Алгебраическая геометрия и теория чисел

Содержание

Правила сдачи.

Говорят, что решение задач серьезно помогает в закреплении курсов.

После каждой лекции в этой в этом файле репозитории https://github.com/matthewmagin/LNMO_summer_school_2022 будет добавляться несколько задач с некоторой стоимостью (она указана справа от номера).

Задачи не теряют цену **2 дня**, после баллы за задачу считаются, как $N \cdot 0{,}9^t$, где t — количество дней, на которые задача просрочена, а N — ценность задачи.

Зачем вообще это решать:
Наличие баллов за задачи даёт бонусы на экзамене. Тем, у кого баллов будет много (это будет несколько людей) можно будет не решать задачу на 5, остальным баллы будут учитываться в принципе при выставлении оценки.

Приз:
Тот, кто нарешает задач больше всех, получит приз от лектора.

Как сдавать задачи:
Сдавать задачи надо устно лектору (решения лучше пишите заранее).

Удачи!

ТЧ: напоминание, чтобы быть в форме

1. (3б.) Найдите $17^{26^{39}} \mod 330$
2. (5б.) Найдите 4 последние цирфы числа 18^{1818}.

Нормированное поле. Неархимедовы нормы.

1. (3б.) Докажите, что на конечном поле $\mathbb{F}_p$ не существует нетривиальной нормы.
2. (2б.) Докажите арифметические свойства пределов для $(F, \|\cdot\|)$.
3. (2б.) Докажите, что в неархимедовом нормированном поле любой шар с положительным радиусом является одновременно и открытым и замкнутым множеством.

p-адические числа.

1. (2б.) Какую мощность имеет кольцо целых p-адических чисел?
2. (1б.) Докажите следствие о том, что $\mathbb{Z}_p$ — область целостности.
3. (5б.) Пусть p — простое число, не равное двум, а c — квадратичный вычет по модулю p. Докажите, что существует два различных p-адических числа, квадраты которых равны p.

p-адический анализ.

1. (2б.) Пусть $x_n = 1 + p + p^2 + \dots$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \frac{1}{1-p}$$

2. (2б.) Докажите, что при перестановке членов сходящегося p-адического ряда сходимость не нарушается и сумма не меняется.
3. (2б.) Представьте -1 в поле p-адических чисел в виде ряда $\sum a_k p^k$, $0 \le a_k < p$.
4. (4б.) Докажите, что при различных простых p и q поля $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_q$ неизоморфны.
5. (4б.) Докажите, что для любого простого p поле $\mathbb{Q}_p$ неизоморфно полю $\mathbb{R}$.

Проективная геометрия. Квадрики и проективные квадрики.

1. (3б.) Что будет, если вырезать (открытую окрестность) из $\mathbb{R}P^2$?
2. (3б.) Докажите, что любое проективное отображение $\mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ является композицией не более двух инволюций.
3. (3б.) Докажите директориальное своиство эллипса (не совпадающего с окружностью) и гиперболы. Директрисами эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ или гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются две прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, где число ε, называемое эксцентриситетом, определяется равенством $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где $2c$ —- расстояние между фокусами. Докажите, что отношение расстоянии от точки эллипса (или гиперболы) до правого фокуса к расстоянию до правои директрисы равно эксцентриситету (то же верно и для левых фокуса и директрисы).
4. (5б.) Нарисуйте в окрестности бесконечно удаленной точки кубическую пораболу, заданную в декартовых координатах на Евклидовой плоскости уравнением $y = x^3$.
5. (5б.) Расклассифицируйте проективыне квадрики в $\mathbb{R}P^3$.
   Замечание: можно пользоваться классифицкаций квадрик в $\mathbb{R}^3$.