Базовая теория чисел

Делимость и её базовые свойства.

1. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2 + a - 1) \vdots (a - 2)$.
2. Докажите, что произведение любых пяти последовательных натуральных чисел делится на 30.
3. Придумайте 5 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.
4. Докажите, что дробь $\dfrac{6n+7}{10n+12}$ несократима не при каких натуральных n.
5. Произведение двух чисел, каждое из которых делится на 10, равно 1000. Найдите сумму этих чисел.

Деление с остатком

6. Найдите остаток числа $2011 \cdot 2012 + 2013^2$ при делении на 7.
7. Докажите, что квадраты натуральных чисел не дают остатка 2 от деления на 3.
8. Найдите последнюю цифру числа $2^{2}012$.
9. Найдите четырёхзначное число, которое при делении на 131 даёт остаток 112, а при делении на 132 даёт остаток 98.
10. Натуральные числа x, y, z образуют пифагорову тройку, то есть $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что $xyz \vdots 60$.

Сравнения по модулю

11. Докажите, что число $96^{19} + 32^{13} - 8 \cdot 73^{16}$ делится на 10.
12. Найдите остаток от деления 26^{36} на 7.
13. Докажите, что $16^{2014} + 33^{2015}$ делится на 17.
14. При каких натуральных n число $2^n - 1$ делится на 7?
15. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}\ 37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \vdots 7$.

Десятичная запись числа. Признаки делимости.

16. Цифры двузначного числа поменяли местами, после чего вычли полученное двузначное число из исходного. Докажите, что полученная разность делится на 9.
17. Двузначное число умножили на удвоенное произведение его цифр. Получилось 2016. Найдите исходное число.
18. Пусть a, b, c, d — различные цифры. Докажите, что $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на $\overline{aabb}$.
19. Существует ли натуральное число, которое при зачёркивании первой слева цифры уменьшается ровно в 2011 раз?
20. Найдите все двузначные числа, которые равны сумме своей цифры десятков и квадрата цифры, стоящей в разряде единиц.
21. Сколько существует двузначных чисел, которые ровно в 9 раз больше суммы своих цифр? Сколько существует таких трёхзначных чисел?
22. Используя все цифры от 1 до 9 по одному разу, составьте наибольшее девятизначное число, делящееся на 11.
23. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число из двоек и троек. Известно, что в кодовом числе двоек больше, чем троек. Кроме того, известно, что кодовое число делится на 3 и на 4. Найдите код сейфа.
24. Докажите, что число, состоящее из 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, не может быть квадратом натурального числа.

НОК. НОД. Алгоритм Евклида.

25. Найдите при помощи алгоритма Евклида $\gcd(2576, 154)$.
26. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых $\gcd(a, b) = 13,\ \mathrm{lcm}(a, b) = 78$.
27. Найдите $\gcd(27, 96)$, а также, линейное представление $\gcd(27, 96)$.
28. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $p^2 - 1$, где p — простое число, большее 3 и меньшее 2010.
29. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{N}$ — несократима. Докажите, что дробь $\frac{2a+b}{5a+3b}$ несократима.

Диофантовы уравнения.

30. Решите в целых числах уравнение $3x + 2y = 7$.
31. У осьминога восемь ног, а у морской звезды 5. Сколько в аквариуме тех и других, если у всех них всего 39 ног.
32. Имеются контейнеры двух видов: по 130 килограмм и 160 килограмм. Сколько было контейнеров первого вида и сколько второго вида, если все вместе они весят 3 тонны. Укажите все решения.
33. Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен n, а остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

Основная теорема арифметики

34. Разложите на простые множители числа 111, 1111, 11111, 111111, 111111, 1111111.
35. В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)
36. Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.
37. Докажите, что число является квадратом натурального числа тогда и только тогда, когда у него нечетное число делителей.
38. Найдите все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), мы получим число n^3.
39. Множество A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

Следствия из основной теоремы арифметики.

40. Сколько двоек присутствует в разложении на простые множители числа 20!?
41. Найдите количество натуральных делителей числа 56^n.
42. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого 1999! делится на 34^n.
43. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и и имеют ровно 42 натуральных делителей.
44. Найти количество и сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и имеющих нечетное число делителей.

НОК. НОД. (2). Малая теорема Ферма.

45. Покажите, что $13^{176} - 1$ делится на 89.
46. Найдите все пары натуральных чисел, разность которых равна 66, а их НОК равен 360.
47. Найдите $\gcd(2^{30} - 1, 2^{40} - 1)$.

48. Найтуральные числа m и n взаимнопросты. Какие значения может принимать НОД чисел $4m+3n$ и $6m+5n$,

49. Вычислите $2010^{2011} \pmod{57}$.

Китайская теорема об остатках

45. Решите сравнение $4x \equiv 1 \pmod{5}$.

46. В китайской натурофилософии выделяются пять первоэлементов природы – дерево, огонь, металл, вода и земля, которым соответствуют пять цветов – синий (или зелёный), красный, белый, чёрный и жёлтый. В восточном календаре с древних времен используется 12-летний животный цикл так, что каждому из 12 годов в цикле соответствует одно из животных. Кроме того, каждый год проходит под покровительством одной из стихий и окрашивается в один из цветов:

- годы, оканчивающиеся на 0 и 1 – годы металла (цвет белый);
- годы, оканчивающиеся на 2 и 3 – это годы воды (цвет чёрный);
- годы, оканчивающиеся на 4 и 5 – годы дерева (цвет синий);
- годы, оканчивающиеся на 6 и 7 – годы огня (цвет красный);
- годы, оканчивающиеся на 8 и 9 – годы земли (цвет жёлтый).

В 60-летнем календарном цикле каждое животное возникает пять раз. С помощью китайской теоремы об остатках объясните, почему оно все пять раз бывает разного цвета.

47. Решите в целых числах систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}$$

48. Решите в целых числах систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{33} \\ x \equiv 3 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{14} \end{cases}$$