Алгебраическая геометрия и теория чисел

Содержание

1. Нормированные поля 2
- 1.1 Нормированное поле. Неархимедовы нормы. 2
- 1.2 Эквивалентные нормы. 3
- 1.3 Пополнение метрических пространств 3
- 1.4 Пополнение нормированного поля. 5

1. Нормированные поля

1.1 Нормированное поле. Неархимедовы нормы.

Здесь и вдальнейшем будем полагать F полем, хотя многие вещи работают и для кольца (а для области целостности существует единственное продолжение на поле частных).

Definition 1. *Нормой (нормированием, абсолютным значением) на поле F называют отображение $\|\cdot\|: F \to \mathbb{R}_{>0}$, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x, y \in F \ \|xy\| = \|x\|\|y\|$.
3. $\exists C > 0 \colon \forall x, y \in F$:
$$\|x + y\| \leq \max(x, y)$$

Пара $(F, \|\cdot\|)$ называется нормированным полем.

Remark 1. Тем, кто уже до этого видел определение нормы, это определение может показаться странным, так как обычно вместо третьего свойства требуют неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in F \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ясно, что третье свойство следует из неравенства треугольника с $C = 2$. Ниже мы покажем и обратную импликацию.

Ясно, что любая норма задаёт метрику $d(x, y) = \|x - y\|$, а любая метрика индуцирует топологию стандартным образом.

Example 1. *Если $F \leq \mathbb{C}$, то подходит $|\cdot|$ (модуль комплексного числа). Если $F \leq \mathbb{R}$ или $F \leq \mathbb{Q}$, то подходит $|\cdot|$.*

Example 2. *На любом поле можно ввести тривиальную норму (иногда соответствующую ей метрику называют метрикой лентяя):*

$$\|x\| = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x \neq 0 \end{cases}$$

Theorem 1. *Если в определении 1 постоянная C равна 2, то норма удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. Сначала отметим, что если $n, m \in \mathbb{N}, \ n \leq 2^m$, то выполняется оценка:

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leq C^m \cdot \| \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$$

Тогда мы можем провести оценки следующим образом:

$$\|x+y\|^n = \|(x+y)^n\| = \|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \|\binom{n}{k} x^k y^{n-k}\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left(2\binom{n}{k}\|x\|^k \|y\|^{n-k}\right) \leq$$
$$\leq 4(n+1)(\|x\| + \|y\|)^n$$

Преобразуем это неравенство

$$\left(\frac{\|x + y\|}{\|x\| + \|y\|}\right)^n \leq 4(n + 1) \leftrightarrow \frac{\|x + y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq 4^{\frac{1}{n}} \cdot (n + 1)^{\frac{1}{n}}$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем:

$$\frac{\|x + y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq 1 \Leftrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

Remark 2. Пример $F = \mathbb{C}$ с нормой $\|\cdot\| = |\cdot|^{\alpha}$, $\alpha > 1$ показывает, что константу $C = 2$ нельзя улучшить.

Remark 3. Тем самым, мы показали, что норму можно понимать, как функтор из категории $\mathscr{F}ield$ в категорию $\mathscr{M}etr$.

Corollary 1. *Норма непрерывна.*

Definition 2. *Нормы, с постойнной $C = 1$ в определении 1 называют неархимедовыми. Нормы, не являющиеся неархимедовыми, называют архимедовыми.*

Example 3. *Тривиальная норма на любом поле F является неархимедовой.*

Definition 3. *Ясно, что любое $x \in \mathbb{Q}$ представимо в виде $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots\, p$, $a \not\vdots\, p$, а $n \in \mathbb{Z}$. В таком случае число n называют p-адическим показателем числа x и обозначают $v_p(x)$.*

Definition 4. ***(Самое важное)***
Пусть p — простое число. Тогда норму

$$\|x\|_p = \begin{cases} 0, x = 0 \\ p^{-v(p)}, x \neq 0 \end{cases}$$

на поле $\mathbb{Q}$ называют p-адической нормой.

Remark 4. Ясно, что подоходит $r^{-v_p(x)}$, где $r > 1$, но p брать удобно, так как для $x \in \mathbb{Q}^*$ справедлива формула произведения

$$1 = \prod_p |x| \cdot \|x\|_p$$

Lemma 1. *Если норма неархимедова, то для x, y: $\|x\| \neq \|y\|$ выполняется $\|x + y\| = \max \|x\|, \|y\|$.*

Corollary 2. *Рассмотрим $(F, \|\cdot\|)$, где норма $\|\cdot\|$ неархимедова. Тогда, если $b \in B_r(a)$, то $B_r(a) = B_r(b)$.*

Corollary 3. *(Забавное)*
Если на поле F введена неархимедова норма F, то $\forall x, y, z \in F$ по крайней мере два числа из $\|x - y\|$, $\|x - z\|$, $\|y - z\|$ равны.
Иными словами, в метрическом пространстве (F, d) $(d(x, y) = \|x - y\|)$ все треугольники равнобедренные.

1.2 Эквивалентные нормы.

Пока не знаю, буду ли рассказывать.

1.3 Пополнение метрических пространств

Definition 5. *Пусть (X, d_X) — метрическое пространство, $\mathcal{F}(X)$ — множество всех ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$. Тогда введём расстояние d_∞ между функциями $f, g \in \mathcal{F}(X)$:*

$$d_\infty(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in X\}$$

Заметим, что определение корректно, так как функции ограничены.

Lemma 2. *$(\mathcal{F}(X), d_\infty)$ — метрическое пространство.*

Доказательство. Проверим три аксиомы метрики:

1. Пусть $f = g$. Тогда $|f(x) - g(x)| = 0$ для всякого $x \in X$, так что $d_\infty(f, g) = 0$. Если же наоборот $d_\infty(f, g) = 0$, то $0 \le |f(x) - g(x)| \le \sup = 0$, а значит $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$, что и означает $f \equiv g$.
2. Так как $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, то и $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$.
3. Рассмотрим три ограниченные функции $f, g, h \in \mathcal{F}(X)$, и покажем, что

$$d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) \ge d_\infty(f, h)$$

Мы знаем, что:

$$\forall x \in X : |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \ge |f(x) - h(x)|$$

в силу неравенства треугольника для стандартной метрики на $\mathbb{R}$. Для всякого $\varepsilon > 0$ мы можем взять x_0 такой, что $|f(x_0) - h(x_0)| \ge \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon$. Получаем, что

$$d_\infty(f, h) - \varepsilon = \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon \le |f(x_0) - h(x_0)| \le$$

$$\le |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - h(x_0)| \le d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$$

а раз это верно для любого $\varepsilon > 0$, то искомое неравенство доказано.

□

Lemma 3. *$\mathcal{F}(X)$ — полно.*

Доказательство. Пусть f_n — фундаментальная последовательность функций. Тогда $\forall x_0 \in X : \{f_n(x_0)\}$ — также фундаментальная последовательность, так как $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \le \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|, x \in X\}$. Следовательно,

$$\forall x_0 \in X : \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$$

и сходимость по всем точкам равномерна, так как не зависит от выбора точки x_0. Иными словами,

$$\exists f(x) : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

где $f(x_0)$ определяется как предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Так что $f(x)$ — функция, являющаяся пределом искомой последовательности функций. □

Definition 6. *Пусть (X, d_X) — метрическое пространство, $\mathcal{F}(X)$ — множество ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$. Построим изометрическое вложение $k : X \to \mathcal{F}(X)$ следующим образом:*

1. *Если X — ограничено, то определим $k(x) = d_x$, где*

$$\forall y \in X : d_x(y) \overset{\text{def}}{=} d_X(x, y)$$

Функция d_x ограничена, так как X ограничено. Заметим также, что

$$d_\infty(d_x, d_y) = \sup_z |d_x(z) - d_y(z)| = \sup_z \big(d_X(x, z) - d_X(z, y)\big) \le d_X(x, y)$$

однако равенство достигается при $z = y$, так что $d_\infty(d_x, d_y) = d_X(x, y)$, а значит вложение изометрическое.

2. *Пусть X, возможно, не ограничено. Тогда определим $k(x) = d_x - d_{x_0}$ для некоторой фиксированной точки $x_0 \in X$, где*

$$\forall y \in X : \big(k(x)\big)(y) \overset{\text{def}}{=} d_x(y) - d_{x_0}(y) = d_X(x, y) - d_X(y, x_0)$$

что есть ограниченная функция, так как $\forall y \in X : d_X(x,y) - d_X(y,x_0) \le d_X(x,x_0)$.
Заметим, что это аналогичным образом будет изометрическим вложением:

$$d_\infty(d_x - d_{x_0}, d_y - d_{x_0}) = \sup_z |d_x(z) - d_{x_0}(z) - d_y(z) + d_{x_0}(z)| =$$

$$= \sup_z \big(d_X(x,z) - d_X(z,y)\big) \le d_X(x,y)$$

где равенство достигается при $z = y$.

Любое метрическое пространство (X, d_X) имеет пополнение $(\overline{X}, d_{\overline{X}})$, то есть такое метрическое пространство $\overline{X}$, что выполнено:

1. $X \subseteq \overline{X}$
2. X — всюдю плотно в $\overline{X}$
3. $d_{\overline{X}}|_X = d_X$, то есть вложение из X в $\overline{X}$ является изометрическим
4. $(\overline{X}, d_{\overline{X}})$ — полно.

Доказательство. Возьмём изометрическое вложение Куратовского $k : X \to \mathcal{F}(X)$, и возьмём его замыкание в топологическом пространстве $\mathcal{F}(X)$ с топологией, индуцированной метрикой d_∞ — назовём это замыкание $\overline{X}$. Заметим, что

1. $X \subseteq \overline{X}$ естественным образом
2. X всюду плотно в $\overline{X}$, так как любое множество всюду плотно в своём замыкании
3. Вложение X в $\overline{X}$ изометрическое, так как оно изометрическое и во всё пространство $\mathcal{F}(x)$
4. $\overline{X}$ полно как замкнутое подмножество полного пространства.

□

Remark 5. Пополнение метрического пространства **единственно** с точностью до изометрии.

Remark 6. Выражение $X \subseteq \overline{X}$ тоже подразумевается с точностью до изометрии.

1.4 Пополнение нормированного поля.

Теперь мы умеем пополнять метрические пространства, но нам никто не гарантирует, что при пополнении поля по норме получится поле.