

Научный семинар по теории чисел, ЛНМО, 2022/2023.

Задачи и упражнения.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ.

1. Докажите, что числа Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$ попарно взаимно просты.

Указание. Удобно доказать и воспользоваться рекуррентной формулой для чисел Ферма.

2. Для натурального $m > 1$ вычислите в кольце $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$:

- Сумму всех элементов.
- Сумму квадратов всех элементов.
- Сумму всех попарных произведений элементов.
- Сумму всех обратимых элементов.
- Сумму квадратов всех обратимых элементов.

3. Докажите *теорему Вильсона*. Сравнение

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

выполняется тогда и только тогда, когда p — простое.

4. Для каких простых чисел p разрешимо сравнение $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$?

5. Докажите, что все решения сравнения $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, где $p = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$ имеют вид

$$x = \pm 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2m \pmod{p}$$

Указание. Удобно воспользоваться теоремой Вильсона