Основы алгебры и теории чисел

Задачи на зимние каникулы.

1. Найдите уравнение касательной к единичной окружности в точке α, где $|\alpha| = 1$.
Пояснение: это задача про геометрию комплексных чисел.
2. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[i]$ евклидово.
Указание: возможно, тут помогут какие-то геометрические идеи.
3. Докажите, что в каждом коммутативном кольце с единицей всякий максимальный идеал прост.
4. Рассмотрим в кольце целых чисел следующее множество

$$\mathfrak{a}_{m,n} = \{k \in \mathbb{Z} \mid \; mk \,\vdots\, n\}.$$

Докажите, что $\mathfrak{a}_{m,n}$ — идеал. Каким целым числом он порожден?
5. Пусть R — коммутативное кольцо с 1. *Радикалом Джекобсона* $\mathfrak{R}$ кольца R называют пересечение всех максимальных идеалов кольца R. Докажите, что $r \in \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда элемент $1 - rs$ обратим $\forall s \in R$.
6. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в коммутативном кольце $\mathfrak{R}$. Докажите, что если $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ для некоторых идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то или $\mathfrak{a}$, или $\mathfrak{b}$ совпадает с $\mathfrak{p}$.
7. Пусть I — идеал в кольце R. Докажите, что подмножество

$$\sqrt{I} := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon a^n \in I\}$$

также является идеалом в кольце R. Это подмножество называют *радикалом идеала* I.