

Летняя математическая школа ЛНМО

Поставы, 2022г.

# Алгебраическая геометрия и теория чисел

**In nature, poisonous creatures  
will develop bright colors to  
warn others of their toxicity**



**Graduate Texts  
in Mathematics**

Robin Hartshorne

**Algebraic  
Geometry**

 Springer

*Конспект по материалам лекций, прочитанных М.И. Магиным  
11-му математическому классу*



Лаборатория непрерывного  
математического образования

# Алгебраическая геометрия и теория чисел

## Содержание

<b>1. Нормированные поля</b>	<b>2</b>
1.1 Нормированное поле. Неархимедовы нормы. . . . .	2
<b>2. <math>p</math>-адические числа</b>	<b>4</b>
2.1 Кольцо целых $p$ -адических чисел. . . . .	4
2.2 Локализация и поле частных колца. . . . .	6
2.3 Поле $p$ -адических чисел, как поле частных колца $\mathbb{Z}_p$ . . . . .	9
2.4 Сходимость в поле $p$ -адических чисел . . . . .	10
2.5 Лемма Гензеля: . . . . .	14
2.6 Пополнение метрических пространств. . . . .	16
2.7 Пополнение нормированного поля. . . . .	17
<b>3. Введение в алгебраическую геометрию</b>	<b>19</b>
3.1 Квадратичные формы и квадратики . . . . .	19

# 1. Нормированные поля

## 1.1 Нормированное поле. Неархимедовы нормы.

Здесь и в дальнейшем будем полагать  $F$  полем, хотя многие вещи работают и для кольца (а для области целостности существует единственное продолжение на поле частных).

**Definition 1.** Нормой (нормированием, абсолютным значением) на поле  $F$  называют отображение  $\|\cdot\|: F \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
2.  $\forall x, y \in F \ \|xy\| = \|x\|\|y\|$ .
3.  $\exists C > 0: \forall x, y \in F:$

$$\|x + y\| \leq C \cdot \max(\|x\|, \|y\|)$$

Пара  $(F, \|\cdot\|)$  называется нормированным полем.

*Remark 1.* Тем, кто уже до этого видел определение нормы, это определение может показаться странным, так как обычно вместо третьего свойства требуют неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in F \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ясно, что третье свойство следует из неравенства треугольника с  $C = 2$ . Ниже мы покажем и обратную импликацию.

Ясно, что любая норма задаёт метрику  $d(x, y) = \|x - y\|$ , а любая метрика индуцирует топологию стандартным образом.

**Example 1.** Если  $F \leq \mathbb{C}$ , то подходит  $|\cdot|$  (модуль комплексного числа). Если  $F \leq \mathbb{R}$  или  $F \leq \mathbb{Q}$ , то подходит  $|\cdot|$ .

**Example 2.** На любом поле можно ввести тривиальную норму (иногда соответствующую ей метрику называют метрикой лентяя):

$$\|x\| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

**Theorem 1.** Если в определении 1 постоянная  $C$  равна 2, то норма удовлетворяет неравенству треугольника.

*Доказательство.* Сначала отметим, что если  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq 2^m$ , то в случае произвольной постоянно  $C$  выполняется оценка:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \leq C^m \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$$

В самом деле, достаточно просто расписать дерево неравенств.

Отсюда следует неравенство

$$\|x_1 + \dots + x_n\| \leq (2n)^{c_0} \max_{1 \leq k \leq n} (\|x_k\|), \quad c_0 = \log_2 C$$

В самом деле,  $(2n)^{\log_2 C} = C \cdot n^{\log_2 C}$ . Это также даёт удобную оценку:  $\|n\| \leq (2n)^{c_0}$ .

Теперь заметим, что в нашем случае  $c_0 = \log_2 C = \log_2 2 = 1$ , а значит, мы можем провести вот такую оценку:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^n &= \|(x+y)^n\| = \left\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left\| \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left( 2 \binom{n}{k} \|x\|^k \|y\|^{n-k} \right) \leq \\ &\leq 4(n+1)(\|x\| + \|y\|)^n \end{aligned}$$

Преобразуем это неравенство

$$\left( \frac{\|x+y\|}{\|x\| + \|y\|} \right)^n \leq 4(n+1) \Leftrightarrow \frac{\|x+y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq 4^{\frac{1}{n}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

В пределе при  $n \rightarrow \infty$  получаем:

$$\frac{\|x+y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq 1 \Leftrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

*Remark 2.* Пример  $F = \mathbb{C}$  с нормой  $\|\cdot\| = |\cdot|^\alpha$ ,  $\alpha > 1$  показывает, что константу  $C = 2$  нельзя улучшить.

*Remark 3.* Тем самым, мы показали, что норму можно понимать, как функтор из категории  $\mathcal{Field}$  в категорию  $\mathcal{Metr}$ .

**Corollary 1.** Норма непрерывна.

**Definition 2.** Нормы, с постоянной  $C = 1$  в определении 1 называют неархимедовыми. Нормы, не являющиеся неархимедовыми, называют архимедовыми.

**Example 3.** Тривиальная норма на любом поле  $F$  является неархимедовой.

**Definition 3.** Ясно, что любое  $x \in \mathbb{Q}$  представимо в виде  $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $b \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В таком случае число  $n$  называют  $p$ -адическим показателем числа  $x$  и обозначают  $v_p(x)$ .

**Definition 4. (Самое важное)**

Пусть  $p$  — простое число. Тогда норму

$$\|x\|_p = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ p^{-v_p(x)}, & x \neq 0 \end{cases}$$

на поле  $\mathbb{Q}$  называют  $p$ -адической нормой.

*Remark 4.* Ясно, что подходит  $r^{-v_p(x)}$ , где  $r > 1$ , но  $p$  брать удобно, так как для  $x \in \mathbb{Q}^*$  справедлива формула произведения

$$1 = \prod_p |x| \cdot \|x\|_p$$

**Lemma 1.** Если норма неархимедова, то для  $x, y$ :  $\|x\| \neq \|y\|$  выполняется  $\|x+y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ .

**Corollary 2.** Рассмотрим  $(F, \|\cdot\|)$ , где норма  $\|\cdot\|$  неархимедова. Тогда, если  $b \in B_r(a)$ , то  $B_r(a) = B_r(b)$ .

**Corollary 3. (Забавное)**

Если на поле  $F$  введена неархимедова норма  $F$ , то  $\forall x, y, z \in F$  по крайней мере два числа из  $\|x-y\|$ ,  $\|x-z\|$ ,  $\|y-z\|$  равны.

Иными словами, в метрическом пространстве  $(F, d)$  ( $d(x, y) = \|x-y\|$ ) все треугольники равнобедренные.

## 2. $p$ -адические числа

### 2.1 Кольцо целых $p$ -адических чисел.

Прежде чем давать какие-либо определения, рассмотрим следующий мотивирующий пример. Рассмотрим сравнение  $x^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $n = 1$ , то ясно, что

$$x_0 \equiv \pm 3 \pmod{7}$$

Теперь рассмотрим  $n = 2$ .  $x^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod{7}$ , а значит, решения сравнения с  $n = 2$  надо искать в виде  $x_0 + 7t_1$ .

Займемся поиском решений вида  $x_1 = 3 + 7t_1$ . Подставим:

$$(3 + 7t_1)^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Leftrightarrow 9 + 6 \cdot 7t_1 + 7^2 t_1^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow 1 + 6t_1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow t_1 \equiv 1 \pmod{7}$$

Отсюда имеем решение  $x_1 \equiv 3 + 7 \cdot 1 \pmod{7^2}$ .

При  $n = 3$  мы получим  $x_2 = x_1 + 7^2 t_2$  и подставляя

$$(3 + 7 + 7^2 t_2)^2 \equiv 2 \pmod{7^3}$$

мы найдём  $t_2 \equiv 2 \pmod{7}$ , а значит,

$$x_2 \equiv 3 + 7 \cdot 1 + 7^2 \cdot 2 \pmod{7^3}$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  со свойствами

$$x_0 \equiv 3 \pmod{7}, \quad x_n \equiv x_{n-1} \pmod{7^n}, \quad x_n^2 \equiv 2 \pmod{7^{n+1}}$$

Процесс построения этой последовательности может напонмнить внимательному читателю процесс вычисления  $\sqrt{2}$  при помощи приближения рациональными числами. Там мы тоже строим последовательность рациональных чисел  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , квадраты которых становятся сколь угодно близки к 2, например,  $|r_n^2 - 2| < 1/10^n$ .

Если мы зафиксируем простое число  $p$  будем считать два целых числа близкими, если их разность делится на достаточно большую степени  $p$  (то есть, близкими в смысле  $p$ -адической метрики):

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = p^{-v_p(x-y)}$$

В конкретном примере выше,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \ d_7(x_n^2, 2) < \varepsilon$$

Как мы помним, задание последовательности рациональных чисел  $\{r_n\}$  определяет вещественное число  $\sqrt{2}$ . Проводя аналогию, здесь мы также можем предположить, что последовательность  $\{x_n\}$  определяет некоторое число  $\alpha$  совершенно новой природы.

Заметим также, что если у нас есть такая последовательность рациональных чисел  $\{r'_n\}$ , что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \ |r_n - r'_n| < \varepsilon$ , то её пределом также будет  $\sqrt{2}$  (и в этом смысле определение корректно). Соответственно, здесь нам также будет естественно предположить, что последовательность  $\{x'_n\}$ , для которой  $x_n \equiv x'_n \pmod{7^{n+1}}$  определяет то же самое число  $\alpha$ .

*Remark 5.* В общем, во всей этой аналогии мы просто заменили метрику на  $p$ -адическую.

**Definition 5.** Пусть  $p$  — некоторое простое число. Последовательность целых чисел  $\{x_n\}$ , обладающих свойством

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n} \quad \forall n \geq 1$$

определяет новый объект, называемый  $p$ -адическим числом. Две последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{x'_n\}$  определяют одно и то же целое  $p$ -адическое число, когда  $x_n \equiv x'_n \pmod{p^{n+1}} \quad \forall n \geq 0$ .

То есть, целые  $p$ -адические числа — предел по  $p$ -адическое норме целых.

Множество всех целых  $p$ -адических чисел мы будем обозначать через  $\mathbb{Z}_p$ .

Обычные целые числа (не  $p$ -адические) будем с этого момента называть целыми рациональными.

Заметим, что каждому целому рациональному числу  $x$  можно сопоставить целое  $p$ -адическое число, определяемое последовательностью  $\{x, x, x, \dots\}$ . Такое целое  $p$ -адическое число мы будем обозначать той же буквой  $x$ . Таким образом, мы получили естественное вложение  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$  (инъективность вполне очевидна).

**Remark 6. Канонический способ задания  $p$ -адического числа.**

Пусть целое  $p$ -адическое число задается последовательностью  $\{x_n\}$ . Обозначим наименьшее неотрицательное число, сравнимое с  $x_n$  по модулю  $p^{n+1}$  за  $\overline{x_n}$ .

$$x_n \equiv \overline{x_n} \pmod{p^{n+1}}, \quad 0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1}$$

Ясно, что

$$\overline{x_n} \equiv x_n \equiv x_{n-1} \equiv \overline{x_{n-1}} \pmod{p^n}$$

То есть, последовательность  $\{\overline{x_n}\}$  определяют то же целое  $p$ -адическое число, что и  $\{x_n\}$ . Заметим, что если две последовательности  $\{\overline{x_n}\}$  и  $\{\overline{y_n}\}$  определяют одно и то же целое  $p$ -адическое число, то в силу

$$\overline{x_n} \equiv \overline{y_n} \pmod{p^{n+1}}, \quad 0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1}, \quad 0 \leq \overline{y_n} < p^{n+1}$$

мы имеем  $\overline{x_n} = \overline{y_n}$ , то есть, такое представление единственно. Его мы и будем называть каноническим представлением.

Заметим, что  $\overline{x^n} \equiv \overline{x_{n-1}} \pmod{p^n}$ , а так как  $0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1}$ , вся каноническая последовательность имеет вид

$$\{a_0, a_0 + a_1p, a_0 + a_1p + a_2p^2, \dots\}, \quad 0 \leq a_i < p$$

С другой стороны, ясно, что каждая последовательность такого вида задаёт некоторое целое  $p$ -адическое число.

Ясно, что операции сложения и умножения на  $p$ -адических числах определяются поточечными операциями с соответствующими последовательностями.

Все свойства операций очевидны, значит,  $\mathbb{Z}_p$  — коммутативное кольцо. Поймём что-нибудь про множество обратимых элементов кольца.

**Theorem 2.** Целое  $p$ -адическое число  $\alpha$ , определяемое последовательностью  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  я тогда и только тогда, когда  $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ . Тогда существует такое целое  $p$ -адическое число  $\beta$ , что  $\alpha\beta = 1$ .

Пусть  $\beta$  определяется последовательностью  $\{y_n\}$ . Тогда

$$x_n y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$$

В частности,  $x_0 y_0 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ . И обратно, так как  $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$  и  $x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$  мы имеем

$$x_n \equiv x_{n-1} \equiv \dots \equiv x_0 \pmod{p} \Rightarrow x_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Значит, так как  $p$  — простое,  $\forall n \exists y_n: x_n y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$ .

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}, \quad x_n y_n \equiv x_{n-1} y_{n-1} \pmod{p^n} \Rightarrow y_n \equiv y_{n-1} \pmod{p^n}$$

а значит,  $\{y_n\}$  определяет некоторое целое  $p$ -адическое число  $\beta$ .

Таким образом,  $\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ . □

**Theorem 3.** Любое отличное от нуля целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  можно единственным образом представить в виде

$$\alpha = p^m \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*, \quad m \in \mathbb{N}$$

*Доказательство.* Если  $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ , то равенство справедливо при  $m = 0$ .

Пусть теперь  $\alpha \notin \mathbb{Z}_p^*$  и  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ . Тогда, по предыдущей теореме  $x_0 \equiv 0 \pmod{p}$ . Так как  $\alpha \neq 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad x_n \not\equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$ . Пусть  $m$  — наименьший индекс, для которого

$$x_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}}$$

Заметим, что в таком случае  $\forall s \geq 0$

$$x_{m+s} \equiv x_{m-1} \equiv 0 \pmod{p^m} \Rightarrow y_s = \frac{x_{m+s}}{p^m} \in \mathbb{Z}$$

$$p^m y_s - p^m y_{s-1} = x_{m+s} - x_{m+s-1} \equiv 0 \pmod{p^{m+s}} \Rightarrow y_s \equiv y_{s-1} \pmod{p^s}$$

То есть, последовательность  $\{y_s\}$  тоже определяет некоторое  $p$ -адическое число  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p$ . Заметим, что  $y_0 = x_m/p^m \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$ .

Из сравнения

$$p^m y_s = x_{m+s} \equiv x_s \pmod{p^{s+1}}$$

следует, что  $\alpha = p^m \cdot \varepsilon$ . Покажем теперь единственность. Предположим, что  $\alpha = p^k \xi$ ,  $k \geq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{Z}_p^*$ . Пусть  $\{z_s\} \rightarrow \xi$ .

$$p^m y_s \equiv p^k z_s \pmod{p^{s+1}} \quad \forall s \geq 0$$

Так как  $\varepsilon$  и  $\xi$  — обратимые элементы кольца, по предыдущей теореме  $y_s \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $z_s \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Подставим в предыдущее сравнения  $s = m$ :

$$p^m y_m \equiv p^k z_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}} \Rightarrow k \leq m$$

Так как мы можем проделать то же самое абсолютно симметрично для  $k$ , мы также имеем  $k \geq m$ , а значит  $k = m$ . То есть, мы получили, что  $y_{m+s} \equiv z_{m+s} \pmod{p^{s+1}}$ , а так как  $y_{s+1} \equiv y_s \pmod{p^{s+1}}$ ,  $z_{s+1} \equiv z_s \pmod{p^{s+1}}$ , мы имеем  $z_s \equiv y_s \pmod{p^{s+1}} \quad \forall s \geq 0 \Rightarrow \varepsilon = \xi$ .  $\square$

**Corollary 4.**  $\mathbb{Z}_p$  — область целостности.

*Доказательство.* Упражнение в листочке.  $\square$

Теперь ясно, что число  $m$  в представлении  $\alpha = p^m \varepsilon$  —  $p$ -адический показатель  $\alpha$  ( $v_p(\alpha)$ ).

В терминах  $p$ -адического показателя легко выразить свойства делимости  $p$ -адических чисел.

**Corollary 5.** Целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  делится на целое  $p$ -адическое число  $\beta$  тогда и только тогда, когда  $v_p(\alpha) \geq v_p(\beta)$ .

Резюмируя всё это, мы получили, что в кольце  $\mathbb{Z}_p$  всего один (с точностью до ассоциированности) простой элемент — число  $p$ , а все остальные (отличные от нуля) — его степени, домноженные на обратимые.

## 2.2 Локализация и поле частных колца.

Вообще, эта тема совершенно никак не относится к программе курса, но, прочитать всё равно надо.

**Идея:** уметь обращаться набор элементов кольца универсальным образом.

*Remark 7.* Отметим, что обратимый элемент не может являться делителем нуля, поэтому, если мы хотим обращать делители нуля, все элементы, которые в произведении с ним дают 0 должны перейти в 0. Кроме того, если два элемента обратимы, то их произведение обратимо. Кроме того, если мы добавим в множество, которое хотим обращать единицу, то ничего не изменится, так как умножение на единицу ничего не меняет.

Таким образом, будем заниматься обращением множеств, замкнуты относительно умножения и содержат единицу (будем называть такие множества мультипликативными).

Тут можно рассказать, с чего бы это называется локализацией, но как-то лень, если время останется, расскажу.

**Definition 6.** Пусть  $S$  — мультипликативное подмножество кольца  $R$ . Локализацией кольца  $R$  в  $S$  называется кольцо  $S^{-1}R$  вместе с локализационным гомоморфизмом  $\lambda_s: R \rightarrow S^{-1}R$ , удовлетворяющее свойствам

1.  $\forall s \in S \lambda_s(s)$  обратим в  $S^{-1}R$ .
2. Для любого гомоморфизма  $\varphi: R \rightarrow A$ , при котором  $\varphi(s) \in A^*$  для всех  $s \in S$  существует единственный гомоморфизм  $\psi: S^{-1}R \rightarrow A$  такой, что  $\psi \circ \lambda_s = \varphi$ . Иными словами, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \lambda_s & \nearrow \psi \\ & S^{-1}R & \end{array}$$

Как и всегда, определение объекта через универсальное свойство ничего не говорит о существовании объекта, поэтому сейчас мы будем больно и мучительно строить локализацию.

### Построение локализации:

Определим отношение  $\sim$  на множестве  $R \times S$  по правилу

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff ss_2r_1 = ss_1r_2$$

*Remark 8.* Здесь мы домножаем на  $s$  как раз за тем, чтоб делители нуля ушли в ноль.

**Statement 1.**  $\sim$  — отношение эквивалентности.

*Доказательство.* Рефлексивность и симметричность очевидны.

Самое неприятное — транзитивность.

Пусть  $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$  и  $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$ , то есть

$$sr_1s_2 = sr_2s_1, \quad s'r_2s_3 = s'r_3s_2, \quad s, s' \in S$$

Домножим первое равенство  $s's_3$ , а второе  $ss_1$ , получим

$$sr_1s_2 = sr_2s_1 \rightarrow s's_3sr_1s_2 = s's_3sr_2s_1, \quad s'r_2s_3 = s'r_3s_2 \rightarrow ss_1s'r_2s_3 = ss_1s'r_3s_2$$

Остается заметить, что

$$ss's_2 \in S \Rightarrow (r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$$

то есть, транзитивность доказана. □



Теперь, положим  $S^{-1}R = R \times S / \sim$ . Класс эквивалентности, содержащий представитель  $(r, s)$  будем обозначать  $\frac{r}{s}$ .

Определим локализационный гомоморфизм  $\lambda_s: R \rightarrow S^{-1}R$  формулой  $\lambda_s(r) = \frac{r}{1}$ .

Теперь, научимся складывать дроби.

**Theorem 4.** Пусть  $S$  — мультипликативное подмножество кольца  $R$ . Определим на  $S^{-1}R$  операции следующим образом

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_2 s_1}, \quad \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{s_1 r_2 + s_2 r_1}{s_1 s_2}$$

Тогда  $S^{-1}R$  — локализация  $R$  в мультипликативном подмножестве  $S$  с локализационным гомоморфизмом  $\lambda_s$  (как написано выше).

*Доказательство.* Докажем сначала, что наше определение сложения и умножения не зависит от выбора представителя.

Пусть выполняются равенства

$$\frac{r'_1}{s'_1} = \frac{r_1}{s_1} \leftrightarrow s r_1 s'_1 = s r'_1 s_1, \quad \frac{r'_2}{s'_2} = \frac{r_2}{s_2} \leftrightarrow s' r_2 s'_2 = s' r'_2 s_2$$

Перемножим последние равенства

$$s s' r_1 s'_1 r_2 s'_2 = s s' r'_1 s_1 r'_2 s_2$$

Отсюда имеем

$$\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} = \frac{r'_1 r'_2}{s'_1 s'_2}$$

Далее, будет некоторая **боль**, а именно, надо доказать

$$\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} = \frac{r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1}{s'_1 s'_2}$$

Если Вы немного помедитируете на формулы ниже, станет понятно, почему это так:

$$s s' (r_1 s_2 + r_2 s_1) s'_1 s'_2 = s s' (s_1 s_2 s'_1 s'_2 + r_2 s_1 s'_1 s'_2) = s s' (r'_1 s_2 s_1 s'_2 + r'_2 s_1 s'_2 s_2) = s s' (r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1) s_1 s_2$$

Вообще, честно говоря, также нужно доказывать ассоциативность сложения, коммутативность и дистрибутивность. Давайте непосредственно проверим ассоциативность сложения

$$\left( \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} \right) + \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} + \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + r_2 s_1 s_3 + r_3 s_1 s_2}{s_1 s_2 s_3}$$

$$\frac{r_1}{s_1} + \left( \frac{r_2}{s_2} + \frac{r_3}{s_3} \right) = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2 s_3 + r_3 s_2}{s_2 s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + r_2 s_3 s_1 + r_3 s_2 s_1}{s_1 s_2 s_3}$$

Нейтральным элементом по сложению будет  $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$ , обратным по сложению к  $\frac{r}{s}$  —  $-\frac{r}{s}$ . Нейтральным элементом по умножению  $-\frac{1}{1} = \frac{s}{s}$ . Проверим свойства локализации:

$$\lambda_s(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1$$

то есть, первое свойство выполнено.

Пусть  $\varphi: R \rightarrow A$  — такой гомоморфизм колец, что  $\varphi(s) \in A^* \forall s \in S$ . Определим отображение  $\psi: S^{-1}R \rightarrow A$  равенством  $\psi(\frac{r}{s}) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ .

Если  $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$ , то по определению

$$\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow r's = rs', \quad s'' \in S \Rightarrow \varphi(s'')\varphi(r')\varphi(s) = \varphi(s'')\varphi(r)\varphi(s')$$

Домножим на  $\varphi(s'')^{-1}\varphi(s')^{-1}\varphi(s')^{-1}$ , получим

$$\varphi(r')\varphi(s')^{-1} = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$$

а значит,  $\psi$  определён корректно. Так как  $\varphi(1) = 1$ , имеем  $\varphi = \psi \circ \lambda_S$ . Ясно, что  $\psi$  — гомоморфизм.

Равенство  $\varphi = \psi \circ \lambda_S$  однозначно задаёт  $\psi(\frac{r}{1}) = \varphi(r)$ . Так как  $\psi$  должен быть гомоморфизмом,

$$\varphi(r) = \psi(\frac{r}{1}) = \psi(\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{1}) = \psi(\frac{r}{s}) \cdot \varphi(s)$$

Так как по условию  $\varphi(s) \in A^*$ , имеем  $\psi(\frac{r}{s}) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ , что завершает доказательство.  $\square$

### ПРИМЕРЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ:

1. Для  $s \in R$  положим  $\langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Локализация  $\langle s \rangle^{-1}R$  обозначается через  $R_s$  и называется главной локализацией в элементе  $s$  (по аналогии с главным идеалом).
2. Если  $P$  — простой идеал кольца  $R$ , то  $R \setminus P$  является мультипликативным подмножеством. В этом случае локализация  $R_P = (R \setminus P)^{-1}R$  называется локализацией  $R$  в простом идеале  $P$ .  $R_P$  является локальным кольцом (т.е. кольцом с единственным максимальным идеалом).
3.  $S$  — множество всех элементов  $R$ , не являющийся делителями нуля. Тогда  $S^{-1}R$  называется полным кольцом частных кольца  $R$ . Это максимальная локализация, для которой гомоморфизм локализации инъективен.

Если  $R$  — область целостности, то  $\{0\}$  — простой идеал. Локализация в этом идеале, очевидно, будет полем, которое называется полем частных кольца  $R$ .

Иными словами, поле частных — это полное кольцо частных области целостности. Локализационный гомоморфизм — это универсальное вложение в следующем смысле:

**Lemma 2.** Пусть  $R$  — область целостности, а  $S = R \setminus \{0\}$ . Тогда  $F = S^{-1}R$  является полем, а гомоморфизм локализации  $\lambda_S: R \rightarrow F$  инъективен, а  $\lambda_S$  удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого поля  $K$  и мономорфизма  $R \rightarrow K$  существует единственный мономорфизм  $\psi: F \rightarrow K$ , что  $\varphi = \psi \circ \lambda_S$ .

### 2.3 Поле $p$ -адических чисел, как поле частных кольца $\mathbb{Z}_p$ .

Как мы уже выяснили, кольцо  $\mathbb{Z}_p$  — область целостности, его можно вложить в поле частных, используя конструкцию локализации.

В нашем случае это сводится к рассмотрению дробей  $\alpha/p^k$ , где  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ ,  $k \geq 0$ .

**Definition 7.** Дробь вида  $\alpha/p^k$ , где  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ , а  $k \geq 0$  называется дробным  $p$ -адическим числом или просто  $p$ -адическим числом.

*Remark 9.* Две дроби  $\alpha/p^k$  и  $\beta/p^m$  определяют одно и то же  $p$ -адическое число, если  $\alpha p^m = \beta p^k$ .

**Definition 8.** Полем  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$  называется поле частных кольца целых  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Z}_p$ .

**Theorem 5.** Всякое  $p$ -адическое число  $\xi \neq 0$  единственным образом представляется в виде

$$\xi = p^m \cdot \varepsilon, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$$

*Доказательство.* Пусть  $\xi = \alpha/p^k$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ . По теореме 3  $\alpha$  можно представить в виде  $p^\ell \varepsilon$ ,  $\ell \geq 0, \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$ . Тогда  $\xi = p^m \varepsilon$ ,  $m = \ell - k$ .

Единственность вытекает из единственности представления для 3.  $\square$

## 2.4 Сходимость в поле $p$ -адических чисел

Мы уже много раз говорили об аналогии между  $p$ -адическими числами и вещественными. В случае вещественных, они определяются последовательностями рациональных и являются пределами этих последовательностей.

Неформально мы уже обсуждали, почему это так в случае  $p$ -адических чисел, давайте теперь поймем, почему это так формально.

Теперь, после того как мы доопределили  $p$ -адический показатель на  $\mathbb{Q}_p$ , мы можем вводить на  $\mathbb{Q}_p$  (заметьте, уже не на  $\mathbb{Q}$ ) знакомое нам  $p$ -адическое нормирование (и, соответственно,  $p$ -адическую метрику).

**Definition 9.** Последовательность  $p$ -адических чисел  $\{\xi_n\}$  называется сходящейся к  $p$ -адическому числу  $\xi$  если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(\xi_n - \xi) = \infty$$

*Remark 10.* Ясно, что эквивалентно сходимость можно определять, как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\xi_n\} = \xi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$$

то есть, как и обычно, начиная с некоторого довольно большого номера,  $p$ -адические числа становятся сколь угодно близки к пределу.

Рассмотрим сначала для удобства некоторые свойства  $p$ -адического показателя:

1.  $v_p(\alpha\beta) = v_p(\alpha) + v_p(\beta)$ .
2.  $v_p(\alpha + \beta) \geq \min(v_p(\alpha), v_p(\beta))$ .
3.  $v_p(\alpha + \beta) = \min(v_p(\alpha), v_p(\beta))$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

Для поля  $\mathbb{Q}_p$  справедливы все стандартные свойства пределов. Докажем, например, что при  $\{\xi_n\} \rightarrow \xi$ ,  $\xi \in \mathbb{Z}_p^*$  выполняется  $\{1/\xi_n\} \rightarrow 1/\xi$ .

Сначала отметим, что, начиная с некоторого места  $v_p(\xi_n - \xi) > v_p(\xi)$ , откуда  $v_p(\xi_n) = \min(v_p(\xi_n - \xi), v_p(\xi)) = v_p(\xi) \Rightarrow v_p(\xi_n) \neq \infty \Rightarrow \xi_n \neq 0$ , то есть, на него в самом деле можно делить.

Далее мы имеем

$$v_p\left(\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{\xi}\right) = v_p(\xi - \xi_n) - v_p(\xi_n) - v_p(\xi) = v_p(\xi_n - \xi) - 2v_p(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Теперь, для доказательства факта, который мы хотели формализовать, нам нужно понять, как вводятся сравнения на кольце целых  $p$ -адических чисел. Сравнения в кольце целых  $p$ -адических чисел

определяются также, как и в кольце целых чисел, то есть  $\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma} \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \div \gamma$ .

Если  $\gamma = p^n \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$ , то всякое сравнение по модулю  $\gamma$  равносильно сравнению по модулю  $p^n$ , а значит, достаточно рассматривать только такие (в этом случае).

**Theorem 6.** *Всякое целое  $p$ -адическое число сравнимо с целым рациональным числом по модулю  $p^n$ . Два целых рациональных числа тогда и только тогда сравнимы по модулю  $p^n$  в кольце  $\mathbb{Z}_p^*$ , когда они сравнимы по этому модулю в кольце  $\mathbb{Z}$ .*

*Доказательство.* Докажем сначала, что если  $\alpha$  — целое  $p$ -адическое число, определяемое последовательностью  $\{x_n\}$ , то

$$\alpha \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$$

Как целое  $p$ -адическое число,  $x_n$  определяется последовательностью  $\{x_n, x_n, \dots, x_n, \dots\}$ . Тогда последовательность, определяющая целое  $p$ -адическое число  $\alpha - x_n$  выглядит следующим образом

$$\{x_0 - x_{n-1}, x_1 - x_{n-1}, \dots, 0, x_n - x_{n-1}, \dots\}$$

Из того, что всякое целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  представимо в виде

$$\alpha = p^k \cdot \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$$

следует, что целое  $p$ -адическое число  $\alpha$ , определяемое последовательностью  $\{y_n\}$  делится на  $p^\ell$  тогда и только тогда, когда  $x_n \equiv 0 \pmod{p^{n+1}} \forall n = 0, 1, \dots, k-1$ . Тогда, сравнение  $\alpha \equiv x_n \pmod{p^n}$  равносильно сравнениям

$$x_k - x_{n-1} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

а эти сравнения выполнены по определению  $p$ -адических чисел.

Докажем теперь, что для двух целых рациональных  $p$ -адических чисел  $x$  и  $y$  сравнимость по модулю  $p^n$  в кольце  $\mathbb{Z}_p$  равносильна сравнимости по модулю  $p^n$  в кольце  $\mathbb{Z}$ .

Положим  $x - y = p^m a$ ,  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Тогда, в кольце  $\mathbb{Z}$  сравнение  $x \equiv y \pmod{p^n}$  равносильно условию  $n \leq m$ . С другой стороны, так как  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ , соответствующее ему целое  $p$ -адическое число обратимо в  $\mathbb{Z}_p^*$ , а значит, для числа  $x - y$  есть представление в виде  $p^m \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ , а значит,  $v_p(x - y) = m$ , то есть,  $n \leq v_p(x - y)$ , а в  $\mathbb{Z}_p$  это равносильно сравнению  $x \equiv y \pmod{p^n}$ , так как  $v_p(p^n) = n$ .  $\square$

**Theorem 7.** *Если целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  определяется последовательностью  $\{x_n\}$ , то эта последовательность сходится к  $\alpha$ . Произвольное  $p$ -адическое число  $\xi$  является пределом последовательности рациональных чисел.*

*Доказательство.* Как мы понимаем из предыдущей теоремы, если  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$  определяется последовательностью  $\{x_n\}$ , то  $\alpha \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$ , а это по определению влечёт  $v_p(x_n - \alpha) \geq n + 1$ . Значит,  $v_p(x_n - \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , а это по определению означает, что  $\{x_n\}$  стремится к  $\alpha$ .

Теперь рассмотрим дробное  $p$ -адическое число  $\xi = \alpha/p^k$ .

$$v_p\left(\frac{x_n}{p^k} - \xi\right) = v_p\left(\frac{x_n - \alpha}{p^k}\right) = v_p(x_n - \alpha) - k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

а значит,  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$ , где  $\{y_n\} = \{x_n/p^k\}$ .

$\square$

**Definition 10.** Последовательность  $p$ -адических чисел  $\{\xi_n\}$  называется ограниченной, если все значения  $\|\xi\|_n$  ограничены сверху.

**Theorem 8. (Лемма Больцано-Вейерштрасса для поля  $p$ -адических чисел)**

Из всякой ограниченной последовательности  $p$ -адических чисел можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* Наверное, не успеваю рассказать. Можно прочитать в книге ШАФАРЕВИЧА (ССЫЛКУ).  $\square$

Оказывается (хоть это и не особенно неожиданно), для  $p$ -адических чисел справедлив критерий Коши, то есть

**Theorem 9. (Критерий Коши)** Пусть нам дана последовательность  $\{\xi_n\}$ ,  $\xi_n \in \mathbb{Q}_p$ . Тогда она сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} v_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

*Доказательство.* Заметим, что из условия

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} v_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

следует, что  $\exists n_0: v_p(\xi_m - \xi_{n_0}) \geq 0 \ \forall m \geq n_0$ . Но тогда, по свойству  $v_p(\alpha + \beta) \geq \min(v_p(\alpha), v_p(\beta))$ . мы имеем

$$v_p(\xi_m) = v_p((\xi_m - \xi_{n_0}) + \xi_{n_0}) \geq \min(0, v_p(\xi_{n_0}))$$

а отсюда следует ограниченность. Значит, по предыдущей теореме, из неё можно извлечь сходящуюся попоследовательность  $\{\xi_{n_i}\}$  с пределом  $\xi$ . Значит, по определению сходимости  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N \ v_p(\xi_m - \xi_n) \geq M$  и  $v_p(\xi_{n_i} - \xi) \geq M$  Тогда

$$v_p(\xi_m - \xi) \geq \min(v_p(\xi_m - \xi_{n_i}), v_p(\xi_{n_i} - \xi)) \geq M \text{ for all } m \geq N$$

а значит  $\lim_{m \rightarrow \infty} v_p(\xi_m - \xi) = \infty$ , то есть, последовательность  $\{\xi_m\}$  сходящаяся.  $\square$

В поле  $p$ -адических чисел этому признаку можно придать и более сильную форму. А именно, если для последовательности  $\{\xi_n\}$  выполнено

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} v_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

то мы имеем и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$$

Оказывается, что верно и обратное следствие. Действительно, если  $\forall n \geq N \ v_p(\xi_{n+1} - \xi_n) \geq M$ , то в силу того, что  $v_p(\alpha + \beta) \geq \min(v_p(\alpha), v_p(\beta))$  из равенства

$$\xi_m - \xi_n = \sum_{i=n}^{m-1} (\xi_{i+1} - \xi_i), \quad m > n \geq N$$

вытекает и оценка

$$v_p(\xi_m - \xi_n) \geq \min_{i \in \{n, \dots, m-1\}} v_p(\xi_{i+1} - \xi_i) \geq M \Rightarrow v_p(\xi_m - \xi_n) \rightarrow \infty$$

**Theorem 10.** Для сходимости последовательности  $p$ -адических чисел  $\{\xi_n\}$  необходимо и достаточно, чтоб  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$ .

Ясно, что благодаря теории пределов мы можем определить секвенциальную непрерывность (непрерывность по Гейне) для функций  $p$ -адического аргумента.

К тому же, ясны стандартные арифметические свойства непрерывных функций, из которых следует, например, что многочлен непрерывен.

**Definition 11.** Если последовательность частичных сумм  $s_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i$  ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n + \dots$$

с  $p$ -адическими членами сходится к  $p$ -адическому числу  $\alpha$ , то будем говорить, что ряд сходится и его сумма равна  $\alpha$ .

Из теоремы 10 можно легко получить критерий сходимости рядов из  $p$ -адических чисел.

**Theorem 11. (Критерий сходимости рядов с  $p$ -адическими членами)**

Для сходимости ряда  $\sum \alpha_n$  с  $p$ -адическими членами необходимо и достаточно, чтоб  $\|\alpha_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (или, что равносильно,  $v_p(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ).

*Доказательство.* Действительно, мы имеем цепочку

$$s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \text{ — сходится} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_{n+1} - s_n\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k - \sum_{k=0}^n \alpha_k \right\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_{n+1}\|_p = 0$$

□

Ясно, что как и в случае вещественного анализа, сходящиеся  $p$ -адические ряды можно складывать, умножать на константу. Также справедлива следующая теорема:

**Theorem 12.** При любой перестановке членов сходящегося  $p$ -адического ряда его сходимость не нарушается и сумма не меняется.

*Доказательство.* Упражнение в листочке.

□

Как мы знаем, в курсе вещественного (и комплексного) анализа это свойство характеризует абсолютно сходящиеся ряды. То есть, все сходящиеся  $p$ -адические ряды являются и абсолютно сходящимися, а значит, их можно и перемножать:

написать сюда произведение рядов

Теперь уже ясно, что если целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  определяется канонической последовательностью  $\{x_n\}$ , где

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_0 + a_1 p, \quad x_2 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \dots, \quad x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$$

то, так как мы доказали, что эта последовательность сходится к  $\alpha$ , а значит

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k p^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k, \quad 0 \leq a_i < p$$

Так как различные канонические последовательности определяют различные  $p$ -адические числа, такое представление единственно для каждого числа. Представление целых  $p$ -адических чисел рядами напоминает запись вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей, то есть

$$\overline{0, a_1 \dots a_n \dots} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{10}\right)^k, \quad 0 \leq a_i < 10$$

Рассмотрим теперь ряд

$$b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_np^n + \dots, \quad b_i \in \mathbb{Z}$$

то он будет сходящимся, так как  $v_p(b_np^n) \geq n$ , и его сумма будет равна некоторому  $\alpha$ .

Для того, что бы для этого  $\alpha$  получить каноническое представление, достаточно заменить все  $b_i$  на  $b_i \bmod p$ , относя неполное частное на каждом шаге к следующему члену.

Это замечание актуально для действий в  $\mathbb{Z}_p$ , так как при сложении, вычитании и перемножении рядов вида  $\sum a_k p^k$ ,  $0 \leq a_i < p$ , мы получаем ряды вида  $\sum b_k p^k$ ,  $b_k \in \mathbb{Z}$ . Отметим, что в этом представлении, действия с  $p$ -адическими числами полностью аналогичны действиям с вещественными числами в десятичной записи.

Из теоремы (ссылка) следует, что целое  $p$ -адическое число, представленное в виде ряда обратимо тогда и только тогда, когда  $a_0$ . Вместе с теоремой ([вставить ссылку](#)) это даёт следующую теорему:

**Theorem 13.** *Каждое отличное от нуля целое  $p$ -адическое число  $\xi$  однозначно записывается в виде*

$$\xi = p^m(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n + \dots)$$

где  $m = v_p(\xi)$ ,  $1 \leq a_0 \leq p-1$ ,  $0 \leq a_n \leq p-1 \quad \forall n \geq 1$ .

Заметим, что эта запись соответствует записи последовательности цифр, бесконечной влево, а именно

$$\alpha = \begin{cases} \dots a_{m+1}a_m \overbrace{00 \dots 0}^{m-1}_{(p)}, & m \geq 0 \\ \dots a_1a_0a_{-1} \dots a_{m(p)}, & m < 0 \end{cases}$$

### $p$ -АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, КАК ПРОЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ:

Разобранное нами построение кольца целых  $p$ -адических чисел соответствует более общей алгебраической конструкции. А именно, мы на пальцах разобрали конструкцию проективного предела обратного спектра топологических пространств, групп, колец (не важно чего, в общем).

### ПАРАГРАФ НА ДОРАБОТКЕ : (.

Так вот, из нашего построения ясно, что кольцо  $\mathbb{Z}_p$  является проективным пределом последовательности  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  с естественным отображением  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$  «взятие остатка».

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

## 2.5 Лемма Гензеля:

**Definition 12.** *Числовым полем называют конечное расширение поля  $\mathbb{Q}$ .*

**Example 4.** *Например,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbb{Q}(i)$  — числовые поля. Поле  $\mathbb{R}$  не является конечным расширением  $\mathbb{Q}$ , а значит, это не числовое поле.*

**Definition 13.** Элемент  $\alpha$  расширения поля  $\mathbb{Q}$  называется алгебраическим числом, если он является корнем ненулевого многочлена в  $\mathbb{Q}[T]$ .

**Example 5.** Например,  $\frac{1}{2}, \sqrt{2}, i$  — алгебраические числа. Числа  $e, \pi$  не являются алгебраическими (доказательства представили Эрмит в 1873г. и Линдеманн в 1882г.).

**Definition 14.** Элемент  $\alpha$  поля, являющегося расширением  $\mathbb{Q}$  называется алгебраическим целым, если он является корнем унитарного многочлена с целыми коэффициентами.

**Definition 15.** Все алгебраические целые элементы поля  $K$  образуют кольцо, которое принято называть кольцом целых поля  $K$  и обозначать  $\mathcal{O}_K$ .

**Example 6.**  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Z}_p$ .

**Definition 16.** Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  — полное неархимедово нормированное поле. Обозначим за

$$\mathbb{Z}_F = B_1(0) = \{x \in F \mid \|x\| \leq 1\}$$

— «кольцо целых» чисел поля  $F$ .

**Theorem 14. (Лемма Гензеля)** Пусть  $f(x) \in \mathbb{Z}_F[x]$ ,  $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_F$  и справедливо неравенство  $\|f(\alpha_0)\| < \|f'(\alpha_0)\|^2$  (тут  $f'$  — формальная производная многочлена  $f$ ). Тогда существует единственное  $\alpha \in \mathbb{Z}_F$ , такое, что  $f(\alpha) = 0$  и  $\|\alpha - \alpha_0\| < \|f'(\alpha_0)\|$ .

*Доказательство.* Положим  $c = \|f(\alpha_0)\|/\|f'(\alpha_0)\|^2 < 1$ . Рассмотрим рекуррентно заданную последовательность

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_{n+1})}, \quad n \geq 0$$

(«метод касательных Ньютона»).

Индукцией проверяется, что она обладает следующими свойствами:

1.  $\|\alpha_n - \alpha_0\| < c\|f'(0)\| < \|f'(\alpha_0)\|$ .
2.  $\|f'(\alpha_n)\| = \|f'(\alpha_0)\|$ .
3.  $\|f(\alpha_n)\| \leq c^{2^n}\|f(\alpha_0)\|^2$ .
4.  $\|\alpha_n - \alpha_0\| \leq c^{2^n}\|f(\alpha_0)\|$ .

А значит, можно взять  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ . Единственность следует из разложения многочлена по тейлору в точке  $\alpha$ .  $\square$

**Corollary 6. (Важное:)**

Пусть  $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ ,  $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_p$ ,  $f(\alpha_0) \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $f'(\alpha_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Тогда существует единственное  $\alpha \in \alpha_0 + p\mathbb{Z}_p$  такое, что  $f(\alpha) = 0$ .

Кроме того, есть еще НАРОДНАЯ формулировка леммы Гензеля:

**Theorem 15.** Пусть  $f$  — многочлен с целыми (или целыми  $p$ -адическими коэффициентами), а  $m$  и  $k$  — целые числа, причем  $0 \leq m \leq k$ . Тогда, если  $r$  — целое число, такое, что

$$f(r) \equiv 0 \pmod{p^k}, \quad f'(r) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

то существует такое целое  $s$ , что

$$f(s) \equiv 0 \pmod{p^{k+m}}, \quad r \equiv s \pmod{p^k}$$

и более того,  $s$  может быть выражено в явном виде, а именно,

$$s = r - f(r) \cdot a, \quad a = (f'(r))^{-1} \pmod{p^m}$$



## 2.6 Пополнение метрических пространств.

**Definition 17.** Пусть  $(X, d_X)$  — метрическое пространство,  $\mathcal{F}(X)$  — множество всех ограниченных функций из  $X$  в  $\mathbb{R}$ . Тогда введём расстояние  $d_\infty$  между функциями  $f, g \in \mathcal{F}(X)$ :

$$d_\infty(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in X\}$$

Заметим, что определение корректно, так как функции ограничены.

**Lemma 3.**  $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$  — метрическое пространство.

*Доказательство.* Проверим три аксиомы метрики:

1. Пусть  $f = g$ . Тогда  $|f(x) - g(x)| = 0$  для всякого  $x \in X$ , так что  $d_\infty(f, g) = 0$ . Если же наоборот  $d_\infty(f, g) = 0$ , то  $0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup = 0$ , а значит  $f(x) = g(x)$  для всех  $x \in X$ , что и означает  $f \equiv g$ .
2. Так как  $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ , то и  $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$ .
3. Рассмотрим три ограниченные функции  $f, g, h \in \mathcal{F}(X)$ , и покажем, что

$$d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) \geq d_\infty(f, h)$$

Мы знаем, что:

$$\forall x \in X : |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \geq |f(x) - h(x)|$$

в силу неравенства треугольника для стандартной метрики на  $\mathbb{R}$ . Для всякого  $\varepsilon > 0$  мы можем взять  $x_0$  такой, что  $|f(x_0) - h(x_0)| \geq \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon$ . Получаем, что

$$\begin{aligned} d_\infty(f, h) - \varepsilon &= \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon \leq |f(x_0) - h(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - h(x_0)| \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) \end{aligned}$$

а раз это верно для любого  $\varepsilon > 0$ , то искомое неравенство доказано. □

**Lemma 4.**  $\mathcal{F}(X)$  — полно.

*Доказательство.* Пусть  $f_n$  — фундаментальная последовательность функций. Тогда  $\forall x_0 \in X : \{f_n(x_0)\}$  — также фундаментальная последовательность, так как  $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|, x \in X\}$ . Следовательно,

$$\forall x_0 \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

и сходимость по всем точкам равномерна, так как не зависит от выбора точки  $x_0$ . Иными словами,

$$\exists f(x) : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

где  $f(x_0)$  определяется как предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ . Так что  $f(x)$  — функция, являющаяся пределом искомой последовательности функций. □

**Definition 18.** Пусть  $(X, d_X)$  — метрическое пространство,  $\mathcal{F}(X)$  — множество ограниченных функций из  $X$  в  $\mathbb{R}$ . Построим изометрическое вложение  $k : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  следующим образом:

1. Если  $X$  — ограничено, то определим  $k(x) = d_x$ , где

$$\forall y \in X : d_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} d_X(x, y)$$

Функция  $d_x$  ограничена, так как  $X$  ограничено. Заметим также, что

$$d_\infty(d_x, d_y) = \sup_z |d_x(z) - d_y(z)| = \sup_z (d_X(x, z) - d_X(z, y)) \leq d_X(x, y)$$

однако равенство достигается при  $z = y$ , так что  $d_\infty(d_x, d_y) = d_X(x, y)$ , а значит вложение изометрическое.

2. Пусть  $X$ , возможно, не ограничено. Тогда определим  $k(x) = d_x - d_{x_0}$  для некоторой фиксированной точки  $x_0 \in X$ , где

$$\forall y \in X : (k(x))(y) \stackrel{\text{def}}{=} d_x(y) - d_{x_0}(y) = d_X(x, y) - d_X(y, x_0)$$

что есть ограниченная функция, так как  $\forall y \in X : d_X(x, y) - d_X(y, x_0) \leq d_X(x, x_0)$ . Заметим, что это аналогичным образом будет изометрическим вложением:

$$\begin{aligned} d_\infty(d_x - d_{x_0}, d_y - d_{x_0}) &= \sup_z |d_x(z) - d_{x_0}(z) - d_y(z) + d_{x_0}(z)| = \\ &= \sup_z (d_X(x, z) - d_X(z, y)) \leq d_X(x, y) \end{aligned}$$

где равенство достигается при  $z = y$ .

Любое метрическое пространство  $(X, d_X)$  имеет пополнение  $(\bar{X}, d_{\bar{X}})$ , то есть такое метрическое пространство  $\bar{X}$ , что выполнено:

1.  $X \subseteq \bar{X}$
2.  $X$  — всюду плотно в  $\bar{X}$
3.  $d_{\bar{X}}|_X = d_X$ , то есть вложение из  $X$  в  $\bar{X}$  является изометрическим
4.  $(\bar{X}, d_{\bar{X}})$  — полно.

*Доказательство.* Возьмём изометрическое вложение Куратовского  $k : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ , и возьмём его замыкание в топологическом пространстве  $\mathcal{F}(X)$  с топологией, индуцированной метрикой  $d_\infty$  — назовём это замыкание  $\bar{X}$ . Заметим, что

1.  $X \subseteq \bar{X}$  естественным образом
2.  $X$  всюду плотно в  $\bar{X}$ , так как любое множество всюду плотно в своём замыкании
3. Вложение  $X$  в  $\bar{X}$  изометрическое, так как оно изометрическое и во всё пространство  $\mathcal{F}(x)$
4.  $\bar{X}$  полно как замкнутое подмножество полного пространства.

□

*Remark 11.* Пополнение метрического пространства **единственно** с точностью до изометрии.

*Remark 12.* Выражение  $X \subseteq \bar{X}$  тоже подразумевается с точностью до изометрии.

## 2.7 Пополнение нормированного поля.

Теперь мы умеем пополнять метрические пространства, но нам никто не гарантирует, что при пополнении поля по норме получится поле.

**Definition 19.** Пополнением нормированного поля  $(F_0, \|\cdot\|_0)$  называется нормированное поле  $(F, \|\cdot\|)$ , удовлетворяющее следующим свойствам

1. Существует вложение  $i : F_0 \hookrightarrow F$ , сохраняющее норму (изометрическое), то есть  $\|i(x)\| = \|x\|_0$ .
2.  $(F, \|\cdot\|)$  полно, как метрическое пространство.
3.  $i(F_0)$  всюду плотно в  $F$ , то есть,  $\forall x, \varepsilon > 0 \exists x_0 \in F_0 : \|x - i(x_0)\| < \varepsilon$ .

**Example 7.** Из курса анализа ясно, что  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  — пополнение  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ .

**Theorem 16.** Для любого нормированного поля существует пополнение.

*Доказательство.* Будем рассматривать случай нормы с неравенством треугольника.

Пусть  $\mathfrak{A}$  — множество всех последовательностей Коши  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  в пространстве  $(F_0, \|\cdot\|_0)$ .

На  $\mathfrak{A}$  можно естественным образом определить операции сложения и умножения (поточечно), а также ввести норму  $\|\cdot\|$ , как  $\|\{x_n\}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_0$ .

Это определение корректно, так как предел всегда существует в силу неравенства треугольника и того, что  $\{x_n\}$  — последовательность Коши

$$|\|x_n\|_0 - \|x_m\|_0| \leq \|x_n - x_m\|_0$$

Ясно, что остальные свойства нормы также выполняются.

Введём на  $\mathfrak{A}$  отношение эквивалентности  $\sim$ :

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\|_0 = 0$$

Нетрудно заметить, что это отношение эквивалентности «уважает» арифметические действия и норму, то есть

1.  $\{x_n\} \sim \{u_n\}, \{y_n\} \sim \{v_n\} \Rightarrow \{x_n + y_n\} \sim \{u_n + v_n\}, \{x_n y_n\} \sim \{u_n v_n\}$ .
2.  $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Rightarrow \|\{x_n\}\| = \|\{y_n\}\|$ .

В качестве поля  $F$  возьмем фактормножество  $\mathfrak{A}/\sim$ . Приведенные выше свойства естественно индуцируют арифметические операции и норму с  $A$  на  $F$ :

- $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x_n + y_n\}]$ .
- $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}]$ .
- $\|[\{x_n\}]\| = \|\{x_n\}\|$ .

Аксиомы кольца вполне очевидны, проверим существование обратного по умножению элемента. Если  $[\{x_n\}] \neq 0$ , то  $\lim \|x_n\|_0 > 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0 \ \|x_n\|_0 > \delta > 0$  для некоторого  $\delta$ .

Тогда в качестве  $[\{x_n\}]^{-1}$  возьмем класс  $[\{y_n\}]$ , где

$$y_n = \begin{cases} 0, & n < n_0 \\ \frac{1}{x_n}, & n \geq n_0 \end{cases}$$

Осталось проверить, что мы получили пополнение.

В качестве вложения возьмем  $i(x) = [(x, x, \dots)]$ . Ясно, что  $i(F_0)$  плотно в  $F$ , так как, если  $X = [\{x_n\}] \in F$ , то  $i(x_n) \rightarrow X$  в пространстве  $(F, \|\cdot\|)$ .

Теперь проверим полноту. Пусть  $X^{(n)} = [(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)] \in F$  — последовательность Коши. Возьмем такую последовательность  $k_n \in \mathbb{N}$ , что

$$\sup_{k, \ell \geq k_n} \|x_k^{(n)} - x_\ell^{(n)}\|_0 < \frac{1}{n}$$

Покажем, что в качестве предела можно взять  $X = [\{x_{k_n}^{(n)}\}]$ . Пусть  $N \geq k_n$ ,  $M \geq k_m$ ,  $K \geq \max\{k_n, k_m\}$ .

$$\|x_N^{(n)} - x_M^{(m)}\|_0 \leq \|x_N^{(n)} - x_K^{(n)}\|_0 + \|x_K^{(n)} - x_K^{(m)}\|_0 \leq \frac{1}{n} + \|x_K^{(n)} - x_K^{(m)}\|_0 + \frac{1}{m}$$

Устремим  $K$  к бесконечности и получим

$$\|x_N^{(n)} - x_M^{(m)}\|_0 \leq \|X^{(n)} - X^{(m)}\| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

Положим  $N = k_n$ ,  $M = k_m$  и получим, что  $x_{k_n}^{(n)}$  — последовательность Коши, а её класс эквивалентности — искомый предел.  $\square$

Далее отождествим  $i(F_0)$  с  $F_0$  и будем считать, что  $F \subseteq F$ .

В неархимедовом случае можно сказать даже несколько больше.

Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  — неархимедово нормированное поле. Если  $\{x_n\} \rightarrow x$ ,  $x \in F^*$ , то для достаточно больших  $n$   $\|x_n\| = \|x\|$ .

**Lemma 5.** Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  — пополнение неархимедова поля  $(F_0, \|\cdot\|_0)$ . Тогда

1.  $(F, \|\cdot\|)$  неархимедово.
2.  $\text{Im}(\|\cdot\|) = \text{Im}(\|\cdot\|_0)$ .

### 3. Введение в алгебраическую геометрию

#### 3.1 Квадратичные формы и квадрики

**Definition 20.** Пусть  $X$  — коммутативное кольцо и даны наборы коэффициентов  $\{a_i\} \in X$ ,  $\{b_i\} \in X$ ,  $c \in X$ . Если  $\exists j: 1 \leq j \leq n$ ,  $a_j \neq 0$ . Квадратичной функцией (*не формой*) будем называть функцию вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c$$

Квадрикой мы будем называть множество нулей такой функции