Летняя математическая школа ЛНМО

Поставы, 2022г.

Алгебраическая геометрия и теория чисел

Конспект по материалам лекций, прочитанных М.И. Магиным 11-му математическому классу

Лаборатория непрерывного математического образования

Алгебраическая геометрия и теория чисел

Содержание

1. Нормированные поля

1.1 Нормированное поле. Неархимедовы нормы.

Здесь и в дальнейшем будем полагать F полем, хотя многие вещи работают и для кольца (а для области целостности существует единственное продолжение на поле частных).

Определение 1. *Нормой (нормированием, абсолютным значением) на поле F называют отображение $\|\cdot\|\colon F \to \mathbb{R}_{>0}$, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x, y \in F\ \|xy\| = \|x\|\|y\|$.
3. $\exists C > 0\colon \forall x, y \in F\colon$
$$\|x+y\| \leq C \cdot \max(\|x\|, \|y\|).$$

Пара $(F, \|\cdot\|)$ называется нормированным полем.

Замечание 1. Тем, кто уже до этого видел определение нормы, это определение может показаться странным, так как обычно вместо третьего свойства требуют неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in F\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ясно, что третье свойство следует из неравенства треугольника с $C = 2$. Ниже мы покажем и обратную импликацию.

Ясно, что любая норма задаёт метрику $d(x,y) = \|x-y\|$, а любая метрика индуцирует топологию стандартным образом.

Пример 1. *Если $F \leq \mathbb{C}$, то подходит $|\cdot|$ (модуль комплексного числа). Если $F \leq \mathbb{R}$ или $F \leq \mathbb{Q}$, то подходит $|\cdot|$.*

Пример 2. *На любом поле можно ввести тривиальную норму (иногда соответствующую ей метрику называют метрикой лентяя):*
$$\|x\| = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x \neq 0 \end{cases}$$

Теорема 1. *Если в определении 1 постоянная C равна 2, то норма удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. Сначала отметим, что если $n, m \in \mathbb{N},\ n \leq 2^m$, то в случае произвольной постоянной C выполняется оценка:

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leq C^m \cdot \| \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$$

В самом деле, достаточно просто расписать дерево неравенств.
Отсюда следует неравенство

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \leq (2n)^{c_0} \max_{1 \leq k \leq n} (\|x_k\|), \quad c_0 = \log_2 C$$

В самом деле, $(2n)^{\log_2 C} = C \cdot n^{\log_2 C}$. Это также даёт удобную оценку: $\|n\| \leq (2n)^{c_0}$.
Теперь заметим, что в нашем случае $c_0 = \log_2 C = \log_2 2 = 1$, а значит, мы можем провести вот такую оценку:

$$\|x+y\|^n = \|(x+y)^n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left\| \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left(2\binom{n}{k} \|x\|^k \|y\|^{n-k} \right) \leq$$
$$\leq 4(n+1)(\|x\| + \|y\|)^n$$

Преобразуем это неравенство

$$\left(\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|}\right)^n \leq 4(n+1) \Leftrightarrow \frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} \leq 4^{\frac{1}{n}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем:

$$\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} \leq 1 \Leftrightarrow \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

□

Замечание 2. Пример $F = \mathbb{C}$ с нормой $\|\cdot\| = |\cdot|^\alpha,\ \alpha > 1$ показывает, что константу $C = 2$ нельзя улучшить.

Следствие 1. *Норма непрерывна.*

Определение 2. *Нормы, с постойнной $C = 1$ в определении 1 называют неархимедовыми. Нормы, не являющиеся неархимедовыми, называют архимедовыми.*

Пример 3. *Тривиальная норма на любом поле F является неархимедовой.*

Определение 3. *Ясно, что любое $x \in \mathbb{Q}$ представимо в виде $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots\, p$, $b \not\vdots\, p$, $\gcd(a,b) = 1$, а $n \in \mathbb{Z}$. В таком случае число n называют p-адическим показателем числа x и обозначают $\upsilon_p(x)$.*

Определение 4. ***(Самое важное)***
Пусть p — простое число. Тогда норму

$$\|x\|_p = \begin{cases} 0, x = 0 \\ p^{-\upsilon_p(x)}, x \neq 0 \end{cases}$$

на поле $\mathbb{Q}$ называют p-адической нормой.

Замечание 3. Ясно, что подходит $r^{-\upsilon_p(x)}$, где $r > 1$, но p брать удобно, так как для $x \in \mathbb{Q}^*$ справедлива формула произведения

$$1 = \prod_p |x| \cdot \|x\|_p$$

Лемма 1. *Если норма неархимедова, то для $x, y\colon \|x\| \neq \|y\|$ выполняется $\|x+y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.*

Следствие 2. *Рассмотрим $(F, \|\cdot\|)$, где норма $\|\cdot\|$ неархимедова. Тогда, если $b \in B_r(a)$, то $B_r(a) = B_r(b)$.*

Следствие 3. *(Забавное)*
Если на поле F введена неархимедова норма F, то $\forall x, y, z \in F$ по крайней мере два числа из $\|x-y\|,\ \|x-z\|,\ \|y-z\|$ равны.
Иными словами, в метрическом пространстве (F, d) $(d(x,y) = \|x-y\|)$ все треугольники равнобедренные.

2. p-адические числа

2.1 Кольцо целых p-адических чисел.

Прежде чем давать какие-либо определения, рассмотрим следующий мотивирующий пример.
Рассмотрим сравнение $x^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Если $n = 1$, то ясно, что

$$x_0 \equiv \pm 3 \pmod 7$$

Теперь рассмотрим $n = 2$. $x^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod 7$, а значит, решения сравнения с $n = 2$ надо искать в виде $x_0 + 7t_1$.
Займемся поиском решений вида $x_1 = 3 + 7t_1$. Подставим:

$$(3+7t_1)^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Leftrightarrow 9+6\cdot 7t_1 + 7^2t_1^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow 1+6t_1 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow t_1 \equiv 1 \pmod 7$$

Отсюда имеем решение $x_1 \equiv 3 + 7 \cdot 1 \pmod{7^2}$.
При $n = 3$ мы получим $x_2 = x_1 + 7^2t_2$, и, подставляя

$$(3 + 7 + 7^2t_2)^2 \equiv 2 \pmod{7^3},$$

мы найдём $t_2 \equiv 2 \pmod 7$, а значит,

$$x_2 \equiv 3 + 7 \cdot 1 + 7^2 \cdot 2 \pmod{7^3}$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ со свойствами

$$x_0 \equiv 3 \pmod 7, \quad x_n \equiv x_{n-1} \pmod{7^n}, \quad x_n^2 \equiv \pmod{7^{n+1}}$$

Процесс построения этой последовательности может напонмить внимательному читателю процесс вычисления $\sqrt{2}$ при помощи приближения рациональными числами. Там мы тоже строим последовательность рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, квадраты которых становятся сколь угодно близки к 2, например, $|r_n^2 - 2| < 1/10^n$.
Если мы зафиксируем простое число p, будем считать два целых числа близкими, если их разность делится на достаточно большую степень p (то есть, близкими в смысле p-адической метрики):

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = p^{-\upsilon_p(x-y)}$$

В конкретном примере выше,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \forall n \geq N\ d_7(x_n^2, 2) < \varepsilon$$

Как мы помним, задание последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$ определяет вещественное число $\sqrt{2}$. Проводя аналогию, здесь мы также можем предположить, что последовательность $\{x_n\}$ определяет некоторое число α совершенно новой природы.
Заметим также, что если у нас есть такая последовательность рациональных чисел $\{r'_n\}$, что $\forall \varepsilon > 0\ N \colon \forall n > N\ |r_n - r'_n| < \varepsilon$, то её пределом также будет $\sqrt{2}$ (и в этом смысле определение корректно).
Соответсвенно, здесь нам также будет естественно предположить, что последовательность $\{x'_n\}$, для которой $x_n \equiv x'_n \pmod{7^{n+1}}$, определяет то же самое число α.

Замечание 4. В общем, во всей этой аналогии мы просто заменили метрику на p-адическую.

Определение 5. *Пусть p — некоторое простое число. Последовательность целых чисел $\{x_n\}$, обладающих свойством*

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}\ \forall n \geq 1$$

определяет новый объект, называемый p-адическим числом. Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ определяют одно и то же целое p-адическое число, когда $x_n \equiv x'_n \pmod{p^{n+1}}\ \forall n \geq 0$.
То есть, целые p-адические числа — предел по p-адическое норме целых.
Множество всех целых p-адических чисел мы будем обозначать через $\mathbb{Z}_p$.

Обычные целые числа (не p-адические) будем с этого момента называть целыми рациональными.

Заметим, что каждому целому рациональному числу x можно сопоставить целое p-адическое число, определяемое последовательностью $\{x, x, x, \ldots\}$. Такое целое p-адическое число мы будем обозачать той же буквой x. Таким образом, мы получили естественное вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ (инективность вполне очевидна).

Замечание 5. **Канонический способ задания p-адического числа.**
Пусть целое p-адическое число задается последовательностью $\{x_n\}$. Обозначим наименьшее неотрицательное число, сравнимое с x_n по модулю p^{n+1} за $\overline{x_n}$.

$$x_n \equiv \overline{x_n} \pmod{p^{n+1}},\ 0 \le \overline{x_n} < p^{n+1}$$

Ясно, что

$$\overline{x_n} \equiv x_n \equiv x_{n-1} \equiv \overline{x_{n-1}} \pmod{p^n}$$

То есть, последовательность $\{\overline{x_n}\}$ определяют то же целое p-адическое число, что и $\{x_n\}$. Заметим, что если две последовательности $\{\overline{x_n}\}$ и $\overline{y_n}$ определяют одно и то же целое p-адическое число, то в силу

$$\overline{x_n} \equiv \overline{y_n} \pmod{p^{n+1}},\ 0 \le \overline{x_n} < p^{n+1},\ 0 \le \overline{y_n} < p^{n+1}$$

мы имеем $\overline{x_n} = \overline{y_n}$, то есть, такое представление единственно. Его мы и будем называть каноническим представлением.

Заметим, что $\overline{x^n} \equiv \overline{x_{n-1}} \pmod{p^n}$, а так как $0 \le \overline{x_n} < p^{n+1}$, вся каноническая последовательность имеет вид

$$\{a_0,\ a_0 + a_1 p,\ a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \ldots\}, \quad 0 \le a_i < p$$

С другой стороны, ясно, что каждая последовательность такого вида задаёт некоторое целое p-адическое число.

Ясно, что операции сложения и умножения на p-адических числах определяются поточечными операциями с соответствующими последовательностями.
Все свойства операций очевидны, значит, $\mathbb{Z}_p$ — коммутативное кольцо. Поймём что-нибудь про множество обратимых элементов кольца.

Теорема 2. *Целое p-адическое число α, определяемое последовательностью $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ обратимо тогда и только тогда, когда $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

Доказательство. Путь $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$. Тогда существует такое целое p-адическое число β, что $\alpha\beta = 1$.
Пусть β определяется последовательностью $\{y_n\}$. Тогда

$$x_n y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$$

В частности, $x_0 y_0 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$. И обратно, так как $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$ мы имеем

$$x_n \equiv x_{n-1} \equiv \ldots \equiv x_0 \pmod{p} \Rightarrow x_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Значит, так как p — простое, $\forall n\ \exists y_n \colon x_n y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$.

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n},\ x_n y_n \equiv x_{n-1} y_{n-1} \pmod{p^n} \Rightarrow y_n \equiv y_{n-1} \pmod{p^n}$$

а значит, $\{y_n\}$ определяет некоторое целое p-адическое число β.
Таким образом, $\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}_p^*$. □

Теорема 3. *Любое отличное от нуля целое p-адическое число α можно единственным образом представить в виде*
$$\alpha = p^m \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*, \ m \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Если $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, то равенство справедливо при $m = 0$.
Пусть теперь $\alpha \notin \mathbb{Z}_p^*$ и $\{x_n\} \to \alpha$. Тогда, по предыдущей теореме $x_0 \equiv 0 \pmod p$. Так как $\alpha \neq 0$, $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N \ x_n \not\equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$. Пусть m — наимеьший индекс, для которого
$$x_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}}$$

Заметим, что в таком случае $\forall s \geq 0$
$$x_{m+s} \equiv x_{m-1} \equiv 0 \pmod{p^m} \Rightarrow y_s = \frac{x_{m+s}}{p^m} \in \mathbb{Z}$$
$$p^m y_s - p^m y_{s-1} = x_{m+s} - x_{m+s-1} \equiv 0 \pmod{p^{m+s}} \Rightarrow y_s \equiv y_{s-1} \pmod{p^s}$$
То есть, последовательность $\{y_s\}$ тоже определяет некоторое p-адическое число $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p$. Заметим, что $y_0 = x_m/p^m \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$.
Из сравнения
$$p^m y_s = x_{m+s} \equiv x_s \pmod{p^{s+1}}$$
следует, что $\alpha = p^m \cdot \varepsilon$. Покажем теперь единственность. Предположим, что $\alpha = p^k \xi, \ k \geq 0, \ \xi \in \mathbb{Z}_p^*$. Пусть $\{z_s\} \to \xi$.
$$p^m y_s \equiv p^k z_s \pmod{p^{s+1}} \ \forall s \geq 0$$
Так как ε и ξ — обратимые элементы кольца, по предыдущей теореме $y_s \not\equiv 0 \pmod p$, $z_s \not\equiv 0 \pmod p$. Подставим в предыдущее сравнения $s = m$:
$$p^m y_m \equiv p^k z_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}} \Rightarrow k \leq m$$
Так как мы можем проделать то же самое абсолютно симметрично для k, мы также имеем $k \geq m$, а значит $k = m$. То есть, мы получили, что $y_{m+s} \equiv z_{m+s} \pmod{p^{s+1}}$, а так как $y_{s+1} \equiv y_s \pmod{p^{s+1}}$, $z_{s+1} \equiv z_s \pmod{p^{s+1}}$, мы имеем $z_s \equiv y_s \pmod{p^{s+1}} \ \forall s \geq 0 \Rightarrow \varepsilon = \xi$. ☐

Следствие 4. $\mathbb{Z}_p$ *— область целостности.*

Доказательство. Упражнение в листочке. ☐

Теперь ясно, что число m в представлении $\alpha = p^m \varepsilon$ — p-адический показатель α ($\upsilon_p(\alpha)$).
В терминах p-адического показателя легко вырадать свойства делимости p-адических чисел.

Следствие 5. *Целое p-адическое число α делится на целое p-адическое число β тогда и только тогда, когда $\upsilon_p(\alpha) \geq \upsilon_p(\beta)$.*

Резюмируя всё это, мы получили, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ всего один (с точностью до ассоциированности) простой элемент — число p, а все остальные (отличные от нуля) — его степени, домноженные на обратимые.

2.2 Локализация и поле частных кольца.

Вообще, эта тема совершенно никак не относится к программе курса, но, прочитать всё равно надо.
Идея: уметь обращать набор элементов кольца *универсальным* образом.

Замечание 6. Отметим, что обратимый элемент не может являться делителем нуля, поэтому, если мы хотим обращать делители нуля, все элементы, которые в произведении с ним дают 0 должны перейти в 0. Кроме того, если два элемента обратимы, то их произведение обратимо. Кроме того, если мы добавим в множество, которое хотим обращать единицу, то ничего не изменится, так как умножение на единицу ничего не меняет.

Таким образом, будем заниматься обращением множеств, замкнуты относительно умножения и содержат единицу (будем называть такие множества мультипликативными).

Тут можно рассказать, с чего бы это называется локализацией, но как-то лень, если время останется, расскажу.

Определение 6. *Пусть S — мультипликативное подмножество кольца R. Локализацией кольца R в S называется кольцо $S^{-1}R$ вместе с локализационным гомоморфизмом $\lambda_s\colon R \to S^{-1}R$, удовлетворяющее свойствам*

1. *$\forall s \in S$ $\lambda_s(s)$ обратим в $S^{-1}R$.*
2. *Для любого гомоморфизма $\varphi\colon R \to A$, при котором $\varphi(s) \in A^*$ для всех S существует единственный гомоморфизм $\psi\colon S^{-1}R \to A$ такой, что $\psi \circ \lambda_s = \varphi$. Иными словами, коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\lambda_s"'] & & A \\ & S^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Как и всегда, определение объекта через универсальное свойство ничего не говорит о существовании объекта, поэтому сейчас мы будем больно и мучительно строить локализацию.

Построение локализации:

Определим отношение $\sim$ на множестве $R \times S$ по правилу

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff ss_2r_1 = ss_1r_2$$

Замечание 7. Здесь мы домножаем на s как раз за тем, чтоб делители нуля ушли в ноль.

Утверждение 1. $\sim$ — *отношение эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность очевидны.
Самое неприятное — транзитивность.
Пусть $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ и $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$, то есть

$$sr_1s_2 = sr_2s_1, \quad s'r_2s_3 = s'r_3s_2, \ s, s' \in S$$

Домножим первое равенство $s's_3$, а второе ss_1, получим

$$sr_1s_2 = sr_2s_1 \to s's_3sr_1s_2 = s's_3sr_2s_1, \qquad s'r_2s_3 = s'r_3s_2 \to ss_1s'r_2s_3 = ss_1s'r_3s_2$$

Остается заметить, что

$$ss's_2 \in S \Rightarrow (r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$$

то есть, транзитивность доказана. □

Теперь, положим $S^{-1}R = R \times S/\sim$. Класс эквивалентности, содержащий представитель (r, s) будем обозначать $\frac{r}{s}$.
Определим локализационный гомоморфизм $\lambda_s \colon R \to S^{-1}R$ формулой $\lambda_S(r) = \frac{r}{1}$.

Теперь, научимся складывать дроби.

Теорема 4. *Пусть S — мультипликативное подмножество кольца R. Определим на $S^{-1}R$ операции следующим образом*

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_2 s_2}, \quad \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{s_1 r_2 + s_2 r_1}{s_1 s_2}$$

Тогда $S^{-1}R$ — локализация R в мультипликативном подмножестве S с локализицонном гомоморфизмом λ_s (как написано выше).

Доказательство. Докажем сначала, что наше определение сложения и умножения не зависит от выбора представителя.
Пусть выплняются равенства

$$\frac{r_1'}{s_1'} = \frac{r_1}{s_1} \leftrightarrow s r_1 s_1' = s r_1' s_1, \quad \frac{r_2'}{s_2'} = \frac{r_2}{s_2} \leftrightarrow s' r_2 s_2' = s' r_2' s_2$$

Перемножим последние равенства

$$s s' r_1 s_1' r_2 s_2' = s s' r_1' s_1 r_2' s_2$$

Отсюда имеем

$$\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} = \frac{r_1' r_2'}{s_1' s_2'}$$

Далее, будет некоторая боль, а именно, надо доказать

$$\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} = \frac{r_1' s_2' + r_2' s_1'}{s_1' s_2'}$$

Если Вы немного помедитируете на формулы ниже, станет понятно, почему это так:

$$s s'(r_1 s_2 + r_2 s_1) s_1' s_2' = s s'(e_1 s_2 s_1' s_2' + r_2 s_1 s_1' s_2') = s s'(r_1' s_2 s_1 s_2' + r_2' s_1 s_2' s_2) = s s'(r_1' s_2' + r_2' s_1') s_1 s_2$$

Вообще, честно говоря, также нужно доказывать ассоциативность сложения, коммутативность и дистрибутивность. Давайте непосредственно провриm ассоциативность сложения

$$\left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right) + \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} + \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + r_2 s_1 s_3 + r_3 s_1 s_2}{s_1 s_2 s_3}$$

$$\frac{r_1}{s_1} + \left(\frac{r_2}{s_2} + \frac{r_3}{s_3}\right) = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2 s_3 + r_3 s_2}{s_2 s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + r_2 s_3 s_1 + r_3 s_2 s_1}{s_1 s_2 s_3}$$

Нейтральным элементом по сложению будет $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$, обратным по сложению к $\frac{r}{s}$ — $-\frac{r}{s}$. Нейтральным элементом по умножению —$\frac{1}{1} = \frac{s}{s}$. Проверим свочтва локализации:

$$\lambda_s(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1$$

то есть, первое свойство выполнено.

Пусть $\varphi \colon R \to A$ — такой гомоморфизм колец, что $\varphi(s) \in A^* \ \forall s \in S$. Определим отображение $\psi \colon S^{-1}R \to A$ равенством $\psi(\frac{r}{s}) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$.

Если $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$, то по определению

$$\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow r's = rs',\ s'' \in S \Rightarrow \varphi(s'')\varphi(r')\varphi(s) = \varphi(s'')\varphi(r)\varphi(s')$$

Домножим на $\varphi(s'')^{-1}\varphi(s')^{-1}\varphi(s')^{-1}$, получим

$$\varphi(r')\varphi(s')^{-1} = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$$

а значит, ψ определён корректно. Так как $\varphi(1) = 1$, имеем $\varphi = \psi \circ \lambda_S$. Ясно, что ψ — гомоморфизм.

Равенство $\varphi = \psi \circ \lambda_S$ однозначно задаёт $\psi(\frac{r}{1}) = \varphi(r)$. Так как ψ должен быть гомоморфизмом,

$$\varphi(r) = \psi(\frac{r}{1}) = \psi(\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{1}) = \psi(\frac{r}{s}) \cdot \varphi(s)$$

Так как по условию $\varphi(s) \in A^*$, имеем $\psi(\frac{r}{s}) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$, что завершает доказательство.

□

Примеры локализации:

1. Для $s \in R$ положим $\langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Локализация $\langle s \rangle^{-1}R$ обозначается через R_s и называется главной локализацией в элементе s (по аналогии с главным идеалом).
2. Если P — простой идеал кольца R, то $R \setminus P$ является мультипликативным подмножеством. В этом случае локализация $R_P = (R \setminus P)^{-1}R$ называется локализацией R в простом идеале P. R_P является локальным кольцом (т.е. кольцом с единственным максимальным идеалом).
3. S — множество всех элементов R, не являющийся делителями нуля. Тогда $S^{-1}R$ называется полным кольцом частных кольца R. Это максимальная локализация, для которой гомоморфизм локализации инъективен.

Если R — область целостности, то $\{0\}$ — простой идеал. Локализация в этом идеале, очевидно, будет полем, которое называется полем частных кольца R.

Иными словами, поле частных — это полное кольцо частных области целостности. Локализационный гомоморфизм — это универсальное вложение в следующем смысле:

Лемма 2. *Пусть R — область целостности, а $S = R\{0\}$. Тогда $F = S^{-1}R$ является полем, а гомоморфизм локализации $\lambda_S \colon R \to F$ инъективен, а λ_S удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого поля K и мономорфизма $R \to K$ существует единственный мономорфизм $\psi \colon F \to K$, что $\varphi = \psi \circ \lambda_s$.*

2.3 Поле p-адических чисел, как поле частных кольца $\mathbb{Z}_p$.

Как мы уже выяснили, кольцо $\mathbb{Z}_p$ — область целостности, его можно вложить в поле частных, используя конструкцию локализации.
В нашем случае это сводится к рассмотрению дробей α/p^k, где $\alpha \in \mathbb{Z}_p,\ k \geq 0$.

Определение 7. *Дробь вида α/p^k, где $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, а $k \geq 0$ называется дробным p-адмическим числом или просто p-адическим числом.*

Замечание 8. Две дроби α/p^k и β/p^m определяют одно и то же p-адическое число, если $\alpha p^m = \beta p^k$.

Определение 8. *Полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ называется поле частных кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$.*

Теорема 5. *Всякое p-адическое число $\xi \neq 0$ единственным образом представляется в виде*

$$\xi = p^m \cdot \varepsilon, \quad m \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$$

Доказательство. Пусть $\xi = \alpha/p^k,\ \alpha \in \mathbb{Z}_p$. По теореме 3 α можно представить в виде $p^\ell \varepsilon,\ \ell \geq 0, \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$. Тогда $\xi = p^m \varepsilon, m = \ell - k$.
Единственность вытекает из единственности представления для 3. □

2.4 Сходимость в поле p-адических чисел

Мы уже много раз говорили об аналогии между p-адическими числами и вещественными. В случае вещественных, они определяются последовательностями рациональных и являются пределами этих последоватлеьностей.

Неформально мы уже обсуждали, почему это так в случае p-адических чисел, давайте теперь поймем, почему это так формально.

Теперь, после того как мы доопределили p-адический показатель на $\mathbb{Q}_p$, мы можем вводить на $\mathbb{Q}_p$ (заметьте, уже не на $\mathbb{Q}$) знакомое нам p-адическое нормирование (и, соответственно, p-адическую метрику).

Определение 9. *Последовательность p-адических чисел $\{\xi_n\}$ называется сходящейся к p-адическому числу ξ если*

$$\lim_{n\to\infty} \upsilon_p(\xi_n - \xi) = \infty$$

Замечание 9. Ясно, что эквивалентно сходимость можно определять, как

$$\lim_{n\to\infty} \{\xi_n\} = \xi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$$

то есть, как и обычно, начиная с некоторого довольно большого номера, p-адические числа становятся сколь угодно близки к пределу.

Рассмотрим сначала для удобства некоторые свойства p-адического показателя:

1. $\upsilon_p(\alpha\beta) = \upsilon_p(\alpha) + \upsilon_p(\beta)$.
2. $\upsilon_p(\alpha+\beta) \geq \min(\upsilon_p(\alpha), \upsilon_p(\beta))$.
3. $\upsilon_p(\alpha+\beta) = \min(\upsilon_p(\alpha), \upsilon_p(\beta)),\ \alpha \neq \beta$.

Для поля $\mathbb{Q}_p$ справедливы все стандартные свойства пределов. Докажем, например, что при $\{\xi_n\} \to \xi,\ \xi \in \mathbb{Z}_p^*$ выполняется $\{1/\xi_n\} \to 1/\xi_n$.

Сначала отметим, что, начиная с некоторого места $\upsilon_p(\xi_n - \xi) > \upsilon_p(\xi)$, откуда $\upsilon_p(\xi_n) = \min(\upsilon_p(\xi_n - \xi), \upsilon_p(\xi)) = \upsilon_p(\xi) \ \Rightarrow \upsilon_p(\xi_n) \neq \infty \Rightarrow \xi_n \neq 0$, то есть, на него в самом деле можно делить.

Далее мы имеем

$$\upsilon_p\left(\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{\xi}\right) = \upsilon_p(\xi - \xi_n) - \upsilon_p(\xi_n) - \upsilon_p(\xi) = \upsilon_p(\xi_n - \xi) - 2\upsilon_p(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Теперь, для доказательства факта, который мы хотели формализовать, нам нужно понять, как вводятся сравнения на кольце целых p-адических чисел. Сравнения в кольце целых p-адических чисел определяются также, как и в кольце целых чисел, то есть $\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma} \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \vdots \gamma$.

Если $\gamma = p^n \varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$, то всякое сравнение по модулю γ равносильно сравнению по модулю p_n, а значит, достаточно рассматривать только такие (в этом случае).

Теорема 6. *Всякое целое p-адическое число сравнимо с целым рациональным числом по модулю p^n. Два целых рациональных числа тогда и только тогда сравнимы по модулю p^n в кольце $\mathbb{Z}_p^*$, когда они сравнимы по этому модулю в кольце $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что если α — целое p-адическое число, определяемое последовательностью $\{x_n\}$, то

$$\alpha \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$$

Как целое p-адическое число, x_n определяется последовательностью $\{x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots\}$. Тогда последовательность, определяющая целое p-адическое число $\alpha - x_n$ выглядит следующим образом

$$\{x_0 - x_{n-1},\ x_1 - x_{n-1}, \ldots, 0, x_n - x_{n-1}, \ldots\}$$

Из того, что всякое целое p-адическое число α представимо в виде

$$\alpha = p^k \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$$

следует, что целое p-адическое число α, определяемое последовательностью $\{y_n\}$ делится на p^ℓ тогда и только тогда, когда $x_n \equiv 0 \pmod{p^{n+1}} \forall n = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда, сравнение $\alpha \equiv x_n \pmod{p^n}$ равносильно сравнениям

$$x_k - x_{n-1} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

а эти сравнения выполены по определению p-адических чисел.
Докажем теперь, что для двух целых рациональных p-адических чисел x и y сравнимость по модулю p^n в кольце $\mathbb{Z}_p$ равносильна сравнимости по модулю p^n в кольце $\mathbb{Z}$.
Положим $x - y = p^m a,\ a \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда, в кольце $\mathbb{Z}$ сравнение $x \equiv y \pmod{p^n}$ равносильно условию $n \leq m$. С другой стороны, так как $a \not\equiv - \pmod{p}$, соответсвующее ему целое p-адическое число обратимо в $\mathbb{Z}_p^*$, а значит, для числа $x - y$ есть представление в виде $p^m\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, а значит, $\upsilon_p(x-y) = m$, то есть, $n \leq \upsilon_p(x-y)$, а в $\mathbb{Z}_p$ это равносильно сравнению $x \equiv y \pmod{p^n}$, так как $\upsilon_p(p^n) = n$. □

Теорема 7. *Если целое p-адическое число α определяется последовательностью $\{x_n\}$, то эта последовательность сходится к α. Произвольное p-адическое число ξ является пределом последовательности рациональных чисел.*

Доказательство. Как мы понимаем из предыдущей теоремы, если $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ определяется последовательностью $\{x_n\}$, то $\alpha \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$, а это по определению влечёт $\upsilon_p(x_n - \alpha) \geq n+1$. Значит, $\upsilon_p(x_n - \alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, а это по определению означает, что $\{x_n\}$ стремится к α.

Теперь рассмотрим дробное p-адическое число $\xi = \alpha/p^k$.

$$\upsilon_p\left(\frac{x_n}{p^k} - \xi)\right) = \upsilon_p\left(\frac{x_n - \alpha}{p^k}\right) = \upsilon_p(x_n - \alpha) - k \xrightarrow[n\to]{} \infty$$

а значит, $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \{y_n\}$, где $\{y_n\} = \{x_n/p^k\}$.

□

Определение 10. *Последовательность p-адических чисел $\{\xi_n\}$ называется ограниченной, если все значения $\|\xi\|_n$ ограничены сверху.*

Теорема 8. ***(Лемма Больцано-Вейерштрасса для поля p-адических чисел)***
Из всякой ограниченной последовательности p-адических чисел можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Несложное, но не успеваю рассказать в курсе. Его можно найти в `вставить ссылку на книжку Шафаревича в списке литературы.` □

Оказывается (хоть это и не особенно неожиданно), для p-адических чисел справедлив критерий Коши, то есть

Теорема 9. ***(Критерий Коши)*** *Пусть нам дана последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \mathbb{Q}_p$. Тогда она сходится тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n,m\to\infty} \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

Доказательство. Заметим, что из условия

$$\lim_{n,m\to\infty} \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

следует, что $\exists n_0\colon \upsilon_p(\xi_m - \xi_{n_0}) \geq 0 \ \forall m \geq n_0$. Но тогда, по свойству $\upsilon_p(\alpha+\beta) \geq \min(\upsilon_p(\alpha), \upsilon_p(\beta))$. мы имеем

$$\upsilon_p(\xi_m) = \upsilon_p((\xi_m - \xi_{m_0}) + \xi_{n_0}) \geq \min(0, \upsilon_p(\xi_{n_0}))$$

а отсюда следует ограниченность. Значит, по предыдущей теореме, из неё можно извлечь сходящуюся поподследовательность $\{\xi_{n_i}\}$ с пределом ξ. Значит, по определению сходимости $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n, m \geq N \ \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) \geq M$ и $\upsilon_p(\xi_{n_i} - \xi) \geq M$ Тогда

$$\upsilon_p(\xi_m - \xi) \geq \min(\upsilon_p(\xi_m - \xi_{n_i}), \upsilon_p(\xi_{n_i} - \xi)) \geq M \ forall m \geq N$$

а значит $\lim\limits_{m\to\infty} \upsilon_p(\xi_m - \xi) = \infty$, то есть, последователньость $\{\xi_m\}$ сходящаяся. □

В поле p-адических чисел этому признаку можно придать и более сильную форму. А именно, если для последоватльности $\{\xi_n\}$ выполенено

$$\lim_{m,n\to\infty} \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

то мы имеем и

$$\lim_{n\to\infty} \upsilon_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$$

Оказывается, что верно и обратное следствие. Действительно, если $\forall n \geq N \ \upsilon_p(\xi_{n+1} - \xi_n) \geq M$, то в силу того, что $\upsilon_p(\alpha+\beta) \geq \min(\upsilon_p(\alpha), \upsilon_p(\beta))$ из равенства

$$\xi_m - \xi_n = \sum_{i-n}^{m-1} (\xi_{i+1} - \xi_i), \quad m > n \geq N$$

вытекает и оценка

$$\upsilon_p(\xi_m - \xi_n) \geq \min_{i\in\{n,\ldots,m-1\}} \upsilon_p(\xi_{i+1} - \xi_i) \geq M \Rightarrow \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) \to \infty$$

Теорема 10. *Для сходимости последовательности p-адических чисел $\{\xi_n\}$ необходимо и достаточно, чтоб $\lim\limits_{n\to\infty} \upsilon_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$.*

Ясно, что благодаря теории пределов мы можем определить секвенциальную непрерывность (непрерывность по Гейне) для функций p-адического аргумента.
К тому же, ясны стандартные арифметические свойства непрерывных функций, из которых следует, например, что многочлен непрерывен.

Определение 11. *Если последовательность частичных сумм* $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i$ *ряда*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

с p-адическими членами сходится к p-адическому числу α, то будем говорить, что ряд сходится и его сумма равна α.

Из теоремы 10 можно легко получить критерий сходимости рядов из p-адических чисел.

Теорема 11. ***(Критерий сходимости рядов с*** p***-адическими членами)***
Для сходимости ряда $\sum \alpha_n$ с p-адическими членами необходимо и достаточно, чтоб $\|\alpha_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (или, что равносильно, $\upsilon_p(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$).

Доказательство. Действительно, мы имеем цепочку

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \text{ — сходится} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|s_{n+1} - s_n\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \right\|_p = \lim_{n\to\infty} \|\alpha_{n+1}\|_p = 0$$

□

Ясно, что как и в случае вещественного анализа, сходящиеся p-адические ряды можно складывать, умножать на константу. Также справедлива следующая теорема:

Теорема 12. *При любой перестановке членов сходящегося p-адического ряда его сходимость не нарушается и сумма не меняется.*

Доказательство. Упражнение в листочке. □

Как мы знаем, в курсе вещественного (и комплексного) анализа это свойство характеризует абсолютно сходящиеся ряды. То есть, все сходящиеся p-адические ряды являются и абсолютно сходящимися, а значит, их можно и перемножать:

написать сюда произведение рядов

Теперь уже ясно, что если целое p-адическое число α определяется канонической последовательностью $\{x_n\}$, где

$$x_0 = a_0,\ x_1 = a_0 + a_1 p,\ x_2 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \ldots,\ x_n = \sum_{k=1}^{n} a_n p^n$$

то, так как мы доказали, что эта последовательность сходится к α, а значит

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k p^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k,\ 0 \le a_i < p$$

Так как различные канонические последоватлеьности определяют различные p-адические числа, такое представление единственно для каждого числа. Представление целых p-адических чисел рядами напоминает запись вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей, то есть

$$\overline{0, a_1 \ldots a_n \ldots} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{10}\right)^k,\ 0 \le a_i < 10$$

Рассмотрим теперь ряд
$$b_0 + b_1p + b_2p^2 + \ldots + b_np^n + \ldots,\ b_0 \in \mathbb{Z}$$
то он будет сходящимся, так как $v_p(b_np^n) \geq n$, и его сумма будет равна некоторому α.

Для того, что бы для этого α получить каноническое представление, достаточно заменить все b_i на $b_i \mod p$, относя неполное частное на каждом шаге к следующему члену.

Это замечание актуально для действий в $\mathbb{Z}_p$, так как при сложении, вычитании и перемножении рядов вида $\sum a_kp^k,\ 0 \leq a_i < p$, мы получаем ряды вида $\sum b_kp^k,\ b_k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что в этом представлении, действия с p-адическими числами полностью аналогичны действиям с вещественными числами в десятичной записи.

Из теоремы 2 следует, что целое p-адическое число, представленное в виде ряда обратимо тогда и только тогда, когда a_0. Вместе с теоремой 3 это даёт следующую теорему:

Теорема 13. *Каждое отличное от нуля целое p-адическое число ξ однозначно записывается ввиде*
$$\xi = p^m(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots + a_np^n + \ldots)$$
где $m = v_p(\xi),\ 1 \leq a_0 \leq p-1,\ 0 \leq a_n \leq p-1\ \forall n \geq 2$.

Заметим, что эта запись соответсвует записи последовательности цифр, бесконечной влево, а именно
$$\alpha = \begin{cases} \ldots a_{m+1}a_m\overbrace{00\ldots0}^{m-1}{}_{(p)},\ m \geq 0 \\ \ldots a_1a_0a_{-1}\ldots a_{m(p)}, m < 0 \end{cases}$$

p-адические числа, как проективный предел:
Разобранное нами построение кольца целых p-адических чисел соотвествует более общей алгебраической конструкции. А именно, мы на пальцах разобрали конструкцию проективного предела обратного спектра топологических пространств, групп, колец (не важно чего, в общем).

Параграф на доработке :(.
Так вот, из нашего построения ясно, что кольцо $\mathbb{Z}_p$ является проективным пределом последовательности $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ с естественным отображением $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ «взятие остатка».
$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

2.5 Лемма Гензеля:

Определение 12. *Числовым полем называют конечное расширение поля $\mathbb{Q}$.*

Пример 4. *Например, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \mathbb{Q}(i)$ — числовые поля. Поле $\mathbb{R}$ не является конечным расширением $\mathbb{Q}$, а значит, это не числовое поле.*

Определение 13. *Элемент α расширения поля $\mathbb{Q}$ называется алгебраическим числом, если он является корнем ненулевого многочлена в $\mathbb{Q}[T]$.*

Пример 5. *Например, $\frac{1}{2}, \sqrt{2}, i$ — алгебраические числа. Числа e, π не являются алгебраическими (доказателсьтва представили Эримт в 1873г. и Линдеманн в 1882г.).*

Определение 14. *Элемент α поля, являющегося расширением $\mathbb{Q}$ называется алгебраическим целым, если он является корнем унитарного многочлена с целыми коэффицентами.*

Определение 15. *Все алгебраические целые элементы поля K образуют кольцо, которое принято называть кольцом целых поля K и обозначать $\mathcal{O}_K$.*

Пример 6. $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z},\ \mathcal{O}_{Q_p} = \mathbb{Z}_p$.

Определение 16. *Пусть $(F, \|\cdot\|)$ — полное неархимедово нормированное поле. Обозначим за*

$$\mathbb{Z}_F = B_1(0) = \{x \in F \mid \|x\| \leq 1\}$$

— «кольцо целых» чисел поля F.

Теорема 14. ***(Лемма Гензеля)*** *Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}_F[x]$, $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_F$ и справедливо неравенство $\|f(\alpha_0)\| < \|f'(\alpha_0)\|^2$ (тут f' — формальная производная многочлена f). Тогда существует единственное $\alpha \in \mathbb{Z}_F$, такое, что $f(\alpha) = 0$ и $\|\alpha - \alpha_0\| < \|f'(\alpha_0)\|$.*

Доказательство. Положим $c = \|f(\alpha_0)\|/\|f'(\alpha_0)\|^2 < 1$. Рассмотрим рекуррентно заданную последовательность

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f(\alpha_{n+1})},\ n \geq 0$$

(«метод касательных Ньютона»).
Индукцией проверяется, что она обладает следующими свойствами:

1. $\|\alpha_n - \alpha_0\| < c\|f'(0)\| < \|f'(\alpha_0)\|$.
2. $\|f'(\alpha_n)\| = \|f'(\alpha_0)\|$.
3. $\|f(\alpha_n)\| \leq c^{2^n}\|f(\alpha_0)\|^2$.
4. $\|\alpha_n - \alpha_0\| \leq c^{2^n}\|f(\alpha_0)\|$.

А значит, можно взять $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Единственность следует из разложения многочлена по тейлору в точке α. □

Следствие 6. ***(Важное:)***
Пусть $f \in \mathbb{Z}_p[x]$, $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_p$, $f(\alpha_0) \equiv 0 \pmod p$, $f'(\alpha_0) \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда существует единственное $\alpha \in \alpha_0 + pZ_p$ такое, что $f(\alpha) = 0$.

Кроме того, есть еще НАРОДНАЯ формулировка леммы Гензеля:

Теорема 15. *Пусть f — многочлен с целыми (или целыми p-адическими коэффицентами), а m и k — целые числа, причем $0 \leq m \leq k$. Тогда, если r — целое число, такое, что*

$$f(r) \equiv 0 \pmod{p^k},\ f'(r) \neq 0 \pmod p$$

то существует такое целое s, что

$$f(s) \equiv 0 \pmod{p^{k+m}},\ r \equiv s \pmod{p^k}$$

и более того, s может быть выражено в явном виде, а именно,

$$s = r - f(r) \cdot a,\ a = (f(r))^{-1} \pmod{p^m}$$

2.6 Пополнение метрических пространств.

Определение 17. *Пусть (X, d_X) — метрическое пространство, $\mathcal{F}(X)$ — множество всех ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$. Тогда введём расстояние d_∞ между функциями $f, g \in \mathcal{F}(X)$:*

$$d_\infty(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in X\}$$

Заметим, что определение корректно, так как функции ограничены.

Лемма 3. *$(\mathcal{F}(X), d_\infty)$ — метрическое пространство.*

Доказательство. Проверим три аксиомы метрики:

1. Пусть $f = g$. Тогда $|f(x) - g(x)| = 0$ для всякого $x \in X$, так что $d_\infty(f,g) = 0$. Если же наоборот $d_\infty(f,g) = 0$, то $0 \le |f(x) - g(x)| \le \sup = 0$, а значит $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$, что и означает $f \equiv g$.
2. Так как $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, то и $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$.
3. Рассмотрим три ограниченные функции $f, g, h \in \mathcal{F}(X)$, и покажем, что

$$d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) \ge d_\infty(f,h)$$

Мы знаем, что:

$$\forall x \in X : |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \ge |f(x) - h(x)|$$

в силу неравенства треугольника для стандартной метрики на $\mathbb{R}$. Для всякого $\varepsilon > 0$ мы можем взять x_0 такой, что $|f(x_0) - h(x_0)| \ge \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon$. Получаем, что

$$d_\infty(f,h) - \varepsilon = \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon \le |f(x_0) - h(x_0)| \le$$

$$\le |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - h(x_0)| \le d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$

а раз это верно для любого $\varepsilon > 0$, то искомое неравенство доказано.

□

Лемма 4. *$\mathcal{F}(X)$ — полно.*

Доказательство. Пусть f_n — фундаментальная последовательность функций. Тогда $\forall x_0 \in X$: $\{f_n(x_0)\}$ — также фундаментальная последовательность, так как $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \le \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|, x \in X\}$. Следовательно,

$$\forall x_0 \in X : \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$$

и сходимость по всем точкам равномерна, так как не зависит от выбора точки x_0. Иными словами,

$$\exists f(x) : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

где $f(x_0)$ определяется как предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Так что $f(x)$ — функция, являющаяся пределом искомой последовательности функций. □

Определение 18. *Пусть (X, d_X) — метрическое пространство, $\mathcal{F}(X)$ — множество ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$. Построим изометрическое вложение $k : X \to \mathcal{F}(X)$ следующим образом:*

1. *Если X — ограничено, то определим $k(x) = d_x$, где*

$$\forall y \in X : d_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} d_X(x,y)$$

Функция d_x ограничена, так как X ограничено. Заметим также, что

$$d_\infty(d_x, d_y) = \sup_z |d_x(z) - d_y(z)| = \sup_z \big(d_X(x,z) - d_X(z,y)\big) \le d_X(x,y)$$

однако равенство достигается при $z = y$, так что $d_\infty(d_x, d_y) = d_X(x,y)$, а значит вложение изометрическое.

2. *Пусть X, возможно, не ограничено. Тогда определим $k(x) = d_x - d_{x_0}$ для некоторой фиксированной точки $x_0 \in X$, где*

$$\forall y \in X : \big(k(x)\big)(y) \overset{\text{def}}{=} d_x(y) - d_{x_0}(y) = d_X(x,y) - d_X(y,x_0)$$

что есть ограниченная функция, так как $\forall y \in X : d_X(x,y) - d_X(y,x_0) \le d_X(x,x_0)$.
Заметим, что это аналогичным образом будет изометрическим вложением:

$$d_\infty(d_x - d_{x_0}, d_y - d_{x_0}) = \sup_z |d_x(z) - d_{x_0}(z) - d_y(z) + d_{x_0}(z)| =$$

$$= \sup_z \big(d_X(x,z) - d_X(z,y)\big) \le d_X(x,y)$$

где равенство достигается при $z = y$.

Любое метрическое пространство (X, d_X) имеет пополнение $(\overline{X}, d_{\overline{X}})$, то есть такое метрическое пространство $\overline{X}$, что выполнено:

1. $X \subseteq \overline{X}$
2. X — всюдю плотно в $\overline{X}$
3. $d_{\overline{X}}|_X = d_X$, то есть вложение из X в $\overline{X}$ является изометрическим
4. $(\overline{X}, d_{\overline{X}})$ — полно.

Доказательство. Возьмём изометрическое вложение Куратовского $k : X \to \mathcal{F}(X)$, и возьмём его замыкание в топологическом пространстве $\mathcal{F}(X)$ с топологией, индуцированной метрикой d_∞ — назовём это замыкание $\overline{X}$. Заметим, что

1. $X \subseteq \overline{X}$ естественным образом
2. X всюду плотно в $\overline{X}$, так как любое множество всюду плотно в своём замыкании
3. Вложение X в $\overline{X}$ изометрическое, так как оно изометрическое и во всё пространство $\mathcal{F}(x)$
4. $\overline{X}$ полно как замкнутое подмножество полного пространства.

□

Замечание 10. Пополнение метрического пространства **единственно** с точностью до изометрии.

Замечание 11. Выражение $X \subseteq \overline{X}$ тоже подразумевается с точностью до изометрии.

2.7 Пополнение нормированного поля.

Теперь мы умеем пополнять метрические пространства, но нам никто не гарантирует, что при пополнении поля по норме получится поле.

Определение 19. *Пополнением нормированного поля $(F_0, \|\cdot\|_0)$ называется нормированное поле $(F, \|\cdot\|)$, уловлетворяющее следующим свойствам*

1. *Существует вложение $i\colon F_0 \hookrightarrow F$, сохраняющее норму (изометрическое), то есть $\|i(x)\| = \|x\|_0$.*
2. *$(F, \|\cdot\|)$ полно, как метрическое пространство.*
3. *$i(F_0)$ всюду плотно в F, то есть, $\forall x, \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in F_0\colon \|x - i(x_0)\| < \varepsilon$.*

Пример 7. *Из курса анализа ясно, что $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ — пополнение $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.*

Теорема 16. *Для любого нормированного поля существует пополнение.*

Доказательство. Будем рассматривать случай нормы с неравенством треугольника.
Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех последовательностей Коши $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $(F_0, \|\cdot\|_0)$.
На $\mathfrak{A}$ можно естествнным образом определить операции сложения и умножения (поточечно), а также ввести норму $\|\cdot\|$, как $\|\{x_n\}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_0$.
Это определение корректно, так как предел всегда существует в силу неравенства треугольника и того, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши

$$|\|x_n\|_0 - \|x_m\|_0| \le \|x_n - x_m\|_0$$

Ясно, что остальные свойства нормы также выполняются.

Введём на $\mathfrak{A}$ отношение эквивалентности $\sim$:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_0 = 0$$

Нетрудно заметить, что это отношение эквивалентности «уважает» арифметические действия и норму, то есть

1. $\{x_n\} \sim \{u_n\},\ \{y_n\} \sim \{v_n\} \Rightarrow \{x_n + y_n\} \sim \{u_n + v_n\},\ \{x_n y_n\} \sim \{u_n v_n\}$.
2. $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Rightarrow \|\{x_n\}\| = \|\{y_n\}\|$.

В качестве поля F возьмем фактормножество $\mathfrak{A}/\sim$. Приведенные выше свойства естественно индуцируют арифметические операции и норму с A на F:

- $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x_n + y_n\}]$.
- $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}]$.
- $\|[\{x_n\}]\| = \|\{x_n\}\|$.

Аксиомы кольца вполне очевидны, проверим существование обратного по умножению элемента. Если $[\{x_n\}] \ne 0$, то $\lim \|x_n\|_0 > 0 \Rightarrow \forall n \ge n_0\ \|x_n\|_0 > \delta > 0$ для некоторого δ.
Тогда в качестве $[\{x_n\}]^{-1}$ возьмем класс $[\{y_n\}]$, где

$$y_n = \begin{cases} 0, & n < n_0 \\ \frac{1}{x_n}, & n \ge n_0 \end{cases}$$

Осталось проверить, что мы получили пополнение.
В качестве вложения возьмем $i(x) = [(x, x, \ldots)]$. Ясно, что $i(F_0)$ плотно в F, так как, если $X = [\{x_n\}] \in F$, то $i(x_n) \to X$ в пространстве $(F, \|\cdot\|)$.
Теперь проверим полноту. Пусть $X^{(n)} = [(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)] \in F$ — последовательность Коши. Возьмем такую последовательность $k_n \in \mathbb{N}$, что

$$\sup_{k,\ell \ge k_n} \|x_k^{(n)} = x_\ell^{(n)}\|_0 < \frac{1}{n}$$

Покажем, что в качестве предела можно взять $X = [\{x_{k_n}^{(n)}\}]$. Пусть $N \ge k_n,\ M \ge k_m,\ K \ge \max\{k_n, k_m\}$.

$$\|x_N^{(n)} - x_M^{(m)}\|_0 \le \|x_N^{(n)} - x_K^{(n)}\|_0 + \|x_K^{(n)} - x_K^{(m)}\|_0 \le \frac{1}{n} + \|x_K^{(n)} - x_K^{(m)}\|_0 + \frac{1}{m}$$

Устремим K к бесконечности и получим

$$\|x_N^{(n)} - x_M^{(m)}\|_0 \le \|X^{(n)} - X^{(m)}\| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

Положим $N = k_n,\ M = k_m$ и получим, что $x_{k_n}^{(n)}$ — последовательность Коши, а её класс эквивалентности — искомый предел. $\square$

Далее отождествим $i(F_0)$ с F_0 и будем считать, что $F \subseteq F$.

В неархимедовом случае можно сказать даже несколько больше.
Пусть $(F, \|\cdot\|)$ — неархимедово нормированное поле. Если $\{x_n\} \to x,\ x \in F^*$, то для достаточно больших n $\|x_n\| = \|x\|$.

Лемма 5. *Пусть $(F, \|\cdot\|)$ — пополнение неархимедова поля $(F_0, \|\cdot\|_0)$. Тогда*

1. *$(F, \|\cdot\|)$ неархимедово.*
2. *$\operatorname{Im}(\|\cdot\|) = \operatorname{Im}(\|\cdot\|_0)$.*

3. Введение в алгебраическую геометрию

3.1 Квадрики и рациональная параметризация квадрик.

Определение 20. *Пусть X — коммутативное кольцо и даны наборы коэффицентов $\{a_i\} \in X$, $\{b_i\} \in X, c \in X$. Если $\exists j\colon 1 \leq j \leq n,\ a_j \neq 0$. Квадратичной функцией (не формой) будем называть функцию вида*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$$

Если X — аффинное пространство (мы будем считать, что векторное над полем K), то квадрикой мы будем называть множество нулей такой функции $X \to K$, то есть, множество вида

$$K = \{x \in X \mid f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Пример 8. *Эллипс, порабола и гипербола — известные вам квадрики на плоскости.*

Замечание 12. Заметим, что если нам дана квадрика M, заданная, как множество нулей функции f и мы сменили систему координат, то в новой системе координат M также будет являться квадрикой, то есть, найдётся такая квадратичная функция f', множеством нулей которой будет M.

Часто нас будует интересовать,как выглядят квадрики над кольцом целых чисел, то есть, как решать диофантово уравнение $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$. Эта задача весьма сложная, поэтому для начала попытаемся понять, как пытаться решать такие уравнения над полем $\mathbb{Q}$.

Пример 9. *Опишем все пифагоровы тройки, то есть, такие все тройки $(X, Y, Z) \in \mathbb{Z}^3$, что*

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

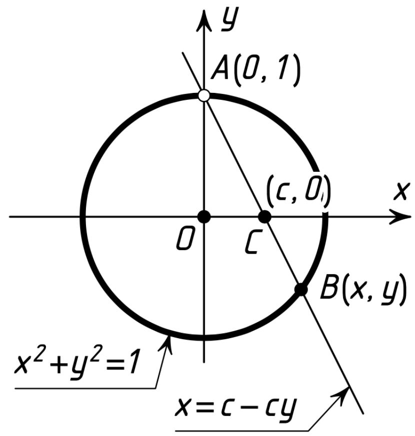
Заметим, что достаточно описывать только тройки, где $\gcd(X, Y, Z) = 1$, так как, если мы умножим все три числа на какое-то целое число, то мы внось получим пифагорову тройку.
Более того, достаточно рассматривать только тройки попарно взаимно простых чисел, так как

$$X \,\vdots\, p,\ Y \,\vdots\, p \Rightarrow X^2 + Y^2 = Z^2 \,\vdots\, p$$

Заметим, что при $Z = 0$ мы имеем решение $(0, 0, 0)$, дальше будем рассматривать случаи $Z \neq 0$. Поделим на z и получим уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

То есть, мы свели задачу к перечислению всех рациональных точек на окружности. Некоторые рациональные точки $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. Выберем из них, например, точку $A = (0, 1)$. Проведем всевозможные прямые через точку A (кроме горизонтальных). Каждая такая прямая ℓ пересечет окружность еще в одной точке $B(x, y)$ и ось абсцисс в точке $C(c, 0)$.



Таким обоазом, пересекая, мы получаем взаимнооднозначное соответствие между точками окружности и точками прямой.
Причем, это соответствие сохраняет рациональность точек. Прямая, проходящая через точки A и C определяется уравнением $y = c - cy$. Подставим это в уравнение окружности

$$(c - cy)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (c^2 + 1)y^2 - 2c^2y + c^2 - 1 = 0$$

откуда мы имеем, что либо $y = 1$, либо $y = \frac{c^2-1}{c^2+1}$, при $x = c - cy = \frac{2c}{c^2+1}$. Остается заметить, что если $c \in \mathbb{Q}$, то $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$. Обратное всегда вытекает Если координаты двух точек рациональны, то уравнение соединяющей их прямой можно записать так, чтобы оно имело рациональные коэффициенты. Если две прямые задаются уравнениями с рациональ- ными коэффициентами, то точка их пересечения (если она существует) имеет рациональные координаты. То есть, каждое рациональное решение, кроме $(0, 1)$ можно получить

$$x = \frac{2c}{c^2 + 1}, \quad y = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}$$

где $c \in \mathbb{Q}$.
Подставим $c = m/n$, где $\gcd(m, n) = 1$, тогда

$$x = \frac{2c}{c^2 + 1} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad y = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

Теперь будем искать все целые решения, выполним обратную подстановку:

$$\frac{X}{Z} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad m^2 + n^2 \neq 0$$

Вспомним, что числа (X, Y, Z) взаимно просты, а значит, дроби в левых частях несократимы. Если бы мы знали, что дроби, стоящие в правых частях тоже несократимы, то мы бы положили $X = 2mn, Y = m^2 - n^2$, $Z = m^2 + n^2$, но, к сожалению, они бывают сократимы. Но, они могут быть сократимы только на 2. Действительно, если p — простое число, не равное двум и $p \mid 2mn$. Так как $\gcd(m, n) = 1$, если $p \mid m$, то $p \not| n \Rightarrow m^2 + n^2 \not| p$, а значит, дробь X/Z несократима. Рассмотрим теперь вторую дробь. Если p — простое число, не равное двум и $p \mid m^2 - n^2$, $p \mid m^2 + n^2$, то $p \mid 2m^2$ и $p \mid 2n^2$. Так как $\gcd(m, n) = 1$, это влечёт $p = 2$. Итак, мы наконец нашли взаимнопростые натуральыне решения

$$X = mn, \ Y = \frac{m^2 - n^2}{2}, \ Z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

при $\gcd(m, n) = 1$ *и нечетных* m, n, *а также*

$$X = 2mn,\ Y = m^2 - n^2,\ Z = m^2 + n^2$$

при взаимнопростых m *и* n, *одно из которых четно. Любые целые положительные решения мы получим умножением этих решений на натуральное число. Теперь заметим, что формулы для четного и нечетного случаев на самом деле совпадают. Если*

$$X = pq,\ Y = \frac{p^2 - q^2}{2},\ Z = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

— решение, вычисленное по формулам для первого случая, где $\gcd(p, q) = 1$ *и числа* p *и* q *оба нечетны, то те же решения мы получим и по вторым формулам, только подставляя*

$$m = \frac{p + q}{2}, \quad n = \frac{p - q}{2}$$

разве что с точностью до того, что X *и* Y *поменяются местами.*

4. Проективная геометрия

4.1 Модели построения проективной плоскости и связь между ними

Проективная плоскость, как факторпространство.

Определение 21. *Проективная плоскость* $\mathbb{R}P^2$ *— факторпространство сферы по* $x \sim -x$ *(отождествление противоположных точек).* ***Прямая*** *в проективной плоскости — образ большой окружности сферы при проекции.*

Свойство: через любые две точки проходит ровно одна прямая. Любые две прямые пересекаются ровно по одной точке.

Проективная плоскость и бесконечно удалённые точки.

Рассмотрим плоскость Π (евклидову или аффинную, не важно). Определим

Определение 22. *Назовём класс эквивалентности параллельных прямых бесконечно удалённой точкой.*

Замечание 13. Пополнение пространства Π часто обозначают за $\widehat{\Pi}$.

Тогда проективная плоскость $\widehat{\Pi}$ — объединение Π с множеством её бесконечно удалённых точек. Для каждой прямой $l \subseteq \Pi$ определим проективную прямую $\hat{l}$ — объединение l и её бесконечно удалённой точки. Добавим в список прямых бесконечно удалённую прямую, состоящую из всех бесконечно удалённых точек.
Верно, что через любые две точки проходит ровно одна прямая, и любые две прямых пересекаются в точности в одной точке.

Соответствие между моделями

Возьмём $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$, как плоскость не содержащую 0. Будем проводить прямые через 0 и пересекать их с плоскостью следующим образом:

- Если прямая пересекает нашу плоскость Π, то ровно по одной точке. Её и сопоставим двум антиподальным точкам на сфере.
- Если она не пересекает плоскость Π, то сопоставим данной паре точек бесконечно удалённую точку, соответствующую классу эквилинеарности прямых, параллельных данной.

Замечание 14. Таким образом, мы построили биекцию с сохранением свойств.

4.2 Проективные пространства и однородные координаты.

Определение 23. *V — векторное пространство. Проективное пространство, порождённое V — множество*

$$P(V) = (V \setminus \{0\})/\cong$$

Где $\cong$ — отношение пропорциональности: $x \cong y$, если найдётся такое $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что $x = ty$.

Замечание 15. Размерность $P(V)$ равна $\dim(V) - 1$ по определению.

Замечание 16. 1. Можно считать, что $P(V)$ — множество прямых в V , проходящих через O.

2. $P(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{R}P^n = S^n/_{x\cong -x}$
3. Можно над любым полем, скажем, над $\mathbb{C}$ получим $\mathbb{C}P^m = P(\mathbb{C}^m)$
4. Это проекция $p : V \setminus \{0\} \to P(V)$

Пусть $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, соответствующая ей точка в $P(x)$ обозначается как $[x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_n]$. Они называются однородными координатами точки $P(x)$.

Два набора задают одну точку тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

$$[x_0 : \ldots : x_n] = [y_0 : \ldots : y_n] \iff \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; y_i = c \cdot x_i, \; \forall i$$

Например, $[1 : 2] = [3 : 6]$.

4.3 Проективное пополнение аффинного пространства

Определение 24. *Пусть A — аффинное пространство. Множество бесконечно удалённых точек $A_\infty = P(\overline{A})$. Тогда назовём проективным пополнением*

$$\hat{A} = A \sqcup A_\infty$$

На нём вводится структура проективного пространства:
вкладываем A в векторное пространство V, $\dim(V) = \dim(A)+1$ как гиперплоскость, не проходящую через 0. Тогда $\overline{A}$ отождествляем с линейной гиперплоскостью в V (которая, в свою очередь, проходит через 0), строим биекцию $I : \hat{A} \to P(V)$ аналогично случаю сферы и проективной плоскости.
Свойства:

1. I — биекция.
2. A_∞ — гиперплоскость в $\hat{A}$, так называемая "бесконечно удалённая гиперплоскость"
3. Каждому аффинному подпространству $B \subseteq A$ соответствует проективное подпространство $\hat{B} \subseteq \hat{A}$.
4. Существует контрпример к следующему утверждению: всякое проективное подпространство в $\hat{A}$ либо соответствует аффинному подпространству в A, либо содержится в бесконечно-удалённой гиперплоскости.

4.4 Проективное пополнение $\mathbb{R}^n$

Пусть у нас было n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, мы добавили к нему какие-то бесконечно удалённые точки и получили $\mathbb{R}P^n$. Топологически это просто компактификация, так как $\mathbb{R}^n$ не компактно, а $\mathbb{R}P^n$ — сфера, у которой отождествили противоположные точки границы, то есть компакт. Выберем какую-то координатную систему в $\mathbb{R}^n$ и выберем точку с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда, ей в $\mathbb{R}P^n$ будет соответствовать точка с вот такими координатами: $[x_1 : x_2 : \ldots : x_n : 1]$. Это так, потому что $\mathbb{R}P^n$ — множество всех прямых, проходящих через 0 в $\mathbb{R}^{n+1}$, то есть, мы можем взять $\mathbb{R}^n$ и вложить в $\mathbb{R}^{n+1}$, как плоскость, задающуюся уравнением $x_{n+1} = 1$. Тогда, каждой прямой, проходящей через 0 в $\mathbb{R}^{n+1}$ будет соответствовать точка этой плоскости.

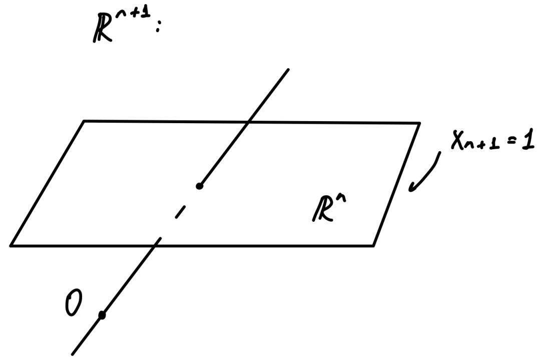


Рис. 4..1: Вложение $\mathbb{R}^n$, как плоскости

Теперь остается только сказать, что точки, у которых координаты отличаются умножением на константу — одна и та же точка.

4.5 Проективные преобразования и проективный базис. Преобразование Мёбиуса.

Пример 10. $\mathbb{R}P^1$ *— прямая, к которой мы добавили точку на бесконечности, или же все прямые в* $\mathbb{R}^2$*, проходящие через 0, то есть, окружность. Тогда точке с однородными координатами* $[x : y]$ *будет соответствовать какой-то прямой, проходящей через точку* (x, y)*, то есть прямой с наклоном* x/y *и ей будет отвечать* $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$*, если* $y \neq 0$*. Это так, потому что наше вложение устроено так, что* $x \to [x : 1] \sim [ax : a]$*. Тогда ясно, что если* $y = 0$*, то* $\forall a, b$ $[a, 0] \sim [b, 0]$ *и мы отображались из точки бесконечность (которая единственная).*

Определение 25. *Пусть* $F \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *— проективное отображение, если оно является проективизацией некоторого линейного отобажения* $L \colon V \to W$*.*

Лемма 6. *Пусть* V, W *— векторные пространства, а* $L \colon V \to W$ *— инъективное линейное отображение. Тогда существует единственное* $F \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *такое, что* $p_W \circ L = F \circ p_V$*,* $p_W \colon W \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(W)$*,* $p_V \colon V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$*. Иными словами, коммутативна диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "p_V"] & W \arrow[d, "p_W"] \\ \mathbb{P}(V) \arrow[r, "\mathbb{P}(L)"] & \mathbb{P}(W) \end{tikzcd}$$

Доказательство. L переводит прямые через 0 в прямые через 0 (так как это линейное отображение между векторными пространствами), а прямым через 0 отвечают как раз точки $\mathbb{P}(V)$. ☐

Пример 11. $\mathbb{R}P^1 = \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x \to [x : 1]$, $[x : y] \to \frac{x}{y}$*, если* $y \neq 0$ *и в* ∞*, если* $y = 0$*. Так как* $\mathbb{R}P^1$ *— это все прямые в* $\mathbb{R}^2$*, проективное преобразование проективной прямой на себя — проективизация линейного отображения из* $\mathbb{R}^2$ *на себя. Ясно, что линейное отображение устроено вот так:*

$$(x, y) \to (ax + by, cx + dy),\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0$$

Когда мы рассматриваем проективизацию, нам важно только, на какой прямой лежит образ, то есть

$$[x, y] \to [ax + by, cx + dy],\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0$$

(Важно, что линейное отображение инъективно, поэтому там везде сказано, что определитель не равен 0).
Возвращаясь обратно к координатам в $\widehat{\mathbb{R}}$ *мы получаем, что это* $x \to (ax + b/cx + d)$, *так как* $[x : 1] \to [ax + b, cx + d] = [(ax + b)/(cx + d) : 1]$, *если* $cx + d \neq 0$. *Если же* $cx + d = 0$, *то ясно, что мы перешли в точку* ∞. *Если же* $x = \infty$, *то ясно, что* $[1 : 0] \to [a : c] = [a/c : 1]$ $(c \neq 0)$ *(если* $c = 0$, *то* $[1 : 0] \to [1 : 0]$, *то бишь* $\infty \to \infty$, *так как у нас просто линейное отображение* $(a/d)x + (b/d)$*).*
То есть, дробно линейное преобразование на $\mathbb{R}$ *— проективное преобразование. Также теперь ясно, что дробно-линейные преобразования на* $\mathbb{R}P^1$ *образуют группу (так как они теперь биективны и у нас нет проблем с занулением знаменателя).*

Пример 12. *Рассмотрим биективное на проективной прямой дробно линейное преобразование*

$$x \to \frac{ax + b}{cx + d}$$

и зададимся вопросом, значения в скольки точках нам нужно знать, чтоб однозначно определить параметры a, b, c, d. *Засчет того, что в однородных координатах всё происходит с точностью до мультипликативной константы, нам достаточно знать значения всего в трёх точках:*

$$[0 : 1] \to b/d,\ [1 : 1] \to (a + b)/(c + d),\ [1 : 0] \to a/c$$

Поскольку нас интересует всё с точностью до пропорциональности, можно считать $d = 1$. *Отсюда получаем систему из 3-х уравнений, откуда однозначно находятся все коэффиценты. То есть, для того, чтобы однозначно задать дробно линейное преобразование, нам нужно задать, куда переходят точки* $0, 1, \infty$.

Определение 26 (Проективный базис)**.** *Пусть* X *— проективное пространство размерности* n. *Проективным базисом будем называть набор из* $(n + 2)$*-х точек, никакие* $(n + 1)$ *из которых не лежат в одной гиперплоскости.*

5. Квадратичные формы и квадрики

5.1 Билинейные формы

Определение 27 (Билинейная форма)**.** *Пусть* X *— векторное пространство. Функция* $B : X \times X \to \mathbb{R}$ *называется билинейной формой на* X, *если она линейная по каждому аргументу.*

Замечание 17. Билинейную форму (и не обязательно её, а любую функцию $B : X \times X \to \mathbb{R}$) называют **симметричной**, если

$$\forall x, y \in X\ B(x, y) = B(y, x)$$

Замечание 18. Подразумевается, что X — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Для векторного пространства над другим полем всё определяется аналогично.

Определение 28 (Матрица билинейной формы)**.** *Зафиксируем базис* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *пространства* X. *В таком случае матрица билинейной формы* B *на* X *определяется как матрица* $\mathfrak{b}$ *размера* $n \times n$, *каждый член которой задаётся так:*

$$b_{ij} = B(v_i, v_j)$$

Замечание 19. Допустим, нам известна матрица B_v билинейной формы B над векторным пространством X в базисе $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. В таком случае для точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ значение билинейной формы будет следующим:

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} [B_v]_{ij} x_i y_j$$

Что в матричной форме записывается как

$$B(x, y) = x^T b y$$

Замечание 20. При фиксированном базисе пространства X существует взаимно однозначное соответствие между матрицами $n \times n$ и билинейными формами, что им соответствуют. При таком сопоставлении симметричным матрицам соответствуют симметричных билинейные формы, и наоборот.

Зафиксируем векторное пространство X, его базис $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$, какой-то ещё его базис $w = \{w_1, \ldots, w_n\}$, билинейную форму на X — обозначим её B. Обозначим B_u — матрицу B при базисе u. Тогда

$$B_v = A^T B_w A$$

где A — матрица перехода от v к w.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим билинейную форму на базисных векторах w_i и w_j, воспользовавшись матрицей в базисе v. Тогда

$$w_i^T B_w w_j = v_i^T A^T B_w A v_j = v_i^T B_v v_j$$

□

5.2 Квадратичные формы

Определение 29 (Квадратичная форма). *Пусть X — векторное пространство, $Q : X \to \mathbb{R}$. Тогда Q называется квадратичной формой, если существует билинейная форма B на X, такая что*

$$\forall x \in X \ Q(x) = B(x, x)$$

Теорема 17 (О единственной симметричной форме). *Для любой квадратичной формы Q над векторным пространством X существует единственная симметричная билинейная форма B над тем же пространством, для которой*

$$\forall x \in X \ Q(x) = B(x, x)$$

Доказательство. Докажем отдельно существование и единственность.

- **Существование**. По определению существует какая-то билинейная форма B, такая что $Q(x) = B(x, x)$. В таком случае, положим форму C так:

$$C(x, y) = \frac{B(x, y) + B(y, x)}{2}$$

  С одной стороны, C — симметричная и билинейная. С другой стороны — $C(x, x) = Q(x)$ для любого $x \in X$.
- **Единственность**. Пусть $Q(x) = B(x, x)$ для некоторой билинейной симметричной формы B. Тогда покажем, что Q однозначно определяет все значения B:

$$B(x, y) = \frac{1}{2}\big((B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y)) - B(x, x) - B(y, y)\big) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$$

□

Замечание 21. Это соответствие каноническое, то есть не зависит от выбора базиса пространства X.

Замечание 22. Таким образом получается биекция между квадратичными формами и билинейными симметричными; при выборе базиса, как уже говорилось, билинейные симметричные формы биективно соответствуют симметричным матрицам подходящего размера. Матрица билинейной симметричной формы B в базисе v, соответствующей квадратичной форме Q, называется **матрицей квадратичной формы** Q в базисе v.

Следствие 7. *Пусть зафиксирован базис $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ векторного пространства X, а также квадратичная форма Q на нём, которой соответствует билинейная симметричная форма B с матрицей b в базисе v. Тогда для вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ значение квадратичной формы Q находится следующим образом:*

$$Q(x) = B(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

Пример 13 (Квадратичная форма в $\mathbb{R}^2$). *Рассмотрим симметричную матрицу в $\mathbb{R}^2$:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Тогда квадратичная форма, задаваемая этой матрицей, имеет вид

$$Q\big((x, y)\big) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

для любого $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Замечание 23. Квадратичная форма (над любым X) отождествляется с однородным многочленам степени 2; это напрямую следует из последнего следствия.
Так как 0 — тоже квадратичная форма, то иногда принято считать, что степень 0 как многочлена равна 2.

5.3 Диагонализация билинейных форм

В этом параграфе пространство X будем считать снабжённым евклидовой структурой.

Теорема 18 (О существовании диагональной матрицы для Q). *Для любой симметричной билинейной формы существует ортонормированный базис, в котором её матрица диагональна.*

Доказательство. Будем доказывать индукцией по размерности пространства. База — очевидна, проделаем шаг. Итак, пусть B — симметричная билинейная форма. Найдём по следующей лемме v такой, что выполнены следующие два условия:

- $|v| = 1$
- $\forall w \in v^{\perp}\ B(v, w) = 0$

Диагонализуем $B|_W$, где $W = v^{\perp}$. Базис $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ подпространства W дополняется до базиса пространства X элементом v, так как $\forall 1 \leq i \leq n-1\ \langle v, w_i \rangle = 0$. С другой стороны, так как $\forall 1 \leq i \leq n-1\ B(v, w_i) = 0$, то матрица B в базисе $\{v, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ будет иметь нули на всех элементах первой строки и столбца, кроме разве что диагонального, соответствующего $B(v, v)$. Так как $B|_W$ мы заранее диагонализовали, то и сама B будет диагональна. □

Лемма 7. *Для симметричной билинейной формы B на пространстве X размерности n существует вектор $v \in X$ такой, что выполнены следующие два условия:*

- $|v| = 1$
- $\forall w \in v^{\perp}\ B(v, w) = 0$

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу

$$S^{n-1} = \{x \in X \ : \ |x| = 1\}$$

Так как $B(x, x)$ — квадратичная функция, то она непрерывна и достигает максимума на S^{n-1}; скажем, что этот максимум достигается на векторе v.
Рассмотрим теперь любой w такой, что $\langle v, w \rangle = 0$ и $|w| = 1$. Натянем плоскость на v и w, назовём её L. Пересечение $L \cap S^{n-1}$ есть окружность, а именно

$$\cos(t)v + \sin(t)w$$

Найдём $B(\cos(t)v + \sin(t)w, \cos(t)v + \sin(t)w)$:

$$B(\cos(t)v + \sin(t)w, \cos(t)v + \sin(t)w) = \cos(t)^2 B(v, v) + \sin(t)^2 B(w, w) + 2\cos(t)\sin(t)B(v, w)$$

Экстремум (максимум) $B|_L$ будет в точке $t = 0$. Возьмём производную по t:

$$B'(\cos(t)v + \sin(t)w, \cos(t)v + \sin(t)w) = -2\cos(t)\sin(t)B(v, v) + 2\cos(t)\sin(t)B(w, w) -$$

$$-2\sin^2(t)B(v, w) + 2\cos(t)^2 B(v, w)$$

Что при $t = 0$ будет равно $2B(v, w)$; с другой стороны, так как экстремум этой непрерывной функции в точке $t = 0$, то в точке $t - 0$ она должна быть равна 0. Таким образом, получаем $B(v, w) = 0$, а следовательно и $B(v, \alpha w) = 0$ для любого α. □

Замечание 24. Рассмотрим билинейную симметричную форму $B(x, y)$ вида

$$ax^2 + by^2$$

при $a > b$. Тогда на единичной сфере

$$S^1 = \{|(x, y)| = 1\}$$

максимум B будет равен a, тогда как минимум — равен b:

$$\max_{(x,y) \in S^1} Q(x, y) = a \qquad \min_{(x,y) \in S^1} Q(x, y) = b$$

Замечание 25. Понятно, что при диагональной матрице билинейная симметричная форма — она же квадратичная форма — будет равна

$$Q(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2$$

Замечание 26. Если не требовать ортонормированности, то сведение к диагональному виду очевидно. К примеру, рассмотрим квадратичную форму Q произвольного вида:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + c$$

Тогда по индукции заменим x_i^2, начиная с $i = 1$ и до $i = n$, следующим образом:

$$(x_1')^2 = (a_{11}x_1^2 + \frac{a_{12}}{2}x_1x_2 + \frac{a_{13}}{2}x_1x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{2}x_1x_n)^2$$

После n таких замен мы и получим требуемую форму.

Лемма 8. *Числа a_i, стоящие на главной диагонали диагональной матрицы квадратичной формы, определены с точностью до перестановки.*

Доказательство. Для квадратичной формы Q существует единственная билинейная симметричная форма B, соответствующая ей. Единственный случай, в котором она диагональна — это её запись в ортонормированном базисе. Тогда утверждение напрямую следует из того, что собственные числа оператора B не зависят от базиса, а их количество в диагонали матрицы определяется алгебраической кратностью этих чисел в характеристическом многочлене и размерностями соответствующих корневых подпространств. □

5.4 Квадрики на прямой. Проективизация квадрики.

В этом параграфе $X = \mathbb{R}$, $F(x) = ax^2 + bx + c$.
Тогда квадрикой является:

- Любая пара точек
- Одна точка (“удвоенная”, в некотором смысле)
- Пустое множество

Рассмотрим проективизацию прямой $\mathbb{R}$, то есть $\mathbb{R}P^1$, с естественным отображением $x \mapsto [x : 1]$ ($\infty = [1 : 0]$). В таком случае *гомогенизированное уравнение* приобретает вид:

$$F'([x : y]) = ax^2 + bxy + cy^2$$

А квадрикой будет множество

$$Q = \{F([x : y] = 0 \mid [x : y] \in \mathbb{R}P^1)\}$$

удовлетворяющее свойствам

- $[x : y] \in Q \iff [\lambda x : \lambda y] \in Q$
- Q совпадает с $F(x) = 0$ на аффинной карте (при $y = 1$)

Тем самым из квадрики на прямой можно сделать квадрику на вещественной проективной прямой.

Замечание 27. Если рассматривать гомогенизацию на $\mathbb{C}P^1$, то у всякой квадрики будет ровно две точки.

Замечание 28. Аналогично можно гомогенизировать до однородного любой многочлен (не обязательно от одной) переменной.

5.5 Квадрики на плоскости. Проективные коники, топологическое строение коник на проективной плоскости.

Определение 30. *Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ и две фиксированные точки на ней, X_0 и X_1. Тогда для константы $c \in \mathbb{R}_{>0}$ геометрическое место точек $Y \in \mathbb{R}^2$, таких что $|X_0Y|+|YX_1| = c$, назовём эллипсом ϵ. Иными словами,*

$$\epsilon = \{Y \in \mathbb{R}^2 \ : \ |X_0Y| + |YX_1| = c\}$$

Замечание 29. Точки X_0 и X_1 называют *фокусами* эллипса ϵ.

Лемма 9. ***Принадлежность эллипса к квадрикам.***
Всякий эллипс является квадрикой.

Доказательство. Движением можно переместить фокусы так, чтобы для некоторого положительного a:

$$X_0 = (a, 0), \qquad X_1 = (-a, 0)$$

Тогда исходное условие можно переписать так:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = c$$

Откуда следует

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = c^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2c\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

То есть

$$2c\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = c^2 - 4ax$$

Что, в свою очередь, при возведении в квадрат даёт

$$4c^2x^2 - 8ac^2x + 4c^2a^2 + 4c^2y^2 = c^4 - 8axc^2 + 16a^2x^2$$

И приведём это к равносильной форме

$$(4c^2 - 16a^2)x^2 + (4c^2)y^2 + (4c^2a^2 - c^4) = 0$$

□

Замечание 30. Для непустого эллипса мы должны требовать, чтобы c было больше $2a$, иначе эллипс пуст по неравенству треугольника.

Замечание 31. Таким образом мы заодно доказали, что эллипс может быть приведён к квадратичной функции без линейных членов. Для непустого эллипса мы может переписать последнее уравнение так, сделав замену:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$$

Это будет “каноническим” уравнением эллипса, из которого очевидно, что с точки зрения аффинной геометрии эллипс ничем не отличается от окружности.

Рассмотрим гомогенизацию канонического уравнения эллипса при стандартном вложении $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}P^2$, $(x, y) \to [x : y : 1]$):

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = z^2$$

Что после аффинного преобразования сводится к уравнению

$$x^2 + y^2 = z^2$$

В таком случае в $\mathbb{C}P^2$ эллипсу будут принадлежать точки $[1:i:0]$ и $[1:-i:0]$ в любом случае, что иллюстрирует инвариантность нулей такого многочлена с вещественными коэффициентами при автоморфизмах поля комплексных чисел.
Аналогично, в общем случае можно рассматривать любые полиномиальные функции на аффинных пространствах, а также их гомогенизации и нули этих гомогенизаций.

Определение 31. *Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ и две фиксированные точки на ней, X_0 и X_1. Тогда для константы $c \in \mathbb{R}$ геометрическое место точек $Y \in \mathbb{R}^2$, таких что $|X_0Y|-|YX_1| = c$, назовём гиперболой γ. Иными словами,*

$$\gamma = \{Y \in \mathbb{R}^2 \ : \ |X_0Y| - |YX_1| = c\}$$

Замечание 32. Аналогично эллипсу, точки X_0 и X_1 называют фокусами гиперболы.

Лемма 10. ***Принадлежность гиперболы к квадрикам.***
Всякая гипербола является квадрикой.

Доказательство. Движениями можно переместить фокусы параболы в точки с координатами $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ для некоторого положительного a. Кроме того, не умаляя общности положим $c \geq 0$, ведь иначе можно просто поменять фокусы местами. Тогда исходное условие можно переписать следующим образом:

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} - \sqrt{(x-a)^2+y^2} = c$$

С помощью перенесения второго слагаемого направо и возведения в квадрат получим:

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = c^2 + 2c\sqrt{(x-a)^2+y^2} + x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

Что равносильно

$$4ax - c^2 = 2c\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

Возведём в квадрат обе части уравнения:

$$16a^2x^2 - 8axc^2 + c^4 = 4c^2x^2 - 8axc^2 + 4c^2a^2 + 4c^2y^2$$

Преобразуем после сокращения $-8axc^2$:

$$(16a^2 - 4c^2)x^2 - 4c^2y^2 = (4c^2a^2 - c^4)$$

□

Замечание 33. Для непустой гиперболы нам нужно гарантировать, чтобы $c \leq 2a$ (максимум функции разницы расстояний).

Замечание 34. Оценим наши коэффициенты: так как $c \leq 2a$, то $4 \cdot (c)^2 \leq 4 \cdot (2a)^2$, откуда коэффициент перед x положительный; $4c^2$ положительный по очевидным причинам, последний коэффициент получается из первого умножением на $\dfrac{c^2}{4}$, так что тоже положительный. Значит, поделив на него и заменив буквы, получим

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

то есть каноническое уравнение гиперболы. После аффинного преобразования и гомогенизации получаем:

$$x^2 - y^2 = z^2$$

Определение 32. *Рассмотрим точку p и прямую l в вещественной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Геометрическое место точек, равноудалённых от p и l, назовём параболой.*

С помощью аффинного преобразования можно положить $p = (0, 1)$, а прямую $\ell\colon y = -1$. В таком случае условие равноудалённости точки (x, y) можно переписать так:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(y+1)^2}$$

Что при возведении в квадрат даёт:

$$x^2 - 4y = 0 \Longrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Заменой $y \to \frac{y}{4}$ (аффинным преобразованием) получаем каноническое уравнение параболы, подтверждающее её принадлежность к квадрикам:

$$y = x^2$$

Рассмотрим гомогенизацию параболы в $\mathbb{R}P^2$:

$$yz = x^2$$

В таком случае множеству точек, удовлетворяющих данному равенству, принадлежит в том числе и точка $[0 : 1 : 0]$ — бесконечно удалённая точка. Тем самым, ветки параболы в $\mathbb{R}P^2$ "замыкаются", а следовательно топологически она ничем не отличается от окружности. Заметим, что гипербола тоже будет окружностью (топологически) в $\mathbb{R}P^2$, но она будет пересекать бесконечно удалённую прямую уже в двух точках. Таким образом получается, что топологически эллипс, парабола и гипербола отличаются только лишь количеством точек пересечения с бесконечно удалённой прямой — их 0, 1 и 2 соответственно, что значит их проективные аналоги неотличимы друг от друга.
Возьмём прямую в $\mathbb{R}^3$ с котангенсом угла наклона a. Вращением её относительно оси Oz получим **конус**, уравнение которого будет

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Заметим, что все встречавшиеся нам квадрики являются сечениями конуса плоскостью, не проходящей через (0, 0, 0):

- Сечением плоскости, перпендикулярной Oz, мы получаем окружность.
- Постепенно "наклоняя" эту плоскость, поворачивая её относительно прямой, лежащей в этой плоскости и параллельной оси Oy, мы будем получать эллипсы.
- Когда угол наклона будет совпадать с наклоном образующей прямой, мы получим параболу.
- Когда угол наклона станет больше, мы получим гиперболу сечением "верхней" и "нижней" частей конуса.

5.6 Проективные квадрики

Определение 33. *Пусть Q — квадратичная форма на $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда ясно, что, так как Q — однородный многочлен от координат степени 2,*

$$Q(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^2 Q(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

Квадрикой в $\mathbb{R}P^n$ называют множество точек, удовлетворяющих однородному уравнению

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Рассмотрим сначала вещественные проективные квадрики. Как мы уже поняли, квадратичная форма в $\mathbb{R}^3$ задаёт проективную квадрику. Если квадратичная форма невырожденная, то заменой координат её можно привести к одному из четырех видов:

- $x^2 + y^2 + z^2$
- $x^2 + y^2 - z^2$
- $-x^2 - y^2 + z^2$
- $-x^2 - y^2 - z^2$

Отсюда получаем следующие проективные квадрики:

- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ — пустое множество.
- $x^2 + y^2 - z^2$ — конус.
- $-x^2 - y^2 + z^2$ — конус.
- $-x^2 - y^2 - z^2$ — пустое множество.

То есть, все непустые невырожденные квадрики проективно эквивалентны (одна переводится в другую проективной заменой координат). Заметим, что рассматривая сечения этого конуса плоскостью (то есть, рассматриваю проективные квадрики в аффинной карте) мы будем получать знакомые нам конические сечения, то есть, квадрики на плоскости. Теперь рассмотрим комплексные проективные квадрики:

5.7 Классификация кривых и поверхностей второго порядка

В этом параграфе X — аффинное пространство, снабжённое евклидовой структурой.

Теорема 19 (Декартовы координаты квадратичной функции)**.** *Пусть $F : X \to \mathbb{R}$ — квадратичная функция. Тогда существует* ***декартова система координат*** *(точка отсчёта и ортонормированный базис), такой что найдутся $a_1, a_2, \dots, a_n, b, c \in \mathbb{R}, b > 0$, при которых для любого вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполняется*

$$\left[\begin{aligned} &F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \ldots + a_nx_n^2 + c \\ &F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + bx_n \end{aligned}\right.$$

то есть функция F имеет одну из этих двух форм в этой системе координат.

Доказательство. Разложим функция $F = Q(x)+L(x)+C$, где Q — квадратичная форма, L — линейная форма, C — константа. В какой-то системе координат мы можем добиться, согласно предыдущей теореме,

$$\begin{cases} Q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 \\ L(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots b_nx_n \end{cases}$$

Сделаем это так: для каждого i такого, что a_i и b_i не 0, будем сдвигать 0:

$$0 \to -\frac{b_i}{2a_i}v_i$$

Что соответствует группировке

$$a_ix_i^2 + b_ix_i = a_i(x_i + \frac{b_i}{2a_i})^2 + \mathrm{const}$$

и замене

$$x_i \to x_i + \frac{b_i}{2a_i}$$

Таким образом, мы сможем привести функцию F в следующему виду (после перенумерации слагаемых):

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_kx_k^2 + b_{k+1}x_{k+1} + b_{k+2}x_{k+2} + \ldots + b_nx_n + c$$

Возьмём базис $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_n$, где $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — старые вектора, а v_n определяется как

$$v_n = \frac{b_{k+1}v_{k+1} + b_{k+2}v_{k+2} + \ldots + b_{n-1}v_{n-1} + b_n x_n}{\sqrt{b_{k+1}^2 + b_{k+2}^2 + \ldots + b_n^2}}$$

В таком базисе, обозначив

$$b = \sqrt{b_{k+1}^2 + b_{k+2}^2 + \ldots + b_n^2} > 0$$

Функция F принимает вид

$$F(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_k x_k^2 + b x_n + c$$

и перенесём начало на $-\dfrac{c}{b_n} v_n$. Если b стало меньше 0, то заменой $x_n \to -x_n$ оно станет вновь положительным. Таким образом, у нас возможны две ситуации, при $b > 0$ и при $b = 0$. Оба этих случая и приводят нас к соответствующему ответу. □

Теорема 20. ***(Классификация квадрик в $\mathbb{R}^2$)***
Любая квадрика на плоскости $\mathbb{R}^2$ есть один из следующих видов:

- *Пустое множество: например, $x^2 + y^2 + 1 = 0$.*
- *Точка: например, $x^2 + y^2 = 0$.*
- *Прямая: например, $x^2 = 0$.*
- *Две параллельные прямые: например, $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$.*
- *Две пересекающиеся прямые: например, $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$.*
- *Парабола: аффинно она связна, неограничена и не содержит прямых.*
- *Эллипс: аффинно он ограничен и не содержит прямых.*
- *Гипербола: аффинно она не связна, неограничена и не содержит прямых.*

Доказательство. Будем считать, что эти варианты различны, так как в формулировке теоремы обоснованы их различия относительно аффинных преобразований. Согласно теореме о декартовых координатах квадратичной функции, уравнение квадрики можно свети к одному из двух следующих вариантов:

$$\left[\begin{aligned} ax^2 + by = 0 \\ ax^2 + by^2 + c = 0 \end{aligned}\right.$$

где $a \neq 0$. Итак, рассмотрим все варианты отдельно:

1. Пусть функция свелась к $ax^2 + by = 0$. Тогда возможны два случая:
   - Если $b = 0$, то это прямая.
   - Если $b \neq 0$, то это парабола.
2. Пусть функция свелась к $ax^2 + by^2 + c = 0$. Не умаляя общности, положим $a > 0$. Рассмотрим случаи:
   - Пусть $c = 0$. Если $b > 0$, то мы получаем уравнение точки. Если $b = 0$, то это прямая. Если же $b < 0$, то это две пересекающиеся прямые.
   - Пусть $c > 0$. Тогда, если $b \geq 0$, то это пустое множество; если же $b < 0$, то мы имеем уравнение гиперболы.
   - Пусть $c < 0$. Тогда, если $b > 0$, то это эллипс. Если $b < 0$, то это вновь гипербола. Если же $b = 0$, то это две параллельные прямые.

□

5.8 Принцип Минковского-Хассе для квадратичных форм.

В этом параграфе мы займемся доказательством одного из самых красивых и геометричных фактов в алгебраической теории чисел. Поговорим вначале просто о квадратичных формах на $\mathbb{Q}_p$.
Так как тоерема о диагонализации верна над произвольным полем, а $\mathbb{Q}_p$ — поле, любая квадратичная форма на $\mathbb{Q}_p$ представима в виде

$$F(x) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2, \ \alpha_i \neq 0$$

причем ясно, что либо $\alpha_i = p^{2k_i}\varepsilon_i$, либо $\alpha_i = p^{2k_i+1}\varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}_p^*$.
Делая замены вида $y_i = p^{k_i}x_i$ мы всегда сможем привести форму к виду

$$F(x) = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r^2 + p(_{r+1}x_{r+1}^2 + \ldots + \varepsilon_{r+n}x_{r+n}^2) = F_0 + pF_1$$

Заметим, что над $\mathbb{Q}_p$ эта форма будет эквивалента форме $F_1 + pF_0$. Для доказательства центральной теоремы этого параграфа нам понадобится следующая лемма:

Лемма 11. *Если $p2$ и $0 < r < n$, а $F = F_1 + pF_0$, то форма F представляет 0 над $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда F_0 или F_1 представляет 0 над $\mathbb{Q}_p$.*

а точнее,её следствие:

Следствие 8. *Если $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{Z}_p^*$, то $f = \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r^2$ представляет 0 над $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда сравнение*

$$f(x_1, \ldots, x_r) \equiv 0 \pmod p$$

имеет в $\mathbb{Z}_p$ нетривиальное решение.

Всё это доказывается достаточно быстро, но, к сожалению, сейчас совершенно нет времени на такие проверки. Приступим наконец к доказательству теоремы.

Теорема 21. ***(Минковского-Хассе)***
Рациональная квадратичная форма представляет 0 над полем $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда она представляет 0 над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{Q}_p$ для всех простых p.

Доказательство. В доказательстве мы рассмотрим канонически самый важный случай, где $n = 3$. Сразу отметим, что импликация в одну из сторон очевидна, так как $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ и $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$.
И так, по теореме о диагонализации квадратичной формы, наша форма рациональной заменой базиса приводится к виду

$$F(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \quad a_1 a_2 a_3 \neq 0$$

Так как она представляет 0 над $\mathbb{R}$, все три коэффицента не могут быть одного знака. Домножая на -1 мы всегда сможем добиться $a_1, a_2 > 0, \ a_3 < 0$.

Мы можем рассматривать $a_i \in \mathbb{Z}$ (домножив на lcm знаменателей), свободными от квадратов, так как если $a_1 \,\vdots\, p^2$ для некоторого p (то есть, $a_1 = p^2 u$), мы всегда можем сделать

$$p^2 u \cdot x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 \to u(x_1 p)^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 \to a_1' x_1'^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2.$$

Кроме того, можно полагать их попарно взаимно простыми, так как если $a_1 \,\vdots\, p$ и $a_2 \,\vdots\, p$, то домножая на p мы имеем

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 \to \frac{a_1}{p}(px_1)^2 + \frac{a_2}{p}(px_2) + pa_3 x_3^2 \to a_1' x_1'^2 + a_2' x_2'^2 + a_3' x_3^2$$

Таким образом, мы свели задачу к рассмотрению формы

$$F(x,y,z) = ax^2 + by^2 - cz^2$$

где a, b, c — попарно взаимно простые свободные от квадратов натуральные числа.

Пусть p — простой делитель c (тогда $a \not\vdots p$, $b \not\vdots p$), а (x_0, y_0, z_0) — ненулевое решение уравнения $F(x,y,z) = 0$ над $\mathbb{Q}_p$.
По следствию 8 это влечет, что сравнение

$$ax^2 + by^2 \equiv 0 \pmod p$$

имеет нетривиальное решение, обозначим его за (x_0, y_0). Тогда ясно, что

$$b \equiv y_0^{-2}(-ax_0^2) \pmod p$$

а отсюда мы имеем

$$ax^2 + bx^2 \equiv ay_0^{-2}(xy_0 + yx_0)(xy_0 - yx_0) \pmod p$$

аналогичное разложение мы будем иметь и по модулю всех простых p, делящих коэффицент a и коэффицент b.
Таким образом, для любого простого p, делящего abc существуют линейные формы M^p и $L^{(p)}$, для которых

$$F \equiv L^{(p)} M^{(p)} \pmod p$$

По китайской теореме об остатках найдем такие целочисленные линейные формы L и M, что

$$L \equiv L^{(p)} \pmod p, M \equiv M^{(p)} \pmod p \quad \forall p \text{ — простое, } p \mid abc$$

и соответственно $F \equiv LM \pmod{abc}$. Будем рассматривать целочисленные x, y, z в диапазоне

$$0 \le x < \sqrt{bc},\ 0 \le y < \sqrt{ac},\ 0 \le z < \sqrt{ab} \text{ — } (\ddot\smile)$$

Если рассматривать случаи, кроме $a, b, c = 1$, то не все числа из тройки $\sqrt{ab}, \sqrt{ac}, \sqrt{bc}$ целые (так как a, b, c — попарно взаимно простые), а значит, число троек (x, y, z), удовлетворяющих $(\ddot\smile)$ больше, чем $\sqrt{ac}\sqrt{ab}\sqrt{bc} = abc$.

Отсюда следует, что существуют две различные тройки, на которых L принимает одно и тоже значение по модулю abc, то есть

$$L(x_1, y_1, z_1) \equiv m \pmod{abc},\ L(x_2, y_2, z_2) \equiv m \pmod{abc}.$$

Так как форма L линейная, это влечет $L(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \equiv 0 \pmod{abc}$, то есть мы нашли такие (x_0, y_0, z_0), где $|x_0| < \sqrt{bc}$, $|y_0| < \sqrt{ac}$, $|z_0| < \sqrt{ab}$ и $L(x_0, y_0, z_0) \equiv 0 \pmod{abc}$.

$$F \equiv LM \pmod{abc} \Rightarrow ax_0^2 + by_0^2 - cz_0^2 \equiv 0 \pmod p,\ -abc < ax_0^2 + by_0^2 - cz_0^2 < 2abc.$$

Из оценки следует, что либо $ax_0^2 + by_0^2 - cz_0^2 = 0$, $ax_0^2 + by_0^2 - cz_0^2 = abc$. В первом случае теорема доказана, во второ случае нужный результат следует из хитрого тождества:

$$a(x_0z_0 + by_0)^2 + b(y_0z_0 - ax_0)^2 - c(z_0 + ab)^2 = 0$$

□

6. Кубические уравнения и эллиптические кривые.

6.1 Существование рациональных решений.

Оказывается, что в отличие от квадратичных форм, для рациональных кубических форм $F(x, y, z)$ не существует (пока не найдено) алгоритма, который позволяет установить существование нетривиальных рациональных решений уравнения $F = 0$, хотя изучено большое количество конкретных уравнений, например

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$$

Связано это во многом с тем, что для кубических форм перестает выполнятся принцип Минковского-Хассе. Например, уравнение

$$3x^2 + 4y^2 + 5z^2 0$$

имеет нетривиальные решения над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{Q}_p$ для всех простых p, но не имеет нетривиальных решений над $\mathbb{Q}$.

6.2 Эллиптические кривые.

Определение 34. *Плоской алгебраической кривой называт кривую в $\mathbb{C}P^2$, заданную однородным полиномиальным уравнением*

$$\sum_{i+j+k} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0,\ i, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \exists (i, j, k)\colon a_{ijk} \neq 0$$