы

будем просто говорить, что $\mathfrak{X}$ — *алгебраическое многообразие.* Рассмотрим следующий модифицированный вариант вопроса Q 1.

Q1′. Можно ли найти разумные необходимые и достаточные условия для того, чтобы компактное комплексное многообразие было алгебраическим?

Первый результат в этом направлении дает следующая

Теорема 3.1 (Риман). *Всякое компактное комплексное многообразие размерности* 1 (*т. е. компактная риманова поверхность*) *является проективным алгебраическим многообразием.*

Это глубокий результат. Чтобы оценить его, напомним, что понятие комплексного многообразия является очень локальным. Оно определяется путем склеивания маленьких дисков с голоморфными функциями перехода. Мы делаем одно глобальное предположение, а именно предположение о компактности, и получаем заключение, что многообразие может быть вложено глобально в некоторое проективное пространство. В частности, рассматривая его проекцию на $\mathbf{P}^1$, видим, что оно обладает непостоянными мероморфными функциями, что не очевидно a priori. Теорема доказывается в два шага.

(a) Показывается, что $\mathfrak{X}$ обладает глобальными непостоянными мероморфными функциями. Это достигается путем довольно сложного анализа. Одно из доказательств, данное Г. Вейлем [1], следуя Гильберту, использует так называемый принцип Дирихле для того, чтобы показать существование гармонических, а следовательно, и мероморфных функций. Еще одно из доказательств, принадлежащее Ганнингу [1], использует теорию распределения для того, чтобы сначала доказать конечномерность пространств когомологий когерентных аналитических пучков, а затем вывести из этого существование мероморфных функций.

(b) Второй шаг заключается в том, чтобы выбрать непостоянную мероморфную функцию f на $\mathfrak{X}$ и рассмотреть ее как конечный морфизм $\mathfrak{X}$ на $\mathbf{P}^1$. После этого показывается, что $\mathfrak{X}$ является неособой алгебраической, а следовательно, проективной кривой.

Часть (b), называемая часто теоремой существования Римана, более элементарна по сравнению с частью (a). Она была обобщена в высшие размерности Грауэртом и Реммертом [1]. Недавно Гротендик [SGA 1, XII] дал элегантное доказательство этой обобщенной теоремы, используя разрешение особенностей по Хиронаке. Вот эта теорема.

Теорема 3.2 (обобщенная теорема существования Римана). *Пусть X — нормальная схема конечного типа над $\mathbf{C}$ и $\mathfrak{X}'$ — нормальное комплексное аналитическое пространство вместе с конечным морфизмом $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{X}' \to X_h$. (Конечный морфизм аналитических* *пространств определяется как собственный морфизм с конечными слоями.) Тогда существует единственная нормальная схема X' и конечный морфизм $g: X' \to X$, такие, что $X'_h \simeq \mathfrak{X}'$ и $g_h = \mathfrak{f}$.*

Одним из следствий этой теоремы является то, что алгебраическая фундаментальная группа $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ схемы X, определяемая как обратный предел групп Галуа конечных этальных накрытий X (упр. 4.8 гл. IV), изоморфна пополнению $\pi_1^{\mathrm{top}}(X_h)^\wedge$ обычной фундаментальной группы пространства X_h относительно подгрупп конечного индекса. В самом деле, пусть $\mathfrak{Y}$ — любое конечное неразветвленное топологическое накрытие пространства X_h, тогда $\mathfrak{Y}$ обладает естественной структурой нормального комплексного аналитического пространства, так что по теореме 3.2 оно является алгебраическим (и этальным) над X.

В размерностях, больших 1, далеко не всякое компактное комплексное многообразие является алгебраическим. Однако имеет место следующий результат, дающий необходимое условие для этого.

Предложение 3.3 (Зигель [1]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — компактное комплексное многообразие размерности n. Тогда поле $K(\mathfrak{X})$ мероморфных функций на $\mathfrak{X}$ имеет степень трансцендентности $\leqslant n$ над $\mathbf{C}$ и (по крайней мере в случае $\deg \operatorname{tr} K(\mathfrak{X}) = n$) является конечно порожденным расширением поля $\mathbf{C}$.*

В случае когда $\mathfrak{X}$ алгебраично, скажем $\mathfrak{X} \simeq X_h$, можно показать, что $K(\mathfrak{X}) \simeq K(X)$, где $K(X)$ — поле рациональных функций на X, так что в этом случае обязательно $\deg \operatorname{tr} K(\mathfrak{X}) = n$. Компактные комплексные многообразия $\mathfrak{X}$ с $\deg \operatorname{tr} K(\mathfrak{X}) = \dim \mathfrak{X}$ изучались Мойшезоном [2], и мы будем называть их *многообразиями Мойшезона.*

В размерности $n \geqslant 2$ существуют компактные комплексные многообразия, на которых нет непостоянных мероморфных функций, поэтому они не могут быть алгебраическими. Например, комплексный тор $\mathbf{C}^n/\Lambda$, где $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^{2n}$ — достаточно общая решетка, при $n \geqslant 2$ обладает этим свойством. См., например, Морроу и Кодаира [1].

Ограничиваясь рассмотрением многообразий Мойшезона, получаем следующую теорему в размерности 2.

Теорема 3.4 (Чжоу и Кодаира [1]). *Всякое компактное комплексное многообразие размерности 2 с двумя алгебраически независимыми мероморфными функциями является проективным алгебраическим многообразием.*

В размерности $n \geqslant 3$ Хиронака [2] и Мойшезон [2] построили примеры многообразий Мойшезона, которые не являются алгебраическими. Такие многообразия существуют в каждом классе бирациональной эквивалентности алгебраических многообразий размерности $n \geqslant 3$ над $\mathbf{C}$. Однако Мойшезон показал, что любое многообразие Мойшезона становится проективным алгебраическим после конечного числа моноидальных преобразований с неособыми центрами, так что они не очень уж отличаются от алгебраических.

Пример 3.4.1 (Хиронака [2]). Мы опишем сейчас два примера, которые строятся одинаковым образом. Первый — это пример неособого полного алгебраического трехмерного многообразия

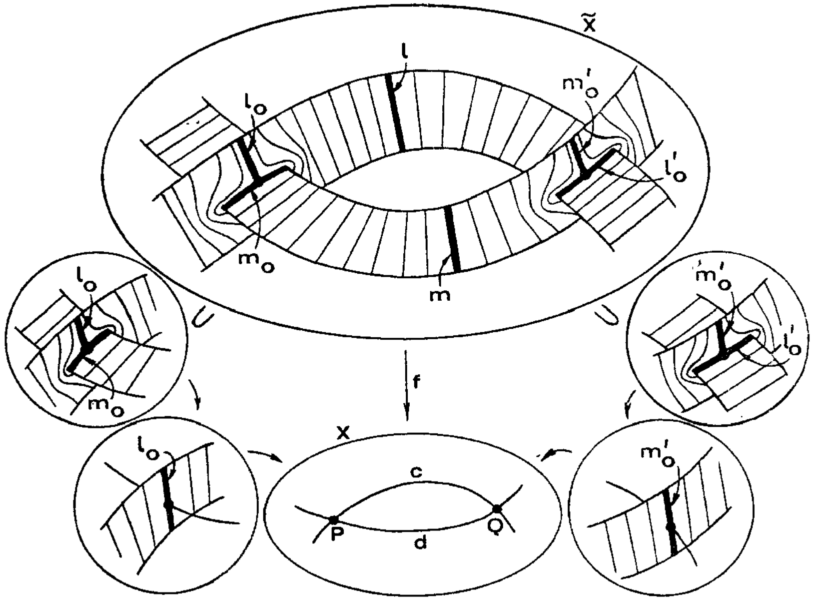


Рис. 24. Полное непроективное многообразие.

над $\mathbf{C}$, не являющегося проективным. Второй — это многообразие Мойшезона размерности три, которое не является алгебраическим.

Для построения первого примера рассмотрим любое неособое проективное трехмерное алгебраическое многообразие X. Возьмем на нем две неособые кривые c, $d \subset X$, которые пересекаются трансверсально в двух точках P, Q и нигде больше (рис. 24). На $X - Q$ раздуем сначала кривую c, а затем собственный прообраз кривой d. На $X - P$, наоборот, раздуем сначала кривую d, а затем собственный прообраз кривой c. На $X - P - Q$ безразлично, в каком порядке раздуваются кривые c и d, поэтому два предыдущих раздутых многообразия можно склеить вдоль прообразов $X - P - Q$. В результате получится неособое полное алгебраическое многообразие $\tilde{X}$. Мы покажем, что многообразие $\tilde{X}$ не проективно. Отсюда будет следовать, между прочим, что морфизм f: $\tilde{X} \to X$ не может быть разложен ни в какую композицию последовательных моноидальных преобразований, поскольку он не является проективным морфизмом.

Для того чтобы это установить, мы должны исследовать, что происходит в окрестности точки P (рис. 24). Пусть l — прообраз на $\tilde{X}$ общей точки кривой c и m — прообраз общей точки кривой d. Отметим, что l и m являются проективными прямыми. Тогда прообраз точки P состоит из двух прямых l_0 и m_0 и имеет место алгебраическая эквивалентность циклов: $l \sim l_0 + m_0$, $m \sim m_0$. Несимметричность здесь происходит из-за выбора порядка раздутия кривых c и d. В окрестности Q происходит противоположное явление, а именно $f^{-1}(Q)$ является объединением двух прямых l_0' и m_0' и имеет место алгебраическая эквивалентность $l \sim l_0$ и $m \sim l_0' + m_0'$. Комбинируя эти эквивалентности, получаем, что $l_0 + m_0' \sim 0$. Но это невозможно на проективном многообразии, поскольку любая кривая на нем имеет степень — целое положительное число, — которая аддитивна и сохраняется при алгебраической эквивалентности. Таким образом показано, что $\tilde{X}$ не проективно.

Пример 3.4.2. Для построения второго примера мы тоже возьмем любое неособое проективное трехмерное многообразие X. Пусть c — кривая на X, которая неособа, кроме одной двойной точки P, имеющей различные касательные направления. В маленькой аналитической окрестности точки P сначала раздуем одну ветвь кривой c, а затем вторую. Вне этой окрестности раздуем просто кривую c. Тогда после склеивания мы получим компактное комплексное многообразие $\mathfrak{X}$. Очевидно, что $\mathfrak{X}$ является многообразием Мойшезона, поскольку мероморфные функции на $\mathfrak{X}$ те же, что и на X. Покажем, что $\mathfrak{X}$ не является абстрактным алгебраическим многообразием.

Используя те же обозначения, что и на рис. 25, имеем следующие гомологические эквивалентности: $l \sim l_0 + m_0$, $m \sim m_0$ и $l \sim m$, поскольку обе ветви сходятся вне P. Отсюда следует, что $l_0 \sim 0$. Но это невозможно, если многообразие $\mathfrak{X}$ алгебраично. Действительно, предположим, что $\mathfrak{X}$ алгебраично, и пусть T — точка на l_0. Тогда T обладает некоторой аффинной окрестностью U в $\mathfrak{X}$, и пусть Y — некоторая неприводимая поверхность в U, которая проходит через точку T, но не содержит целиком l_0. Возьмем замыкание $\bar{Y}$ поверхности Y в $\mathfrak{X}$. Тогда $\bar{Y}$ будет пересекать

l_0 в конечном (отличном от нуля) числе точек, так что индекс пересечения $\bar{Y}$ с l_0 определен и отличен от 0. Но индекс пересечения сохраняется при переходе к классам гомологической эквивалентности, поэтому l_0 не может быть гомологично 0. Это противоречие показывает, что $\mathfrak{X}$ не является алгебраическим многообразием.

Замечание 3.4.3. В связи с этим следует упомянуть также об алгебраических пространствах Артина [2] и Кнутсона [1]. *Алгебраическое пространство* определяется над любым полем k как

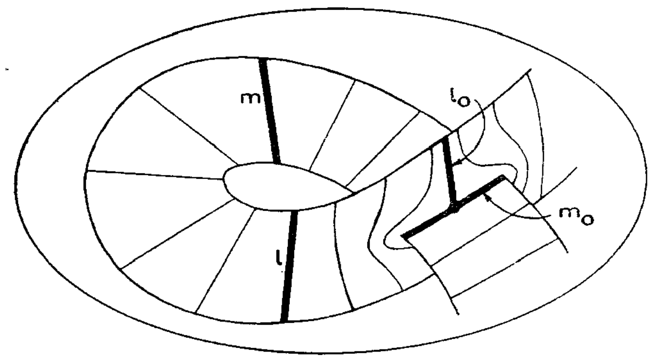


Рис. 25. Неалгебраическое многообразие Мойшезона.

некоторый объект, который локально представляется в виде факторсхемы некоторой схемы по этальному отношению эквивалентности. Категория алгебраических пространств содержит категорию схем. Если X — алгебраическое пространство конечного типа над $\mathbf{C}$, то для него можно определить ассоциированное с ним комплексное аналитическое пространство X_h. Артин показал, что категория гладких собственных алгебраических пространств над $\mathbf{C}$ эквивалентна посредством функтора h категории многообразий Мойшезона. Таким образом, всякое многообразие Мойшезона «алгебраично» в смысле алгебраических пространств. В частности, пример Хиронаки 3.4.2 дает также пример алгебраического пространства над $\mathbf{C}$, которое не является схемой.

§ 4. Кэлеровы многообразия

Методы дифференциальной геометрии доставляют мощное средство для изучения компактных комплексных многообразий и, следовательно, алгебраических многообразий над полем комплексных чисел. Наиболее яркими из таких приложений дифференциальной геометрии являются теория Ходжа [1] гармонических интегралов с последующим разложением комплексных когомологий на (p, g)-компоненты (см. также Вейль [5]), теоремы обращения в нуль Кодаиры [1] и Накано [1] и их недавнее обобщение Грауэрта и Рименшнайдера [1] и работы Гриффитса о промежуточных якобианах и об отображении периодов. Здесь мы упомянем только о понятии кэлерового многообразия и о том, как с его помощью характеризуются алгебраические комплексные многообразия.

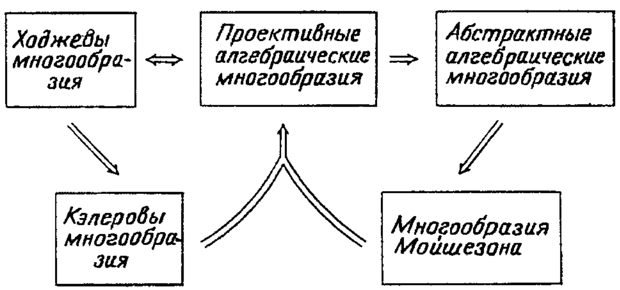
Всякое комплексное многообразие обладает эрмитовой метрикой (далеко не единственной). Эрмитова метрика называется *кэлеровой*, если ассоциированная с ней дифференциальная 2-форма типа (1,1) замкнута. Комплексное многообразие с кэлеровой метрикой называется *кэлеровым многообразием*. Можно легко показать, что комплексное проективное пространство обладает естественной кэлеровой метрикой и, следовательно, всякое неособое проективное алгебраическое многообразие является кэлеровым многообразием с индуцированной метрикой. Компактное кэлерово многообразие $\mathfrak{X}$ называется *ходжевым* многообразием, если класс когомологий в $H^2(\mathfrak{X}, \mathbf{C})$ упомянутой выше 2-формы является образом некоторого целочисленного класса когомологий из $H^2(\mathfrak{X}, \mathbf{Z})$. Фундаментальным результатом является следующая

Теорема 4.1 (Кодаира [2]). *Каждое ходжево многообразие является проективным алгебраическим многообразием.*

Этот результат можно представлять себе как глубокое обобщение теоремы Римана 3.1, поскольку всякое компактное комплексное многообразие является, очевидно, ходжевым. Имеет место также следующая

Теорема 4.2 (Мойшезон [2]). *Каждое многообразие Мойшезона, которое является кэлеровым, является также и проективным алгебраическим.*

В итоге мы имеем следующие импликации между компактными комплексными многообразиями с заданными свойствами, причем существуют примеры, показывающие, что другие импликации невозможны.



§ 5. Экспоненциальная последовательность

Приведем простейший пример применения трансцендентных методов, рассмотрев так называемую экспоненциальную последовательность. Экспоненциальная функция $f(x) = e^{2\pi i x}$ позволяет написать следующую точную последовательность абелевых групп:

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}^* \to 0,$$

где $\mathbf{C}$ имеет аддитивную, а $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ — мультипликативную структуру группы. Если $\mathfrak{X}$ — любое приведенное комплексно-аналитическое пространство, то, рассматривая голоморфные функции со значениями в предыдущей последовательности, получаем точную последовательность пучков

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^* \to 0,$$

где $\mathbf{Z}$ — постоянный пучок, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ — структурный пучок и $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^*$ — пучок обратимых элементов пучка $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ относительно умножения.

Когомологическая последовательность, ассоциированная с этой короткой точной последовательностью пучков, оказывается очень интересной. Рассмотрим ее на X_h, где X — проективное многообразие над $\mathbf{C}$. В членах H^0 мы получаем исходную точную последовательность групп $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C} \to \mathbf{C}^* \to 0$, поскольку глобальные голоморфные функции на X_h — это только константы. Начиная с H^1, мы имеем следующую точную последовательность:

$$0 \to H^1(X_h, \mathbf{Z}) \to H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) \to H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}^*) \to$$
$$\to H^2(X_h, \mathbf{Z}) \to H^2(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) \to \dots .$$

По теореме Серра 2.1 имеем $H^i(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) \simeq H^i(X, \mathcal{O}_X)$. С другой стороны, согласно упр. 4.5 гл. III, $H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}^*) \simeq \operatorname{Pic} X_h$ для любого окольцованного пространства. Но по теореме Серра об эквивалентности категорий когерентных пучков 2.1 имеем, в частности, $\operatorname{Pic} X_h \simeq \operatorname{Pic} X$. Поэтому предыдущую точную последовательность можно переписать в виде

$$0 \to H^1(X_h, \mathbf{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Pic} X \to$$
$$\to H^2(X_h, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X) \to \dots .$$

Здесь неалгебраическая часть — это только целочисленные когомологии многообразия X_h. Поскольку любое алгебраическое многообразие триангулируемо (см., например, Хиронака [5]), то группы когомологий $H^i(X_h, \mathbf{Z})$ являются конечно порожденными абелевыми группами. Поэтому из этой точной последовательности мы можем получить некоторую информацию о группе Пикара многообразия X.

Прежде всего легко видеть, что алгебраически эквивалентные дивизоры Картье дают один и тот же элемент в группе $H^2(X_h, \mathbf{Z})$, а неэквивалентные — разные. Следовательно, группа Нерона — Севери многообразия X является подгруппой группы $H^2(X_h, \mathbf{Z})$ и, стало быть, конечна порождена (упр. 1.7 гл. V). С другой стороны, группа $\mathrm{Pic}^\circ X$ классов алгебраически эквивалентных нулю дивизоров по модулю линейной эквивалентности изоморфна факторгруппе $H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X_h, \mathbf{Z})$. Показывается, что это комплексный тор и на самом деле даже абелево многообразие, которое называется *многообразием Пикара* многообразия X.

В случае неособой кривой X рода g ситуация даже более прозрачна. Здесь X_h — компактная риманова поверхность рода g. Как топологическое пространство она является компактным ориентированным двумерным вещественным многообразием, которое гомеоморфно сфере с g ручками. Поэтому мы имеем

$$H^0(X_h, \mathbf{Z}) = H^2(X_h, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \quad \text{и} \quad H^1(X_h, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^{2g}.$$

С другой стороны, $H^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbf{C}^g$, так что

$$\mathrm{Pic}^\circ X \simeq \mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^{2g}.$$

Это — якобиево многообразие кривой X (§ 4 гл. IV), которое представляет собой абелево многообразие размерности g. Ясно, что в этом случае $\mathrm{NS}(X) \simeq \mathbf{Z}$ и изоморфизм устанавливается с помощью гомоморфизма степени.

Упражнения

6.1. Показать, что единичный диск в $\mathbf{C}$ не изоморфен X_h ни для какой схемы X.

6.2. Пусть $z_1, z_2, \ldots$ — бесконечная последовательность комплексных чисел с $|z_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть $\mathfrak{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ — пучок идеалов голоморфных функций, обращающихся в нуль во всех точках z_n. Показать, что не существует когерентного алгебраического пучка идеалов $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$, где $X = \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ — аффинная прямая, такого, что $\mathfrak{J} = \mathcal{J}_h$ как пучок идеалов в $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Показать, что, с другой стороны, существует когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X, такой, что $\mathcal{F}_h \simeq \mathfrak{J}$ как когерентные пучки.

6.3 (Серр [12]). Определим на $\mathbf{C}^2 - \{0, 0\}$ обратимый аналитический пучок $\mathfrak{L}$ следующим образом: $\mathfrak{L} \simeq \mathcal{O}$, если $z \neq 0$; $\mathfrak{L} \simeq \mathcal{O}$, если $w \neq 0$, и там, где обе переменные z, w отличны от нуля, два экземпляра пучка $\mathcal{O}$ склеиваются с помощью умножения на $e^{-1/zw}$ в локальном кольце точки (z, w). Показать, что не существует обратимого алгебраического пучка $\mathcal{L}$ на $\mathbf{A}^2 - \{0, 0\}$, такого, что $\mathcal{L}_h \simeq \mathfrak{L}$.

6.4. Показать непосредственно, что если X — схема приведенная и собственная над $\mathbf{C}$, то $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_h})$. Обратно, показать, что если X не является собственной над $\mathbf{C}$, то существует когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X с $H^0(X, \mathcal{F}) \not\simeq H^0(X_h, \mathcal{F}_h)$.

6.5. Показать, что если X и X' — неособое аффинные алгебраические кривые с $X_h \simeq X'_h$, то $X \simeq X'$.

6.6. Показать, что если X и Y — проективные схемы над $\mathbf{C}$ и $\mathfrak{f}\colon X_h \to Y_h$ — морфизм аналитических пространств, то существует (единственный) морфизм $f\colon X \to Y$, такой, что $f_h = \mathfrak{f}$. [*Указание.* Сначала свести все к случаю $Y = \mathbf{P}^n$. Затем рассмотреть обратимый аналитический пучок $\mathfrak{L} = \mathfrak{f}^*\mathcal{O}(1)$ на X_h, пользуясь теоремой 2.1 и техникой § 7 гл. II.]

Добавление C

ГИПОТЕЗЫ ВЕЙЛЯ

В 1949 г. Андре Вейль [4] сформулировал свои знаменитые гипотезы, касающиеся числа решений полиномиальных уравнений над конечными полями. Эти гипотезы устанавливают глубокую связь между арифметикой алгебраических многообразий, определенных над конечными полями, и топологией алгебраических многообразий над полем комплексных чисел. Вейль указал также на то, что если бы существовала подходящая теория когомологий для абстрактных многообразий, аналогичная обычной теории когомологий многообразий, определенных над $\mathbf{C}$, то можно было бы вывести его гипотезы из стандартных свойств соответствующей когомологической теории. Это наблюдение было одним из главных поводов для поиска и построения различных когомологических теорий в абстрактной алгебраической геометрии. В 1963 г. Гротендик уже мог показать, что его теория l-адических когомологий обладает достаточным запасом свойств для доказательства части гипотез Вейля (рациональность дзета-функции). Доказательство оставшихся гипотез Вейля (аналога гипотезы Римана), данное Делинем [3] в 1973 г., может рассматриваться как кульминационный момент изучения l-адических когомологий, начатого Гротендиком, М. Артином и другими в парижских семинарах [SGA 4], [SGA 5] и [SGA 7].

§ 1. Дзета-функция и гипотезы Вейля

Пусть $k = \mathbf{F}_q$ — конечное поле из q элементов и X — схема конечного типа над k. Например, X может быть множеством решений в аффинном или проективном пространстве над k конечного числа полиномиальных уравнений с коэффициентами из k. Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k и $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ — соответствующая схема над $\bar{k}$. Для каждого целого числа $r \geqslant 1$ обозначим через N_r число точек схемы $\bar{X}$, рациональных над полем $k_r = \mathbf{F}_{q^r}$ из q^r элементов. Иначе говоря, N_r — это число точек схемы $\bar{X}$, координаты которых принадлежат полю k_r. Числа $N_1, N_2, N_3, \ldots$ очень важны, очевидно, при изучении арифметических свойств схемы X. Для их исследования определим (следуя Вейлю) Z-функцию схемы X, полагая

$$Z(t) = Z(X;\ t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\right).$$

Отметим, что по определению это степенной ряд с рациональными коэффициентами: $Z(t) \in \mathbf{Q}[[t]]$.

Например, пусть $X = \mathbf{P}^1$. Над любым конечным полем $\mathbf{P}^1$ имеет на одну точку больше, чем число элементов поля. Следовательно, $N_r = q^r + 1$. Таким образом,

$$Z(\mathbf{P}^1;\ t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} (q^r+1)\frac{t^r}{r}\right).$$

Этот ряд легко суммируется, и в результате мы получаем

$$Z(\mathbf{P}^1;\ t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}.$$

В частности, $Z(\mathbf{P}^1;\ t)$ — рациональная функция от t.

Теперь мы можем сформулировать гипотезы Вейля. Пусть X — гладкое проективное многообразие размерности n, определенное над $k = \mathbf{F}_q$, и $Z(t)$ есть Z-функция на X. Тогда имеют место следующие утверждения.

1.1. *Рациональность.* $Z(t)$ является рациональной функцией от t, т. е. отношением многочленов с рациональными коэффициентами.

1.2. *Функциональное уравнение.* Пусть E — индекс самопересечения диагонали Δ в $X \times X$ (которое является также топологическим классом Чженя касательного расслоения на X) (упр. 6.6 добавления А). Тогда $Z(t)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$Z\left(\frac{1}{q^n t}\right) = \pm q^{nE/2} t^E Z(t).$$

1.3. *Аналог гипотезы Римана.* Функция $Z(t)$ может быть записана в виде

$$Z(t) = \frac{P_1(t)\,P_3(t)\ \ldots\ P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\,P_2(t)\ \ldots\ P_{2n}(t)},$$

где $P_0(t) = 1 - t$; $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$ и для каждого $1 \leqslant i \leqslant 2n - 1$ $P_i(t)$ является многочленом с целыми коэффициентами, который можно записать в виде

$$P_i(t) = \prod (1 - \alpha_{ij} t),$$

где α_{ij} — целые алгебраические числа $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$. (Отметим, что эти условия однозначно определяют многочлены $P_i(t)$, если они существуют.)

1.4. *Числа Бетти.* Принимая на веру 1.3, можно определить i-е число Бетти $B_i = B_i(X)$ как степень многочлена $P_i(t)$. Тогда $E = \sum (-1)^i B_i$. Кроме того, предположим, что X получено из некоторого многообразия Y, определенного над кольцом целых алгебраических чисел R, редукцией по модулю простого идеала $\mathfrak{p} \subset R$. Тогда $B_i(X)$ совпадает с i-м числом Бетти топологического пространства $Y_h = (Y \times_R \mathbf{C})_h$ (см. добавление В), т. е. $B_i(X)$ — это ранг обычной группы когомологий $H^i(Y_h,\ \mathbf{Z})$.

Проверим эти гипотезы в случае $X = \mathbf{P}^1$. Мы уже видели, что функция $Z(t)$ рациональна. Инвариант E для $\mathbf{P}^1$ равен 2, и функциональное уравнение для $Z(\mathbf{P}^1,\ t)$ проверяется немедленно:

$$Z\left(\frac{1}{qt}\right) = qt^2 Z(t).$$

Аналог гипотезы Римана здесь, очевидно, выполняется, поскольку $P_1(t) = 1$. Далее $B_0 = B_2 = 1$ и $B_1 = 0$, и это действительно обычные числа Бетти $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$, т. е. обычной двумерной сферы, и, наконец, $E = \sum (-1)^i B_i$.

§ 2. История работ по гипотезам Вейля

Вейль пришел к своим гипотезам, изучая дзета-функции некоторых специальных многообразий; см. статью Вейля [4], где даны теоретико-числовые интерпретации и приведены вычисления для гиперповерхностей Ферма $\sum a_i x_i^n = 0$. Одним из наиболее существенных результатов Вейля было доказательство своих гипотез для алгебраических кривых. Это сделано в книге А. Вейля [2]. Рациональность и функциональное уравнение выводятся из теоремы Римана — Роха на кривых. Аналог гипотезы Римана оказался гораздо глубже и труднее (см. упр. 1.10 гл. V). Он выводится из неравенства Кастельнуово и Севери для соответствий на кривой (упр. 1.9 гл. V). Это доказательство было позднее упрощено Маттуком и Тэйтом [1] и Гротендиком [2]. Вейль [3] дал также другое доказательство, используя l-адическое представление автоморфизма Фробениуса на абелевых многообразиях, которое подсказало последующие когомологические подходы к этим проблемам. Недавно совершенно независимое элементарное доказательство гипотезы Римана для кривых было дано В. А. Степановым, Шмидтом и Бомбьери (см. Бомбьери [1]).

Для многообразий высших размерностей рациональность дзета-функции и функциональное уравнение были получены впервые

Дворком [1] с помощью методов p-адического анализа, см. также доклад Серра [8] по поводу этого доказательства.

Большинство других работ по гипотезам Вейля концентрировалось вокруг поиска хорошей теории когомологий для многообразий, определенных над полями характеристики p, которая должна была бы приводить к «правильным» числам Бетти, как и в 1.4. Более того, такая теория когомологий должна была бы иметь в качестве коэффициентов поле характеристики нуль, так что можно было бы вычислять неподвижные точки морфизма как сумму следов индуцированных морфизмов на группах когомологий в стиле Лефшеца.

Первыми когомологиями, введенными в абстрактную алгебраическую геометрию, были когомологии когерентных алгебраических пучков, как их определил Серр [3] (см. гл. III). Хотя они не могли удовлетворять изложенным выше требованиям, поскольку их коэффициенты принадлежали полю определения многообразия, они служили основой для построения последующих когомологических теорий. Серр [6] предложил теорию когомологий с коэффициентами в пучках векторов Витта, но не мог извлечь из нее ничего существенного. Гротендик, вдохновясь некоторыми идеями Серра, заметил, что можно получить хорошую теорию когомологий, рассматривая многообразие вместе со всеми его неразветвленными накрытиями. Это послужило началом его теории этальной топологии, развитой совместно с М. Артином, которую он использовал для определения l-адических когомологий. В результате было получено другое доказательство рациональности и функциональное уравнение для дзета-функции; см. Гротендик [4], где дан краткий анонс теории, Артин [1] и Гротендик [SGA4], где изложены основания теории этальных когомологий, Гротендик [6], где дано доказательство рациональности дзета-функции по модулю общих фактов о l-адических когомологиях, которые затем были подробно изложены в [SGA5]. Лабкин [1] более или менее независимо развил p-адическую теорию когомологий, которая также привела к доказательству рациональности и функциональному уравнению дзета-функций многообразий, поднимаемых в характеристику нуль. Кристальные когомологии Гротендика [8] и Бертело [1] также позволили получить некоторую аналогичную когомологическую интерпретацию гипотез Вейля.

Доказательство аналога гипотезы Римана оказалось более трудным. Ленг [1] и Вейль [1] установили некоторое неравенство для n-мерных многообразий, которое эквивалентно аналогу гипотезы Римана в случае $n = 1$, но слабее его в случае $n \geqslant 2$. Серр [9] нашел другой аналог гипотезы Римана для собственных значений некоторых операторов, действующих на когомологиях кэлеровых многообразий, используя глубокие результаты теории Ходжа. Этот результат Серра вселял надежду, что можно было бы попытаться перенести в абстрактную алгебраическую геометрию некоторые результаты из теории Ходжа для многообразий над $\mathbf{C}$, в частности так называемую сильную теорему Лефшеца и обобщенную теорему Ходжа об индексе. Гротендик [9] оптимистически назвал это стандартными гипотезами и заметил, что из них немедленно выводится аналог гипотезы Римана. Более подробное изложение этих гипотез и их интерпретации см. Клейман [2].

До общего доказательства Делиня [3] аналога гипотезы Римана было известно только несколько частных случаев, в которых этот аналог был доказан: кривые — Вейль [2], унирациональные трехмерные многообразия — Манин [2], см. также Демазюр [1], K3-поверхности — Делинь [2] и некоторые полные пересечения — Делинь [5].

В дополнение к ссылкам, приведенным выше, следует указать еще обзорную статью Серра [10] и там же статью Тэйта [1], в которой высказываются дальнейшие гипотезы (о которых здесь не шла речь) об алгебраических циклах на многообразиях над полями характеристики p, а также для теоретико-числовиков — статью Делиня [1], где показывается, что из аналога гипотезы Римана следует гипотеза Рамануджана о τ-функции

§ 3. l-адические когомологии

В этом и следующем параграфах мы дадим когомологическую интерпретацию гипотез Вейля в терминах l-адических когомологий Гротендика. Аналогичные результаты будут выполняться в любой когомологической теории с подобными формальными свойствами, см. Клейман [2], где дана аксиоматическая трактовка «теории когомологий Вейля».

Пусть X — схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p \geqslant 0$, l — простое число, $l \neq p$, $\mathbf{Z}_l = \varprojlim \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z}$ — кольцо целых l-адических чисел и $\mathbf{Q}_l$ — его поле частных. Рассмотрим этальную топологию на X (см. Артин [1] или [SGA4]) и посредством этальных когомологий схемы X определим l-адические когомологии X, полагая

$$H^i(X, \mathbf{Q}_l) = (\varprojlim H^i_{\text{et}}(X, \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z})) \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mathbf{Q}_l.$$

Мы не будем вдаваться здесь в подробное разъяснение этого определения $\left(\text{см. } \left[\text{SGA } 4\frac{1}{2}\right]\right)$, лучше приведем список некоторых основных свойств l-адических когомологий.

3.1. Группы $H^i(X, \mathbf{Q}_l)$ являются векторными пространствами над $\mathbf{Q}_l$. Они равны 0 вне интервала $0 \leqslant i \leqslant 2n$, где $n = \dim X$. Если X собственна над k, то известно, что пространства $H^i(X, \mathbf{Q}_l)$ конечномерны. (Ожидается, что они конечномерны и в общем случае, но доказательство отсутствует, потому что оно упирается в проблему разрешения особенностей в характеристике $p > 0$.)

3.2. $H^i(X, \mathbf{Q}_l)$ является контравариантным функтором от X.

3.3. Существует $\cup$-умножение

$$H^i(X, \mathbf{Q}_l) \times H^i(X, \mathbf{Q}_l) \to H^{i+j}(X, \mathbf{Q}_l),$$

определенное для всех i, j.

3.4. *Двойственность Пуанкаре.* Пусть схема X гладкая и собственная над k и $\dim X = n$, тогда $H^{2n}(X, \mathbf{Q}_l)$ является одномерным пространством и спаривание

$$H^i(X, \mathbf{Q}_l) \times H^{2n-i}(X, \mathbf{Q}_l) \to H^{2n}(X, \mathbf{Q}_l),$$

определяемое $\cup$-произведением, совершенно для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant 2n$.

3.5. *Формула Лефшеца для числа неподвижных точке.* Пусть X гладкая и собственная над k, $f\colon X \to X$ — морфизм с изолированными неподвижными точками и для каждой неподвижной точки $x \in X$ пусть отобрзжение $1 - df\colon \Omega^1_{X,x} \to \Omega^1_{X,x}$ инъективно. Последнее условие означает, что кратность неподвижной точки x равна 1. Обозначим через $L(f, X)$ число неподвижных точек морфизма f. Тогда имеет место формула

$$L(f, X) = \sum (-1)^i \operatorname{Tr}(f^*, H^i(X, \mathbf{Q}_l)),$$

где f^* обозначает индуцированное отображение на когомологиях X.

3.6. Пусть $f\colon X \to Y$ — гладкий собственный морфизм, где Y связно, тогда $\dim H^i(X_y, \mathbf{Q}_l)$ не зависит от $y \in Y$. В частности, $\dim H^i(X, \mathbf{Q}_l)$ не меняется при расширении основного поля.

3.7. *Теорема сравнения.* Пусть схема X гладкая и собственная над $\mathbf{C}$, тогда

$$H^i(X, \mathbf{Q}_l) \otimes_{\mathbf{Q}_l} \mathbf{C} \simeq H^i(X_h, \mathbf{C}),$$

где X_h — ассоциированное с X комплексное многообразие с обычной классической топологией (добавление В).

3.8. *Класс когомологий цикла.* Пусть схема X гладкая и собственная над k и Z — подмногообразие в X коразмерности q, тогда существует ассоциированный с Z класс когомологий $\eta(Z) \in H^{2q}(X, \mathbf{Q}_l)$. Это сопоставление продолжается по линейности на все циклы, при этом рационально эквивалентные циклы имеют один и тот же класс когомологий и пересечение циклов согласовано с $\cup$-умножением классов когомологий. Иначе говоря, η является гомоморфизмом кольца Чжоу $A(X)$ в кольцо когомологий $H^*(X, \mathbf{Q}_l)$. Этот гомоморфизм нетривиален: замкнутой точке $P \in X$ соответствует ненулевой класс $\eta(P) \in H^{2n}(X, \mathbf{Q}_l)$.

Этот список свойств не претендует на полноту. В частности, мы не упомянули о пучках скрученных коэффициентов (т. е. локальных системах), высших прямых образах пучков, спектральной последовательности Лере и т. д. Дальнейшие свойства, а также вывод свойств, изложенных выше, можно найти в [SGA4], где соответствующие утверждения доказаны для периодических пучков коэффициентов, и в [SGA5], где осуществлен переход к предельным группам коэффициентов $\mathbf{Z}_l$ или $\mathbf{Q}_l$.

4. Когомологическая интерпретация гипотез Вейля

С помощью l-адических когомологий, описанных выше, можно дать когомологическую интерпретацию гипотез Вейля. Основная идея, восходящая к Вейлю, очень проста. Пусть X — проективное многообразие, определенное над конечным полем $k = \mathbf{F}_q$, и пусть $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ — соответствующее многообразие над алгебраическим замыканием $\bar{k}$ поля k. Определим *морфизм Фробениуса* $f\colon \bar{X} \to \bar{X}$, сопоставляющий каждой точке P с координатами (a_i), $a_i \in \bar{k}$, точку $f(P)$ с координатами (a_i^q). Это $\bar{k}$-линейный морфизм Фробениуса, где $\bar{X}_q$ отождествлено с $\bar{X}$ (см. 2.4.1 гл. IV). Так как $\bar{X}$ определено уравнениями с коэффициентами в k, то $f(P)$ также принадлежит $\bar{X}$. Кроме того, P тогда и только тогда является неподвижной точкой морфизма f, когда ее координаты принадлежат полю k, или, более общо, P тогда и только тогда является неподвижной точкой r-кратной итерации f^r морфизма f, когда ее координаты принадлежат $k_r = \mathbf{F}_{q^r}$. Таким образом, в обозначениях § 1 имеем

$$N_r = \#\{\text{неподвижные точки } f^r\} = L(f^r, \bar{X}).$$

В случае когда схема X гладка, мы можем вычислить это число с помощью формулы Лефшеца о неподвижных точках 3.5, а именно

$$N_r = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(f^{r*};\ H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_l)).$$

Подставляя это выражение в определение дзета-функции, получаем

$$Z(X; t) = \prod_{i=0}^{2n} \left[\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{Tr}(f^{r*};\ H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_l)) \frac{t^r}{r}\right)\right]^{(-1)^i}.$$

Для того чтобы упростить эту формулу, нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть* φ — *эндоморфизм конечномерного векторного пространства* V *над полем* K. *Тогда имеет место следующее равенство формальных степенных рядов от* t *с коэффициентами в* K:

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{Tr}(\varphi^r;\ V)\frac{t^r}{r}\right) = \det(1-\varphi t;\ V)^{-1}.$$

Доказательство. Если $\dim V = 1$, то φ является умножением на скаляр $\lambda \in K$ и требуемое равенство принимает вид

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \frac{t^r}{r}\right) = \frac{1}{1-\lambda t}.$$

Оно проверяется с помощью элементарных вычислений, с которыми мы уже сталкивались при вычислении дзета-функции проективной прямой $\mathbf{P}^1$. В общем случае воспользуемся индукцией по $\dim V$. Кроме того, можно, очевидно, предполагать, что поле K алгебраически замкнуто. Следовательно, φ имеет некоторый собственный вектор, так что существует инвариантное подпространство $V' \subset V$. Напишем точную последовательность

$$0 \to V' \to V \to V/V' \to 0$$

и воспользуемся тем фактом, что обе стороны доказываемого равенства мультипликативны относительно коротких точных последовательностей векторных пространств. Тогда по индукции мы получаем требуемый результат.

Эта лемма позволяет непосредственно установить следующий факт.

Теорема 4.2. *Пусть схема* X *проективна и гладка над* $k = \mathbf{F}_q$ *и* $\dim X = n$. *Тогда*

$$Z(X,\ t) = \frac{P_1(t)\ \ldots\ P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\ \ldots\ P_{2n}(t)},$$

где $P_i(t) = \det(1 - f^*t;\ H^i(\overline{X},\ \mathbf{Q}_l))$ *и* f^* — *отображение на когомологиях, индуцированное морфизмом Фробениуса* $f\colon \overline{X} \to \overline{X}$.

Из этой теоремы, очевидно, следует, что $Z(t)$ является отношением многочленов с коэффициентами в $\mathbf{Q}_l$. Элементарными рассуждениями о степенных рядах можно показать (Бурбаки [2, гл. IV, § 5]), что $\mathbf{Q}[[t]] \cap \mathbf{Q}_l(t) = \mathbf{Q}(t)$. Так как мы знаем, что $Z(t)$ — степенной ряд с рациональными коэффициентами, то

отсюда следует, что $Z(t)$ является рациональной функцией, и это доказывает 1.1. Отметим, однако, что мы не знаем, будут ли все $P_i(t)$ иметь рациональные коэффициенты и будут ли они многочленами вида, описанного в 1.3.

Мы можем выжать из этой теоремы еще больше информации. Так как f^* действует на $H^0(\overline{X},\ \mathbf{Q}_l)$ тождественно, то $P_0(t) = 1 - t$. Кроме того, можно вычислить $P_{2n}(t)$. Морфизм Фробениуса является конечным морфизмом степени q^n. Следовательно, он должен действовать на $H^{2n}(\overline{X},\ \mathbf{Q}_l)$, умножая образующую на q^n, так что $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$. Если временно определить числа Бетти B_i как $\dim H^i(\overline{X},\ \mathbf{Q}_l)$, то $B_i = \deg P_i(t)$ и можно легко показать, что инвариант E схемы X выражается формулой

$$E = \sum (-1)^i B_i.$$

Поэтому назовем E топологической характеристикой Эйлера — Пуанкаре схемы X. Мы пока не знаем, что это определение чисел Бетти совпадает с определением, данным в 1.4. Однако если это знать, то утверждение 1.4 будет легко выводиться из общих свойств 3.6 и 3.7 l-адических когомологий.

Теперь мы хотим показать, что функциональное уравнение следует из двойственности Пуанкаре.

Лемма 4.3. *Пусть* $V \times W \to K$ — *совершенное спаривание векторных пространств* V, W *размерности* r *над* K. *Пусть* $\lambda \in K$ *и* $\varphi\colon V \to V$, $\psi\colon W \to W$ — *такие эндоморфизмы, что для всех* $v \in V$, $w \in W$ *выполняется равенство*

$$\langle \varphi v,\ \psi w\rangle = \lambda \langle v,\ w\rangle.$$

Тогда

$$\det(1-\psi t;\ W) = \frac{(-1)^r\lambda^r t^r}{\det(\varphi;\ V)}\det\left(1-\frac{\varphi}{\lambda t};\ V\right)$$

и

$$\det(\psi;\ W) = \frac{\lambda^r}{(\det(\varphi;\ V))}.$$

Теорема 4.4. *В предположениях* 4.2 *дзета-функция* $Z(X;\ t)$ *удовлетворяет функциональному уравнению* 1.2.

Доказательство. Применим лемму 4.3 (доказательство которой элементарно) к спариванию $H^i(X,\ \mathbf{Q}_l) \times H^{2n-i}(X,\ \mathbf{Q}_l) \to H^{2n}(X,\ \mathbf{Q}_l)$, задаваемому двойственностью Пуанкаре 3.4, и воспользуемся тем фактом, что f^* совместимо с $\cup$-произведением и что оно действует умножением на q^n на $H^{2n}(X,\ \mathbf{Q}_l)$. Мы получим выражение для P_{2n-i} в терминах P_i, а именно

$$P_{2n-i}(t) = (-1)^{B_i}\frac{q^{nB_i}t^{B_i}}{\det(f^*;\ H^i)}P_i\left(\frac{1}{q^n t}\right).$$

Кроме того, имеем

$$\det(f^*;\ H^{2n-i}) = \frac{q^{nB_i}}{\det(f^*;\ H^i)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу 4.2 и используя равенство $E = \Sigma(-1)^i B_i$, мы получаем требуемое функциональное уравнение.

Таким образом, мы видим, что гипотезы 1.1, 1.2 и 1.4 выводятся из формальных свойств l-адических когомологий, если только нам известна интерпретация дзета-функции 4.2. Доказательство аналога гипотезы Римана оказалось более глубоким.

Теорема 4.5 (Делинь [3]). *В предположениях 4.2 многочлены $P_i(t)$ имеют целые коэффициенты, не зависящие от l, и могут быть записаны в виде*

$$P_i(t) = \prod (1 - \alpha_{ij} t),$$

где α_{ij} — целые алгебраические числа с $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$.

Этим результатом завершается доказательство гипотез Вейля. Отметим, что из него следует, что многочлены $P_i(t)$ в смысле 4.2 — это то же самое, что и многочлены $P_i(t)$ в смысле 1.3, и следовательно, оба определения чисел Бетти совпадают.

Мы не можем ничего сказать здесь о доказательстве теоремы Делиня, кроме того, что оно основывается на глубоких свойствах l-адических когомологий, развитых в [SGA 4], [SGA 5] и [SGA 7]. В частности, оно использует технику Лефшеца представления многообразия в виде пучка Лефшеца и изучение действия монодромии на когомологиях вблизи особых слоев.

Упражнения

5.1. Пусть X — несвязное объединение локально замкнутых подсхем X_i. Показать, что тогда

$$Z(X;\ t) = \prod Z(X_i;\ t).$$

5.2. Пусть $X = \mathbf{P}^n_k$, где $k = \mathbf{F}_q$. Пользуясь только определением, показать, что дзета-функция $Z(\mathbf{P}^n;\ t)$ имеет вид

$$Z(P^n;\ t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\ldots(1-q^n t)}.$$

Проверить для нее гипотезы Вейля.

5.3. Пусть X — схема конечного типа над $\mathbf{F}_q$ и $\mathbf{A}^1$ — аффинная прямая. Показать, что

$$Z(X \times \mathbf{A}^1;\ t) = Z(X;\ qt).$$

5.4. Дзета-функция Римана определяется как

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1-p^{-s}},$$

где $s \in \mathbf{C}$ и произведение берется по всем целым простым числам p. Это определение можно рассматривать как частный случай для схемы $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ следующего общего определения $\zeta_X(s)$, пригодного для любой схемы X конечного типа над $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$:

$$\zeta_X(s) = \prod (1 - N(x)^{-s})^{-1},$$

где произведение берется по всем замкнутым точкам $x \in X$ и $N(x)$ обозначает число элементов поля вычетов $k(x)$. Показать, что если X — схема конечного типа над $\mathbf{F}_q$, то функция $\zeta_X(s)$ связана с функцией $Z(X;\ t)$ формулой

$$\zeta_X(s) = Z(X,\ q^{-s}).$$

[*Указание.* Взять от обеих частей $d\log$, сделать замену $q^{-s} = t$ и сравнить результаты.]

5.5. Пусть X — кривая рода g над k. Исходя из утверждений 1.1—1.4 гипотез Вейля, показать, что $N_1, N_2, \ldots, N_g$ определяют N_r для всех $r \geqslant 1$.

5.6. Используя упр. 4.16 гл. IV, доказать гипотезы Вейля для эллиптических кривых. Заметить сначала, что для любого r имеет место равенство

$$N_r = q^r - (f^r + \hat{f}^r) + 1,$$

где $f = F'$. Затем произвести формальные вычисления и получить

$$Z(t) = \frac{(1-ft)(1-\hat{f}t)}{(1-t)(1-qt)},$$

и, следовательно,

$$Z(t) = \frac{1-at+qt^2}{(1-t)(1-qt)},$$

где $f + \hat{f} = a$. Это доказывает рациональность $Z(t)$. Проверить функциональное уравнение. Наконец, если мы запишем

$$1 - at + qt^2 = (1 - \alpha t)(1 - \beta t),$$

то показать, что $|a| \leqslant 2\sqrt{q}$ тогда и только тогда, когда $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{q}$. Это в точности аналог гипотезы Римана (см. упр. 4.16 гл. IV).

5.7. Используя упр. 1.10 гл. V, доказать аналог гипотезы Римана 1.3 для любой кривой C рода g, определенной над $\mathbf{F}_q$. Записать N_r в виде $N_r = 1 - a_r + q^r$. Тогда, согласно упр. 1.10 гл. V,

$$|a_r| \leqslant 2g\sqrt{q^r}.$$

С другой стороны, по 4.2 дзета-функция кривой C может быть записана в виде

$$Z(t) = \frac{P_1(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

где

$$P_1(t) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \alpha_i t).$$

— многочлен степени $2g = \dim H^1(C,\ \mathbf{Q}_l)$.

(a) Пользуясь определением дзета-функции и логарифмируя соответствующее выражение, показать, что

$$a_r = \sum_{i=1}^{2g} (\alpha_i)^r$$

для каждого r.

(b) Показать далее, что

$$|a_r| \leqslant 2g\sqrt{q^r} \text{ для всех } r \Longleftrightarrow |\alpha_i| \leqslant \sqrt{q} \text{ для всех } i.$$

[*Указание*. В одну сторону это проверяется совсем просто. Для проверки обратной импликации воспользоваться следующим разложением в степенной ряд:

$$\sum_{i=1}^{2g} \frac{\alpha_i t}{1-\alpha_i t} = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r$$

для подходящих $t \in \mathbf{C}$.]

(c) Наконец, пользуясь функциональным уравнением 4.4, показать, что оценка $|\alpha_i| \leqslant \sqrt{q}$ для всех i влечет за собой равенство $|\alpha_i| = \sqrt{q}$ для всех i.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Альтман, Клейман (Altman A., Kleiman S.)
1. Introduction to Grothendieck Duality Theory, Lecture Notes in Math., 146, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

Альфан (Halphen G.)
1. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, J. Ec. Polyt., 52 (1882), 1—200.

Артин (Artin M.)
1. Grothendieck topologies, Harvard Math. Dept. Lecture Notes, 1962.
2. The implicit function theorem in algebraic geometry, in: Algebraic Geometry, Bombay 1968, Oxford Univ. Press, Oxford 1969, 13—34.
3. Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math., 84 (1962), 485—496. [Имеется перевод: Артин М. Некоторые численные критерии стягиваемости кривых на алгебраических поверхностях.— Математика, 9:3, 1965, с. 3—14.]
4. Algebraization of formal moduli II: Existence of modifications, Annals of Math., 91 (1970), 88—135.

Атья (Atiyah M. F.)
1. Vector bundles over an elliptic curve, Proc. Lond. Math. Soc (3) VII, 27 (1957), 414—452.

Атья, Макдональд (Atiyah M. F., Macdonald I. G.)
1. Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969. [Имеется перевод: Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру.— М.: Мир, 1972.]

Бейли (Baily W. L., Jr.)
1. On the automorphism group of a generic curve of genus >2, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1961/2), 101—108, correction p. 325.

Бэникэ, Стэнэшилэ (Bănică C., Stănăşilă O.)
1. Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces, John Wiley, New York, 1976.

Бернсайд (Burnside W.)
1. Theory of Groups of Finite Order, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1911; reprinted by Dover, New York.

Бертело (Berthelot P.)
1. Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique $p > 0$, Lecture Notes in Math., 407, Springer-Verlag, Heideiberg, 1974.

Бёрч, Куик (Birch B. J., Kuyk W., ed.)
1. Modular Functions of One Variable, IV (Antwerp.), Lecture Notes in Math., 476, Springer-Verlag, Heidelberg, 1975.

Бомбьери (Bombieri E.)
1. Counting points on curves over finite fields (d'après S. A. Stepanov), Séminaire Bourbaki, 430 (1972/73).

Бомбьери, Хьюзмоллер (Bombieri E., Husemoller D.)
1. Classification and embeddings of surfaces, in: Algebraic Geometry, Arcata 1974, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 29 (1975), 329—420.

Борелли (Borelli M.)
1. Divisorial varieties, Pacific J. Math., 13 (1963), 375—388.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ АЛГЕБРЫ

38—01390

(*b*) Показать далее, что

$$|a_r| \leqslant 2g\sqrt{q^r} \text{ для всех } r \Longleftrightarrow |\alpha_i| \leqslant \sqrt{q} \text{ для всех } i.$$

[*Указание*. В одну сторону это проверяется совсем просто. Для проверки обратной импликации воспользоваться следующим разложением в степенной ряд:

$$\sum_{i=1}^{2g} \frac{\alpha_i t}{1-\alpha_i t} = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r$$

для подходящих $t \in \mathbf{C}$.]

(c) Наконец, пользуясь функциональным уравнением 4.4, показать, что оценка $|\alpha_i| \leqslant \sqrt{q}$ для всех i влечет за собой равенство $|\alpha_i| = \sqrt{q}$ для всех i.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Альтман, Клейман (Altman A., Kleiman S.)
1. Introduction to Grothendieck Duality Theory, Lecture Notes in Math., 146, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

Альфан (Halphen G.)
1. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, J. Ec. Polyt., 52 (1882), 1—200.

Артин (Artin M.)
1. Grothendieck topologies, Harvard Math. Dept. Lecture Notes, 1962.
2. The implicit function theorem in algebraic geometry, in: Algebraic Geometry, Bombay 1968, Oxford Univ. Press, Oxford 1969, 13—34.
3. Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math., 84 (1962), 485—496. [Имеется перевод: Артин М. Некоторые численные критерии стягиваемости кривых на алгебраических поверхностях.— Математика, 9:3, 1965, с. 3—14.]
4. Algebraization of formal moduli II: Existence of modifications, Annals of Math., 91 (1970), 88—135.

Атья (Atiyah M. F.)
1. Vector bundles over an elliptic curve, Proc. Lond. Math. Soc (3) VII, 27 (1957), 414—452.

Атья, Макдональд (Atiyah M. F., Macdonald I. G.)
1. Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969. [Имеется перевод: Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру.— М.: Мир, 1972.]

Бейли (Baily W. L., Jr.)
1. On the automorphism group of a generic curve of genus >2, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1961/2), 101—108, correction p. 325.

Бэникэ, Стэнэшилэ (Bănică C., Stănăşilă O.)
1. Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces, John Wiley, New York, 1976.

Бернсайд (Burnside W.)
1. Theory of Groups of Finite Order, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1911; reprinted by Dover, New York.

Бертело (Berthelot P.)
1. Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique $p > 0$, Lecture Notes in Math., 407, Springer-Verlag, Heideiberg, 1974.

Бёрч, Куик (Birch B. J., Kuyk W., ed.)
1. Modular Functions of One Variable, IV (Antwerp.), Lecture Notes in Math., 476, Springer-Verlag, Heidelberg, 1975.

Бомбьери (Bombieri E.)
1. Counting points on curves over finite fields (d'après S. A. Stepanov), Séminaire Bourbaki, 430 (1972/73).

Бомбьери, Хьюзмоллер (Bombieri E., Husemoller D.)
1. Classification and embeddings of surfaces, in: Algebraic Geometry, Arcata 1974, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 29 (1975), 329—420.

Борелли (Borelli M.)
1. Divisorial varieties, Pacific J. Math., 13 (1963), 375—388.

Борель, Серр (Borel A., Serre J.-P.)
1. Le théorème de Riemann—Roch, Bull. Soc. Math. de France, 86 (1958), 97—136. [Имеется перевод: Борель А., Серр Ж.-П. Теорема Римана — Роха.— Математика, 5:5, 1961, с. 17—54.]

Брискорн (Brieskorn E.)
1. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Invent. Math., 2 (1966), 1—14.

Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Algèbre Commutative, Eléments de Math. 27, 28, 30, 31, Hermann, Paris, 1961—1965. [Имеется перевод: Бурбаки Н. Коммутативная алгебра.— М.: Мир, 1971.]

Ван дер Варден (van der Waerden B. L.)
1. Modern Algebra, Frederick Ungar Pub. Co, New York: I, 1953; II, 1950. [Имеется перевод: Ван дер Варден Б. Л. Алгебра.— М.: Наука, 1979.]

Вейль А. (Weil A.)
1. Foundations of Algebraic Geometry, Amer. Math. Soc. Colloquim Publ., 29, 1946 (revised and enlarged edition 1962).
2. Sur les Courbes Algébriques et les Variétés qui s'en déduisent, Hermann, Paris, 1948. Also: Courbes Algébriques et Variétés Abéliennes, Hermann, Paris, 1971.
3. Variétés Abéliennes et Courbes Algébriques, Hermann, Paris, 1948.
4. Number of solutions of equations over finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 497—508.
5. Variétés Kählériennes, Hermann, Paris, 1958. [Имеется перевод: Вейль А. Введение в теорию кэлеровых многообразий.— М.: ИЛ, 1961.]
6. On the projective embedding of abelian varieties, in: Algebraic Geometry and Topology (in honor of S. Lefschetz), Princeton Univ. Press, Princeton, 1957, 177—181.

Вейль Г. (Weyl H.)
1. Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 3rd ed., 1955, (1st ed., 1913).

Вердье (Verdier J.-L.)
1. Base change for twisted inverse image of coherent sheaves, in: Algebraic Geometry, Bombay, 1968, Oxford Univ. Press, Oxford, 1969, 393—408.

Витушкин А. Г.
1. On polynomial transformation of C^n, in: Manifolds, Tokyo, 1973, Tokyo Univ. Press, Tokyo, 1975, 415—417.

Ганнинг (Gunning R. C.)
1. Lectures on Riemann Surfaces, Princeton Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, 1966, 256 pp.

Ганнинг, Росси (Gunning R. C., Rossi H.)
1. Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, 1965. [Имеется перевод: Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1969.]

Гильберт, Кон-Фоссен (Hilbert D., Cohn-Vossen S.)
1. Geometry and the Imagination, Chelsea Pub. Co., New York, 1952. Translation from German: Anschauliche Geometrie, 1932). [Имеется перевод: Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.— М.: ГИТТЛ, 1951.]

Годеман (Godement R.)
1. Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris, 1958. [Имеется перевод: Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков.— М.: ИЛ, 1961.]

Грауэрт (Grauert H.)
1. Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, Publ. Math. IHES, 5 (1960), 233—292. [Имеется перевод: Грауэрт Г. Теорема из теории аналитических пучков и пространства модулей комплексных структур.— В сб.: Комплексные пространства.— М.: Мир, 1965, с. 205—299.]

2. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann., 146 (1962), 331—368. [Имеется перевод: Грауэрт Г. О модификациях и исключительных аналитических множествах.— В сб.: Комплексные пространства.— М.: Мир, 1965, с. 45—104.]

Грауэрт, Реммерт (Grauert H., Remmert R.)
1. Komplex Räume, Math. Ann., 136 (1958), 245—318.

Грауэрт, Рименшнайдер (Grauert H., Riemenschneider O.)
1. Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, Inv. Math., 11 (1970), 263—292.

Гротендик (Grothendieck A.)
1. Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., 9 (1957), 119—221. [Имеется перевод: Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры.— М.: ИЛ, 1961.]
2. Sur une note de Mattuck—Tate, J. Reine u. Angew. Math., 200 (1958), 208—215. [Имеется перевод: Гротендик А. Об одной заметке Маттука — Тэйта.— Математика, 4:2, 1960, с. 29—38.]
3. La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. de France 86 (1958), 137—154.
4. The cohomology theory of abstract algebraic varieties, Proc. Int. Cong. Math. Edinburgh, 1958, p. 103—118. [Имеется перевод: Гротендик А. Теория когомологий абстрактных алгебраических многообразий. Международный математический конгресс в Эдинбурге.— М.: Физматгиз, 1962, с. 116—137.]
5. Fondements de la Géométrie Algébrique, Séminaire Bourbaki 1957—62, Secrétariat Math., Paris, 1962.
6. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Séminaire Bourbaki, 279 (1965).
7. Local Cohomology (notes by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math., 41, Springer-Verlag, Heidelberg, 1967.
8. Crystals and the De Rham cohomology of schemes (notes by I. Coates and O. Jussila), in: Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 306—358.
9. Standard conjectures on algebraic cycles, in: Algebraic Geometry, Bombay, 1968, Oxford University Press, Oxford, 1965, p. 193—199.

Гротендик, Дьёдонне (Grothendieck A., Dieudonné J.)
Eléments de Géométrie Algébrique.
EGA I. Le language des schémas, Publ. Math. IHES, 4 (1960).
EGA II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, Ibid. 8 (1961).
EGA III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Ibid. 11 (1961), and 17 (1963).
EGA IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Ibid. 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).
EGA I. Eléments de Géométrie Algébrique, I, Grundlehren 166, Springer-Verlag, Heidelberg (new ed.), 1971.

Гротендик и др. (Grothendieck A. et al.)
Séminaire de Géométrie Algébrique.
SGA 1. Revêtements étales et Groupe Fondemental, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.
SGA 2. Cohomologie Locale des Faisceaux Cohérents et Théorèmes de Lefschetz Locaux et Globaux, North-Holland, Amsterdam, 1968.
SGA 3. (with Demazure M.) Schémas en Groupes I, II, III, Lecture Notes in Math., 151, 152, 153, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.
SGA 4. (with Artin M., Verdier J. L.) Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas, Lecture Notes in Math., 269, 270, 305, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972—1973.

SGA $4^1/_2$. (by Deligne P., with Boutot J. F., Illusie L., Verdier J. L.) Cohomologie Etale, Lecture Notes in Math., 569, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
SGA 5. (with Bucur I., Houzel C., Illusie L., Jouanolou J.-P., Serre J.-P.) Cohomologie l-alique et fonctions L, Lecture Notes in Math., 589, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
SGA 6. (with Berthelot P., Illusie L.) Théorie des Intersections et Théorème de Riemann—Roch, Lecture Notes in Math., 225, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.
SGA 7. (with Raynaud M., Rim D. S.) Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, Lecture Notes in Math., 228, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972. Part II (by Deligne P., Katz N.) 340, 1973.

Гурвиц (Hurwitz A.)
1. Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann., 41 (1893), 403—442.

Гурвиц, Курант (Hurwitz A., Courant R.)
1. Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen; Geometrische Functionentheorie, Grundlehren 3, Springer-Verlag, Heidelberg, 1922.

Дворк (Dwork B.)
1. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. Math., 82 (1960), 631—648.

Делинь (Deligne P.)
1. Formes modulaires et représentations l-adiques, Séminaire Bourbaki, 355, Lecture Notes in Math., 179, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971, p. 139—172. [Имеется перевод: Делинь П. Модулярные формы и l-адические представления.— В кн.: Серр Ж.-П. Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые.— М.: Мир, 1973, с. 154—186.]
2. La conjecture de Weil pour les surfaces K3, Invent. Math., 15 (1972), 206—226.
3. La conjecture de Weil, I, Publ. Math. IHES, 43 (1974), 273—307. [Имеется перевод: Делинь П. Гипотеза Вейля I.— УМН, т. 30, № 5 (135), с. 159—190.]
4. Théorèmes de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Publ. Math. IHES, 35 (1968), 107—126.
5. Les intersections complètes de niveau de Hodge un, Invent. Math., 15 (1972), 237—250.

Делинь, Мамфорд (Deligne P., Mumford D.)
1. The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. IHES, 36 (1969), 75—110. [Имеется перевод: Делинь П., Мамфорд Д. Неприводимость многообразия кривых заданного рода.— Математика, 16:3, 1972, с. 13—53.]

Демазюр (Demazure M.)
1. Motifs des variétés algébriques, Séminaire Bourbaki, 365, Lecture Notes in Math., 180, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971, p. 19—38.

Дойринг (Deuring M.)
1. Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 14 (1941), 197—272.
2. Die Klassenkörper der Komplexen Multiplikation, Enz. der Math. Wiss., 2nd ed., I_2, Heft 10, II, § 23, 1958.

Дьёдонне (Dieudonné J.)
1. Cours de Géométrie Algébrique, I. Aperçu Historique sur le Développement de la Géométrie Algébrique, Presses Univ. France, Collection Sup., 1974.

Жуаноло (Jouanolou J. P.)
1. Riemann—Roch sans dénominateurs, Invent. Math., 11 (1970), 15—26.

Зарисский (Zariski O.)
1. The concept of a simple point on an abstract algebraic variety, Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), 1—52.
2. A simple analytical proof of a fundamental property of birational transformations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 35 (1949) 62—66.
3. Theory and Applications of Holomorphic Functions on Algebraic Varieties over Arbitrary Ground Fields, Memoirs of Amer. Math. Soc. New York, 1951.
4. Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques—Severi, Ann. of Math., 55 (1952), 552—592.
5. Introduction to the Problem of Minimal Models in the Theory of Algebraic Surfaces, Publ. Math. Soc. of Japan, 4 (1958).
6. The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, Amer. J. Math., 80 (1958), 146—184.
7. The theorem of Riemann—Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. Math., 76 (1962), 560—615.
8. Collected papers. Vol. I. Foundations of Algebraic Geometry and Resolution of Singularities, ed. H. Hironaka and D. Mumford, M. I. T. Press, Cambridge, 1972; vol. II. Holomorphic Functions and Linear Systems, ed. M. Artin and D. Mumford, M. I. T. Press, 1973.
9. On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface, Ill. J. Math., 2 (1958), 303—315.
10. Algebraic Surfaces, 2nd ed., Ergeb. 61, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.

Зарисский, Самюэль (Zariski O., Samuel P.)
1. Commutative Algebra (Vol. I and II), Van Nostrand, Princeton, 1958, 1960. [Имеется перевод: Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра, т. I, II.— М.: ИЛ, 1963.]

Зигель (Siegel C. L.)
1. Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, 1955, p. 71—77.

Игуза (Igusa J.-I.)
1. Arithmetic genera of normal varieties in an algebraic family, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41 (1955), 34—37.
2. Class number of a definite quaternion with prime discriminant, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 44 (1958), 312—314.

Исковских В. А., Манин Ю. И.
1. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота.— Матем. сб., т. 86, № 1, 1971, с. 140—166.

Картан, Шевалле (Cartan H., Chevalley C.)
1. Géométrie Algébrique, Séminaire Cartan—Chevalley, Secrétariat Math., Paris, 1955/56.

Картан, Эйленберг (Cartan H., Eilenberg S.)
1. Homological Algebra, Princeton Univ. Press, 1956. [Имеется перевод Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960.]

Касселс (Cassels J. W. S.)
1. Diophantine equations with special reference to elliptic curves, J. Lond. Math. Soc., 41 (1966), 193—291. Corr. 42 (1967), 183. [Имеется перевод: Касселс Дж. Диофантовы уравнения со специальным рассмотрением эллиптических кривых.— Математика, 12:1, 1968, с. 113—160; 12:2, 1968, с. 3—48.]

Касселс, Фрёлих (Cassels J. W. S., Fröhlich A., ed.)
1. Algebraic Number Theory, Thompson Book Co, Washington D. C., 1967. [Имеется перевод: Касселс Дж., Фрёлих А. Алгебраическая теория чисел.— М.: Мир, 1969.]

Кастельнуово (Castelnuovo G.)
1. Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica, Rend. Circ. Mat. Palermo, 7 (1893), Also in: Memorie Scelte, p. 95—113.

Клейман (Kleiman S. L.)
1. Toward a numerical theory of ampleness, Annals of Math., 84 (1966), 293—344.

2. Algebraic cycles and the Weil conjectures, in Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, 359—386.
3. The transversality of a general translate, Compos. Math., 28 (1974), 287—297.

Клейман, Лаксов (Kleiman S. L., Laksov D.)
1. Another proof of the existence of special divisors, Acta Math., 132 (1974), 163—176.

Клейн (Klein F.)
1. Ueber die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen, Math. Ann., 14 (1879). Also in: Klein, Ges. Math. Ahh., 3 (1923), 90—136.
2. Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree, Kegan Paul, Trench, Trübner, London, 1913. Dover reprint, 1956.

Клеменс, Гриффитс (Clemens C. H., Griffiths P. A.)
1. The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Annals of Math., 95 (1972), 281—356. (Имеется перевод: Клеменс К. Г., Гриффитс Ф. А. Промежуточный якобиан трехмерной кубической гиперповерхности.— Математика, 17:1, 1973, с. 3—41.)

Кнутсон (Knutson D.)
1. Algebraic spaces, Lecture Notes in Math., 203, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.

Кодаира (Kodaira K.)
1. On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 1268—1273.
2. On Kähler varieties of restricted type. (An intrinsic characterization of algebraic varieties), Annals of Math., 60 (1954), 28—48.

Кодаира, Спенсер (Kodaira K., Spencer D. C.)
1. On arithmetic genera of algebraic varieties, Proc. Nat. Acad Sci. USA, 39 (1953), 641—649.

Кунц (Kunz E.)
1. Holomorphe Differentialformen auf algebraischen Varietäten mit Singularitäten, I, Manus. Math., 15 (1975), 91—108.

Лабкин (Lubkin S.)
1. A p-adic proof of Weil's conjectures, Annals of Math., 87 (1968), 105—194, and 87 (1968), 195—255.

Ласку, Мамфорд, Скотт (Lascu A. T., Mumford D., Scott D. B.)
1. The self-intersection formula and the «formule-clef», Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 78 (1975), 117—123.

Ленг (Lang S.)
1. Abelian Varieties, Interscience Pub., New York, 1959
2. Algebra, Addison-Wesley, 1971 [Имеется перевод I изд. 1965 г.: Ленг С. Алгебра.—М.: Мир, 1968.]

Ленг, Нерон (Lang S., Néron A.)
1. Rational points of abelian varieties over function fields, Amer. J. Math., 81 (1959), 95—118.

Ленг, Троттер (Lang S., Trotter H.)
1. Frobenius Distributions in GL_2-Extensions, Lecture Notes in Math., 504, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976.

Липман (Lipman J.)
1. Introduction to resolution of singularities, in: Algebraic Geometry, Arcata 1974, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 29 (1975), 187—230.
2. Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, Publ. Math. IHES, 36 (1969), 195—279.
3. Unique factorization in complete local rings, in: Algebraic Geometry, Arcata 1974, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 29 (1975), 531.

Лихтенбаум, Шлессингер (Lichtenbaum S., Schlessinger M.)
1. The cotangent complex of a morphism, Trans. Amer. Math. Soc., 128 (1967), 41—70.

Макбет (Macbeath A. M.)
1. On a theorem of Hurwitz, Proc. Glasgow Math. Assoc., 5 (1961), 90—96.

Мамфорд (Mumford D.)
1. Geometric Invariant Theory, Ergebnisse, Springer-Verlag, Heidelberg, 1965. [Имеется перевод: Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов.— В кн.: Дьедонне Ж, Кэролл Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов.— М.: Мир, 1974, с. 125—256.]
2. Lectures on Curves on an Algebraic Surface, Annals of Math. Studies 59, Princeton Univ. Press, Princeton, 1966. [Имеется перевод: Мамфорд Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности.— М.: Мир, 1971.]
3. Pathologies, III, Amer. J. Math., 89 (1967), 94—104.
4. Varieties defined by quadratic equations (with an Appendix by G. Kempf), in Questions on Algebraic Varieties, Centro Internationale Matematica Estivo, Cremonese, Rome, 1970, p. 29—100.
5. Abelian Varieties, Oxford University Press, Oxford, 1970. [Имеется перевод: Мамфорд Д. Абелевы многообразия.— М.: Мир, 1972.]
6. The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. Math. IHES, 9 (1961), 5—22. [Имеется перевод: Мамфорд Д. Топология нормальных особенностей алгебраической поверхности и критерий простоты.— Математика, 10:6, 1966, с. 3—24.]

Манин Ю. И.
1. Лекции о K-функторе в алгебраической геометрии.— УМН, т. 24, № 5, 1969, с. 3—86.
2. Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования.— Матем. сб., т. 77, № 4, 1968, с. 475—507.
3. Кубические формы. Алгебра. Геометрия. Арифметика.— М.: Наука, 1972.

Маруяма (Maruyama M.)
1. On Classification of Ruled Surfaces, Kyoto Univ., Lectures in Math. 3, Kinokuniya, Tokyo, 1970.

Маттук, Тэйт (Mattuck A., Tate J.)
1. On the inequality of Castelnuovo-Severi, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 22 (1958), 295—299. [Имеется перевод: Маттук А., Тэйт Дж. О неравенстве Кастельнуово — Севери.— Математика, 4:2, 1960, с. 25—28.]

Мацумура (Matsumura H.)
1. Geometric structure of the cohomology rings in abstract algebraic geometry, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto (A), 32 (1959), 33—84.
2. Commutative Algebra, W. A. Benjamin Co., New York, 1970.

Мойшезон Б. Г.
1. Критерий проективности полных абстрактных алгебраических многообразий.— Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 1, 1964, с. 179—224.
2. Об n-мерных компактных комплексных многообразиях, имеющих n алгебраически независимых мероморфных функций. I, II, III. Изв. АН СССР сер. матем., т. 30, № 1, 1966, с. 133—174; т. 30, № 2, 1966, с. 345—386; т. 30, № 3, 1966, с. 621—656.

Морроу, Кодаира (Morrow J., Kodaira K.)
1. Complex Manifolds, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

Нагата (Nagata M.)
1. On the embedding problem of abstract varieties in projective varieties, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), 30 (1956), 71—82.
2. A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, Amer. J. of Math., 78 (1956), 78—116.
3. On the imbeddings of abstract surfaces in projective varieties, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), 30 (1957), 231—235.
4. Existence theorems for non-projective complete algebraic varieties, Ill. J. Math., 2 (1958), 490—498.
5. On rational surfaces I, II, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), 32 (1960) 351—370, and 33 (1960), 271—293. [Имеется перевод: Нагата М. О рациональных

поверхностях, I, II.— Математика, 8:1, 1964, с. 55—71, и 18:4, 1964, с. 75—94.]
6. Imbedding of an abstract variety in a complete variety, J. Math. Kyoto Univ., 2 (1962), 1—10.
7. Local Rings, Interscience Tracts in Pure and Applied Math. 13, J. Wiley, New York, 1962.
8. On self-intersection number of a section on a ruled surface, Nagoya Math., J., 37 (1970), 191—196.

Накаи (Nakai Y.)
1. A criterion of an ample sheaf on a projective scheme, Amer. J. Math., 85, (1963), 14—26.
2. Some fundamental lemmas on projective schemes, Trans. Amer. Math. Soc., 109 (1963), 296—302.

Накано (Nakano S.)
1. On complex analytic vector bundles, J. Math. Soc. Japan, 7 (1955), 1—12.

Нарасимхан, Сешадри (Narasimhan M. S., Seshadri C. S.)
1. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Annals of Math., 82 (1965), 540—567. [Имеется перевод: Нарасимхан М. С., Шешадри К. С. Стабильные и унитарные векторные расслоения на компактной римановой поверхности.— Математика, 13:1, 1969, с. 27—52.]

Нётер (Noether M.)
1. Zur Grundlegung der Theorie der Algebraischen Raumcurven, Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1883.

Олсон (Olson L.)
1. An elementary proof that elliptic curves are abelian varieties, Ens. Math., 19 (1973), 173—181.

Рамануджам (Ramanujam C. P.)
1. Remarks on the Kodaira vanishing theorem, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 36 (1972), 41—51.

Рами, Руже (Ramis J. P., Ruget G.)
1. Complexes dualisants et théorème de dualité en géométrie analytique complexe, Pub. Math. IHES, 38 (1970), 77—91.

Рами, Руже, Вердье (Ramis J. P., Ruget G., Verdier J. L.)
1. Dualité relative en géométrie analytique complexe, Invent, Math. 13 (1971), 261—283.

Робертс (Roberts J.)
1. Chow's moving lemma, in: Algebraic Geometry, Oslo, 1970 (F. Oort, ed.), Wolters-Noordhoff, 1972, 89—96.

Рокетт (Roquette P.)
1. Abschätzung der Automorphismenanzahl von Funktionenkörpern bei Primzahlcharakteristik, Math. Zeit., 117 (1970), 157—163.

Ротман (Rotman J. J.)
1. Notes on Homological Algebra, Van Nostrand Reinhold Math. Studies 26, New York, 1970.

Сен-Дона (Saint-Donat B.)
1. On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve, Math. Ann., 206 (1973), 157—175.

Самюэль (Samuel P.)
1. Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique, Ergebnisse 4, Springer-Verlag, Heidelberg, 1955.
2. Lectures on old and new results on algebraic curves (notes by S. Anantharaman), Tata Inst. Fund. Res. (1966).
3. Anneaux Factoriels (rédaction de A. Micali), Soc. Mat. de São Paulo, 1963.

Севери (Severi F.)
1. Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a suoi punti tripli apparenti, Rend. Circ. Matem. Palermo, 15 (1901), 33—51.

2. Vorlesungen über Algebraische Geometrie (transl. by E. Löffler), Johnson Pub., rpt. 1968; 1st ed., Leipzig 1921.
3. Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie, Hamb. Abh., 9 (1933), 335—364.

Селли (Sally J.)
1. Regular overrings of regular local rings, Trans. Amer. Math. Soc., 171 (1972), 291—300.

Серр (Serre J.-P.)
1. Cohomologie et géométrie algébrique, Proc. ICM, 1954, vol. III, 515—520.
2. Un théorème de dualité, Comm. Math. Helv., 29 (1955), 9—26.
3. Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math., 61 (1955), 197—278. [Имеется перевод: Серр Ж.-П. Когерентные алгебраические пути.— В сб.: Расслоенные пространства и их приложения.— М.: ИЛ, 1958, с. 372—458.]
4. Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, 6 (1950), 1—42.
5. Sur la cohomologie des variétés algébriques, J. de Maths. Pures et Appl., 36 (1957), 1—16.
6. Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, Symposium Int. de Topologia Algebraica, Mexico, 1958, p. 24—53.
7. Groupes Algébriques et Corps de Classes, Hermann, Paris, 1959. [Имеется перевод: Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов.— М., Мир, 1968.]
8. Rationalité des fonctions ζ des variétés algébriques (d'après B. Dwork), Séminaire Bourbaki, 198, 1960.
9. Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil, Annals of Math., 71 (1960), 392—394.
10. Zeta and L functions, in Arithmetical Algebraic Geometry (Schilling, ed.), Harper and Row, New York, 1965, p. 82—92. [Имеется перевод: Серр Ж.-П. Дзета-функции и L-функции.— УМН, т. 20, № 6, 1965, с. 19—26.]
11. Algèbre Locale. Multiplicités (réligé par P. Gabriel), Lectures Notes in Math. 11, Springer-Verlag, Heidelberg, 1965. [Имеется перевод: Серр Ж.-П. Локальная алгебра и теория кратностей.— Математика, 7:5, 1963, с. 3—93.]
12. Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), 363—374.
13. Critère de rationalité pour les surfaces algébriques (d'après K. Kodaira), Séminaire Bourbaki, 146, 1957.
14. A Course in Arithmetic, Graduate Texts in Math., 7, Springer-Verlag, Heidelberg, 1973. [Имеется перевод: Серр Ж.-П. Курс арифметики.— М.: Мир, 1972.]

Сингх (Singh B.)
1. On the group of automorphisms of a function field of genus at least two, J. Pure Appl. Math., 4 (1974), 205—229.

Сиода (Shioda T.)
1. An example of unirational surfaces in characteristic p, Math. Ann., 211 (1974), 233—236.

Спеньер (Spanier E. H.)
1. Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York, 1966. [Имеется перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1971.]

Суоминен (Suominen K.)
1. Duality for coherent sheaves on analytic manifolds, Ann. Acad. Sci. Fenn. (A), 424 (1968), 1—19.

Тэйт (Tate J. T.)
1. Algebraic cycles and poles of the zeta function, in Arithmetical Algebraic Geometry (Schilling, ed.), Harper and Row, New York, 1965, p. 93—110.

[Имеется перевод: Тэйт Дж. Алгебраические классы когомологий.— УМН, т. **20**, № 6, 1965, с. 27—40.]
2. Residues of differentials on curves, Inv. Math., **23** (1974), 179—206. [Имеется перевод: Тэйт Дж. Вычеты дифференциалов на кривых.— Математика, **13**:1, 1969, с. 5—13.]
3. The arithmetic of elliptic curves, Inv. Math., **23** (1974), 179—206.

Тюрин А. Н.
1. О классификации двумерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода.— Изв. АН СССР, сер. матем., т. **28**, № 1, 1964, с. 21—52.
2. Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода.— Изв. АН СССР, сер. матем., т. **29**, № 3, 1965, с. 657—678.

Уокер (Walker R. J.)
1. Algebraic Curves, Princeton Univ., Princeton, 1950, Dover reprint, 1962.

Уэлс (Wells R. O., Jr.)
1. Differential Analysis on Complex Manifolds, Prentice-Hall, 1973. [Имеется перевод: Уэлс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1976.]

Фрейд (Freyd P.)
1. Abelian Categories, an Introduction to the Theory of Functors, Harper and Row, New York, 1964.

Фултон (Fulton W.)
1. Algebraic Curves, W. A. Benjamin, New York, 1969.
2. Riemann — Roch for singular varieties, in: Algebraic Geometry, Arcata 1974, (Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 29 (1975), 449—457.

Хартсхорн (Hartshorne R.)
1. Complete intersections and connectedness, Amer. J. of Math., **84** (1962), 497—508.
2. Residues and Duality, Lecture Notes in Math., 20, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.
3. Cohomological dimension of algebraic varieties, Annals of Math. 88 (1968), 403—450.
4. Curves with high self-intersection on algebraic surfaces, Publ. Math. IHES, **36** (1969), 111—125.
5. Ample Subvarieties of Algebraic Varieties, Lecture Notes in Math. 156, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.
6. Equivalence relations on algebraic cycles and subvarieties of small codimension, in: Algebraic Geometry, Arcata, 1974, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 29 (1975), 129—164.
7. On the De Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. IHES, **45** (1976), 5—99.

Хартсхорн (ред.) (Hartshorne R., ed.)
1. Algebraic Geometry, Arcata 1974, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., **29** (1975).

Хилтон, Штаммбах (Hilton P. J., Stammbach U.)
1. A Course in Homological Algebra, Graduate Texts in Mathematics 4, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

Хиронака (Hironaka H.)
1. A note on algebraic geometry over ground rings. The invariance of Hilbert characteristic functions under the specialization process, Ill. J. Math., **2** (1958), 355—366.
2. On the theory of birational blowing-up, Thesis, Harvard, 1960.
3. On resolution of singularities (characteristic zero), Proc. Int. Cong. Math., 1962, p. 507—521. [Имеется перевод: Хиронака X. Разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями характеристики нуль. — Математика, **9**:6, 1965, с. 3—70; **10**:1, 1966, с. 3—89; **10**:2, 1966, с. 3—58.]

4. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Annals of Math., **79** (1964), I: 109—203; II: 205—326.
5. Triangulations of algebraic sets, in: Algebraic Geometry, Arcata 1974, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 29 (1975), 165—184.

Хиронака, Мацумура (Hironaka H., Matsumura H.)
1. Formal functions and formal embeddings, J. of Math. Soc. of Japan, **20** (1968), 52—82.

Хирцебрух (Hirzebruch F.)
1. Topological Methods in Algebraic Geometry, Grundlehren 131, Springer-Verlag, Heidelberg, 3rd ed., 1966. [Имеется перевод: Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии.— М.: Мир, 1973.]

Хирцебрух, Майер (Hirzebruch F., Mayer K. H.)
1. On (n)-Mannigfaltigkeiten, Exotische Sphären und Singularitäten, Lecture Notes in Math. 57, Springer-Verlag, Heidelberg, 1968.

Ходж (Hodge W. V. D.)
1. The Theory and Applications of Harmonic Integrals, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2nd ed., 1952.

Хоррокс, Мамфорд (Horrocks G., Mumford D.)
1. A rank 2 vector bundle on $\mathbf{P}^4$ with 15 000 symmetries, Topology, **12** (1973), 63—81.

Чжоу (Chow W. L.)
1. On compact complex analytic varieties, Amer. J. of Math., **71** (1949), 893—914; errata 72, p. 624.
2. On Picard varieties, Amer. J. Math., **74** (1952), 895—909.
3. The Jacobian variety of an algebraic curve, Amer. J. of Math., **76** (1954), 453—476.

Чжоу, Кодаира (Chow W. L., Kodaira K.)
1. On analytic surfaces with two independent meromorphic functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **38** (1952), 319—325.

Шафаревич И. Р.
1. Основы алгебраической геометрии.— М.: Наука, 1972.

Шафаревич И. Р. и др.
1. Алгебраические поверхности.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, т. **75**, 1965.

Шевалле (Chevalley C.)
1. Intersections of algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. Math. Soc., **57** (1945), 1—85.
2. Anneaux de Chow et Applications, Séminaire Chevalley, Secrétariat Math., Paris, 1958.

Шеннон (Shannon D. L.)
1. Monoidal transforms of regular local rings, Amer. J. Math., **95** (1973), 294—320.

Шлессингер (Schlessinger M.)
1. Functors of Artin rings, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 208—222. [Имеется перевод: Шлезингер М. Функторы на категории артиновых колец.— Математика, **15**:4, 1971, с. 115—129.]

Штихтенот (Stichtenoth H.)
1. Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik, Archiv der Math., **24** (1973), 527—544.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ