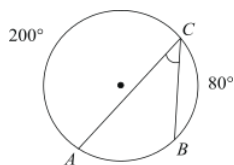


Тестовая часть:

№1 Решите уравнение: $\sqrt{\frac{1}{1-5x}} = \frac{1}{6}$.

№2 В классе 26 учащихся, среди них два друга – Пётр и Василий. Для того, чтобы распределиться, кто для подготовки к новому году организует «тайного санту», а кто режет салаты, учащиеся случайным образом разбиваются на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Пётр и Василий окажутся в одной группе.

№3 Дуга окружности AC , не содержащая точки B , составляет 200° . А дуга окружности BC , не содержащая точки A , составляет 80° . Найдите вписанный угол \widehat{ACB} . Ответ дайте в градусах.



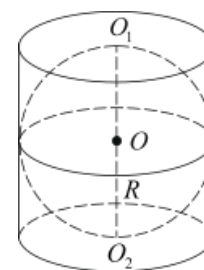
№4 Петя очень серьезно подходит к катанию с горки на ватрушке. Перед тем, как поехать с горки, Петя в уме прикинул, что расстояние, которое ему надо будет проехать по льду можно оценить по формуле:

$$\frac{5 \sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \cdot \sin 41^\circ}$$

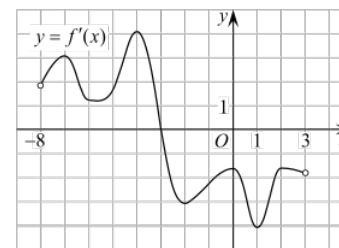
Помогите Пете найти значение этого выражения.

№5 Игорь попросил у деда Мороза на новый год в подарок сферический футбольный мяч. Вечером 31-го декабря он

случайно увидел под ёлкой коробку, в которой дед Мороз принёс ему подарок. Игорь знает, что объем футбольного мяча равен 24 условным единицам. Так как время получения подарков – первое января, Игорь хочет понять, мог ли заветный мяч поместиться в такую коробку. Но, к сожалению, футбол Игорь любит сильнее математики. Помогите Игорю посчитать, какого объема должна быть минимальная коробка цилиндрической формы, чтоб в неё поместился такой футбольный мяч (чтоб он был вписан в коробку, см. рисунок).



№6 На рисунке изображен график спроса $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

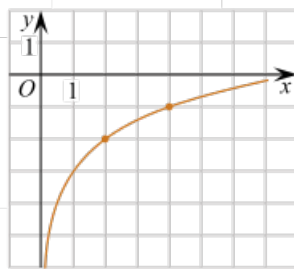


№7 ДИСКЛЕЙМЕР: составитель заданий осуждает игры с пиротехникой и извещает читателя об их опасности! Хулиганы-физики из одного лицея на Васильевском острове празднуют новый год в центре Санкт-Петербурга, у реки Невы. Они хотят бросить небольшую петарду под острым углом α к плоскости горизонтальной поверхности земли. Они без

труда выяснили, что расстояние, которое пролетает петарда, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$ (м.), где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость петарды, а g – ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м / с²). Сложность в том, что после бурного празднования хулиганы уже не могут самостоятельно рассчитать, при каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку Неву шириной 20 м., а поэтому отказываются от этой опасной идеи. Вам предлагается провести их расчеты, но без опытной проверки.

№8 Рабочие развешивают новогодние гирлянды и украшения вдоль участка Невского проспекта длиной 500 м, ежедневно увеличивая норму того, сколько нужно покрыть (в метрах) украшениями, на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие украсили 3 метра участка. Определите, сколько метров участка рабочие украсили в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

№9 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 1$.



№10 Телефон передаёт SMS-сообщение с поздравлением с наступившим новым годом. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения

потребуется не больше двух попыток.

№11 Найдите точку максимума функции $y = 3x - \ln(x + 3)^3$ на отрезке $[-2, 5; 0]$.

Задания с развернутым ответом:

№12 а) Решите уравнение: $\sin x + 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \cdot \sin 2x + 1$
 б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

№13 В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ проведена высота $[PH]$. N – середина отрезка $[AH]$, M – середина ребра $[AP]$.

а) Докажите, что угол между прямыми (PH) и (BM) равен углу $\angle BMN$.

б) Длины всех рёбер данной пирамиды равны между собой. Найдите угол между прямыми (PH) и (BM) .

№14 Решите неравенство:

$$\log_{\log_x 2x} (6x - 2) \geq 0$$

№15 В июле нового 2022 года планируется взять кредит на сумму 419375 рублей. Условия возврата таковы:

1. В январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом.
2. С февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом. Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (за 4 года).

№16 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая (AB) касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая (BK) пересекает первую окружность в точке D , прямая (AK) пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые (AD) и (BC) параллельны.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

№17 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\sqrt{4x-3} \ln(5x-a) = \sqrt{4x-3} \ln(6x+a)$$

имеет ровно 1 корень на промежутку $[0,1]$.

№18 Никита хочет провести новогодние каникулы продуктивно и позаниматься математикой. На [youtube канале Лекториум](#) выложено k видеоуроков по математике продолжительностью ровно 1 мин., 2 мин., 3 мин., ..., k мин. Никита хочет за несколько дней посмотреть их все ровно по одному разу, затрачивая на это ровно полчаса каждый день (остальное время он уделяет решению интересных задач из этого курса). Смотреть видеоуроки он может в любом порядке, но обязательно полностью.

- а) Сможет ли Никита осуществить свой план при $k = 15$
- а) Сможет ли Никита осуществить свой план при $k = 25$
- в) Найдите все натуральные k , при которых Никита сможет осуществить свой план.