

Летняя математическая школа ЛНМО

Поставы, 2022г.

# Алгебраическая геометрия и теория чисел

**In nature, poisonous creatures  
will develop bright colors to  
warn others of their toxicity**



**Graduate Texts  
in Mathematics**

Robin Hartshorne

**Algebraic  
Geometry**

 Springer

*Конспект по материалам лекций, прочитанных М.И. Магиным  
11-му математическому классу*



Лаборатория непрерывного  
математического образования

# Алгебраическая геометрия и теория чисел

## Содержание

<b>1. Нормированные поля</b>	<b>2</b>
1.1 Нормированное поле. Неархимедовы нормы.	2
<b>2. <math>p</math>-адические числа</b>	<b>4</b>
2.1 Кольцо целых $p$ -адических чисел.	4
2.2 Локализация и поле частных кольца.	6
2.3 Поле $p$ -адических чисел, как поле частных кольца $\mathbb{Z}_p$ .	9
2.4 Сходимость в поле $p$ -адических чисел	10
2.5 Лемма Гензеля:	14
2.6 Пополнение метрических пространств.	16
2.7 Пополнение нормированного поля.	17
<b>3. Введение в алгебраическую геометрию</b>	<b>19</b>
3.1 Квадрики и рациональная параметризация квадрик.	19
<b>4. Проективная геометрия</b>	<b>21</b>
4.1 Модели построения проективной плоскости и связь между ними	21
4.2 Проективные пространства и однородные координаты	22
4.3 Проективное пополнение аффинного пространства	22
4.4 Проективное пополнение $\mathbb{R}^n$	22
4.5 Проективные преобразования и проективный базис	23
4.6 Проективная классификация квадрик.	24
<b>5. Квадратичные формы и квадрики</b>	<b>25</b>
5.1 Билинейные формы	25
5.2 Квадратичные формы	26
5.3 Диагонализация билинейных форм	27
5.4 Квадрики на плоскости	28
5.5 Проективные квадрики	31
5.6 Классификация кривых и поверхностей второго порядка	31

# 1. Нормированные поля

## 1.1 Нормированное поле. Нейрхимедовы нормы.

Здесь и в дальнейшем будем полагать  $F$  полем, хотя многие вещи работают и для кольца (а для области целостности существует единственное продолжение на поле частных).

**Определение 1.** Нормой (нормированием, абсолютным значением) на поле  $F$  называют отображение  $\|\cdot\|: F \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
2.  $\forall x, y \in F \ \|xy\| = \|x\|\|y\|$ .
3.  $\exists C > 0: \forall x, y \in F:$

$$\|x + y\| \leq C \cdot \max(\|x\|, \|y\|).$$

Пара  $(F, \|\cdot\|)$  называется нормированным полем.

*Замечание 1.* Тем, кто уже до этого видел определение нормы, это определение может показаться странным, так как обычно вместо третьего свойства требуют неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in F \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ясно, что третье свойство следует из неравенства треугольника с  $C = 2$ . Ниже мы покажем и обратную импликацию.

Ясно, что любая норма задаёт метрику  $d(x, y) = \|x - y\|$ , а любая метрика индуцирует топологию стандартным образом.

**Пример 1.** Если  $F \leq \mathbb{C}$ , то подходит  $|\cdot|$  (модуль комплексного числа). Если  $F \leq \mathbb{R}$  или  $F \leq \mathbb{Q}$ , то подходит  $|\cdot|$ .

**Пример 2.** На любом поле можно ввести тривиальную норму (иногда соответствующую ей метрику называют метрикой лентяя):

$$\|x\| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

**Теорема 1.** Если в определении 1 постоянная  $C$  равна 2, то норма удовлетворяет неравенству треугольника.

*Доказательство.* Сначала отметим, что если  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq 2^m$ , то в случае произвольной постоянной  $C$  выполняется оценка:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \leq C^m \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$$

В самом деле, достаточно просто расписать дерево неравенств.

Отсюда следует неравенство

$$\|x_1 + \dots + x_n\| \leq (2n)^{c_0} \max_{1 \leq k \leq n} (\|x_k\|), \quad c_0 = \log_2 C$$

В самом деле,  $(2n)^{\log_2 C} = C \cdot n^{\log_2 C}$ . Это также даёт удобную оценку:  $\|n\| \leq (2n)^{c_0}$ .

Теперь заметим, что в нашем случае  $c_0 = \log_2 C = \log_2 2 = 1$ , а значит, мы можем провести вот такую оценку:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^n &= \|(x+y)^n\| = \left\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left\| \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left( 2 \binom{n}{k} \|x\|^k \|y\|^{n-k} \right) \leq \\ &\leq 4(n+1)(\|x\| + \|y\|)^n \end{aligned}$$

Преобразуем это неравенство

$$\left( \frac{\|x+y\|}{\|x\| + \|y\|} \right)^n \leq 4(n+1) \Leftrightarrow \frac{\|x+y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq 4^{\frac{1}{n}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

В пределе при  $n \rightarrow \infty$  получаем:

$$\frac{\|x+y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq 1 \Leftrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

*Замечание 2.* Пример  $F = \mathbb{C}$  с нормой  $\|\cdot\| = |\cdot|^\alpha$ ,  $\alpha > 1$  показывает, что константу  $C = 2$  нельзя улучшить.

**Следствие 1.** *Норма непрерывна.*

**Определение 2.** *Нормы, с постоянной  $C = 1$  в определении 1 называют неархимедовыми. Нормы, не являющиеся неархимедовыми, называют архимедовыми.*

**Пример 3.** *Тривиальная норма на любом поле  $F$  является неархимедовой.*

**Определение 3.** *Ясно, что любое  $x \in \mathbb{Q}$  представимо в виде  $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \not\equiv p$ ,  $b \not\equiv p$ ,  $\gcd(a, b) = 1$ , а  $n \in \mathbb{Z}$ . В таком случае число  $n$  называют  $p$ -адическим показателем числа  $x$  и обозначают  $v_p(x)$ .*

**Определение 4. (Самое важное)**

*Пусть  $p$  — простое число. Тогда норму*

$$\|x\|_p = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ p^{-v_p(x)}, & x \neq 0 \end{cases}$$

*на поле  $\mathbb{Q}$  называют  $p$ -адической нормой.*

*Замечание 3.* Ясно, что подходит  $r^{-v_p(x)}$ , где  $r > 1$ , но  $p$  брать удобно, так как для  $x \in \mathbb{Q}^*$  справедлива формула произведения

$$1 = \prod_p |x| \cdot \|x\|_p$$

**Лемма 1.** *Если норма неархимедова, то для  $x, y$ :  $\|x\| \neq \|y\|$  выполняется  $\|x+y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ .*

**Следствие 2.** *Рассмотрим  $(F, \|\cdot\|)$ , где норма  $\|\cdot\|$  неархимедова. Тогда, если  $b \in B_r(a)$ , то  $B_r(a) = B_r(b)$ .*

**Следствие 3. (Забавное)**

*Если на поле  $F$  введена неархимедова норма  $F$ , то  $\forall x, y, z \in F$  по крайней мере два числа из  $\|x-y\|$ ,  $\|x-z\|$ ,  $\|y-z\|$  равны.*

*Иными словами, в метрическом пространстве  $(F, d)$  ( $d(x, y) = \|x-y\|$ ) все треугольники равнобедренные.*

## 2. $p$ -адические числа

### 2.1 Кольцо целых $p$ -адических чисел.

Прежде чем давать какие-либо определения, рассмотрим следующий мотивирующий пример. Рассмотрим сравнение  $x^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $n = 1$ , то ясно, что

$$x_0 \equiv \pm 3 \pmod{7}$$

Теперь рассмотрим  $n = 2$ .  $x^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod{7}$ , а значит, решения сравнения с  $n = 2$  надо искать в виде  $x_0 + 7t_1$ .

Займемся поиском решений вида  $x_1 = 3 + 7t_1$ . Подставим:

$$(3 + 7t_1)^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Leftrightarrow 9 + 6 \cdot 7t_1 + 7^2 t_1^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow 1 + 6t_1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow t_1 \equiv 1 \pmod{7}$$

Отсюда имеем решение  $x_1 \equiv 3 + 7 \cdot 1 \pmod{7^2}$ .

При  $n = 3$  мы получим  $x_2 = x_1 + 7^2 t_2$ , и, подставляя

$$(3 + 7 + 7^2 t_2)^2 \equiv 2 \pmod{7^3},$$

мы найдём  $t_2 \equiv 2 \pmod{7}$ , а значит,

$$x_2 \equiv 3 + 7 \cdot 1 + 7^2 \cdot 2 \pmod{7^3}$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  со свойствами

$$x_0 \equiv 3 \pmod{7}, \quad x_n \equiv x_{n-1} \pmod{7^n}, \quad x_n^2 \equiv 2 \pmod{7^{n+1}}$$

Процесс построения этой последовательности может напомнить внимательному читателю процесс вычисления  $\sqrt{2}$  при помощи приближения рациональными числами. Там мы тоже строим последовательность рациональных чисел  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , квадраты которых становятся сколь угодно близки к 2, например,  $|r_n^2 - 2| < 1/10^n$ .

Если мы зафиксируем простое число  $p$ , будем считать два целых числа близкими, если их разность делится на достаточно большую степень  $p$  (то есть, близкими в смысле  $p$ -адической метрики):

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = p^{-v_p(x-y)}$$

В конкретном примере выше,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \ d_7(x_n^2, 2) < \varepsilon$$

Как мы помним, задание последовательности рациональных чисел  $\{r_n\}$  определяет вещественное число  $\sqrt{2}$ . Проводя аналогию, здесь мы также можем предположить, что последовательность  $\{x_n\}$  определяет некоторое число  $\alpha$  совершенно новой природы.

Заметим также, что если у нас есть такая последовательность рациональных чисел  $\{r'_n\}$ , что  $\forall \varepsilon > 0 \ N: \forall n > N \ |r_n - r'_n| < \varepsilon$ , то её пределом также будет  $\sqrt{2}$  (и в этом смысле определение корректно).

Соответственно, здесь нам также будет естественно предположить, что последовательность  $\{x'_n\}$ , для которой  $x_n \equiv x'_n \pmod{7^{n+1}}$ , определяет то же самое число  $\alpha$ .

*Замечание 4.* В общем, во всей этой аналогии мы просто заменили метрику на  $p$ -адическую.

**Определение 5.** Пусть  $p$  — некоторое простое число. Последовательность целых чисел  $\{x_n\}$ , обладающих свойством

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n} \quad \forall n \geq 1$$

определяет новый объект, называемый  $p$ -адическим числом. Две последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{x'_n\}$  определяют одно и то же целое  $p$ -адическое число, когда  $x_n \equiv x'_n \pmod{p^{n+1}} \quad \forall n \geq 0$ .

То есть, целые  $p$ -адические числа — предел по  $p$ -адическое норме целых.

Множество всех целых  $p$ -адических чисел мы будем обозначать через  $\mathbb{Z}_p$ .

Обычные целые числа (не  $p$ -адические) будем с этого момента называть целыми рациональными.

Заметим, что каждому целому рациональному числу  $x$  можно сопоставить целое  $p$ -адическое число, определяемое последовательностью  $\{x, x, x, \dots\}$ . Такое целое  $p$ -адическое число мы будем обозначать той же буквой  $x$ . Таким образом, мы получили естественное вложение  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$  (инъективность вполне очевидна).

**Замечание 5. Канонический способ задания  $p$ -адического числа.**

Пусть целое  $p$ -адическое число задается последовательностью  $\{x_n\}$ . Обозначим наименьшее неотрицательное число, сравнимое с  $x_n$  по модулю  $p^{n+1}$  за  $\overline{x_n}$ .

$$x_n \equiv \overline{x_n} \pmod{p^{n+1}}, \quad 0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1}$$

Ясно, что

$$\overline{x_n} \equiv x_n \equiv x_{n-1} \equiv \overline{x_{n-1}} \pmod{p^n}$$

То есть, последовательность  $\{\overline{x_n}\}$  определяют то же целое  $p$ -адическое число, что и  $\{x_n\}$ . Заметим, что если две последовательности  $\{\overline{x_n}\}$  и  $\{\overline{y_n}\}$  определяют одно и то же целое  $p$ -адическое число, то в силу

$$\overline{x_n} \equiv \overline{y_n} \pmod{p^{n+1}}, \quad 0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1}, \quad 0 \leq \overline{y_n} < p^{n+1}$$

мы имеем  $\overline{x_n} = \overline{y_n}$ , то есть, такое представление единственно. Его мы и будем называть каноническим представлением.

Заметим, что  $\overline{x^n} \equiv \overline{x_{n-1}} \pmod{p^n}$ , а так как  $0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1}$ , вся каноническая последовательность имеет вид

$$\{a_0, a_0 + a_1p, a_0 + a_1p + a_2p^2, \dots\}, \quad 0 \leq a_i < p$$

С другой стороны, ясно, что каждая последовательность такого вида задаёт некоторое целое  $p$ -адическое число.

Ясно, что операции сложения и умножения на  $p$ -адических числах определяются поточечными операциями с соответствующими последовательностями.

Все свойства операций очевидны, значит,  $\mathbb{Z}_p$  — коммутативное кольцо. Поймём что-нибудь про множество обратимых элементов кольца.

**Теорема 2.** Целое  $p$ -адическое число  $\alpha$ , определяемое последовательностью  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  я тогда и только тогда, когда  $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ . Тогда существует такое целое  $p$ -адическое число  $\beta$ , что  $\alpha\beta = 1$ .

Пусть  $\beta$  определяется последовательностью  $\{y_n\}$ . Тогда

$$x_n y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$$

В частности,  $x_0 y_0 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ . И обратно, так как  $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$  и  $x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$  мы имеем

$$x_n \equiv x_{n-1} \equiv \dots \equiv x_0 \pmod{p} \Rightarrow x_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Значит, так как  $p$  — простое,  $\forall n \exists y_n: x_n y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$ .

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}, \quad x_n y_n \equiv x_{n-1} y_{n-1} \pmod{p^n} \Rightarrow y_n \equiv y_{n-1} \pmod{p^n}$$

а значит,  $\{y_n\}$  определяет некоторое целое  $p$ -адическое число  $\beta$ .

Таким образом,  $\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ . □

**Теорема 3.** Любое отличное от нуля целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  можно единственным образом представить в виде

$$\alpha = p^m \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*, \quad m \in \mathbb{N}$$

*Доказательство.* Если  $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ , то равенство справедливо при  $m = 0$ .

Пусть теперь  $\alpha \notin \mathbb{Z}_p^*$  и  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ . Тогда, по предыдущей теореме  $x_0 \equiv 0 \pmod{p}$ . Так как  $\alpha \neq 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad x_n \not\equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$ . Пусть  $m$  — наименьший индекс, для которого

$$x_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}}$$

Заметим, что в таком случае  $\forall s \geq 0$

$$x_{m+s} \equiv x_{m-1} \equiv 0 \pmod{p^m} \Rightarrow y_s = \frac{x_{m+s}}{p^m} \in \mathbb{Z}$$

$$p^m y_s - p^m y_{s-1} = x_{m+s} - x_{m+s-1} \equiv 0 \pmod{p^{m+s}} \Rightarrow y_s \equiv y_{s-1} \pmod{p^s}$$

То есть, последовательность  $\{y_s\}$  тоже определяет некоторое  $p$ -адическое число  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p$ . Заметим, что  $y_0 = x_m/p^m \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$ .

Из сравнения

$$p^m y_s = x_{m+s} \equiv x_s \pmod{p^{s+1}}$$

следует, что  $\alpha = p^m \cdot \varepsilon$ . Покажем теперь единственность. Предположим, что  $\alpha = p^k \xi$ ,  $k \geq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{Z}_p^*$ . Пусть  $\{z_s\} \rightarrow \xi$ .

$$p^m y_s \equiv p^k z_s \pmod{p^{s+1}} \quad \forall s \geq 0$$

Так как  $\varepsilon$  и  $\xi$  — обратимые элементы кольца, по предыдущей теореме  $y_s \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $z_s \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Подставим в предыдущее сравнения  $s = m$ :

$$p^m y_m \equiv p^k z_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}} \Rightarrow k \leq m$$

Так как мы можем проделать то же самое абсолютно симметрично для  $k$ , мы также имеем  $k \geq m$ , а значит  $k = m$ . То есть, мы получили, что  $y_{m+s} \equiv z_{m+s} \pmod{p^{s+1}}$ , а так как  $y_{s+1} \equiv y_s \pmod{p^{s+1}}$ ,  $z_{s+1} \equiv z_s \pmod{p^{s+1}}$ , мы имеем  $z_s \equiv y_s \pmod{p^{s+1}} \quad \forall s \geq 0 \Rightarrow \varepsilon = \xi$ .  $\square$

**Следствие 4.**  $\mathbb{Z}_p$  — область целостности.

*Доказательство.* Упражнение в листочке.  $\square$

Теперь ясно, что число  $m$  в представлении  $\alpha = p^m \varepsilon$  —  $p$ -адический показатель  $\alpha$  ( $v_p(\alpha)$ ).

В терминах  $p$ -адического показателя легко выразить свойства делимости  $p$ -адических чисел.

**Следствие 5.** Целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  делится на целое  $p$ -адическое число  $\beta$  тогда и только тогда, когда  $v_p(\alpha) \geq v_p(\beta)$ .

Резюмируя всё это, мы получили, что в кольце  $\mathbb{Z}_p$  всего один (с точностью до ассоциированности) простой элемент — число  $p$ , а все остальные (отличные от нуля) — его степени, домноженные на обратимые.

## 2.2 Локализация и поле частных колца.

Вообще, эта тема совершенно никак не относится к программе курса, но, прочитать всё равно надо.

**Идея:** уметь обращаться набор элементов кольца универсальным образом.

*Замечание 6.* Отметим, что обратимый элемент не может являться делителем нуля, поэтому, если мы хотим обращать делители нуля, все элементы, которые в произведении с ним дают 0 должны перейти в 0. Кроме того, если два элемента обратимы, то их произведение обратимо. Кроме того, если мы добавим в множество, которое хотим обращать единицу, то ничего не изменится, так как умножение на единицу ничего не меняет.

Таким образом, будем заниматься обращением множеств, замкнуты относительно умножения и содержат единицу (будем называть такие множества мультипликативными).

Тут можно рассказать, с чего бы это называется локализацией, но как-то лень, если время останется, расскажу.

**Определение 6.** Пусть  $S$  — мультипликативное подмножество кольца  $R$ . Локализацией кольца  $R$  в  $S$  называется кольцо  $S^{-1}R$  вместе с локализационным гомоморфизмом  $\lambda_s: R \rightarrow S^{-1}R$ , удовлетворяющее свойствам

1.  $\forall s \in S \lambda_s(s)$  обратим в  $S^{-1}R$ .
2. Для любого гомоморфизма  $\varphi: R \rightarrow A$ , при котором  $\varphi(s) \in A^*$  для всех  $s \in S$  существует единственный гомоморфизм  $\psi: S^{-1}R \rightarrow A$  такой, что  $\psi \circ \lambda_s = \varphi$ . Иными словами, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \lambda_s & \nearrow \psi \\ & S^{-1}R & \end{array}$$

Как и всегда, определение объекта через универсальное свойство ничего не говорит о существовании объекта, поэтому сейчас мы будем больно и мучительно строить локализацию.

### Построение локализации:

Определим отношение  $\sim$  на множестве  $R \times S$  по правилу

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff ss_2r_1 = ss_1r_2$$

*Замечание 7.* Здесь мы домножаем на  $s$  как раз за тем, чтоб делители нуля ушли в ноль.

**Утверждение 1.**  $\sim$  — отношение эквивалентности.

*Доказательство.* Рефлексивность и симметричность очевидны.

Самое неприятное — транзитивность.

Пусть  $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$  и  $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$ , то есть

$$sr_1s_2 = sr_2s_1, \quad s'r_2s_3 = s'r_3s_2, \quad s, s' \in S$$

Домножим первое равенство  $s's_3$ , а второе  $ss_1$ , получим

$$sr_1s_2 = sr_2s_1 \rightarrow s's_3sr_1s_2 = s's_3sr_2s_1, \quad s'r_2s_3 = s'r_3s_2 \rightarrow ss_1s'r_2s_3 = ss_1s'r_3s_2$$

Остается заметить, что

$$ss's_2 \in S \Rightarrow (r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$$

то есть, транзитивность доказана. □



Теперь, положим  $S^{-1}R = R \times S / \sim$ . Класс эквивалентности, содержащий представитель  $(r, s)$  будем обозначать  $\frac{r}{s}$ .

Определим локализационный гомоморфизм  $\lambda_s: R \rightarrow S^{-1}R$  формулой  $\lambda_s(r) = \frac{r}{1}$ .

Теперь, научимся складывать дроби.

**Теорема 4.** Пусть  $S$  — мультипликативное подмножество кольца  $R$ . Определим на  $S^{-1}R$  операции следующим образом

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_2 s_1}, \quad \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{s_1 r_2 + s_2 r_1}{s_1 s_2}$$

Тогда  $S^{-1}R$  — локализация  $R$  в мультипликативном подмножестве  $S$  с локализационным гомоморфизмом  $\lambda_s$  (как написано выше).

*Доказательство.* Докажем сначала, что наше определение сложения и умножения не зависит от выбора представителя.

Пусть выполняются равенства

$$\frac{r'_1}{s'_1} = \frac{r_1}{s_1} \leftrightarrow sr_1 s'_1 = sr'_1 s_1, \quad \frac{r'_2}{s'_2} = \frac{r_2}{s_2} \leftrightarrow s'r_2 s'_2 = s'r'_2 s_2$$

Перемножим последние равенства

$$ss'r_1 s'_1 r_2 s'_2 = ss'r'_1 s_1 r'_2 s_2$$

Отсюда имеем

$$\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} = \frac{r'_1 r'_2}{s'_1 s'_2}$$

Далее, будет некоторая **боль**, а именно, надо доказать

$$\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} = \frac{r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1}{s'_1 s'_2}$$

Если Вы немного помедитируете на формулы ниже, станет понятно, почему это так:

$$ss'(r_1 s_2 + r_2 s_1) s'_1 s'_2 = ss'(e_1 s_2 s'_1 s'_2 + r_2 s_1 s'_1 s'_2) = ss'(r'_1 s_2 s_1 s'_2 + r'_2 s_1 s'_2 s_2) = ss'(r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1) s_1 s_2$$

Вообще, честно говоря, также нужно доказывать ассоциативность сложения, коммутативность и дистрибутивность. Давайте непосредственно проверим ассоциативность сложения

$$\begin{aligned} \left( \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} \right) + \frac{r_3}{s_3} &= \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} + \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + r_2 s_1 s_3 + r_3 s_1 s_2}{s_1 s_2 s_3} \\ \frac{r_1}{s_1} + \left( \frac{r_2}{s_2} + \frac{r_3}{s_3} \right) &= \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2 s_3 + r_3 s_2}{s_2 s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + r_2 s_3 s_1 + r_3 s_2 s_1}{s_1 s_2 s_3} \end{aligned}$$

Нейтральным элементом по сложению будет  $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$ , обратным по сложению к  $\frac{r}{s}$  —  $-\frac{r}{s}$ . Нейтральным элементом по умножению  $-\frac{1}{1} = \frac{s}{s}$ . Проверим свочтва локализации:

$$\lambda_s(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1$$

то есть, первое свойство выполнено.

Пусть  $\varphi: R \rightarrow A$  — такой гомоморфизм колец, что  $\varphi(s) \in A^* \forall s \in S$ . Определим отображение  $\psi: S^{-1}R \rightarrow A$  равенством  $\psi(\frac{r}{s}) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ .

Если  $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$ , то по определению

$$\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow r's = rs', \quad s'' \in S \Rightarrow \varphi(s'')\varphi(r')\varphi(s) = \varphi(s'')\varphi(r)\varphi(s')$$

Домножим на  $\varphi(s'')^{-1}\varphi(s')^{-1}\varphi(s)^{-1}$ , получим

$$\varphi(r')\varphi(s')^{-1} = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$$

а значит,  $\psi$  определён корректно. Так как  $\varphi(1) = 1$ , имеем  $\varphi = \psi \circ \lambda_S$ . Ясно, что  $\psi$  — гомоморфизм.

Равенство  $\varphi = \psi \circ \lambda_S$  однозначно задаёт  $\psi(\frac{r}{1}) = \varphi(r)$ . Так как  $\psi$  должен быть гомоморфизмом,

$$\varphi(r) = \psi(\frac{r}{1}) = \psi(\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{1}) = \psi(\frac{r}{s}) \cdot \varphi(s)$$

Так как по условию  $\varphi(s) \in A^*$ , имеем  $\psi(\frac{r}{s}) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ , что завершает доказательство.  $\square$

### ПРИМЕРЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ:

1. Для  $s \in R$  положим  $\langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Локализация  $\langle s \rangle^{-1}R$  обозначается через  $R_s$  и называется главной локализацией в элементе  $s$  (по аналогии с главным идеалом).
2. Если  $P$  — простой идеал кольца  $R$ , то  $R \setminus P$  является мультипликативным подмножеством. В этом случае локализация  $R_P = (R \setminus P)^{-1}R$  называется локализацией  $R$  в простом идеале  $P$ .  $R_P$  является локальным кольцом (т.е. кольцом с единственным максимальным идеалом).
3.  $S$  — множество всех элементов  $R$ , не являющийся делителями нуля. Тогда  $S^{-1}R$  называется полным кольцом частных кольца  $R$ . Это максимальная локализация, для которой гомоморфизм локализации инъективен.

Если  $R$  — область целостности, то  $\{0\}$  — простой идеал. Локализация в этом идеале, очевидно, будет полем, которое называется полем частных кольца  $R$ .

Иными словами, поле частных — это полное кольцо частных области целостности. Локализационный гомоморфизм — это универсальное вложение в следующем смысле:

**Лемма 2.** Пусть  $R$  — область целостности, а  $S = R \setminus \{0\}$ . Тогда  $F = S^{-1}R$  является полем, а гомоморфизм локализации  $\lambda_S: R \rightarrow F$  инъективен, а  $\lambda_S$  удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого поля  $K$  и мономорфизма  $R \rightarrow K$  существует единственный мономорфизм  $\psi: F \rightarrow K$ , что  $\varphi = \psi \circ \lambda_S$ .

### 2.3 Поле $p$ -адических чисел, как поле частных кольца $\mathbb{Z}_p$ .

Как мы уже выяснили, кольцо  $\mathbb{Z}_p$  — область целостности, его можно вложить в поле частных, используя конструкцию локализации.

В нашем случае это сводится к рассмотрению дробей  $\alpha/p^k$ , где  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ ,  $k \geq 0$ .

**Определение 7.** Дробь вида  $\alpha/p^k$ , где  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ , а  $k \geq 0$  называется дробным  $p$ -адическим числом или просто  $p$ -адическим числом.

*Замечание 8.* Две дроби  $\alpha/p^k$  и  $\beta/p^m$  определяют одно и то же  $p$ -адическое число, если  $\alpha p^m = \beta p^k$ .

**Определение 8.** Полем  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$  называется поле частных кольца целых  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Z}_p$ .

**Теорема 5.** *Всякое  $p$ -адическое число  $\xi \neq 0$  единственным образом представляется в виде*

$$\xi = p^m \cdot \varepsilon, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$$

*Доказательство.* Пусть  $\xi = \alpha/p^k$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ . По теореме 3  $\alpha$  можно представить в виде  $p^\ell \varepsilon$ ,  $\ell \geq 0, \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$ . Тогда  $\xi = p^m \varepsilon$ ,  $m = \ell - k$ .

Единственность вытекает из единственности представления для 3.  $\square$

## 2.4 Сходимость в поле $p$ -адических чисел

Мы уже много раз говорили об аналогии между  $p$ -адическими числами и вещественными. В случае вещественных, они определяются последовательностями рациональных и являются пределами этих последовательностей.

Неформально мы уже обсуждали, почему это так в случае  $p$ -адических чисел, давайте теперь поймем, почему это так формально.

Теперь, после того как мы доопределили  $p$ -адический показатель на  $\mathbb{Q}_p$ , мы можем вводить на  $\mathbb{Q}_p$  (заметьте, уже не на  $\mathbb{Q}$ ) знакомое нам  $p$ -адическое нормирование (и, соответственно,  $p$ -адическую метрику).

**Определение 9.** *Последовательность  $p$ -адических чисел  $\{\xi_n\}$  называется сходящейся к  $p$ -адическому числу  $\xi$  если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(\xi_n - \xi) = \infty$$

*Замечание 9.* Ясно, что эквивалентно сходимость можно определять, как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\xi_n\} = \xi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$$

то есть, как и обычно, начиная с некоторого довольно большого номера,  $p$ -адические числа становятся сколь угодно близки к пределу.

Рассмотрим сначала для удобства некоторые свойства  $p$ -адического показателя:

1.  $v_p(\alpha\beta) = v_p(\alpha) + v_p(\beta)$ .
2.  $v_p(\alpha + \beta) \geq \min(v_p(\alpha), v_p(\beta))$ .
3.  $v_p(\alpha + \beta) = \min(v_p(\alpha), v_p(\beta))$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

Для поля  $\mathbb{Q}_p$  справедливы все стандартные свойства пределов. Докажем, например, что при  $\{\xi_n\} \rightarrow \xi$ ,  $\xi \in \mathbb{Z}_p^*$  выполняется  $\{1/\xi_n\} \rightarrow 1/\xi$ .

Сначала отметим, что, начиная с некоторого места  $v_p(\xi_n - \xi) > v_p(\xi)$ , откуда  $v_p(\xi_n) = \min(v_p(\xi_n - \xi), v_p(\xi)) = v_p(\xi) \Rightarrow v_p(\xi_n) \neq \infty \Rightarrow \xi_n \neq 0$ , то есть, на него в самом деле можно делить.

Далее мы имеем

$$v_p\left(\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{\xi}\right) = v_p(\xi - \xi_n) - v_p(\xi_n) - v_p(\xi) = v_p(\xi_n - \xi) - 2v_p(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Теперь, для доказательства факта, который мы хотели формализовать, нам нужно понять, как вводятся сравнения на кольце целых  $p$ -адических чисел. Сравнения в кольце целых  $p$ -адических чисел определяются также, как и в кольце целых чисел, то есть  $\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma} \Leftrightarrow (\alpha - \beta) : \gamma$ .

Если  $\gamma = p^n \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$ , то всякое сравнение по модулю  $\gamma$  равносильно сравнению по модулю  $p_n$ , а значит, достаточно рассматривать только такие (в этом случае).

**Теорема 6.** *Всякое целое  $p$ -адическое число сравнимо с целым рациональным числом по модулю  $p^n$ . Два целых рациональных числа тогда и только тогда сравнимы по модулю  $p^n$  в кольце  $\mathbb{Z}_p^*$ , когда они сравнимы по этому модулю в кольце  $\mathbb{Z}$ .*

*Доказательство.* Докажем сначала, что если  $\alpha$  — целое  $p$ -адическое число, определяемое последовательностью  $\{x_n\}$ , то

$$\alpha \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$$

Как целое  $p$ -адическое число,  $x_n$  определяется последовательностью  $\{x_n, x_n, \dots, x_n, \dots\}$ . Тогда последовательность, определяющая целое  $p$ -адическое число  $\alpha - x_n$  выглядит следующим образом

$$\{x_0 - x_{n-1}, x_1 - x_{n-1}, \dots, 0, x_n - x_{n-1}, \dots\}$$

Из того, что всякое целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  представимо в виде

$$\alpha = p^k \cdot \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$$

следует, что целое  $p$ -адическое число  $\alpha$ , определяемое последовательностью  $\{y_n\}$  делится на  $p^\ell$  тогда и только тогда, когда  $x_n \equiv 0 \pmod{p^{n+1}} \forall n = 0, 1, \dots, k-1$ . Тогда, сравнение  $\alpha \equiv x_n \pmod{p^n}$  равносильно сравнениям

$$x_k - x_{n-1} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

а эти сравнения выполнены по определению  $p$ -адических чисел.

Докажем теперь, что для двух целых рациональных  $p$ -адических чисел  $x$  и  $y$  сравнимость по модулю  $p^n$  в кольце  $\mathbb{Z}_p$  равносильна сравнимости по модулю  $p^n$  в кольце  $\mathbb{Z}$ .

Положим  $x - y = p^m a$ ,  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Тогда, в кольце  $\mathbb{Z}$  сравнение  $x \equiv y \pmod{p^n}$  равносильно условию  $n \leq m$ . С другой стороны, так как  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ , соответствующее ему целое  $p$ -адическое число обратимо в  $\mathbb{Z}_p^*$ , а значит, для числа  $x - y$  есть представление в виде  $p^m \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ , а значит,  $v_p(x - y) = m$ , то есть,  $n \leq v_p(x - y)$ , а в  $\mathbb{Z}_p$  это равносильно сравнению  $x \equiv y \pmod{p^n}$ , так как  $v_p(p^n) = n$ .  $\square$

**Теорема 7.** *Если целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  определяется последовательностью  $\{x_n\}$ , то эта последовательность сходится к  $\alpha$ . Произвольное  $p$ -адическое число  $\xi$  является пределом последовательности рациональных чисел.*

*Доказательство.* Как мы понимаем из предыдущей теоремы, если  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$  определяется последовательностью  $\{x_n\}$ , то  $\alpha \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$ , а это по определению влечёт  $v_p(x_n - \alpha) \geq n + 1$ . Значит,  $v_p(x_n - \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , а это по определению означает, что  $\{x_n\}$  стремится к  $\alpha$ .

Теперь рассмотрим дробное  $p$ -адическое число  $\xi = \alpha/p^k$ .

$$v_p\left(\frac{x_n}{p^k} - \xi\right) = v_p\left(\frac{x_n - \alpha}{p^k}\right) = v_p(x_n - \alpha) - k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

а значит,  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$ , где  $\{y_n\} = \{x_n/p^k\}$ .  $\square$

**Определение 10.** *Последовательность  $p$ -адических чисел  $\{\xi_n\}$  называется ограниченной, если все значения  $\|\xi\|_n$  ограничены сверху.*

**Теорема 8. (Лемма Больцано-Вейерштрасса для поля  $p$ -адических чисел)**

*Из всякой ограниченной последовательности  $p$ -адических чисел можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

*Доказательство.* Наверное, не успеваю рассказать. Можно прочитать в книге ШАФАРЕВИЧА (ССЫЛКУ).  $\square$

Оказывается (хоть это и не особенно неожиданно), для  $p$ -адических чисел справедлив критерий Коши, то есть

**Теорема 9. (Критерий Коши)** Пусть нам дана последовательность  $\{\xi_n\}$ ,  $\xi_n \in \mathbb{Q}_p$ . Тогда она сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} v_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

*Доказательство.* Заметим, что из условия

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} v_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

следует, что  $\exists n_0: v_p(\xi_m - \xi_{n_0}) \geq 0 \forall m \geq n_0$ . Но тогда, по свойству  $v_p(\alpha + \beta) \geq \min(v_p(\alpha), v_p(\beta))$ . мы имеем

$$v_p(\xi_m) = v_p((\xi_m - \xi_{n_0}) + \xi_{n_0}) \geq \min(0, v_p(\xi_{n_0}))$$

а отсюда следует ограниченность. Значит, по предыдущей теореме, из неё можно извлечь сходящуюся попоследовательность  $\{\xi_{n_i}\}$  с пределом  $\xi$ . Значит, по определению сходимости  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N$   $v_p(\xi_m - \xi_n) \geq M$  и  $v_p(\xi_{n_i} - \xi) \geq M$  Тогда

$$v_p(\xi_m - \xi) \geq \min(v_p(\xi_m - \xi_{n_i}), v_p(\xi_{n_i} - \xi)) \geq M \text{ for all } m \geq N$$

а значит  $\lim_{m \rightarrow \infty} v_p(\xi_m - \xi) = \infty$ , то есть, последовательность  $\{\xi_m\}$  сходящаяся.  $\square$

В поле  $p$ -адических чисел этому признаку можно придать и более сильную форму. А именно, если для последовательности  $\{\xi_n\}$  выполнено

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} v_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

то мы имеем и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$$

Оказывается, что верно и обратное следствие. Действительно, если  $\forall n \geq N$   $v_p(\xi_{n+1} - \xi_n) \geq M$ , то в силу того, что  $v_p(\alpha + \beta) \geq \min(v_p(\alpha), v_p(\beta))$  из равенства

$$\xi_m - \xi_n = \sum_{i=n}^{m-1} (\xi_{i+1} - \xi_i), \quad m > n \geq N$$

вытекает и оценка

$$v_p(\xi_m - \xi_n) \geq \min_{i \in \{n, \dots, m-1\}} v_p(\xi_{i+1} - \xi_i) \geq M \Rightarrow v_p(\xi_m - \xi_n) \rightarrow \infty$$

**Теорема 10.** Для сходимости последовательности  $p$ -адических чисел  $\{\xi_n\}$  необходимо и достаточно, чтоб  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$ .

Ясно, что благодаря теории пределов мы можем определить секвенциальную непрерывность (непрерывность по Гейне) для функций  $p$ -адического аргумента.

К тому же, ясны стандартные арифметические свойства непрерывных функций, из которых следует, например, что многочлен непрерывен.

**Определение 11.** Если последовательность частичных сумм  $s_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i$  ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n + \dots$$

с  $p$ -адическими членами сходится к  $p$ -адическому числу  $\alpha$ , то будем говорить, что ряд сходится и его сумма равна  $\alpha$ .

Из теоремы 10 можно легко получить критерий сходимости рядов из  $p$ -адических чисел.

**Теорема 11. (Критерий сходимости рядов с  $p$ -адическими членами)**

Для сходимости ряда  $\sum \alpha_n$  с  $p$ -адическими членами необходимо и достаточно, чтоб  $\|\alpha_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (или, что равносильно,  $v_p(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ).

*Доказательство.* Действительно, мы имеем цепочку

$$s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \text{ — сходится} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_{n+1} - s_n\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k - \sum_{k=0}^n \alpha_k \right\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_{n+1}\|_p = 0$$

□

Ясно, что как и в случае вещественного анализа, сходящиеся  $p$ -адические ряды можно складывать, умножать на константу. Также справедлива следующая теорема:

**Теорема 12.** При любой перестановке членов сходящегося  $p$ -адического ряда его сходимость не нарушается и сумма не меняется.

*Доказательство.* Упражнение в листочке. □

Как мы знаем, в курсе вещественного (и комплексного) анализа это свойство характеризует абсолютно сходящиеся ряды. То есть, все сходящиеся  $p$ -адические ряды являются и абсолютно сходящимися, а значит, их можно и перемножать:

написать сюда произведение рядов

Теперь уже ясно, что если целое  $p$ -адическое число  $\alpha$  определяется канонической последовательностью  $\{x_n\}$ , где

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_0 + a_1 p, \quad x_2 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \dots, \quad x_n = \sum_{k=1}^n a_k p^k$$

то, так как мы доказали, что эта последовательность сходится к  $\alpha$ , а значит

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k p^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k, \quad 0 \leq a_i < p$$

Так как различные канонические последовательности определяют различные  $p$ -адические числа, такое представление единственно для каждого числа. Представление целых  $p$ -адических чисел рядами напоминает запись вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей, то есть

$$\overline{0, a_1 \dots a_n \dots} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{10}\right)^k, \quad 0 \leq a_i < 10$$

Рассмотрим теперь ряд

$$b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_np^n + \dots, \quad b_i \in \mathbb{Z}$$

то он будет сходящимся, так как  $v_p(b_np^n) \geq n$ , и его сумма будет равна некоторому  $\alpha$ .

Для того, что бы для этого  $\alpha$  получить каноническое представление, достаточно заменить все  $b_i$  на  $b_i \bmod p$ , относя неполное частное на каждом шаге к следующему члену.

Это замечание актуально для действий в  $\mathbb{Z}_p$ , так как при сложении, вычитании и перемножении рядов вида  $\sum a_k p^k$ ,  $0 \leq a_i < p$ , мы получаем ряды вида  $\sum b_k p^k$ ,  $b_k \in \mathbb{Z}$ . Отметим, что в этом представлении, действия с  $p$ -адическими числами полностью аналогичны действиям с вещественными числами в десятичной записи.

Из теоремы (ссылка) следует, что целое  $p$ -адическое число, представленное в виде ряда обратимо тогда и только тогда, когда  $a_0$ . Вместе с теоремой ([вставить ссылку](#)) это даёт следующую теорему:

**Теорема 13.** Каждое отличное от нуля целое  $p$ -адическое число  $\xi$  однозначно записывается в виде

$$\xi = p^m(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n + \dots)$$

где  $m = v_p(\xi)$ ,  $1 \leq a_0 \leq p-1$ ,  $0 \leq a_n \leq p-1 \quad \forall n \geq 2$ .

Заметим, что эта запись соответствует записи последовательности цифр, бесконечной влево, а именно

$$\alpha = \begin{cases} \dots a_{m+1}a_m \overbrace{00\dots 0}^{m-1}_{(p)}, & m \geq 0 \\ \dots a_1a_0a_{-1}\dots a_{m(p)}, & m < 0 \end{cases}$$

#### **$p$ -АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, КАК ПРОЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ:**

Разобранное нами построение кольца целых  $p$ -адических чисел соответствует более общей алгебраической конструкции. А именно, мы на пальцах разобрали конструкцию проективного предела обратного спектра топологических пространств, групп, колец (не важно чего, в общем).

#### **ПАРАГРАФ НА ДОРАБОТКЕ : (.**

Так вот, из нашего построения ясно, что кольцо  $\mathbb{Z}_p$  является проективным пределом последовательности  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  с естественным отображением  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$  «взятие остатка».

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

## **2.5 Лемма Гензеля:**

**Определение 12.** Числовым полем называют конечное расширение поля  $\mathbb{Q}$ .

**Пример 4.** Например,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbb{Q}(i)$  — числовые поля. Поле  $\mathbb{R}$  не является конечным расширением  $\mathbb{Q}$ , а значит, это не числовое поле.

**Определение 13.** Элемент  $\alpha$  расширения поля  $\mathbb{Q}$  называется алгебраическим числом, если он является корнем ненулевого многочлена в  $\mathbb{Q}[T]$ .

**Пример 5.** Например,  $\frac{1}{2}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $i$  — алгебраические числа. Числа  $e$ ,  $\pi$  не являются алгебраическими (доказательства представили Эрмит в 1873г. и Линдеманн в 1882г.).

**Определение 14.** Элемент  $\alpha$  поля, являющегося расширением  $\mathbb{Q}$  называется алгебраическим целым, если он является корнем унитарного многочлена с целыми коэффициентами.

**Определение 15.** Все алгебраические целые элементы поля  $K$  образуют кольцо, которое принято называть кольцом целых поля  $K$  и обозначать  $\mathcal{O}_K$ .

**Пример 6.**  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Z}_p$ .

**Определение 16.** Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  — полное неархимедово нормированное поле. Обозначим за

$$\mathbb{Z}_F = B_1(0) = \{x \in F \mid \|x\| \leq 1\}$$

— «кольцо целых» чисел поля  $F$ .

**Теорема 14. (Лемма Гензеля)** Пусть  $f(x) \in \mathbb{Z}_F[x]$ ,  $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_F$  и справедливо неравенство  $\|f(\alpha_0)\| < \|f'(\alpha_0)\|^2$  (здесь  $f'$  — формальная производная многочлена  $f$ ). Тогда существует единственное  $\alpha \in \mathbb{Z}_F$ , такое, что  $f(\alpha) = 0$  и  $\|\alpha - \alpha_0\| < \|f'(\alpha_0)\|$ .

*Доказательство.* Положим  $c = \|f(\alpha_0)\|/\|f'(\alpha_0)\|^2 < 1$ . Рассмотрим рекуррентно заданную последовательность

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_{n+1})}, \quad n \geq 0$$

(«метод касательных Ньютона»).

Индукцией проверяется, что она обладает следующими свойствами:

1.  $\|\alpha_n - \alpha_0\| < c\|f'(0)\| < \|f'(\alpha_0)\|$ .
2.  $\|f'(\alpha_n)\| = \|f'(\alpha_0)\|$ .
3.  $\|f(\alpha_n)\| \leq c^{2^n}\|f(\alpha_0)\|^2$ .
4.  $\|\alpha_n - \alpha_0\| \leq c^{2^n}\|f(\alpha_0)\|$ .

А значит, можно взять  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ . Единственность следует из разложения многочлена по теореме Тейлора в точке  $\alpha$ .  $\square$

**Следствие 6. (Важное:)**

Пусть  $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ ,  $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_p$ ,  $f(\alpha_0) \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $f'(\alpha_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Тогда существует единственное  $\alpha \in \alpha_0 + p\mathbb{Z}_p$  такое, что  $f(\alpha) = 0$ .

Кроме того, есть еще НАРОДНАЯ формулировка леммы Гензеля:

**Теорема 15.** Пусть  $f$  — многочлен с целыми (или целыми  $p$ -адическими коэффициентами), а  $m$  и  $k$  — целые числа, причем  $0 \leq m \leq k$ . Тогда, если  $r$  — целое число, такое, что

$$f(r) \equiv 0 \pmod{p^k}, \quad f'(r) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

то существует такое целое  $s$ , что

$$f(s) \equiv 0 \pmod{p^{k+m}}, \quad r \equiv s \pmod{p^k}$$

и более того,  $s$  может быть выражено в явном виде, а именно,

$$s = r - f(r) \cdot a, \quad a = (f'(r))^{-1} \pmod{p^m}$$



## 2.6 Пополнение метрических пространств.

**Определение 17.** Пусть  $(X, d_X)$  — метрическое пространство,  $\mathcal{F}(X)$  — множество всех ограниченных функций из  $X$  в  $\mathbb{R}$ . Тогда введём расстояние  $d_\infty$  между функциями  $f, g \in \mathcal{F}(X)$ :

$$d_\infty(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in X\}$$

Заметим, что определение корректно, так как функции ограничены.

**Лемма 3.**  $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$  — метрическое пространство.

*Доказательство.* Проверим три аксиомы метрики:

1. Пусть  $f = g$ . Тогда  $|f(x) - g(x)| = 0$  для всякого  $x \in X$ , так что  $d_\infty(f, g) = 0$ . Если же наоборот  $d_\infty(f, g) = 0$ , то  $0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup = 0$ , а значит  $f(x) = g(x)$  для всех  $x \in X$ , что и означает  $f \equiv g$ .
2. Так как  $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ , то и  $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$ .
3. Рассмотрим три ограниченные функции  $f, g, h \in \mathcal{F}(X)$ , и покажем, что

$$d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) \geq d_\infty(f, h)$$

Мы знаем, что:

$$\forall x \in X : |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \geq |f(x) - h(x)|$$

в силу неравенства треугольника для стандартной метрики на  $\mathbb{R}$ . Для всякого  $\varepsilon > 0$  мы можем взять  $x_0$  такой, что  $|f(x_0) - h(x_0)| \geq \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon$ . Получаем, что

$$\begin{aligned} d_\infty(f, h) - \varepsilon &= \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon \leq |f(x_0) - h(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - h(x_0)| \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) \end{aligned}$$

а раз это верно для любого  $\varepsilon > 0$ , то искомое неравенство доказано. □

**Лемма 4.**  $\mathcal{F}(X)$  — полно.

*Доказательство.* Пусть  $f_n$  — фундаментальная последовательность функций. Тогда  $\forall x_0 \in X : \{f_n(x_0)\}$  — также фундаментальная последовательность, так как  $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|, x \in X\}$ . Следовательно,

$$\forall x_0 \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

и сходимость по всем точкам равномерна, так как не зависит от выбора точки  $x_0$ . Иными словами,

$$\exists f(x) : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

где  $f(x_0)$  определяется как предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ . Так что  $f(x)$  — функция, являющаяся пределом искомой последовательности функций. □

**Определение 18.** Пусть  $(X, d_X)$  — метрическое пространство,  $\mathcal{F}(X)$  — множество ограниченных функций из  $X$  в  $\mathbb{R}$ . Построим изометрическое вложение  $k : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  следующим образом:

1. Если  $X$  — ограничено, то определим  $k(x) = d_x$ , где

$$\forall y \in X : d_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} d_X(x, y)$$

Функция  $d_x$  ограничена, так как  $X$  ограничено. Заметим также, что

$$d_\infty(d_x, d_y) = \sup_z |d_x(z) - d_y(z)| = \sup_z (d_X(x, z) - d_X(z, y)) \leq d_X(x, y)$$

однако равенство достигается при  $z = y$ , так что  $d_\infty(d_x, d_y) = d_X(x, y)$ , а значит вложение изометрическое.

2. Пусть  $X$ , возможно, не ограничено. Тогда определим  $k(x) = d_x - d_{x_0}$  для некоторой фиксированной точки  $x_0 \in X$ , где

$$\forall y \in X : (k(x))(y) \stackrel{\text{def}}{=} d_x(y) - d_{x_0}(y) = d_X(x, y) - d_X(y, x_0)$$

что есть ограниченная функция, так как  $\forall y \in X : d_X(x, y) - d_X(y, x_0) \leq d_X(x, x_0)$ . Заметим, что это аналогичным образом будет изометрическим вложением:

$$\begin{aligned} d_\infty(d_x - d_{x_0}, d_y - d_{x_0}) &= \sup_z |d_x(z) - d_{x_0}(z) - d_y(z) + d_{x_0}(z)| = \\ &= \sup_z (d_X(x, z) - d_X(z, y)) \leq d_X(x, y) \end{aligned}$$

где равенство достигается при  $z = y$ .

Любое метрическое пространство  $(X, d_X)$  имеет пополнение  $(\bar{X}, d_{\bar{X}})$ , то есть такое метрическое пространство  $\bar{X}$ , что выполнено:

1.  $X \subseteq \bar{X}$
2.  $X$  — всюду плотно в  $\bar{X}$
3.  $d_{\bar{X}}|_X = d_X$ , то есть вложение из  $X$  в  $\bar{X}$  является изометрическим
4.  $(\bar{X}, d_{\bar{X}})$  — полно.

*Доказательство.* Возьмём изометрическое вложение Куратовского  $k : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ , и возьмём его замыкание в топологическом пространстве  $\mathcal{F}(X)$  с топологией, индуцированной метрикой  $d_\infty$  — назовём это замыкание  $\bar{X}$ . Заметим, что

1.  $X \subseteq \bar{X}$  естественным образом
2.  $X$  всюду плотно в  $\bar{X}$ , так как любое множество всюду плотно в своём замыкании
3. Вложение  $X$  в  $\bar{X}$  изометрическое, так как оно изометрическое и во всё пространство  $\mathcal{F}(x)$
4.  $\bar{X}$  полно как замкнутое подмножество полного пространства.

□

*Замечание 10.* Пополнение метрического пространства **единственно** с точностью до изометрии.

*Замечание 11.* Выражение  $X \subseteq \bar{X}$  тоже подразумевается с точностью до изометрии.

## 2.7 Пополнение нормированного поля.

Теперь мы умеем пополнять метрические пространства, но нам никто не гарантирует, что при пополнении поля по норме получится поле.

**Определение 19.** Пополнением нормированного поля  $(F_0, \|\cdot\|_0)$  называется нормированное поле  $(F, \|\cdot\|)$ , удовлетворяющее следующим свойствам

1. Существует вложение  $i : F_0 \hookrightarrow F$ , сохраняющее норму (изометрическое), то есть  $\|i(x)\| = \|x\|_0$ .
2.  $(F, \|\cdot\|)$  полно, как метрическое пространство.
3.  $i(F_0)$  всюду плотно в  $F$ , то есть,  $\forall x, \varepsilon > 0 \exists x_0 \in F_0 : \|x - i(x_0)\| < \varepsilon$ .

**Пример 7.** Из курса анализа ясно, что  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  — пополнение  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ .

**Теорема 16.** Для любого нормированного поля существует пополнение.

*Доказательство.* Будем рассматривать случай нормы с неравенством треугольника.

Пусть  $\mathfrak{A}$  — множество всех последовательностей Коши  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  в пространстве  $(F_0, \|\cdot\|_0)$ .

На  $\mathfrak{A}$  можно естественным образом определить операции сложения и умножения (поточечно), а также ввести норму  $\|\cdot\|$ , как  $\|\{x_n\}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_0$ .

Это определение корректно, так как предел всегда существует в силу неравенства треугольника и того, что  $\{x_n\}$  — последовательность Коши

$$|\|x_n\|_0 - \|x_m\|_0| \leq \|x_n - x_m\|_0$$

Ясно, что остальные свойства нормы также выполняются.

Введём на  $\mathfrak{A}$  отношение эквивалентности  $\sim$ :

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\|_0 = 0$$

Нетрудно заметить, что это отношение эквивалентности «уважает» арифметические действия и норму, то есть

1.  $\{x_n\} \sim \{u_n\}, \{y_n\} \sim \{v_n\} \Rightarrow \{x_n + y_n\} \sim \{u_n + v_n\}, \{x_n y_n\} \sim \{u_n v_n\}$ .
2.  $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Rightarrow \|\{x_n\}\| = \|\{y_n\}\|$ .

В качестве поля  $F$  возьмем фактормножество  $\mathfrak{A}/\sim$ . Приведенные выше свойства естественно индуцируют арифметические операции и норму с  $A$  на  $F$ :

- $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x_n + y_n\}]$ .
- $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}]$ .
- $\|[\{x_n\}]\| = \|\{x_n\}\|$ .

Аксиомы кольца вполне очевидны, проверим существование обратного по умножению элемента. Если  $[\{x_n\}] \neq 0$ , то  $\lim \|x_n\|_0 > 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0 \ \|x_n\|_0 > \delta > 0$  для некоторого  $\delta$ .

Тогда в качестве  $[\{x_n\}]^{-1}$  возьмем класс  $[\{y_n\}]$ , где

$$y_n = \begin{cases} 0, & n < n_0 \\ \frac{1}{x_n}, & n \geq n_0 \end{cases}$$

Осталось проверить, что мы получили пополнение.

В качестве вложения возьмем  $i(x) = [(x, x, \dots)]$ . Ясно, что  $i(F_0)$  плотно в  $F$ , так как, если  $X = [\{x_n\}] \in F$ , то  $i(x_n) \rightarrow X$  в пространстве  $(F, \|\cdot\|)$ .

Теперь проверим полноту. Пусть  $X^{(n)} = [(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)] \in F$  — последовательность Коши. Возьмем такую последовательность  $k_n \in \mathbb{N}$ , что

$$\sup_{k, \ell \geq k_n} \|x_k^{(n)} - x_\ell^{(n)}\|_0 < \frac{1}{n}$$

Покажем, что в качестве предела можно взять  $X = [\{x_{k_n}^{(n)}\}]$ . Пусть  $N \geq k_n$ ,  $M \geq k_m$ ,  $K \geq \max\{k_n, k_m\}$ .

$$\|x_N^{(n)} - x_M^{(m)}\|_0 \leq \|x_N^{(n)} - x_K^{(n)}\|_0 + \|x_K^{(n)} - x_K^{(m)}\|_0 \leq \frac{1}{n} + \|x_K^{(n)} - x_K^{(m)}\|_0 + \frac{1}{m}$$

Устремим  $K$  к бесконечности и получим

$$\|x_N^{(n)} - x_M^{(m)}\|_0 \leq \|X^{(n)} - X^{(m)}\| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

Положим  $N = k_n$ ,  $M = k_m$  и получим, что  $x_{k_n}^{(n)}$  — последовательность Коши, а её класс эквивалентности — искомый предел.  $\square$

Далее отождествим  $i(F_0)$  с  $F_0$  и будем считать, что  $F \subseteq F$ .

В неархимедовом случае можно сказать даже несколько больше.

Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  — неархимедово нормированное поле. Если  $\{x_n\} \rightarrow x$ ,  $x \in F^*$ , то для достаточно больших  $n$   $\|x_n\| = \|x\|$ .

**Лемма 5.** Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  — пополнение неархимедова поля  $(F_0, \|\cdot\|_0)$ . Тогда

1.  $(F, \|\cdot\|)$  неархимедово.
2.  $\text{Im}(\|\cdot\|) = \text{Im}(\|\cdot\|_0)$ .

### 3. Введение в алгебраическую геометрию

#### 3.1 Квадрики и рациональная параметризация квадрик.

**Определение 20.** Пусть  $X$  — коммутативное кольцо и даны наборы коэффициентов  $\{a_i\} \in X$ ,  $\{b_i\} \in X$ ,  $c \in X$ . Если  $\exists j: 1 \leq j \leq n$ ,  $a_j \neq 0$ . Квадратичной функцией (*не формой*) будем называть функцию вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c$$

Если  $X$  — аффинное пространство (мы будем считать, что векторное над полем  $K$ ), то квадрикой мы будем называть множество нулей такой функции  $X \rightarrow K$ , то есть, множество вида

$$K = \{x \in X \mid f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

**Пример 8.** Эллипс, парабола и гипербола — известные вам квадрики на плоскости.

*Замечание 12.* Заметим, что если нам дана квадрика  $M$ , заданная, как множество нулей функции  $f$  и мы сменили систему координат, то в новой системе координат  $M$  также будет являться квадрикой, то есть, найдётся такая квадратичная функция  $f'$ , множеством нулей которой будет  $M$ .

Часто нас будет интересовать, как выглядят квадрики над кольцом целых чисел, то есть, как решать диофантово уравнение  $f(x_1, \dots, x_m) = 0$ . Эта задача весьма сложная, поэтому для начала попытаемся понять, как пытаться решать такие уравнения над полем  $\mathbb{Q}$ .

**Пример 9.** Опишем все пифагоровы тройки, то есть, такие все тройки  $(X, Y, Z) \in \mathbb{Z}^3$ , что

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

Заметим, что достаточно описывать только тройки, где  $\gcd(X, Y, Z) = 1$ , так как, если мы умножим все три числа на какое-то целое число, то мы вновь получим пифагорову тройку.

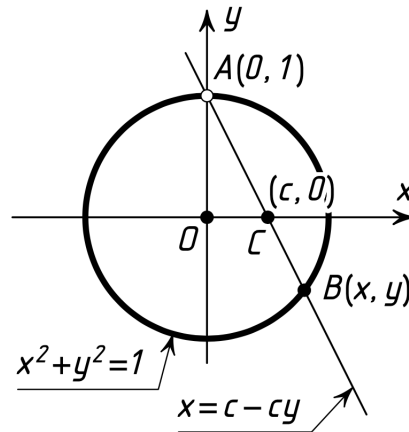
Более того, достаточно рассматривать только тройки попарно взаимно простых чисел, так как

$$X : p, Y : p \Rightarrow X^2 + Y^2 = Z^2 : p$$

Заметим, что при  $Z = 0$  мы имеем решение  $(0, 0, 0)$ , дальше будем рассматривать случаи  $Z \neq 0$ . Поделим на  $z$  и получим уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

То есть, мы свели задачу к перечислению всех рациональных точек на окружности. Некоторые рациональные точки  $(0, \pm 1)$ ,  $(\pm 1, 0)$ . Выберем из них, например, точку  $A = (0, 1)$ . Проведем всевозможные прямые через точку  $A$  (кроме горизонтальных). Каждая такая прямая  $\ell$  пересечет окружность еще в одной точке  $B(x, y)$  и ось абсцисс в точке  $C(c, 0)$ .



Таким образом, пересекая, мы получаем взаимнооднозначное соответствие между точками окружности и точками прямой.

Причем, это соответствие сохраняет рациональность точек. Прямая, проходящая через точки  $A$  и  $C$  определяется уравнением  $y = c - cy$ . Подставим это в уравнение окружности

$$(c - cy)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (c^2 + 1)y^2 - 2c^2y + c^2 - 1 = 0$$

откуда мы имеем, что либо  $y = 1$ , либо  $y = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}$ , при  $x = c - cy = \frac{2c}{c^2 + 1}$ . Остается заметить, что если  $c \in \mathbb{Q}$ , то  $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ . Обратное всегда вытекает. Если координаты двух точек рациональны, то уравнение соединяющей их прямой можно записать так, чтобы оно имело рациональные коэффициенты. Если две прямые задаются уравнениями с рациональными коэффициентами, то точка их пересечения (если она существует) имеет рациональные координаты. То есть, каждое рациональное решение, кроме  $(0, 1)$  можно получить

$$x = \frac{2c}{c^2 + 1}, \quad y = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}$$

где  $c \in \mathbb{Q}$ .

Подставим  $c = m/n$ , где  $\gcd(m, n) = 1$ , тогда

$$x = \frac{2c}{c^2 + 1} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad y = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

Теперь будем искать все целые решения, выполним обратную подстановку:

$$\frac{X}{Z} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad m^2 + n^2 \neq 0$$

Вспомним, что числа  $(X, Y, Z)$  взаимно просты, а значит, дроби в левых частях несократимы. Если бы мы знали, что дроби, стоящие в правых частях тоже несократимы, то мы бы положили  $X = 2mn$ ,  $Y = m^2 - n^2$ ,  $Z = m^2 + n^2$ , но, к сожалению, они бывают сократимы. Но, они могут быть сократимы только на 2. Действительно, если  $p$  — простое число, не равное двум и  $p \mid 2mn$ . Так как  $\gcd(m, n) = 1$ , если  $p \mid m$ , то  $p \nmid n \Rightarrow m^2 + n^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$ , а значит, дробь  $X/Z$  несократима. Рассмотрим теперь вторую дробь. Если  $p$  — простое число, не равное двум и  $p \mid m^2 - n^2$ ,  $p \mid m^2 + n^2$ , то  $p \mid 2m^2$  и  $p \mid 2n^2$ . Так как  $\gcd(m, n) = 1$ , это влечёт  $p = 2$ . Итак, мы наконец нашли взаимнопростые натуральные решения

$$X = mn, \quad Y = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad Z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

при  $\gcd(m, n) = 1$  и нечетных  $m, n$ , а также

$$X = 2mn, \quad Y = m^2 - n^2, \quad Z = m^2 + n^2$$

при взаимнопростых  $m$  и  $n$ , одно из которых четно. Любые целые положительные решения мы получим умножением этих решений на натуральное число. Теперь заметим, что формулы для четного и нечетного случаев на самом деле совпадают. Если

$$X = pq, \quad Y = \frac{p^2 - q^2}{2}, \quad Z = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

— решение, вычисленное по формулам для первого случая, где  $\gcd(p, q) = 1$  и числа  $p$  и  $q$  оба нечетны, то те же решения мы получим и по вторым формулам, только подставляя

$$m = \frac{p+q}{2}, \quad n = \frac{p-q}{2}$$

разве что с точностью до того, что  $X$  и  $Y$  поменяются местами.

## 4. Проективная геометрия

### 4.1 Модели построения проективной плоскости и связь между ними

#### Проективная плоскость, как факторпространство

**Определение 21.** Проективная плоскость  $\mathbb{RP}^2$  — факторпространство сферы по  $x \sim -x$  (отождествление противоположных точек). **Прямая** в проективной плоскости — образ большой окружности сферы при проекции.

**Свойство:** через любые две точки проходит ровно одна прямая. Любые две прямые пересекаются ровно по одной точке.

#### Проективная плоскость и бесконечно удалённые точки

Рассмотрим плоскость  $\Pi$  (евклидову или аффинную, не важно). Определим

**Определение 22.** Назовём класс эквивалентности параллельных прямых бесконечно удалённой точкой.

Тогда проективная плоскость  $\hat{\Pi}$  (ввести обозначение для крышки) — объединение  $\Pi$  с множеством её бесконечно удалённых точек. Для каждой прямой  $l \subseteq \Pi$  определим проективную прямую  $\hat{l}$  — объединение  $l$  и её бесконечно удалённой точки. Добавим в список прямых бесконечно удалённую прямую, состоящую из всех бесконечно удалённых точек.

Верно, что через любые две точки проходит ровно одна прямая, и любые две прямые пересекаются в точности в одной точке.

#### Соответствие между моделями

Возьмём  $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ , как плоскость не содержащую  $0$ . Будем проводить прямые через  $0$  и пересекать их с плоскостью следующим образом:

- Если прямая пересекает нашу плоскость  $\Pi$ , то ровно по одной точке. Её и сопоставим двум антиподальным точкам на сфере.
- Если она не пересекает плоскость  $\Pi$ , то сопоставим данной паре точек бесконечно удалённую точку, соответствующую классу эквилинеарности прямых, параллельных данной.

*Замечание 13.* Таким образом, мы построили биекцию с сохранением свойств.

## 4.2 Проективные пространства и однородные координаты

**Определение 23.**  $V$  — векторное пространство. Проективное пространство, порождённое  $V$  — множество

$$P(V) = (V \setminus \{0\}) / \cong$$

Где  $\cong$  — отношение пропорциональности:  $x \cong y$ , если найдётся такое  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , что  $x = ty$ .

*Замечание 14.* Размерность  $P(V)$  равна  $\dim(V) - 1$  по определению.

*Замечание 15.* 1. Можно считать, что  $P(V)$  — множество прямых в  $V$ , проходящих через  $O$ .

2.  $P(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{R}P^n = S^n / x \cong -x$

3. Можно над любым полем, скажем, над  $\mathbb{C}$  получим  $\mathbb{C}P^m = P(\mathbb{C}^m)$

4. Это проекция  $p : V \setminus \{0\} \rightarrow P(V)$

Пусть  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , соответствующая ей точка в  $P(V)$  обозначается как  $[x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n]$ . Они называются однородными координатами точки  $P(x)$ .

Два набора задают одну точку тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

$$[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n] \iff \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y_i = c \cdot x_i, \forall i$$

Например,  $[1 : 2] = [3 : 6]$ .

## 4.3 Проективное пополнение аффинного пространства

**Определение 24.** Пусть  $A$  — аффинное пространство. Множество бесконечно удалённых точек  $A_\infty = P(\bar{A})$ . Тогда назовём проективным пополнением

$$\hat{A} = A \sqcup A_\infty$$

На нём вводится структура проективного пространства:

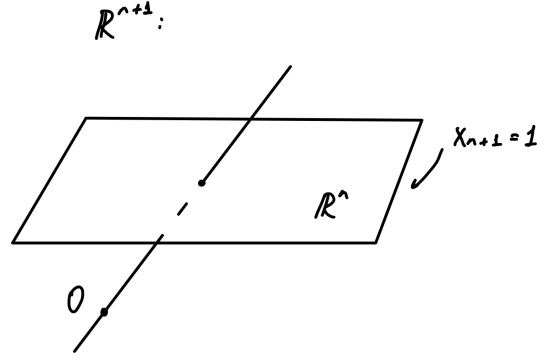
вкладываем  $A$  в векторное пространство  $V$ ,  $\dim(V) = \dim(A) + 1$  как гиперплоскость, не проходящую через  $0$ . Тогда  $\bar{A}$  отождествляем с линейной гиперплоскостью в  $V$  (которая, в свою очередь, проходит через  $0$ ), строим биекцию  $I : \hat{A} \rightarrow P(V)$  аналогично случаю сферы и проективной плоскости.

**Свойства:**

1.  $I$  — биекция.
2.  $A_\infty$  — гиперплоскость в  $\hat{A}$ , так называемая “бесконечно удалённая гиперплоскость”
3. Каждому аффинному подпространству  $B \subseteq A$  соответствует проективное подпространство  $\hat{B} \subseteq \hat{A}$ .
4. Существует контрпример к следующему утверждению: всякое проективное подпространство в  $\hat{A}$  либо соответствует аффинному подпространству в  $A$ , либо содержится в бесконечно удалённой гиперплоскости.

## 4.4 Проективное пополнение $\mathbb{R}^n$

Пусть у нас было  $n$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , мы добавили к нему какие-то бесконечно удалённые точки и получили  $\mathbb{R}P^n$ . Топологически это просто компактификация, так как  $\mathbb{R}^n$  не компактно, а  $\mathbb{R}P^n$  — сфера, у которой отождествили противоположные точки границы, то есть компакт. Выберем какую-то координатную систему в  $\mathbb{R}^n$  и выберем точку с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$ . Тогда, ей в  $\mathbb{R}P^n$  будет соответствовать точка с вот такими координатами:  $[x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1]$ . Это так, потому что  $\mathbb{R}P^n$  — множество всех прямых, проходящих через  $0$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то есть, мы можем взять  $\mathbb{R}^n$  и вложить в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , как плоскость, задающуюся уравнением  $x_{n+1} = 1$ . Тогда, каждой прямой, проходящей через  $0$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  будет соответствовать точка этой плоскости.

Рис. 4.1: Вложение  $\mathbb{R}^n$ , как плоскости

Теперь остается только сказать, что точки, у которых координаты отличаются умножением на константу – одна и та же точка.

## 4.5 Проективные преобразования и проективный базис

**Пример 10.**  $\mathbb{RP}^1$  – прямая, к которой мы добавили точку на бесконечности, или же все прямые в  $\mathbb{R}^2$ , проходящие через 0, то есть, окружность. Тогда точке с однородными координатами  $[x : y]$  будет соответствовать какой-то прямой, проходящей через точку  $(x, y)$ , то есть прямой с наклоном  $x/y$  и ей будет отвечать  $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$ , если  $y \neq 0$ . Это так, потому что наше вложение устроено так, что  $x \rightarrow [x : 1] \sim [ax : a]$ . Тогда ясно, что если  $y = 0$ , то  $\forall a, b [a, 0] \sim [b, 0]$  и мы отображались из точки бесконечность (которая единственная).

**Определение 25.** Пусть  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  – проективное отображение, если оно является проективизацией некоторого линейного отображения  $L: V \rightarrow W$ .

**Лемма 6.** Пусть  $V, W$  – векторные пространства, а  $L: V \rightarrow W$  – инъективное линейное отображение. Тогда существует единственное  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  такое, что  $p_W \circ L = F \circ p_V$ ,  $p_W: W \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(W)$ ,  $p_V: V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ . Иными словами, коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ \downarrow p_V & & \downarrow p_W \\ \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\mathbb{P}(L)} & \mathbb{P}(W) \end{array}$$

*Доказательство.*  $L$  переводит прямые через 0 в прямые через 0 (так как это линейное отображение между векторными пространствами), а прямым через 0 отвечают как раз точки  $\mathbb{P}(V)$ .  $\square$

**Пример 11.**  $\mathbb{RP}^1 = \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $x \rightarrow [x : 1]$ ,  $[x : y] \rightarrow \frac{x}{y}$ , если  $y \neq 0$  и  $\infty$ , если  $y = 0$ . Так как  $\mathbb{RP}^1$  – это все прямые в  $\mathbb{R}^2$ , проективное преобразование проективной прямой на себя – проективизация линейного отображения из  $\mathbb{R}^2$  на себя. Ясно, что линейное отображение устроено вот так:

$$(x, y) \rightarrow (ax + by, cx + dy), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0$$



Когда мы рассматриваем проективизацию, нам важно только, на какой прямой лежит образ, то есть

$$[x, y] \rightarrow [ax + by, cx + dy], \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0$$

(Важно, что линейное отображение инъективно, поэтому там везде сказано, что определитель не равен 0).

Возвращаясь обратно к координатам в  $\widehat{\mathbb{R}}$  мы получаем, что это  $x \rightarrow (ax + b/cx + d)$ , так как  $[x : 1] \rightarrow [ax + b, cx + d] = [(ax + b)/(cx + d) : 1]$ , если  $cx + d \neq 0$ . Если же  $cx + d = 0$ , то ясно, что мы перешли в точку  $\infty$ . Если же  $x = \infty$ , то ясно, что  $[1 : 0] \rightarrow [a : c] = [a/c : 1]$  ( $c \neq 0$ ) (если  $c = 0$ , то  $[1 : 0] \rightarrow [1 : 0]$ , то бишь  $\infty \rightarrow \infty$ , так как у нас просто линейное отображение  $(a/d)x + (b/d)$ ). То есть, дробно-линейное преобразование на  $\mathbb{R}$  – проективное преобразование. Также теперь ясно, что дробно-линейные преобразования на  $\mathbb{RP}^1$  образуют группу (так как они теперь биективны и у нас нет проблем с занулением знаменателя).

**Пример 12.** Рассмотрим биективное на проективной прямой дробно-линейное преобразование

$$x \rightarrow \frac{ax + b}{cx + d}$$

и зададимся вопросом, значения в скольких точках нам нужно знать, чтоб однозначно определить параметры  $a, b, c, d$ . Засчет того, что в однородных координатах всё происходит с точностью до мультипликативной константы, нам достаточно знать значения всего в трёх точках:

$$[0 : 1] \rightarrow b/d, \quad [1 : 1] \rightarrow (a + b)/(c + d), \quad [1 : 0] \rightarrow a/c$$

Поскольку нас интересует всё с точностью до пропорциональности, можно считать  $d = 1$ . Отсюда получаем систему из 3-х уравнений, откуда однозначно находятся все коэффициенты. То есть, для того, чтобы однозначно задать дробно-линейное преобразование, нам нужно задать, куда переходят точки  $0, 1, \infty$ .

**Определение 26** (Проективный базис). Пусть  $X$  – проективное пространство размерности  $n$ . Проективным базисом будем называть набор из  $(n + 2)$ -х точек, никакие  $(n + 1)$  из которых не лежат в одной гиперплоскости.

## 4.6 Проективная классификация квадрик.

**Квадрики на прямой:** В этом параграфе  $X = \mathbb{R}$ ,  $F(x) = ax^2 + bx + c$ .

Тогда квадрикой является:

- Любая пара точек
- Одна точка (“удвоенная”, в некотором смысле)
- Пустое множество

Рассмотрим проективизацию прямой  $\mathbb{R}$ , то есть  $\mathbb{RP}^1$ , с естественным отображением  $x \mapsto [x : 1]$  ( $\infty = [1 : 0]$ ). В таком случае гомогенизированное уравнение приобретает вид:

$$F'([x : y]) = ax^2 + bxy + cy^2$$

А квадрикой будет множество

$$Q = \{F([x : y]) = 0 \mid [x : y] \in \mathbb{RP}^1\}$$

удовлетворяющее свойствам

- $[x : y] \in Q \iff [\lambda x : \lambda y] \in Q$

- $Q$  совпадает с  $F(x) = 0$  на аффинной карте (при  $y = 1$ )

Тем самым из квадрики на прямой можно сделать квадрику на вещественной проективной прямой.

*Замечание 16.* Если рассматривать гомогенизацию на  $\mathbb{C}P^1$ , то у всякой квадрики будет ровно две точки.

*Замечание 17.* Аналогично можно гомогенизировать до однородного любой многочлен (не обязательно от одной) переменной.

## 5. Квадратичные формы и квадрики

### 5.1 Билинейные формы

**Определение 27** (Билинейная форма). Пусть  $X$  — векторное пространство. Функция  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  называется билинейной формой на  $X$ , если она линейная по каждому аргументу.

*Замечание 18.* Билинейную форму (и не обязательно её, а любую функцию  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ) называют **симметричной**, если

$$\forall x, y \in X \quad B(x, y) = B(y, x)$$

*Замечание 19.* Подразумевается, что  $X$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$ . Для векторного пространства над другим полем всё определяется аналогично.

**Определение 28** (Матрица билинейной формы). Зафиксируем базис  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  пространства  $X$ . В таком случае матрица билинейной формы  $B$  на  $X$  определяется как матрица  $b$  размера  $n \times n$ , каждый член которой задаётся так:

$$b_{ij} = B(v_i, v_j)$$

*Замечание 20.* Допустим, нам известна матрица  $B_v$  билинейной формы  $B$  над векторным пространством  $X$  в базисе  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . В таком случае для точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  значение билинейной формы будет следующим:

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n [B_v]_{ij} x_i y_j$$

Что в матричной форме записывается как

$$B(x, y) = x^T b y$$

*Замечание 21.* При фиксированном базисе пространства  $X$  существует взаимно однозначное соответствие между матрицами  $n \times n$  и билинейными формами, что им соответствуют. При таком сопоставлении симметричным матрицам соответствуют симметричные билинейные формы, и наоборот.

Зафиксируем векторное пространство  $X$ , его базис  $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ , какой-то ещё его базис  $w = \{w_1, \dots, w_n\}$ , билинейную форму на  $X$  — обозначим её  $B$ . Обозначим  $B_v$  — матрицу  $B$  при базисе  $v$ . Тогда

$$B_v = A^T B_w A$$

где  $A$  — матрица перехода от  $v$  к  $w$ .

*Доказательство.* В самом деле, рассмотрим билинейную форму на базисных векторах  $w_i$  и  $w_j$ , воспользовавшись матрицей в базисе  $v$ . Тогда

$$w_i^T B_w w_j = v_i^T A^T B_w A v_j = v_i^T B_v v_j$$

□

## 5.2 Квадратичные формы

**Определение 29** (Квадратичная форма). Пусть  $X$  — векторное пространство,  $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $Q$  называется квадратичной формой, если существует билинейная форма  $B$  на  $X$ , такая что

$$\forall x \in X \quad Q(x) = B(x, x)$$

**Теорема 17** (О единственной симметричной форме). Для любой квадратичной формы  $Q$  над векторным пространством  $X$  существует единственная симметричная билинейная форма  $B$  над тем же пространством, для которой

$$\forall x \in X \quad Q(x) = B(x, x)$$

*Доказательство.* Докажем отдельно существование и единственность.

- **Существование.** По определению существует какая-то билинейная форма  $B$ , такая что  $Q(x) = B(x, x)$ . В таком случае, положим форму  $C$  так:

$$C(x, y) = \frac{B(x, y) + B(y, x)}{2}$$

С одной стороны,  $C$  — симметричная и билинейная. С другой стороны —  $C(x, x) = Q(x)$  для любого  $x \in X$ .

- **Единственность.** Пусть  $Q(x) = B(x, x)$  для некоторой билинейной симметричной формы  $B$ . Тогда покажем, что  $Q$  однозначно определяет все значения  $B$ :

$$B(x, y) = \frac{1}{2}((B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y)) - B(x, x) - B(y, y)) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$$

□

*Замечание 22.* Это соответствие каноническое, то есть не зависит от выбора базиса пространства  $X$ .

*Замечание 23.* Таким образом получается биекция между квадратичными формами и билинейными симметричными; при выборе базиса, как уже говорилось, билинейные симметричные формы биективно соответствуют симметричным матрицам подходящего размера. Матрица билинейной симметричной формы  $B$  в базисе  $v$ , соответствующей квадратичной форме  $Q$ , называется **матрицей квадратичной формы  $Q$**  в базисе  $v$ .

**Следствие 7.** Пусть зафиксирован базис  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  векторного пространства  $X$ , а также квадратичная форма  $Q$  на нём, которой соответствует билинейная симметричная форма  $B$  с матрицей  $b$  в базисе  $v$ . Тогда для вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  значение квадратичной формы  $Q$  находится следующим образом:

$$Q(x) = B(x, x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

**Пример 13** (Квадратичная форма в  $\mathbb{R}^2$ ). Рассмотрим симметричную матрицу в  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Тогда квадратичная форма, задаваемая этой матрицей, имеет вид

$$Q((x, y)) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

для любого  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

*Замечание 24.* Квадратичная форма (над любым  $X$ ) отождествляется с однородным многочленом степени 2; это напрямую следует из последнего следствия.

Так как 0 — тоже квадратичная форма, то иногда принято считать, что степень 0 как многочлена равна 2.

### 5.3 Диагонализация билинейных форм

В этом параграфе пространство  $X$  будем считать снабжённым евклидовой структурой.

**Теорема 18** (О существовании диагональной матрицы для  $Q$ ). *Для любой симметричной билинейной формы существует ортонормированный базис, в котором её матрица диагональна.*

*Доказательство.* Будем доказывать индукцией по размерности пространства. База — очевидна, проделаем шаг. Итак, пусть  $B$  — симметричная билинейная форма. Найдём по следующей лемме  $v$  такой, что выполнены следующие два условия:

- $|v| = 1$
- $\forall w \in v^\perp \quad B(v, w) = 0$

Диагонализуем  $B|_W$ , где  $W = v^\perp$ . Базис  $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$  подпространства  $W$  дополняется до базиса пространства  $X$  элементом  $v$ , так как  $\forall 1 \leq i \leq n-1 \quad \langle v, w_i \rangle = 0$ . С другой стороны, так как  $\forall 1 \leq i \leq n-1 \quad B(v, w_i) = 0$ , то матрица  $B$  в базисе  $\{v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$  будет иметь нули на всех элементах первой строки и столбца, кроме разве что диагонального, соответствующего  $B(v, v)$ . Так как  $B|_W$  мы заранее диагонализировали, то и сама  $B$  будет диагональна.  $\square$

**Лемма 7.** *Для симметричной билинейной формы  $B$  на пространстве  $X$  размерности  $n$  существует вектор  $v \in X$  такой, что выполнены следующие два условия:*

- $|v| = 1$
- $\forall w \in v^\perp \quad B(v, w) = 0$

*Доказательство.* Рассмотрим единичную сферу

$$S^{n-1} = \{x \in X : |x| = 1\}$$

Так как  $B(x, x)$  — квадратичная функция, то она непрерывна и достигает максимума на  $S^{n-1}$ ; скажем, что этот максимум достигается на векторе  $v$ .

Рассмотрим теперь любой  $w$  такой, что  $\langle v, w \rangle = 0$  и  $|w| = 1$ . Натянем плоскость на  $v$  и  $w$ , назовём её  $L$ . Пересечение  $L \cap S^{n-1}$  есть окружность, а именно

$$\cos(t)v + \sin(t)w$$

Найдём  $B(\cos(t)v + \sin(t)w, \cos(t)v + \sin(t)w)$ :

$$B(\cos(t)v + \sin(t)w, \cos(t)v + \sin(t)w) = \cos(t)^2 B(v, v) + \sin(t)^2 B(w, w) + 2 \cos(t) \sin(t) B(v, w)$$

Экстремум (максимум)  $B|_L$  будет в точке  $t = 0$ . Возьмём производную по  $t$ :

$$\begin{aligned} B'(\cos(t)v + \sin(t)w, \cos(t)v + \sin(t)w) &= -2 \cos(t) \sin(t) B(v, v) + 2 \cos(t) \sin(t) B(w, w) - \\ &\quad - 2 \sin^2(t) B(v, w) + 2 \cos^2(t) B(v, w) \end{aligned}$$

Что при  $t = 0$  будет равно  $2B(v, w)$ ; с другой стороны, так как экстремум этой непрерывной функции в точке  $t = 0$ , то в точке  $t = 0$  она должна быть равна 0. Таким образом, получаем  $B(v, w) = 0$ , а следовательно и  $B(v, \alpha w) = 0$  для любого  $\alpha$ .  $\square$

*Замечание 25.* Рассмотрим билинейную симметричную форму  $B(x, y)$  вида

$$ax^2 + by^2$$

при  $a > b$ . Тогда на единичной сфере

$$S^1 = \{|(x, y)| = 1\}$$

максимум  $B$  будет равен  $a$ , тогда как минимум — равен  $b$ :

$$\max_{(x,y) \in S^1} Q(x, y) = a \quad \min_{(x,y) \in S^1} Q(x, y) = b$$

*Замечание 26.* Понятно, что при диагональной матрице билинейная симметричная форма — она же квадратичная форма — будет равна

$$Q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$$

*Замечание 27.* Если не требовать ортонормированности, то сведение к диагональному виду очевидно. К примеру, рассмотрим квадратичную форму  $Q$  произвольного вида:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + c$$

Тогда по индукции заменим  $x_i^2$ , начиная с  $i = 1$  и до  $i = n$ , следующим образом:

$$(x'_1)^2 = (a_{11}x_1^2 + \frac{a_{12}}{2}x_1x_2 + \frac{a_{13}}{2}x_1x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{2}x_1x_n)^2$$

После  $n$  таких замен мы и получим требуемую форму.

**Лемма 8.** Числа  $a_i$ , стоящие на главной диагонали диагональной матрицы квадратичной формы, определены с точностью до перестановки.

*Доказательство.* Для квадратичной формы  $Q$  существует единственная билинейная симметричная форма  $B$ , соответствующая ей. Единственный случай, в котором она диагональна — это её запись в ортонормированном базисе. Тогда утверждение напрямую следует из того, что собственные числа оператора  $B$  не зависят от базиса, а их количество в диагонали матрицы определяется алгебраической кратностью этих чисел в характеристическом многочлене и размерностями соответствующих корневых подпространств.  $\square$

## 5.4 Квадрики на плоскости

**Определение 30.** Рассмотрим евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  и две фиксированные точки на ней,  $X_0$  и  $X_1$ . Тогда для константы  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  геометрическое место точек  $Y \in \mathbb{R}^2$ , таких что  $|X_0Y| + |YX_1| = c$ , назовём эллипсом  $\epsilon$ . Иными словами,

$$\epsilon = \{Y \in \mathbb{R}^2 : |X_0Y| + |YX_1| = c\}$$

*Замечание 28.* Точки  $X_0$  и  $X_1$  называют фокусами эллипса  $\epsilon$ .

**Лемма 9.** Принадлежность эллипса к квадрикам.

Всякий эллипс является квадрикой.

*Доказательство.* Движением можно переместить фокусы так, чтобы для некоторого положительного  $a$ :

$$X_0 = (a, 0), \quad X_1 = (-a, 0)$$

Тогда исходное условие можно переписать так:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = c$$

Откуда следует

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = c^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2c\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

То есть

$$2c\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = c^2 - 4ax$$

Что, в свою очередь, при возведении в квадрат даёт

$$4c^2x^2 - 8ac^2x + 4c^2a^2 + 4c^2y^2 = c^4 - 8axc^2 + 16a^2x^2$$

И приведём это к равносильной форме

$$(4c^2 - 16a^2)x^2 + (4c^2)y^2 + (4c^2a^2 - c^4) = 0$$

□

*Замечание 29.* Для непустого эллипса мы должны требовать, чтобы  $c$  было больше  $2a$ , иначе эллипс пуст по неравенству треугольника.

*Замечание 30.* Таким образом мы заодно доказали, что эллипс может быть приведён к квадратичной функции без линейных членов. Для непустого эллипса мы может переписать последнее уравнение так, сделав замену:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$$

Это будет “каноническим” уравнением эллипса, из которого очевидно, что с точки зрения аффинной геометрии эллипс ничем не отличается от окружности.

Рассмотрим гомогенизацию канонического уравнения эллипса при стандартном вложении  $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}P^2$ ,  $(x, y) \rightarrow [x : y : 1]$ :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = z^2$$

Что после аффинного преобразования сводится к уравнению

$$x^2 + y^2 = z^2$$

В таком случае в  $\mathbb{C}P^2$  эллипсу будут принадлежать точки  $[1 : i : 0]$  и  $[1 : -i : 0]$  в любом случае, что иллюстрирует инвариантность нулей такого многочлена с вещественными коэффициентами при автоморфизмах поля комплексных чисел.

Аналогично, в общем случае можно рассматривать любые полиномиальные функции на аффинных пространствах, а также их гомогенизации и нули этих гомогенизаций.

**Определение 31.** Рассмотрим евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  и две фиксированные точки на ней,  $X_0$  и  $X_1$ . Тогда для константы  $c \in \mathbb{R}$  геометрическое место точек  $Y \in \mathbb{R}^2$ , таких что  $|X_0Y| - |YX_1| = c$ , назовём гиперболой  $\gamma$ . Иными словами,

$$\gamma = \{Y \in \mathbb{R}^2 : |X_0Y| - |YX_1| = c\}$$

*Замечание 31.* Аналогично эллипсу, точки  $X_0$  и  $X_1$  называют фокусами гиперболы.

**Лемма 10. Принадлежность гиперболы к квадрикам.**

*Всякая гипербола является квадрикой.*

*Доказательство.* Движениями можно переместить фокусы параболы в точки с координатами  $(-a, 0)$  и  $(a, 0)$  для некоторого положительного  $a$ . Кроме того, не умаляя общности положим  $c \geq 0$ , ведь иначе можно просто поменять фокусы местами. Тогда исходное условие можно переписать следующим образом:

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = c$$

С помощью перенесения второго слагаемого направо и возведения в квадрат получим:

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = c^2 + 2c\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

Что равносильно

$$4ax - c^2 = 2c\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Возведём в квадрат обе части уравнения:

$$16a^2x^2 - 8axc^2 + c^4 = 4c^2x^2 - 8axc^2 + 4c^2a^2 + 4c^2y^2$$

Преобразуем после сокращения  $-8axc^2$ :

$$(16a^2 - 4c^2)x^2 - 4c^2y^2 = (4c^2a^2 - c^4)$$

□

*Замечание 32.* Для непустой гиперболы нам нужно гарантировать, чтобы  $c \leq 2a$  (максимум функции разницы расстояний).

*Замечание 33.* Оценим наши коэффициенты: так как  $c \leq 2a$ , то  $4 \cdot (c)^2 \leq 4 \cdot (2a)^2$ , откуда коэффициент перед  $x$  положительный;  $4c^2$  положительный по очевидным причинам, последний коэффициент получается из первого умножением на  $\frac{c^2}{4}$ , так что тоже положительный. Значит, поделив на него и заменив буквы, получим

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

то есть каноническое уравнение гиперболы. После аффинного преобразования и гомогенизации получаем:

$$x^2 - y^2 = z^2$$

**Определение 32.** Рассмотрим точку  $p$  и прямую  $l$  в вещественной евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Геометрическое место точек, равноудалённых от  $p$  и  $l$ , назовём параболой.

С помощью аффинного преобразования можно положить  $p = (0, 1)$ , а прямую  $l : y = -1$ . В таком случае условие равноудалённости точки  $(x, y)$  можно переписать так:

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(y + 1)^2}$$

Что при возведении в квадрат даёт:

$$x^2 - 4y = 0 \implies y = \frac{x^2}{4}$$

Заменой  $y \rightarrow \frac{y}{4}$  (аффинным преобразованием) получаем каноническое уравнение параболы, подтверждающее её принадлежность к квадрикам:

$$y = x^2$$

Рассмотрим гомогенизацию параболы в  $\mathbb{R}P^2$ :

$$yz = x^2$$

В таком случае множеству точек, удовлетворяющих данному равенству, принадлежит в том числе и точка  $[0 : 1 : 0]$  — бесконечно удалённая точка. Тем самым, ветки параболы в  $\mathbb{R}P^2$  “замыкаются”, а следовательно топологически она ничем не отличается от окружности. Заметим, что гипербола тоже будет окружностью (топологически) в  $\mathbb{R}P^2$ , но она будет пересекать бесконечно удалённую прямую уже в двух точках. Таким образом получается, что топологически эллипс, парабола и гипербола отличаются только лишь количеством точек пересечения с бесконечно удалённой прямой — их 0, 1 и 2 соответственно, что значит их проективные аналоги неотличимы друг от друга.

*Замечание 34.* Возьмём прямую в  $\mathbb{R}^3$  с котангенсом угла наклона  $a$ . Вращением её относительно оси  $Oz$  получим **конус**, уравнение которого будет

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Заметим, что все встречавшиеся нам квадрики являются сечениями конуса плоскостью, не проходящей через  $(0, 0, 0)$ :

- Сечением плоскости, перпендикулярной  $Oz$ , мы получаем окружность.
- Постепенно “наклоняя” эту плоскость, поворачивая её относительно прямой, лежащей в этой плоскости и параллельной оси  $Oy$ , мы будем получать эллипсы.
- Когда угол наклона будет совпадать с наклоном образующей прямой, мы получим параболу.
- Когда угол наклона станет больше, мы получим гиперболу сечением “верхней” и “нижней” частей конуса.

## 5.5 Проективные квадрики

*Определение 33.* Пусть  $Q$  – квадратичная форма на  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Тогда ясно, что, так как  $Q$  – однородный многочлен от координат степени 2,

$$Q(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 Q(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Квадрикой в  $\mathbb{R}P^n$  называют множество точек, удовлетворяющих однородному уравнению

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$$

Рассмотрим сначала вещественные проективные квадрики. Как мы уже поняли, квадратичная форма в  $\mathbb{R}^3$  задаёт проективную квадрику. Если квадратичная форма невырожденная, то заменой координат её можно привести к одному из четырех видов:

- $x^2 + y^2 + z^2$
- $x^2 + y^2 - z^2$
- $-x^2 - y^2 + z^2$
- $-x^2 - y^2 - z^2$

Отсюда получаем следующие проективные квадрики:

- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  — пустое множество.
- $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  — конус.
- $-x^2 - y^2 + z^2 = 0$  — конус.
- $-x^2 - y^2 - z^2 = 0$  — пустое множество.

То есть, все непустые невырожденные квадрики проективно эквивалентны (одна переводится в другую проективной заменой координат). Заметим, что рассматривая сечения этого конуса плоскостью (то есть, рассматривая проективные квадрики в аффинной карте) мы будем получать знакомые нам конические сечения, то есть, квадрики на плоскости. Теперь рассмотрим комплексные проективные квадрики:

## 5.6 Классификация кривых и поверхностей второго порядка

В этом параграфе  $X$  — аффинное пространство, снабжённое евклидовой структурой.



**Теорема 19** (Декартовы координаты квадратичной функции). Пусть  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная функция. Тогда существует **декартова система координат** (точка отсчёта и ортонормированный базис), такой что найдутся  $a_1, a_2, \dots, a_n, b, c \in \mathbb{R}, b > 0$ , при которых для любого вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  выполняется

$$\begin{cases} F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \dots + a_nx_n^2 + c \\ F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + bx_n \end{cases}$$

то есть функция  $F$  имеет одну из этих двух форм в этой системе координат.

**Доказательство.** Разложим функция  $F = Q(x) + L(x) + C$ , где  $Q$  — квадратичная форма,  $L$  — линейная форма,  $C$  — константа. В какой-то системе координат мы можем добиться, согласно предыдущей теореме,

$$\begin{cases} Q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2 \\ L(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \end{cases}$$

Сделаем это так: для каждого  $i$  такого, что  $a_i$  и  $b_i$  не 0, будем сдвигать 0:

$$0 \rightarrow -\frac{b_i}{2a_i}v_i$$

Что соответствует группировке

$$a_ix_i^2 + b_ix_i = a_i\left(x_i + \frac{b_i}{2a_i}\right)^2 + \text{const}$$

и замене

$$x_i \rightarrow x_i + \frac{b_i}{2a_i}$$

Таким образом, мы сможем привести функцию  $F$  в следующему виду (после перенумерации слагаемых):

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_kx_k^2 + b_{k+1}x_{k+1} + b_{k+2}x_{k+2} + \dots + b_nx_n + c$$

Возьмём базис  $(v_1, v_2, \dots, v_k, v_n)$ , где  $v_1, v_2, \dots, v_k$  — старые вектора, а  $v_n$  определяется как

$$v_n = \frac{b_{k+1}v_{k+1} + b_{k+2}v_{k+2} + \dots + b_{n-1}v_{n-1} + b_nx_n}{\sqrt{b_{k+1}^2 + b_{k+2}^2 + \dots + b_n^2}}$$

В таком базисе, обозначив

$$b = \sqrt{b_{k+1}^2 + b_{k+2}^2 + \dots + b_n^2} > 0$$

Функция  $F$  принимает вид

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_kx_k^2 + bx_n + c$$

и перенесём начало на  $-\frac{c}{b}v_n$ . Если  $b$  стало меньше 0, то заменой  $x_n \rightarrow -x_n$  оно станет вновь положительным. Таким образом, у нас возможны две ситуации, при  $b > 0$  и при  $b = 0$ . Оба этих случая и приводят нас к соответствующему ответу.  $\square$

**Теорема 20. (Классификация квадрик в  $\mathbb{R}^2$ )**

Любая квадрика на плоскости  $\mathbb{R}^2$  есть один из следующих видов:

- Пустое множество: например,  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .
- Точка: например,  $x^2 + y^2 = 0$ .

- Прямая: например,  $x^2 = 0$ .
- Две параллельные прямые: например,  $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$ .
- Две пересекающиеся прямые: например,  $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$ .
- Парабола: аффинно она связна, неограничена и не содержит прямых.
- Эллипс: аффинно он ограничен и не содержит прямых.
- Гипербола: аффинно она не связна, неограничена и не содержит прямых.

*Доказательство.* Будем считать, что эти варианты различны, так как в формулировке теоремы обоснованы их различия относительно аффинных преобразований. Согласно теореме о декартовых координатах квадратичной функции, уравнение квадрики можно свести к одному из двух следующих вариантов:

$$\begin{cases} ax^2 + by = 0 \\ ax^2 + by^2 + c = 0 \end{cases}$$

где  $a \neq 0$ . Итак, рассмотрим все варианты отдельно:

1. Пусть функция свелась к  $ax^2 + by = 0$ . Тогда возможны два случая:
  - Если  $b = 0$ , то это прямая.
  - Если  $b \neq 0$ , то это парабола.
2. Пусть функция свелась к  $ax^2 + by^2 + c = 0$ . Не умаляя общности, положим  $a > 0$ . Рассмотрим случаи:
  - Пусть  $c = 0$ . Если  $b > 0$ , то мы получаем уравнение точки. Если  $b = 0$ , то это прямая. Если же  $b < 0$ , то это две пересекающиеся прямые.
  - Пусть  $c > 0$ . Тогда, если  $b \geq 0$ , то это пустое множество; если же  $b < 0$ , то мы имеем уравнение гиперболы.
  - Пусть  $c < 0$ . Тогда, если  $b > 0$ , то это эллипс. Если  $b < 0$ , то это вновь гипербола. Если же  $b = 0$ , то это две параллельные прямые.

□