

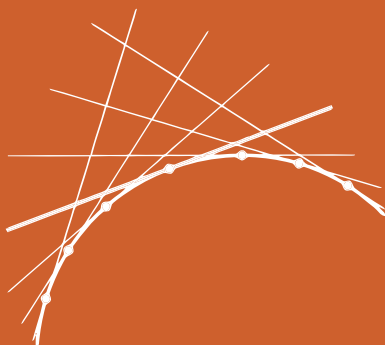
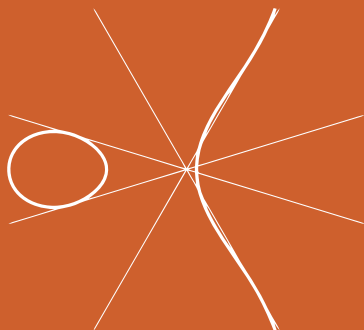
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ



М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

## По направлению к пространствам модулей



М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

По направлению  
к пространствам модулей

Электронное издание

Москва  
Издательство МЦНМО  
2019

УДК 512.772

ББК 22.147

К14

Казарян М. Э., Ландо С. К., Прасолов В. В.

Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей.

М.: МЦНМО, 2019.

272 с.

ISBN 978-5-4439-3353-5

В этой книге излагается теория комплексных алгебраических кривых и их семейств. Она содержит описание как классических результатов, так и недавних идей, связанных с геометрией пространства модулей кривых.

Рекомендуется для студентов старших курсов математических и физических факультетов, аспирантов и научных работников, интересующихся математикой.

Подготовлено на основе книги:

*Казарян М. Э., Ландо С. К., Прасолов В. В. Алгебраические кривые.*

*По направлению к пространствам модулей. — М.: МЦНМО, 2019. —*

*272 с. — ISBN 978-5-4439-1365-0*

Научное издание



Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,  
тел. (499)241-08-04.

<http://www.mccme.ru>

© Казарян М. Э., Ландо С. К.,  
Прасолов В. В., 2019.

© МЦНМО, 2019.

ISBN 978-5-4439-3353-5

# Оглавление

<b>Глава 0. Введение</b> . . . . .	7
<b>Глава 1. Предварительные сведения</b> . . . . .	10
§ 1.1. Комплексные проективные пространства . . . . .	11
§ 1.2. Топология проективного пространства . . . . .	12
§ 1.3. Двумерные поверхности . . . . .	13
§ 1.4. Склейка двумерных поверхностей из многоугольников . . . . .	14
§ 1.5. Накрытия . . . . .	16
§ 1.6. Разветвленные накрытия . . . . .	18
§ 1.7. Формула Римана—Гурвица . . . . .	20
<b>Глава 2. Алгебраические кривые</b> . . . . .	23
§ 2.1. Плоские алгебраические кривые . . . . .	23
§ 2.2. Теорема Безу и ее приложения . . . . .	30
§ 2.3. Рациональная параметризация . . . . .	39
<b>Глава 3. Комплексная структура и топология кривых</b> . . . . .	45
§ 3.1. Комплексная структура на кривой . . . . .	45
§ 3.2. Род гладкой плоской кривой . . . . .	47
§ 3.3. Гессиан и точки перегиба . . . . .	54
§ 3.4. Гиперэллиптические кривые . . . . .	56
§ 3.5. Поднятие комплексной структуры . . . . .	58
§ 3.6. Факторкривая . . . . .	60
§ 3.7. Мероморфные функции . . . . .	61
<b>Глава 4. Кривые в проективных пространствах</b> . . . . .	65
§ 4.1. Определение и примеры . . . . .	65
§ 4.2. Вложения и погружения кривых . . . . .	69
<b>Глава 5. Формулы Пюккера</b> . . . . .	73
§ 5.1. Проективная двойственность . . . . .	73
§ 5.2. Формулы Пюккера для неособых кривых . . . . .	79
§ 5.3. Формулы Пюккера для особых кривых . . . . .	80
§ 5.4. Многоугольники Ньютона . . . . .	84
<b>Глава 6. Отображения кривых</b> . . . . .	86
§ 6.1. Автоморфизмы сферы Римана . . . . .	86
§ 6.2. Отображения эллиптических кривых . . . . .	87
§ 6.3. Модули эллиптических кривых . . . . .	90
§ 6.4. Решетки и кубические кривые . . . . .	93
§ 6.5. Снова $j$ -инвариант . . . . .	98
§ 6.6. Автоморфизмы эллиптических кривых и теорема Понселе . . . . .	102

§ 6.7. Автоморфизмы кривых старших родов. Теорема Гурвица . . .	104
<b>Глава 7. Дифференциальные 1-формы на кривых . . . . .</b>	<b>109</b>
§ 7.1. Касательное и кокасательное расслоения . . . . .	109
§ 7.2. Как задавать векторные поля и дифференциальные формы . .	112
§ 7.3. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой . . . . .	115
§ 7.4. Интегрирование 1-форм . . . . .	118
§ 7.5. Размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой с особыми точками . . . . .	120
§ 7.6. Вычеты и интегралы от мероморфных 1-форм . . . . .	121
<b>Глава 8. Линейные расслоения, линейные системы и дивизоры . . . .</b>	<b>123</b>
§ 8.1. Дивизор мероморфного сечения линейного расслоения . . . .	123
§ 8.2. Степень дивизора и степень расслоения . . . . .	125
§ 8.3. Тавтологическое линейное расслоение над проективной прямой . . . . .	127
§ 8.4. Восстановление линейного расслоения по классу дивизора . .	128
§ 8.5. Отображения кривых в проективное пространство, связанные с линейными расслоениями . . . . .	130
§ 8.6. Линейные системы и отображения кривых . . . . .	131
<b>Глава 9. Формула Римана—Роха и ее приложения . . . . .</b>	<b>134</b>
§ 9.1. Задача Миттаг-Леффлера . . . . .	134
§ 9.2. Рациональная кривая . . . . .	138
§ 9.3. Эллиптические кривые . . . . .	138
§ 9.4. Гиперэллиптические кривые и кривые рода 2 . . . . .	140
§ 9.5. Вычисление Римана . . . . .	142
§ 9.6. Кривые родов 3, 4 и 5 . . . . .	144
<b>Глава 10. Доказательство формулы Римана—Роха . . . . .</b>	<b>147</b>
§ 10.1. Доказательство . . . . .	147
§ 10.2. Дивизоры на канонической кривой . . . . .	151
<b>Глава 11. Точки Вейерштрасса . . . . .</b>	<b>153</b>
§ 11.1. Определение точек Вейерштрасса . . . . .	153
§ 11.2. Точки Вейерштрасса кривых рода 3 и точки перегиба плоских кривых . . . . .	155
§ 11.3. Веса точек Вейерштрасса . . . . .	156
§ 11.4. Точки Вейерштрасса и конечность группы автоморфизмов .	160
<b>Глава 12. Теорема Абеля . . . . .</b>	<b>162</b>
§ 12.1. Якобиан . . . . .	162
§ 12.2. Доказательство необходимости . . . . .	165
§ 12.3. Начало доказательства достаточности . . . . .	166
§ 12.4. Абелевы дифференциалы первого, второго и третьего рода .	167

§ 12.5. Билинейные соотношения Римана . . . . .	169
§ 12.6. Завершение доказательства достаточности . . . . .	171
§ 12.7. Доказательство теоремы обращения Якоби . . . . .	174
§ 12.8. $\theta$ -дивизор и $\theta$ -функции . . . . .	180
<b>Глава 13.</b> Примеры пространств модулей . . . . .	181
§ 13.1. Первые примеры . . . . .	181
§ 13.2. Пространство $\mathcal{M}_{1,1}$ . . . . .	183
§ 13.3. Универсальная кривая над $\mathcal{M}_{1,1}$ . . . . .	184
§ 13.4. Когомологии пространства $\mathcal{M}_{1,1}$ . . . . .	186
<b>Глава 14.</b> Подходы к построению пространств модулей . . . . .	188
§ 14.1. Требования к пространству модулей . . . . .	188
§ 14.2. Наивная попытка построения пространства модулей . . . . .	190
§ 14.3. Многочлен Гильберта . . . . .	192
§ 14.4. Схемы Гильберта . . . . .	196
§ 14.5. Плюриканонические вложения . . . . .	197
§ 14.6. Факторизация по действию группы проективных преобразований и стабильность . . . . .	198
§ 14.7. Пространства модулей кривых с отмеченными точками . . . . .	201
<b>Глава 15.</b> Пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками . . . . .	204
§ 15.1. Конструкция Капранова . . . . .	205
§ 15.2. Компактификация пространства модулей . . . . .	207
§ 15.3. Многочлены Пуанкаре пространств модулей . . . . .	211
§ 15.4. Компактифицированные пространства: когомологии по Киллю . . . . .	216
§ 15.5. Компактифицированные пространства: когомологии по Концевичу—Манину . . . . .	222
<b>Глава 16.</b> Стабильные кривые . . . . .	224
§ 16.1. Определение и примеры стабильных кривых . . . . .	224
§ 16.2. Род нодальной кривой . . . . .	227
§ 16.3. Вырождения гладких кривых . . . . .	229
§ 16.4. Компактификация пространств модулей стабильными кривыми и плюриканонические вложения . . . . .	230
<b>Глава 17.</b> Взгляд назад с точки зрения характеристических классов . . . . .	234
§ 17.1. Первый класс Черна линейного расслоения . . . . .	234
§ 17.2. Классы Черна векторных расслоений . . . . .	235
§ 17.3. Другие подходы к определению классов Черна . . . . .	241
§ 17.4. Род гладкой плоской кривой . . . . .	243
§ 17.5. Род полного пересечения . . . . .	245
§ 17.6. Формулы Плюккера . . . . .	246

<b>Глава 18.</b> Пространства модулей стабильных отображений . . . . .	248
§ 18.1. Рациональные кривые на плоскости . . . . .	248
§ 18.2. Пространства модулей стабильных отображений . . . . .	251
§ 18.3. Квантовые когомологии и уравнение ассоциативности . . . .	254
<b>Глава 19.</b> Задачи к экзаменам . . . . .	258
§ 19.1. 1 семестр . . . . .	259
§ 19.2. Вопросы к экзамену . . . . .	263
§ 19.3. 2 семестр . . . . .	264
§ 19.4. Вопросы к экзамену . . . . .	267
Литература . . . . .	268
Предметный указатель . . . . .	269

## Глава 0

# Введение

Основы теории римановых поверхностей были заложены во второй половине XIX века. В ней сошлись передовые на тот момент разработки анализа, алгебры и еще не созданной топологии.

На протяжении всего XX века теория римановых поверхностей, объединившись с теорией комплексных алгебраических кривых, не раз выходила на передний план развития математики. Она позволила объяснить многие трудности, возникающие при интегрировании различных функций, и разработать эффективные методы взятия интегралов, прояснила теорию Галуа и привела к новому пониманию арифметики и теории чисел, стала полигоном для теории комплексных многообразий и теории функциональных классов. В последние десятилетия века римановы поверхности и пространства их модулей оказались востребованы как один из наиболее эффективных инструментов исследования интегрируемых систем и связанных с ними моделей математической физики. Именно эти аспекты теории римановых поверхностей и являются, в первую очередь, предметом настоящей книги.

Главная характеристика современных приложений состоит в том, что они используют не столько индивидуальную кривую, сколько семейства кривых, аналитически зависящие от параметра. Поэтому в книге уделяется много внимания тем свойствам отдельных кривых, которые оказываются центральными при переходе к семействам, например наличию у кривой нетривиальных симметрий. Кривые с нетривиальными симметриями образуют естественные подмногообразия в пространствах модулей кривых и в известном смысле определяют орбифолдные характеристики этих пространств. Большинство книг и учебников, посвященных алгебраическим кривым, либо работают с отдельными кривыми и носят относительно элементарный характер (как, например, *Fulton W. Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. Addison-Wesley, 1969*; *Miranda R. Algebraic curves and Riemann surfaces. AMS, 1995*; *Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980*), либо рассчитаны на использование серьезной алгебро-геометрической техники, изу-



чение которой требует солидной предварительной подготовки (подобно книгам Харрис Дж., Моррисон Я. Модули кривых. М.: Мир, 2004; Arbarello E., Cornalba M., Griffiths P.A. *Geometry of algebraic curves* / With a contribution by J.D.Harris. Vol.II. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, Heidelberg, 2011). Цель настоящей книги — закрыть существующий пробел, оставаясь в рамках сравнительно элементарных методов, и дать в руки студентам-старшекурсникам инструмент для работы с пространствами модулей. Хотелось бы думать, что и физики, для которых пространства модулей кривых является не предметом изучения, а инструментом, смогут найти в книге ответы на некоторые естественные вопросы, не углубляясь в технические детали.

Основные сведения о пространствах модулей кривых и их отображений, интересные для приложений, — это топологические характеристики указанных пространств. Эти топологические характеристики выражаются, в первую очередь, в терминах расслоений над пространствами модулей и их характеристических классов. При изложении этого материала мы постарались не выходить за пределы теории классов Черна векторных расслоений, демонстрируя лишь те вычисления, которые можно выполнить руками. Нет никаких сомнений в том, что топология пространств модулей кривых старших родов чрезвычайно сложна, и ее полного описания трудно ожидать, по крайней мере в ближайшие годы. Вместе с тем востребованная в приложениях информация об этих пространствах (так или иначе определенное «тавтологическое кольцо когомологий») может оказаться гораздо более доступной. В этом отношении пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками могут служить хорошим полигоном для выработки интуиции об устройстве более сложных пространств, и мы посвятили им отдельную главу. В эту главу вошла модель Капранова, представляющая стабильные рациональные кривые в виде кривых Веронезе в подходящих проективных пространствах, а также теоремы Киля и Концевича—Манина, описывающие когомологии пространств модулей рациональных кривых.

В предисловии к книге А. К. Звонкина и С. К. Ландо «Графы на поверхностях и их приложения» (рус. изд. М.: МЦНМО, 2010) написано:

Ясно, что каждая глава нашей книги могла бы вылиться в отдельную монографию. Возможно, когда-нибудь подобная серия монографий будет написана.

По крайней мере один из авторов настоящей книги рассматривает ее как элемент этой будущей серии — подготовительный материал к главам 4 и 5 в «Графах на поверхностях». В свою очередь, в последней книге имеется немало сведений о современных приложениях алгебраических кривых и пространств их модулей.

В основе предлагаемой читателю книги лежит годовой курс лекций, который в течение ряда лет читался студентам Независимого московского университета, затем — факультета математики Высшей школы экономики. Этот курс предназначен для студентов 3—4 курса бакалавриата и студентов магистратуры, впервые знакомящихся с алгебраическими кривыми. Чтение регулярного курса предполагает и присутствие большого количества задач, в том числе предназначенных для оценивания результатов усвоения курса. Для удобства читателя задачи, разбросанные по книге в соответствии с тем, где возникает в них потребность, собраны также в завершающую главу. В этой главе также приведены варианты экзаменационных вопросов.

При работе над книгой М. Э. Казарян и С. К. Ландо пользовались поддержкой гранта РФФИ 16-11-10316 *Характеристические классы и теория представлений*.

## Глава 1

# Предварительные сведения

Основным объектом нашего курса будут комплексные алгебраические кривые, или, что то же самое, римановы поверхности. С топологической точки зрения риманова поверхность является двумерной ориентированной поверхностью; ее топологические свойства однозначно характеризуются целым неотрицательным числом — родом. В то же время, алгебраические кривые обладают сложными индивидуальными характеристиками и, как правило, две различные кривые, даже если они одного рода, мало похожи друг на друга. Однако если мы рассматриваем кривые не поодиночке, а в *семействах*, то такие семейства уже устроены относительно просто и обладают многими замечательными свойствами, которые находят разнообразные применения в математике и теоретической физике. Переход от отдельных кривых к семействам и есть предмет нашего курса.

В нашем обыденном представлении кривые — это в первую очередь вещественные кривые на вещественной плоскости. Но оказывается, для алгебраических кривых такое представление обладает многими недостатками. Главный недостаток связан с тем, что в алгебре удобнее иметь дело с алгебраически замкнутыми полями. Например, над полем  $\mathbb{C}$  любой многочлен степени  $n$  от одной переменной имеет ровно  $n$  корней с учетом их кратностей, а над полем  $\mathbb{R}$  это неверно — у многочлена степени  $n$  может быть меньше чем  $n$  корней. Для кривых это различие проявляется в том, что две плоские комплексные кривые степени  $n$  и  $m$  пересекаются в  $mn$  точках, а для вещественных кривых это, вообще говоря, неверно — число точек пересечения может быть меньше  $mn$ .

Кроме того, кривые на аффинной плоскости могут пересекаться в бесконечно удаленных точках (как, например, параллельные прямые), что тоже создает препятствия для их изучения. В связи с этим кривые естественно рассматривать в комплексных проективных пространствах, определение которых мы сейчас обсудим.

### §1.1. Комплексные проективные пространства

Точками  $n$ -мерного комплексного проективного пространства  $\mathbb{CP}^n$  являются комплексные прямые в  $(n+1)$ -мерном комплексном пространстве  $\mathbb{C}^{n+1}$ , проходящие через начало координат. Такая прямая однозначно определяется отличной от начала координат точкой  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ , через которую она проходит. В свою очередь, эта точка определена однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число  $\lambda$ : точка  $(\lambda z_0, \lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$  задает ту же самую прямую. Другими словами,  $\mathbb{CP}^n$  — это факторпространство  $(n+1)$ -мерного комплексного пространства с выколотым началом координат по действию мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел умножением векторов на константы,  $\mathbb{CP}^n \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ . Точку проективного пространства будем записывать в виде набора  $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ , не все элементы которого нулевые, понимая под этим обозначением класс эквивалентности наборов координат относительно описанного выше отношения эквивалентности. Набор  $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$  называют *однородными координатами*.

Полагая  $z_i = 1$  поочередно для  $i = 0, 1, \dots, n$ , мы получаем  $n+1$  карт в проективном пространстве. Такая карта покрывает все пространство, за исключением гиперплоскости  $z_i = 0$ , и является  $n$ -мерным комплексным пространством  $\mathbb{C}^n$ . Все координаты, кроме  $i$ -й, в совокупности образуют набор *аффинных координат* в соответствующей карте.

При  $n = 1$  мы имеем дело с одномерным проективным пространством  $\mathbb{CP}^1$ . Это один из первых — наряду с комплексной прямой  $\mathbb{C}$  — примеров комплексных кривых. Эту кривую называют также *рациональной кривой* или *сферой Римана*.

Положив  $z_0 = 1$  или  $z_1 = 1$  в  $\mathbb{CP}^1$ , мы получаем две аффинные карты в  $\mathbb{CP}^1$ , каждая из которых представляет собой комплексную прямую  $\mathbb{C}$ . На первой из этих карт есть координата  $z_1$ , на второй — координата  $z_0$ . В каждую из карт не попадает ровно одна точка проективной прямой, которую мы будем называть *бесконечно удаленной* точкой для этой аффинной карты; эта точка обозначается  $z_1 = \infty$  в первой карте и соответственно  $z_0 = \infty$  во второй, см. рис. 1.1.

Выбор аффинных координат на проективной плоскости (и, более общим образом, в проективном пространстве произвольной размерности  $n$ ) неоднозначен. От одной системы координат к другой

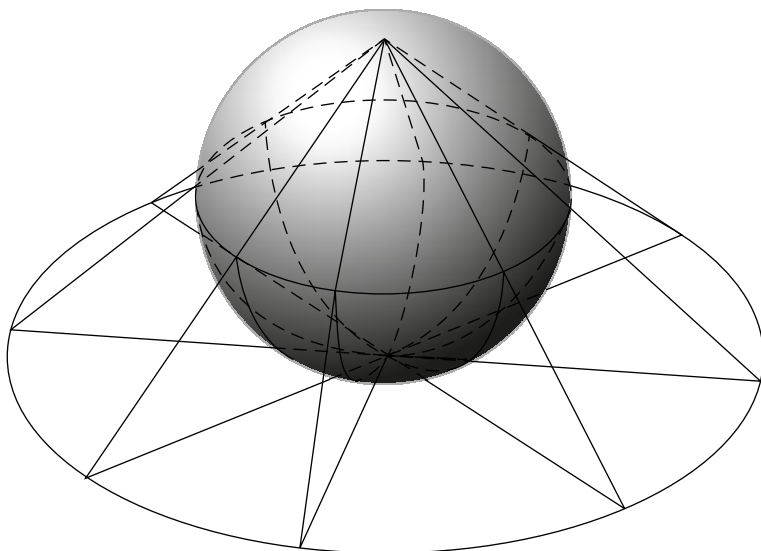


Рис. 1.1. Аффинная карта и соответствующая ей бесконечно удаленная точка на проективной прямой

можно перейти *проективным преобразованием* — линейным преобразованием  $Z = AZ'$ , рассматриваемым с точностью до умножения на константу (здесь  $Z, Z'$  — вектор-столбцы,  $A$  — невырожденная квадратная матрица порядка  $n + 1$ ,  $A: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ ). Проективное преобразование не меняет геометрических свойств подмножеств проективного пространства, в частности кривых в нем. Поэтому мы часто будем выбирать наиболее удобные координаты — те, в которых интересные нас подмножества задаются наиболее простыми уравнениями.

### § 1.2. Топология проективного пространства

Комплексная проективная прямая не случайно называется сферой Римана — с топологической точки зрения она является двумерной сферой. Комплексные проективные пространства большей размерности также имеют простую топологию. Они компактны, а их гомотопии можно описать индуктивно: комплексное проективное пространство размерности  $n + 1$  является объединением аффинной карты  $\mathbb{C}^{n+1}$  и проективного пространства на единицу меньшей размер-

ности. Поэтому  $(n + 1)$ -мерное проективное пространство представляет собой результат приклеивания  $2(n + 1)$ -мерной клетки к  $2n$ -мерному комплексу. Это свойство позволяет вычислить гомологии проективных пространств с комплексными коэффициентами:

$$H_{2i}(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{C} \quad \text{для } i = 0, 1, \dots, n,$$

а все остальные группы гомологий равны 0.

Кольцо комплексных когомологий проективного пространства  $\mathbb{CP}^n$  порождено элементом  $h$  степени 2. Оно представляет собой кольцо многочленов от одной переменной, срезанных по степени  $n + 1$ ,  $H^*(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{C}[h]/(h^{n+1} = 0)$ . Элемент  $h^i$  в этом кольце является двойственным по Пуанкаре проективному подпространству  $\mathbb{CP}^{n-i}$ , представляющему образующую в гомологиях  $H_{2(n-i)}(\mathbb{CP}^n)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . В частности, сам элемент  $h$  двойствен подпространству  $\mathbb{CP}^{n-1}$  — гиперплоскости.

### § 1.3. Двумерные поверхности

*Двумерная поверхность* — это компактное двумерное многообразие (возможно, с краем). Если край пуст, то говорят, что поверхность замкнута.

Для каждой точки двумерной поверхности можно определить два различных направления вращения вокруг этой точки. Если во всех точках двумерной поверхности задано направление вращения, причем в близких точках направления вращения согласованы, то говорят, что на поверхности задана *ориентация*. Поверхность, на которой можно задать ориентацию, называют *ориентируемой*. Нетрудно убедиться в том, что плоскость  $\mathbb{R}^2$  ориентируема и что выкалывание нескольких точек не влияет на ориентируемость. Следовательно, сфера  $S^2$  ориентируема.

Нас будут интересовать только ориентируемые поверхности, потому что с топологической точки зрения гладкая комплексная кривая — это замкнутая ориентируемая поверхность.

*Связной суммой* двух поверхностей  $M$  и  $N$  называют поверхность  $M \# N$ , которая получается в результате вырезания из  $M$  и  $N$  малых открытых дисков  $D_1$  и  $D_2$  и приклейки  $M \setminus D_1$  к  $N \setminus D_2$  по гомеоморфизму  $h: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ . То, что остается после вырезания малого открытого диска  $D$  из тора  $S^1 \times S^1$ , называют *ручкой*.

Связную сумму  $g$  торов называют *сферой с  $g$  ручками* (сфера с нулем ручек — это просто сфера  $S^2$ ). Любая замкнутая ориентиру-

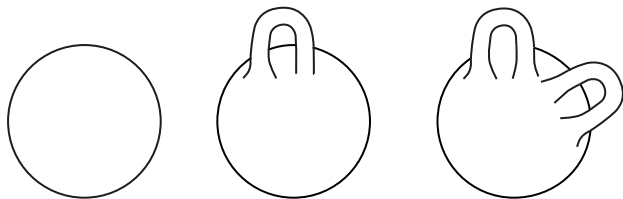


Рис. 1.2. Сферы с 0, 1, 2 ручками

мая двумерная поверхность гомеоморфна сфере с  $g$  ручками (для некоторого  $g$ ), причем сферы с разным числом ручек не гомеоморфны. Сферы с  $g$  ручками для  $g = 0, 1, 2$  изображены на рис. 1.2. Упомянем также, что любая замкнутая неориентируемая поверхность гомеоморфна связной сумме нескольких экземпляров вещественной проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$ , причем связные суммы разного числа проективных плоскостей не гомеоморфны. По поводу доказательства теоремы о классификации двумерных поверхностей см., например, [17].

#### §1.4. Склейка двумерных поверхностей из многоугольников

Любую замкнутую двумерную поверхность можно *триангулировать*, т. е. разрезать на треугольники так, что любые два треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину, либо имеют одну общую сторону (общей не может быть часть стороны). Пусть  $V$  — число вершин,  $E$  — число ребер (сторон) и  $F$  — число граней данной триангуляции. Число  $V - E + F$ , называемое *эйлеровой характеристикой* данной поверхности  $M$ , не зависит от выбора триангуляции. Оно обозначается через  $\chi(M)$ . Эйлерова характеристика сферы с  $g$  ручками равна  $2 - 2g$ , а эйлерова характеристика связной суммы  $g$  вещественных проективных плоскостей равна  $2 - g$ .

Более общим образом, любую замкнутую двумерную поверхность можно склеить из многоугольников. При такой склейке каждая сторона многоугольника склеивается ровно с одной из сторон этого же или другого многоугольника, так что вершины склеиваются с вершинами. Склеенные попарно стороны многоугольников образуют граф на склеенной поверхности; вершинами этого графа служат склеенные вершины многоугольников. Внутренности многоугольников будем называть гранями вложенного графа. Формула

Эйлера, выражающая эйлерову характеристику построенной таким образом поверхности через число вершин, ребер и граней графа, остается справедливой и для такой склейки.

Для того чтобы получить ориентируемую (и ориентированную) поверхность, нужно ориентировать каждый из склеиваемых многоугольников и при склейке сторон соблюдать согласованность ориентации. Поскольку для каждой пары сторон есть лишь один способ склеить их так, чтобы ориентации были согласованы, каждая склейка однозначно определяется разбиением всех сторон всех многоугольников на непересекающиеся пары, см. рис. 1.3.

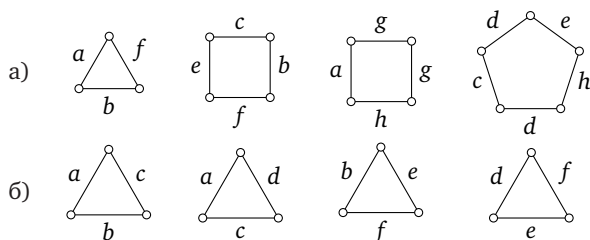


Рис. 1.3. Склейка поверхностей из многоугольников

Зачастую бывает удобно реализовывать поверхность данного рода склейкой сторон одного многоугольника. Минимальное число сторон у многоугольника, склейкой которого можно получить поверхность рода  $g$ , равно  $4g$ . При  $g > 1$  ориентируемую поверхность рода  $g$  из  $4g$ -угольника можно склеить несколькими способами. В качестве стандартной обычно берется склейка по схеме  $abab\bar{c}d\bar{c}d\ldots$  (первая сторона склеивается с третьей, 2-я с 4-й, 5-я с 7-й и т. д.), см. рис. 1.4.

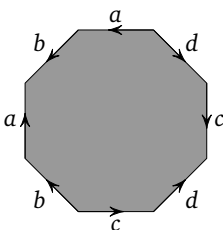


Рис. 1.4. Стандартная склейка ориентируемой поверхности рода  $g=2$  из  $4g=8$ -угольника



При стандартной склейке след многоугольника образует граф с одной вершиной,  $2g$  ребрами и одной гранью на получаемой поверхности. Поэтому эйлерова характеристика этой поверхности равна

$$V - E + F = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g,$$

т. е. ее род действительно равен  $g$ .

**Упражнение 1.4.1.** Пользуясь формулой Эйлера, докажите, что поверхность рода  $g$  нельзя склеить из многоугольника, у которого меньше чем  $4g$  сторон.

**Упражнение 1.4.2.** Пользуясь формулой Эйлера, найдите род ориентируемой поверхности, склеенной из одного многоугольника по следующей схеме: а)  $abcabc$ ; б)  $abcdabcd$ ; в)  $abcdabdc$ .

**Упражнение 1.4.3.** Пользуясь формулой Эйлера, найдите род поверхностей, получаемых в результате склейки многоугольников, изображенных на рис. 1.3, по указанной там схеме.

## § 1.5. Накрытия

Непрерывное отображение  $p: M \rightarrow N$  двумерных поверхностей называют *накрытием*, если у каждой точки  $y$  поверхности  $N$  есть окрестность  $U = U(y) \subset N$ , прообраз которой при отображении  $p$  является несвязным объединением некоторого набора копий окрестности  $U$ , причем ограничение отображения  $p$  на каждую из копий есть гомеоморфизм.

Типичным примером накрытия служит отображение  $z \mapsto z^n$  прокола того единичного диска  $|z| < 1$ ,  $z \neq 0$  на комплексной прямой в себя.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что накрываемая поверхность  $N$  связна. В этом случае либо каждая точка поверхности  $N$  имеет бесконечно много прообразов, либо множество прообразов каждой точки конечно и число прообразов любых двух точек одинаково. Это общее число прообразов называется *степенью* или *количеством листов* накрытия. Если накрываемая поверхность ориентируема и на ней выбрана одна из двух ориентаций, то накрывающая поверхность также ориентируема, причем на ней определена ориентация, *индуцированная* с накрываемой поверхностью.

**Упражнение 1.5.1.** Приведите пример накрытия  $p: M \rightarrow N$ , где поверхность  $M$  ориентируема, а поверхность  $N$  неориентируема.

**Теорема 1.5.2.** Пусть  $p: M \rightarrow N$  —  $n$ -листное накрытие, причем  $M$  и  $N$  — связные компактные двумерные поверхности. Тогда  $\chi(M) = n\chi(N)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию поверхности  $N$ . Тогда прообраз каждого треугольника этой триангуляции состоит из  $n$  попарно непересекающихся треугольников, причем в совокупности они образуют триангуляцию поверхности  $M$ . В полученной триангуляции поверхности  $M$  каждому треугольнику триангуляции поверхности  $N$  соответствует ровно  $n$  треугольников, каждому ребру — ровно  $n$  ребер, а каждой вершине — ровно  $n$  вершин. Следовательно,  $\chi(M) = n\chi(N)$ .  $\square$

**Упражнение 1.5.3.** Докажите, что сфера с  $g$  ручками накрывает сферу с  $h$  ручками тогда и только тогда, когда  $g - 1$  делится на  $h - 1$  (здесь  $g, h \geq 2$ ).

Накрытия тесно связаны с фундаментальными группами отображаемых поверхностей. Пусть  $y_0 \in N$  — произвольная точка; мы будем считать ее базисной точкой фундаментальной группы  $\pi_1(N, y_0)$ . Рассмотрим произвольное накрытие  $p: M \rightarrow N$  связной поверхностью и выберем какой-нибудь прообраз  $x_0 \in p^{-1}(y_0)$  точки  $y_0$ .

Пусть  $\gamma: [0, 1] \rightarrow N$  — произвольная непрерывная петля с началом и концом в точке  $y_0$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1) = y_0$ . Возьмем какой-нибудь прообраз точки  $y_0$ . Тогда у петли  $\gamma$  имеется единственное непрерывное поднятие  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow M$ , начало которого  $\tilde{\gamma}(0)$  совпадает с выбранным прообразом, а  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ . При этом конец  $\tilde{\gamma}(1)$  пути  $\tilde{\gamma}$  также является прообразом точки  $y_0$ , но он может и не совпадать с исходным. Он не зависит от выбора пути  $\gamma$  в данном гомотопическом классе замкнутых путей. Тем самым каждому элементу фундаментальной группы  $\pi_1(N, y_0)$  сопоставляется некоторая перестановка — конечного или бесконечного — множества прообразов  $p^{-1}(y_0)$ : каждый прообраз отображается в конец поднятого пути с началом в этом прообразе. Это сопоставление задает действие фундаментальной группы на множестве прообразов. Это действие называется *монодромией* накрытия.

**Пример 1.5.4.** Рассмотрим в проколотом единичном диске  $D \setminus \{0\}$  путь  $\gamma$  с совпадающими началом и концом  $y_0$ , обходящий вокруг прокола один раз в положительном направлении. При отображении проколотого единичного диска в себя  $f: z \mapsto z^n$  точка  $y_0$  имеет  $n$  прообразов, расположенных в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в точке  $0$ . Монодромия вдоль пути  $\gamma$  является цикличе-

ской перестановкой вершин этого  $n$ -угольника — результатом его поворота на угол  $2\pi/n$  относительно центра.

**Упражнение 1.5.5.** Как выглядит монодромия того же отображения вдоль пути, дважды обходящего прокол в отрицательном направлении?

Элементы фундаментальной группы  $\pi_1(N, y_0)$ , которые задают перестановки слоя  $p^{-1}(y_0)$ , оставляющие точку  $x_0 \in p^{-1}(y_0)$  неподвижной, образуют подгруппу в  $\pi_1(N, y_0)$ . Эта подгруппа изоморфна фундаментальной группе  $\pi_1(M, x_0)$  накрывающей поверхности. Можно доказать, что такое сопоставление устанавливает взаимно однозначное соответствие между подгруппами фундаментальной группы поверхности и классами эквивалентности ее накрытий. При этом мы считаем два накрытия  $p_1: M_1 \rightarrow N$  и  $p_2: M_2 \rightarrow N$  эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h: M_1 \rightarrow M_2$ , замыкающий коммутативный треугольник, т. е. такой, что  $p_2 \circ h = p_1$ .

В частности, фундаментальная группа проколтого диска изоморфна бесконечной циклической группе  $\mathbb{Z}$ . Ее подгруппы — это подгруппы  $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ , состоящие из чисел, кратных данному натуральному числу  $n$ , а также нулевая подгруппа. Накрытия, отвечающие подгруппам конечного индекса, мы описали выше. Нулевой подгруппе соответствует накрытие, которое можно описать следующим образом. Накрывающая поверхность представляет собой горизонтальную полосу  $\{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$  (которая, разумеется, гомеоморфна диску) на комплексной прямой, а отображение есть экспоненциальное отображение  $z \mapsto e^{2\pi iz}$ . В этом случае накрывающая поверхность односвязна — ее фундаментальная группа тривиальна.

## §1.6. Разветвленные накрытия

Пусть у нас есть конечнолистное накрытие  $p: M \rightarrow N$  поверхности  $N$ , которая представляет собой результат выкалывания нескольких точек из некоторой связной поверхности  $\widehat{N}$ . Построим поверхность  $\widehat{M} \supset M$  добавлением нескольких точек к поверхности  $M$  и непрерывное отображение  $\hat{p}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$ , продолжающее отображение  $p$ , следующим образом. У каждой выколотой точки из  $\widehat{N} \setminus N$  есть проколота окрестность, представляющая собой такой проколотый диск, что его прообраз в  $M$  — несвязное объединение проколотых дисков, причем ограничение отображения  $p$  на каждый из этих прообразов эквивалентно отображению  $z \mapsto z^{n_i}$  при некоторых  $n_i$ . Заклеим каж-

дый из этих дисков центральной точкой и продолжим отображение  $p$  по непрерывности в эту точку. Продолженное отображение называется *разветвленным накрытием* поверхности  $\widehat{N}$ . Отметим, что разветвленное накрытие является накрытием только в том случае, если значения всех степеней  $n_i$  для всех выколотых точек равны 1.

В простейшей — и чрезвычайно важной — ситуации речь идет о конечнократных накрытиях проколотой сферы. Пусть поверхность  $N$  — это сфера  $S^2$ , из которой выколото конечное множество точек  $T = \{t_1, \dots, t_c\}$ . Возьмем какую-нибудь точку  $t_0 \in S^2 \setminus T$ . Число прообразов  $|f^{-1}(t_0)|$  этой точки — степень накрытия  $f$  — обозначим через  $d$ . Соединим точку  $t_0$  с каждой из точек  $t_i$  несамопересекающимся отрезком гладкой кривой, не проходящим через точки  $t_j$  для  $j \neq i$ . Такому отрезку можно сопоставить путь  $\gamma_i$ , который идет от  $t_0$  к  $t_i$  вдоль выбранного отрезка, далее обходит вокруг точки  $t_i$  против часовой стрелки, а затем возвращается вдоль выбранного отрезка в точку  $t_0$ . Выполним теперь это действие с каждым из проколов  $t_i$ , следя за тем, чтобы

- отрезки, идущие в проколотые точки, пересекались попарно лишь в базисной точке  $t_0$ ;
- циклический порядок, в котором отрезки выходят из точки  $t_0$ , совпадал с порядком нумерации проколотых точек.

В результате получим граф-звезду на  $S^2$  с центром в точке  $t_0$  и лучами, идущими из  $t_0$  в  $t_i$  (см. рис. 1.5).

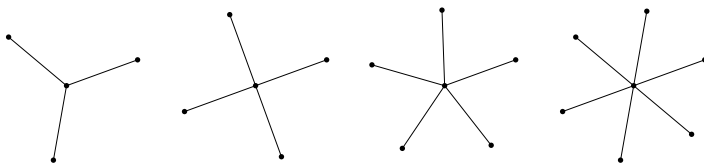


Рис. 1.5. Граф-звезда

**Упражнение 1.6.1.** Что из себя представляет фундаментальная группа сферы  $S^2$ , проколотой в  $c$  точках?

Тем самым мы построили набор перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_c$  на прообразе  $f^{-1}(t_0) \in Y$ , обладающий следующими свойствами:

- подгруппа в группе  $S_d$  перестановок прообразов точки  $t_0$ , порожденная перестановками  $\sigma_1, \dots, \sigma_c$ , действует на слое *транзитивно*, т. е. для любой пары точек в прообразе есть перестановка из подгруппы, переводящая первую точку во вторую;

- последовательное произведение  $\sigma_c \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  всех этих перестановок является тождественной перестановкой.

**Упражнение 1.6.2.** Докажите эти свойства.

**Упражнение 1.6.3.** Докажите, что для любого набора точек  $T = \{t_1, \dots, t_c\}$  на сфере, любой звезды на этих точках и любого набора перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_c$ , обладающих двумя приведенными выше свойствами, существует накрытие  $Y \rightarrow S^2 \setminus T$ , монодромия которого вдоль пути  $\gamma_i$  совпадает с  $\sigma_i$ . Это накрытие единственно, т. е. для двух таких накрытий  $f_1: Y_1 \rightarrow S^2, f_2: Y_2 \rightarrow S^2$  существует такой гомеоморфизм  $h: Y_1 \rightarrow Y_2$ , что  $f_2 = h \circ f_1$ .

**Упражнение 1.6.4.** Проверьте, что цикловой тип (т. е. количество циклов и набор их длин) перестановки  $\sigma_i$  не зависит от выбора базисной точки  $t_0$  и пути, соединяющего ее с  $t_i$ .

**Упражнение 1.6.5.** Пусть накрываемая поверхность представляет собой не сферу, а проколотую поверхность более высокого рода. Как нужно изменить понятия звезды и набора перестановок, чтобы накрывающая поверхность по-прежнему восстанавливалась однозначно?

### §1.7. Формула Римана—Гурвица

Имеется простая формула для эйлеровой характеристики накрываемой поверхности через эйлерову характеристику накрываемой поверхности и степень накрытия. Для разветвленных накрытий формула оказывается более сложной — в нее входят характеристики ветвления.

**Теорема 1.7.1** (Риман—Гурвиц). Пусть  $p: M \rightarrow N$  —  $n$ -листное разветвленное накрытие с  $k$  точками ветвления, причем точки ветвления имеют  $m_1, \dots, m_k$  прообразов. Тогда

$$\chi(M) = n(\chi(N) - k) + m_1 + \dots + m_k.$$

**Первое доказательство.** Разобьем поверхность  $N$  на два замкнутых множества:  $N = N_A \cup N_B$ , где  $N_A$  — объединение замыканий маленьких круговых окрестностей точек ветвления,  $N_B$  — замыкание дополнения  $N \setminus N_A$  к  $N_A$ . Тогда

$$\chi(N) = \chi(N_A) + \chi(N_B) - \chi(N_A \cap N_B).$$

Но множество  $N_A \cap N_B$  состоит из нескольких окружностей, поэтому  $\chi(N_A \cap N_B) = 0$ . Следовательно,

$$\chi(N) = A_N + B_N, \quad \text{где } A_N = \chi(N_A), \quad B_N = \chi(N_B).$$

Аналогично разобьем поверхность  $M$  на замкнутые множества  $M_A = p^{-1}(N_A)$  и  $M_B = p^{-1}(N_B)$ . В результате получим

$$\chi(M) = A_M + B_M, \quad \text{где } A_M = \chi(M_A), B_M = \chi(M_B).$$

Ограничение отображения  $p$  на множество  $M_B$  является накрытием, поэтому  $B_M = nB_N$ , а значит,

$$\chi(M) - A_M = n(\chi(N) - A_N).$$

Множество  $M_A$  состоит из  $m_1 + \dots + m_k$  непересекающихся кругов, а множество  $N_A$  состоит из  $k$  непересекающихся кругов. Ясно также, что эйлерова характеристика круга равна 1. Поэтому  $A_M = m_1 + \dots + m_k$  и  $A_N = k$ .  $\square$

Вот еще одно доказательство формулы Римана—Гурвица.

**Второе доказательство.** Рассмотрим такую достаточно мелкую триангуляцию поверхности  $N$ , что все точки ветвления являются ее вершинами (у триангуляции могут быть и другие вершины). Слова «достаточно мелкая» здесь означают, что прообраз внутренней каждого треугольника триангуляции состоит из внутренних частей треугольников, число которых равно степени  $n$  накрытия, и то же самое верно для прообразов внутренностей ребер. Над внутренностью каждого треугольника триангуляции и над внутренностью каждого ее ребра отображение  $p$  является неразветвленным накрытием. Поэтому прообразы ребер и треугольников триангуляции поверхности  $N$  при отображении  $p$  образуют индуцированную триангуляцию поверхности  $M$ . Пусть  $v_N, e_N$  и  $f_N$  — соответственно число вершин, ребер и граней триангуляции поверхности  $N$ , а  $v_M, e_M$  и  $f_M$  — соответственно число вершин, ребер и граней индуцированной триангуляции поверхности  $M$ . Тогда  $e_M = ne_N$ ,  $f_M = nf_N$  и  $v_M = n(v_N - k) + \sum m_i$ , а значит,

$$\chi(M) = v_M - e_M + f_M = n\chi(N) - nk + \sum m_i,$$

что и требовалось. В этом рассуждении триангуляцию можно заменить произвольным достаточно мелким разбиением поверхности  $N$  на многоугольники.  $\square$

Формулу Римана—Гурвица можно переписать в другом виде, часто более удобном для приложений. При этом используется не информация о ветвлении над поверхностью-образом  $N$ , а информация о ветвлении на поверхности-прообразе  $M$ . Если в малой окрестности точки  $x_0 \in M$  в некоторых локальных комплексных координатах отображение  $p$  устроено как  $z \mapsto z^d$ , то говорят, что эта точка

имеет индекс ветвления  $d$  (почти во всех точках индекс ветвления равен 1). Пусть  $d_1, \dots, d_{m_1}$  — индексы ветвления над первой точкой ветвления,  $d_{m_1+1}, \dots, d_{m_1+m_2}$  — индексы ветвления над второй точкой ветвления и т. д. Тогда

$$d_1 + \dots + d_{m_1} = d_{m_1+1} + \dots + d_{m_1+m_2} = \dots = n.$$

Пусть  $x_1, \dots, x_l$  — точки, из которых состоят прообразы всех точек ветвления. Тогда

$$\sum_{i=1}^l (d_i - 1) = (n - m_1) + (n - m_2) + \dots = kn - (m_1 + m_2 + \dots + m_k).$$

Поэтому формулу Римана—Гурвица можно переписать в виде

$$\chi(M) = n\chi(N) - \sum (d_i - 1); \quad (1.1)$$

здесь можно считать, что суммирование ведется по всем точкам поверхности  $M$ , индекс ветвления которых отличен от 1.

Непосредственно из формулы (1.1) следуют утверждения, сформулированные в упражнениях 1.7.2—1.7.4.

**Упражнение 1.7.2.** Докажите, что любое разветвленное накрытие тора тором является на самом деле неразветвленным, т. е. индекс ветвления любой точки равен 1.

**Упражнение 1.7.3.** Пусть  $p: M \rightarrow N$  — разветвленное накрытие ориентируемых поверхностей. Докажите, что  $\chi(M) \leq \chi(N)$ .

**Упражнение 1.7.4.** Пусть  $p: M \rightarrow N$  — разветвленное накрытие ориентируемых поверхностей. Докажите, что если  $\chi(M) = \chi(N) < 0$ , то отображение  $p$  — изоморфизм.

## Глава 2

# Алгебраические кривые

Алгебраические кривые — это кривые, которые можно задать полиномиальными уравнениями в проективных пространствах. С другой стороны, алгебраические кривые — это одномерные комплексные многообразия, и для их задания не требуется никуда их вкладывать. Мы рассмотрим различные способы задания кривых и обсудим, как установить, приводят ли они к одной и той же кривой.

### § 2.1. Плоские алгебраические кривые

Начнем с наиболее наглядного и привычного объекта — кривых на плоскости, а затем перейдем к кривым в комплексном проективном пространстве.

Кривая на плоскости задается одним полиномиальным уравнением. Если все коэффициенты уравнения вещественные, то комплексная кривая является вещественной. Вещественные точки  $(x : y : z)$ , лежащие на вещественной кривой, образуют *вещественную часть* этой кривой. У нас нет хороших способов изображения комплексных кривых, поэтому для иллюстрации мы будем использовать вещественные части плоских вещественных кривых, попадающие в выбранную аффинную карту.

Простейшая алгебраическая кривая — прямая. Она задается линейным однородным уравнением  $ax + by + cz = 0$ . Через любую пару различных точек на проективной плоскости проходит ровно одна

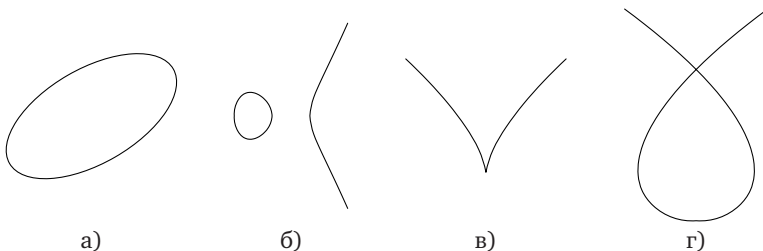


Рис. 2.1. Различные плоские алгебраические кривые



прямая, а любые две различные прямые пересекаются ровно в одной точке. На рис. 2.1 также приведены кривая степени 2 (квадрика) и три кривые степени 3 (кубики).

Плоской алгебраической кривой называют кривую в  $\mathbb{CP}^2$ , заданную однородным полиномиальным уравнением  $\sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$ ,

где  $i, j, k$  — неотрицательные целые числа, причем не все коэффициенты  $a_{ijk}$  равны 0. Число  $n$  называют при этом *степенью* кривой. Для того чтобы записать уравнение кривой в одной из аффинных карт  $x = 1$ ,  $y = 1$  или  $z = 1$ , нужно просто подставить в уравнение это значение выбранной переменной — уравнение превратится в неоднородное уравнение от двух остальных переменных.

Плоскую алгебраическую кривую  $F(x, y, z) = 0$  называют *неприводимой*, если однородный многочлен  $F$  нельзя представить в виде произведения однородных многочленов  $F_1$  и  $F_2$  положительной степени. В противном случае кривую называют *приводимой*. Как множество точек приводимая кривая представляет собой объединение кривых  $F_1 = 0$  и  $F_2 = 0$ .

Простейшая приводимая кривая степени  $n$  задается уравнением  $l_1 \cdot \dots \cdot l_n = 0$ , где  $l_1, \dots, l_n$  — попарно различные линейные функции. Как множество точек эта кривая представляет собой объединение прямых  $l_1 = 0, \dots, l_n = 0$ , см. рис. 2.2.

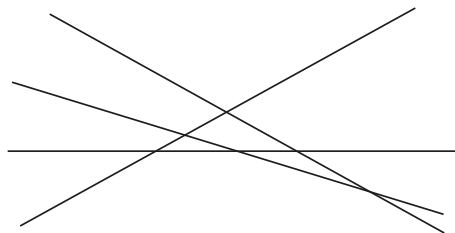


Рис. 2.2. Приводимая кривая степени 4

Простейшая приводимая кривая  $l_1 \cdot \dots \cdot l_n = 0$  во многих ситуациях помогает выяснить, как обстоят дела в случае произвольной кривой степени  $n$ . Например, кривые  $l_1 \cdot \dots \cdot l_m = 0$  и  $l'_1 \cdot \dots \cdot l'_n = 0$ , не содержащие общих прямых и такие, что ни через какую точку плоскости не проходит более двух прямых из набора  $l_1, \dots, l_m, l'_1, \dots, l'_n$ , имеют  $mn$  попарно различных точек пересечения. Ниже мы покажем, что любые кривые степени  $m$  и  $n$  имеют либо  $mn$  общих точек (с учетом кратности), либо бесконечно много общих точек.

Наряду с неприводимостью важным свойством кривых является гладкость. Гладкая кривая на комплексной проективной плоскости — это подмножество  $C \subset \mathbb{CP}^2$ , задаваемое уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , где  $F$  — невырожденный однородный многочлен от трех переменных. Условие невырожденности здесь означает, что на кривой  $F(x, y, z) = 0$  нет особых точек многочлена  $F$ , т. е. точек, в которых обращается в нуль дифференциал

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

Гладкая кривая неприводима.

**Упражнение 2.1.1.** Докажите, что приводимая кривая не может быть гладкой.

**Упражнение 2.1.2.** Приведите пример неприводимой, но не гладкой кривой.

Условие невырожденности кривой  $C$  иногда бывает проще проверять не в однородных координатах, а для некоторой карты. Это условие для карты выглядит следующим образом. Пусть  $A \in C$  — точка кривой. Рассмотрим произвольную карту, в которой лежит точка  $A$ ; пусть это будет, например, карта  $z = 1$ . Тогда условие «для многочлена  $f(x, y) = F(x, y, 1)$  дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

не обращается в нуль в точке  $A$ » эквивалентно предыдущему, потому что для произвольного однородного многочлена  $F(x, y, z)$  степени  $n$  выполняется тождество Эйлера

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = nF.$$

Таким образом, если  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  в некоторой точке кривой, заданной уравнением  $F = 0$ , то (при  $z \neq 0$ ) в этой точке и  $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ .

**Упражнение 2.1.3.** Докажите тождество Эйлера.

**Замечание 2.1.4.** Условие невырожденности удобно проверять, действуя в обратном направлении. Сначала следует найти особые точки многочлена  $F(x, y, z)$  на проективной плоскости  $\mathbb{CP}^2$ . Как правило, их число конечно. Затем следует проверить, лежит ли какая-нибудь из них на нашей кривой  $C$ .

**Пример 2.1.5.** Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Условие вырождения многочлена  $F$  означает, что  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ , т. е.  $x = y = z = 0$ . Поскольку ни одна из точек проективной плоскости не имеет таких однородных координат,  $y$  многочлена  $F$  вообще нет никаких особых точек.

**Пример 2.1.6.** Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 = 0.$$

Условие вырождения многочлена  $F$  означает, что  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ , т. е.  $x = y = 0$ . Это условие выделяет точку  $(0:0:1)$  на проективной плоскости. Она лежит на кривой  $x^2 + y^2 = 0$ , поэтому рассматриваемая кривая особая. На самом деле она представляет собой пару проективных прямых, задаваемых уравнениями  $x + iy = 0$  и  $x - iy = 0$ . Эти прямые пересекаются в единственной точке — особой точке кривой.

**Упражнение 2.1.7.** Пусть  $C$  — невырожденная коника на плоскости, т. е. невырожденная кривая, заданная уравнением второй степени. Докажите, что в подходящей системе координат она имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ .

Пусть  $(0, 0)$  — особая точка кривой, заданной в аффинной карте уравнением  $f(x, y) = 0$ . Тогда константа и линейная часть многочлена  $f$  равны нулю. Особая точка кривой называется *простой двойной точкой*, если квадратичная часть многочлена  $f$  невырождена. В этом случае квадратичная часть многочлена  $f$  представляется в виде произведения двух различных линейных функций, а кривая  $f = 0$  выглядит в окрестности точки  $(0, 0)$  как пара пересекающихся прямых (см. рис. 2.3).

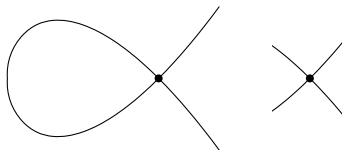


Рис. 2.3. Простая двойная точка на кривой

Дадим определение касательной к кривой в  $\mathbb{CP}^2$ . Пусть точка  $A$  принадлежит кривой  $F = 0$ , т. е.  $F(A) = 0$ . Возьмем произвольную точку  $P$  и рассмотрим прямую  $PA$ . В аффинной карте с центром в точке  $A$  точки этой прямой имеют координаты  $tP = (tp_1, tp_2)$ , где

$t \in \mathbb{C}$ , а  $(p_1, p_2)$  — координаты точки  $P$  в этой аффинной карте. Поэтому точки пересечения прямой  $PA$  и кривой  $F(X) = 0$  соответствуют корням полиномиального уравнения

$$F(tP) = F(A) + t \sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(A) p_i + \dots = 0. \quad (2.1)$$

Из равенства  $F(A) = 0$  следует, что уравнение (2.1) имеет корень  $t = 0$ . В том случае, когда корень  $t = 0$  по меньшей мере двукратный, т. е.  $\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(A) p_i = 0$ , прямую  $PA$  называют *касательной* к кривой  $F = 0$  в точке  $A$ .

Любая прямая, проходящая через особую точку кривой, является касательной к этой кривой. Однако если особая точка — простая двойная, то через нее проходят две прямые, которые естественно считать касательными к *ветвям* кривой в этой точке. Это две прямые, произведение уравнений которых дает квадратичную часть уравнения кривой в простой двойной точке.

**Упражнение 2.1.8.** Докажите, что в декартовых координатах  $(x, y)$  касательная к кривой  $f(x, y) = 0$  в ее гладкой точке  $(x_0, y_0)$  задается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

**Упражнение 2.1.9.** Пусть  $A = (x_0 : y_0 : z_0)$  — точка кривой  $F = 0$  в  $\mathbb{CP}^2$ . Докажите, что уравнения

$$x \frac{\partial F}{\partial x}(A) + y \frac{\partial F}{\partial y}(A) + z \frac{\partial F}{\partial z}(A) = 0$$

и

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(A) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(A) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(A) = 0$$

эквивалентны.

Если  $A$  — особая точка кривой  $F = 0$ , то

$$F(A + tP) = a_0(P) + a_1(P)t + a_2(P)t^2 + \dots,$$

где  $a_0(P) = a_1(P) = 0$ . В том случае, когда  $a_0(P) = \dots = a_{k-1}(P) = 0$  для всех точек  $P$  и  $a_k(P) \neq 0$  для некоторой точки  $P$ , число  $k$  называют *кратностью* особой точки  $A$ . Например, для кривой  $l_1 \cdots l_k = 0$ , где  $l_1, \dots, l_k$  — линейные функции, обращающиеся в нуль в точке  $A$ , кратность точки  $A$  равна  $k$ .

**Упражнение 2.1.10.** а) Найдите кратность точки  $(0, 0)$  кривой  $y^2 = x^2(x - 1)$ .

б) Найдите кратность точки  $(0, 0)$  кривой  $y^2 = x^3$ .

**Упражнение 2.1.11.** Пусть  $A$  — особая точка кратности  $k$  кривой  $F = 0$ . Докажите, что ограничение полинома  $F$  на любую прямую, проходящую через точку  $A$ , имеет в точке  $A$  корень кратности не меньше  $k$ , причем кратность корня больше  $k$  лишь для конечного числа прямых.

**Упражнение 2.1.12.** Найдите особые точки следующих кривых в  $\mathbb{CP}^2$ :

а)  $y^2z = x^3$ ;

б)  $y^2z^{n-2} = \prod_{i=1}^n (x - a_i z)$ ,  $n \geq 4$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  попарно различны.

Обсудим следующий вопрос: сколько точек на проективной плоскости нужно задать, чтобы через них проходила единственная кривая степени  $n$ ? Сначала просто посчитаем, сколько нужно параметров, чтобы задать кривую степени  $n$ . Такая кривая задается уравнением  $\sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$ . Количество коэффициентов  $a_{ijk}$  рав-

но количеству различных представлений числа  $n$  в виде упорядоченной суммы трех неотрицательных чисел. Чтобы получить такое представление, нужно в последовательность из  $n$  единиц вставить две перегородки, т. е. выбрать 2 элемента из  $n + 2$ . Таким образом, количество коэффициентов в уравнении кривой степени  $n$  равно  $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ . Но пропорциональные уравнения задают одну и ту же кривую, поэтому для задания кривой степени  $n$  нужно  $d = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$  параметров. Тем самым через  $d = \frac{n(n+3)}{2}$  точек, скорее всего, проходит конечное число кривых степени  $n$ . Например, при  $n = 1$  имеем  $d = 2$ , и действительно, через две различные точки проходит ровно одна прямая.

**Упражнение 2.1.13.** Докажите, что через  $2 \cdot 5/2 = 5$  точек на плоскости в общем положении проходит одна кривая второй степени.

Чтобы сделать эти неформальные рассуждения строгими, нам потребуется так называемое отображение Веронезе  $v_n: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^d$ , сопоставляющее точке  $(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2$  точку с проектвными координатами  $u_{ijk} = x^i y^j z^k$ , где  $i + j + k = n$ ; здесь

$$d = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

**Упражнение 2.1.14.** а) Проверьте, что если числа  $x, y, z$  не все равны нулю, то по крайней мере одно из чисел  $x^i y^j z^k$  не равно нулю.

б) Докажите, что отображение Веронезе разные точки плоскости  $\mathbb{CP}^2$  переводит в разные точки пространства  $\mathbb{CP}^d$ .

Кривая  $\sum a_{ijk}x^i y^j z^k = 0$  при отображении Веронезе переходит в сечение образа плоскости  $\mathbb{CP}^2$  в  $\mathbb{CP}^d$  гиперплоскостью  $\sum a_{ijk}u_{ijk} = 0$ . Ясно также, что образ плоскости  $\mathbb{CP}^2$  в  $\mathbb{CP}^d$  не может целиком содержаться в одной гиперплоскости  $\sum a_{ijk}u_{ijk} = 0$ , поскольку иначе все точки плоскости  $\mathbb{CP}^2$  должны были бы лежать на кривой  $\sum a_{ijk}x^i y^j z^k = 0$ .

Через любые  $d$  точек в  $\mathbb{CP}^d$  можно провести гиперплоскость. Это означает, в частности, что через любые  $d$  точек в  $\mathbb{CP}^2$  можно провести кривую степени  $n$ . Поскольку образ плоскости  $\mathbb{CP}^2$  не лежит в одной гиперплоскости, в  $\mathbb{CP}^2$  можно выбрать  $d + 1$  точек так, чтобы их образы не лежали в одной гиперплоскости. Это означает, что в  $\mathbb{CP}^2$  можно выбрать  $d + 1$  точек так, что через них нельзя провести кривую степени  $n$ .

Требуемые  $d + 1$  точек можно выбрать, например, следующим образом. Точку  $A_1$  выбираем произвольно. После того как выбраны точки  $A_1, \dots, A_k$ , проводим через них кривую степени  $n$  и выбираем точку  $A_{k+1}$  вне этой кривой. Иными словами, мы проводим гиперплоскость через образы точек  $A_1, \dots, A_k$  в  $\mathbb{CP}^d$  и выбираем точку в образе  $\mathbb{CP}^2$ , но вне полученной гиперплоскости. Эта конструкция позволяет выбрать в  $\mathbb{CP}^d$  точки, не лежащие в одной гиперплоскости. Им соответствуют точки в  $\mathbb{CP}^2$ , не лежащие на одной кривой степени  $n$ .

Образы выбранных точек  $A_1, \dots, A_{d+1}$  при отображении Веронезе служат вершинами  $d$ -мерного симплекса. Любые  $d$  из этих точек соответствуют грани симплекса. Это, в частности, означает, что через точки  $A_1, \dots, A_d$  проходит единственная кривая степени  $n$ .

Подведем итоги. Через любые  $d = \frac{n(n+3)}{2}$  точек в  $\mathbb{CP}^2$  можно провести кривую степени  $n$ . В  $\mathbb{CP}^2$  можно указать  $d$  точек, через которые проходит единственная кривая степени  $n$ . Более того, если через данные  $d$  точек проходит не одна кривая степени  $n$ , то малым шевелением данных точек можно добиться того, чтобы через полученные точки проходила единственная кривая степени  $n$  (малым шевелением  $d$  точек в  $\mathbb{CP}^d$ , лежащих в одной  $(d - 2)$ -мерной плоскости, можно перевести в  $d$  точек, не лежащих в одной  $(d - 2)$ -мерной плоскости).

**Упражнение 2.1.15.** Пусть прямые  $p_1, p_2$  и  $p_3$  на плоскости пересекают прямые  $q_1, q_2$  и  $q_3$  в 9 различных точках. Докажите, что

образы этих точек при отображении Веронезе  $v_3: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^9$  лежат в одной 7-мерной плоскости.

Условие, что кривая степени  $n$  проходит через некоторую фиксированную точку, выделяет проективное подпространство коразмерности 1 в  $\mathbb{CP}^d$ . Если же потребовать, чтобы кривая не только проходила через некоторую точку, но, кроме того, чтобы эта точка была особой точкой кривой и имела кратность не менее  $k$ , то такое условие выделяет подпространство коразмерности  $\frac{k(k+1)}{2}$ . Действительно, можно считать, что данная точка имеет координаты  $(0:0:1)$ . Запишем уравнение кривой в виде  $a_0 z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \dots + a_n(x, y) = 0$ , где  $a_s(x, y)$  — однородный многочлен степени  $s$ . Условие заключается в том, что многочлены  $a_0, \dots, a_{k-1}$  нулевые. Всего получаем  $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$  линейных условий.

**Упражнение 2.1.16.** Какова размерность условия «кривая касается данной прямой»? А если требуется порядок касания не менее  $k$ ?

## § 2.2. Теорема Безу и ее приложения

Пусть  $A$  — общая точка двух кривых  $F = 0$  и  $G = 0$  на проективной плоскости. Для каждой из двух кривых эта точка может оказаться

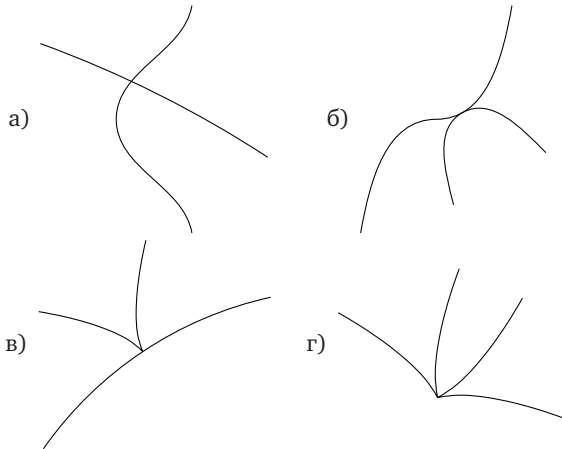


Рис. 2.4. Взаимное расположение кривых в общей точке: а) трансверсальное пересечение в гладкой точке обеих кривых; б) касание в гладкой точке обеих кривых; в) общая точка является гладкой для одной из кривых и особой для другой; г) общая точка является особой для обеих кривых

особой или гладкой. Кроме того, если для обеих кривых точка  $A$  гладкая, то кривые могут в ней касаться друг друга или пересекаться трансверсально. Общая точка двух кривых, гладкая для обеих кривых, называется *точкой трансверсального пересечения* (соответственно *точкой касания*), если касательные прямые к двум кривым в этой точке различны (соответственно совпадают). Варианты взаимного расположения двух кривых в их общей точке приведены на рис. 2.4. Трансверсальное пересечение кривых является устойчивым: при небольшом изменении уравнений кривых в окрестности трансверсального пересечения по-прежнему будет находиться точка трансверсального пересечения новых кривых. Касание — неустойчивая конфигурация: при небольшом изменении коэффициентов кривых касание может превратиться в две (или более) точки трансверсального пересечения, см. рис. 2.5. (Обратите внимание на то, что при шевелении касающиеся кривые не могут превратиться в непересекающиеся — вещественная картинка в этом случае дает неправильную подсказку.)

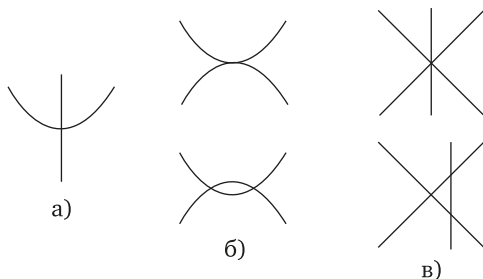


Рис. 2.5. а) Трансверсальное пересечение устойчиво относительно малых изменений коэффициентов кривых; б) касание неустойчиво относительно малых изменений коэффициентов кривых — оно превращается в пару трансверсальных пересечений; в) тройное пересечение также неустойчиво — при малом изменении коэффициентов оно превращается в три трансверсальных попарных пересечения

Займемся перечислением точек пересечения двух кривых. Рассмотрим сначала случай, когда одна из кривых — прямая, и пусть она пересекает кривую степени  $n$ , заданную однородным уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Прямую можно параметризовать отображением  $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ . В аффинной координате  $t$  на прямой такое отображение записывается в виде

$$t \mapsto (x_0 + x_1 t, y_0 + y_1 t, z_0 + z_1 t).$$



Его композиция с многочленом  $F$  дает уравнение на точки пересечения прямой с кривой  $F = 0$ :

$$F(x_0 + x_1 t, y_0 + y_1 t, z_0 + z_1 t) = 0.$$

Это полиномиальное уравнение степени  $n$  от  $t$ . Образы  $n$  его корней — это  $n$  точек пересечения прямой и кривой. Если они все различны, то прямая и кривая пересекаются трансверсально во всех своих общих точках. Некоторые корни или их образы могут совпадать — в этом случае мы имеем кратные точки пересечения. Однако сумма кратностей всегда одинакова — она равна  $n$ , т. е. степени кривой. Поэтому прямая пересекает кривую степени  $n$  в  $n$  точках с учетом кратностей.

Чтобы понять, как пересекаются кривые более высоких степеней, рассмотрим пересечение кривой третьей степени и кривой второй степени. Пусть  $F(x, y, z) = 0$  и  $G(x, y, z) = 0$  — однородные уравнения наших кривых. Многочлены  $F$  и  $G$  можно записать в виде

$$F(x, y, z) = a_0 y^3 + a_1(x, z) y^2 + a_2(x, z) y + a_3(x, z),$$

$$G(x, y, z) = b_0 y^2 + b_1(x, z) y + b_2(x, z),$$

где степени однородных многочленов  $a_k(x, z)$  и  $b_k(x, z)$  равны  $k$  (если соответствующий многочлен отличен от тождественного нуля). Точка  $(x_0 : y_0 : z_0)$  является точкой пересечения кривых  $F = 0$  и  $G = 0$  тогда и только тогда, когда многочлены  $F(x_0, y, z_0)$  и  $G(x_0, y, z_0)$  имеют общий корень  $y_0$ .

Пусть  $\varphi = \varphi(y)$  и  $\psi = \psi(y)$  — произвольные комплексные многочлены степеней  $m$  и  $n$  соответственно. Эти многочлены имеют общий корень над полем  $\mathbb{C}$  тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены  $\varphi_1$  и  $\psi_1$ , степени которых меньше  $m$  и  $n$  соответственно, что  $\varphi\psi_1 = \psi\varphi_1$ . В самом деле, если  $\varphi$  и  $\psi$  имеют общий корень над  $\mathbb{C}$ , то они имеют над  $\mathbb{C}$  общий делитель  $\eta$ , степень которого не меньше 1. Тогда мы можем взять  $\varphi_1 = \varphi/\eta$  и  $\psi_1 = \psi/\eta$ . Наоборот, если  $\varphi\psi_1 = \psi\varphi_1$ , то в многочлен  $\Phi = \varphi\psi_1 = \psi\varphi_1$  входят все множители, на которые разлагаются многочлены  $\varphi$  и  $\psi$ , но степень многочлена  $\Phi$  меньше суммы степеней многочленов  $\varphi$  и  $\psi$ . Поэтому многочлены  $\varphi$  и  $\psi$  имеют общий делитель, а значит, они имеют общий корень над полем  $\mathbb{C}$ .

Тем самым кривые  $F(x, y, z) = 0$  и  $G(x, y, z) = 0$ , степени которых равны  $m$  и  $n$  соответственно, имеют общую точку  $(x_0 : y_0 : z_0)$  тогда и только тогда, когда для многочленов  $F(x_0, y, z_0)$  и  $G(x_0, y, z_0)$  мож-

но подобрать такие многочлены  $f_1(y)$  и  $g_1(y)$ , что  $Fg_1 = f_1G$ , причем  $\deg g_1 < n$  и  $\deg f_1 < m$ . Но при этом мы предполагаем, что степени многочленов  $F(x_0, y, z_0)$  и  $G(x_0, y, z_0)$  совпадают со степенями кривых, т. е. требуем, чтобы выполнялись условия  $a_0 \neq 0$  и  $b_0 \neq 0$ . Ниже мы убедимся, что выполнения этих условий всегда можно добиться, сделав замену координат.

В случае, когда  $m = 3$  и  $n = 2$ , многочлены  $f_1$  и  $g_1$  имеют вид  $f_1(y) = u_0y^2 + u_1y + u_2$ ,  $g_1(y) = v_0y + v_1$ . Коэффициенты  $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1$  нужно подобрать так, чтобы совпадали два многочлена

$$(a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3)(v_0y + v_1) = (b_0y^2 + b_1y + b_2)(u_0y^2 + u_1y + u_2),$$

т. е. выполнялись равенства

$$\begin{aligned} a_0v_0 &= b_0u_0, \\ a_1v_0 + a_0v_1 &= b_1u_0 + b_0u_1, \\ a_2v_0 + a_1v_1 &= b_2u_0 + b_1u_1 + b_0u_2, \\ a_3v_0 + a_2v_1 &= b_2u_1 + b_1u_2, \\ a_3v_1 &= b_2u_2. \end{aligned}$$

В результате получаем однородную систему линейных уравнений относительно  $v_0, v_1, u_0, u_1, u_2$ . Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

равен нулю.

Для кривых в  $\mathbb{CP}^2$  степени однородных многочленов  $a_i(x, z)$  и  $b_i(x, z)$  в точности равны  $i$  (если только эти многочлены не нулевые). Ясно также, что для кривой в  $\mathbb{CP}^2$  мы имеем

$$a_0 = F(0, 1, 0) \quad \text{и} \quad b_0 = G(0, 1, 0).$$

Это означает, что условие  $a_0b_0 \neq 0$  выполняется, если ни одна из кривых  $F = 0$  и  $G = 0$  в  $\mathbb{CP}^2$  не проходит через бесконечно удаленную точку  $(0 : 1 : 0)$ .

Для кривых  $F = 0$  и  $G = 0$  произвольной степени можно построить матрицу, аналогичную матрице (2.2). Определитель этой матрицы называют *результантом* многочленов  $f$  и  $g$ . Вычисление ре-

зультанта также называют «исключением переменной» (в нашем случае исключается переменная  $y$ ). Для кривых на плоскости  $\mathbb{CP}^2$ , рассматриваемых в аффинной карте  $y = 1$ , результат представляет собой многочлен от  $x$  и  $z$ . Корни результата — это  $(x : z)$ -координаты точек пересечения кривых. Для вычисления  $y$ -координаты необходимо подставить в один из многочленов  $F$  или  $G$  вычисленный корень  $(x_0 : z_0)$  результата, вычислить корни получившегося многочлена от  $y$  и отобрать тот из них, который является корнем второго многочлена. Как правило, вычисления можно произвести лишь приближенно.

**Теорема 2.2.1** (Безу). *Для кривых степени  $m$  и  $n$  в  $\mathbb{CP}^2$  результат представляет собой однородный многочлен степени  $mn$  (или тождественно равен нулю).*

**Доказательство.** Ограничимся снова случаем  $m = 3$  и  $n = 2$ . Пусть  $R(x, z)$  — определитель матрицы

$$S = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Требуется доказать, что  $R(\lambda x, \lambda z) = \lambda^6 R(x, z)$ . Действительно, в таком случае либо  $R$  тождественно равен нулю, либо  $R$  — однородный многочлен степени 6.

По условию  $a_k(\lambda x, \lambda z) = \lambda^k a_k(x, z)$  и  $b_k(\lambda x, \lambda z) = \lambda^k b_k(x, z)$ . Поэтому  $R(\lambda x, \lambda z) = \det S_\lambda$ , где

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \lambda^3 a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \lambda^3 a_3 \\ b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Домножим первую и вторую строки матрицы  $S_\lambda$  на 1 и  $\lambda$ , а третью, четвертую и пятую строки — на 1,  $\lambda$  и  $\lambda^2$  соответственно. В результате получим матрицу  $S$ , столбцы которой домножены на 1,  $\lambda$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda^3$  и  $\lambda^4$ . Поэтому  $\det S_\lambda = \lambda^{p-q-r} \det S$ , где  $p = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ,  $q = 1$  и  $r = 1 + 2 = 3$ . В общем случае  $p = 1 + 2 + \dots + (m + n - 1)$ ,

$q = 1 + 2 + \dots + (m - 1)$  и  $r = 1 + 2 + \dots + (n - 1)$ . Поэтому

$$p - q - r = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = mn. \quad \square$$

**Упражнение 2.2.2.** Пусть  $A$  — точка кратности  $r$  кривой  $f = 0$  и кратности  $s$  кривой  $g = 0$ . Докажите, что точке  $A$  соответствует корень результата многочленов  $f$  и  $g$ , имеющий кратность не меньше  $rs$ .

Вот еще одно, на этот раз топологическое, доказательство теоремы Безу. Пусть первая кривая представляет собой набор из  $m$  различных прямых, проходящих через одну точку, а вторая — набор из  $n$  различных прямых, также проходящих через одну точку (отличную от первой), причем в этих наборах нет совпадающих прямых. Очевидно, что эти две кривые имеют  $mn$  точек трансверсального пересечения. Если немного изменить коэффициенты кривых, то мы получим пару кривых, по-прежнему имеющих  $mn$  точек трансверсального пересечения. Тем самым в пространстве пар кривых (т. е. в произведении двух проективных пространств — пространства коэффициентов кривых степени  $m$  и пространства коэффициентов кривых степени  $n$ ) есть открытое подмножество кривых, имеющих  $mn$  точек трансверсального пересечения. Условие нетрансверсальности пересечения двух кривых — алгебраическое условие, выделяющее гиперповерхность в пространстве пар кривых. Гиперповерхность в комплексном многообразии не разделяет его. Дополнение к гиперповерхности — связное открытое плотное подмножество, состоящее из пар кривых, пересекающихся трансверсально, причем для всех таких пар число точек пересечения одно и то же. Отсюда вытекает, что пространство пар кривых содержит открытое плотное подмножество пар кривых, пересекающихся трансверсально и имеющих одинаковое число  $mn$  точек пересечения. Пары кривых с нетрансверсальным пересечением также имеют  $mn$  точек пересечения с учетом кратности (если у них нет общих неприводимых компонент). Теорема доказана.  $\square$

Приведем теперь некоторые приложения теоремы Безу. Напомним, что через почти любые  $d = \frac{n(n+3)}{2}$  точек на плоскости проходит гладкая кривая степени  $n$ . Для почти всех наборов из  $d$  точек такая кривая единственна. В том случае, когда через данные  $d$  точек проходит единственная кривая степени  $n$ , будем говорить, что эти точки находятся в общем положении. Подмножества системы точек

общего положения тоже будем называть точками общего положения (для кривой той же степени  $n$ ).

С помощью теоремы Безу можно доказать некоторые свойства систем точек алгебраических кривых. Речь в этих теоремах идет, как правило, о точках общего положения.

**Теорема 2.2.3.** Пусть две кривые степени  $n$  пересекаются в  $n^2$  точках, причем  $pr$  из этих точек лежат на неприводимой кривой степени  $p$ . Тогда оставшиеся  $n(n - p)$  точек лежат на кривой степени  $n - p$ .

**Доказательство.** Пусть  $F_1 = 0$  и  $F_2 = 0$  — уравнения данных кривых степени  $n$ , а  $G = 0$  — уравнение кривой степени  $p$ , на которой лежат данные  $pr$  точек. Для любой точки плоскости числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  можно подобрать так, чтобы кривая  $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$  проходила через эту точку. Поэтому можно считать, что кривая  $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$  проходит через некоторую точку кривой  $G = 0$ , отличную от данных  $pr$  точек. Тогда кривые  $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$  и  $G = 0$  имеют  $pr + 1$  общих точек, а значит, они имеют общую компоненту. В силу неприводимости кривой  $G = 0$  этой общей компонентой может быть лишь сама эта кривая. Поэтому  $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = GH$ , где  $H$  — некоторый однородный полином степени  $n - p$ . Кривая  $GH = 0$  проходит через все  $n^2$  точек, а кривая  $G = 0$  проходит лишь через данные  $pr$  точек. Следовательно, кривая  $H = 0$  проходит через все оставшиеся  $n(n - p)$  точек.  $\square$

**Следствие 2.2.4.** Пусть  $2n$ -угольник вписан в кривую степени 2 (см. рис. 2.6). Тогда все точки, в которых стороны с четными номерами пересекают несмежные с ними стороны с нечетными номерами, лежат на одной кривой степени  $n - 2$ .

**Доказательство.** Прямые, содержащие стороны с четными номерами, образуют одну вырожденную кривую степени  $n$ , а прямые, содержащие стороны с нечетными номерами, образуют другую кривую. Вершины  $2n$ -угольника образуют систему из  $2n$  точек пересечения рассматриваемых кривых. Эти точки лежат на кривой степени 2, поэтому остальные  $n(n - 2)$  точек лежат на кривой степени  $n - 2$ .  $\square$

Пример для случая  $n = 3$  изображен на рис. 2.6.

Пучком кривых называют семейство кривых вида  $\lambda F + \mu G = 0$ , где  $F = 0$  и  $G = 0$  — уравнения двух различных кривых одной и той же степени, а  $\lambda$  и  $\mu$  — произвольные числа, не равные нулю одновременно. Все кривые пучка проходят через точки пересечения любых двух различных кривых этого пучка.

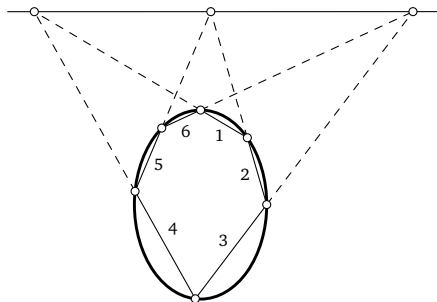


Рис. 2.6. Шестиугольник, вписанный в конику. Стороны шестиугольника разбиты на две группы по три стороны в каждой. Точки пересечения сторон первой группы с несмежными с ними сторонами второй группы лежат на одной прямой

**Теорема 2.2.5.** Пучок кривых степени  $n$ , проходящих через данные  $d - 1 = \frac{n(n+3)}{2} - 1$  точек общего положения, имеет еще  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  общих точек.

**Доказательство.** Пусть  $F = 0$  и  $G = 0$  — уравнения двух кривых из рассматриваемого пучка кривых. Тогда уравнения всех остальных кривых этого пучка имеют вид  $\lambda F + \mu G = 0$ . Поэтому все они проходят через  $n^2$  общих точек кривых  $F = 0$  и  $G = 0$ . Среди этих точек данные точки составляют лишь некоторую часть; количество остальных точек равно

$$n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad \square$$

В частности, при  $n = 3$  мы получаем следующий результат.

**Следствие 2.2.6.** Для любых 8 точек на плоскости в общем положении существует такая девятая точка, что любая кубическая кривая, проходящая через эти 8 точек, проходит и через девятую.

Для точек пересечения кривых разных степеней теорема, аналогичная теореме 2.2.5, выглядит следующим образом.

**Теорема 2.2.7.** Рассмотрим все кривые степени  $n$ , проходящие через данные  $pn - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$  точек кривой степени  $p$ , где  $p < n$ . Тогда все они имеют еще  $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$  общих точек, причем все эти точки лежат на рассматриваемой кривой степени  $p$ .

**Доказательство.** Пусть на кривой  $F = 0$  степени  $p$  выбрано  $\alpha$  точек. Если  $\alpha \leq \frac{n(n+3)}{2}$ , то существует кривая  $G = 0$  степени  $n$ , прохо-

дящая через данные точки. Кривая  $G = 0$  пересекает кривую  $F = 0$  в  $pr = \alpha + \beta$  точках. Требуется доказать, что если  $\alpha = pr - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ , то указанные  $\beta$  точек не зависят от выбора кривой  $G = 0$ .

Рассмотрим кривую  $G' = 0$  степени  $n$ , проходящую через данные  $\alpha$  точек. Кривые  $G = 0$  и  $G' = 0$  пересекаются в  $n^2$  точках. Среди этих точек содержатся данные  $\alpha$  точек; выберем среди этих  $n^2$  точек еще  $\alpha' = \frac{n(n+3)}{2} - 1 - \alpha$  точек. Тогда через данные  $\alpha + \alpha' = \frac{n(n+3)}{2} - 1$  точек проходит пучок кривых степени  $n$ . В том случае, когда

$$\alpha' \leq \frac{(n-p)(n-p+3)}{2},$$

через выбранные  $\alpha'$  точек можно провести кривую  $H = 0$  степени  $n - p$ . Поэтому пучок кривых степени  $n$ , проходящих через выбранные  $\alpha + \alpha'$  точек, порожден кривыми  $G = 0$  и  $FH = 0$ . В частности,  $G' = \lambda G + \mu FH$ . Следовательно, кривая  $G' = 0$  пересекает кривую  $F = 0$  в тех же  $pr = \alpha + \beta$  точках, что и кривая  $G = 0$ .

Остается заметить, что условие  $\alpha' \leq \frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$  эквивалентно тому, что  $\alpha = \frac{n(n+3)}{2} - 1 - \alpha' \geq pr - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ .  $\square$

Теорему 2.2.7 можно обобщить, а именно, вместо семейства кривых степени  $n$ , проходящих через точки пересечения кривых степени  $n$  и  $p$ , можно рассмотреть семейство кривых степени  $k$ , не обязательно равной  $n$  или  $p$ . Соответствующее утверждение выглядит следующим образом.

**Теорема 2.2.8 (Кэли).** Пусть  $n, p < k < n + p - 3$ . Тогда любая кривая степени  $k$ , проходящая через

$$pr - \frac{(n+p-k-1)(n+p-k-2)}{2}$$

точек пересечения кривых степени  $n$  и  $p$ , проходит и через остальные точки пересечения.

**Доказательство.** Пусть среди  $pr$  точек пересечения кривой  $F = 0$  степени  $p$  и кривой  $G = 0$  степени  $n$  выбрано  $\alpha$  точек. Рассмотрим произвольную кривую  $G' = 0$  степени  $k$ , проходящую через эти  $\alpha$  точек. Среди точек пересечения кривых  $F = 0$  и  $G' = 0$  выберем дополнительно  $\alpha' = \frac{(k-n)(k-n+3)}{2}$  точек, а среди точек пересечения кривых  $G = 0$  и  $G' = 0$  выберем дополнительно  $\alpha'' = \frac{(k-p)(k-p+3)}{2}$  точек. Это можно сделать, так как по условию  $k - p + 3 \geq p$  и  $k - p + 3 \leq n$ ,

а значит,  $\alpha' < kp$  и  $\alpha'' < kn$ . Через  $\alpha'$  точек можно провести кривую  $H' = 0$  степени  $k - p$ , а через  $\alpha''$  точек можно провести кривую  $H'' = 0$  степени  $n - p$ .

В нашем случае  $\alpha = np - \frac{(n+p-k-1)(n+p-k-2)}{2}$ , поэтому  $\alpha + \alpha' + \alpha'' = \frac{k(k+3)}{2} - 1$ . Это означает, что через выбранные точки проходит пучок кривых степени  $k$ . Кривые  $G' = 0$ ,  $FH' = 0$  и  $GH'' = 0$  входят в этот пучок. Следовательно,  $G' = \lambda FH' + \mu GH''$ , а значит, кривая  $G' = 0$  проходит через все точки пересечения кривых  $F = 0$  и  $G = 0$ .  $\square$

### § 2.3. Рациональная параметризация

Мы уже видели, как параметрически задается прямая на плоскости. Следующий по простоте пример рациональной параметризации — рациональная параметризация коники, позволяющая представить точки коники в виде  $(x(t) : y(t) : z(t))$ , где  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  — некоторые многочлены. Такую параметризацию можно получить следующим образом. Пусть  $A$  — некоторая точка невырожденной коники. Прямая, проходящая через эту точку, пересекает конику еще в одной точке. Но все прямые, проходящие через данную точку, образуют проективную прямую. Сопоставив каждой прямой, проходящей через данную точку, вторую точку ее пересечения с кривой, мы получим взаимно однозначное отображение проективной прямой в конику, которое и является ее рациональной параметризацией.

Чтобы вычислить координатное представление этой параметризации, выберем аффинные координаты таким образом, чтобы коника имела уравнение  $x^2 + y^2 = 1$ , а точка  $A$  на ней — координаты  $(-1, 0)$ . Уравнение прямой, проходящей через точку  $(-1, 0)$ , имеет вид  $y = t(x + 1)$ , а  $x$ -координата точек пересечения этой прямой с коникой дается уравнением

$$x^2 + (t(x+1))^2 = 1,$$

т. е.

$$(x+1)((1+t^2)x - (1-t^2)) = 0.$$

Решение  $x = -1$  соответствует точке, через которую мы проводили прямую. Второе решение  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  — это координата второй точки



пересечения. Подставляя это решение в уравнение прямой, получаем формулу для  $y$ -координаты  $y = \frac{2t}{1+t^2}$ . Соответствующая полиномиальная параметризация проективной кривой имеет вид  $(s:t) \mapsto (s^2 - t^2 : 2st : s^2 + t^2)$ . Все координатные отображения такой параметризации — однородные многочлены степени 2 от проективных координат  $(s:t)$  на проективной прямой.

**Упражнение 2.3.1.** Выпишите уравнения параметризации произвольной невырожденной коники  $F(x, y, z) = 0$ , не приведенной к стандартному виду.

Рациональная параметризация коники обладает следующим замечательным свойством: если коника задана уравнением с рациональными коэффициентами и точка  $(x_0, y_0)$  имеет рациональные координаты, то точка  $(x(t), y(t))$  имеет рациональные координаты тогда и только тогда, когда  $t$  — рациональное число (или  $t = \infty$ ). Действительно, если числа  $x(t)$  и  $y(t)$  рациональны, то число  $t = \frac{x(t) - x_0}{y(t) - y_0}$  тоже рационально. Обратное утверждение очевидно из нашей конструкции. Таким образом, рациональная параметризация коники позволяет описать все рациональные точки на этой конике, т. е. найти все решения соответствующего уравнения в рациональных числах. Некоторые уравнения более высокой степени тоже можно решать похожим способом. Прежде чем его описать, отметим еще одно важное приложение рациональной параметризации — к вычислению интегралов. Примером такого приложения может служить следующее упражнение.

**Упражнение 2.3.2.** а) Параметризуйте кривую  $y^2 = ax^2 + bx + c$  с помощью семейства прямых  $y = t(x - \alpha)$ , где  $\alpha$  — один из корней уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

б) Примените полученную параметризацию для вычисления неопределенных интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

где  $R(x, y)$  — некоторая рациональная функция.

Способность кривых более высокой степени допускать рациональную параметризацию тесно связана с наличием у них особых точек. Неприводимая кривая третьей степени не может иметь более одной особой точки кратности 2. В самом деле, если  $A$  и  $B$  — две различные точки кривой кратности 2, то прямая  $AB$  пересекает

кривую по крайней мере четырехкратно. Для кубической кривой это означает, что прямая  $AB$  целиком принадлежит кривой, т. е. кривая приводима.

**Упражнение 2.3.3.** Докажите, что кубическая кривая не может иметь особых точек кратности 3 и выше.

Для кривой степени  $n$  тоже можно оценить сверху число особых точек.

**Теорема 2.3.4.** *Неприводимая кривая степени  $n$  не может иметь более  $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  двойных точек.*

**Доказательство.** Случай  $n = 3$  мы уже рассмотрели. Разберем теперь случай  $n = 4$ . В этом случае  $N = 3$ . Предположим, что  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  — двойные точки кривой 4-й степени. Чтобы прийти к противоречию, возьмем на этой кривой произвольную точку  $P$ , отличную от точек  $A_i$ . Через точки  $P, A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  можно провести кривую степени 2. Она пересекает кривую степени 4 в точке  $P$  по крайней мере однократно, а в точках  $A_i$  по крайней мере двукратно. Всего точек пересечения получается не меньше  $1 + 2 \cdot 4$ , а по теореме Безу их должно быть ровно  $2 \cdot 4$ . Получено противоречие.

Для кривой степени  $n$  предположим, что  $A_1, \dots, A_{n+1}$  — двукратные точки этой кривой. Выберем на данной кривой произвольные точки  $P_1, \dots, P_{n-3}$ , отличные от точек  $A_i$ . Тогда общее количество точек  $A_i$  и  $P_j$  будет равно

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 + (n-3) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Поэтому через эти точки можно провести кривую степени  $n-2$ . Кратность ее пересечения с кривой степени  $n$  равна по крайней мере

$$(n-1)(n-2) + 2 + (n-3) = n(n-2) + 1,$$

что противоречит теореме Безу.  $\square$

Мы не будем доказывать, что для любого  $n$  существует неприводимая кривая степени  $n$ , имеющая ровно  $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  двойных точек. Вместо этого мы докажем, что кривая степени  $n$  с  $N$  двойными точками допускает рациональную параметризацию. Это означает, что существуют такие однородные многочлены  $x(s, t)$ ,  $y(s, t)$  и  $z(s, t)$  степени  $n$ , что образ отображения

$$(s : t) \mapsto (x(s, t) : y(s, t) : z(s, t)) \in \mathbb{CP}^2$$

совпадает с данной кривой. При этом разным значениям параметра  $t$ , как правило, соответствуют разные точки кривой. Двойные

точки кривой составляют исключение — у каждой из них ровно два прообраза. С топологической точки зрения кривая в  $\mathbb{CP}^2$ , допускающая рациональную параметризацию, устроена так, что после выкалывания двойных точек она превращается в сферу, из которой выколото несколько точек.

**Теорема 2.3.5.** *Неприводимая кривая степени  $n$ , имеющая  $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  двойных точек, допускает рациональную параметризацию.*

**Доказательство.** Рассмотрим сначала кубическую кривую, имеющую двойную точку  $O = (0 : 0 : 1)$ . При подходящем выборе координат такая кривая имеет в аффинной карте  $z = 1$  уравнение  $y^2 = (x+1)x^2$ , см. рис. 2.7. Прямая, проходящая через точку  $O$ , задается уравнением  $y = tx$ . Эта прямая имеет с кубической кривой двукратное пересечение в точке  $O$ , поэтому она пересекает кубическую кривую еще ровно в одной точке  $(x(t), y(t))$ . Чтобы найти эту вторую точку пересечения, подставим уравнение прямой в уравнение кривой. Получим

$$t^2 x^2 = (x+1)x^2. \quad (2.3)$$

После деления на  $x^2$  получаем  $x$ -координату второй точки пересечения  $x = t^2 - 1$ , а  $y$ -координата равна  $y = t(t^2 - 1)$ .

Таким образом, любой точке кривой, кроме точки  $(0, 0)$ , соответствует ровно одно значение параметра  $t$ . Точке  $(0, 0)$  соответ-

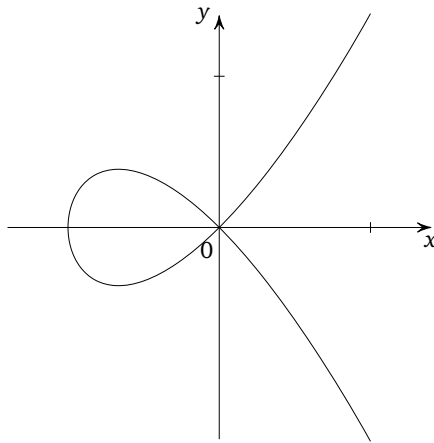


Рис. 2.7. Кубика с двойной точкой

ствуют две касательные  $y = t_1x$  и  $y = t_2x$  к двум ветвям кривой в этой точке. Поэтому исключительной точкой кубической кривой является двойная точка, а исключительными значениями параметра  $t$  являются  $t_1$  и  $t_2$ .

При  $n > 3$  на кривой степени  $n$  с двойными точками  $A_1, \dots, A_N$  надо дополнительно фиксировать произвольные точки  $P_1, \dots, P_{n-3}$ . Через точки  $A_1, \dots, A_N, P_1, \dots, P_{n-3}$  проходит пучок кривых степени  $n - 2$ . Каждая из этих кривых имеет с данной кривой  $n(n - 2) - 1$  общих точек, поэтому у них есть еще ровно одна общая точка. Ясно также, что через любую точку кривой и точки  $A_1, \dots, A_N, P_1, \dots, P_{n-3}$  можно провести кривую степени  $n - 2$ , лежащую в нашем пучке. Тем самым мы параметризовали точки нашей кривой, отличные от  $A_1, \dots, A_N, P_1, \dots, P_{n-3}$ , параметром пучка. Проверку того, что эта параметризация продолжается в точки  $P_1, \dots, P_{n-3}$  и до параметризации каждой из двух ветвей в двойных точках  $A_1, \dots, A_N$  кривой, мы оставляем читателю.  $\square$

Доказательство теоремы 2.3.5 позволяет построить рациональную параметризацию явно. Рассмотрим в качестве примера семейство лемнискат  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)z^2$  — кривых четвертого порядка, см. рис. 2.8. Лемниската имеет три двойные точки  $(0 : 0 : 1)$  и  $(1 : \pm i : 0)$ . Выберем в качестве дополнительной точки  $P_1$  точку  $(0 : 0 : 1)$ , т. е. рассмотрим пучок кривых второй степени, проходящих через точки  $(1 : \pm i : 0)$  и касающихся одной из двух ветвей лемнискаты в точке  $(0 : 0 : 1)$ . В аффинной карте  $z = 1$  такие кривые (для одной из ветвей) имеют вид

$$x^2 + y^2 = t(x - y).$$

Подставив это выражение в уравнение лемнискаты, получим

$$a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2 = t^2(x - y)^2,$$

откуда следует, что

$$y = \frac{t^2 - a^2}{t^2 + a^2}x,$$

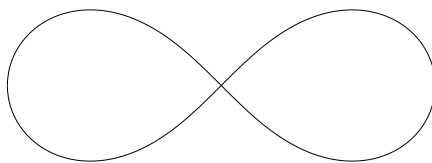


Рис. 2.8. Лемниската

и подстановка в уравнение лемнискаты дает ее параметризацию

$$x = \frac{ta^2(t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}, \quad y = \frac{ta^2(t^2 - a^2)}{t^4 + a^4}.$$

**Упражнение 2.3.6.** Докажите, что кривая  $(x^2 - y)^2 = y^3$  допускает рациональную параметризацию.

**Упражнение 2.3.7.** а) Докажите, что кривая

$$P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) = 0,$$

где  $P_n$  и  $P_{n-1}$  — однородные многочлены степени  $n$  и  $n - 1$  соответственно, допускает рациональную параметризацию.

б) Докажите, что кривая степени  $n$ , имеющая точку кратности  $n - 1$ , допускает рациональную параметризацию.

**Упражнение 2.3.8.** Докажите, что точки  $(x(t), y(t))$ , где  $x(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ ,  $y(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$ , лежат на кривой, степень которой не превосходит  $n$ .

Отметим без доказательства, что для кривой, допускающей рациональную параметризацию  $(x(t), y(t))$ , параметр  $t$  можно выразить в виде рациональной функции от  $x$  и  $y$ . Это свойство позволяет использовать рациональную параметризацию кривой  $F(x, y) = 0$  для вычисления неопределенных интегралов вида

$$\int_{F(x,y)=0} R(x, y) dx,$$

где  $R$  — рациональная функция. В самом деле, пусть кривая  $F(x, y) = 0$  допускает рациональную параметризацию. Тогда точки этой кривой можно представить в виде  $(x(t), y(t))$ , где  $x$  и  $y$  — рациональные функции. Поэтому  $R(x(t), y(t)) = R_1(t)$  и  $dx(t) = r(t) dt$ , где  $R_1$  и  $r$  — рациональные функции. Следовательно,

$$\int_{F(x,y)=0} R(x, y) dx = \int Q(t) dt,$$

где  $Q$  — рациональная функция. Хорошо известно, что  $\int Q(t) dt$  выражается через элементарные функции от  $t$ . Воспользовавшись тем, что  $t = t(x, y)$  — рациональная функция от  $x$  и  $y$ , можно получить выражение интеграла  $\int R(x, y) dx$  через элементарные функции от  $x$  и  $y$ , ср. с упражнением 2.3.2.

## Глава 3

# Комплексная структура и топология кривых

Всякая комплексная алгебраическая кривая является двумерной ориентированной поверхностью. Как мы уже знаем, топология таких поверхностей очень проста — если поверхность компактна, то ее топология однозначно определяется ее родом (или, что эквивалентно, ее эйлеровой характеристикой). Однако помимо топологической структуры на кривой есть комплексная структура. Она выделяет из всех возможных функций на кривой аналитические функции.

Если поверхность устроена просто — например, представляет собой диск или сферу, — то любые две комплексные структуры на ней эквивалентны. Если же род поверхности положителен, то на ней можно ввести уже много различных комплексных структур. Более того, различные комплексные структуры на поверхностях данного рода сами образуют пространство. Геометрия этих пространств усложняется с ростом рода. Мы будем изучать ее простейшие свойства на протяжении всего курса.

### § 3.1. Комплексная структура на кривой

Гладкая кривая в  $n$ -мерном проективном пространстве локально задается системой из  $n - 1$  полиномиальных уравнений, поэтому, по теореме о неявной функции, можно отождествить окрестность каждой точки такой кривой с единичным диском в  $\mathbb{C}^1$ . Тем самым для каждой точки  $A$  такой кривой  $C$  имеется взаимно однозначное отображение  $m_U$  из некоторой окрестности  $U = U(A) \subset C$  этой точки на единичный диск. Разумеется, таких окрестностей и таких отображений много. Такое отображение называется *локальной координатой* в выбранной окрестности<sup>1</sup>. При этом если две такие окрестности  $U, V$  пересекаются, то отображение  $m_U m_V^{-1}$ , определенное в некоторой области единичного диска, оказывается *голоморфным*, т. е. ком-

---

<sup>1</sup> Иногда в определении локальной координаты требуют, чтобы точка  $A$  отображалась в центр диска.

плексно-аналитическим, и обратимым, причем обратное к нему тоже комплексно-аналитическое. Такой набор окрестностей и локальных координат называют *комплексной структурой* на кривой.

Понятие комплексной структуры позволяет ввести и понятие голоморфного отображения комплексных кривых. Отображение  $f: C \rightarrow C'$  комплексных кривых, наделенных комплексными структурами  $\{(U, m_U)\}$  и  $\{(U', m_{U'})\}$  соответственно, называют *голоморфным*, если для любой точки  $A \in C$  существуют такая окрестность  $U' \subset C'$  точки  $f(A)$  вместе с отображением  $m'_{U'}: U' \rightarrow \mathbb{C}$  и такая окрестность  $U$  точки  $A$  вместе с отображением  $m_U: U \rightarrow \mathbb{C}$ , что отображение  $m'_{U'} f m_U^{-1}$  голоморфно там, где оно определено (область его определения  $m_U(f^{-1}(U') \cap U)$  открыта и содержит точку  $m_U(A)$ , поэтому она заведомо непуста). Ясно, что если указанное сквозное отображение  $f_U = m'_{U'} f m_U^{-1}$  голоморфно для некоторой пары окрестностей  $U, U'$  и локальных координат  $m_U, m'_{U'}$ , то для любой другой пары окрестностей  $V, V'$  и локальных координат  $m_V, m'_{V'}$  отображение  $f_V = m'_{V'} f m_V^{-1}$  голоморфно на множестве  $m_V(f^{-1}(U' \cap V') \cap U \cap V)$ . Действительно,

$$f_V = m'_{V'} m'_{U'}^{-1} f_U m_U m_V^{-1}.$$

**Пример 3.1.1.** Множество прямых, проходящих через заданную точку проективной плоскости, образует проективную прямую. Поэтому, зафиксировав в  $\mathbb{CP}^2$  точку  $A$ , мы можем построить отображение из произвольной плоской кривой  $C$ , не проходящей через  $A$ , в проективную прямую: нужно каждой точке кривой  $C$  сопоставить прямую, проходящую через точку  $A$  и выбранную точку кривой. Докажите, что это отображение голоморфно.

Взаимно однозначное голоморфное отображение пары кривых, для которого обратное к нему тоже голоморфно, называют *биголоморфным* отображением или *изоморфизмом* кривых.

Наличие комплексной структуры можно принять за определение комплексной кривой. *Римановой поверхностью* называется двумерная ориентируемая поверхность с комплексной структурой на ней. Всякая гладкая комплексная кривая в проективном пространстве (а также любое ее открытое подмножество) является римановой поверхностью. Можно доказать, что всякая компактная риманова поверхность вкладывается в проективное пространство. Мы не будем доказывать эту теорему — можно считать, что мы будем рассматривать лишь римановы поверхности, допускающие проективное вложение.

### § 3.2. Род гладкой плоской кривой

Неособая алгебраическая кривая в  $\mathbb{CP}^2$  является римановой поверхностью. Комплексная структура задает ориентацию на этой поверхности — умножение на мнимую единицу  $i$  в произвольной локальной координате определяет положительное направление поворота в окрестности каждой точки. Всякая гладкая алгебраическая кривая компактна, поскольку является замкнутым подмножеством в компактном пространстве. С топологической точки зрения кривая в  $\mathbb{CP}^2$  представляет собой поверхность некоторого рода  $g$ , т. е. сферу с  $g$  ручками.

Для вычисления рода кривой и для исследования некоторых других свойств кривой бывает полезно рассмотреть проекцию плоскости  $\mathbb{CP}^2$  на  $\mathbb{CP}^1$  и индуцированное этой проекцией отображение кривой  $C \subset \mathbb{CP}^2$  на  $\mathbb{CP}^1$ . Под проекцией мы подразумеваем обычную проекцию плоскости на прямую. Примером такой проекции может служить отображение  $(x : y : z) \mapsto (x : y)$ ; это отображение определено на дополнении к точке  $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{CP}^2$ . При проектировании плоскости  $\mathbb{CP}^2$  (с выколотой точкой) на  $\mathbb{CP}^1$  прообразом точки служит прямая. Как правило, прямая в  $\mathbb{CP}^2$  пересекает кривую  $C$  степени  $n$  ровно в  $n$  точках. Поэтому у всех точек прямой  $\mathbb{CP}^1$ , кроме конечного числа, прообраз при проекции кривой  $C \subset \mathbb{CP}^2$  на  $\mathbb{CP}^1$  состоит ровно из  $n$  точек. Если мы не будем рассматривать проекции вдоль прямых, являющихся компонентами кривой  $C$ , или будем рассматривать только неприводимые кривые степени выше 1, то прообраз любой точки будет содержать не более  $n$  точек. С топологической точки зрения отображение  $p : C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  является разветвленным накрытием. Точки прямой  $\mathbb{CP}^1$ , прообразы которых содержат менее  $n$  точек, — это точки ветвления накрытия.

Мы установили, что любая плоская кривая разветвленно накрывает проективную прямую. Последняя получается в результате добавления к одномерному комплексному пространству  $\mathbb{C}$  бесконечно удаленной точки, т. е. гомеоморфна сфере  $S^2$ . Тем самым мы еще раз доказали, что любая алгебраическая кривая  $C$  в  $\mathbb{CP}^2$  представляет собой ориентируемую поверхность.

Изучение разветвленного накрытия позволяет подсчитать род кривой.

**Пример 3.2.1.** Кривая Ферма  $x^n + y^n + z^n = 0$  имеет род

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$



**Доказательство.** Заметим сначала, что рассматриваемая кривая  $C$  неособая. Кроме того, проекция  $p: \mathbb{CP}^2 \setminus (0:0:1) \rightarrow \mathbb{CP}^1$  индуцирует отображение  $p': C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ , так как  $(0:0:1) \notin C$ . Прообраз точки  $(x_0:y_0) \in \mathbb{CP}^1$  состоит из точек  $(x_0:y_0:z) \in \mathbb{CP}^2$ , где  $z^n = -(x_0^n + y_0^n)$ . Если  $x_0^n + y_0^n \neq 0$ , то прообраз состоит ровно из  $n$  точек, а если  $x_0^n + y_0^n = 0$ , то прообраз состоит из одной точки. Поэтому  $p' — n$ -листное разветвленное накрытие с точками ветвления  $(1:\varepsilon_n)$ , где  $\varepsilon_n$  — корень  $n$ -й степени из  $-1$ . Таких точек  $n$  штук, и порядок ветвления в каждой из них равен  $n$ . Из теоремы Римана—Гурвица получаем

$$\chi(C) = n(\chi(S^2) - n) + n = n(2 - n) + n = -n^2 + 3n.$$

Поэтому

$$g(C) = \frac{2 - \chi(C)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad \square$$

**Упражнение 3.2.2.** Определим отображение кривой Ферма в  $\mathbb{CP}^1$ , положив в карте  $z=1$  значение этого отображения равным  $n$ -й степени координаты  $x$  точки кривой.

а) Докажите, что построенное отображение достраивается до гомоморфного отображения из кривой Ферма в  $\mathbb{CP}^1$ .

б) Найдите точки ветвления этого отображения и порядки ветвления в их прообразах.

в) Докажите, что прообраз вещественной прямой относительно этого отображения является полным трехдольным графом  $K_{n,n,n}$  (вершины графа — прообразы критических значений, ребра — прообразы соединяющих их вещественных отрезков).

**Замечание 3.2.3.** Эта конструкция дает вложение графа  $K_{n,n,n}$  в поверхность минимально возможного рода.

Приведенный пример является частным случаем следующего более общего утверждения.

**Теорема 3.2.4.** Род неособой плоской кривой степени  $n$  равен

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

В частности, род кривой степени 3 равен 1, род кривой степени 4 равен 3, а род кривой степени 5 равен 6.

**Первое доказательство.** Пусть  $F(x, y, z) = 0$  — уравнение неособой кривой  $C \subset \mathbb{CP}^2$  степени  $n$ . Можно считать, что точка  $(0:0:1)$  не лежит на кривой  $C$ . Тогда можно рассмотреть проекцию  $p: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ , переводящую точку  $(x:y:z)$  в точку  $(x:y)$ . Прообраз точки  $(x_0:y_0)$  состоит из точек  $(x_0:y_0:z)$ , где  $z$  — корень многочлена  $P(z) =$

$= F(x_0, y_0, z)$ . Точкам ветвления соответствуют кратные корни этого многочлена, т. е. точки пересечения кривых  $F = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ . Степени этих кривых равны  $n$  и  $n - 1$  соответственно.

Рассмотрим сначала случай, когда точки пересечения этих кривых некратные, т. е. количество точек пересечения равно  $n(n - 1)$ . В таком случае прообраз каждой точки ветвления состоит ровно из  $n - 1$  точек, поэтому

$$\chi = n(2 - n(n - 1)) + n(n - 1)^2 = 2n - n(n - 1) = 3n - n^2,$$

а значит,

$$g = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}.$$

Предположим теперь, что есть и кратные точки пересечения. Напомним, что

$$\chi(C) = n(2 - k) + n_1 + \dots + n_k = 2n - \sum_{i=1}^k (n - n_i).$$

Для некратных точек пересечения  $n - n_i = 1$ . А когда  $d$  некратных точек пересечения сливаются в одну точку кратности  $d$ , вместо  $d$  слагаемых  $n - n_i = 1$  появляется одно слагаемое, равное  $d$ . Сама сумма при этом не изменяется.  $\square$

**Второе доказательство.** Сопоставив кривой степени  $n$  коэффициенты задающего ее уравнения (с точностью до пропорциональности), множество всех кривых степени  $n$  можно отождествить с  $\mathbb{CP}^d$ , где  $d = \frac{n(n+3)}{2}$ .

Кривая  $F = 0$  особая, если система уравнений  $F = 0, F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$  имеет ненулевое решение. В этой системе уравнение  $F = 0$  лишнее, так как  $nF = xF_x + yF_y + zF_z$ . Из трех уравнений  $F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$  можно исключить  $x, y$  и  $z$ . В результате получим алгебраическое уравнение относительно коэффициентов функции  $F$ . Таким образом, особые кривые принадлежат множеству комплексной коразмерности 1, т. е. вещественной коразмерности 2. Это множество не разбивает  $\mathbb{CP}^d$ , и, значит, неособые кривые образуют связное множество. При малом шевелении неособой кривой ее род не может измениться, поэтому у всех неособых кривых степени  $n$  род один и тот же.

Теперь можно было бы воспользоваться примером 3.2.1, в котором вычислен род одной из неособых кривых степени  $n$ . Но можно вычислить и род какой-нибудь другой неособой кривой степени  $n$ , например кривой  $l_1 \cdot \dots \cdot l_n = \varepsilon$ , где  $l_1, \dots, l_n$  — прямые общего

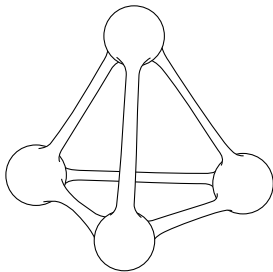


Рис. 3.1. Гладкая кривая, близкая к четверке прямых

положения, а  $\varepsilon$  — достаточно малое число, отличное от 0. Кривая  $l_i = 0$  представляет собой сферу  $S^2 \subset \mathbb{CP}^2$ , а кривая  $l_1 \cdot \dots \cdot l_n = 0$  есть объединение таких сфер, попарно пересекающихся по одной точке. Для кривой  $l_1 \cdot \dots \cdot l_n = \varepsilon$  точка пересечения двух прямых заменяется трубкой, соединяющей соответствующие этим прямым сферы. Таким образом, рассматриваемая кривая представляет собой  $n$  сфер, попарно соединенных трубками (случай  $n = 4$  изображен на рис. 3.1). Кривая степени  $n$  получается из кривой степени  $n - 1$  добавлением  $n - 2$  ручек, причем род кривой степени 1 равен 0. Поэтому род кривой степени  $n$  равен

$$1 + 2 + \dots + (n - 2) = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}. \quad \square$$

**Упражнение 3.2.5.** Пусть  $Y$  — плоская кривая, заданная в карте  $z = 1$  уравнением  $y^2 = x - x^3$ .

- а) Нарисуйте вещественную часть этой кривой.
- б) Найдите точки ветвления проекций этой кривой на ось  $x$  и на ось  $y$  и порядки ветвления в их преобразах.

**Упражнение 3.2.6.** Пусть  $Y$  — кривая общего положения в  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ , проекция которой на первый сомножитель имеет степень  $m$ , а на второй — степень  $n$ . Найдите род кривой  $Y$ .

Теорема 3.2.4 позволяет дать еще одно доказательство теоремы 2.3.4 о числе двойных точек неприводимой кривой данной степени. Действительно, гладкая кривая степени  $n$  представляет собой двумерную ориентируемую поверхность рода  $(n - 1)(n - 2)/2$ . Появление двойной точки у продеформированной кривой приводит к стягиванию в точку петли у поверхности, см. рис. 3.2 а. Локально окрестность особой точки выглядит как трансверсальное пересече-

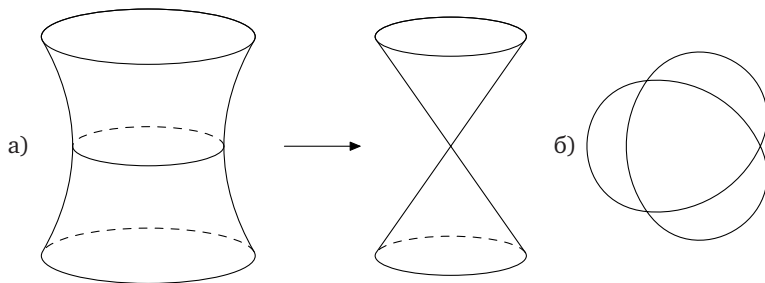


Рис. 3.2. а) Стягивание петли в особую точку и б) неприводимая кривая степени 4 с максимально возможным числом двойных точек

ние двух вещественных двумерных плоскостей в четырехмерном вещественном пространстве. Отделив друг от друга листы в точке пересечения, мы получим новую поверхность. Неприводимость особой кривой эквивалентна связности получившейся поверхности. Если она связна, то ее род на единицу меньше рода исходной поверхности.

Таким образом, возможное число двойных точек не превосходит рода кривой — появление каждой дополнительной двойной точки уменьшает род поверхности на 1. Если число двойных точек в точности равно роду (рис. 3.2 б), то результат расщепления их всех представляет собой сферу, т. е. особая кривая допускает рациональную параметризацию, см. теорему 2.3.5.

Формула Римана—Гурвица подсчитывает количество особых точек разветвленного накрытия прямой. Применив ее к отображению, представляющему собой проектирование из точки на плоскости, можно найти количество касательных к данной кривой  $C$ , проходящих через данную точку  $O$ .

**Теорема 3.2.7.** *Из точки общего положения можно провести ровно  $n^2 - n$  различных касательных к неособой кривой степени  $n$ .*

**Доказательство.** По сути дела, мы уже доказали это утверждение при доказательстве теоремы 3.2.4. Рассмотрим проекцию  $p$  кривой  $C$  на проективную прямую  $\mathbb{CP}^1$ , образованную прямыми, проходящими через точку  $O$ . Отображение  $p$  является разветвленным накрытием. Касательные к кривой  $C$ , проходящие через точку  $O$ , соответствуют точкам ветвления (рис. 3.3). Предположим, что  $C$  — неособая кривая степени  $n$ , а точка  $O$  не лежит ни на кривой  $C$ , ни на двойных касательных, ни на касательных в точках переги-

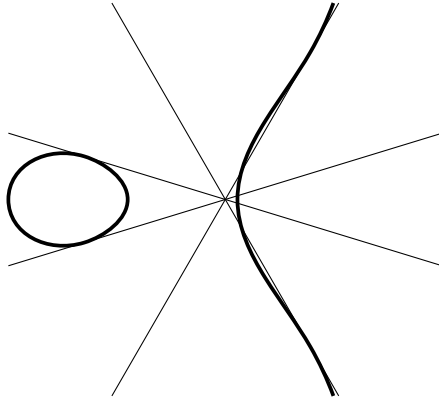


Рис. 3.3. Проектирование кубической кривой из точки. Две из шести касательных лежат в комплексной области и на рисунке не изображены

ба. (Двойной касательной называют прямую, касающуюся кривой  $C$  в двух различных точках. Точку кривой называют *точкой перегиба*, если кратность пересечения кривой и касательной в этой точке больше 2.) Тогда для всех точек ветвления  $n - n_i = 1$ , поэтому

$$\chi(C) = 2n - \sum_{i=1}^k (n - n_i) = 2n - k,$$

где  $k$  — количество точек ветвления. В нашем случае  $\chi(C) = 3n - n^2$ , поэтому  $k = n^2 - n$ .  $\square$

**Следствие 3.2.8.** Из точки общего положения, лежащей на неособой кривой  $C$  степени  $n$ , можно провести ровно  $n^2 - n - 1$  различных касательных к кривой  $C$ .

**Доказательство.** При стремлении точки  $O$  к точке  $O_1$ , лежащей на кривой  $C$ , две касательные, проходящие через точку  $O$ , сливаются в одну (рис. 3.4).  $\square$

Для точки  $O$ , лежащей на кривой  $C$ , одной из  $n^2 - n - 1$  касательных будет касательная к кривой в точке  $O$ . Если эту касательную исключить, то останется  $n^2 - n - 2$  касательных. Особенно интересна ситуация с этими касательными в случае кубических кривых. В этом случае  $n^2 - n - 2 = 4$ . Двойных касательных у кубической кривой нет — степень пересечения двойной касательной с кривой не меньше 4, тогда как степень пересечения прямой с кубической кривой не может превышать 3. Поэтому точками необщего положения будут только точки перегиба. Но в этих точках не происходит ничего пло-

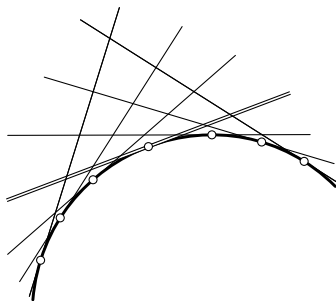


Рис. 3.4. Пара касательных к кривой, сливающихся в одну касательную при стремлении точки пересечения к точке на кривой

хого — просто одна из четырех касательных совпадает с касательной в этой точке. Таким образом, через каждую точку кубической кривой проходит четверка попарно различных касательных к ней (которые во всех точках, не являющихся точками перегиба, отличны от касательной в самой этой точке).

Эта четверка прямых определяет четыре точки проективной прямой, образованной всеми прямыми, проходящими через данную точку. Для четверки точек проективной прямой можно рассмотреть их *двойное отношение*  $[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ , где  $a, b, c$  и  $d$  — координаты этих точек в некоторой координате на прямой (от выбора координаты это число не зависит). Двойное отношение зависит от порядка, в котором берутся точки.

**Упражнение 3.2.9.** а) Докажите, что  $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]^{-1} = [a, b, d, c]^{-1}$ .

б) Докажите, что  $[a, b, c, d] = 1 - [a, c, b, d]$ .

в) Докажите, что, переставляя четыре числа  $a, b, c, d$ , мы не можем получить больше 6 различных значений их двойного отношения, и приведите примеры четверок, для которых число различных отношений равно 1, 2, 3 и 6.

**Упражнение 3.2.10.** а) Докажите, что функция комплексного переменного  $\lambda$

$$J(\lambda) = \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$$

не изменяется при заменах  $\lambda$  на  $\lambda^{-1}$  и на  $1 - \lambda$ .

б) Докажите, что если  $\lambda = [a, b, c, d]$  — двойное отношение четырех точек, то  $J(\lambda)$  не зависит от порядка, в котором берутся точки.

Пусть  $x$  — точка кубической кривой, а  $\lambda(x)$  — двойное отношение четырех касательных, проведенных из точки  $x$ . Эти касательные всегда попарно различны, поэтому  $\lambda(x)$  не принимает значений 0, 1 и  $\infty$ . Это означает, что  $J(\lambda(x))$  — однозначная функция, не принимающая значения  $\infty$ . Но кубическая кривая  $C$  в  $\mathbb{CP}^2$  компактна, а ограниченная мероморфная функция на компактной поверхности без края постоянна. Поэтому величина  $J(\lambda(X)) = J(C)$  не зависит от выбора точки на кривой  $C$ , а зависит лишь от самой этой кривой. По некоторым причинам вместо инварианта  $J$  удобнее рассматривать инвариант  $j = 2^8 J$ .

При проективном преобразовании плоскости прямые, касательные к данной кривой  $C$ , переходят в касательные прямые к ее образу. Четверка касательных из данной точки на кривой также претерпевает проективное преобразование, а значит, их двойное отношение остается неизменным. Тем самым значение  $J(C)$  является проективным инвариантом кубической кривой. Как мы увидим впоследствии, это означает, что оно является и биголоморфным инвариантом.

**Упражнение 3.2.11.** Докажите, что для кривой  $C$ , заданной в аффинной карте  $z = 1$  уравнением  $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ , инвариант  $J(C)$  равен  $J(\lambda)$ .

Это упражнение означает, что существуют различные кубические кривые — если  $J(\lambda_1) \neq J(\lambda_2)$ , то кривые  $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda_1)$  и  $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda_2)$  не могут быть проективно эквивалентны и биголоморфны друг другу.

### § 3.3. Гессиан и точки перегиба

Пусть  $A$  — гладкая точка плоской кривой  $C$ , заданной однородным уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Ограничение функции  $F$  на касательную прямую  $A + tP$  к  $C$ , проведенную в точке  $A$ , имеет нуль порядка не ниже 2. Для кривой  $C$ , не содержащей прямой в качестве неприводимой компоненты, этот порядок в точности равен 2 для всех точек, кроме конечного числа. Как мы уже говорили, точки, в которых порядок нуля больше 2, называются *точками перегиба* кривой  $C$ . Точка перегиба называется *простой*, если порядок нуля ограничения уравнения кривой на касательную в этой точке равен 3, см. рис. 3.5.

Для нахождения точек перегиба кривой используется гессиан задающего ее многочлена. *Гессианом* однородного многочлена назы-

вается определитель матрицы его вторых частных производных:

$$H(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

**Упражнение 3.3.1.** Докажите, что точка кривой является точкой перегиба в том и только в том случае, если гессиан многочлена, задающего кривую, обращается в нуль в этой точке.

Это упражнение позволяет подсчитать количество точек перегиба у кривой данной степени. Приравнивание к нулю гессиана многочлена  $F$  задает на плоскости новую алгебраическую кривую, и точки перегиба исходной кривой  $C$  — это в точности точки пересечения кривой  $C$  с кривой  $H(F) = 0$ . Количество точек пересечения — в предположении, что пересечение трансверсально, — можно теперь подсчитать по формуле Безу. Например, если степень многочлена  $F$  равна 3, то степень его гессиана также равна 3 (вторые производные кубического многочлена имеют степень 1, поэтому составленного из них определителя третьего порядка равна 3). Значит, у кубической кривой 9 точек перегиба. К сожалению, вещественными могут быть лишь не более 3 из этих точек, поэтому вещественных кубических кривых с 9 точками перегиба не бывает и мы не можем изобразить все точки перегиба кубики на рисунке.

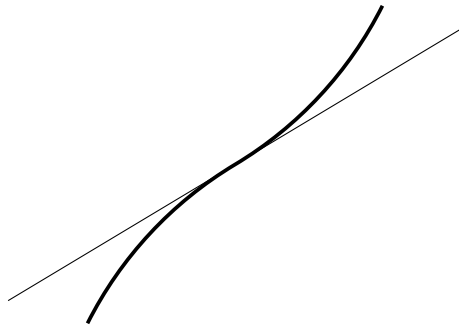


Рис. 3.5. Кривая с простой точкой перегиба и касательной в этой точке



**Упражнение 3.3.2.** Докажите, что если все точки перегиба у кривой степени  $n$  простые, то их количество равно  $3n(n-2)$ . В частности, у квадратик точек перегиба нет.

Как показывают нижеследующие упражнения, 9 точек перегиба кубической кривой образуют очень интересную конфигурацию точек на комплексной проективной плоскости.

**Упражнение 3.3.3.** Докажите, что третья точка пересечения прямой, соединяющей две точки перегиба кубической кривой, с этой кривой также является ее точкой перегиба. Найдите общее число прямых, каждая из которых содержит тройку точек перегиба данной кубической кривой. Сколько из этих прямых проходят через данную точку перегиба?

**Упражнение 3.3.4.** Докажите, что точки перегиба у всех кубик из пучка  $\lambda F + \mu H(F) = 0$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , совпадают.

**Упражнение 3.3.5.** Докажите, что при подходящей проективной замене координат любой пучок вида  $\lambda F + \mu H(F) = 0$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , содержащий гладкую кубику, можно перевести в пучок кривой Ферма  $\lambda(x^3 + y^3 + z^3) + \mu xyz = 0$ . В частности, все наборы из девяти точек перегиба кубических кривых проективно эквивалентны. Вычислите точки перегиба для кривых этого пучка.

### § 3.4. Гиперэллиптические кривые

Пусть  $P_n = P_n(x)$  — многочлен степени  $n$  без кратных корней. Рассмотрим плоскую кривую, заданную в аффинной карте  $z = 1$  уравнением  $y^2 = P_n(x)$ . В выбранной аффинной карте у этой кривой нет особых точек. Действительно, кривая задается уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad \text{где } F(x, y) = y^2 - P_n(x).$$

Дифференциал функции  $F$  равен

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = -P'_n(x) dx + 2y dy.$$

Он обращается в нуль, когда  $y = 0$  и  $P'_n(x) = 0$ . Если точка  $(x, 0)$  лежит на рассматриваемой кривой, то  $P_n(x) = 0$ . В этой точке дифференциал не обращается в нуль, поскольку по условию многочлен  $P_n(x)$  не имеет кратных корней.

В  $\mathbb{CP}^2$  рассматриваемая кривая при  $n \geq 3$  задается уравнением  $y^2 z^{n-2} = \sum a_i z^{n-i} x^i$ , где  $\sum a_i x^i = P_n(x)$ . У этой кривой ровно одна бесконечно удаленная точка  $(0 : 1 : 0)$ , причем при  $n = 3$  эта точка неособая, а при  $n > 3$  она особая.

Рассматриваемую кривую можно отобразить в  $\mathbb{CP}^1$ , сопоставив точке  $(x : y : z)$  точку  $(x : z)$ . Чтобы найти прообраз точки  $x_0 = (x_0 : 1)$  из  $\mathbb{CP}^1$ , нужно решить уравнение  $y^2 = P_n(x_0)$ . Если  $x_0$  не корень многочлена  $P_n$ , то это уравнение имеет ровно два корня. Поэтому точками ветвления являются корни многочлена  $P_n$  и, возможно, точка  $(1 : 0)$ . Проверим, что точка  $(1 : 0)$  будет точкой ветвления тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно. При малых  $z$  прообраз точки  $(1 : z)$  состоит из точек вида  $(1 : y : z)$ , где  $y^2 \approx a_n z^{2-n}$ . Пусть  $z = \rho e^{i\varphi}$ . При изменении  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  (т. е. при обходе вокруг точки  $(1 : 0) \in \mathbb{CP}^1$ ) аргумент точки  $y$  изменяется на  $(2 - n)\pi$ . Поэтому если  $n$  нечетно, то  $y$  изменяет знак, т. е. мы переходим на другую ветвь, а если  $n$  четно, то  $y$  не изменяется, т. е. мы возвращаемся на исходную ветвь.

Выколов из рассматриваемой кривой бесконечно удаленную точку  $(0 : 1 : 0)$  и вклеив вместо нее две точки при четном  $n$  и одну точку при нечетном  $n$ , ей можно сопоставить гладкую кривую. Гладкая кривая при этом проколота в двух точках при четном  $n$  и в одной точке при нечетном  $n$ . Эта гладкая кривая двулистно накрывает  $\mathbb{CP}^1$  и количество точек ветвления равно  $2\left[\frac{n+1}{2}\right]$ . Поэтому согласно теореме Римана—Гурвица

$$2 - 2g = 2\left(2 - 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) + 2\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

$$\text{т. е. } g = \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1 = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Гладкая кривая, сопоставляемая кривой  $y^2 = P_n(x)$ , при  $n = 3$  и при  $n = 4$  имеет род 1. Такая кривая называется *эллиптической*. Можно доказать, что любая гладкая кривая рода 1 изоморфна кривой, заданной уравнением  $y^2 = P_3(x)$ , т. е. является эллиптической (см. § 9.3).

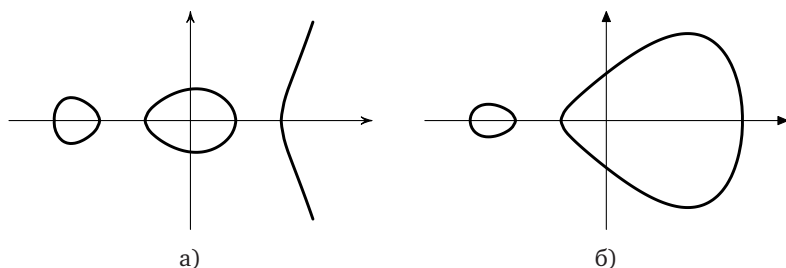


Рис. 3.6. Вещественные части гиперэллиптических кривых, заданных уравнениями а)  $y^2 = P_{2k+1}(x)$ ; б)  $y^2 = P_{2k}(x)$ ; в обоих случаях корни многочленов в правой части уравнения вещественны и различны

Кривую  $C$ , заданную уравнением  $y^2 = P_n(x)$ , где  $n > 4$ , называют *гиперэллиптической*.

**Замечание 3.4.1.** Для вычисления рода гиперэллиптической кривой мы не можем воспользоваться напрямую формулой для вычисления рода по степени кривой. Действительно, эта формула справедлива лишь для гладких кривых на проективной плоскости, тогда как гиперэллиптическая кривая негладкая.

Более общим образом, риманова поверхность называется *гиперэллиптической*, если ее род больше 1 и ею можно двулистно разветвленно накрыть сферу Римана. Все точки ветвления двулистного накрытия с необходимостью простые. По формуле Римана—Гурвица их число четно, и если оно равно  $2k$ , то род накрывающей поверхности равен  $g = k - 1$ . Позднее мы увидим, что всякую гиперэллиптическую риманову поверхность можно задать уравнением  $y^2 = P_n(x)$ , где  $n = 2g + 1$  или  $n = 2g + 2$ , хотя и не единственным образом.

На гиперэллиптической кривой можно определить так называемую *гиперэллиптическую инволюцию*  $\sigma : C \rightarrow C$ , переставляющую листы разветвленного накрытия. (Вообще, *инволюция* — это произвольное преобразование, квадрат которого является тождественным преобразованием.) Для плоской гиперэллиптической кривой, заданной уравнением  $y^2 = P_n(x)$ , эта инволюция представляет собой ограничение на кривую инволюции плоскости, которая в координатах имеет вид  $(x : y : z) \mapsto (x : -y : z)$ .

**Упражнение 3.4.2.** Докажите, что на гиперэллиптической кривой гиперэллиптическая инволюция единственна — все двулистные разветвленные накрытия сферы Римана данной кривой рода  $g \geq 2$  задают одну и ту же инволюцию.

**Замечание 3.4.3.** Не следует путать гиперэллиптическую инволюцию с инволюцией комплексного сопряжения. Последняя определена на вещественных кривых, т. е. на кривых, задаваемых полиномиальными уравнениями с вещественными коэффициентами. В отличие от гиперэллиптической, вещественная инволюция не сохраняет комплексной структуры кривой и не является тем самым голоморфным отображением.

### § 3.5. Поднятие комплексной структуры

Пусть у нас есть какая-нибудь комплексная кривая  $C$ ,  $Y$  — двумерная поверхность и  $f : Y \rightarrow C$  — накрытие. Тогда мы можем «поднять» комплексную структуру с кривой  $C$  на  $Y$ . Делается это так.

Возьмем точку  $y \in Y$  и ее образ  $t = f(y)$  при накрытии  $f$ . У точки  $t \in C$  есть такая окрестность  $U = U(t)$ , что ограничение накрывающего отображения на связную компоненту прообраза  $f^{-1}(U)$ , содержащую  $y$ , взаимно однозначно. Комплексная координата на такой окрестности вводится как композиция  $m_U \circ f$  (если окрестность  $U$  не входит в число окрестностей, задающих комплексную структуру, то нужно взять какую-нибудь определяющую окрестность и ограничить координатное отображение с нее на ее пересечение с  $U$ , считая это пересечение новой координатной окрестностью).

**Упражнение 3.5.1.** Проверьте, что так определенные локальные координаты действительно задают комплексную структуру на  $Y$ . Это означает, что на пересечении определяющих окрестностей значения локальных координат голоморфны.

Накрытия комплексных кривых встречаются редко, поэтому принципиально важной является возможность распространить предыдущую конструкцию на случай разветвленных накрытий. Для этого нужно научиться продолжать комплексную структуру в окрестности прообразов точек ветвления. Пусть  $f: Y \rightarrow X$  — разветвленное накрытие гладкой неприводимой комплексной кривой  $X$  поверхностью  $Y$ , и пусть  $y \in Y$  — прообраз точки ветвления  $f(y) = x$ . Тогда у точки  $y$  есть проколотая круговая окрестность, которая накрывает проколотую окрестность точки  $x$  с некоторой кратностью  $k$  (эта кратность называется *порядком ветвления* в данной точке прообраза). Выбрав координату  $z$  в окрестности точки  $x \in X$ , мы можем ввести на накрывающей проколотой окрестности точки  $y$  координату  $t = z^{1/k}$ , которая, как нетрудно видеть, продолжается в точку, заклеивающую прокол. В локальной координате  $t$  наше разветвленное накрытие имеет вид  $t \mapsto t^k$ . Как мы увидим, всякую гладкую компактную комплексную кривую можно получить как разветвленное накрытие проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$ .

Таким образом, мы получили еще один, чрезвычайно мощный, инструмент построения комплексных кривых. Чтобы построить кривую, нужно взять на комплексной проективной прямой набор точек, построить звезду с лучами, идущими в эти точки (звезда задается с точностью до гомотопической эквивалентности), и задать набор перестановок множества из  $d$  элементов, обладающий двумя свойствами — транзитивностью задаваемого ими действия и тем, что их произведение равно тождественной перестановке. Такой набор задает разветвленное накрытие сферы (см. § 1.6), и, подняв ком-

плексную структуру со сферы на накрывающую поверхность, мы превратим ее в риманову поверхность. Топология этой римановой поверхности определяется набором перестановок, а комплексная структура — расположением вершин звезды.

### § 3.6. Факторкривая

Еще один способ построения комплексных кривых состоит, наоборот, в опускании комплексной структуры с кривой на накрываемую кривую. Допустим, на комплексной кривой  $Y$  дискретно и без неподвижных точек действует группа преобразований  $G$ , сохраняющих комплексную структуру, т. е. группа биголоморфных отображений кривой на себя. Тогда факторпространство — т. е. множество орбит — по действию этой группы наделено естественной структурой комплексной кривой.

**Пример 3.6.1.** Пусть  $Y = \mathbb{C}$  — комплексная прямая. Рассмотрим на этой прямой решетку, порожденную над  $\mathbb{Z}$  двумя векторами  $1$  и  $\tau$ , где  $\tau \in \mathbb{C}$  — комплексное число с положительной мнимой частью, см. рис. 3.7. Сдвиги на эти два вектора порождают группу преобразований комплексной прямой, сохраняющих комплексную структуру на  $\mathbb{C}$ . Это свободная коммутативная группа с двумя образующими. Ее орбиты — это образы решетки при всевозможных сдвигах. Фактор по действию этой группы — двумерный тор, который можно отождествить с параллелограммом, натянутым на векторы  $1$  и  $\tau$ , с отождествленными противоположными сторонами. Можно доказать, что такой тор является гладкой кривой, задаваемой уравнением  $y^2 = P_3(x)$  (см. § 9.3), т. е. является *эллиптической кривой*. Наоборот, всякая кривая  $y^2 = P_3(x)$  получается факториза-

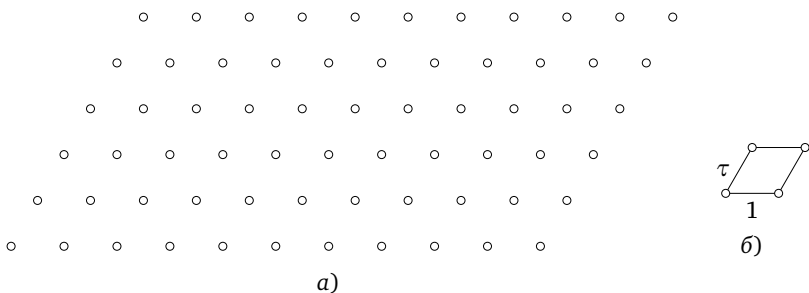


Рис. 3.7. а) Решетка на комплексной прямой и б) фундаментальный параллелограмм этой решетки

цией по некоторой решетке. Поэтому торы, полученные факторизацией по решетке, в дальнейшем мы также будем называть эллиптическими кривыми.

**Упражнение 3.6.2.** Приведите пример двух неизоморфных эллиптических кривых.

Поскольку комплексная прямая является абелевой группой по сложению, а решетка — подгруппой в ней, всякая эллиптическая кривая наделена структурой абелевой группы — факторгруппы прямой по решетке. Образ решетки служит нулем этой группы. Заметим, однако, что сдвигом можно перенести нуль группы в любую наперед заданную точку кривой (разумеется, групповая структура претерпит при этом соответствующие изменения).

**Упражнение 3.6.3.** Докажите, что если в качестве нуля группы эллиптической кривой выбрать одну из точек перегиба плоской кубики, то все девять точек перегиба образуют подгруппу 3-кращения в этой группе.

### § 3.7. Мероморфные функции

Голоморфное отображение  $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  называют *мероморфной функцией* на кривой  $C$ . При этом подразумевается, что сфера Римана  $\mathbb{CP}^1$  представлена в виде  $\mathbb{C} \cup \infty$ ; в частности, на ней есть две выделенные точки — 0 и  $\infty$ . Прообразы точки 0 — это нули функции  $f$ , а прообразы точки  $\infty$  — полюсы. Мы считаем, что порядки нулей положительны, а порядки полюсов отрицательны.

Произведение двух функций с общим нулем имеет в той же точке нуль, порядок которого равен сумме порядков нулей сомножителей; произведение двух функций с общим полюсом имеет в той же точке полюс, порядок которого равен сумме порядков полюсов сомножителей. Более общим образом, если считать, что порядок функции в точке, значение в которой отлично от 0 и  $\infty$ , равен нулю, то порядок произведения функций в любой точке равен сумме порядков сомножителей в этой точке.

Примером мероморфной функции может служить любой многочлен

$$z \mapsto P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n, \quad p_i \in \mathbb{C}, p_0 \neq 0, n \geq 1,$$

на сфере Римана. Действительно, голоморфность задаваемого многочленом отображения в любой конечной точке проективной прямой очевидна. Чтобы посмотреть, как ведет себя многочлен в бесконечности, сделаем замену координат  $z = 1/y$ . При переходе к координатам

там  $y$  в окрестности бесконечности отображение принимает вид

$$y \mapsto P(1/y) = \frac{p_0}{y^n} + \frac{p_1}{y^{n-1}} + \dots + p_n = \frac{1}{y^n} (p_0 + p_1 y + \dots + p_n y^n).$$

Выражение  $1/P(1/y)$ , задающее координатное представление функции в окрестности бесконечности на кривой-образе, имеет вид

$$\frac{1}{P(1/y)} = \frac{y^n}{p_0 + p_1 y + \dots + p_n y^n} = \frac{1}{p_0} y^n - \frac{p_1}{p_0^2} y^{n+1} + \frac{p_2 - p_1 p_0}{p_0^3} y^{n+2} + \dots,$$

т. е. задает голоморфную функцию с нулем порядка  $n$  (напомним, что  $p_0 \neq 0$ ). Это означает, что функция  $P$  имеет в бесконечности полюс порядка  $n$ .

**Теорема 3.7.1.** *На сфере Римана любая мероморфная функция является рациональной функцией, т. е. отношением двух многочленов  $P(z)/Q(z)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f$  — мероморфная функция на сфере Римана  $\mathbb{CP}^1$ . Сфера Римана компактна, поэтому число нулей и полюсов конечно. Пусть  $z_1, \dots, z_n$  — нули и полюсы функции  $f$ , а  $e_1, \dots, e_n$  — их порядки. Рассмотрим рациональную функцию  $r(z) = (z - z_1)^{e_1} \dots (z - z_n)^{e_n}$ ; в конечной плоскости она имеет те же самые нули и полюсы, что и функция  $f$ . Рассмотрим функцию  $g(z) = f(z)/r(z)$ . Эта функция мероморфна на всей сфере Римана и не имеет нулей и полюсов в конечной плоскости. В частности, как функция на  $\mathbb{C}$  она голоморфна,

а потому ее можно представить в виде ряда Тейлора:  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  для

всех  $z \in \mathbb{C}$ . Функция  $g(z)$  мероморфна также в точке  $\infty$ . Для локальной координаты  $w = \frac{1}{z}$  в точке  $\infty$  это означает, что функция  $g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{-k}$

мероморфна в точке  $w = 0$ . Следовательно,  $g(z)$  — многочлен, причем по построению у него нет нулей на всей комплексной плоскости. Таким образом,  $g(z) = \text{const}$  и функция  $f(z)$  рациональна.  $\square$

**Следствие 3.7.2.** *Сумма порядков нулей и полюсов мероморфной функции на сфере Римана равна 0.*

**Доказательство.** Это очевидно для многочлена — его степень равна, с одной стороны, порядку его полюса на бесконечности, а с другой — числу его корней, — а потому и для любой рациональной функции.  $\square$

**Замечание 3.7.3.** Впоследствии мы покажем, что сумма порядков нулей и полюсов мероморфной функции  $f$  на любой гладкой кривой равна 0 (теорема 7.6.3). Из топологических соображений это

утверждение совершенно очевидно. Действительно, сумма порядков нулей мероморфной функции равна степени определяемого ею разветвленного накрытия проективной прямой. Сумма порядков ее полюсов — это та же самая степень, но взятая со знаком минус. Поэтому сумма этих чисел равна 0. В топологическом смысле нули и полюсы мероморфной функции никак не выделяются среди прообразов точек проективной прямой — сумма кратностей прообразов любой точки равна степени функции.

В однородных координатах многочлен степени  $n$  на комплексной проективной прямой записывается как отношение двух однородных многочленов степени  $n$ , а именно  $P(z/w) = (\sum a_i z^i w^{n-i})/w^n$ . Поэтому любая мероморфная функция на комплексной прямой в однородных координатах представляется в виде отношения двух однородных многочленов одной и той же степени.

**Теорема 3.7.4.** *Если мероморфная функция на гладкой компактной кривой  $C$  имеет только один простой полюс, то  $C$  — это сфера Римана  $\mathbb{CP}^1$ .*

**Доказательство.** Пусть  $p$  — полюс данной мероморфной функции. Рассмотрим задаваемое ею отображение  $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . По условию точка  $p$  — единственная точка, которая отображается в  $\infty \in \mathbb{CP}^1$ , причем отображение  $f$  имеет кратность 1 в точке  $p$ . Следовательно, отображение  $f$  является однолиственным накрытием, т. е.  $f$  — гомеоморфизм.  $\square$

Воспользовавшись описанием мероморфных функций на сфере (теорема 3.7.1) и тем фактом, что гиперэллиптическая кривая двулистно разветвленно покрывает сферу, можно получить следующее описание мероморфных функций на гиперэллиптических кривых.

**Теорема 3.7.5.** *Пусть  $C$  — гиперэллиптическая кривая, заданная уравнением  $y^2 = P(x)$ . Тогда любую мероморфную функцию  $f$  на  $C$  можно единственным образом представить в виде  $f = R(x) + yS(x)$ , где  $R$  и  $S$  — рациональные функции от  $x$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\sigma$  — гиперэллиптическая инволюция на кривой  $C$ ,  $p: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  — отображение (двулистное разветвленное накрытие), заданное формулой  $(x: y: z) \mapsto (x: z)$ . Отметим, что  $\sigma$  — голоморфное отображение. Ясно также, что  $p \circ \sigma = p$ .

Гиперэллиптическая инволюция действует на пространстве мероморфных функций на гиперэллиптической кривой — каждой мероморфной функции  $f$  на кривой  $C$  можно сопоставить мероморфную функцию  $\sigma^* f = f \circ \sigma$ . При этом функция  $f + \sigma^* f$  инвариантна



относительно  $\sigma^*$ , поскольку  $\sigma^*(f + \sigma^*f) = \sigma^*f + f$  (мы здесь воспользовались тем, что  $\sigma^2 = \text{id}$ ).

Каждой мероморфной функции  $r$  на сфере Римана  $\mathbb{CP}^1$  можно сопоставить мероморфную функцию  $g = p^*r = r \circ p$  на кривой  $C$ . Функция  $g$  инвариантна относительно  $\sigma^*$ , поскольку  $\sigma^*g = g \circ \sigma = r \circ p \circ \sigma = r \circ p = g$ . Покажем, что в действительности любая мероморфная функция  $g$  на кривой  $C$ , инвариантная относительно  $\sigma^*$ , получается таким образом из мероморфной функции  $r$  на сфере Римана, причем функция  $r$  определена однозначно. А именно, для точки  $\xi \in C$  положим  $r(\xi) = g(\xi)$ ; корректность этого определения следует из того, что функция  $g$  инвариантна относительно  $\sigma^*$ .

Функция  $f + \sigma^*f$  является  $\sigma^*$ -инвариантной. Функция  $f - \sigma^*f$ , как и функция  $y$ , является  $\sigma^*$ -антиинвариантной, поэтому функция  $\frac{f - \sigma^*f}{y}$  является  $\sigma^*$ -инвариантной. Следовательно,  $f + \sigma^*f = \frac{1}{2}R(x)$  и  $\frac{f - \sigma^*f}{y} = \frac{1}{2}S(x)$ , где  $R(x)$  и  $S(x)$  — некоторые мероморфные (т.е. рациональные) функции на сфере. Из этих равенств получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Упражнение 3.7.6.** Докажите, что у любой мероморфной функции на эллиптической кривой сумма порядков нулей совпадает с суммой порядков полюсов.

На произвольной кривой  $C \subset \mathbb{CP}^N$  в проективном пространстве мероморфные функции можно строить следующим образом. Введем в  $\mathbb{CP}^N$  однородные координаты  $(x_0 : \dots : x_N)$ . Пусть  $P, Q$  — два однородных многочлена одинаковой степени  $d$  от  $N + 1$  переменных  $(x_0, \dots, x_N)$ , причем кривая  $C$  не содержится целиком в гиперповерхности  $Q = 0$  и у многочленов  $P$  и  $Q$  нет общих делителей положительной степени. Тогда отношение  $P/Q$  задает мероморфную функцию на пространстве  $\mathbb{CP}^N$ , ограничение которой на кривую  $C$  является мероморфной функцией на этой кривой. Нули и полюсы этой функции содержатся в объединении нулей многочленов  $P$  и  $Q$  на кривой  $C$ .

На самом деле всякая мероморфная функция на данной кривой реализуется таким образом, если подобрать подходящее вложение и подходящую пару многочленов.

**Упражнение 3.7.7.** Вычислите степень мероморфной функции, являющейся ограничением на плоскую кривую степени  $d$  несократимой рациональной функции  $\frac{P_k}{Q_k}$  с однородными числителем и знаменателем степени  $k$ .

## Глава 4

### Кривые в проективных пространствах

Как мы увидим ниже, проективная плоскость (как и любая двумерная поверхность) слишком тесна, чтобы в нее можно было вложить любую гладкую кривую. В трехмерном пространстве свободы гораздо больше. Однако задавать кривые в трехмерном проективном пространстве и пространствах более высокой размерности сложнее, чем кривые на плоскости. В этой главе мы обсудим способы задания таких кривых.

#### § 4.1. Определение и примеры

Начнем с примера.

**Пример 4.1.1.** Построим отображение проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$  в проективное пространство. Для этого

- введем однородные координаты  $(t_0 : t_1)$  в  $\mathbb{CP}^1$ ;
- введем однородные координаты  $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$  в  $\mathbb{CP}^3$ ;
- рассмотрим отображение из  $\mathbb{CP}^1$  в  $\mathbb{CP}^3$ , заданное формулой

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3).$$

**Упражнение 4.1.2.** Проверьте, что это отображение невырожденное и взаимно однозначное на свой образ.

Образ проективной прямой при построенном отображении лежит на каждой из следующих квадрик:

$$z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0;$$

$$z_1^2 - z_0 z_2 = 0;$$

$$z_2^2 - z_1 z_3 = 0,$$

и его можно определить как пересечение этих квадрик.

**Упражнение 4.1.3.** Проверьте, что пересечение любых двух из указанных в примере квадрик не совпадает с образом построенного отображения (т. е. содержит лишние точки).

Приведенный пример показывает, что трудно ожидать, чтобы кривая в проективном пространстве представлялась в виде пересечения двух гладких гиперповерхностей (в общем случае  $n$ -мерного

проективного пространства — в виде пересечения  $n - 1$  гладких гиперповерхностей). Поэтому соответствующее определение естественно давать лишь *локально*.

*Гладкой кривой* в  $n$ -мерном проективном пространстве называют такое множество точек  $C$ , что для любой точки  $A \in C$  из этого множества существуют такая окрестность этой точки и такой набор однородных многочленов  $F_1, \dots, F_{n-1}$ , что в выбранной окрестности  $C$  совпадает с пересечением гиперповерхностей  $F_1 = 0, \dots, F_{n-1} = 0$ , а дифференциалы  $dF_1, \dots, dF_{n-1}$  линейно независимы в точке  $A$ .

С топологической точки зрения гладкая кривая представляет собой ориентируемую двумерную поверхность.

**Упражнение 4.1.4.** Проверьте, что образ проективной прямой в приведенном выше примере является гладкой кривой — в окрестности любой своей точки он задается как пересечение двух из трех указанных квадрик.

Степень гладкой плоской алгебраической кривой определяется как одно из двух совпадающих между собой натуральных чисел — либо как степень задающего эту кривую однородного многочлена, либо как число точек пересечения кривой с проективной прямой общего положения. Первое определение в пространстве не работает, а второе переносится без существенных изменений. *Степенью* гладкой кривой в проективном пространстве называют количество точек пересечения кривой с гиперплоскостью общего положения.

**Пример 4.1.5.** Пересекая образ проективной прямой в приведенном выше примере с произвольной плоскостью, мы убеждаемся, что он является кривой степени 3. Отсюда вытекает, в частности, что эта кривая не представляется в виде трансверсального пересечения двух поверхностей  $F = 0$  и  $G = 0$ . Действительно, степень трансверсального пересечения двух таких поверхностей равняется произведению степеней многочленов  $F$  и  $G$ . Чтобы в пересечении получилась кривая степени 3, степени однородных многочленов  $F$  и  $G$  должны равняться 3 и 1. Это означает, что кривая пересечения лежит в двумерной проективной плоскости, заданной вторым уравнением. Однако, как легко проверить, никакие четыре точки нашей кривой не лежат в одной плоскости.

Интересный пример кривой дает пересечение двух квадрик общего положения в  $\mathbb{CP}^3$ . Сечение двух квадрик в  $\mathbb{CP}^3$  гиперплоскостью общего положения представляет собой пару коник общего по-

ложения. Они пересекаются в четырех точках, поэтому рассматриваемая кривая имеет степень 4. Покажем, что ее род равен 1, т. е. она гомеоморфна тору. Пусть наши квадрики задаются уравнениями  $F(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$  и  $G(x, y, z, w) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$ .

**Упражнение 4.1.6.** Докажите, что для случая общего набора коэффициентов  $a, b, c, d$  эти две квадрики пересекаются трансверсально, т. е. в точках их пересечения дифференциалы  $dF$  и  $dG$  линейно независимы.

Рассмотрим отображение  $p: \mathbb{CP}^3 \setminus (0:0:0:1) \rightarrow \mathbb{CP}^2$ , переводящее точку  $(x:y:z:w)$  в точку  $(x:y:z)$ , т. е. проекцию из точки  $(0:0:0:1)$ . Отображение  $p$  переводит пересечение квадрик в конику  $ax^2 + by^2 + cz^2 = d(x^2 + y^2 + z^2)$ ; это отображение является двулистным разветвленным накрытием с точками ветвления в точках пересечения коник  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$  и  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ . Получаем двулистное разветвленное накрытие сферы  $S^2$  с 4 точками ветвления (простыми ввиду двулистности накрытия). Поэтому накрывающая поверхность представляет собой тор. Поскольку условие трансверсальности пересечения двух квадрик — это алгебраическое условие на пространстве пар квадрик, мы можем заключить, что *пересечение любых двух трансверсально пересекающихся квадрик в трехмерном проективном пространстве является гладкой кривой рода 1.*

**Упражнение 4.1.7.** а) Докажите, что отображение

$$(x_1 : x_2) \mapsto (x_1^2 : x_1 x_2 : x_2^2)$$

является биголоморфным отображением проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$  на гладкую конику  $z_2^2 = z_1 z_3$  в  $\mathbb{CP}^2$ .

б) Докажите, что отображение

$$\{(x_1 : x_2), (y_1 : y_2)\} \mapsto (x_1 y_1 : x_1 y_2 : x_2 y_1 : x_2 y_2)$$

является биголоморфным отображением произведения  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$  на гладкую квадратичку  $z_1 z_4 = z_2 z_3$  в  $\mathbb{CP}^3$ .

**Упражнение 4.1.8.** Докажите, что трансверсальное пересечение квадрики и кубики в  $\mathbb{CP}^3$  является гладкой кривой рода 4.

В качестве еще одного примера кривой в  $\mathbb{CP}^n$ , обобщающего рассмотренный нами выше пример кривой в  $\mathbb{CP}^3$ , рассмотрим образ проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$  при отображении

$$(x : y) \mapsto (x^n : x^{n-1}y : \dots : y^n). \quad (4.1)$$

Эта кривая лежит в пересечении гиперповерхностей

$$z_1^2 = z_0 z_2, \quad z_2^2 = z_1 z_3, \quad \dots, \quad z_{n-1}^2 = z_{n-2} z_n,$$

но, как мы видели на примере  $n = 3$ , не совпадает с этим пересечением.

Обозначим полученную кривую  $\Gamma_n$ . Отображение (4.1) взаимно однозначно, поэтому род кривой  $\Gamma_n$  равен 0. Легко проверить, что степень кривой  $\Gamma_n$  равна  $n$ . В самом деле, гиперплоскость

$$a_0 z_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z_n = 0$$

пересекает кривую  $\Gamma_n$  в таких точках, что

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad \text{где } t = \frac{x}{y}.$$

Таким образом, точки пересечения кривой  $\Gamma_n$  и гиперплоскости соответствуют корням многочлена степени  $n$ , а  $y$  многочлена степени  $n$  ровно  $n$  корней с учетом кратностей. Поэтому кривая  $\Gamma_n$  называется *рациональной нормальной кривой степени  $n$* . Ее частный случай — кривая  $\Gamma_3$  — носит название *скрученной кубики*.

**Упражнение 4.1.9.** Докажите, что а) любая гладкая рациональная кривая степени  $n$  в  $\mathbb{CP}^n$  при подходящем выборе координат совпадает с рациональной нормальной кривой степени  $n$ ; б) любые  $n + 1$  различных точек на рациональной нормальной кривой степени  $n$  линейно независимы; в) через любые  $n + 3$  различных точек в  $\mathbb{CP}^n$  в общем положении (т. е. таких, никакие  $n + 1$  из которых не лежат на одной гиперплоскости) проходит ровно одна рациональная нормальная кривая.

Утверждение а) показывает, что в каждой степени есть по существу одна рациональная нормальная кривая. Она служит важным геометрическим инструментом при изучении свойств многочленов от одной переменной.

**Упражнение 4.1.10.** Пусть пересечение двух различных квадрик в  $\mathbb{CP}^3$  содержит скрученную кубiku. Докажите, что в этом случае оно является объединением этой кубики и прямой. Проверьте справедливость этого утверждения для пар квадрик, приведенных после примера 4.1.2.

**Упражнение 4.1.11.** Опишите семейство всех квадрик в  $\mathbb{CP}^3$ , содержащих данную скрученную кубiku.

### § 4.2. Вложения и погружения кривых

При проектировании проективного пространства на подпространство меньшей размерности кривые в исходном пространстве переходят в кривые в подпространстве. Этим свойством можно воспользоваться для реализации кривых в пространствах возможно меньшей размерности.

**Теорема 4.2.1.** *Всякую кривую можно вложить в трехмерное проективное пространство.*

**Доказательство.** Если кривая является проективной прямой или она уже вложена в проективную плоскость или в проективное пространство, то все доказано. Докажем теперь, что кривую, вложенную в проективное пространство размерности, большей 3, можно спроектировать в пространство на единицу меньшей размерности, причем образ будет гладкой кривой, а проекция — взаимно однозначной на образ.

Пусть  $C \subset \mathbb{CP}^n$  — кривая,  $n \geq 4$ . Сопоставим этой кривой многообразие ее хорд — подмногообразие в  $\mathbb{CP}^n$ , представляющее собой замыкание объединения прямых, соединяющих две точки кривой (в это замыкание попадают и точки касательных к кривой) (см. рис. 4.1). Подмногообразие хорд не более чем трехмерно, поскольку его точки параметризуются тремя параметрами: двумя точками кривой и точкой проходящей через них прямой. Поэтому оно не совпадает со всем объемлющим проективным пространством  $\mathbb{CP}^n$ . Тем самым в проективном пространстве есть точка, не лежащая в подмногообразии хорд. Проекция из этой точки отображает кривую  $C$  в проективное пространство  $\mathbb{CP}^{n-1}$ , причем взаимно однозначно на образ этой кривой.

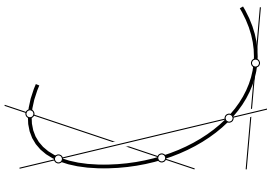


Рис. 4.1. Запрещенные направления проецирования кривой

Следующее упражнение завершает доказательство.

**Упражнение 4.2.2.** Докажите, что образ кривой  $C$  при таком проектировании является гладкой кривой.  $\square$

**Замечание 4.2.3.** Как само утверждение, так и его доказательство совпадают, по существу, с теоремой Уитни о вложимости  $k$ -мерного многообразия в  $(2k + 1)$ -мерное пространство и ее доказательством.

**Упражнение 4.2.4.** Докажите, что при  $n > 3$  на кривой  $C$  в  $\mathbb{CP}^n$ , не содержащейся ни в какой гиперплоскости, можно найти такую точку, проектирование из которой является биголоморфным отображением кривой.

**Упражнение 4.2.5.** Докажите, что при проектировании кривой из общей точки, не лежащей на кривой, ее степень сохраняется. Докажите, что при проектировании кривой из общей точки кривой ее степень падает на 1.

Для гладкой кривой в трехмерном пространстве мы уже не можем, вообще говоря, выбрать такой центр проектирования, чтобы образ кривой был гладким. Однако мы можем добиться того, чтобы этот образ имел лишь простейшие особенности — точки трансверсального самопересечения. Такое отображение кривой в плоскость называется *погружением*.

**Теорема 4.2.6.** *Всякую комплексную кривую  $C$  можно отобразить в проективную плоскость  $\mathbb{CP}^2$  так, чтобы у ее образа кроме гладких точек были лишь точки простого (т. е. двукратного) трансверсального самопересечения, на дополнении к этим точкам отображение было локально биголоморфно, а у каждой двойной точки было два прообраза.*

**Доказательство.** Согласно предыдущей теореме кривая  $C$  допускает вложение в комплексное проективное пространство  $\mathbb{CP}^3$ . Подберем в этом пространстве такую точку, проекция из которой при ограничении на  $C$  взаимно однозначна и биголоморфна на образ всюду, за исключением конечного числа точек образа, имеющих два прообраза, причем две ветви образа в этих точках пересекаются трансверсально. Такая точка действительно существует: достаточно взять ее не лежащей на двумерном подмногообразии в  $\mathbb{CP}^3$ , состоящем из нескольких компонент:

- объединение касательных прямых к кривой  $C$ ;
- объединение «особых» хорд, т. е. хорд, на которых лежат больше двух точек кривой  $C$ , а также хорд, проходящих через такие две точки кривой  $C$ , что подпространство, натянутое на касательные векторы в них и саму хорду, двумерно.

Проекция из такой точки обладает требуемыми свойствами.  $\square$

Пусть теперь образ кривой  $C$  при погружении в плоскость является кривой степени  $d$  с  $\delta$  двойными точками. Найдем род кривой  $C$  по этим данным. Предположим, что погруженная кривая задается уравнением  $f = 0$  в карте  $z = 1$ , причем обе касательные в каждой двойной точке не вертикальны. По теореме Безу число точек пересечения погруженной кривой с кривой, заданной уравнением  $\partial f / \partial y = 0$ , равно  $d(d - 1)$ .

**Упражнение 4.2.7.** Сформулируйте и докажите теорему Безу для кривых с простыми самопересечениями.

С другой стороны, каждая из двойных точек является общим нулем кривой  $f = 0$  и кривой  $\partial f / \partial y = 0$ , поэтому точками ветвления проекции на ось  $x$  (т. е. точками с вертикальными касательными) являются лишь те точки пересечения, которые отличны от двойных точек. Их число равно  $d(d - 1) - 2\delta$  (каждая точка пересечения считается два раза, поскольку в ней кривая  $\partial f / \partial y = 0$  пересекает две ветви погруженной кривой). По формуле Римана—Гурвица имеем

$$d(d - 1) - 2\delta = 2d + 2g - 2,$$

а значит,

$$g = \frac{(d - 1)(d - 2)}{2} - \delta.$$

**Упражнение 4.2.8.** Найдите размерность пространства плоских кривых степени 4 с одной простой двойной точкой.

**Упражнение 4.2.9.** Докажите, что всякая кривая рода два допускает погружение в проективную плоскость в качестве кривой степени 4 с одной простой двойной точкой. Рассматривая проекцию из этой точки, выведите отсюда, что всякая кривая рода 2 допускает голоморфное отображение степени 2 на проективную прямую, т. е. является гиперэллиптической.

**Упражнение 4.2.10.** Оцените степень плоских кривых (с двойными точками), необходимую для того, чтобы представить любую кривую заданного рода  $g$ .

Отображение  $C \rightarrow C'$ , где  $C$  — гладкая кривая, а  $C'$  — плоская кривая, у которой могут быть простые точки самопересечения, причем число этих точек конечно, называют отображением *нормализации*, а кривую  $C$  называют *нормализацией* кривой  $C'$ . В действительности нормализация есть у любой плоской кривой, вне зависимости от того, какие у нее особенности, но нам не понадобится ни сам этот факт, ни даже его строгая формулировка.



В ситуации общего положения проекция кривой  $C$  в  $\mathbb{CP}^n$  на кривую  $C'$  в  $\mathbb{CP}^m$ ,  $m < n$ , представляет собой бирациональный изоморфизм, т. е. если точка  $(x_0 : \dots : x_n) \in C$  переходит в точку  $(y_0 : \dots : y_m) \in C'$ , то координаты  $x_0, \dots, x_n$  рационально выражаются через  $y_0, \dots, y_m$ , а  $y_0, \dots, y_m$  рационально выражаются через  $x_0, \dots, x_n$ . Прежде всего заметим, что координаты можно выбрать так, чтобы проекция имела вид

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_m).$$

Поэтому нужно лишь проверить, что  $x_{m+1}, \dots, x_n$  рационально выражаются через  $x_0, \dots, x_m$  (для точек кривой  $C$ ). Пусть кривая  $C$  задается системой уравнений  $f_i(x_0, \dots, x_n) = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Для точки  $(a_0 : \dots : a_m) \in C$  получаем систему уравнений

$$f_i(a_0, \dots, a_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Каждой точке кривой  $C'$  соответствует одна точка кривой  $C$ , поэтому  $x_{m+1}, \dots, x_n$  однозначно выражаются через  $a_0, \dots, a_m$ . Следовательно,  $x_{m+1}(a_0, \dots, a_m), \dots, x_n(a_0, \dots, a_m)$  — однозначные алгебраические функции. Но алгебраическая функция однозначна лишь в том случае, когда она рациональна.

**Упражнение 4.2.11.** Изучите особые точки плоской кривой, заданной уравнением

$$y^2 z^2 - x^2 (z^2 - x^2) = 0,$$

и постройте ее нормализацию.

## Глава 5

### Формулы Плюккера

Плоские кривые объединяются в пары — каждой плоской кривой можно сопоставить двойственную ей кривую, причем кривая, двойственная к двойственной, совпадает с исходной. Кривая, двойственная к гладкой, как правило, оказывается особой, поэтому при изучении двойственности нельзя обойтись рассмотрением лишь гладких кривых. Более того, при этом нельзя ограничиться лишь кривыми с простейшими особенностями — точками трансверсального самопересечения. Однако пары двойственных кривых, имеющих лишь точки трансверсального самопересечения и точки возврата (каспы), образуют открытое подмножество в пространстве пар двойственных кривых заданных степеней, что делает естественным изучение таких пар. Формулы Плюккера представляют собой соотношения на числа особенностей различных видов у пары двойственных кривых заданных степеней.

#### § 5.1. Проективная двойственность

С каждым векторным пространством  $V$  ассоциировано *двойственное векторное пространство*  $V^\vee$  — это векторное пространство линейных функционалов  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  на  $V$ . Ниже мы будем рассматривать лишь конечномерные векторные пространства. Двойственное пространство имеет ту же размерность, что и исходное пространство, а двойственное пространство к  $V^\vee$  естественно изоморфно векторному пространству  $V$ : каждая точка  $v \in V$  определяет линейный функционал на  $V^\vee$ ,

$$v: f \mapsto f(v) \quad \text{для } f \in V^\vee.$$

Проективизация  $PV^\vee$  — это двойственное проективное пространство к проективизации  $PV$  пространства  $V$ . Мы покажем, как сопоставить плоской кривой  $C \subset \mathbb{CP}^2$  двойственную плоскую кривую  $C^\vee$  в двойственной проективной плоскости  $(\mathbb{CP}^2)^\vee$ .

Прямой  $l$  в  $\mathbb{CP}^2$  сопоставляется точка  $l^\vee \in (\mathbb{CP}^2)^\vee$  — это ненулевой линейный функционал, обращающийся в нуль на  $l$ . Такой функци-

она единствен с точностью до умножения на ненулевую постоянную. Тем самым он корректно определяет точку двойственной плоскости. Наоборот, прямой в двойственной плоскости сопоставляется точка в исходной плоскости. Если прямая в  $\mathbb{CP}^2$  задана линейным уравнением  $ax + by + cz = 0$ , то соответствующая ей точка в двойственной плоскости имеет координаты  $(a : b : c)$ . Проективная двойственность обладает следующим важным свойством: точки  $A$  и  $B$  лежат на прямой  $l$  тогда и только тогда, когда прямые  $A^\vee$  и  $B^\vee$  пересекаются в точке  $l^\vee$ . Это свойство непосредственно вытекает из определения двойственности.

*Двойственная кривая  $C^\vee \subset (\mathbb{CP}^2)^\vee$  сопоставляется гладкой кривой  $C \subset \mathbb{CP}^2$  следующим образом. Каждой точке кривой  $C$  сопоставим прямую  $l$ , касающуюся кривой  $C$  в этой точке, а прямой  $l$  — точку  $l^\vee$ . Множество всех точек  $l^\vee$ , полученных таким образом, образует кривую  $C^\vee$ .*

**Упражнение 5.1.1.** а) Докажите, что эллипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  двойствен эллипс  $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ .

б) Докажите, что любой неособой кривой второй степени двойственна кривая второй степени.

**Упражнение 5.1.2.** Рассмотрим случай вещественно двойственных кривых. Докажите, что выпуклой кривой двойственна выпуклая кривая. (Замкнутая кривая на плоскости  $\mathbb{R}^2$  называется *выпуклой*, если она ограничивает выпуклую фигуру.)

Двойственная кривая к особой кривой  $C$  определяется как замыкание в  $(\mathbb{CP}^2)^\vee$  множества точек  $l^\vee$ , отвечающих касательным прямым к  $C$  в гладких точках. Комплексная кривая, двойственная гладкой кривой степени, большей 2, всегда негладкая. Однако это по-прежнему алгебраическая кривая.

**Теорема 5.1.3.** *Если кривая  $C$  алгебраическая, то кривая  $C^\vee$  тоже алгебраическая.*

**Доказательство.** Каждой прямой в  $\mathbb{CP}^2$  соответствует точка в  $(\mathbb{CP}^2)^\vee$ . Поэтому гладкой кривой  $C$  в  $\mathbb{CP}^2$  можно сопоставить кривую  $\hat{C}$  в  $\mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^\vee$ . Эта кривая состоит из пар (точка кривой  $C$ , касательная к  $C$  в этой точке) и называется *конормальной разверткой* кривой  $C$ . Как нетрудно видеть, кривая  $\hat{C}$  гладкая. Прямое произведение  $\mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^\vee$  можно спроектировать на каждый из его сомножителей, и при проекции на первый сомножитель кривая  $\hat{C}$  проектируется в кривую  $C$ , а при проекции на второй — в двойственную ей кривую  $C^\vee$ .

Пусть кривая  $C$  задается в  $\mathbb{CP}^2$  уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Касательная к  $C$  в точке  $(x_0 : y_0 : z_0) \in C$  задается уравнением

$$xF_x + yF_y + zF_z = 0,$$

где производные  $F_x, F_y$  и  $F_z$  берутся в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Следовательно, конормальную развертку можно задать явно алгебраическими уравнениями

$$x_1 = F_x(x_0, y_0, z_0), \quad y_1 = F_y(x_0, y_0, z_0),$$

$$z_1 = F_z(x_0, y_0, z_0), \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

где  $(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{CP}^2$  и  $(x_1 : y_1 : z_1) \in (\mathbb{CP}^2)^\vee$ . Последнее уравнение в этой системе можно заменить на уравнение

$$x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 = 0,$$

эквивалентное ему благодаря однородности функции  $F$ .

Утверждение теоремы теперь вытекает из общего утверждения о том, что образ алгебраического многообразия при алгебраическом отображении является алгебраическим многообразием.

Для вывода явного уравнения кривой  $C^\vee$  нужно последовательно исключить из приведенных выше уравнений кривой  $\hat{C} \subset \mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^\vee$  переменные  $x_0, y_0, z_0$ . Исключение производится следующим образом. Пусть у нас есть четыре соотношения  $f_1 = 0, \dots, f_4 = 0$  на переменные  $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$ . Заменим каждую пару многочленов  $(f_1, f_4), (f_2, f_4), (f_3, f_4)$ , рассматриваемых как многочлены от  $x_0$ , результатом этой пары. Получим тройку многочленов  $g_1, g_2, g_3$ , уже не зависящих от переменной  $x_0$ . Теперь заменим каждую из двух пар многочленов  $(g_1, g_3)$  и  $(g_2, g_3)$ , рассматриваемых как многочлены от  $y_0$ , их результатом. Затем таким же способом исключим переменную  $z_0$  из полученной пары многочленов  $(h_1, h_2)$ . Приравнивание к нулю полученного в результате однородного многочлена от переменных  $x_1, y_1, z_1$  и дает уравнение двойственной кривой.  $\square$

Степень кривой  $C^\vee$  называют *классом* кривой  $C$ . Иными словами, класс кривой  $C$  — это количество точек пересечения кривой  $C^\vee$  с прямой общего положения, т. е. количество касательных к кривой  $C$ , проходящих через данную точку общего положения. Класс неособой кривой зависит только от ее степени.

**Пример 5.1.4.** Вычислим двойственные кривые к кубическим кривым семейства

$$y^2z - x^3 + axz^2 = 0. \quad (5.1)$$

Уравнения конормальной развертки имеют вид

$$\begin{aligned}x_1 + 3x^2 - az^2 &= 0, \\y_1 - 2yz &= 0, \\z_1 - y^2 - 2axz &= 0, \\x_1x + y_1y + z_1z &= 0.\end{aligned}$$

Выражая  $x$  из четвертого уравнения и подставляя в первое и третье (во втором уравнении эта переменная отсутствует), получаем систему

$$\begin{aligned}x_1^3 - ax_1^2z^2 + 3y_1^2y^2 + 6y_1yz_1z + 3z_1^2z^2 &= 0, \\y_1 - 2yz &= 0, \\x_1y^2 - x_1z_1 - 2ay_1yz - 2az_1z^2 &= 0.\end{aligned}$$

Выражая  $y$  из второго уравнения и подставляя в первое и третье, получаем систему

$$\begin{aligned}4x_1^3z^2 - 4ax_1^2z^4 + 12z_1^2z^4 + 3y_1^4 &= 0, \\x_1y_1^2 - 4x_1z_1z^2 - 4ay_1^2z^2 - 8az_1z^4 &= 0.\end{aligned}$$

Наконец, исключая  $z$ , получаем уравнение двойственной кривой

$$\begin{aligned}4x_1^3z_1^3 + 27y_1^2z_1^4 - \\- a(ax_1^4y_1^2 + 24ax_1y_1^4z_1 + 30x_1^2y_1^2z_1^2 + 4x_1^5z_1 + 4a^2y_1^6) &= 0.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Значит, при общем значении параметра  $a$  двойственная кривая к кубике имеет степень 6, т. е. класс кубики равен 6.

При  $a = 0$  кривая семейства вырождается в полукубическую кривую

$$y^2z - x^3 = 0,$$

а двойственная — в полукубическую кривую

$$4x_1^3 + 27y_1^2z_1 = 0.$$

Значит, класс полукубической кривой равен 3.

Для двойственной кривой  $C^\vee \subset (\mathbb{CP}^2)^\vee$ , в свою очередь, можно построить двойственную кривую  $(C^\vee)^\vee \subset \mathbb{CP}^2$ . Строится она так. Касательная в каждой неособой точке кривой  $C^\vee$  к этой кривой определяет точку в  $\mathbb{CP}^2$ . Замыкание множества этих точек в  $\mathbb{CP}^2$  и образует кривую.

Для двойственных кривых выполняется соотношение  $(C^\vee)^\vee = C$ . Действительно, пусть  $l_1^\vee$  и  $l_2^\vee$  — две близкие гладкие точки кривой  $C^\vee$ .

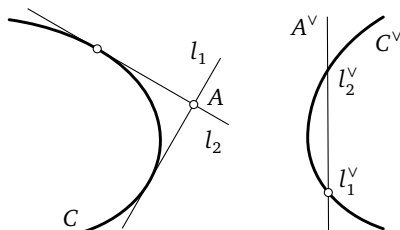


Рис. 5.1. Точка  $A$  пересечения двух касательных к кривой  $C$ , ее предельное положение и соответствующие двойственные объекты

Им соответствуют касательные  $l_1$  и  $l_2$  к кривой  $C$ . Точке  $A$  исходной плоскости, в которой пересекаются прямые  $l_1$  и  $l_2$ , соответствует прямая  $A^v$  в двойственной плоскости, проходящая через точки  $l_1^v$  и  $l_2^v$  (рис. 5.1). При стремлении точки  $l_2^v$  к точке  $l_1^v$  прямая  $A^v$  стремится к касательной, проведенной к кривой  $C^v$  в точке  $l_1^v$ . При этом точка  $A$  стремится к точке, в которой прямая  $l_1$  касается кривой  $C$ . Значит, касательным к двойственной кривой в гладких точках соответствуют точки исходной кривой, что и требовалось.

Приведенное рассуждение показывает также, что конормальная развертка двойственной кривой  $C^v$  совпадает с конормальной разверткой  $\hat{C}$  исходной кривой; при этом проективная плоскость  $\mathbb{CP}^2$  и двойственная к ней плоскость  $(\mathbb{CP}^2)^v$  меняются ролями.

**Упражнение 5.1.5.** Вычислите двойственную кривую к кривой (5.2) и убедитесь, что она совпадает с кривой (5.1).

Если кривая  $C$  неособая, то кривая  $C^v$  не обязательно будет неособой. Дело в том, что двойной касательной соответствует точка самопересечения, а касательной в точке перегиба соответствует точка возврата (рис. 5.2) двойственной кривой. Первое из этих свойств очевидно, поэтому обсудим лишь второе свойство. Его можно исследовать локально, в окрестности точки перегиба.

Рассмотрим кривую  $y = x^3$ , для которой точка  $(0, 0)$  является точкой перегиба. Касательная к этой кривой в точке кривой с координатами  $(x_0, y_0)$  задается уравнением  $y - y_0 = 3x_0^2(x - x_0)$ , т. е.

$$-3x_0^2x + y + 2x_0^3 = 0.$$

Поэтому точке  $(x_0 : x_0^3 : 1) \in \mathbb{CP}^2$  сопоставляется точка  $(-3x_0^2 : 1 : 2x_0^3) = \left(\frac{-3x_0^{-1}}{2} : \frac{x_0^{-3}}{2} : 1\right)$  двойственной кривой. Таким образом, двойствен-

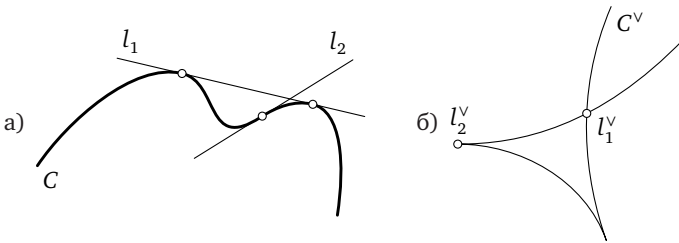


Рис. 5.2. а) Двойная касательная и касательная в точке перегиба;  
б) особенности двойственной кривой

ная кривая состоит из точек  $(x_1 : y_1 : 1)$ ,  $x_1 = -\frac{3x_0^{-1}}{2}$ ,  $y_1 = \frac{x_0^{-3}}{2}$ . Эта кривая задается уравнением  $\left(-\frac{2x_1}{3}\right)^3 = 2y_1$ . Кривая получилась почти такая же, но при этом точке  $(0 : 0 : 1)$  исходной кривой соответствует точка  $(0 : 1 : 0)$  двойственной кривой. В окрестности точки  $(0 : 1 : 0)$  двойственной кривой удобно использовать координаты  $(x_1 : 1 : z_1)$ . При этом  $x_1 = -3x_0$  и  $z_1 = 2x_0^3$ , т. е. в этих координатах двойственная кривая задается уравнением  $27z_1^2 + x_1^3 = 0$ . Таким образом, точке перегиба (рис. 5.2а) двойственна точка возврата (рис. 5.2б).

Эллипсы  $\frac{x^2}{a^2} + a^2 y^2 = 1$  и  $a^2 x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$  двойственны друг другу, поэтому кривая, состоящая из пары этих эллипсов, двойственна сама себе. Воспользовавшись этим свойством, а также тем, что точке перегиба двойственна точка возврата, а двойной касательной двойственна точка самопересечения, нетрудно убедиться, что кривые, изображенные на рис. 5.3, двойственны друг другу.

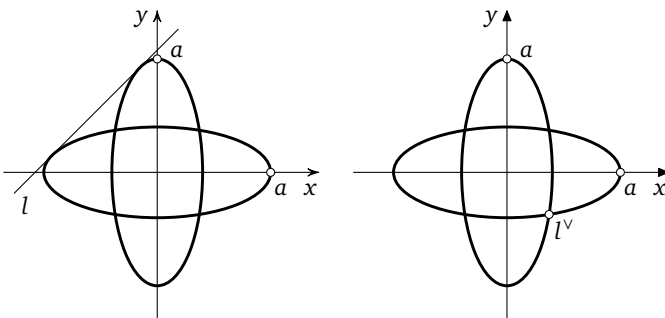


Рис. 5.3. Касательная к исходной кривой — точка на двойственной кривой

## § 5.2. Формулы Плюккера для неособых кривых

Мы уже знаем некоторые численные характеристики кривых, двойственных к гладким. Пусть  $C$  — гладкая проективная кривая. Ее класс — это степень двойственной к ней кривой  $C^\vee$ , т. е. число точек пересечения двойственной кривой с прямой общего положения на двойственной проективной плоскости. Прямая на двойственной плоскости отвечает некоторой точке исходной плоскости и состоит из всех прямых, проходящих через эту точку. В случае общего положения точки пересечения — это прямые, касающиеся кривой  $C$ . Если  $C$  — гладкая кривая степени  $n$ , то, как мы знаем, через точку общего положения вне кривой  $C$  проходят  $n(n-1)$  касательных к кривой  $C$  (см. теорему 3.2.7). Значит, имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 5.2.1.** *Класс  $n^\vee$  неособой плоской кривой степени  $n$  равен  $n(n-1)$ .*

Из этого утверждения непосредственно следует, что при  $n > 2$  кривая  $C^\vee$ , двойственная к гладкой кривой  $C$  степени  $n$ , особа. Действительно, если бы она была неособа, то степень двойственной к ней кривой  $C^{\vee\vee}$  равнялась бы  $n(n-1)(n(n-1)-1)$ , т. е. была бы больше  $n$ , и, следовательно, кривая  $C^{\vee\vee}$  не могла бы совпадать с кривой  $C$ .

Количество точек возврата на кривой  $C^\vee$  также легко определить. Точки возврата двойственной кривой взаимно однозначно соответствуют точкам перегиба исходной. Как мы знаем, у общей гладкой кривой степени  $n$  имеется  $3n(n-2)$  точек перегиба (см. упражнение 3.3.2). Поэтому справедлив следующий результат.

**Утверждение 5.2.2.** *Кривая, двойственная общей неособой плоской кривой степени  $n$ , имеет  $k^\vee = 3n(n-2)$  точек возврата.*

Теперь у нас есть необходимые данные для подсчета числа двойных точек на кривой, двойственной гладкой. Кривая  $C^\vee$  является образом гладкой кривой  $C$  при голоморфном отображении проективной двойственности. Это отображение почти всюду взаимно однозначно и невырожденно. Это означает, что гладкая кривая  $C$  является нормализацией особой кривой  $C^\vee$ .

Будем называть родом особой кривой род ее нормализации. Если бы кривая  $C^\vee$  была гладкой степени  $n(n-1)$ , то ее род равнялся бы  $\frac{(n(n-1)-1)(n(n-1)-2)}{2}$ . Наличие особых точек приводит



к уменьшению рода. При этом особая точка каждого типа приводит к уменьшению рода на одну и ту же величину.

Кривая, двойственная к гладкой кривой общего положения, имеет особые точки двух типов — каспы (т. е. точки возврата, полукубические острия) и точки трансверсального самопересечения. Полукубическая парабола  $y^2 = x^3z$  имеет единственную особую точку — касп — и нормализуется рациональной кривой, тогда как гладкая кривая третьей степени имеет род 1. Тем самым появление каспа на кривой данной степени понижает ее род на 1. С другой стороны, как мы уже знаем (см. § 2.3), появление точки простого самопересечения также снижает род кривой на 1. Таким образом, мы получаем следующее выражение для рода  $g = g(C) = g(\hat{C})$  кривой  $C$ , которая является нормализацией кривой  $C^\vee$  и изоморфна своей нормальной развертке  $\hat{C}$ :

$$g = \frac{1}{2}(n^\vee - 1)(n^\vee - 2) - \delta^\vee - k^\vee.$$

Отсюда мы находим число точек простого самопересечения на двойственной кривой:

$$\begin{aligned}\delta^\vee &= \frac{1}{2}(n^\vee - 1)(n^\vee - 2) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - k^\vee = \\ &= \frac{1}{2}(n(n - 1) - 1)(n(n - 1) - 2) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - 3n(n - 2) = \\ &= \frac{1}{2}n(n - 2)(n - 3)(n + 3).\end{aligned}$$

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

**Утверждение 5.2.3.** *Кривая, двойственная к общей гладкой кривой степени  $n$ , имеет*

$$\delta^\vee = \frac{1}{2}n(n - 2)(n - 3)(n + 3)$$

*точек самопересечения, т. е. к общей гладкой кривой степени  $n$  можно провести  $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 3)(n + 3)$  двойных касательных.*

При  $n = 3$  полученное выражение для  $\delta^\vee$  обращается в нуль, что согласуется с тем, что кривая, двойственная к гладкой кубике, не имеет точек самопересечения (но имеет 9 точек возврата). При  $n = 4$  имеем  $\delta^\vee = 28$ : к общей гладкой кривой степени 4 можно провести 28 двойных касательных.

### § 5.3. Формулы Плюккера для особых кривых

Имея в виду симметрию между плоской кривой и двойственной к ней, естественно распространить выведенные в предыдущем

параграфе формулы на случай, когда у кривой  $C$  также есть особые точки — точки двукратного самопересечения и полукубические точки возврата. Для общей такой кривой  $C$  данной степени двойственная ей кривая также не имеет особенностей другого вида. Особенности конормальной развертки  $\hat{C}$  кривой  $C$  определяются локальными особенностями кривой  $C$ . Как мы видели, единственные локальные особенности кривой  $C^\vee$ , двойственной общей гладкой кривой  $C$ , — это точки простого самопересечения и полукубические точки возврата. При этом конормальная развертка  $\hat{C} = \hat{C}^\vee$  — гладкая кривая, а значит, конормальная развертка любой общей кривой, единственные особенности которой — двойные точки и полукубические точки возврата, также является гладкой кривой. Это означает, в частности, что обе кривые  $C$  и  $C^\vee$  неприводимы. Тем самым конормальная развертка служит нормализацией как для кривой  $C$ , так и для кривой  $C^\vee$ .

Пусть  $n$  — степень кривой  $C$ ,  $\delta$  — число ее точек самопересечения,  $k$  — число точек возврата;  $n^\vee$ ,  $\delta^\vee$  и  $k^\vee$  — аналогичные числа для кривой  $C^\vee$ .

Обобщения выведенных нами формул на случай особых кривых называются *формулами Плюккера* и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} n^\vee &= n(n-1) - 2\delta - 3k, & 3n(n-2) &= k^\vee + 6\delta + 8k, \\ n &= n^\vee(n^\vee-1) - 2\delta^\vee - 3k^\vee, & 3n^\vee(n^\vee-2) &= k + 6\delta^\vee + 8k^\vee. \end{aligned}$$

Выведенное уже нами в предыдущем параграфе выражение для рода кривой  $\hat{C}$  без изменений распространяется и на случай, когда кривая  $C$  особа:

$$g(\hat{C}) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta - k = \frac{1}{2}(n^\vee-1)(n^\vee-2) - \delta^\vee - k^\vee.$$

Приведенные пять соотношений не являются независимыми. Легко проверить, что из любых двух из них выводятся три оставшихся. Кроме того, если мы докажем, скажем, формулу для  $n^\vee$ , то заменой  $C$  на  $C^\vee$  мы получим аналогичную формулу и для  $n$ . Тем не менее мы приведем независимые рассуждения, доказывающие каждую из формул Плюккера и объясняющие их геометрический смысл.

Рассмотрим такую однопараметрическую деформацию, зависящую от параметра  $t$ , коэффициентов уравнения, задающего кривую  $C$ , что при малых значениях  $t \neq 0$  задаваемая этим уравнением кривая  $C_t$  является кривой общего положения той же степени  $n$ ,  $C_0 = C$ . Согласно результатам предыдущего параграфа из

точки  $P \in \mathbb{CP}^2$  общего положения к кривой  $C_t$ ,  $t \neq 0$ , можно провести  $n(n-1)$  касательных и у кривой  $C_t$  в точности  $3n(n-2)$  точек перегиба. При  $t \rightarrow 0$  часть проходящих через точку  $P$  касательных к  $C_t$  стремится к касательным к кривой  $C = C_0$ , проходящим через точку  $P$ , а другая часть касательных стремится к прямым, соединяющим  $P$  с особыми точками кривой  $C$ . Аналогично часть точек перегиба кривой  $C_t$  стремится к точкам перегиба кривой  $C = C_0$ , тогда как другие точки перегиба стремятся к особым точкам этой кривой.

Количество касательных к кривой  $C_t$ , проходящих через точку  $P$  и стремящихся к прямой, соединяющей  $P$  и данную особую точку кривой  $C$ , зависит лишь от типа этой особой точки — является ли она точкой простого самопересечения или полукубической точкой возврата. Аналогично количество точек перегиба кривой  $C_t$ , «исчезающих» в особой точке кривой  $C$ , определяется типом этой точки. Тем самым доказываемые нами формулы Плюккера эквивалентны следующему утверждению.

**Утверждение 5.3.1.** Пусть полиномиальное уравнение  $f(x, y) = 0$  задает на плоскости кривую с особенностью в начале координат, являющейся точкой простого самопересечения или полукубической точкой возврата, причем уравнение общее для кривых, удовлетворяющих этому условию. Пусть кривые  $f_t(x, y) = 0$  получаются из кривой  $f(x, y) = 0$  общим малым шевелением с сохранением степени многочлена  $f$ ,  $f_0(x, y) = f(x, y)$ . Тогда при малых ненулевых значениях параметра  $t$  на кривой  $f_t(x, y) = 0$  вблизи начала координат

- есть две точки, касательная в которых имеет заданное направление, и шесть точек перегиба, если особенность исходной кривой — двойная точка;
- есть три точки, касательная в которых имеет заданное направление, и восемь точек перегиба, если особенность исходной кривой — полукубическая точка возврата.

Фактически мы уже доказали это утверждение при выводе формул Плюккера для гладких кривых; дадим, однако, его явное доказательство.

Сначала рассмотрим исчезающие касательные. Выбрав подходящую систему координат, уравнение кривой с двойной точкой в начале координат можно привести к виду

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + \dots,$$

где многоточие обозначает мономы степени выше 2, а касательное направление считаем вертикальным. Производная  $\partial f/\partial y$  имеет ненулевую линейную часть, поэтому кривая, заданная уравнением  $\partial f/\partial y = 0$ , гладкая. Ограничение функции  $f$  на эту кривую имеет в начале координат нуль второго порядка, значит, пошевеленное уравнение на точки вертикального касания

$$f_t(x, y) = \frac{\partial f_t}{\partial y} = 0$$

имеет два решения вблизи начала координат. Аналогично для особенности полукубического типа уравнение кривой можно привести к виду

$$f(x, y) = y^2 - x^3 + \dots,$$

где многоточие обозначает мономы степени выше 3. И в этом случае уравнение  $\partial f/\partial y = 0$  задает гладкую в начале координат кривую, причем ограничение функции  $f$  на эту кривую имеет нуль третьего порядка. Значит, у пошевеленного уравнения на точки вертикального касания три решения вблизи начала координат.

Теперь обратимся к подсчету исчезающих точек перегиба. Как мы знаем, точки перегиба — это точки пересечения кривой с нулями гессиана. Нули гессиана кривой степени 3 и выше в особой точке этой кривой также имеют особенность. Поэтому подсчет количества исчезающих в особой точке точек перегиба не так прост, как подсчет исчезающих в такой точке касательных. Тем не менее, результат вычисления является универсальным, и для его получения достаточно рассмотреть произвольный модельный пример.

Для кривой с полукубической особенностью таким примером может служить полукубическая парабола  $y^2z = x^3$ , двойственная к которой также является полукубической параболой. Такая кривая имеет одну точку перегиба, а ее возмущение — общая кубическая кривая — 9 таких точек. Поэтому в полукубической точке возврата исчезает 8 точек перегиба.

В качестве модельного примера кривой с двойной точкой возьмем рациональную кубическую кривую  $y^2z = x^2(x - z)$ . У такой кривой три точки перегиба — двойственная к ней кривая, так называемая *дельтоида*, является рациональной кривой четвертой степени с тремя полукубическими точками возврата. Следовательно, в двойной точке кривой исчезает  $9 - 3 = 6$  точек перегиба.  $\square$

**Упражнение 5.3.2.** Проверьте, что кривая  $y^2z = x^3$  имеет одну точку перегиба, а кривая  $y^2z = x^2(x - z)$  — три такие точки.

### § 5.4. Многоугольники Ньютона

Пусть неприводимая плоская кривая задана однородным уравнением  $P(x, y, z) = 0$ . Это означает, что многочлен  $P$  не раскладывается в произведение двух полиномиальных множителей, степень каждого из которых положительна. Однако может так случиться, что в окрестности выбранной точки (мы будем считать, что эта точка имеет однородные координаты  $(0 : 0 : 1)$ ) уравнение кривой все-таки раскладывается на нетривиальные множители. В этом случае мы будем говорить, что каждый из этих множителей задает *локальную ветвь* кривой.

**Определение 5.4.1.** Положим  $p(x, y) = P(x, y, 1)$ . Тогда уравнение кривой  $P(x, y, z) = 0$  в окрестности точки  $(0, 0)$  можно записать в виде  $p(x, y) = 0$ . Говорят, что кривая *локально неприводима* в окрестности точки  $(0, 0)$ , если функцию  $p(x, y)$  нельзя разложить в произведение двух аналитических функций  $p(x, y) = p_1(x, y)p_2(x, y)$ , обращающихся в нуль в точке  $(0, 0)$ . Если функция  $p$  допускает разложение на локально неприводимые сомножители

$$p(x, y) = p_1(x, y) \dots p_d(x, y),$$

то кривые, локально заданные уравнениями  $p_i(x, y) = 0$ ,  $i = 1, \dots, d$ , называются *локальными ветвями кривой в точке*.

Отметим, что, поскольку многочлен  $p(x, y) = P(x, y, 1)$  неприводим, сомножители в его разложении на локально неприводимые множители не могут быть полиномиальными — в аффинных координатах  $x, y$  они задаются бесконечными рядами.

**Упражнение 5.4.2.** Докажите следующие свойства локальных ветвей: а) в гладкой точке кривая локально неприводима, т.е. кривая может быть локально приводимой только в особой точке; б) в особой точке кривая не обязательно локально приводима; например, начало

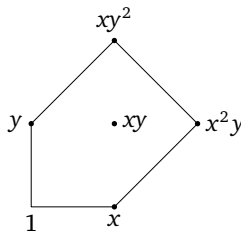


Рис. 5.4. Многоугольник Ньютона для многочлена  $a + bx + cy + dxy + ex^2y + fxy^2$

координат в полукубической параболе  $x^2 = y^3$  является ее локально неприводимой точкой; в) всякая локальная ветвь кривой допускает аналитическую параметризацию, т. е. для всякой неприводимой в начале координат аналитической кривой  $p_i(x, y) = 0$  существуют такие ненулевые аналитические функции  $f_1(t), f_2(t)$ ,  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ , что в некоторой окрестности начала координат  $p_i(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $p(f_1(t), f_2(t)) = 0$ .

Объясним теперь, как находить ветви кривой, проходящие через особую точку  $(0, 0)$ , с помощью диаграммы (многоугольника) Ньютона. Рассмотрим кривую  $\sum a_i x^{m_i} y^{n_i} = 0$ . Ветви этой кривой, проходящие через точку  $(0, 0)$ , задаются уравнениями вида  $y = x^\alpha \varphi(x)$ , где  $\varphi(x) \rightarrow a \neq 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Подставив такое выражение в уравнение кривой, получим

$$\sum a_i x^{m_i + \alpha n_i} \varphi_i(x) = 0. \quad (5.3)$$

Предположим, что одно из чисел  $m_k + \alpha n_k$  меньше остальных. Сократив уравнение (5.3) на  $x^{m_k + \alpha n_k}$ , получим  $a_k \psi_1(x) + \psi_2(x) = 0$ , причем  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi_1(x) \neq 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi_2(x) = 0$ . Приходим к противоречию, поэтому при данном  $\alpha$  по крайней мере два числа  $m_i + \alpha n_i$  и  $m_j + \alpha n_j$  должны совпадать и быть меньше всех остальных чисел такого вида. Если минимальным является число  $m_i + \alpha n_i = m_j + \alpha n_j = \dots = m_s + \alpha n_s$ , то соответствующая ветвь задается (приближенно) уравнением

$$a_i x^{m_i} y^{n_i} + a_j x^{m_j} y^{n_j} + \dots + a_s x^{m_s} y^{n_s} = 0;$$

количество слагаемых в этом уравнении равно количеству отмеченных точек, лежащих на соответствующей стороне многоугольника Ньютона. Геометрический смысл того, что число  $m_i + \alpha n_i = \dots = m_s + \alpha n_s$  минимально, достаточно прост. При данном  $\alpha$  уравнения  $m + \alpha n = k$  при различных  $k$  задают семейство параллельных прямых на плоскости с координатами  $(m, n)$ , причем величина  $k$  минимальна для прямой, которая расположена ближе всего к началу координат. Это означает, что ветвям кривой  $f = 0$  соответствуют лишь те прямые, которые содержат стороны многоугольника Ньютона, причем многоугольник и начало координат должны лежать по разные стороны от этих прямых.

**Упражнение 5.4.3.** С помощью диаграммы Ньютона найдите ветви следующих кривых в точке  $(0, 0)$ :

- а)  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ;
- б)  $(x + y)(x^2 + y^2) + x(x - y) = 0$ ;
- в)  $y^2 + x^2(x - y) = 0$ .

## Глава 6

# Отображения кривых

Мероморфная функция на алгебраической кривой — это ее отображение в проективную прямую. Однако естественно рассматривать отображения не только в проективную прямую, но и в другие комплексные кривые. Прежде всего естественно рассматривать взаимно однозначные отображения комплексной кривой в себя — ее автоморфизмы. Все автоморфизмы данной кривой образуют группу. Для кривой рода 0 (проективной прямой) эта группа трехмерна. Для любой кривой рода 1 (эллиптической кривой) она одномерна, для кривых старших родов она конечна, и для кривых рода  $g > 2$  она, как правило, состоит лишь из тождественного отображения. Кривые с большой группой симметрий представляют особый интерес — как и всякий симметричный объект, они могут быть очень красивыми.

### § 6.1. Автоморфизмы сферы Римана

Биголоморфное отображение кривой в себя называется *автоморфизмом* кривой. Все автоморфизмы данной кривой образуют группу. Для любой кривой рода  $g > 1$  эта группа конечна. Группы автоморфизмов рациональной кривой и любой эллиптической кривой бесконечны. Следующая теорема описывает группу автоморфизмов рациональной кривой.

**Теорема 6.1.1.** Пусть  $z$  — произвольная координата на сфере Римана  $\mathbb{CP}^1$ . Всякий автоморфизм сферы Римана записывается в виде невырожденного дробно-линейного преобразования  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ .

**Доказательство.** Отображение сферы Римана в себя — это мероморфная функция на сфере Римана, а согласно теореме 3.7.1 любая такая функция является рациональной функцией  $f(z) = P(z)/Q(z)$ . Степень отображения  $f$  равна наибольшей из степеней многочленов  $P$  и  $Q$ . Действительно, пусть  $t$  равно наибольшей из степеней многочленов  $P$  и  $Q$ . Тогда для почти всех  $c$  полиномиальное уравнение  $P(z) = cQ(z)$  имеет степень  $t$ . Поэтому для почти всех  $c$  множе-

ство  $f^{-1}(c)$  состоит из  $m$  точек, а значит, степень отображения  $f$  равна  $m$ . Автоморфизмом кривой может быть только отображение степени 1, поэтому любой автоморфизм  $f$  является дробно-линейным преобразованием. Оно должно быть невырожденным, поскольку вырожденное дробно-линейное преобразование — это константа.  $\square$

**Следствие 6.1.2.** *Группа автоморфизмов рациональной кривой — это проективная группа  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  комплексных  $(2 \times 2)$ -матриц с определителем 1.*

Группа  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  — это факторгруппа группы  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  комплексных  $(2 \times 2)$ -матриц с определителем 1 по нормальной подгруппе, состоящей из матриц  $I$  и  $-I$ , где  $I$  — единичная матрица. В частности, группа автоморфизмов рациональной кривой — трехмерная комплексная группа Ли.

**Доказательство.** Действительно, сопоставим каждому дробно-линейному преобразованию  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  матрицу  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . То, что композиция двух дробно-линейных преобразований соответствует произведению матриц, проверяется прямым вычислением. Два невырожденных дробно-линейных преобразования задают один и тот же автоморфизм проективной прямой в том и только в том случае, если числитель и знаменатель второго преобразования получаются из числителя и знаменателя первого умножением на одну и ту же константу. Умножив числитель и знаменатель данного дробно-линейного преобразования на подходящее число, мы можем добиться, чтобы определитель соответствующей ему матрицы стал равным 1. При этом одновременное умножение числителя и знаменателя на  $-1$  не меняет преобразования, что и вызывает необходимость факторизовать группу матриц с определителем 1 по подгруппе скалярных матриц в ней. Следствие доказано.  $\square$

## § 6.2. Отображения эллиптических кривых

Пусть  $L$  и  $M$  — две решетки в  $\mathbb{C}$ , и пусть  $X = \mathbb{C}/L$  и  $Y = \mathbb{C}/M$  — соответствующие им эллиптические кривые. Выясним, как устроено произвольное (непостоянное) голоморфное отображение  $f: X \rightarrow Y$ . Отображение  $z \mapsto z + a$  индуцирует автоморфизм кривой  $Y$ ; после композиции с таким автоморфизмом можно считать, что  $f(0) = 0$ .

Из формулы Римана—Гурвица следует, что голоморфное отображение двух торов не имеет точек ветвления, поэтому  $f: X \rightarrow Y$  — накрытие. Отображение  $\mathbb{C} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} Y$ , где  $p: \mathbb{C} \rightarrow X$  — естественная



проекция, тоже является накрытием. Пространство  $\mathbb{C}$  односвязно, поэтому полученное накрытие изоморфно накрытию  $q: \mathbb{C} \rightarrow Y$  (оба эти накрытия изоморфны универсальному накрытию над  $Y$ ). Таким образом, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Отображение  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфно, причем из равенства  $f(0) = 0$  следует, что  $F(0)$  — точка решетки  $L$ . Можно считать, что  $F(0) = 0$ , поскольку сдвиг на элемент решетки  $L$  не изменяет отображение  $\mathbb{C} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} Y$ .

При отображении  $F$  множество  $p^{-1}(0)$  отображается в  $q^{-1}(0)$ , поэтому  $F(L) \subset M$ .

Если  $l \in L$ , а  $z$  — произвольное комплексное число, то  $F(z + l) \equiv F(z) \pmod{M}$ , т. е.  $F(z + l) - F(z) = w_l(z) \in M$ . Множество  $M$  дискретно, а множество  $\mathbb{C}$  связно, поэтому функция  $w_l$  постоянна, т. е.  $w_l(z)$  зависит только от  $l$ . Следовательно,  $\frac{dF(z+l)}{dz} - \frac{dF(z)}{dz} = 0$ , т. е. функция  $\frac{dF(z)}{dz}$  инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки  $L$ . Таким образом, множество всех значений функции  $\frac{dF(z)}{dz}$  совпадает с множеством ее значений на фундаментальном параллелограмме решетки  $L$ . Следовательно, эта функция постоянна, потому что любая ограниченная голоморфная функция постоянна. Учитывая, что  $F(0) = 0$ , получаем  $F(z) = cz$ . Константа  $c$  должна обладать тем свойством, что  $cL \subset M$ .

В итоге мы получаем, что любое голоморфное отображение эллиптических кривых индуцировано отображением  $F(z) = cz + a$ , где  $cL \subset M$ . Используя это свойство, можно описать группу автоморфизмов эллиптической кривой, оставляющих неподвижной точку 0.

**Теорема 6.2.1.** *Группа автоморфизмов (сохраняющих точку 0) эллиптической кривой  $X = \mathbb{C}/L$  — циклическая группа порядка 4, если решетка квадратная, порядка 6, если решетка состоит из правильных треугольников, порядка 2 во всех остальных случаях.*

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что автоморфизму эллиптической кривой соответствует такое отображение  $F(z) = cz$ , что  $cL = L$ . Действительно, если  $cL = L$ , то  $c^{-1}L = L$ , поэтому отображение

$z \mapsto c^{-1}z$  индуцирует обратное отображение. Наоборот, если отображение  $z \mapsto c_1 c_2 z$  индуцирует тождественное отображение тора, то  $c_1 c_2 = 1$  (для доказательства достаточно рассмотреть малые  $z$ ). Поэтому из включений  $c_1 L \subset L$  и  $c_2 L \subset L$  следует, что  $L \subset c_2^{-1} L = c_1 L \subset L$ .

При преобразовании  $z \mapsto cz$  площадь фундаментального параллелограмма решетки умножается на  $|c|^2$ , поэтому  $|c| = 1$ . Более того,  $c$  — корень из единицы. Действительно, иначе концы векторов  $1, c, c^2, c^3, \dots$  образовывали бы всюду плотное множество точек окружности, а все эти векторы являются векторами решетки. У любой эллиптической кривой есть автоморфизмы, соответствующие  $c = \pm 1$ . Выясним, для каких эллиптических кривых есть другие автоморфизмы. Прежде всего заметим, что число  $c$  должно быть корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Действительно, если векторы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  порождают решетку, то  $c\omega_1 = p\omega_1 + q\omega_2$  и  $c\omega_2 = r\omega_1 + s\omega_2$ , поэтому  $c$  — корень квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} p-x & q \\ r & s-x \end{vmatrix} = 0.$$

Многочлен  $x^n - 1$  раскладывается в произведение неприводимых круговых многочленов  $\Phi_d(x)$ , где  $d$  пробегает все делители числа  $n$ ; при этом степень многочлена  $\Phi_d(x)$  равна  $\varphi(d)$ , где  $\varphi$  — функция Эйлера, т. е.  $\varphi(d)$  есть число натуральных чисел, меньших  $d$ , и взаимно простых с ним (доказательство можно найти, например, в [16]). Квадратные неприводимые круговые многочлены — это  $x^2 + x + 1$  и  $x^2 + 1$ . В первом случае получаем решетку, состоящую из правильных треугольников, так как  $x^3 = 1$ , а во втором — квадратную решетку.  $\square$

**Следствие 6.2.2.** *Существуют неизоморфные эллиптические кривые.*

Действительно, группы автоморфизмов изоморфных кривых изоморфны, а мы привели примеры эллиптических кривых с отмеченной точкой, группы автоморфизмов которых имеют разный порядок.

На всякой эллиптической кривой  $C$  существует мероморфная функция  $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  степени 2. Такая функция имеет 4 критических значения, т. е. 4 точки ветвления. Мы можем выбрать функцию таким образом, чтобы отмеченная точка на эллиптической кривой была ее критической точкой.

Автоморфизмы кривой  $C$  тесно связаны с автоморфизмами четверки критических значений функции. Самое симметричное распо-

ложение четырех точек на сфере — это помещение их в вершины правильного тетраэдра. Эллиптическая кривая, двукратно накрывающая  $\mathbb{CP}^1$  с таким набором точек ветвления, отвечает решетке правильных треугольников, и группа ее автоморфизмов — это  $\mathbb{Z}_6$ . Если (при подходящем выборе проективной координаты) точки ветвления расположены в вершинах квадрата на экваторе сферы, то накрывающая кривая отвечает квадратной решетке и группа ее автоморфизмов изоморфна  $\mathbb{Z}_4$ . Все остальные кривые не имеют симметрий, отличных от перестановки листов накрытия.

**Упражнение 6.2.3.** Докажите, что при факторизации эллиптической кривой по группе автоморфизмов, сохраняющих точку 0, в двух исключительных случаях получается сфера Римана, а во всех остальных — снова эллиптическая кривая.

### § 6.3. Модули эллиптических кривых

Доказанные в предыдущем параграфе свойства голоморфных отображений эллиптических кривых позволяют разобраться, как устроено пространство модулей эллиптических кривых. Прежде всего заметим, что любая эллиптическая кривая изоморфна эллиптической кривой, полученной при факторизации комплексных чисел по решетке  $L_\tau$ , порожденной числами 1 и  $\tau$ , где  $\text{Im } \tau > 0$ . Действительно, если решетка  $L$  порождена числами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то отображение  $z \mapsto cz$ , где  $c = \pm 1/\omega_1$ , переводит решетку  $L$  в решетку, порожденную числами 1 и  $\omega_2/\omega_1$ . В качестве  $\tau$  можно взять то из чисел  $\pm \omega_2/\omega_1$ , мнимая часть которого положительна.

Выясним теперь, когда эллиптические кривые, соответствующие параметрам  $\tau$  и  $\tau'$ , изоморфны. Для этого должно существовать такое число  $c$ , что  $cL_\tau = L_{\tau'}$ , т. е. числа  $c$  и  $c\tau$  порождают решетку  $L_{\tau'}$ . Следовательно,  $c = p + q\tau'$  и  $c\tau = r + s\tau'$ , где  $p, q, r, s$ , — целые числа. Таким образом,  $\tau = \frac{r + s\tau'}{p + q\tau'}$ . Пока мы воспользовались только тем, что числа  $c$  и  $c\tau$  принадлежат решетке  $L_{\tau'}$ . Они порождают ее тогда и только тогда, когда  $qr - ps = \pm 1$ . Учитывая, что  $\text{Im } \tau > 0$  и  $\text{Im } \tau' > 0$ , получаем  $qr - ps = 1$ . Таким образом, эллиптические кривые, соответствующие параметрам  $\tau$  и  $\tau'$ , изоморфны тогда и только тогда, когда эти параметры связаны дробно-линейным преобразованием  $\tau = \frac{r + s\tau'}{p + q\tau'}$ , где  $\begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix}$  — целочисленная матрица с определителем 1.

Группу матриц размером  $2 \times 2$  с целочисленными элементами и определителем 1 обозначают  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Любым двум пропорциональ-

ным матрицам (и только им) соответствует одно и то же дробно-линейное преобразование. Поэтому рассматриваемая группа преобразований изоморфна факторгруппе  $SL(2, \mathbb{Z}) / \pm I = PSL(2, \mathbb{Z})$ ; здесь  $I$  — единичная матрица.

**Упражнение 6.3.1.** Проверьте, что подгруппа  $\pm I$  в группе  $SL(2, \mathbb{Z})$  нормальна.

Группу  $PSL(2, \mathbb{Z})$  называют *модулярной группой*.

**Теорема 6.3.2.** Треугольник  $D$  с углами  $(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ , изображенный на рис. 6.1, является фундаментальной областью модулярной группы.

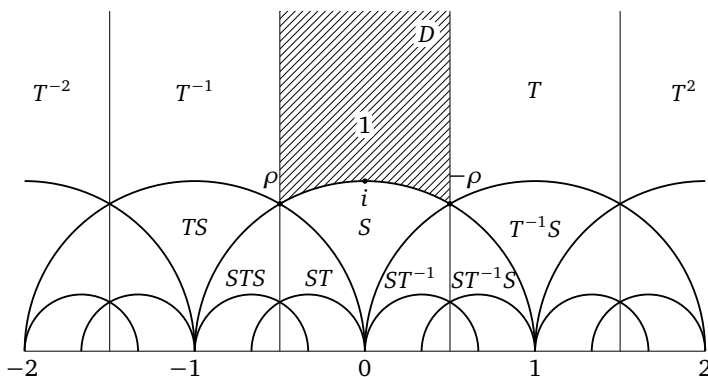


Рис. 6.1. Фундаментальная область модулярной группы и ее образы под действием элементов группы

**Доказательство.** Рассмотрим в группе  $G = PSL(2, \mathbb{Z})$  элементы  $S(z) = -1/z$  и  $T(z) = z + 1$ . Они порождают некоторую подгруппу  $G' \subset G$ . Мы докажем сначала, что  $D$  — фундаментальная область группы  $G'$ , а затем докажем, что  $G' = G$ , т. е. элементы  $S$  и  $T$  порождают всю группу  $G$ .

Прежде всего проверим, что треугольники  $g'D$  ( $g' \in G'$ ) покрывают всю верхнюю полуплоскость, т. е. если  $\text{Im}(z) > 0$ , то  $g'z \in D$  для некоторого  $g' \in G'$ .

**Лемма 6.3.3.** Если  $\text{Im}(z) > 0$ , то при  $g \in G$  величина  $\text{Im}(gz)$  принимает лишь конечное число значений, превосходящих  $\text{Im}(z)$ .

**Доказательство.** Ясно, что

$$\text{Im}(gz) = \text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \text{Im} \frac{adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}.$$

Поэтому  $\text{Im}(gz) \geq \text{Im}(z)$  лишь в том случае, когда  $|cz+d| \leq 1$ . Последнее неравенство выполняется лишь для конечного множества пар

целых чисел  $(c, d)$ , причем для каждой такой пары величина  $\text{Im}(gz)$  определена однозначно.  $\square$

Группа  $G'$  содержится в  $G$ , поэтому для любой точки  $z$  в верхней полуплоскости можно выбрать элемент  $g' \in G'$ , для которого величина  $\text{Im}(g'z)$  максимальна. Преобразование  $T(z) = z + 1$  не изменяет мнимую часть числа  $z$ , поэтому для некоторого элемента  $w = T^k g'z$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , выполняется неравенство  $|\text{Re}(w)| \leq 1/2$ , а величина  $\text{Im}(w)$  попрежнему максимальна. В частности,

$$\text{Im}(w) \geq \text{Im}\left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{\text{Im}(w)}{|w|^2}.$$

Поэтому  $|w| \geq 1$ , а значит,  $w \in D$ .

**Лемма 6.3.4.** Если  $z$  — внутренняя точка области  $D$  и  $gz \in D$  для  $g \in G$ , то  $g$  — тождественное преобразование.

**Доказательство.** Пусть  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Рассмотрим сначала случай  $c=0$ . В этом случае  $ad=1$ , т. е.  $g(z) = z \pm b$ . Если  $b \neq 0$ , то лишь для преобразований  $g(z) = z \pm 1$  образ множества  $D$  пересекается с множеством  $D$ . Но их пересечение принадлежит множеству  $|\text{Re}(z)| = 1/2$ , которое не содержит внутренних точек множества  $D$ .

Предположим теперь, что  $c \neq 0$ . Тогда

$$g(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)},$$

поэтому

$$\left|g(z) - \frac{a}{c}\right| \cdot \left|z + \frac{d}{c}\right| = \frac{1}{c^2}. \quad (6.1)$$

Числа  $a/c$  и  $d/c$  вещественны, поэтому мнимые части чисел  $g(z) - a/c$  и  $z + d/c$  равны мнимым частям чисел  $g(z)$  и  $z$ . А так как мнимая часть любой точки области  $D$  не меньше  $\sqrt{3}/2$ , то модули чисел  $g(z) - a/c$  и  $z + d/c$  тоже не меньше  $\sqrt{3}/2$ . Следовательно,  $|c| \leq 2/\sqrt{3}$ , причем  $c$  — ненулевое целое число. Таким образом,  $c = \pm 1$ , поэтому соотношение (6.1) можно записать в виде

$$|g(z) - a| \cdot |z + d| = 1.$$

Но если  $g(z) \in D$  и  $z$  — внутренняя точка области  $D$ , то для любых целых чисел  $a$  и  $d$  выполняются неравенства  $|g(z) - a| \geq 1$ ,  $|z + d| > 1$ .  $\square$

Из леммы 6.3.4, в частности, следует, что для несовпадающих элементов  $g'_1$  и  $g'_2$  группы  $G'$  множества  $g'_1 D$  и  $g'_2 D$  не имеют общих внутренних точек. Таким образом,  $D$  — фундаментальная область группы  $G'$ .

Теперь можно без труда доказать, что  $G = G'$ . В самом деле, пусть  $g$  — произвольный элемент группы  $G$ . Возьмем произвольную внутреннюю точку  $z$  области  $D$ . Точка  $gz$  лежит в верхней полуплоскости, поэтому существует элемент  $g' \in G'$ , для которого  $g'(gz) \in D$ . Преобразование  $g'g \in G$  переводит внутреннюю точку  $z$  области  $D$  в некоторую точку области  $D$ . Поэтому согласно лемме 6.3.4 преобразование  $g'g$  тождественно, т. е.  $g = (g')^{-1} \in G'$ .

Доказательство теоремы завершено.  $\square$

### § 6.4. Решетки и кубические кривые

Гладкая плоская алгебраическая кривая третьей степени (кубика) имеет род 1, поэтому естественно ожидать, что всякая кривая вида  $\mathbb{C}/\Lambda$ , где  $\Lambda$  — решетка, изоморфна некоторой кубике. В § 9.3 мы покажем, что любая гладкая кривая рода 1 задается уравнением  $y^2 = P_3(x)$ , т. е. является эллиптической кривой. Здесь мы опишем явно изоморфизм кривой  $\mathbb{C}/\Lambda$  на кубику, т. е. сопоставим каждой решетке некоторое уравнение третьей степени.

Предварительно выясним, к какому виду можно привести уравнение кубики. У каждой кубики есть точка перегиба (и даже 9 точек перегиба, см. § 3.3). Выберем координаты в плоскости таким образом, чтобы одна из точек перегиба имела однородные координаты  $(0 : 1 : 0)$ , причем касательная в этой точке задавалась уравнением  $z = 0$ . Тогда если кубика задается уравнением  $\sum a_{ij}x^i y^j z^{3-i-j} = 0$ , то многочлен  $a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$  имеет корень  $x = 0$  кратности 3. Следовательно,  $a_{21} = a_{12} = a_{03} = 0$  и  $a_{30} \neq 0$ . Касательная в точке  $(0 : 1 : 0)$  задается уравнением  $F_x x + F_y y + F_z z = 0$ , где значения производных берутся в точке  $(0 : 1 : 0)$ ; следовательно,  $F_x x = 0$ ,  $F_y y = 0$  и  $F_z z \neq 0$ . Можно считать, что  $F_z z(0, 1, 0) = 1$ . Таким образом, в аффинных координатах кривая задается уравнением  $y^2 - 2(ax + b)y + P_3(x) = 0$ , где  $P_3$  — многочлен 3-й степени. Заменой  $y_1 = y - ax - b$  это уравнение можно привести к виду  $y^2 = Q_3(x)$ , где  $Q_3$  — многочлен 3-й степени, не имеющий кратных корней (иначе кривая имела бы особую точку). Итак, после замены переменных можно считать, что кривая задана уравнением  $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ , где число  $\lambda$  отлично от 0 и 1. Сделав замену  $x = x_1 + \frac{1+\lambda}{3}$ , можно также считать, что кривая задана уравнением  $y^2 = x^3 + ax + b$ , где  $a = \frac{-\lambda^2 + \lambda - 1}{3}$  и  $b = \frac{-2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 2}{27}$ . При этом  $4a^3 + 27b^2 = -\lambda^2(1 - \lambda)^2 \neq 0$ .

Для любой решетки

$$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im} \omega_1/\omega_2 > 0,$$

можно рассмотреть функцию

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left[ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right], \quad (6.2)$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по всем ненулевым элементам  $\omega \in \Lambda$ . Группировка членов в квадратных скобках существенна, потому что по отдельности ряды  $\sum' (z-\omega)^{-2}$  и  $\sum' \omega^{-2}$  расходятся.

Докажем сначала, что ряд (6.2) определяет мероморфную функцию на комплексной прямой  $\mathbb{C}$ . На любом компакте  $K$ , не содержащем точек решетки, этот ряд сходится равномерно и абсолютно. В самом деле,

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2} = \frac{\omega}{\omega^4} \frac{2z - z^2\omega^{-1}}{(z\omega^{-1} - 1)^2}.$$

Если число  $|\omega|$  достаточно велико, то  $\frac{2z - z^2\omega^{-1}}{(z\omega^{-1} - 1)^2} \approx 2z$ . Поэтому для всех  $\omega \in \Lambda'$  с достаточно большим значением  $|\omega|$  и для всех  $z \in K$  найдется такая константа  $C$ , что

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| < \frac{C}{|\omega|^3}.$$

Кроме того,  $|z-\omega| > \varepsilon$  для всех  $z \in K$  и  $\omega \in \Lambda'$ , поэтому такая константа найдется и для всех  $\omega \in \Lambda'$ . Легко проверить, что ряд  $\sum' |\omega|^{-3}$  сходится. В самом деле,

$$\sum' |\omega|^{-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\max(|p|, |q|)=n} |p\omega_1 + q\omega_2|^{-3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 8n (nh)^{-3},$$

где  $h$  — меньшая из высот фундаментального параллелограмма. Таким образом,  $\wp_\Lambda(z)$  — мероморфная функция с полюсами в узлах решетки  $\Lambda$ . Она называется *функцией Вейерштрасса*.

Перейдем к доказательству периодичности функции  $\wp_\Lambda(z)$ . Рассмотрим для этого ее производную

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \sum (z-\omega)^{-3}$$

(здесь суммирование ведется уже по всем узлам решетки). Очевидно, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — периоды функции  $\wp'_\Lambda(z)$ . Поэтому функции  $\wp_\Lambda(z + \omega_i)$  и  $\wp_\Lambda(z)$  могут отличаться лишь на константу  $c$ . Подставив

значение  $z = -\omega_i/2$  в равенство  $\wp_\Lambda(z + \omega_i) = \wp_\Lambda(z) + c$ , получим  $\wp_\Lambda(\omega_i/2) = \wp_\Lambda(-\omega_i/2) + c$ . Но из формулы (3.1) видно, что функция  $\wp_\Lambda(z)$  четная. Поэтому  $c = 0$ , т. е.  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — периоды функции  $\wp_\Lambda(z)$ .

Функция  $\wp_\Lambda$  имеет в узлах решетки двукратные полюсы, других особых точек у нее нет. Внутри фундаментального параллелограмма расположен ровно один узел решетки. Поэтому сумма полюсов функции  $\wp_\Lambda$ , расположенных внутри фундаментального параллелограмма, сравнима с нулем по модулю  $\Lambda$ . Следовательно, внутри фундаментального параллелограмма расположены два нуля  $u$  и  $v$  функции  $\wp_\Lambda$ , причем  $u + v \equiv 0 \pmod{\Lambda}$ . Для любой константы  $c$  полюсы функции  $\wp_\Lambda(z) - c$  совпадают с полюсами функции  $\wp_\Lambda(z)$ , поэтому внутри фундаментального параллелограмма есть ровно две точки  $u$  и  $v$ , для которых  $\wp_\Lambda(u) = \wp_\Lambda(v) = c$ , причем  $u + v \equiv 0 \pmod{\Lambda}$ . В том случае, когда  $u \equiv -u \pmod{\Lambda}$ , эти две точки совпадают, т. е. соответствующее значение функция  $\wp_\Lambda$  принимает двукратно. В точках, в которых сливаются два нуля функции  $\wp_\Lambda(z) - c$ , производная  $\wp'_\Lambda(z)$  обращается в нуль. Фундаментальный параллелограмм можно выбрать так, чтобы внутри него лежали ровно четыре точки, для которых  $u \equiv -u \pmod{\Lambda}$ , а именно точки

$$0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2} \text{ и } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Первая из этих точек — полюс функции  $\wp_\Lambda$ , а три другие — нули ее производной  $\wp'_\Lambda$ . Итак, значения

$$e_1 = \wp_\Lambda\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp_\Lambda\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \quad \text{и} \quad e_3 = \wp_\Lambda\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$

для функции  $\wp_\Lambda$  двукратные, причем других двукратных значений нет. Двукратные значения соответствуют нулям производной, поэтому  $\wp'_\Lambda(z) = 0$  тогда и только тогда, когда

$$z \equiv \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pmod{\Lambda}.$$

Отметим, что числа  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$  попарно различны. Действительно, предположим, например, что  $e_1 = e_3$ . Тогда функция  $\wp_\Lambda(z) - e_1$  имеет двукратные нули в точках  $\omega_1/2$  и  $\omega_2/2$ , т. е. внутри фундаментального параллелограмма расположено не менее четырех нулей этой функции, чего не может быть.

Выведем дифференциальное уравнение для функции  $\wp_\Lambda(z)$ . Если коэффициенты при неположительных степенях  $z$  в разложениях Лорана функций  $(\wp'_\Lambda(z))^2$  и  $a\wp_\Lambda^3(z) + b\wp_\Lambda^2(z) + c\wp_\Lambda(z) + d$  совпадают,



то эти функции равны. В самом деле, их разность — эллиптическая функция без полюсов, в нуле принимающая нулевое значение. Следовательно, их разность — константа, причем нулевая.

Поскольку

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots,$$

имеем

$$\begin{aligned}\wp_{\Lambda}(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum' \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum' \left( \frac{1}{\omega^2} \left( 1 + 2\frac{z}{\omega} + 3\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 + \dots \right) - \frac{1}{\omega^2} \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots,\end{aligned}$$

где  $G_k = \sum' \omega^{-k}$  (для нечетных  $k$  эта сумма равна нулю в силу симметрии). Поэтому

$$\begin{aligned}\wp_{\Lambda}(z) &= z^{-2} + \dots, \\ \wp_{\Lambda}^2(z) &= z^{-4} + 6G_4 + \dots, \\ \wp_{\Lambda}^3(z) &= z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \dots, \\ (\wp'_{\Lambda}(z))^2 &= 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \dots\end{aligned}$$

(записаны лишь интересующие нас члены разложения Лорана). Таким образом,

$$\begin{aligned}a\wp_{\Lambda}^3(z) + b\wp_{\Lambda}^2(z) + c\wp_{\Lambda}(z) + d &= \\ = az^{-6} + bz^{-4} + (9aG_4 + c)z^{-2} + (15aG_6 + 6bG_4 + d) + \dots\end{aligned}\quad (6.3)$$

Следовательно,  $a\wp_{\Lambda}^3 + b\wp_{\Lambda}^2 + c\wp_{\Lambda} + d = (\wp'_{\Lambda})^2$ , если

$$\begin{cases} a = 4, \\ b = 0, \\ 9aG_4 + c = -24G_4, \\ 15aG_6 + 6bG_4 + d = -80G_6. \end{cases}$$

Полученная система уравнений, очевидно, имеет решение

$$\begin{cases} a = 4, \\ b = 0, \\ c = -60G_4, \\ d = -140G_6. \end{cases}$$

Для упрощения формул обычно полагают

$$g_2 = 60G_4 = 60\sum' \omega^{-4},$$

$$g_3 = 140G_6 = 140\sum' \omega^{-6}.$$

Тогда

$$(\wp'_\Lambda(z))^2 = 4\wp_\Lambda^3(z) - g_2\wp_\Lambda(z) - g_3.$$

Кубическую кривую

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

можно параметризовать с помощью функции  $\wp_\Lambda$ , положив

$$x = \wp_\Lambda(z), \quad y = \wp'_\Lambda(z).$$

Переходя к однородным координатам в  $\mathbb{CP}^2$ , отображение  $f: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{CP}^2$  определим следующим образом:

$$\begin{aligned} z &\mapsto (\wp_\Lambda(z) : \wp'_\Lambda(z) : 1) && \text{при } z \neq 0, \\ z &\mapsto (0 : 1 : 0) && \text{при } z = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что это отображение аналитично во всех точках, отличных от узлов решетки. Записав его в виде

$$z \mapsto \left( \frac{\wp_\Lambda(z)}{\wp'_\Lambda(z)} : 1 : \frac{1}{\wp'_\Lambda(z)} \right),$$

можно убедиться, что оно аналитично и в окрестности узла решетки. Отображение  $f$  взаимно однозначно отображает тор  $\mathbb{C}/\Lambda$  на кубическую кривую

$$y^2z = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$$

в  $\mathbb{CP}^2$ . В самом деле, на бесконечно удаленной прямой  $z = 0$  лежит лишь точка  $(0 : 1 : 0)$  этой кривой. В нее отображаются узлы решетки — им на торе соответствует одна точка. Для остальных точек можно рассмотреть аффинную кривую

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

и отображение  $z \mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z))$ . Уравнение  $\wp_\Lambda(z) = c$  может иметь одно или два решения. Два решения оно имеет в том случае, когда  $\wp'_\Lambda(z) \neq 0$ . Решения при этом имеют вид  $\pm z$ . Образы этих двух точек при отображении  $z \mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z))$  не совпадают, так как ненулевые числа  $\wp'_\Lambda(z)$  и  $\wp'_\Lambda(-z) = -\wp'_\Lambda(z)$  отличаются знаком.

### §6.5. Снова $j$ -инвариант

Напомним, что на с. 54 для кубики  $C$ , заданной уравнением  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ , мы геометрически определили  $j$ -инвариант

$$j(C) = j(\lambda) = 2^8 \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Используя соответствие между плоскими кубическими кривыми и решетками, мы можем сопоставить  $j$ -инвариант каждой решетке.

Покажем, что  $j$ -инвариант выражается через функции  $g_2$  и  $g_3$ , введенные в предыдущем параграфе. Для этого сделаем сначала замену  $x = x' + \frac{\lambda+1}{3}$ , которая переводит кривую  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$  в кривую  $y^2 = x'^3 + ax' + b$ , где  $a = \frac{-\lambda^2 + \lambda - 1}{3}$  и  $b = \frac{-2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 2}{27}$ , после чего сделаем замену  $x' = \sqrt[3]{4}x''$ , получив в результате кривую  $y^2 = 4x''^3 - g_2x'' - g_3$ , где  $g_2 = -\sqrt[3]{4}a$  и  $g_3 = -b$ . Таким образом,

$$j(C) = j(\lambda) = 2^8 \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda^2)} = \frac{1728 \cdot 4a^3}{4a^3 + 27b^2} = \frac{1728g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2},$$

и мы выразили  $j$ -инвариант через  $g_2$  и  $g_3$ .

Функции  $g_2$  и  $g_3$  являются так называемыми модулярными функциями, причем все остальные модулярные функции алгебраически выражаются через них. Прежде чем давать общее определение модулярной функции, напомним, что  $g_2$  и  $g_3$  — это следующие функции решетки  $\Lambda$ :  $g_2 = 60G_4$  и  $g_3 = 140G_6$ , где  $G_{2k}(\Lambda) = \sum'_{\omega \in \Lambda} \omega^{-2k}$ . Будем говорить, что  $F$  — функция веса  $2k$  (определенная на решетках), если  $F(\mu\Lambda) = \mu^{-2k}F(\Lambda)$  для любой решетки  $\Lambda$  и любого комплексного числа  $\mu \neq 0$ . В частности,  $G_{2k}$  — это функция веса  $2k$ .

Пусть  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  — положительно ориентированный базис решетки  $\Lambda$ . Функцию  $F(\Lambda)$  можно рассматривать и как функцию пары  $F(\omega_1, \omega_2)$ . Тогда условие, что вес функции  $F$  равен  $2k$ , приобретает вид  $F(\mu\omega_1, \mu\omega_2) = \mu^{-2k}F(\omega_1, \omega_2)$ . Для такой функции

$$\omega_2^{2k}F(\omega_1, \omega_2) = F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\omega_2}{\omega_2}\right) = F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, 1\right) = f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right),$$

где  $f$  — некоторая функция на верхней полуплоскости  $H$ .

Функция  $f$  зависит только от решетки и не зависит от выбора базиса этой решетки, поэтому для любой матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

должно выполняться равенство

$$\omega_2^{2k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = (c\omega_1 + d\omega_2)^{2k} f\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right),$$

т. е.  $f(z) = (cz + d)^{2k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$ , где  $z = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ . Такую мероморфную функцию  $f$  на верхней полуплоскости будем называть *слабомодулярной*. Слабомодулярная функция *модулярна*, если она дополнительно удовлетворяет следующему условию мероморфности на бесконечности. Функцию  $f$  от переменной  $z \in H$  можно рассматривать как функцию  $\tilde{f}$  от переменной  $q = e^{2\pi iz}$ . Функция  $\tilde{f}$  определена всюду, кроме нуля. Если ее можно доопределить в нуле так, что получится мероморфная в нуле функция, то будем говорить, что исходная функция  $f$  мероморфна на бесконечности.

Пусть  $v_p(f)$  — порядок функции  $f$  в точке  $p$  (если в точке  $p$  полюс, то порядок отрицательный, если нуль, то порядок положительный, а если  $f$  отлична от нуля в точке  $p$ , то порядок равен нулю). Определим также порядок функции  $f$  в бесконечности следующим образом. Пусть  $\tilde{f}(q) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n q^n$ , причем  $c_{-N} \neq 0$ . Тогда мы полагаем  $v_{\infty}(f) = -N$ .

**Теорема 6.5.1.** Для любой модулярной функции  $f$  веса  $2k$  имеет место равенство

$$v_{\infty}(f) + \frac{1}{3}v_{\rho}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \sum_p v_p(f) = \frac{k}{6},$$

где  $\rho = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ , а суммирование ведется по всем точкам  $p$  фундаментальной области, причем эквивалентные точки на границе отождествляются.

**Доказательство.** Рассмотрим замкнутый контур  $C$ , изображенный на рис. 6.2. Если в точках  $\rho$  или  $i$  есть нули или полюсы функ-

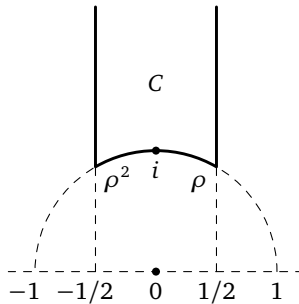


Рис. 6.2. Контур  $C$

ции  $f$ , то мы обходим их по дугам окружностей; если на вертикальной границе контура есть нуль или полюс, то мы вырезаем полукруг и добавляем соответствующий полукруг на параллельной границе (для нулей и полюсов на дуге единичной окружности поступаем аналогично).

Вычислим интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df(z)}{f(z)}$  по контуру  $C$  двумя способами. С одной стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df(z)}{f(z)} = \sum \operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{p \neq i, \rho} v_p(f).$$

С другой стороны, этот интеграл можно вычислить непосредственно, чем мы сейчас и займемся.

При замене  $z$  на  $e^{2\pi iz}$  верхний отрезок переходит в окружность с центром в начале координат, которая обходится по часовой стрелке, поэтому интеграл по верхнему отрезку равен  $-v_\infty(f)$ . Интегралы по вертикальным сторонам взаимно уничтожаются, поскольку  $f(z+1) = f(z)$ .

Пусть  $f(z-i) = c(z-i)^m + \dots$ , где  $m = v_i(f)$ . Тогда

$$\frac{f'(z-i)}{f(z-i)} = \frac{m}{z-i} + \dots,$$

поэтому интеграл по малой окружности с центром  $i$ , которая обходится по часовой стрелке, от функции  $f'/f$  равен  $-v_i(f)$ . Следовательно, интеграл по половине этой окружности равен  $-\frac{1}{2}v_i(f)$ .

Аналогично интегралы по дугам окружностей с центрами в точках  $\frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}$  в сумме дают  $-\frac{1}{3}v_\rho(f)$ , поскольку при уменьшении радиуса каждая из этих дуг стремится к  $1/6$  дуги окружности.

Наконец, самая трудная часть вычислений — вычисление интеграла по дуге единичной окружности. Мы воспользуемся тем, что преобразование  $z \mapsto 1/z$  переводит одну половину дуги в другую, изменяя при этом ориентацию. Ясно, что

$$df\left(-\frac{1}{z}\right) = d(z^{2k}f(z)) = z^{2k}df(z) + 2kz^{2k-1}f(z)dz.$$

Поэтому

$$\frac{df\left(-\frac{1}{z}\right)}{f\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^{2k}df(z)}{z^{2k}f(z)} + 2kz^{2k-1}\frac{f(z)dz}{z^{2k}f(z)} = \frac{df(z)}{f(z)} + 2k\frac{dz}{z}.$$

Таким образом, интегралы от  $df/f$  взаимно уничтожаются и остается интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int 2k \frac{dz}{z}$  по  $\frac{1}{12}$  части окружности, обходимой против часовой стрелки. В итоге получаем

$$\sum v_p(f) = -v_\infty(f) - \frac{1}{3}v_\rho(f) - \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{k}{6},$$

что и требовалось.  $\square$

Функции

$$g_2(z) = 60 \sum' \frac{1}{(nz+m)^4}; \quad g_4(z) = \sum' \frac{1}{(nz+m)^6}$$

являются модулярными функциями веса 4 и 6 соответственно. Эти функции голоморфны не только на всей верхней полуплоскости, но и в бесконечности. Действительно, слагаемые с  $n \neq 0$  при  $z \rightarrow \infty$  обращаются в нуль, поэтому

$$g_2(\infty) = 60 \sum' \frac{1}{m^4} = 120 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{4}{3}\pi^4$$

и

$$g_3(\infty) = 280 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} = \frac{8}{27}\pi^6.$$

Теорема 6.5.1 позволяет найти нули функций  $g_2$  и  $g_3$ . Для функции  $g_2$  получаем разложение  $\frac{2}{6} = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{3}$ , где  $n, n_1$  и  $n_2$  — целые неотрицательные числа. Отсюда следует, что  $n = n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$ , т. е. функция  $g_2$  имеет простой нуль в точке  $\rho$  и не имеет других нулей. Для функции  $g_3$  получаем разложение  $\frac{3}{6} = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{3}$ . Поэтому  $n = n_2 = 0$ , а  $n_1 = 1$ , т. е. функция  $g_3$  имеет простой нуль в точке  $i$  и не имеет других нулей.

**Теорема 6.5.2.** *Пространство модулей эллиптических кривых изоморфно сфере Римана, причем этот изоморфизм задается  $j$ -инвариантом.*

**Доказательство.** Функция  $j = \frac{1728g_2^3}{g_3^3 - 27g_2^2}$  является модулярной функцией веса 0, поскольку и числитель, и знаменатель являются модулярными функциями веса 12. Знаменатель  $\Delta = g_3^3 - 27g_2^2$  обращается в нуль на бесконечности, поскольку  $g_2(\infty) = \frac{4}{3}\pi^4$  и  $g_3(\infty) = \frac{8}{27}\pi^6$ . Ясно, что  $\Delta$  не обращается в нуль в точках  $i$  и  $\rho$ . Функция  $\Delta$  голоморфна на верхней полуплоскости и  $v_\infty(\Delta) \geq 1$ , поэтому из теоремы 6.5.1 следует, что  $v_\infty(\Delta) = 1$  и  $v_p(\Delta) = 0$  при  $p \neq \infty$ , т. е. функция  $\Delta$

не обращается в нуль на всей верхней полуплоскости. Учитывая, что  $g_2(\infty) \neq 0$ , получаем, что  $j$  имеет простой полюс на бесконечности.

Докажем теперь, что для каждого  $\lambda$  уравнение  $j(z) = \lambda$  имеет единственное решение. Это уравнение эквивалентно уравнению  $1728g_3^2 - \lambda\Delta = 0$ . Применим теорему 6.5.1 к голоморфной модулярной функции  $1728g_3^2 - \lambda\Delta$  веса 12. В результате получим соотношение вида  $1 = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{3}$ . Таким образом,  $(n, n_1, n_2)$  — это одна из троек  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$ . В каждом из этих случаев рассматриваемая функция имеет ровно один нуль.  $\square$

Для кривой  $C$ , заданной уравнением  $y^2 = x^3 + ax + b$ , где  $a = \frac{-\lambda^2 + \lambda - 1}{3}$  и  $b = \frac{-2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 2}{27}$ , получаем

$$j(C) = j(\lambda) = 2^8 \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2} = \frac{1728(4a^3)}{4a^3 + 27b^2}.$$

При  $a = 0$ , т. е.  $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ , получаем  $j(C) = 0$ . Когда  $\lambda = -1$ , получаем  $b = 0$  и  $j(C) = 1728$ .

Несложные вычисления показывают, как написать уравнение плоской кубики с данным  $j$ -инвариантом: если число  $j$  отлично от 0 и 1728, то для кривой

$$y^2 = x^3 - \frac{27}{4} \frac{j}{j - 1728} x - \frac{27}{4} \frac{j}{j - 1728}$$

значение  $j$ -инварианта равно  $j$ .

### § 6.6. Автоморфизмы эллиптических кривых и теорема Понселе

Воспользовавшись нашим знанием структуры автоморфизмов эллиптических кривых, докажем нижеследующую теорему Понселе.

Рассмотрим две плоские коники  $C_1$  и  $C_2$ . Выберем точку  $x_1 \in C_1$  и построим последовательность точек  $x_1, x_2, x_3, \dots$  коники  $C_1$  следующим образом: прямая  $x_1x_2$  касается коники  $C_2$ , прямая  $x_2x_3$  касается коники  $C_2$  и  $x_3 \neq x_1$  и т. д. (рис. 6.3). Теорема Понселе заключается в том, что

если  $x_{n+1} = x_1$  (т. е. отрезки касательных образуют замкнутую  $n$ -звенную ломаную) для некоторой начальной точки на конике  $C_1$ , то замкнутая  $n$ -звенная ломаная получается и при любом другом выборе точки  $x_1 \in C_1$ .

В вещественном случае касательную к конике можно провести не из любой точки, поэтому будем считать, что коники  $C_1$  и  $C_2$  располо-

жены в  $\mathbb{CP}^2$ . Будем также считать, что эти коники находятся в общем положении, т. е. они пересекаются в четырех различных точках.

Пусть  $C_2^\vee$  — двойственная коника к  $C_2$ , лежащая в двойственной проективной плоскости  $(\mathbb{CP}^2)^\vee$ . Чтобы доказать теорему Понселе, рассмотрим в  $C_1 \times C_2^\vee \subset \mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^\vee$  подмножество  $E$ , состоящее из таких пар  $(x, l)$ , что  $x \in l$ , т. е. точка  $x$  коники  $C_1$  лежит на касательной  $l$  к конике  $C_2$ . Прежде всего заметим, что это подмножество — эллиптическая кривая. Действительно, естественная проекция  $E \rightarrow C_1$  (так же как и проекция  $E \rightarrow C_2^\vee$ ) является разветвленным двулистным накрытием с 4 точками ветвления (точками ветвления являются точки пересечения коник  $C_1$  и  $C_2$ , поскольку две касательные проведенные из точки  $x \in C_1$  к конике  $C_2$ , сливаются, когда точка  $x$  лежит на конике  $C_2$ ). Поэтому из формулы Римана—Гурвица следует, что  $\chi(E) = 0$ .

На эллиптической кривой  $E$  есть две инволюции:  $(x_1, l) \leftrightarrow (x_2, l)$  и  $(x, l_1) \leftrightarrow (x, l_2)$  (обозначения те же, что и на рис. 6.3). Обозначим эти инволюции  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Из описания автоморфизмов эллиптической кривой следует, что инволюция  $\sigma$  эллиптической кривой имеет вид  $\sigma(x) = c - x$ , где  $c$  — некоторая константа. Таким образом,  $\sigma_1(x) = c_1 - x$  и  $\sigma_2(x) = c_2 - x$ . Рассмотрим композицию  $\tau$  инволюций  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . С одной стороны,  $\tau(x) = (c_1 - c_2) + x$ , т. е.  $\tau$  — это сдвиг. С другой стороны,  $\tau$  — это отображение  $(x_1, l_1) \rightarrow (x_2, l_1) \rightarrow (x_2, l_2)$ . Поэтому  $\tau^n(x_1, l_1) = (x_1, l_1)$ , т. е. отображение  $\tau^n$  имеет неподвижную точку. Но  $\tau^n$  — это тоже сдвиг, а сдвиг, имеющий неподвижную точку, тождествен.

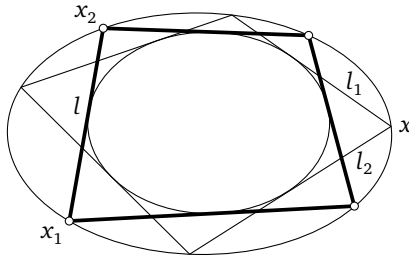


Рис. 6.3. Замкнутые 4-звенные ломаные, вписанные в конику и касающиеся внутренней коники

**Замечание 6.6.1.** При доказательстве теоремы Понселе мы воспользовались тем, что любая гладкая кривая рода 1 является эллиптической кривой (это доказано в § 9.3).



### § 6.7. Автоморфизмы кривых старших родов.

#### Теорема Гурвица

Пусть  $C$  — алгебраическая кривая,  $G$  — конечная подгруппа в группе  $\text{Aut}(C)$ . При факторизации кривой  $C$  по действию группы  $G$  получаем двумерную поверхность  $C' = C/G$ .

Естественная проекция  $p: C \rightarrow C'$  является разветвленным накрытием. Для почти всех точек  $x \in C$  орбита  $\{gx \mid g \in G\}$  состоит из  $|G|$  точек; для таких точек индекс ветвления равен 1. Для конечного числа точек  $x \in C$  группа  $G_x = \{g \mid gx = x\}$  (стабилизатор точки  $x$ ) нетривиальна. Орбита каждой такой точки  $x$  состоит из  $|G|/|G_x|$  точек; индекс ветвления каждой из точек этой орбиты равен  $|G_x|$ . Поэтому, применяя формулу Римана—Гурвица, получаем

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right);$$

здесь суммирование ведется по всем точкам  $x$  кривой  $C'$  (и вклад каждой точки, за исключением точек ветвления накрытия, равен 0). Через  $G_x$  обозначен стабилизатор прообраза такой точки. С помощью этой формулы мы докажем теоремы 6.7.1 и 6.7.8.

**Теорема 6.7.1** (Гурвиц). *Порядок конечной подгруппы  $G$  группы автоморфизмов кривой рода  $g \geq 2$  не превосходит  $84(g-1)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $g'$  — род топологической поверхности  $C' = C/G$ . Можно считать, что  $|G| > 1$ , поэтому  $g' < g$ . Рассмотрим отдельно три случая.

1. Пусть  $g' \geq 2$ . Тогда  $2g - 2 \geq 2|G|$ , т. е.  $|G| \leq g - 1$ . Тем самым если факторповерхность кривой данного рода  $g$  по действию конечной группы автоморфизмов имеет род  $g' \geq 2$ , то в этой группе автоморфизмов не больше  $g - 1$  элементов.

2. Пусть  $g' = 1$ . Тогда  $2g - 2 = |G| \sum \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)$ . Если точек ветвления нет, то  $2g - 2 = 0$ , т. е.  $g = 1$ , а согласно предположению  $g > 1$ . Если же ветвление есть, то в правой части мы имеем сумму слагаемых  $1 - \frac{1}{|G_x|}$ , каждое из которых не меньше  $\frac{1}{2}$ , поскольку  $|G_x| \geq 2$ . Следовательно,  $2g - 2 \geq \frac{|G|}{2}$ , т. е.  $|G| \leq 4(g - 1)$ . Другими словами, если факторповерхность кривой рода  $g \geq 2$  по действию группы автоморфизмов является тором, то в группе автоморфизмов не больше  $4(g - 1)$  элементов.

3. Пусть  $g' = 0$ . Тогда  $2g - 2 = |G| \left( \sum \left( 1 - \frac{1}{|G_x|} \right) - 2 \right)$ . Числа  $2g - 2$  и  $|G|$  положительны, а каждое из слагаемых  $1 - \frac{1}{|G_x|}$  строго меньше 1, поэтому таких слагаемых должно быть не меньше 3.

Если число слагаемых больше 4, то сумма  $\sum \left( 1 - \frac{1}{|G_x|} \right)$  не меньше  $\frac{5}{2}$ , поскольку каждое из слагаемых не меньше  $\frac{1}{2}$ . Следовательно,  $2(g - 1) \geq \frac{|G|}{2}$ , т. е.  $|G| \leq 4(g - 1)$ .

Если число слагаемых равно 4, то хотя бы одно из чисел  $|G_x|$  должно быть больше 2, поскольку иначе  $\sum \left( 1 - \frac{1}{|G_x|} \right) = 2$ . Следовательно,

$$2(g - 1) \geq |G| \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{1}{12} |G|,$$

т. е.  $|G| \leq 24(g - 1)$ . Тем самым если факторповерхность кривой рода  $g \geq 2$  по действию группы автоморфизмов является сферой, причем число точек ветвления накрытия факторизации равно 4, то в группе автоморфизмов не больше  $24(g - 1)$  элементов.

Остается рассмотреть случай, когда число слагаемых равно 3. Пусть три числа  $|G_x|$  равны  $a \leq b \leq c$ . Сумма  $\left( 1 - \frac{1}{a} \right) + \left( 1 - \frac{1}{b} \right) + \left( 1 - \frac{1}{c} \right)$  должна быть больше 2, поэтому  $c > 3$ ; более того,  $b \geq 3$ .

Если  $c \geq 7$ , то  $|G| \leq 84(g - 1)$ .

Если  $c = 6$  и  $a = 2$ , то  $b \geq 4$ , поэтому  $|G| \leq 24(g - 1)$ .

Если  $c = 6$  и  $a \geq 3$ , то  $|G| \leq 12(g - 1)$ .

Если  $c = 5$  и  $a = 2$ , то  $b \geq 4$ , поэтому  $|G| \leq 40(g - 1)$ .

Если  $c = 5$  и  $a \geq 3$ , то  $|G| \leq 15(g - 1)$ .

Если  $c = 4$  и  $a \geq 3$ , то  $|G| \leq 24(g - 1)$ .

Значение  $|G| = 84(g - 1)$  достигается только при  $a = 2, b = 3, c = 7$ . Таким образом, кривая рода  $g \geq 2$  может иметь группу автоморфизмов из  $84(g - 1)$  элементов только в том случае, если на ней существует мероморфная функция с ровно тремя критическими значениями, причем все прообразы каждого из этих критических значений являются критическими точками — кратности 2, 3 и 7 соответственно.

Все случаи разобраны, и тем самым доказательство завершено.  $\square$

**Замечание 6.7.2.** В действительности группа автоморфизмов кривой рода  $g \geq 2$  конечна, поэтому ее порядок не превосходит  $84(g - 1)$ . Но конечность группы автоморфизмов мы докажем позже, в § 11.4.

Пусть  $N > 1$  — натуральное число. Рассмотрим гомоморфизм группы  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  в группу  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_N)$ , сопоставляющий каждому эле-

менту матрицы его вычет по модулю  $N$ . Очевидно, что этот гомоморфизм является эпиморфизмом. Его ядро называется *главной конгруэнцподгруппой* уровня  $N$  и обозначается  $\Gamma(N)$ . Оно состоит из всех целочисленных  $2 \times 2$ -матриц, диагональные элементы которых сравнимы с 1 по модулю  $N$ , а внедиагональные делятся на  $N$  (рассматриваемых с точностью до умножения на  $-1$ ).

**Упражнение 6.7.3.** Докажите, что если  $N > 2$  — простое, то число элементов в группе  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}_N)$  равно  $N(N-1)(N+1)$ , а в группе  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_N)$  их вдвое меньше. В частности, количество элементов в группе  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_7)$  равно

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 8}{2} = 168.$$

**Упражнение 6.7.4.** Кривая Клейна задается на плоскости уравнением  $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$ .

а) Докажите, что эта кривая гладкая и что ее род равен 3.

б) Покажите, что результат факторизации верхней полуплоскости по группе  $\Gamma(7)$ , главной конгруэнцподгруппе уровня 7, биголоморфен кривой Клейна, проколотой в 24 точках.

в) Укажите 168 автоморфизмов кривой Клейна. В частности, проверьте, что она допускает автоморфизм порядка 7

$$(x : y : z) \rightarrow (x, \zeta^4 y, \zeta^5 z)$$

где  $\zeta$  — примитивный корень степени 7 из 1,  $\zeta^7 = 1$ .

Группа автоморфизмов кривой Клейна изоморфна  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_7) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})/\Gamma(7)$ . Ее порядок равен  $168 = 84 \cdot (3 - 1)$ . Кривая Клейна — первая кривая в ряду *кривых Гурвица*, т. е. таких кривых рода  $g \geq 2$ , группа автоморфизмов которых имеет порядок  $84(g - 1)$ . Такие кривые существуют не для всякого рода  $g$ , и следующая такая кривая встречается лишь для  $g = 7$  (она называется поверхностью Макбета). Однако существуют сколь угодно большие  $g$ , для которых имеются кривые Гурвица рода  $g$ . Вопрос о том, чему равен максимальный порядок группы автоморфизмов кривой данного рода  $g$ , исследован не до конца.

**Упражнение 6.7.5.** Докажите, что не существует кривой Гурвица рода  $g = 2$  и рода  $g = 4$ .

**Упражнение 6.7.6.** Вычислите порядок группы автоморфизмов *поверхности Больца* — наиболее симметричной кривой рода  $g = 2$ ; это гиперэллиптическая кривая, задаваемая уравнением

$$y^2 = x^5 - x.$$

**Упражнение 6.7.7.** Вычислите группу автоморфизмов кривой Ферма  $x^n + y^n + z^n = 0$ .

Пусть для действия конечной группы  $G$ , состоящей из автоморфизмов кривой  $C$ , есть  $k$  орбит с нетривиальными группами  $G_x$ , порядки которых равны  $r_1, \dots, r_k$ . Будем говорить, что это действие имеет тип  $\{r_1, \dots, r_k\}$ .

**Теорема 6.7.8.** Действие нетривиальной конечной подгруппы автоморфизмов  $G$  на сфере Римана имеет один из следующих типов:  $\{r, r\}$ ,  $\{2, 2, r\}$  (здесь  $r \geq 2$  — любое число),  $\{2, 3, 3\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$ .

**Доказательство.** Сфера Римана  $C = \mathbb{CP}^1$  имеет нулевой род, поэтому топологически факторкривая  $C/G$  — это сфера и ее эйлерова характеристика равна 2. Следовательно,  $2 = |G|(2 - R)$ , где  $R = \sum \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)$ . Поэтому для нетривиальной группы  $G$  получаем  $0 < R < 2$ ; в частности, есть точки ветвления, потому что  $R \neq 0$ . Пусть количество орбит с нетривиальными группами  $G_x$  равно  $k$ . Если  $k = 1$ , то  $0 < R < 1$ , поэтому  $2 > 2 - R > 1$  и число  $|G| = \frac{2}{2-R}$  не может быть целым. Следовательно,  $k \geq 2$ . С другой стороны, каждое из слагаемых, входящих в  $R$ , больше  $1/2$ , поэтому количество слагаемых не превосходит 3, т. е.  $k \leq 3$ .

При  $k = 2$  мы получаем две точки  $x_1$  и  $x_2$  с индексами ветвления  $r_1$  и  $r_2$ . Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — образы этих точек в  $C/G$ . На сфере с выколотыми точками  $y_1$  и  $y_2$  окружность, обходящая вокруг точки  $y_1$ , гомотопна окружности, обходящей вокруг точки  $y_2$ . Поэтому  $r_1 = r_2 = r$ .

Пусть теперь  $k = 3$  и  $R = \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(1 - \frac{1}{b}\right) + \left(1 - \frac{1}{c}\right)$ . Тогда  $|G| = \frac{2}{2-R}$ , где  $2 - R = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1$ . Пусть для определенности  $a \leq b \leq c$ . Если  $a \geq 3$ , то  $2 - R \leq 0$ . Следовательно,  $a = 2$  и  $2 - R = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2}$ . Поэтому  $b = 2$  или 3. При  $b = 2$  получаем  $|G| = 2c$ , а при  $b = 3$  получаем  $|G| = \frac{2}{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}$ . Следовательно,  $c = 3, 4$  или 5.  $\square$

**Замечание 6.7.9.** Действия всех указанных типов можно реализовать. Действие типа  $\{r, r\}$  реализуется поворотами вокруг некоторой оси на углы, кратные  $2\pi/r$ . Действие типа  $\{2, 2, r\}$  реализуется группой, порожденной поворотом на угол  $\pi$  вокруг некоторой оси и поворотами вокруг оси, перпендикулярной первой оси, на углы, кратные  $\pi/r$  (эту группу можно представлять себе как группу собственных движений сферы, оставляющих на месте правильный

$2r$ -угольник, вписанный в экваториальную окружность). Действия типа  $\{2, 3, 3\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$  и  $\{2, 3, 5\}$  реализуются собственными движениями сферы, оставляющими на месте правильный тетраэдр, куб (или октаэдр) и додекаэдр (или икосаэдр).

**Упражнение 6.7.10.** Вычислите порядки подгрупп автоморфизмов  $G$  указанных в теореме 6.7.8 типов. Проверьте, что группа автоморфизмов типа  $\{2, 3, 5\}$  изоморфна  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_5)$ .

## Глава 7

# Дифференциальные 1-формы на кривых

Основные свойства кривых и, более общим образом, произвольных комплексных многообразий удобно выражать в терминах различных связанных с ними объектов. В первую очередь речь идет о пространствах мероморфных функций, векторных полей и дифференциальных форм. Эти пространства наделены естественными алгебраическими структурами, что позволяет выражать свойства кривых в алгебраических терминах.

### § 7.1. Касательное и кокасательное расслоения

Риманова поверхность представляет собой одномерное комплексное многообразие. Над каждым — как вещественным, так и комплексным — многообразием есть естественные векторные расслоения. Для определенности ниже мы будем говорить о комплексных многообразиях, которые нас в первую очередь и интересуют. Прежде всего мы можем рассмотреть расслоение прямого произведения  $M \times \mathbb{C}$ , где  $M$  — наше многообразие. Проектирующее отображение расслоения — это проекция на первый сомножитель. Разумеется, можно рассматривать произведение многообразия и на векторное пространство большей размерности, однако эта конструкция нам пока не понадобится.

Еще два естественных векторных расслоения, которые имеются над любым многообразием, — это касательное и кокасательное расслоение. Напомним их определения.

*Касательный вектор* в точке  $t$  многообразия  $M$  можно определить следующими способами. Во-первых, его можно считать классом эквивалентности голоморфных отображений  $D \rightarrow M$  единичного диска  $D \subset \mathbb{C}$  в  $M$ , переводящих  $0$  в  $t$ . При этом два отображения  $\gamma_1, \gamma_2$  считаются эквивалентными, если расстояние  $\rho(\gamma_1(x), \gamma_2(x))$  стремится к нулю быстрее, чем  $x$ , при  $x \rightarrow 0$ ; это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \rho(\gamma_1(x), \gamma_2(x))/|x| = 0, \quad x \in D.$$

В этом определении  $\rho$  может быть произвольной метрикой, задающей ту же топологию, что и топология многообразия.

Другое определение более алгебраично, однако с ним легче работать. Согласно ему касательным вектором в точке  $t$  называется дифференцирование из кольца ростков в точке  $t$  в кольцо комплексных чисел. Дифференцирование — это линейное отображение колец  $\delta$ , удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g).$$

Из этого определения очевидно, например, что все касательные векторы в точке образуют векторное пространство. Размерность этого векторного пространства совпадает с размерностью многообразия. В частности, касательное пространство к кривой одномерно.

Двойственное к касательному векторному пространству называется кокасательным. Оно состоит из линейных функционалов на касательном пространстве — кокасательных векторов.

В произвольной локальной координате  $z$  на кривой касательный вектор записывается в виде  $a \frac{d}{dz}$ , а в произвольных локальных координатах  $z_1, \dots, z_n$  на многообразии размерности  $n$  — в виде  $a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial z_n}$ . Соответственно кокасательный вектор имеет координатное представление  $b dz$  или, в общем случае,  $b_1 dz_1 + \dots + b_n dz_n$ . Кокасательный вектор  $b dz$  действует на касательный вектор  $a \frac{d}{dz}$  по правилу

$$b dz : a \frac{d}{dz} \mapsto ab.$$

Совокупность касательных (соответственно кокасательных) пространств во всех точках многообразия является касательным (соответственно кокасательным) расслоением над многообразием.

**Определение 7.1.1.** *Линейным расслоением над многообразием называется векторное расслоение ранга один, т. е. расслоение, слой которого одномерен.*

Касательное и кокасательное расслоения над комплексной кривой линейны, поскольку их слои одномерны.

Векторное поле — это совокупность касательных векторов в каждой точке многообразия. При этом вектор должен зависеть от точки многообразия голоморфно. Другими словами, векторное поле — это голоморфное сечение касательного расслоения. Соответственно голоморфное сечение кокасательного расслоения называется голоморфной дифференциальной 1-формой. Аналогично голоморфная

функция на многообразии — это голоморфное сечение тривиального линейного расслоения, т. е. прямого произведения  $M \times \mathbb{C}$ , рассматриваемого как расслоение над  $M$ .

В локальной координате голоморфное векторное поле и голоморфная 1-форма имеют соответственно вид

$$a(z) \frac{d}{dz} \quad \text{и} \quad b(z) dz,$$

где  $a, b$  — голоморфные функции.

Заметим, что координатные представления векторного поля и 1-формы по-разному ведут себя при замене координаты. Пусть мы выполнили замену координаты  $z = g(z_1)$ . Тогда в новой координате 1-форма имеет вид

$$b(z) dz = b(g(z_1)) dg(z_1) = b(g(z_1)) g'(z_1) dz_1.$$

Выписать преобразование векторного поля сложнее. Для этого посмотрим, как наше поле действует на функцию  $z_1$ :

$$a(z) \frac{dz_1}{dz} = a(z) \frac{dg^{-1}(z)}{dz} = \frac{a(g(z_1))}{g'(z_1)}.$$

Поэтому замена координаты следующим образом отражается на векторном поле:

$$a(z) \frac{d}{dz} = \frac{a(g(z_1))}{g'(z_1)} \frac{d}{dz_1}.$$

Каждая голоморфная функция, записанная в произвольной координате  $z$  в окрестности данной точки  $z = 0$ , представляется в виде степенного ряда по положительным степеням переменной  $z$ :

$$a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Однако голоморфные векторные поля и дифференциальные формы, так же как и голоморфные функции, на компактных комплексных кривых чрезвычайно редки. Поэтому наряду с ними мы будем рассматривать и мероморфные векторные поля и функции, т. е. мероморфные сечения касательного и кокасательного расслоений. У каждой точки такого сечения, за исключением конечного числа, есть окрестность, в любой локальной координате  $z$  на которой коэффициент при  $d/dz$  (соответственно при  $dz$ ) записывается в виде голоморфной функции. В отдельных же точках такому коэффициенту разрешается иметь полюсы. Порядок полюса коэффициента называется *порядком полюса* мероморфного векторного поля и мероморфной дифференциальной 1-формы. Он не зависит от выбора локальной координаты на кривой.



Всякая мероморфная функция, записанная в произвольной координате  $z$  в проколотой окрестности своего полюса  $z = 0$  порядка  $k > 0$ , представляется в виде степенного ряда по степеням переменной  $z$  порядка  $-k$  и выше:

$$a(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Все мероморфные функции на данной кривой образуют поле — их можно складывать, умножать и делить друг на друга. Каждое из  $\mathbb{C}$ -пространств мероморфных векторных полей и мероморфных 1-форм является векторным пространством и над полем мероморфных функций на кривой.

**Упражнение 7.1.2.** Докажите, что при подходящем выборе локальной координаты  $z$  в окрестности своего полюса  $z = 0$  порядка  $k > 0$  мероморфная функция представляется в виде  $a(z) = z^{-k}$ .

**Упражнение 7.1.3.** Верно ли, что при подходящем выборе локальной координаты  $z$  в окрестности полюса  $z = 0$  порядка  $k > 0$  данную мероморфную 1-форму можно привести к виду  $z^{-k} dz$ ?

Мероморфная функция — это мероморфное сечение тривиального линейного расслоения. Мероморфное векторное поле можно также определить как дифференцирование из кольца мероморфных функций в себя.

## § 7.2. Как задавать векторные поля и дифференциальные формы

Рассмотрим сначала случай рациональной кривой. В произвольной координате  $z$  на  $\mathbb{CP}^1$  мероморфная дифференциальная форма записывается в виде  $a(z)dz$ , где  $a$  — некоторая мероморфная (т. е. рациональная) функция. Замена координат  $z = 1/z_1$  показывает, что и в точке  $z = \infty$  коэффициент при  $dz_1$  является мероморфной функцией. Аналогично любое мероморфное векторное поле записывается в виде  $a(z)d/dz$ . Посмотрим, как выглядят голоморфные дифференциальные 1-формы и векторные поля.

Рассмотрим дифференциальную 1-форму  $dz$  на  $\mathbb{CP}^1$ . Подстановка  $z = 1/z_1$  показывает, что у такой 1-формы имеется полюс порядка 2 в точке  $z = \infty$ :

$$dz = -\frac{1}{z_1^2} dz_1.$$

Но это означает, что и у любой ненулевой мероморфной 1-формы есть полюсы! Действительно, пусть  $\omega$  — произвольная мероморфная 1-форма. Частное  $\omega/dz$  — ненулевая мероморфная функция; обо-

значим эту функцию через  $f$ . Тогда  $\omega = f dz$  и у 1-формы есть полюсы во всех тех точках, где они есть у  $f$ . Если же у  $f$  нет полюсов в точках, отличных от  $z = \infty$ , то у  $\omega$  обязательно есть полюс в точке  $z = \infty$ . Тем самым мы доказали, что на рациональной кривой нет ненулевых голоморфных 1-форм, или, другими словами, что размерность пространства голоморфных 1-форм на  $\mathbb{CP}^1$  равна нулю.

**Упражнение 7.2.1.** Подсчитайте размерность пространства голоморфных векторных полей на  $\mathbb{CP}^1$ .

Утверждение о том, что у ненулевой мероморфной 1-формы на  $\mathbb{CP}^1$  есть полюсы, можно уточнить. А именно, рассмотрим порядки всех нулей и всех полюсов произвольной мероморфной 1-формы  $\omega$ . Тогда разность между суммой порядков всех нулей и суммой порядков всех полюсов равна  $-2$ . Действительно, для формы  $dz$  это так, а умножение этой формы на ненулевую мероморфную функцию увеличивает сумму порядков нулей на столько же, на сколько и сумму порядков полюсов.

**Упражнение 7.2.2.** Чему равна разность суммы порядков нулей и суммы порядков полюсов мероморфного векторного поля на  $\mathbb{CP}^1$ ?

Впоследствии мы увидим, что работать с дифференциальными формами гораздо легче, чем с векторными полями; поэтому разговор будет идти в первую очередь об 1-формах на кривых.

С каждой мероморфной функцией на кривой  $C$  можно связать мероморфную 1-форму на ней. А именно, мы можем сопоставить функции  $f$  ее дифференциал  $df$ . Например, 1-форма  $dz$  является дифференциалом мероморфной функции  $z$ .

**Упражнение 7.2.3.** Проверьте, что мероморфная 1-форма  $dz/z$  не является дифференциалом никакой мероморфной функции.

Тем самым дифференциал определяет линейное отображение из пространства мероморфных функций в пространство мероморфных 1-форм. Элементы образа этого отображения называются *точными* дифференциальными 1-формами. Как показывает предыдущее упражнение, не всякая мероморфная 1-форма на кривой точна.

**Упражнение 7.2.4.** Сформулируйте простое необходимое и достаточное условие для того, чтобы мероморфная 1-форма на  $\mathbb{CP}^1$  была точна.

Дифференциальные формы — аналогично функциям, — преобразуются при отображении многообразий в направлении, обратном действию отображения. Это позволяет задавать их теми же способами, что мы использовали для задания функций.

Если наша кривая  $C$  вложена в проективное пространство, то мероморфную 1-форму на ней можно задать путем ограничения мероморфной 1-формы на объемлющем пространстве. Действительно, касательная прямая к кривой в точке естественно вложена в касательное пространство к объемлющему пространству в той же точке. Дифференциальная 1-форма представляет собой семейство линейных функционалов на касательных пространствах в каждой точке объемлющего пространства. Ограничивая ее на касательные прямые к кривой в различных точках кривой, мы получаем семейство линейных функционалов на касательных прямых к кривой, т. е. дифференциальную 1-форму на ней.

**Упражнение 7.2.5.** Ограничение векторного поля на объемлющем проективном пространстве на кривую, вложенную в это пространство, вообще говоря, не является векторным полем на этой кривой. Почему?

**Упражнение 7.2.6.** Проверьте, что если мероморфная 1-форма на объемлющем пространстве является дифференциалом мероморфной функции на нем, то ее ограничение на кривую является дифференциалом ограничения функции на кривую.

**Упражнение 7.2.7.** Найдите порядки нулей и полюсов ограничения на кривую

$$x^n + y^n = 1$$

дифференциальных 1-форм а)  $x dx$ , б)  $x dy$  на плоскости.

Аналогично голоморфное отображение  $g: C_1 \rightarrow C_2$  комплексных кривых позволяет построить по мероморфной 1-форме  $\omega$  на  $C_2$  мероморфную 1-форму на  $C_1$ , которую мы будем обозначать  $g^*\omega$  и называть *поднятием* на  $C_1$  голоморфной формы  $\omega$  на  $C_2$  посредством отображения  $g$ . По определению значение такой 1-формы на касательном векторе  $\tau$  равно  $\omega(dg(\tau))$ , где  $dg(\tau)$  — касательный вектор в  $C_2$ , образ вектора  $\tau$  при касательном отображении  $dg$ . Это определение полностью совпадает с определением ограничения 1-формы на кривую в проективном пространстве, только вместо вложения в проективное пространство мы берем отображение в другую кривую.

**Упражнение 7.2.8.** Рассмотрим проекцию кривой  $x^2 + y^2 = 1$  на ось  $x$ . Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на этой кривой является поднятием 1-формы с оси  $x$  при этом отображении?

Если же, как обычно, на кривой дискретно действует группа ее автоморфизмов, то любая мероморфная 1-форма на этой кривой, инвариантная относительно действия этой группы автомор-

физмов, опускается до мероморфной 1-формы на факторкривой. То же, впрочем, справедливо и для векторных полей.

**Пример 7.2.9.** Рассмотрим на комплексной прямой  $\mathbb{C}$  с координатой  $z$  дифференциальную 1-форму  $dz$ . Эта 1-форма инвариантна относительно сдвигов  $z \mapsto z + z_0$  комплексной прямой, поэтому она опускается на любую эллиптическую кривую. Эта форма не имеет полюсов на  $\mathbb{C}$ , поэтому ее образ на любой эллиптической кривой является голоморфной 1-формой на ней. Тем самым мы построили на каждой эллиптической кривой по голоморфной 1-форме.

**Упражнение 7.2.10.** Докажите, что любая голоморфная 1-форма на эллиптической кривой пропорциональна построенной выше с постоянным коэффициентом пропорциональности. Это означает, что пространство голоморфных 1-форм на эллиптической кривой одномерно над  $\mathbb{C}$ .

У построенной выше голоморфной 1-формы на эллиптической кривой нет не только полюсов, у нее нет и ни одного нуля. Это означает, что у любой мероморфной 1-формы на эллиптической кривой разность суммы порядков ее нулей и суммы порядков ее полюсов равна нулю.

### § 7.3. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой

Проведенные выше вычисления показывают, что размерность пространства голоморфных 1-форм на  $\mathbb{CP}^1$  равна нулю, а на эллиптической кривой она равна 1. Эти наблюдения позволяют заподозрить, что размерность этого пространства тесно связана с родом кривой. Сейчас мы приведем еще один чрезвычайно важный аргумент в пользу того, что эта размерность просто равна роду кривой. Мы докажем, что это утверждение справедливо для гладких плоских кривых. (Напомним, что не любая кривая может быть вложена в плоскость; в частности, вложимость кривой накладывает сильное ограничение на ее род.)

**Теорема 7.3.1.** *Размерность пространства голоморфных 1-форм на гладкой плоской кривой равна роду этой кривой.*

Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что размерность пространства голоморфных 1-форм не меньше рода кривой. Оценку в обратную сторону проведем в следующем параграфе.

Пусть  $d$  — степень плоской кривой  $C$ . Как мы знаем, в этом случае ее род равен  $g = (d - 1)(d - 2)/2$ . Мы знаем, что кривые степе-

ни 1 и 2 рациональны и для них утверждение теоремы справедливо. В дальнейшем будем предполагать, что  $d \geq 3$ . Рассмотрим в проективной плоскости прямую, пересекающую кривую  $C$  в  $d$  различных точках, и выберем систему координат  $(x : y : z)$  таким образом, чтобы уравнением выбранной прямой было  $z = 0$ .

Рассмотрим теперь пространство  $S^{d-3}$  однородных многочленов степени  $d - 3$  от переменных  $x, y, z$ . Это векторное пространство над полем комплексных чисел.

**Упражнение 7.3.2.** Докажите, что размерность этого пространства равна  $(d - 1)(d - 2)/2$ .

Мы построим по каждому такому многочлену голоморфную 1-форму на  $C$ , причем построенное отображение из  $S^{d-3}$  в пространство голоморфных 1-форм будет линейным и инъективным. Пусть кривая  $C$  задается однородным уравнением  $F(x, y, z) = 0$  степени  $d$ , которое в карте  $z = 1$  имеет вид  $f(x, y) = 0$ .

Сопоставим произвольному однородному многочлену  $G(x, y, z)$  многочлен  $g(x, y) = G(x, y, 1)$  и дифференциальную 1-форму

$$\frac{g \, dx}{\partial f / \partial y}.$$

Эта 1-форма определена в тех точках плоскости, в которых частная производная многочлена  $f$  по  $y$  не обращается в нуль, и ее ограничение на  $C$  в этих точках является голоморфной 1-формой. Что происходит в тех точках, где  $\partial f / \partial y = 0$ ? В силу того что дифференциал многочлена  $f$  на кривой  $C$  равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \, dx + \frac{\partial f}{\partial y} \, dy = 0,$$

мы заключаем, что

$$\frac{dx}{\partial f / \partial y} = - \frac{dy}{\partial f / \partial x}$$

на кривой. Тем самым выписанная выше дифференциальная 1-форма на кривой может быть переписана в виде

$$- \frac{g \, dy}{\partial f / \partial x}.$$

Поскольку кривая  $C$  гладкая, обе частные производные по  $x$  и по  $y$  не могут обратиться в нуль в одной точке этой кривой, а значит, указанная 1-форма голоморфна на аффинной части кривой.

Проверим теперь, что если степень многочлена  $G$  равна  $d - 3$ , то построенная 1-форма голоморфно продолжается в точки пересечения кривой  $C$  с прямой  $z = 0$ . Перейдем от координат  $(x : y : 1)$  к координатам  $(1 : u : v)$ , т. е. выполним замену

$$x = 1/v; \quad y = u/v.$$

В координатах  $u, v$  наша 1-форма примет вид

$$- \frac{g\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \frac{dv}{v^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)},$$

или, после умножения числителя и знаменателя на  $v^{d-1}$ ,

$$- \frac{v^{d-3} g\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) dv}{v^{d-1} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)}.$$

Числитель последнего выражения есть многочлен, поскольку степень многочлена  $g$  равна  $d - 3$ , а знаменатель есть не что иное, как производная по  $u$  функции  $F(1, u, v)$ . Если она случайно окажется равной 0, то мы можем перейти к производной по  $v$ , как мы это уже делали, заменяя  $u$  на  $x$ , если производная по  $u$  оказывалась равной нулю. Поэтому частное представляет собой отношение многочлена и функции, отличной от нуля в выбранной точке, а значит, не может иметь в ней полюс. Поэтому все 1-формы, которые строятся по многочленам степени  $d - 3$ , голоморфны.

Отображение  $g \mapsto \frac{g dx}{\partial f / \partial y}$ , сопоставляющее многочлену 1-форму, является линейным отображением векторных пространств. Его ограничение на пространство многочленов степени  $d - 3$  инъективно, т. е. не имеет ядра. Действительно, многочлен при таком отображении переходит в нуль только в том случае, если он тождественно равен нулю на кривой  $C$ . Для многочленов степени  $d - 3$  это невозможно, поскольку степень кривой  $C$  есть  $d > d - 3$  и из гладкости кривой вытекает ее неприводимость. Поэтому на плоской кривой степени  $d$  есть по меньшей мере столько линейно независимых 1-форм, какова размерность пространства однородных многочленов степени  $d - 3$  от трех переменных.

**Замечание 7.3.3.** Выбор сопоставления многочлену 1-формы не случаен. На самом деле, на проективной плоскости имеется 2-форма

$\omega$ , которая в карте  $z = 1$  имеет координатную запись  $dx \wedge dy$ . Сопоставим многочлену  $f$  1-форму  $\frac{\omega}{df}$ . Проведенные выше рассуждения означают, что ограничение указанной 1-формы на кривую  $f = 0$  является корректно определенной голоморфной 1-формой. Такая 1-форма (и ее многомерные обобщения) называется *формой Гельфанда—Лере*. Если степень многочлена  $g$  не превосходит  $d - 3$ , то и 1-форма  $g\omega/df$  является голоморфной 1-формой на кривой, что позволяет построить пространство голоморфных 1-форм размерности, равной размерности пространства многочленов степени не выше  $d - 3$ .

### §7.4. Интегрирование 1-форм

Нам осталось доказать, что размерность пространства голоморфных 1-форм не больше рода кривой. Принципиальным моментом здесь является возможность проинтегрировать 1-форму по вещественной кривой на поверхности. При этом мероморфную 1-форму можно рассматривать как 1-форму с комплексными значениями на вещественной двумерной поверхности,

$$a(z)dz = a(u + iv)(du + i dv), \quad z = u + iv.$$

Зафиксируем на кривой  $C$  точку  $x_0$  и рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую  $\gamma: [0, 1] \rightarrow C$ ,  $\gamma(0) = x_0$ . Тогда для этой кривой определен интеграл

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \gamma^* \omega$$

от любой голоморфной 1-формы  $\omega$  на  $C$ . При этом согласно формуле Стокса интеграл зависит лишь от гомотопического класса кривой  $\gamma$  в пространстве кривых с фиксированными концами. Если мы будем немного менять конец  $\gamma(1)$  кривой, не меняя ее гомотопического типа, то интеграл станет функцией от второго конца кривой.

Если 1-форма  $\omega$  является точной, т. е.  $\omega = df$  для некоторой функции  $f$ , то по формуле Ньютона—Лейбница ее интеграл по пути  $\gamma$  с началом в точке  $x_0$  и концом в точке  $x_1$  равен

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{x_0}^{x_1} df = f(x_1) - f(x_0).$$

В частности, интеграл точной 1-формы по любому замкнутому (с совпадающими началом и концом) пути равен нулю.

Рассмотрим теперь какой-нибудь набор замкнутых путей  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$  с началом и концом в точке  $x_0$ , классы которых образуют базис в группе одномерных гомологий  $H_1(C, \mathbb{Z})$ .

**Лемма 7.4.1.** Пусть  $\omega$  — вещественная 1-форма на поверхности  $C$ . Если интегралы  $\int_{\gamma_i} \omega$  1-формы  $\omega$  по всем циклам  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 2g$ , равны нулю, то форма  $\omega$  точна,  $\omega = df$ . Здесь функция  $f$  определена однозначно с точностью до аддитивной константы. При этом если форма  $\omega$  голоморфна, то и функция  $f$  голоморфна.

**Доказательство** стандартно: мы строим по 1-форме  $\omega$  функцию  $f$  по правилу

$$f(x) = \int_{x_0}^x \omega.$$

Этот интеграл не зависит от выбора пути, соединяющего точки  $x_0$  и  $x$ , из-за условия на интегралы по циклам.  $\square$

Теперь мы знаем, что размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой не превосходит  $2g$ . Действительно, каждой такой 1-форме мы можем сопоставить набор ее интегралов по циклам  $\gamma_i$ . Если у двух голоморфных 1-форм все интегралы совпадают, то их разность имеет нулевые интегралы, а значит, является дифференциалом голоморфной функции. Но поскольку на компактной кривой нет непостоянных голоморфных функций, эта разность равна нулю. Поэтому пространство голоморфных 1-форм не более чем  $2g$ -мерно. Мы же хотим доказать, что оно не более чем  $g$ -мерно.

Для этого наряду с голоморфными формами  $\omega$  рассмотрим комплексно-сопряженные им антиголоморфные формы  $\bar{\omega}$ . Мы хотим доказать, что если голоморфные 1-формы  $\omega_1, \dots, \omega_k$  линейно независимы, то классы когомологий 1-форм  $\omega_1, \dots, \omega_k, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_k$  линейно независимы. Отсюда будет следовать нужное нам неравенство.

Необходимое нам утверждение вытекает из следующей леммы.

**Лемма 7.4.2.** Если для пары голоморфных 1-форм  $\omega_1, \omega_2$  на  $C$  сумма  $\omega_1 + \bar{\omega}_2$  является дифференциалом гладкой функции  $f$ , то  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ .

**Доказательство.** Пусть в локальной координате  $z$  на кривой  $\omega_1 = g_1(z)dz$ ,  $\omega_2 = g_2(z)dz$ . Если  $z = u + iv$  и  $\bar{z} = u - iv$ , то  $dz \wedge d\bar{z} = -2i du \wedge dv$ . Поэтому

$$\frac{i}{2} \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = |g_2(z)|^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = |g_2(z)|^2 du \wedge dv.$$



Предположим, что  $\omega_2 \neq 0$ . Тогда

$$\iint_C \frac{i}{2} \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \iint_C |g_2(z)|^2 du \wedge dv > 0.$$

С другой стороны,

$$\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_2 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_2 \wedge (\omega_1 + \bar{\omega}_2) = \omega_2 \wedge df,$$

поскольку  $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ . Поэтому, чтобы прийти к противоречию, достаточно доказать, что  $\iint_C \omega_2 \wedge df = 0$ , чем мы сейчас и займемся.

Функция  $g_2$  голоморфная, поэтому  $\frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}} = 0$ , а значит,

$$d\omega_2 = d(g_2 dz) = dg_2 \wedge dz = \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} dz + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = 0.$$

Следовательно,

$$d(f\omega_2) = df \wedge \omega_2 + f d\omega_2 = df \wedge \omega_2.$$

Таким образом, форма  $df \wedge \omega_2$  является точной, поэтому

$$\iint_C df \wedge \omega_2 = 0. \quad \square$$

### §7.5. Размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой с особыми точками

Для плоских кривых, которые имеют особые точки, но только самые простые (двойные точки, т. е. точки трансверсального самопересечения), теорема 7.3.1 остается верной, если мы определяем род кривой с особыми точками как род ее нормализации. Это означает, что размерность пространства голоморфных 1-форм равна  $g$  на любой гладкой кривой рода  $g$ .

**Теорема 7.5.1.** *Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой с двойными особыми точками равна роду этой кривой.*

**Доказательство.** Доказательство того, что размерность пространства голоморфных 1-форм не превосходит рода кривой, не требует никаких изменений. Доказательство того, что размерность пространства голоморфных 1-форм не меньше рода кривой, меняется следующим образом. Для кривой с двойными точками нужно рассмотреть не все пространство однородных многочленов степени  $d - 3$  от переменных  $x, y, z$ , а взять лишь те многочлены  $G(x, y, z)$ ,

которые обращаются в нуль во всех двойных точках кривой. Тогда 1-форма

$$\frac{g(x, y) dx}{\partial f / \partial y} = -\frac{g(x, y) dy}{\partial f / \partial x},$$

где  $g(x, y) = G(x, y, 1)$ , не имеет полюсов в двойных точках кривой. Действительно, выберем локальные координаты так, чтобы в окрестности двойной точки кривая задавалась уравнением  $f(x, y) = 0$ , где  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots$ , причем  $b^2 - ac \neq 0$ . Если отличная от начала координат точка  $(x, y)$  лежит на ветви, касающейся прямой  $f_x = 0$ , то  $y \approx \frac{-ax}{b}$ , поэтому  $f_y(x, y) \approx 2bx + 2cy \approx 2\frac{b^2 - ac}{b}x$ . В таком случае у 1-формы  $\frac{g(x, y) dx}{f_y}$  нет полюса в начале координат, поскольку  $g(0, 0) = 0$ .

Размерность пространства многочленов, которые обращаются в нуль во всех двойных точках кривой, не меньше  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$ . Как мы уже знаем (см. § 4.2), это число равно роду нормализованной кривой, и теорема доказана.  $\square$

### § 7.6. Вычеты и интегралы от мероморфных 1-форм

Голоморфная 1-форма  $\omega$  на комплексной кривой всегда замкнута, т. е.  $d\omega = 0$ . Поэтому интеграл от голоморфной 1-формы по стягиваемой петле на комплексной кривой равен нулю. Для мероморфных 1-форм последнее утверждение уже неверно. Точнее говоря, оно становится верным, если областью определения мероморфной 1-формы считать комплексную кривую, из которой выколоты полюсы этой формы. На такой поверхности маленькая окружность с центром в выколотой точке  $x_0$  уже, как правило, нестягиваема (исключение составляет одна выколотая точка на рациональной кривой). Величина

$$\frac{1}{2\pi i} \int \omega = \text{Res}_{x_0} \omega,$$

где интегрирование идет по такой окружности, проходимой в положительном направлении («против часовой стрелки»), называется *вычетом* 1-формы  $\omega$  в точке  $x_0$ . Если в окрестности точки  $x_0$  введена локальная координата  $z$ , то 1-форма  $\omega$ , имеющая в точке  $x_0$  полюс порядка  $k$ , допускает локальное разложение

$$\omega = (a_{-k}z^{-k} + a_{-k+1}z^{-k+1} + \dots + a_{-1}z^{-1} + a_0 + \dots) dz, \quad a_{-k} \neq 0,$$

и ее вычет совпадает с коэффициентом  $a_{-1}$  при  $z^{-1}$ .

**Упражнение 7.6.1.** Проверьте непосредственной заменой, что коэффициент при  $z^{-1}$  в разложении мероморфной 1-формы в ряд Лорана в окрестности любой точки кривой не зависит от выбора локальной координаты  $z$  в этой окрестности.

Точная мероморфная 1-форма имеет нулевой вычет в каждом из своих полюсов.

**Теорема 7.6.2.** Для мероморфной 1-формы  $\omega$  на гладкой кривой выполняется равенство  $\sum \text{Res}_p(\omega) = 0$ , где суммирование ведется по всем точкам, в которых вычет отличен от 0.

Мы приведем два доказательства этой теоремы.

**Первое доказательство.** Действительно, склеим нашу поверхность из одного многоугольника таким образом, чтобы ни один из полюсов не попал на его границу. Тогда сумма вычетов 1-формы  $\omega$  в ее полюсах равна, с точностью до коэффициента  $1/(2\pi i)$ , интегралу от этой 1-формы по циклу, обходящему многоугольник вдоль его границы в положительном направлении. В поверхности, склеенной из этого многоугольника, этот цикл гомологичен нулю, поскольку он дважды — в противоположных направлениях — проходит по каждому из своих отрезков. А значит, и интеграл от 1-формы по нему равен 0, что и требовалось.  $\square$

**Второе доказательство.** Рассмотрим область  $\Omega$ , которая получается при вырезании из кривой  $C$  малых окрестностей полюсов формы  $\omega$ . Форма  $\omega$  голоморфна в области  $\Omega$ , поэтому  $\int_{\partial\Omega} \omega = 0$ . С другой стороны,  $\int_{\partial\Omega} \omega = -\sum \text{Res}_p(\omega)$ .  $\square$

Теперь мы можем дать еще одно доказательство уже известного нам утверждения.

**Теорема 7.6.3.** Сумма порядков нулей и полюсов любой мероморфной функции  $f$  на гладкой кривой равна 0.

**Доказательство.** Применим теорему 7.6.2 к мероморфной 1-форме  $\omega = \frac{df}{f}$ . Если  $f(z) = az^n + \dots$ , где  $n$  — целое число и многоточие обозначает члены старших порядков, в окрестности точки  $p \in C$ , то в окрестности этой точки  $\omega = \frac{df}{f} = n \frac{dz}{z}$ . Следовательно, вычет формы  $\omega$  в точке  $p$  равен  $n$ . Таким образом, сумма порядков нулей и полюсов любой мероморфной функции  $f$  равна сумме вычетов 1-формы  $\omega$ , поэтому она равна 0.  $\square$

## Глава 8

# Линейные расслоения, линейные системы и дивизоры

Нам уже встречались линейные расслоения над кривыми — тривиальное расслоение, касательное, кокасательное. В связи с этим возникает естественный вопрос: есть ли над данной кривой другие линейные расслоения? Скажем, над эллиптическими кривыми все упомянутые выше линейные расслоения тривиальны, и поставленный вопрос означает, в частности, есть ли над данной эллиптической кривой нетривиальные расслоения.

В этой главе мы обсудим связь между линейными расслоениями над кривой и наборами точек на ней — дивизорами. Язык дивизоров позволяет эффективно описывать все линейные расслоения и работать с ними. Мы также обсудим, как с помощью линейного расслоения над кривой строить ее отображения в различные проективные пространства.

### § 8.1. Дивизор мероморфного сечения линейного расслоения

С каждым мероморфным сечением линейного расслоения над кривой  $C$  естественно связаны два набора точек — нули и полюсы этого сечения. При этом каждой точке этих наборов приписана целочисленная кратность. В окрестности любой точки сечение линейного расслоения описывается мероморфной функцией, и кратность точки — это соответственно порядок нуля или порядка полюса этой функции. Порядок нуля мы считаем положительным, а порядок полюса — отрицательным. Формальная сумма нулей сечения  $\sigma$  с учетом их порядков называется *дивизором нулей* сечения и обозначается  $(\sigma)_0$ . Формальная сумма полюсов сечения  $\sigma$  с учетом их порядков называется *дивизором полюсов* сечения и обозначается  $(\sigma)_\infty$ . Формальная сумма нулей и полюсов сечения  $\sigma$  с учетом их порядков называется *дивизором* сечения и обозначается так:  $(\sigma) = (\sigma)_0 + (\sigma)_\infty$ .

**Пример 8.1.1.** Пусть  $C = \mathbb{CP}^1$  — проективная прямая с координатой  $z$ . Дивизор постоянной ненулевой функции на ней равен нулю:

$(\text{const}) = 0$ . Дивизор функции  $z$  равен  $(z) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot \infty$ , поскольку функция  $z$  имеет нуль первого порядка в точке  $0$  и полюс первого порядка в точке  $\infty$ . Дивизор дифференциальной 1-формы  $\omega = dz$  равен  $(dz) = -2 \cdot \infty$ , а дивизор двойственного ей векторного поля  $\partial/\partial z$  равен  $(\partial/\partial z) = 2 \cdot \infty$ .

**Упражнение 8.1.2.** Пусть  $p, q$  — две различные точки эллиптической кривой  $C$ . Может ли дивизор мероморфной функции на  $C$  иметь вид  $p - q$ ?

**Упражнение 8.1.3.** Определите дивизоры нулей и полюсов следующих объектов: а) многочлена  $z^n$  на  $\mathbb{CP}^1$ ; б) 1-формы  $(z - 1)dz$  на  $\mathbb{CP}^1$ ; в) векторного поля  $z^2 \frac{d}{dz}$  на  $\mathbb{CP}^1$ ; г) функции Вейерштрасса на эллиптической кривой; д) функции на кривой Ферма  $x^n + y^n = 1$ , заданной проекцией этой кривой на ось  $x$ ; е) функции на кватернике Клейна  $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$ , заданной проекцией кватерики на ось  $x$ .

Дадим общее определение дивизора на кривой.

**Определение 8.1.4.** Дивизором на кривой  $C$  называется формальная конечная линейная комбинация  $\sum a_i x_i$  точек этой кривой.

Другой, и зачастую более удобный, способ обозначения дивизоров состоит в том, чтобы записывать их в виде суммы  $\sum_{x \in C} a_x x$  по всем точкам кривой  $C$ , в которой лишь *конечное* число коэффициентов отлично от нуля. В дальнейшем мы будем рассматривать только дивизоры с целыми коэффициентами,  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

Дивизоры можно складывать — суммирование дивизоров сводится к суммированию коэффициентов у точек кривой, — и они образуют коммутативную группу относительно операции сложения. Нулем в этой группе является нулевой дивизор.

Пусть теперь  $\sigma_1: C \rightarrow E$  и  $\sigma_2: C \rightarrow E$  — два ненулевых мероморфных сечения одного и того же линейного расслоения  $E$  над кривой  $C$ . Поскольку расслоение  $E$  линейно (т.е. его слои одномерны), каждое из этих сечений пропорционально другому, т.е. является результатом умножения другого сечения на мероморфную функцию:  $\sigma_2 = f\sigma_1$  для некоторой функции  $f$ . Записывая сечения  $\sigma_1, \sigma_2$  и функцию  $f$  в локальной координате, убеждаемся, что  $(\sigma_2) = (\sigma_1) + (f)$ , т.е. дивизор сечения  $\sigma_2$  является суммой дивизоров сечения  $\sigma_1$  и функции  $f$ .

Наоборот, если  $\sigma: C \rightarrow E$  — сечение линейного расслоения и  $f$  — произвольная мероморфная функция на кривой  $C$ , то  $f\sigma$  также является сечением расслоения  $E$ , причем  $(f\sigma) = (f) + (\sigma)$ . Тем самым дивизоры любых двух сечений данного линейного расслоения отли-

чаются друг от друга на дивизор мероморфной функции, а прибавляя к дивизору сечения дивизор некоторой мероморфной функции, мы также получаем дивизор сечения того же расслоения.

Поэтому в группе дивизоров естественно ввести следующее отношение эквивалентности: два дивизора  $D_1, D_2$  называются *линейно эквивалентными*, если на кривой существует мероморфная функция  $f$  с дивизором  $D_1 - D_2$ .

**Упражнение 8.1.5.** Проверьте, что сложение дивизоров индуцирует структуру группы на множестве классов линейной эквивалентности дивизоров.

Факторгруппа группы дивизоров кривой  $C$  по отношению линейной эквивалентности называется ее *группой Пикара* и обозначается  $\text{Pic}(C)$ . Всякому линейному расслоению над данной кривой соответствует элемент ее группы Пикара — класс линейной эквивалентности дивизоров мероморфных сечений этого расслоения.

## § 8.2. Степень дивизора и степень расслоения

У дивизора есть важная количественная характеристика — его *степень*. *Степенью дивизора*  $D = \sum a_i p_i$  называется сумма  $\sum a_i$  его коэффициентов. Это целое число, которое обычно обозначают  $\deg D$ . Степень является эпиморфизмом из группы классов дивизоров в группу целых чисел по сложению. Отсюда вытекает, в частности, что классы дивизоров степени 0 образуют подгруппу в группе классов дивизоров. Для данной кривой  $C$  эта подгруппа обозначается через  $\text{Pic}_0(C)$ ; более общим образом, совокупность классов дивизоров данной степени  $d$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ , обозначается  $\text{Pic}_d(C)$ , и вся группа Пикара представляется в виде несвязного объединения

$$\text{Pic}(C) = \dots \sqcup \text{Pic}_{-2}(C) \sqcup \text{Pic}_{-1}(C) \sqcup \text{Pic}_0(C) \sqcup \text{Pic}_1(C) \sqcup \text{Pic}_2(C) \sqcup \dots$$

Всякое подмножество  $\text{Pic}_d(C)$  в группе Пикара допускает представление в виде  $\text{Pic}_d(C) = D + \text{Pic}_0(C)$ , где  $D \in \text{Pic}_d(C)$  — произвольный класс дивизоров. Поэтому структура любого подмножества  $\text{Pic}_d(C)$  совпадает, по сути дела, со структурой группы  $\text{Pic}_0(C)$ , хотя отождествление и не является каноническим, а зависит от выбора элемента  $D \in \text{Pic}_d(C)$ . Как следствие, знание группы  $\text{Pic}_0(C)$  дает описание и всей группы  $\text{Pic}(C)$ .

Степень дивизора любой мероморфной функции равна 0, поскольку количество прообразов нуля и количество прообразов бесконечно-

сти с учетом кратности для любой функции совпадают и равны ее степени. Поэтому линейно эквивалентные дивизоры имеют одинаковую степень, а значит, все сечения данного линейного расслоения также имеют одинаковую степень. Эта общая степень называется *степенью расслоения*.

Дивизоры мероморфных функций называются *главными дивизорами*. Они составляют класс эквивалентности нуля относительно линейной эквивалентности. Заметим, что при  $g > 0$  из того, что степень дивизора равна нулю, не вытекает, вообще говоря, что этот дивизор является главным.

**Упражнение 8.2.1.** Докажите, что любые два дивизора одинаковой степени на проективной прямой линейно эквивалентны. Другими словами, группа  $\text{Pic}_0(\mathbb{CP}^1)$  тривиальна, а группа  $\text{Pic}(\mathbb{CP}^1)$  изоморфна  $\mathbb{Z}$ .

**Пример 8.2.2.** Если кривая вложена в проективное пространство, то на ней можно определить класс дивизоров гиперплоского сечения. Представителем этого класса является любой дивизор пересечения кривой с гиперплоскостью, не содержащей этой кривой. Любые два таких дивизора линейно эквивалентны. Действительно, пусть две гиперплоскости задаются однородными линейными уравнениями  $F_1 = 0$  и  $F_2 = 0$ . Тогда ограничение частного  $F_1/F_2$  на нашу кривую является мероморфной функцией на ней, устанавливающей эквивалентность двух дивизоров. Аналогично на проективной кривой определен класс дивизоров, отвечающих ее сечениям гиперповерхностями заданной фиксированной степени  $k$ .

**Упражнение 8.2.3.** Выразите степень класса дивизоров гиперплоских сечений проективной кривой через степень самой кривой.

Степень касательного расслоения к кривой рода  $g$  равна эйлеровой характеристике поверхности  $C$ , т. е.  $\deg(TC) = \chi(C) = 2 - 2g$ . Действительно, эйлерову характеристику многообразия можно определять как сумму индексов особых точек векторного поля общего положения на нем. В свою очередь, особые точки мероморфного векторного поля на кривой — это в точности его нули и полюсы, причем их индексы — это порядки нулей и полюсов соответственно.

**Упражнение 8.2.4.** Проверьте, что если мероморфное векторное поле на кривой в окрестности своей особой точки имеет вид  $z^k d/dz$ , то индекс этого поля в этой точке равен  $k$ .

При тензорном умножении линейных расслоений соответствующие им классы дивизоров в группе Пикара складываются. Действи-

тельно, если  $E \rightarrow C$  и  $F \rightarrow C$  — голоморфные линейные расслоения и  $\sigma: C \rightarrow E$ ,  $\tau: C \rightarrow F$  — их мероморфные сечения, то тензорное произведение  $E \otimes F \rightarrow C$  допускает мероморфное сечение  $\sigma \otimes \tau: C \rightarrow E \otimes F$ . Дивизор этого тензорного произведения представляет собой сумму дивизоров сомножителей:  $(\sigma \otimes \tau) = (\sigma) + (\tau)$ , что и дает требуемое утверждение. Разумеется, степени линейных расслоений при их тензорном умножении также складываются.

Поскольку кокасательное расслоение к кривой двойственно касательному, их тензорное произведение является тривиальным линейным расслоением. Это означает, в частности, что его степень равна 0. Поэтому степень кокасательного расслоения равна  $-\chi(C) = -2g(C) - 2$ ; она положительна при  $g(C) \geq 2$ . Класс дивизоров кокасательного расслоения называется *каноническим классом*, а его элементы — *каноническими дивизорами*.

### § 8.3. Тавтологическое линейное расслоение над проективной прямой

Над проективным пространством любой размерности есть так называемое *тавтологическое линейное расслоение*. Оно определяется следующим образом. Проективное пространство  $\mathbb{CP}^n$  — это пространство прямых в векторном пространстве  $\mathbb{C}^{n+1}$ , проходящих через начало координат. Линейное расслоение  $\mathcal{O}(-1)$  над  $\mathbb{CP}^n$  — это расслоение, слоем которого над данной точкой проективного пространства является та самая прямая в  $\mathbb{C}^{n+1}$ , которая определяет эту точку. Тотальное пространство расслоения  $\mathcal{O}(-1)$  можно представлять себе как подмногообразие в  $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ , состоящее из пар (точка в  $\mathbb{CP}^n$ , точка на соответствующей прямой в  $\mathbb{C}^{n+1}$ ).

При  $n = 1$  описанная конструкция дает линейное расслоение  $\mathcal{O}(-1)$  над проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$ . Сечение этого расслоения можно построить, взяв произвольную прямую  $\ell$  в  $\mathbb{C}^2$ , не проходящую через начало координат. Эта прямая пересекает в одной точке каждую прямую, проходящую через начало координат, за исключением единственной прямой  $\ell'$ , которая параллельна прямой  $\ell$ .

**Упражнение 8.3.1.** Докажите, что точки пересечения прямой  $\ell$  с прямыми, проходящими через начало координат, определяют мероморфное сечение  $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathcal{O}(-1)$  расслоения  $\mathcal{O}(-1)$ . Проверьте, что это сечение не имеет нулей и имеет единственный полюс в точке  $\ell' \in \mathbb{CP}^1$ , причем порядок этого полюса равен 1.



Это упражнение показывает, что расслоение  $\mathcal{O}(-1)$  имеет степень  $-1$ . Оно не может тем самым быть тривиальным, касательным или кокасательным. Двойственное к тавтологическому расслоению расслоение  $\mathcal{O}(1)$  имеет степень  $1$ . Тензорные степени этих расслоений обозначаются через  $\mathcal{O}(-1)^{\otimes d} = \mathcal{O}(-d)$  и  $\mathcal{O}(1)^{\otimes d} = \mathcal{O}(d)$ , где  $d$  — целое неотрицательное число. Степень расслоения  $\mathcal{O}(d)$  равна  $d$ . Ниже мы увидим, что расслоение  $\mathcal{O}(2)$  изоморфно касательному расслоению к проективной прямой, а  $\mathcal{O}(-2)$  — кокасательному расслоению к ней.

#### §8.4. Восстановление линейного расслоения по классу дивизора

Оказывается, сопоставление линейному расслоению класса дивизоров его сечений обратимо — каждому классу линейной эквивалентности дивизоров однозначно сопоставляется голоморфное линейное расслоение, класс дивизоров сечений которого совпадает с данным. Для описания этого соответствия дадим наконец строгое определение линейного расслоения.

**Определение 8.4.1.** Пусть  $C$  — гладкая комплексная кривая. Голоморфное отображение  $\pi: E \rightarrow C$  двумерной комплексной поверхности в  $C$  называется *линейным расслоением*, если у каждой точки в  $C$  существует такая открытая окрестность  $U \subset C$ , что прообраз  $\pi^{-1}(U)$  допускает тривиализацию, т. е. существует биголоморфное отображение  $\varphi: U \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(U)$ , причем для всех  $x \in U$  выполнены следующие условия:

- $\pi \circ \varphi(x, c) = x$  для всех  $c \in \mathbb{C}$ ;
- отображение  $c \mapsto \varphi(x, c)$  является изоморфизмом прямой  $\mathbb{C}$  на слой  $\pi^{-1}(x)$ .

Два линейных расслоения  $\pi_1: E_1 \rightarrow C$  и  $\pi_2: E_2 \rightarrow C$  над кривой  $C$  называются *изоморфными*, если существует такое биголоморфное отображение  $h: E_1 \rightarrow E_2$ , что  $\pi_2 = h \circ \pi_1$ .

Пусть  $\pi: E \rightarrow C$  — голоморфное линейное расслоение,  $U, V$  — два открытых подмножества в  $C$  и заданы тривиализации  $\varphi_U: U \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(U)$ ,  $\varphi_V: V \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(V)$  расслоения  $E$  над  $U$  и над  $V$  соответственно. Тогда над пересечением  $U \cap V$  возникает отображение

$$\varphi_V^{-1} \circ \varphi_U(x, c) = (x, f_{UV}(x) \cdot c).$$

Здесь  $f_{UV}(x)$  — некоторая голоморфная функция. Функции  $f_{UV}$  для данного набора тривиализаций называются *функциями перехода*.

Если кривая  $C$  покрыта открытыми множествами  $U_1, \dots, U_m$ , то набор функций перехода между тривиализациями над этими множествами полностью определяет линейное расслоение.

**Упражнение 8.4.2.** Докажите, что на пересечении трех открытых множеств  $U, V, W$  функции перехода для тривиализаций данного линейного расслоения удовлетворяют тождеству

$$f_{UV}(x)f_{VW}(x)f_{WU}(x) = 1.$$

Ниже мы предполагаем, не доказывая этот факт, что у каждого голоморфного линейного расслоения есть хотя бы одно мероморфное сечение (можно также считать, что мы ограничиваемся рассмотрением лишь таких расслоений).

**Теорема 8.4.3.** Для каждого класса линейной эквивалентности дивизоров  $D \in \text{Pic}(C)$  на данной гладкой компактной комплексной кривой  $C$  существует единственное линейное расслоение над  $C$ , класс дивизоров сечений которого совпадает с  $D$ .

Расслоение, о котором идет речь в теореме, обозначается через  $\mathcal{O}(D)$ . Поскольку на проективной прямой все дивизоры одинаковой степени линейно эквивалентны, это обозначение согласовано с обозначением  $\mathcal{O}(d)$ .

**Доказательство.** Построим расслоение  $\mathcal{O}(D)$  явно. Пусть  $x_1, \dots, x_m$  — точки кривой  $C$ , входящие в дивизор  $D$  с ненулевыми коэффициентами. Рассмотрим покрытие  $U_1, \dots, U_m, W$  кривой  $C$  открытыми множествами, состоящее из  $m$  маленьких дисков  $U_i$  с центрами в точках  $x_i$  и кривой  $C$ , проколотой в этих точках,  $W = C \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ . При этом диски  $U_i$  мы выбираем настолько малыми, чтобы никакие два из них не пересекались между собой.

Выберем в каждом диске  $U_i$  произвольную голоморфную локальную координату  $z_i$ . Над каждым проколотым диском  $U_i \cap W$  склеим тривиальные линейные расслоения над  $U_i$  и над  $W$  с помощью функции перехода  $f_{U_i W}(z_i) = z_i^{-a_i}$ , где  $a_i$  — кратность точки  $x_i$  в дивизоре  $D$ ,  $D = \sum a_i x_i$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$ . При такой склейке тождественное сечение тривиального линейного расслоения над  $W$  продолжается до мероморфного сечения построенного линейного расслоения над  $C$ , дивизор которого совпадает с  $D$ . Мы будем обозначать это расслоение через  $\mathcal{O}(D)$ .

Теперь заметим, что линейное расслоение, класс дивизоров сечений которого равен нулю, тривиально. Действительно, пусть  $\sigma$  — какое-нибудь мероморфное сечение этого расслоения; его дивизи-

зор ( $\sigma$ ) совпадает с дивизором некоторой мероморфной функции  $f$ :  $(\sigma) = (f)$ . Поэтому сечение  $\frac{1}{f}\sigma$  не имеет ни нулей, ни полюсов, а значит, тривиализует наше расслоение над всей кривой.

Пусть теперь класс дивизоров сечений данного расслоения  $E \rightarrow C$  равен  $D \in \text{Pic}(C)$ . Тогда класс дивизоров сечений линейного расслоения  $E \otimes \mathcal{O}(-D)$  равен нулю, т. е. это расслоение тривиально. Поэтому  $E = \mathcal{O}(D)$ , а значит, мы описали все линейные расслоения над  $C$ .  $\square$

### § 8.5. Отображения кривых в проективное пространство, связанные с линейными расслоениями

Пусть  $L$  — линейное расслоение над кривой  $C$ , и пусть  $V$  — какое-нибудь векторное пространство, состоящее из сечений расслоения  $L$ . Тогда определено отображение из кривой  $C$  в проективное пространство  $PV^V$  — проективизацию векторного пространства, двойственного к  $V$ . Это отображение устроено следующим образом.

Отображение  $x: \sigma \mapsto \sigma(x)$  для точки  $x \in C$  и  $\sigma \in V$  не является линейным функционалом на  $V$ , поскольку  $\sigma(x)$  — это элемент не поля  $\mathbb{C}$ , а слоя  $L_x$  расслоения  $L$  над точкой  $x$ . Однако отношение  $\sigma_1(x): \sigma_2(x)$  для двух сечений  $\sigma_1, \sigma_2 \in V$  — уже корректно определенное комплексное число (если ни одно из значений сечения не обращается в нуль). Тем самым отображение  $x: \sigma \mapsto \sigma(x)$  задает линейный функционал на  $V$ , определенный с точностью до умножения на константу, т. е. точку в  $PV^V$ , что и требовалось.

Точнее говоря, построенное отображение определено корректно во всех точках кривой  $C$ , в которых хотя бы одно из сечений  $\sigma \in V$  отлично от нуля и бесконечности. Однако несложно показать, что в такие точки оно однозначно продолжается по голоморфности.

**Упражнение 8.5.1.** Проверьте, что если размерность пространства  $V$  больше нуля, то отображение кривой в проективное пространство  $PV^V$ , определенное изначально на дополнении к множеству общих нулей и полюсов всех сечений из  $V$ , продолжается до голоморфного отображения всей кривой.

Пространство всех голоморфных сечений данного линейного расслоения  $L$  обозначается через  $H^0(L)$  (это обозначение связано с когомологиями пучков — инструментом, который мы в этой книге не рассматриваем). Если мы берем в качестве векторного пространства  $V$  пространство  $H^0(L)$  всех голоморфных сечений линейного расслоения  $L$  над кривой  $C$ , то соответствующее отображение мы

будем обозначать через

$$\varphi_L: C \rightarrow P(H^0(L))^\vee.$$

Если  $L = \mathcal{O}(D)$  — расслоение, ассоциированное с дивизором  $D$  (точнее, с классом линейной эквивалентности этого дивизора), то мы будем обозначать отображение  $\varphi_L$  также через  $\varphi_D$ . Для двух линейно эквивалентных дивизоров  $D$  и  $D'$  отображения  $\varphi_D$  и  $\varphi_{D'}$  совпадают.

Такое отображение особенно привлекательно и естественно выглядит в случае, когда  $L = T^\vee(C)$  — кокасательное расслоение, а в качестве  $V$  мы выбираем пространство голоморфных 1-форм  $H^0(T^\vee(C)) = \Omega^1(C)$ . В силу однозначности выбора образ кривой при этом отображении называется *канонической кривой*, а само отображение кривой называется *каноническим отображением*. Как мы увидим впоследствии, каноническое отображение почти всегда является вложением.

**Упражнение 8.5.2.** Почему каноническое отображение строится по кокасательному расслоению, а не по тривиальному или касательному?

Отображения, аналогичные каноническому, можно построить и по тензорным степеням кокасательного расслоения. Они называются *плюриканоническими отображениями*. Если тензорную степень взять достаточно высокой (например, равной 3), то плюриканоническое отображение будет вложением уже на любой кривой (при  $g \geq 2$ ).

## § 8.6. Линейные системы и отображения кривых

Голоморфные дифференциалы — не единственное конечномерное пространство, ассоциированное с комплексной кривой. Если снизить требования к естественности, то мы можем рассмотреть над кривой много разных конечномерных пространств сечений линейных расслоений. Такие пространства связываются с дивизорами на кривой.

Назовем дивизор  $\sum a_i x_i$  *эффективным*, если все его коэффициенты  $a_i$  положительны,  $a_i > 0$  (или неотрицательны, если мы суммируем по всем точкам кривой). Нулевой дивизор также будем считать эффективным. Эффективность дивизора  $D$  мы будем выражать записью  $D \geq 0$ . Эффективные дивизоры образуют конус — их можно складывать и умножать на положительные числа, однако разность двух эффективных дивизоров может быть не эффективным дивизио-

ром. Для произвольного линейного расслоения над кривой  $C$  и фиксированного дивизора  $D$  мы можем рассмотреть множество таких сечений  $\sigma$  этого расслоения, что  $(\sigma) + D \geq 0$ . Это множество сечений образует конечномерное векторное пространство относительно естественных операций на сечениях. Таким способом мы значительно расширяем набор векторных пространств, ассоциированных с данной кривой.

Пусть  $D$  — дивизор на кривой  $C$ . Рассмотрим все рациональные функции  $f$ , для которых дивизор  $(f) + D$  эффективен. Эти функции образуют конечномерное векторное пространство, которое мы обозначим через  $L(D)$ . Его можно отождествить с пространством голоморфных сечений линейного расслоения  $\mathcal{O}(D)$ . Размерность пространства  $L(D)$  обозначается через  $l(D)$ .

**Пример 8.6.1.** Пусть  $D$  — дивизор неотрицательной степени на сфере Римана. Запишем его в виде  $D = \sum a_i p_i + a_\infty \infty$ . Положим  $f_D(z) = \prod (z - a_i)^{-p_i}$ . Тогда пространство  $L(D)$  состоит из функций вида  $P(z)f_D(z)$ , где  $P(z)$  — многочлен степени не выше  $\deg D$ .

**Доказательство.** Пусть  $P(z)$  — многочлен степени  $n$ . Тогда  $(P) \geq -n\infty$ . Ясно также, что  $(f_D) = \sum (-a_i p_i) + (\sum a_i) \infty$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (Pf_D) + D &\geq \sum (-a_i p_i) + \left(\sum a_i\right) \infty + \sum a_i p_i + \left(\sum a_i\right) \infty - n \infty \geq \\ &\geq \left(\sum a_i + a_\infty - n\right) \infty = (\deg D - n) \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $n \leq \deg D$ , то  $(Pf_D) + D \geq 0$ , т. е.  $Pf_D \in L(D)$ .

Наоборот, пусть  $h \in L(D)$  — некоторая ненулевая функция. Рассмотрим функцию  $P(z) = h(z)/f_D(z)$ . Тогда

$$(P) = (h) - (f_D) \geq -D - (f_D) = \left(-\sum a_i - a_\infty\right) \infty = -\deg D \infty.$$

Это означает, что у функции  $P(z)$  нет полюсов в конечной области, а в бесконечности у нее может быть полюс порядка не выше  $\deg D$ . Отсюда следует, что  $P(z)$  — многочлен степени не выше  $\deg D$ .  $\square$

Проективное пространство, соответствующее заданному дивизору, допускает следующую реализацию. Рассмотрим все эффективные дивизоры, которые линейно эквивалентны дивизору  $D$ . Обозначим это множество дивизоров через  $|D|$ . Оно заведомо пусто, если степень дивизора  $D$  отрицательна. Множество  $|D|$  естественно отождествляется с проективизацией векторного пространства  $L(D)$ . Действительно,

$$|D| = \{(f) + D \mid f \in L(D) \setminus \{0\}\},$$

причем

$$(f) + D = (g) + D \Leftrightarrow g = \lambda f,$$

где  $\lambda$  — ненулевое комплексное число. Размерность проективного пространства  $|D|$  равна  $l(D) - 1$ .

**Определение 8.6.2.** *Линейная система* (или *линейный ряд*) на комплексной кривой  $C$  — это проективное подпространство в  $|D|$ . Линейная система, совпадающая с  $|D|$ , называется *полной*.

**Пример 8.6.3.** На кривой в проективном пространстве дивизоры гиперплоских сечений образуют линейную систему.

**Пример 8.6.4.** Частным случаем предыдущей конструкции является мероморфная функция на кривой (т. е. отображение кривой в проективную прямую). Прообраз любой точки при таком отображении является эффективным дивизором, и все такие дивизоры линейно эквивалентны. Они образуют линейную систему дивизоров на кривой.

**Пример 8.6.5.** Канонические дивизоры образуют полную линейную систему.

Все дивизоры, принадлежащие одной линейной системе, имеют одинаковую степень. Это общее значение степени называется *степенью линейной системы*. Линейная система степени  $d$  с размерностью проективного пространства  $n$  является *линейной системой*  $g_d^n$ .

**Пример 8.6.6.** Всякая мероморфная функция степени  $d$  на кривой определяет линейную систему  $g_d^1$  на ней. В частности, кривая гиперэллиптическая тогда и только тогда, когда на ней существует линейная система  $g_2^1$ .

## Глава 9

### Формула Римана—Роха и ее приложения

Теорема Римана—Роха связывает две величины: размерность  $l(D)$  векторного пространства  $L(D)$  мероморфных функций, дивизор которых не меньше  $-D$ , и размерность  $i(D)$  пространства  $\Omega^1(D)$  мероморфных 1-форм, дивизор которых не меньше  $D$ . Теорема Римана—Роха утверждает, что для дивизора степени  $d$  на кривой рода  $g$  выполняется равенство

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Размерность  $l(D)$  пространства мероморфных функций, дивизор которых не меньше  $-D$ , не меняется при замене дивизора  $D$  линейно эквивалентным ему дивизором  $D'$ . Действительно, пусть  $f$  — функция с дивизором  $(f) = D - D'$  (такая функция определена однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу). Тогда умножение на функцию  $f$  задает изоморфизм пространств  $L(D)$  и  $L(D')$ . Таким образом, теорема Римана—Роха относится не к индивидуальным дивизорам, а к классам линейной эквивалентности дивизоров. В частности, мы можем применять ее к каноническому дивизору  $K$ , а размерность  $i(D)$  совпадает с размерностью  $l(K - D)$ .

Формула Римана—Роха и различные ее обобщения имеют многочисленные применения и выступают в качестве постоянно действующего инструмента в современной алгебраической геометрии. В этой главе мы обсуждаем простейшие, но от того не менее важные приложения этой формулы. Ее доказательство мы отложим до следующей главы.

#### § 9.1. Задача Миттаг-Леффлера

Задача Миттаг-Леффлера стала источником, из которого зародилась теория пучков. Эта задача состоит в следующем.

*Для данного набора главных частей локальных функций в полюсах на кривой определить, являются ли они главными частями некоторой мероморфной функции, определенной на всей кривой и не имеющей других полюсов.*

Формулировка задачи требует уточнения, и мы перейдем к необходимым определениям. Для простоты мы начнем с рассмотрения случая полюсов первого порядка. Итак, пусть  $C$  — комплексная кривая,  $x \in C$  — точка на ней и мы рассматриваем мероморфные функции, определенные в окрестности точки  $x$  и имеющие в этой точке полюс первого порядка или не имеющие в ней полюса. Будем говорить, что две такие функции  $f_1, f_2$  имеют одинаковые главные части в точке  $x$ , если их разность не имеет полюса в точке  $x$ . Ясно, что отношение «иметь одинаковые главные части» является отношением эквивалентности на множестве таких функций. Главной частью функции  $f$  в точке  $x$  называется класс эквивалентности, содержащий функцию  $f$ .

Если ввести в окрестности точки  $x$  локальную координату  $z$  с центром в точке  $x$ , то всякая функция  $f$ , имеющая полюс первого порядка в этой точке или не имеющая в ней полюса, запишется в виде ряда Лорана:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

Две такие функции  $f_1, f_2$  имеют одинаковые главные части в том и только в том случае, если коэффициенты при  $z^{-1}$  в их разложении в ряд Лорана совпадают. Действительно, именно в этом случае разность  $f_1 - f_2$  не имеет полюса в  $x$ .

**Замечание 9.1.1.** Функция  $f$ , имеющая в точке  $x \in C$  полюс первого порядка или не имеющая в ней полюса, определяет линейный функционал на пространстве голоморфных локальных дифференциальных 1-форм в окрестности точки  $x$ : каждой голоморфной 1-форме  $\omega$  можно сопоставить вычет  $\text{Res}_x f \omega$ . Если функция  $f$  не имеет полюса в точке  $x$ , то так определенный функционал оказывается нулевым. Если же у  $f$  есть полюс в точке  $x$ , то значение этого функционала на 1-форме  $\omega$  оказывается равным нулю в том и только в том случае, если  $\omega(x) = 0$ . Тем самым значение этого функционала на 1-форме  $\omega$  зависит лишь от кокасательного вектора, определяемого этой 1-формой. Поэтому функции  $f$  сопоставляется линейный функционал на кокасательной прямой в точке  $x$ , а значит, касательный вектор в этой точке. С другой стороны, этот касательный вектор однозначно определяется главной частью функции  $f$  в точке  $x$ . Тем самым главную часть функции в полюсе первого порядка можно понимать как касательный вектор в этой точке.

Пусть теперь  $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  — мероморфная функция на кривой  $C$  с полюсами первого порядка в точках  $x_1, \dots, x_d$ , не имеющая других



полюсов. Тогда для любой голоморфной 1-формы  $\omega$  на  $C$  выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^d \operatorname{Res}_{x_i} f \omega = 0,$$

т. е. сумма вычетов 1-формы  $f \omega$  в ее полюсах равна 0. Это равенство можно понимать и так: если сопоставить функции  $f$  набор  $f_1, f_2, \dots, f_d$  ее главных частей в ее полюсах  $x_1, \dots, x_d$ , то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^d \operatorname{Res}_{x_i} f_i \omega = 0.$$

(Отметим, что некоторые из точек  $x_1, \dots, x_d$  могут не оказаться полюсами 1-формы  $f \omega$ . Так происходит, если 1-форма  $\omega$  обращается в 0 в некоторых из точек  $x_i$ .) Следующая теорема утверждает, что справедливо и обратное утверждение, давая тем самым полное решение задачи Миттаг-Леффлера для главных частей функций с полюсами первого порядка.

**Теорема 9.1.2** (Риман). *Для данного набора  $f_1, f_2, \dots, f_d$  главных частей функций с полюсами первого порядка в точках  $x_1, x_2, \dots, x_d$  кривой  $C$  (т. е. для набора касательных векторов в этих точках) функция  $f$  с таким набором главных частей существует в том и только в том случае, если*

$$\sum_{i=1}^d \operatorname{Res}_{x_i} f_i \omega = 0 \tag{9.1}$$

для любой голоморфной 1-формы  $\omega$  на  $C$ .

Поскольку пространство голоморфных 1-форм на кривой рода  $g$  конечномерно и имеет размерность  $g$ , для проверки выполнения равенства (9.1) достаточно выбрать базис  $\omega_1, \dots, \omega_g$  в пространстве голоморфных 1-форм и проверить его выполнение для них.

**Доказательство.** Теорему достаточно доказать в обратную сторону: если равенство (9.1) выполняется для всех голоморфных 1-форм, то функция с такими главными частями существует. Рассмотрим эффективный дивизор  $D = x_1 + \dots + x_d$ . Согласно теореме Римана—Роха размерность пространства функций с полюсами не выше первого порядка в точках  $x_1, \dots, x_d$ , не имеющих других полюсов, равна

$$l(D) = i(D) + d + 1 - g.$$

Здесь  $i(D)$  — размерность пространства голоморфных 1-форм, обращающихся в нуль в каждой из точек  $x_i$  дивизора  $D$ . Эти 1-формы не накладывают ограничений на главные части функций в этих

точках. Таким образом, размерность пространства линейно независимых линейных ограничений на главные части функций в точках  $x_1, \dots, x_d$  равна  $g - i(D)$ . Размерность же пространства этих главных частей равна  $d$ . Таким образом, формула Римана—Роха показывает, что никаких других ограничений нет: размерность всего пространства функций с учетом подпространства констант равна  $(d + 1) - (g - i(D))$ , а значит, совпадает с размерностью пространства главных частей, обращающихся в нуль голоморфные 1-формы.  $\square$

**Замечание 9.1.3.** Если две мероморфные функции  $f, g$  на кривой  $C$  имеют один и тот же набор полюсов первого порядка и одинаковые главные части в этих полюсах, то их разность  $f - g$  является мероморфной функцией без полюсов, т. е. голоморфной функцией, а значит, константой. Поэтому набор главных частей мероморфной функции с полюсами первого порядка в ее полюсах определяет ее однозначно с точностью до прибавления константы.

**Упражнение 9.1.4.** Выведите из теоремы Римана—Роха следующее решение общей задачи Миттаг-Леффлера: для набора главных частей  $f_1, \dots, f_d$  в точках  $x_1, \dots, x_d$  кривой  $C$  мероморфная функция с таким набором главных частей в этих точках, не имеющая других полюсов, существует в том и только в том случае, если

$$\operatorname{Res}_{x_1} f_1 \omega + \dots + \operatorname{Res}_{x_d} f_d \omega = 0$$

для любой голоморфной 1-формы  $\omega$  на  $C$ . Здесь под *главной частью* функции в полюсе мы понимаем сумму «членов отрицательной степени» ее разложения в окрестности полюса: главная часть функции, имеющей разложение

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

в окрестности полюса порядка  $k$  в произвольной координате  $z$ , равна

$$\frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z}.$$

Точнее говоря, две функции  $f_1, f_2$  имеют одинаковую главную часть в своем общем полюсе, если их разность  $f_1 - f_2$  не имеет полюса. Главной же частью называется класс эквивалентности функций с полюсами относительно такого отношения эквивалентности. Поскольку вычет 1-формы  $f \omega$  в полюсе функции  $f$  определяется главной частью этой функции, корректно определен и вычет произведения главной части и голоморфной 1-формы. Как и в случае полюсов первого порядка, набор главных частей функции в ее полюсах

произвольного порядка определяет ее однозначно с точностью до аддитивной константы.

### § 9.2. Рациональная кривая

До сих пор мы часто упоминали о том, что проективная прямая  $\mathbb{CP}^1$  — единственная комплексная кривая рода нуль. Теорема Римана—Роха позволяет доказать это утверждение.

**Теорема 9.2.1.** *Любая гладкая компактная комплексная кривая нулевого рода изоморфна  $\mathbb{CP}^1$ .*

**Доказательство.** Возьмем на комплексной кривой нулевого рода дивизор  $D$ , состоящий из одной точки  $x$ , взятой с кратностью 1. Размерность  $i(D)$  пространства мероморфных 1-форм с нулем в точке  $x$  равна нулю, поскольку степень канонического дивизора на кривой рода  $g = 0$  равна  $2g - 2 = -2$ . Теорема Римана—Роха дает для размерности пространства  $L(D)$  мероморфных функций на такой кривой с полюсом не выше первого порядка в точке  $x$  значение

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 = 1 - 0 + 0 + 1 = 2.$$

Выбрав в двумерном пространстве  $L(D)$  базис из двух функций  $f_0, f_1$ , первая из которых — константа  $f_0 = 1$ , мы получаем мероморфную функцию  $f_1$  на нашей кривой. Степень этой функции равна 1, поскольку у нее один полюс первого порядка, а значит, она осуществляет биголоморфное отображение на проективную прямую, что и требовалось.  $\square$

### § 9.3. Эллиптические кривые

В § 6.4 мы доказали, что кривая  $\mathbb{C}/\Lambda$ , где  $\Lambda$  — некоторая решетка, задается уравнением  $y^2 = P_3(x)$ , т. е. является эллиптической кривой. В этом доказательстве использовано явное задание функции Вейерштрасса в виде ряда по решетке. В этом параграфе мы, опираясь на формулу Римана—Роха, докажем, что любая гладкая кривая рода 1, т. е. гомеоморфная тору, задается уравнением  $y^2 = P_3(x)$ , а также дадим альтернативное доказательство существования функции Вейерштрасса.

**Теорема 9.3.1.** *Любую гладкую кривую рода 1 можно вложить в проективную плоскость.*

Из формулы для рода плоской кривой вытекает теперь, что степень вложенной эллиптической кривой равна 3.

**Доказательство.** Как мы знаем, размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой рода 1 равна 1. При этом образующая пространства голоморфных 1-форм не имеет нулей, поэтому на эллиптической кривой нет нетривиальных голоморфных 1-форм с нулями и без полюсов. Вычислим размерность пространства мероморфных функций с фиксированным полюсом не выше первого порядка, не имеющих других полюсов. По теореме Римана—Роха эта размерность равна

$$d - g + i(D) + 1 = 1 - 1 + 0 + 1 = 1,$$

т. е. все такие функции — константы. А вот функции с одним полюсом порядка два существуют. Действительно, для дивизора  $D = 2x$  имеем

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Поэтому на эллиптической кривой существует мероморфная функция с полюсом порядка два в любой наперед заданной точке, не имеющая других полюсов. Поднятие такой функции на комплексную прямую  $\mathbb{C}$  при факторизации по решетке  $\mathbb{C} \rightarrow C$ , как и исходная функция, определено однозначно с точностью до прибавления константы и умножения на константу и сдвига. Одна из этих функций называется *функцией Вейерштрасса*, см. § 6.4. Это простейшая из эллиптических функций.

Функция Вейерштрасса  $\wp(z)$  выделяется своим разложением при  $z = 0$ . Она имеет в этой точке полюс порядка 2, а коэффициент при  $1/z$  в этом разложении равен 0, поскольку иначе 1-форма  $\wp(z)dz$  имела бы ненулевой вычет в нуле. Отсюда вытекает, что функция Вейерштрасса четная: иначе функция  $\wp(z) - \wp(-z)$  была бы непостоянной голоморфной функцией на кривой. Добавив к  $\wp(z)$  при необходимости аддитивную константу, мы можем считать, что разложение в нуле имеет вид

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

Поскольку функция Вейерштрасса определена на  $\mathbb{C}$ , определена и ее производная  $\wp'(z)$ , которая также опускается на соответствующую эллиптическую кривую. Производная функции Вейерштрасса имеет разложение

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \dots$$

Посмотрим теперь на функцию

$$4\wp^3(z) - (\wp'(z))^2.$$

Это четная функция, а ее разложение в точке  $z = 0$  имеет в ней полюс второго порядка. Поэтому эта функция представляется в виде линейной комбинации функции Вейерштрасса и единичной функции. Тем самым справедливо тождественное равенство

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) + a\wp(z) + b$$

для некоторых констант  $a$  и  $b$ . Другими словами, тройка функций  $(\wp(z) : \wp'(z) : 1)$ , образующая базис в пространстве  $L(3 \cdot 0)$ , определяет отображение эллиптической кривой в плоскую кубическую кривую. Поскольку первая из этих функций четна, а вторая нечетна, отображение является взаимно однозначным на свой образ. Комплексные числа  $a$  и  $b$  в этом представлении являются параметрами кривой; они зависят от выбранной решетки (т. е. от вектора  $\tau$  в верхней полуплоскости).

Образ этого отображения задается в аффинной карте  $z = 1$  уравнением

$$y^2 = 4x^3 + ax + b.$$

Проекция этой кубической кривой на ось  $x$  совпадает с функцией Вейерштрасса на эллиптической кривой, а проекция на ось  $y$  — с ее производной.  $\square$

**Упражнение 9.3.2.** Проверьте, что для любых двух точек на эллиптической кривой существует мероморфная функция степени 2, имеющая в этих точках полюсы первого порядка. Выразите эту функцию через функцию Вейерштрасса.

**Упражнение 9.3.3.** Верно ли, что любой дивизор степени нуль на эллиптической кривой является а) главным (т. е. дивизором некоторой мероморфной функции); б) каноническим (т. е. дивизором некоторой мероморфной 1-формы)?

## § 9.4. Гиперэллиптические кривые и кривые рода 2

Напомним, что каноническим отображением кривой  $C$  рода не меньше 2 называется ее отображение  $\varphi : x \mapsto (\omega_1(x) : \dots : \omega_g(x))$  в проективное пространство  $\mathbb{CP}^{g-1}$ , заданное выбором базиса  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  в пространстве голоморфных 1-форм на  $C$  (см. § 8.5). С более инвариантной точки зрения, рассмотрим двойственное проективное пространство  $R\Lambda^\vee$  к проективизированному пространству  $R\Lambda$  голоморфных 1-форм на данной кривой  $C$ . Тогда почти каждая точка  $x \in C$  определяет точку в  $R\Lambda^\vee$ : для любых двух ненулевых голо-

морфных 1-форм  $\omega_1, \omega_2$  на  $C$  отношение  $\omega_1(x) : \omega_2(x)$  их значений в почти каждой точке  $x$  есть корректно определенное число.

Докажем теперь, что не существует такой точки на кривой  $C$ , в которой все голоморфные 1-формы обращаются в нуль одновременно. Действительно, если бы такая точка  $x$  существовала, то по теореме Римана—Роха существовала бы мероморфная функция на  $C$  с полюсом первого порядка в этой точке (и без других полюсов):

$$l(x) = 1 - g + i(x) + 1 = 2, \quad \text{поскольку } i(x) = g.$$

Это означало бы, что наша кривая рациональна.

**Теорема 9.4.1.** Пусть  $\varphi: C \rightarrow \mathbb{CP}^{g-1}$  — каноническое отображение кривой  $C$  рода  $g$ . Если

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

для двух различных точек  $x_1, x_2$  кривой  $C$ , то эта кривая гиперэллиптическая, т. е. на ней существует мероморфная функция степени 2.

**Доказательство.** Поскольку значения голоморфных 1-форм в точке  $x_2$  пропорциональны их значениям в точке  $x_1$  с коэффициентом пропорциональности, общим для всех 1-форм, размерность пространства голоморфных 1-форм с нулем в точке  $x_1$  совпадает с размерностью пространства голоморфных 1-форм с нулями в точках  $x_1, x_2$ . Поэтому теорема Римана—Роха дает значение 2 для размерности пространства мероморфных функций с полюсами не выше первого порядка в точках  $x_1, x_2$ :

$$l(x_1 + x_2) = 2 - g + (g - 1) + 1 = 2.$$

Тем самым существует такая непостоянная мероморфная функция, а ее степень равна 2.  $\square$

**Упражнение 9.4.2.** Верно ли, что на гиперэллиптической кривой каноническое отображение имеет степень 2?

**Упражнение 9.4.3.** Докажите, что если для двух точек  $x_1, x_2$  на кривой (которая в этом случае с необходимостью является гиперэллиптической) существует функция с полюсами первого порядка в этих точках и без других полюсов, то каноническое отображение переводит эти две точки в одну.

**Упражнение 9.4.4.** Докажите, что образ гиперэллиптической кривой любого рода при каноническом отображении — рациональная кривая.

**Теорема 9.4.5.** Всякая комплексная кривая рода 2 гиперэллиптическая.

**Доказательство.** Каноническое отображение кривой рода 2 является разветвленным накрытием проективной прямой. Степень этого накрытия равна 2. Действительно, степень канонического дивизора на кривой рода 2 равна 2, значит, у всякой ненулевой голоморфной 1-формы имеется два нуля (с учетом кратности), причем две линейно независимые 1-формы не могут иметь общих нулей. Поэтому при каноническом отображении  $x \mapsto (\omega_1(x) : \omega_2(x))$  точка  $(0 : 1)$  имеет в точности два прообраза. Это означает, что степень канонического отображения равна 2 и оно осуществляет гиперэллиптическое накрытие проективной прямой.  $\square$

**Упражнение 9.4.6.** Всякая мероморфная функция степени 2 на комплексной кривой определяет на этой кривой инволюцию — автоморфизм второго порядка, переставляющий прообразы каждой точки из  $\mathbb{CP}^1$ . Неподвижные точки этой инволюции — критические точки функции. Найдите размерность  $l(D)$  пространства  $L(D)$  мероморфных функций на гиперэллиптической кривой рода  $g \geq 2$  для следующих случаев:

- а)  $D = 2x$ , где  $x$  — неподвижная точка инволюции;
- б)  $D = 2x$ , где  $x$  не является неподвижной точкой инволюции;
- в)  $D = x_1 + x_2$ , где точки  $x_1, x_2$  образуют орбиту инволюции;
- г)  $D = x_1 + x_2$ , где точки  $x_1, x_2$  не образуют орбиту инволюции.

## § 9.5. Вычисление Римана

Теорема Римана—Роха позволяет подсчитать — хотя, быть может, и без достаточного обоснования — размерность пространства кривых данного рода. Мы знаем размерность пространства кривых рода 0 — она равна нулю, а также размерность пространства кривых рода 1 — она равна 1. Соответствующее вычисление для кривых рода  $g \geq 2$  выполнено Риманом.

Рассмотрим пространство мероморфных функций степени  $d$  на кривых рода  $g$ . У общей функции из этого пространства все точки ветвления простые. По формуле Римана—Гурвица число этих простых точек ветвления равно  $2d + 2g - 2$ . Это означает, что *размерность пространства мероморфных функций степени  $d$  на кривых рода  $g$  равна  $2d + 2g - 2$* . Действительно, теорема Римана показывает, что число мероморфных функций с фиксированными точками ветвления и заданными в них порядками ветвления конечно, поэтому пространство таких функций локально параметризуется их

точками ветвления. А значит, его размерность равна размерности пространства таких точек.

Тем самым мы знаем размерность пространства мероморфных функций с  $d$  полюсами порядка не выше первого на кривых произвольного рода  $g$ . С другой стороны, мы можем подсчитать по теореме Римана—Роха размерность пространства таких функций на каждой отдельной кривой рода  $g$ . При  $d \geq 2g$  эта размерность равна  $2d - g + 1$ . Действительно, у голоморфного дифференциала на кривой рода  $g$  имеется  $2g - 2$  нулей, поэтому  $i(D) = 0$  для любого дивизора  $D$  степени, не меньшей  $2g - 1$ . Группа автоморфизмов кривой рода  $g$  (а значит, и пространства мероморфных функций на ней) конечна. Поэтому размерность  $\dim \mathcal{M}_g$  пространства  $\mathcal{M}_g$  кривых рода  $g \geq 2$  равна

$$\dim \mathcal{M}_g = (2d + 2g - 2) - (2d - g + 1) = 3g - 3.$$

Естественный способ сделать подобную формулу «общей», т. е. распространить ее также на кривые рода 0 и 1, состоит в том, чтобы сделать эти кривые «жесткими», «убив» их непрерывные автоморфизмы. Такой эффект достигается, если рассматривать кривые с отмеченными точками. Отметим на кривой  $n$  точек  $x_1, \dots, x_n$  и будем считать две кривые с отмеченными точками изоморфными, если существует биголоморфное отображение одной из них на другую, переводящее отмеченные точки в отмеченные.

**Замечание 9.5.1.** Существует два варианта этой конструкции. В первом отмеченные точки различаются между собой, во втором они неразличимы. Соответственно в первом варианте изоморфизмами считаются такие биголоморфизмы, которые переводят каждую отмеченную точку в точку с такой же отметкой, а во втором изоморфизм может переставлять отмеченные точки. В дальнейшем мы будем рассматривать только первый вариант.

На кривых рода  $g \geq 2$  добавление очередной отмеченной точки повышает размерность пространства таких кривых на единицу: размерность пространства кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками равна  $3g - 3 + n$ . Это утверждение верно и для кривых младших родов, однако начиная с некоторого количества добавленных точек. Эллиптические кривые ( $g = 1$ ) приобретают жесткость уже при добавлении одной отмеченной точки, и размерность пространства таких кривых с  $n$  отмеченными точками равна  $3g - 3 + n = n$  при  $n \geq 1$ . Для того чтобы стала жесткой рациональная кривая, на ней надо отметить три



точки: для любых двух упорядоченных троек точек на рациональной кривой существует единственный автоморфизм кривой, переводящий первую тройку во вторую с сохранением порядка. При  $n \geq 3$  размерность пространства рациональных кривых с  $n$  отмеченными точками также равняется  $3g - 3 + n = n - 3$ . Локальными координатами на этом пространстве могут служить координаты точек  $x_4, \dots, x_n$  относительно координаты, в которой  $x_1 = \infty$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ .

### § 9.6. Кривые родов 3, 4 и 5

Мы уже знаем, что всякая кривая рода 0 биголоморфна проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$ , всякая кривая рода 1 биголоморфна плоской кубике, а всякая кривая рода 2 гиперэллиптическая (причем гиперэллиптическое накрытие совпадает в этом случае с каноническим отображением  $C \rightarrow P(\Omega^1(C))^{\vee} \cong \mathbb{CP}^1$ ). В этом параграфе мы приводим аналогичное описание для кривых родов 3, 4 и 5. Это описание использует конструкцию канонической кривой и основано на следующем наблюдении.

**Утверждение 9.6.1.** *Всякая гладкая кривая рода  $g$  степени  $2g - 2$  в  $\mathbb{CP}^{g-1}$ , не содержащаяся ни в какой гиперплоскости, является канонической.*

**Доказательство.** Пусть  $C \subset \mathbb{CP}^{g-1}$  — гладкая кривая рода  $g$  степени  $2g - 2$ . Пусть  $D$  — дивизор гиперплоского сечения на  $C$ , а  $K$  — канонический дивизор. Тогда степень дивизора  $K - D$  равна 0, а значит,  $l(K - D) = 1$ , если дивизор  $D$  линейно эквивалентен дивизору  $K$ , и  $l(K - D) = 0$  в противном случае. Во втором случае по теореме Римана—Роха,  $l(D) = g - 1$  поэтому если кривая  $C$  не является канонической, то она обязана содержаться в гиперплоскости.  $\square$

**Теорема 9.6.2.** *Всякая гладкая плоская кватрика (кривая степени 4) является канонической негиперэллиптической кривой рода 3.*

**Доказательство.** Действительно, каноническое отображение переводит негиперэллиптическую кривую рода  $g = 3$  взаимно однозначно в гладкую плоскую кривую степени  $2g - 2 = 4$ . С другой стороны, как мы только что доказали, всякая гладкая плоская кривая степени 4 является канонической.  $\square$

**Теорема 9.6.3.** *Всякая негиперэллиптическая кривая рода 4 биголоморфна пересечению квадрики и кубики в  $\mathbb{CP}^3$ .*

**Доказательство.** Как мы уже видели (см. упражнение 4.1.8), трансверсальное пересечение квадрики и кубики в  $\mathbb{CP}^3$  действи-

тельно имеет род 4. Рассмотрим теперь кривую  $C$ , вложенную в проективное пространство при помощи канонического отображения. Всякий однородный многочлен степени 2 от четырех переменных (однородных координат в  $\mathbb{CP}^3$ ) задает на  $C$  сечение квадрата касательного расслоения, отвечающего классу дивизоров  $2K$ . Пространство таких многочленов  $\text{Sym}^2 \mathbb{C}^4$  имеет размерность  $\binom{5}{3} = 10$ . С другой стороны, по формуле Римана—Роха

$$l(2K) = 2(2g - 2) - g + 1 = 3g - 3,$$

что при  $g = 4$  равно 9. Поэтому естественное отображение  $\text{Sym}^2 \mathbb{C}^4 \rightarrow L(2K)$  имеет по крайней мере одномерное ядро. Ненулевой элемент этого ядра задает в пространстве квадрику  $Q_2$ , на которой лежит кривая  $C$ .

Аналогично

$$\dim \text{Sym}^3 \mathbb{C}^4 = \binom{6}{3} = 20, \quad l(3K) = 3(2g - 2) - g + 1 = 5g - 5 = 15.$$

Поэтому имеется не менее чем  $(20 - 15 = 5)$ -мерное пространство кубических форм, обращающихся в нуль на нашей кривой. Однако пространство кубических форм, делящихся на  $Q_2$ , четырехмерно. Поэтому кривая  $C$  лежит на некоторой кубике  $Q_3$ , не содержащей  $Q_2$ . Таким образом,  $C$  лежит на пересечении поверхностей  $Q_2$  и  $Q_3$ , а значит, совпадает с ним.  $\square$

**Упражнение 9.6.4.** Докажите, что всякая негиперэллиптическая кривая рода 5 биголоморфна пересечению трех квадрик в  $\mathbb{CP}^4$ .

Результат подсчета размерностей, к которому приводит анализ канонических отображений кривых малых родов, совпадает с результатом вычисления Римана, как показывает следующая таблица.

$g$	$d$	Каноническая кривая	Количество параметров	$\dim \text{PGL}(g)$	$\dim \mathcal{M}_g$
3	4	$Q_4 \subset \mathbb{CP}^2$	$\binom{6}{2} - 1 = 14$	$3^2 - 1 = 8$	$14 - 8 = 6$
4	6	$Q_2 \cap Q_3 \subset \mathbb{CP}^3$	$\binom{5}{3} - 1 + \binom{6}{3} - \binom{4}{3} - 1 = 24$	$4^2 - 1 = 15$	$24 - 15 = 9$
5	8	$Q_2 \cap Q'_2 \cap Q''_2 \subset \mathbb{CP}^4$	$3\left(\binom{6}{4} - 3\right) = 36$	$5^2 - 1 = 24$	$36 - 24 = 12$

Подсчитаем теперь размерность пространства гиперэллиптических кривых. На всякой гиперэллиптической кривой существует мероморфная функция степени 2. По формуле Римана—Гурвица

такая функция на кривой рода  $g$  имеет  $2g + 2$  простых критических значений. На пространстве критических значений действует группа дробно-линейных преобразований образа, размерность которой равна 3. Функции, переходящие друг в друга при такой замене, определены на одной и той же гиперэллиптической кривой. Поэтому пространство гиперэллиптических кривых рода  $g$  имеет размерность  $2g - 1$ .

При  $g = 2$  размерность  $2g - 1 = 3$  пространства гиперэллиптических кривых совпадает с размерностью  $3g - 3 = 3$  пространства всех кривых, что согласуется с доказанным нами ранее утверждением о том, что всякая кривая рода 2 гиперэллиптическая. При  $g = 3$  размерность пространства всех кривых равна  $3g - 3 = 6$ , тогда как гиперэллиптические кривые лишь образуют подмногообразие размерности  $2g - 1 = 5$ , т. е. гиперповерхность, в этом пространстве.

**Упражнение 9.6.5.** Найдите размерность пространства плоских кривых степени 4 с одной простой двойной точкой.

**Упражнение 9.6.6.** Докажите, что всякая кривая рода 2 допускает погружение в проективную плоскость в качестве кривой степени 4 с одной простой двойной точкой.

**Упражнение 9.6.7.** С помощью подсчета размерностей докажите, что не всякая комплексная кривая рода 10 реализуется как гладкая плоская кривая.

**Упражнение 9.6.8.** Оцените степень плоских кривых (с двойными точками), необходимую для того, чтобы представить любую кривую заданного рода  $g$ .

## Глава 10

### Доказательство формулы Римана—Роха

В первом параграфе этой главы мы дадим доказательство формулы Римана—Роха

$$l(D) - l(K - D) = d - g + 1.$$

Во втором параграфе мы приведем геометрическую интерпретацию величин, входящих в формулу Римана—Роха, в терминах канонической кривой.

#### § 10.1. Доказательство

При сравнении чисел  $l(D)$  и  $i(D) = l(K - D)$  полезно знать, что каждому дивизору  $D$  можно сопоставить дивизор  $E$ , для которого  $l(D) = i(E)$  и  $l(E) = i(D)$ . Такое соответствие дает двойственность Брилля—Нётера.

**Теорема 10.1.1** (двойственность Брилля—Нётера). Пусть  $\omega$  — произвольная ненулевая голоморфная 1-форма на  $C$  и  $(\omega) = D + E$ . Тогда  $L(D) \cong \Omega^1(E)$  и  $L(E) \cong \Omega^1(D)$ .

**Доказательство.** По определению пространство  $L(D)$  состоит из мероморфных функций  $f$ , для которых  $(f) \geq -D$ . Поэтому  $(f\omega) = (f) + (\omega) \geq -D + D + E = E$ . Таким образом, формула  $f \mapsto f\omega$  задает отображение  $L(D) \rightarrow \Omega^1(E)$ . Это отображение является изоморфизмом векторных пространств; обратное отображение задается формулой  $\eta \mapsto \frac{\eta}{\omega}$ . Изоморфизм  $L(E) \cong \Omega^1(D)$  следует из того, что дивизоры  $D$  и  $E$  играют одинаковую роль.  $\square$

Согласно теореме Римана—Роха разность  $l(D) - (d - g + 1) = i(D)$  неотрицательна, т. е.  $l(D) \geq d - g + 1$ . Именно это неравенство доказал Риман, а интерпретацию разности  $l(D) - (d - g + 1)$  впоследствии получил Рох. Доказательство теоремы Римана—Роха мы начнем с доказательства неравенства Римана.

**Теорема 10.1.2** (неравенство Римана). Для дивизора  $D$  степени  $d$  на гладкой кривой  $C$  рода  $g$  выполняется неравенство  $l(D) \geq d - g + 1$ .

**Доказательство.** Можно считать, что кривая  $C$  является нормализацией плоской кривой  $C'$ , имеющей только двойные особые точ-

ки. Пусть кривая  $C'$  задана уравнением  $F = 0$  степени  $m$ , причем количество двойных точек равно  $\delta$ . Пусть, далее,  $\{p_i\}$  — двойные точки кривой  $C'$ , а  $\{p_{i1}\}$  и  $\{p_{i2}\}$  — соответствующие им точки кривой  $C$ . Рассмотрим на кривой  $C$  дивизор  $\Delta = \sum_{i=1}^{\delta} (p_{i1} + p_{i2})$ . После замены координат можно считать, что ни точки дивизора  $\Delta$ , ни точки дивизора  $D$  не соответствуют бесконечно удаленным точкам.

Представим дивизор  $D$  в виде  $D = D' - D''$ , где  $D'$  и  $D''$  — неотрицательные дивизоры; пусть  $d'$  и  $d''$  — степени этих дивизоров.

Пусть  $S^n$  — пространство однородных многочленов степени  $n$  от трех переменных; размерность этого векторного пространства равна  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ . Попробуем выбрать в этом пространстве многочлен  $G$  так, чтобы выполнялись следующие два условия:

- 1) многочлен  $F$  не делит  $G$ ;
- 2)  $G \cdot C \geq D' + \Delta$ , где  $G \cdot C$  — дивизор на кривой  $C$ , соответствующий точкам пересечения кривых  $G = 0$  и  $C'$ .

Покажем, что второе условие означает, что коэффициенты многочлена  $G$  должны удовлетворять  $d' + \delta$  линейным уравнениям. Пусть

$$D' = \sum_{i=1}^{\delta} (n_{i1}p_{i1} + n_{i2}p_{i2}) + \sum m_j q_j,$$

где числа  $n_{i1}$ ,  $n_{i2}$ ,  $m_j$  положительны. Тогда

$$D' + \Delta = \sum_{i=1}^{\delta} ((n_{i1} + 1)p_{i1} + (n_{i2} + 1)p_{i2}) + \sum m_j q_j.$$

Для каждого  $i$  неравенство  $G \cdot C \geq (n_{i1} + 1)p_{i1}$  эквивалентно  $n_{i1} + 1$  линейным уравнениям на коэффициенты многочлена  $G$ . Действительно, выберем аффинную систему координат так, чтобы точке  $p_{i1}$  соответствовало начало координат. Тогда в малой окрестности начала координат проекция ветви, на которой лежит точка  $p_{i1}$ , задается уравнением  $y = a_1x + a_2x^2 + \dots$ . При указанной замене координат многочлен  $G(x, y, 1)$  переходит в некоторый многочлен  $\tilde{G}(x, y)$ . Подставив в многочлен  $\tilde{G}(x, y)$  полученное выше выражение  $y = a_1x + a_2x^2 + \dots$ , мы получим многочлен  $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ , коэффициенты которого линейно выражаются через коэффициенты многочлена  $G$ . Неравенство  $G \cdot C \geq (n_{i1} + 1)p_{i1}$  эквивалентно тому, что  $b_0 = b_1 = \dots = b_{n_{i1}} = 0$ . Аналогично неравенство  $G \cdot C \geq (n_{i2} + 1)p_{i2}$  эквивалентно тому, что  $c_0 = c_1 = \dots = c_{n_{i2}} = 0$ , где  $c_0, c_1, \dots$  линейно выражаются через коэффициенты многочлена  $G$  и находятся с помощью описанной выше процедуры. Заметим теперь, что равенства

$b_0 = 0$  и  $c_0 = 0$  эквивалентны. Действительно, каждое из этих равенств эквивалентно равенству  $G(p_i) = 0$ . Таким образом, неравенство

$$G \cdot C \geq (n_{i1} + 1)p_{i1} + (n_{i2} + 1)p_{i2}$$

эквивалентно  $n_{i1} + n_{i2} + 1$  линейным уравнениям. Точке  $q_j$  соответствует неособая точка кривой  $C$ , поэтому неравенство  $G \cdot C \geq m_j q_j$  эквивалентно  $m_j$  линейным уравнениям на коэффициенты многочлена  $G$ . Всего получаем

$$\sum_{i=1}^{\delta} (n_{i1} + n_{i2} + 1) + \sum m_j = \sum_{i=1}^{\delta} (n_{i1} + n_{i2}) + \sum m_j + \delta = d' + \delta$$

линейных уравнений на коэффициенты многочлена  $G$ .

Таким образом, размерность пространства многочленов, для которых выполнено условие 2, не меньше  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - d' - \delta$ . С другой стороны, поскольку степень многочлена  $F$  равна  $m$ , многочлены, которые делятся на  $F$ , образуют пространство  $S^{n-m}$ , размерность которого равна  $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$ . Поэтому если  $n$  достаточно велико, то размерность пространства многочленов, для которых выполнено условие 2, больше размерности пространства многочленов, для которых не выполнено условие 1.

Фиксируем многочлен  $G$ , удовлетворяющий условиям 1 и 2, и рассмотрим дивизор  $E = G \cdot C - D' - \Delta$ . По теореме Безу  $\deg(G \cdot C) = mn$ , поэтому  $\deg E = mn - d' - 2\delta$ . В силу выбора многочлена  $G$  дивизор  $E$  является эффективным. Вычислим размерность пространства

$$S = \{H \in S^n \mid H \cdot C \geq \Delta + E + D''\}.$$

Как было показано выше, условие  $H \cdot C \geq \Delta + E + D''$  эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \delta + \deg E + \deg D'' &= \delta + (mn - d' - 2\delta) + d'' = \\ &= mn - \delta - d' + d'' = mn - \delta - d \end{aligned}$$

линейных уравнений. Поэтому

$$\dim S \geq \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + \delta + d - mn.$$

Сопоставим каждому многочлену  $H \in S$  функцию  $f_H$  на кривой  $C$ , принимающую в точке  $x \in C$  значение  $H/G$  в соответствующей ей точке кривой  $C'$ , т. е.  $f_H = \pi^* \left( \frac{H}{G} \Big|_{C'} \right)$ , где  $\pi: C \rightarrow C'$  — отображение нормализации. Тогда

$$(f_H) + D = (H \cdot C) - (G \cdot C) + D \geq (\Delta + E + D'') - (E + D' + \Delta) + D = 0.$$

Таким образом,  $f \in L(D)$ , и мы получаем отображение  $\alpha: S \rightarrow L(D)$ , заданное формулой  $\alpha(H) = f_H$ . Ясно, что  $\alpha$  — линейное отображение векторных пространств. Ясно также, что  $f_H = 0$  тогда и только тогда, когда многочлен  $H$  обращается в нуль на кривой  $C'$ , т. е.  $H = F \cdot Q$ , где  $Q$  — некоторый многочлен степени  $n - m$ . Следовательно,  $\text{Ker } \alpha = FS^{n-m}$ , и мы получаем инъективное линейное отображение  $\tilde{\alpha}: S/FS^{n-m} \rightarrow L(D)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} l(D) &\geq \dim S - \dim S^{n-m} \geq \\ &\geq \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + \delta + d - mn - \frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2) = \\ &= d - \frac{1}{2}(m^2 - 3m) + \delta = d - g + 1. \end{aligned}$$

При записи последнего равенства мы воспользовались формулой для рода кривой с особыми точками (см. § 4.2).  $\square$

**Следствие 10.1.3.** Если  $d \geq g$ , то  $l(D) \neq 0$ .

Воспользовавшись двойственностью Бриллю—Нётера (теорема 10.1.1), из неравенства Римана можно получить следующее неравенство.

**Теорема 10.1.4.** Для дивизора  $D$  степени  $d$  на гладкой кривой  $C$  рода  $g$  выполняется неравенство  $i(D) \geq g - d - 1$ .

**Доказательство.** Если  $\omega$  — произвольная голоморфная 1-форма на  $C$ , то согласно двойственности Бриллю—Нётера

$$\begin{aligned} i(d) = l((\omega) - D) &\geq \deg((\omega) - D) - g + 1 = \\ &= 2g - 2 - d - g + 1 = g - d - 1. \end{aligned} \quad \square$$

**Следствие 10.1.5.** Если  $d \leq g - 2$ , то  $i(D) \neq 0$ .

Выведем теперь из неравенства Римана теорему Римана—Роха. Пусть дивизор  $D$  эффективный,  $D \geq 0$ .

**Лемма 10.1.6.** Для эффективного дивизора  $D$  выполняется неравенство  $l(D) - l(K - D) \leq d - g + 1$ .

**Доказательство.** Будем рассуждать так же, как в § 9.1. Пусть  $D = \sum d_i p_i$ ,  $d_i > 0$ . Число  $l(D)$  — это размерность пространства мероморфных функций, имеющих в каждой из точек  $p_i \in C$  полюс порядка не выше  $d_i$  и не имеющих других полюсов. Рассмотрим для каждой из точек  $p_i$  пространство главных частей функций в этой точке (см. § 9.1). Оно имеет размерность  $d_i$ , и сумма размерностей всех этих пространств равна  $d$ . Сумма вычетов этих главных частей, спаренных с произвольной голоморфной 1-формой, должна обращаться в нуль. Поскольку пространство голоморфных 1-форм на кривой  $C$

является  $g$ -мерным, на главные части в точках дивизора  $D$  накладываются  $g$  линейных условий. Однако среди этих линейных условий имеется лишь  $g - l(K - D)$  линейно независимых, поскольку  $l(K - D)$  — это размерность пространства голоморфных 1-форм на  $C$ , обращающихся в точках  $p_i$  в нуль с кратностью, по крайней мере равной  $d_i$ . Учитывая то, что в пространстве функций  $L(D)$  имеется одномерное подпространство констант, получаем требуемое неравенство.  $\square$

Как мы знаем из § 9.1, из теоремы Римана—Роха вытекает, что доказанное нестрогое неравенство на самом деле является равенством.

Докажем теперь, что для произвольного дивизора  $D$  выполняется неравенство

$$l(D) - l(K - D) \leq d - g + 1. \quad (10.1)$$

Этого достаточно для доказательства теоремы Римана—Роха, поскольку обратное неравенство вытекает из этого заменой дивизора  $D$  на дивизор  $K - D$ . Действительно,  $\deg(K - D) = 2g - 2 - d$ , а значит, неравенство (10.1) означает, что

$$l(K - D) - l(D) \leq (2g - 2 - d) - g + 1 = g - d - 1,$$

т. е.  $l(D) - l(K - D) \geq d - g + 1$ .

Пусть сначала  $l(D) = 0$ . В этом случае нам достаточно доказать, что

$$l(K - D) \geq g - d - 1 = (2g - 2 - d) - g + 1 = \deg(K - D) - g + 1.$$

Но в точности это утверждает неравенство Римана для дивизора  $K - D$  (теорема 10.1.4).

Если же  $l(D) > 0$ , то существует функция  $f$ , для которой  $(f) + D \geq 0$ . Дивизор  $(f) + D$  линейно эквивалентен дивизору  $D$ . Он положителен, поэтому для него выполняется утверждение леммы, а утверждение теоремы Римана—Роха не меняется от замены дивизора  $D$  линейно эквивалентным ему. Тем самым доказательство теоремы Римана—Роха завершено.  $\square$

## § 10.2. Дивизоры на канонической кривой

В этом параграфе мы обсудим геометрическую интерпретацию чисел  $i(D)$  и  $l(D)$ .

Пусть, как и выше,  $C$  — гладкая кривая рода  $g \geq 3$ , и предположим, что ее каноническое отображение в  $\mathbb{CP}^{g-1}$  является вложением (т. е. кривая  $C$  не гиперэллиптическая). Зафиксируем базис



$\omega_1, \dots, \omega_g$  в пространстве голоморфных 1-форм на  $C$ . Рассмотрим на кривой  $C$  эффективный дивизор  $D = x_1 + \dots + x_d$  степени  $d$  с попарно различными точками  $x_1, \dots, x_d$ , и пусть  $y_j = (\omega_1(x_j) : \dots : \omega_g(x_j))$  — образ точки  $x_j$  на канонической кривой в  $\mathbb{CP}^{g-1}$ . Условие  $(\omega) \geq D$  означает, в частности, что 1-форма  $\omega$  голоморфна, поэтому  $\omega = \sum \lambda_k \omega_k$  для некоторых постоянных  $\lambda_1, \dots, \lambda_g$  и мы можем сопоставить 1-форме  $\omega$  гиперплоскость  $\Pi_\omega$  в  $\mathbb{CP}^{g-1}$ , заданную уравнением  $\sum \lambda_k \omega_k = 0$ . При этом условие  $(\omega) \geq D$  эквивалентно тому, что  $\sum \lambda_k \omega_k(x_j) = 0$ , т.е. гиперплоскость  $\Pi_\omega$  проходит через точки  $y_1, \dots, y_d$ . Таким образом,  $i(D) - 1$  — это размерность пространства гиперплоскостей в  $\mathbb{CP}^{g-1}$ , проходящих через точки  $y_1, \dots, y_d$  канонической кривой. Поэтому если мы обозначим через  $s$  размерность пространства, натянутого на точки  $y_1, \dots, y_d$ , то получим  $i(D) - 1 = (g - 1) - r - 1$ , т.е.  $i(D) = g - 1 - s$ . Подставляя это выражение в соотношение Римана—Роха  $l(D) = d - g + 1 + i(D)$ , получаем  $l(D) = d - s$ , т.е.  $l(D) - 1 = d - s - 1$ . Число  $l(D) - 1$  равно размерности  $r$  полной линейной системы  $|D|$ , поэтому  $s = d - r - 1$ . Таким образом, теорема Римана—Роха для дивизора  $D$  эквивалентна следующему утверждению.

**Теорема 10.2.1.** *Размерность  $r$  полной линейной системы  $|D|$  равна полному числу линейно независимых соотношений между точками  $y_1, \dots, y_d$  канонической кривой; другими словами, точки  $y_1, \dots, y_d$  порождают  $(d - r - 1)$ -плоскость в  $\mathbb{CP}^{g-1}$ .*

Эта теорема непосредственно обобщается на ситуацию, в которой кратность точек, образующих эффективный дивизор  $D$ , может превышать единицу. Если точка  $x_i$  входит в  $D$  с кратностью  $a_i$ , то проходящая через точку  $y_i$  гиперплоскость должна пересекать каноническую кривую в этой точке с кратностью не меньше  $a_i$ . Так, если  $a_i = 2$ , то плоскость должна просто касаться кривой; если  $a_i = 3$ , то касаться с кратностью, не меньшей 3, и т.д. Размерность пространства таких гиперплоскостей и есть  $i(D) - 1$  в случае эффективного дивизора общего вида на негиперэллиптической кривой. Для набора точек  $y_i$  в общем положении на канонической кривой  $C$  размерность соответствующего пространства гиперплоскостей является минимально возможной. При движении точек  $x_i$  дивизора по кривой  $C$  между их образами при каноническом отображении  $y_i$  (рассматриваемыми с учетом кратностей) могут возникать дополнительные линейные зависимости, в результате чего размерность соответствующего пространства гиперплоскостей увеличивается.

## Глава 11

# Точки Вейерштрасса

На кривых рода  $g \geq 2$  точки отличаются друг от друга. Например, каждый нетривиальный автоморфизм такой кривой имеет конечное множество неподвижных точек, и множество точек, которые могут быть неподвижными точками какого-либо нетривиального автоморфизма, также конечно. В этой главе мы обсудим еще один способ выделять точки, обладающие специальными свойствами. Этот способ, принадлежащий Вейерштрассу, также выделяет на всякой кривой конечное множество специальных точек. Это множество тесно связано с множеством неподвижных точек нетривиальных автоморфизмов, но, вообще говоря, не совпадает с ним. В частности, точки Вейерштрасса на кривой существуют, даже если у нее нет нетривиальных автоморфизмов.

Как мы уже видели, на всякой гиперэллиптической кривой есть конечное множество точек, которые могут служить полюсами второго порядка для функций, не имеющих других полюсов. Определение точек Вейерштрасса основано на обобщении этого наблюдения.

### § 11.1. Определение точек Вейерштрасса

Как мы увидим ниже, группа автоморфизмов кривой рода  $g \geq 2$  конечна, поэтому, в отличие от случая меньшего рода, две случайно взятые точки такой кривой, как правило, не эквивалентны между собой: не существует изоморфизма кривой, переводящего первую точку во вторую. Обсудим, какие числовые характеристики можно сопоставить точке  $x$  комплексной кривой  $C$ .

Для натурального числа  $k$  посмотрим на размерность  $l(k \cdot x)$  пространства мероморфных функций с полюсом порядка не выше  $k$  в точке  $x$ , не имеющих других полюсов. Эта размерность связана с размерностью  $i(k \cdot x)$  пространства голоморфных 1-форм с нулем не ниже  $k$ -го порядка в точке  $x$  формулой Римана—Роха

$$l(k \cdot x) = k - g + i(k \cdot x) + 1.$$

При  $k \geq 2g - 1$  значение  $i(k \cdot x)$  равно нулю, поскольку ненулевая голоморфная 1-форма не может иметь нулей порядка выше  $2g - 2$ . Поэтому при таких  $k$  имеем  $l(k \cdot x) = k - g + 1$  для любой точки  $x$ . Тем самым точки кривой не различаются значением  $l(k \cdot x)$  при  $k \geq 2g - 1$ . Ситуация, однако, разительно меняется, если мы будем смотреть на функцию  $l(k \cdot x)$  при  $k \leq 2g - 2$ .

Как мы знаем,  $l(x) = 1$  для любой точки  $x$  кривой  $C$  положительного рода. С другой стороны, на кривой рода  $g \geq 2$  точка  $x$ , для которой  $l(2 \cdot x) = 2$ , существует в том и только в том случае, если эта кривая гиперэллиптическая.

**Упражнение 11.1.1.** Докажите, что на гиперэллиптической кривой рода  $g \geq 2$  количество точек  $x$ , для которых  $l(2 \cdot x) = 2$ , равно по крайней мере  $2g + 2$ .

**Упражнение 11.1.2.** Докажите, что на гиперэллиптической кривой рода  $g \geq 2$  точки  $x$ , для которых  $l(2 \cdot x) = 2$ , являются неподвижными точками гиперэллиптической инволюции.

Свяжем с каждой точкой  $x$  комплексной кривой  $C$  неубывающую последовательность натуральных чисел

$$l(x), l(2 \cdot x), l(3 \cdot x), \dots, l(k \cdot x), \dots$$

При  $g > 0$  эта последовательность начинается с 1, и начиная с  $k = 2g - 1$  она совпадает с линейной последовательностью  $k - g + 1$ .

Значение  $l(k \cdot x)$  может либо совпадать со значением  $l((k - 1) \cdot x)$ , либо быть больше последнего на 1. Второй случай реализуется, если на кривой существует мероморфная функция с полюсом порядка в точности  $k$  в точке  $x$ , не имеющая других полюсов. Поскольку первый элемент последовательности равен 1, а элемент с номером  $2g - 1$  равен  $g$ , среди первых  $2g - 1$  ее элементов есть в точности  $g$ , на которых скачка не происходит. Рассмотрим последовательность  $a_1, \dots, a_g$  из этих  $g$  номеров,  $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_g \leq 2g - 1$ . Они называются *лакунами* точки  $x$ .

**Пример 11.1.3.** Найдем, например, последовательность лагун в точке  $x$  на гиперэллиптической кривой, в которой  $l(2 \cdot x) = 2$ . Поскольку на кривой существует мероморфная функция с полюсом второго порядка в точке  $x$ , на ней существуют и функции с полюсами порядков 4, 6, 8, ... — в качестве таковых можно взять квадрат, куб, четвертую степень и т. д. функции с полюсом второго порядка. Тем самым все четные значения  $k$  не являются лакунами. Это означает, что значения 1, 3, 5, ...,  $2g - 1$  являются лакунами:

в противном случае лакун было бы меньше чем  $g$ . Поэтому все множество значений, не являющихся лакунами, представляет собой объединение множества четных чисел от 2 до  $2g - 2$  и множества всех натуральных чисел начиная с  $2g$ .

**Упражнение 11.1.4.** Докажите, что множество *нелакун* в любой точке (т. е. таких натуральных чисел  $k$ , что существует мероморфная функция с полюсом в точности  $k$ -го порядка в данной точке) образует полугруппу относительно сложения: вместе с любыми двумя элементами  $k_1, k_2$  оно содержит их сумму  $k_1 + k_2$ .

Задача Гурвица о независимом описании всех полугрупп, которые могут встречаться в качестве полугруппы нелакун точки Вейерштрасса, до сих пор не решена полностью.

**Упражнение 11.1.5.** Выведите из предыдущего упражнения *теорему Клиффорда*: если кривая  $C$  негиперэллиптическая, то для любой точки  $x \in C$  имеет место неравенство  $l(kx) < \frac{k}{2} + 1$  при  $k = 1, \dots, 2g - 1$ .

В общей точке кривой  $C$  имеем  $a_i = i$ , при  $i = 1, \dots, g$ , т. е. подскоки начинаются с  $(g + 1)$ -го элемента. Если это не так, т. е.  $l(k \cdot x) = 2$  для некоторого  $k \leq g$ , то точка  $x$  называется *точкой Вейерштрасса*. Эквивалентное определение точки Вейерштрасса состоит в том, что  $l(g \cdot x) \geq 2$ , т. е. на  $C$  существует функция с единственным полюсом в точке  $x$ , порядок которого не превосходит  $g$ . Точка, в которой лакуны имеют вид

$$1, 2, 3, \dots, g - 1, g + 1,$$

называется *нормальной точкой Вейерштрасса*.

Ниже мы покажем, что точки Вейерштрасса существуют на любой кривой рода  $g \geq 2$ .

### § 11.2. Точки Вейерштрасса кривых рода 3 и точки перегиба плоских кватрик

Пусть  $C$  — гладкая плоская кватрика, т. е. кривая степени 4 на проективной плоскости. Как мы знаем, род кватрики равен  $3 \cdot 2/2 = 3$ . Согласно теореме Римана—Роха для любой точки кватрики существует функция с полюсом порядка 4 в этой точке.

Пусть теперь  $A \in C$  — простая точка перегиба этой кривой (см. § 3.3). Касательная к  $C$  в точке  $A$  трансверсально пересекает кривую  $C$  еще в одной точке — точке  $B$ . Поэтому проекция кривой  $C$  из точки  $B$  является разветвленным накрытием степени 3 проек-

тивной прямой, причем одна из точек образа (а именно, отвечающая прямой  $AB$ ) имеет единственный прообраз. Выбрав координату на проективной прямой, образованной прямыми, проходящими через точку  $B$ , так, что прямая  $AB$  имеет координату  $\infty$ , мы получаем мероморфную функцию степени 3 на кривой  $C$ , имеющую полюс 3-го порядка в точке  $A$ . Это означает, что точка  $A$  является точкой Вейерштрасса кривой  $C$ .

На общей гладкой кватерике имеется  $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$  простых точек перегиба, и каждая из них является точкой Вейерштрасса. Точки перегиба необщих кватерик необязательно просты.

Гладкие плоские кватерики — это канонические кривые рода 3. Точки Вейерштрасса кривых более высоких родов являются обобщениями точек перегиба канонических кривых.

**Упражнение 11.2.1.** Вычислите лакуны в простой точке перегиба плоской кватерики.

**Упражнение 11.2.2.** Найдите точки перегиба кватерики Клейна  $x^3y + y^3z + z^3x = 0$  и опишите действие группы автоморфизмов этой кривой на множестве точек перегиба.

### § 11.3. Веса точек Вейерштрасса

Зафиксируем на кривой  $C$  базис из голоморфных 1-форм и некоторую координату  $z$  в окрестности точки  $x$ . Пусть базисные 1-формы в этой координате записываются в виде  $\varphi_1(z)dz, \dots, \varphi_g(z)dz$ . Назовем *весом* точки  $x$  порядок нуля в ней функции

$$W(z) = \begin{vmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \dots & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \dots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{vmatrix},$$

— определителя матрицы, называемой *матрицей Вронского*. Эта функция называется *вронскианом* системы функций  $\varphi_1(z), \dots, \varphi_g(z)$ . Поскольку любой базис в пространстве голоморфных дифференциалов на кривой линейно выражается через любой другой базис и это выражение распространяется на производные любого порядка функций  $\varphi_i(z)$ , порядок нуля вронскиана в точке не зависит от выбора базиса в этом пространстве.

**Утверждение 11.3.1.** Точка  $x$  кривой  $C$  рода  $g \geq 2$  является точкой Вейерштрасса в том и только в том случае, если ее вес больше нуля, т. е. если вронскиан базиса голоморфных 1-форм обращается в точке  $x$  в нуль.

**Доказательство.** Для удобства изменим выбранный базис в пространстве голоморфных 1-форм следующим образом (элементы нового базиса будем обозначать теми же буквами). В качестве первого элемента базиса возьмем голоморфную 1-форму  $\omega_1$ , значение которой в точке  $x$  отлично от нуля (как мы знаем, все голоморфные 1-формы не могут обращаться в нуль одновременно, поэтому такая 1-форма существует). Пространство  $\Omega^1(C)$  голоморфных 1-форм на  $C$  раскладывается в прямую сумму 1-форм, пропорциональных  $\omega_1$ , и  $(g-1)$ -мерного подпространства 1-форм, обращающихся в нуль в точке  $x$ .

Пусть теперь  $b_2$  — минимальный порядок нуля в точке  $x$  у 1-форм, лежащих в этом подпространстве. Выберем 1-форму  $\omega_2$ , порядок нуля которой в точности равен  $b_2$ . Представим пространство  $\Omega^1(C)$  в виде прямой суммы плоскости, натянутой на 1-формы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , и  $(g-2)$ -мерного подпространства, состоящего из голоморфных 1-форм, порядок нуля которых строго больше  $b_2$ . В качестве 1-формы  $\omega_3$  выберем произвольную 1-форму из этого подпространства, имеющую минимально возможный порядок нуля  $b_3$ .

Последующие порядки нулей  $b_i$  определяются аналогично, и 1-формы  $\omega_i$  выбираются аналогичным образом. В результате мы получаем последовательность натуральных чисел  $b_g > b_{g-1} > \dots > b_2 > b_1 = 0$  и такой базис  $\omega_1, \dots, \omega_g$  в пространстве голоморфных 1-форм, что порядок нуля 1-формы  $\omega_i$  в точке  $x$  равен  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, g$ . Матрица Вронского в точке  $x$  в этом базисе оказывается верхнетреугольной, поскольку  $b_i \geq i - 1$  для всех  $i$ . Более того, эта матрица ступенчатая, причем высота каждой ненулевой ступеньки в ней равна 1. Вронскиан же отличен от нуля в том и только в том случае, если для всех  $i = 2, \dots, g$  выполняется равенство  $b_i = i - 1$ . Действительно, только в этом случае все элементы на диагонали верхнетреугольной матрицы Вронского ненулевые.

С другой стороны, мероморфная функция с единственным полюсом порядка  $g$  в точке  $x$  на кривой  $C$  существует в том и только в том случае, если для некоторой ненулевой главной части

$$f(z) = \frac{c_{-g}}{z^g} + \frac{c_{-g+1}}{z^{g-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z}$$

выполняется условие  $\text{Res}_{z=0} f \omega_i = 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, g$ . Если  $b_g = g - 1$ , т. е.  $b_i = i - 1$  для всех  $i$ , то условие  $\text{Res}_{z=0} f \omega_g = 0$  является линейным условием на коэффициент  $c_{-g}$ , из которого вытекает, что этот коэффициент равен нулю. Тогда из условия  $\text{Res}_{z=0} f \omega_{g-1} = 0$

вытекает, что и коэффициент  $c_{-g+1}$  равен нулю. Рассуждая последовательно, мы приходим к выводу, что все коэффициенты главной части  $f$ , а значит, и сама эта главная часть, равны нулю.

Если же  $b_g > g - 1$ , то уравнение  $\text{Res}_{z=0} f \omega_g = 0$  выполняется автоматически, а система уравнений  $\text{Res}_{z=0} f \omega_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, g - 1$ , является системой из  $g - 1$  однородных линейных уравнений на  $g$  неизвестных коэффициентов  $c_{-1}, \dots, c_{-g}$  и имеет, следовательно, нетривиальное решение.  $\square$

Обращение вронскиана в нуль в некоторой точке  $x \in C$  означает, что в этой точке каноническая кривая «инфинитезимально уплощается» — аналогично тому, как это происходит в точках перегиба плоской кватрики.

**Следствие 11.3.2.** Сумма весов всех точек Вейерштрасса на кривой рода  $g$  равна  $(g - 1)g(g + 1)$ .

**Доказательство.** Порядок нуля определителя, стоящего в определении веса точки Вейерштрасса, не зависит от выбора локальной координаты в окрестности точки. Поэтому для подсчета суммарного веса всех точек Вейерштрасса достаточно подсчитать сумму порядков нулей вронскиана. Всякая 1-форма  $\omega$  есть сечение кокасательного расслоения. Ее производная есть не что иное, как сечение тензорного квадрата этого расслоения. Если в локальной координате  $z$  1-форма  $\omega$  имеет вид  $\omega = \varphi(z)dz$ , то ее производная — это  $\varphi'(z)(dz)^2$ . Аналогично  $i$ -я производная — это  $\varphi^{(i)}(z)(dz)^{i+1}$ .

Тем самым нули вронскиана — это нули сечения тензорного произведения первой, второй, ...,  $g$ -й тензорных степеней кокасательного расслоения. Дивизор нулей такого сечения имеет степень

$$\begin{aligned} (2g - 2) + 2 \cdot (2g - 2) + 3 \cdot (2g - 2) + \dots + g \cdot (2g - 2) &= \\ = (2g - 2)(1 + 2 + \dots + g) &= (2g - 2) \frac{g(g + 1)}{2} = (g - 1)g(g + 1), \end{aligned}$$

что и требовалось.  $\square$

**Упражнение 11.3.3.** Докажите, что число точек Вейерштрасса на любой кривой конечно.

**Пример 11.3.4.** На общей плоской кватрике мы нашли 24 точки Вейерштрасса. С другой стороны, суммарный вес всех точек Вейерштрасса на кривой рода 3 равен  $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ . Поэтому вес каждой из точек перегиба равен 1 и других точек Вейерштрасса на кватрике нет.

В процессе доказательства утверждения о вронскиане мы сопоставили каждой точке кривой возрастающую последовательность

**Утверждение 11.3.5.** Последовательность лакун  $a_1, \dots, a_g$  и последовательность порядков нулей базисных 1-форм  $b_1, \dots, b_g$  следующим образом выражаются друг через друга:

**Утверждение 11.3.5.** Последовательность лакун  $a_1, \dots, a_g$  и последовательность порядков нулей базисных 1-форм  $b_1, \dots, b_g$  следующим образом выражаются друг через друга:

$$a_g = g + \sum_{i=1}^g (b_i - i + 1);$$

$$a_{g-1} = (g-1) + \sum_{i=1}^{g-1} (b_i - i + 1);$$

.....

$$a_2 = 2 + (b_2 - 1 + 1);$$

$$a_1 = 1.$$

**Доказательство** вытекает из соображений двойственности — если разность  $b_{i+1} - b_i$  превосходит 1, то условие на вычет  $\text{Res}_{z=0} f \omega = 0$  не накладывает дополнительных ограничений на коэффициенты главной части функции  $f$  и размерность пространства решений увеличивается на 1. Так,  $a_2 = 2$  при  $b_2 = 1$ , т. е. если существует голоморфная 1-форма, равная нулю в точке  $x$ , производная которой в этой точке отлична от нуля, и  $a_2 = 3$ , если  $b_2 = 2$ . Последующие значения лакун вычисляются аналогичным образом.  $\square$

**Следствие 11.3.6.** Вес точки Вейерштрасса равен  $\sum_{i=1}^g (a_i - i)$ , где  $a_1, \dots, a_g$  — последовательность лакун этой точки.

В частности, вес нормальной точки Вейерштрасса, т. е. точки с последовательностью лакун  $1, 2, \dots, g-1, g+1$ , равен

$$(1-1) + (2-2) + \dots + ((g-1)-(g-1)) + ((g+1)-g) = 1.$$

Тем самым если все точки Вейештрасса на кривой рода  $g$  нормальные, то их количество равно  $(g-1)g(g+1)$ .

**Упражнение 11.3.7.** Найдите вес точек Вейерштрасса, для которых  $l(2 \cdot x) = 2$ , на гиперэллиптических кривых. Воспользовавшись



полученным результатом, убедитесь в том, что других точек Вейерштрасса на гиперэллиптических кривых нет. Докажите, что для кривых данного рода эти точки имеют максимально возможный вес.

**Упражнение 11.3.8.** Проверьте, что кривая Ферма  $x^4 + y^4 = 1$  имеет 12 точек «двойного» перегиба, каждая из которых является точкой Вейерштрасса веса 2.

**Упражнение 11.3.9.** Докажите, что на негиперэллиптической кривой рода  $g \geq 2$  есть по крайней мере  $2g + 6$  точек Вейерштрасса.

Наше обсуждение позволяет сделать некоторые выводы о точках на кривой, переводимых друг в друга ее автоморфизмами:

- никакой автоморфизм кривой не может перевести точку кривой, не являющуюся точкой Вейерштрасса, в точку Вейерштрасса и наоборот;
- если автоморфизм кривой переводит одну точку Вейерштрасса в другую, то у этих точек одинаковые последовательности лакун.

Разумеется, совпадения последовательности лакун недостаточно для того, чтобы одну точку Вейерштрасса можно было перевести в другую автоморфизмом кривой.

**Упражнение 11.3.10.** Приведите пример кривой и двух таких точек Вейерштрасса с совпадающими последовательностями лакун на ней, что эти точки нельзя перевести друг в друга автоморфизмом кривой.

#### § 11.4. Точки Вейерштрасса и конечность группы автоморфизмов

Всякий автоморфизм кривой рода  $g \geq 2$  должен переводить множество точек Вейерштрасса кривой в себя. Воспользовавшись этим фактом, мы можем теперь доказать конечность группы автоморфизмов кривой. Для этого достаточно показать, что конечна группа автоморфизмов кривой, оставляющих все точки Вейерштрасса неподвижными.

**Лемма 11.4.1.** *Нетривиальный автоморфизм кривой рода  $g \geq 2$  не может иметь больше чем  $2g + 2$  неподвижных точек.*

**Доказательство.** Пусть автоморфизм  $\eta$  кривой имеет  $s$  неподвижных точек. Пусть  $D$  — дивизор, состоящий из  $g + 1$  различных точек, никакая из которых не является неподвижной точкой автоморфизма  $\eta$ . Применение теоремы Римана—Роха

$$l(D) - l(K - D) = (g + 1) - g + 1 = 2$$

к этому дивизору показывает, что существует непостоянная функция  $f$  с полюсами первого порядка в точках дивизора  $D$  (хотя, быть может, не во всех этих точках). Функция  $f - f \circ \eta$  непостоянна и имеет не более чем  $2g + 2$  полюсов первого порядка и по крайней мере  $s$  нулей (каждая неподвижная точка автоморфизма  $\eta$  является нулем этой функции). Поэтому  $s \leq 2(g + 1)$ .  $\square$

**Следствие 11.4.2.** *Группа автоморфизмов кривой рода  $g \geq 2$  конечна.*

**Доказательство.** Если  $x$  — точка Вейерштрасса и  $l(2 \cdot x) = 2$ , то ее вес равен  $\frac{g(g-1)}{2}$ , и это максимально возможный вес точки Вейерштрасса. Поэтому на кривой рода  $g \geq 2$  имеется не менее  $2(g + 1)$  точек Вейерштрасса, причем такое количество точек достигается лишь в случае гиперэллиптической кривой. Если кривая негиперэллиптическая, то количество точек Вейерштрасса на ней превосходит  $2(g + 1)$ , значит, группа автоморфизмов, сохраняющих эти точки, тривиальна, а следовательно, группа всех автоморфизмов кривой конечна.

Если же кривая гиперэллиптическая, то единственным ее нетривиальным автоморфизмом, сохраняющим все точки Вейерштрасса, является гиперэллиптическая инволюция. Действительно, пусть  $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  — гиперэллиптическое накрытие, и пусть  $\eta: C \rightarrow C$  — автоморфизм кривой  $C$ , сохраняющий точки Вейерштрасса, т. е. точки ветвления отображения  $f$ . Тогда функция  $f \circ \eta: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  имеет те же критические значения, что и  $f$ , а значит, совпадает либо с  $f$ , либо с результатом применения к  $f$  гиперэллиптической инволюции.  $\square$

Следующее утверждение показывает, что точки Вейерштрасса и неподвижные точки автоморфизмов тесно связаны и в общем случае.

**Упражнение 11.4.3.** Докажите лемму Шёнберга (Schoeneberg): если число неподвижных точек нетривиального автоморфизма кривой рода  $g \geq 2$  больше 4, то эти неподвижные точки являются точками Вейерштрасса.

## Глава 12

### Теорема Абеля

Линейные расслоения над данной комплексной кривой находятся во взаимно однозначном соответствии с классами линейной эквивалентности дивизоров на этой кривой. У такого класса имеется целочисленная характеристика — его степень. Поскольку дивизоры состоят из точек кривой, естественно ожидать, что множество классов дивизоров одинаковой степени наделено дополнительными структурами. Оно должно быть топологическим пространством, более того — комплексным многообразием. Теорема Абеля отождествляет пространство классов дивизоров нулевой степени на кривой рода  $g$  с некоторым  $g$ -мерным комплексным тором — якобианом кривой.

В частности, теорема Абеля дает ответ на вопрос, какие дивизоры  $D$  представляются в виде  $D = (f)$ , где  $f$  — некоторая мероморфная функция. Такие дивизоры, очевидно, удовлетворяют условию  $\deg D = 0$ , поскольку у любой мероморфной функции сумма порядков всех нулей и полюсов равна 0.

Пространство классов дивизоров ненулевой степени имеет такой же вид, как и пространство классов дивизоров степени 0, однако его изоморфизм с якобианом не является каноническим. Помимо описания пространства линейных расслоений геометрия якобиана несет большое количество другой информации о структуре кривой.

#### § 12.1. Якобиан

Пусть  $\gamma$  — путь на кривой  $C$ . Интеграл по такому пути определяет линейный функционал  $\gamma: \Omega^1(C) \rightarrow \mathbb{C}$  на пространстве голоморфных 1-форм на  $C$ ,  $\gamma: \omega \mapsto \int_{\gamma} \omega$ . По теореме Стокса этот функционал определяется классом гомотопической эквивалентности пути  $\gamma$  среди всех путей с данными началом и концом. Если путь  $\gamma$  замкнут, то задаваемый им функционал определяется соответствующим элементом группы первых гомологий  $[\gamma] \in H_1(C, \mathbb{Z})$  (если два пути

представляют один и тот же класс гомологий, то отвечающие им функционалы одинаковы, даже в том случае, когда пути гомотопически неэквивалентны).

Все функционалы, отвечающие замкнутым путям, образуют дискретную подгруппу в  $g$ -мерном векторном пространстве  $(\Omega^1(C))^{\vee}$ , двойственном пространстве голоморфных 1-форм на кривой  $C$  рода  $g$ . Более того, с помощью лемм 7.4.1 и 7.4.2 несложно показать, что эта подгруппа является полной решеткой — ее ранг равен  $2g$ . В качестве образующих этой решетки можно взять набор функционалов, построенных по произвольному базису в  $H_1(C, \mathbb{Z})$ . Построенная решетка называется *решеткой периодов* кривой  $C$ .

Факторгруппа пространства  $(\Omega^1(C))^{\vee}$  по решетке периодов представляет собой  $g$ -мерный комплексный тор. Этот тор называется *якобианом* кривой  $C$  и обозначается  $J(C)$ .

**Пример 12.1.1.** Якобианы эллиптических кривых одномерны, т. е. сами являются эллиптическими кривыми. Более того, якобиан всякой эллиптической кривой изоморфен ей самой. Действительно, пусть эллиптическая кривая  $C$  является результатом факторизации комплексной прямой  $\mathbb{C}$  с координатой  $z$  по решетке, натянутой на векторы 1 и  $\tau$ . Выберем в  $H_1(C, \mathbb{Z})$  базис, состоящий из параллели и меридиана тора, т. е. из классов кривых, представленных как результат факторизации отрезка  $[0, 1]$  и отрезка  $[0, \tau]$  в  $\mathbb{C}$  соответственно.

Первая кривая определяет на  $\Omega^1(C)$  линейный функционал, значение которого на базисной голоморфной 1-форме  $\omega = dz$  равно

$$\int_0^1 \omega = 1,$$

вторая — функционал, имеющий значение

$$\int_0^{\tau} \omega = \tau,$$

откуда и следует, что  $J(C) = C$ .

Уже этот пример показывает, что якобианы различных кривых одного рода, вообще говоря, не биголоморфны друг другу.

**Замечание 12.1.2.** В отличие от исходной эллиптической кривой, на ее якобиане всегда имеется выделенная точка — тождественно равный нулю функционал, т. е. результат проектирования опре-

деляющей якобиан решетки. Нулевой функционал задает выделенную точку на якобиане произвольной кривой.

Пусть  $q \in C$  — некоторая фиксированная точка, а  $\omega$  — некоторая голоморфная форма на  $C$ . Для каждой точки  $p \in C$  определен интеграл  $\int_q^p \omega$  вдоль произвольного пути из  $q$  в  $p$ . При выборе другого пути к этому интегралу добавляется целочисленная линейная комбинация интегралов формы  $\omega$  по базисным путям, т. е. значение на  $\omega$  некоторого элемента решетки. Тем самым каждой паре точек  $q, p$  на кривой  $C$  однозначно сопоставляется точка  $\int_q^p$  якобиана  $J(C)$ . Поэтому при заданной точке  $q$  корректно определено отображение Абеля—Якоби  $u_q: C \rightarrow J(C)$ , заданное формулой

$$u_q: p \mapsto \int_q^p,$$

которое продолжается и до отображения пространства дивизоров  $u_q: \text{Div}(C) \rightarrow J(C)$ ,

$$u_q: D = \sum_{i=1}^k n_i p_i \mapsto \sum_{i=1}^k n_i \int_q^{p_i}.$$

Ясно, что это отображение является гомоморфизмом групп. В частности, для дивизоров нулевой степени

$$D = \sum_{i=1}^k p_i - \sum_{i=1}^k q_i \in \text{Div}^0(C)$$

получаем

$$u(D) = \sum_{i=1}^k \int_q^{p_i} - \sum_{i=1}^k \int_q^{q_i} = \sum_{i=1}^k \int_{q_i}^{p_i}.$$

Это отображение уже не зависит от выбора начальной точки  $q \in C$ .

Теорема Абеля утверждает, что дивизор  $D \in \text{Div}^0(C)$  можно представить в виде  $D = (f)$ , где  $f$  — мероморфная функция, тогда и только тогда, когда  $u(D) = 0$ . Верно даже следующее более точное утверждение.

**Теорема 12.1.3** (Абель—Якоби). Пусть  $L^*(C)$  — группа по умножению мероморфных функций на  $C$ , отличных от тождественно

равной нулю функции, а отображение  $(\ )$  сопоставляет функции  $f$  ее дивизор  $(f)$ . Тогда последовательность гомоморфизмов

$$L^*(C) \xrightarrow{(\ )} \text{Div}^0(C) \xrightarrow{u} J(C) \rightarrow 0$$

точна, т. е.  $\text{Ker } u = \text{Im}(\ )$  и отображение  $u$  сюръективно.

Теорему Абеля—Якоби можно переформулировать следующим образом. Факторгруппу  $\text{Div}^0(C)/\text{Im}(\ ) = \text{Pic}(C)$  называют *многообразием Пикара* кривой  $C$ . Теорема Абеля—Якоби утверждает, что отображение  $\text{Pic}(C) \rightarrow J(C)$ , индуцированное отображением Абеля—Якоби  $u$ , является изоморфизмом.

Утверждение о том, что отображение  $u: \text{Div}^0 \rightarrow J(C)$  сюръективно, часто называют *теоремой обращения Якоби*.

### § 12.2. Доказательство необходимости

Докажем, что условие  $u(D) = 0$  необходимо для того, чтобы дивизор  $D$  представлялся в виде  $D = (f)$ . Пусть  $f$  — мероморфная функция степени  $d$  на кривой  $C$ . Для  $t \in \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  рассмотрим эффективный дивизор  $D_t = f^{-1}(t) \in \text{Div}(C)$ . Ясно, что

$$D = (f) = f^{-1}(0) - f^{-1}(\infty) = D_0 - D_\infty,$$

поэтому, чтобы доказать, что  $u(D) = 0$ , достаточно доказать, что  $u(D_t) = \text{const}$ .

Пусть точка  $t_0 \in \mathbb{CP}^1$  такова, что над ней у  $f$  нет точек ветвления, т. е. ее прообраз  $f^{-1}(t_0) = \{p_1(t_0), \dots, p_d(t_0)\}$  состоит в точности из  $d$  точек. Тогда над достаточно малой окрестностью  $U(t_0)$  точки  $t_0$  отображение  $f$  является (неразветвленным) накрытием и прообраз  $f^{-1}(U(t_0))$  окрестности  $U(t_0)$  представляет собой несвязное объединение  $d$  биголоморфных ей окрестностей. Обозначим эти окрестности через  $U_1, \dots, U_d$ , а прообраз точки  $t \in U(t_0)$ , лежащий в окрестности  $U_j$ , через  $p_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Положим  $D_t = f^{-1}(t) = p_1(t) + \dots + p_d(t)$ . Тогда для любой голоморфной 1-формы  $\omega$  и выбранной точки  $q$  выполняется равенство

$$u_q(D_t)(\omega) = \int_q^{p_1(t)} \omega + \dots + \int_q^{p_d(t)} \omega.$$

Мы хотим доказать, что для некоторой, а значит, и для любой, точки  $q$  значение  $u_q(D_t)(\omega)$  не зависит от  $t$  для любой 1-формы  $\omega$ .

Вычислим производную каждого слагаемого по  $t$  в точке  $t_0$ . Поскольку ограничение отображения  $f$  на каждую окрестность  $U_j$  является биголоморфным отображением,  $t$  является локальной координатой и в каждой окрестности  $U_j$ . Пусть 1-форма  $\omega$  записывается в этой координате в виде  $\varphi(t)dt$ , где функция  $\varphi(t)$  голоморфна. Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_q^{p_j(t)} \omega \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \int_q^t \varphi(t)dt \Big|_{t=t_0} = \varphi(t_0).$$

Результат этого вычисления можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_q^{p_j(t)} \omega \Big|_{t=t_0} = 2\pi i \operatorname{Res}_{p_j(t_0)} \frac{\omega}{f-t_0}.$$

Действительно, мы проверили выполнение последнего равенства в локальной координате  $t$  в окрестности  $U_j$ , а в силу инвариантности его правой части оно выполняется и в любой другой координате. Кроме того, в силу произвольности выбора точки  $t_0$  в окрестности  $U(t_0)$ , мы заключаем, что для любого  $t$  выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} \int_q^{p_j(t)} \omega = 2\pi i \operatorname{Res}_{p_j(t)} \frac{\omega}{f-t}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_q(D_t)(\omega) &= \frac{d}{dt} \int_q^{p_1(t)} \omega + \dots + \frac{d}{dt} \int_q^{p_n(t)} \omega = \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{p_1(t)} \frac{\omega}{f-t} + \dots + 2\pi i \operatorname{Res}_{p_n(t)} \frac{\omega}{f-t} = 0, \end{aligned}$$

поскольку сумма вычетов мероморфной 1-формы  $\frac{\omega}{f-t}$  на компактной кривой равна нулю.  $\square$

### § 12.3. Начало доказательства достаточности

Мы начинаем доказывать, что условие  $u(D) = 0$  достаточно для того, чтобы дивизор  $D$  представлялся в виде  $D = (f)$ . Пусть для дивизора  $D \in \operatorname{Div}^0(C)$  выполняется равенство  $u(D) = 0$ . Требуется найти мероморфную функцию  $f$ , для которой  $D = (f)$ . Сделаем некоторые предварительные замечания.

Пусть  $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  — мероморфная функция. Рассмотрим ее логарифмический дифференциал — мероморфную 1-форму  $\alpha_f = \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f}$  на  $C$ . Эта 1-форма обладает следующими свойствами:

1) ее дивизор полюсов  $(\alpha_f)_\infty$  состоит из нулей и полюсов функции  $f$ , причем все полюсы 1-формы простые;

2) в каждом полюсе  $p_j$  выполняется равенство  $\text{Res}_{p_j} \alpha_f = \frac{n_j}{2\pi i}$ , где  $n_j$  — ненулевое целое число, причем  $\sum_j n_j = 0$ ;

3) интеграл от 1-формы  $\alpha_f$  по любому замкнутому пути на  $C$  — целое число.

**Теорема 12.3.1.** Пусть мероморфная 1-форма  $\alpha$  обладает перечисленными выше свойствами. Фиксируем точку  $q \in C$  и положим

$$f_q(p) = \exp\left(2\pi i \int_q^p \alpha\right),$$

где интеграл берется по любому пути из  $q$  в  $p$ , не проходящему через полюсы 1-формы  $\alpha$ . Тогда  $f_q$  — мероморфная функция на кривой  $C$ ,

для которой  $(f_q) = \sum_{j=1}^k n_j p_j = D$ .

Заметим, что если 1-форма  $\alpha$  обладает свойством 3, то она обладает и свойством 2: вычет 1-формы в полюсе пропорционален ее интегралу по маленькому замкнутому пути с центром в этом полюсе.

**Доказательство.** Проверим, что  $f_q(p)$  не зависит от выбора пути из  $q$  в  $p$ . Пусть  $I$  и  $I'$  — два интеграла  $\int_q^p \alpha$  по двум разным путям из  $q$  в  $p$ . Свойство 3 гарантирует, что число  $I - I'$  целое, поэтому  $\exp(2\pi i I) = \exp(2\pi i I')$ , а значит, функция  $f_q(p)$  мероморфна. Совпадение вычетов 1-форм  $\alpha$  и  $\alpha_{f_q}$  в полюсах вытекает непосредственно из определения функции  $f_q$ .  $\square$

## § 12.4. Абелевы дифференциалы первого, второго и третьего рода

Мероморфные (в том числе и голоморфные) дифференциальные 1-формы на кривой  $C$  называют также абелевыми дифференциалами. При этом голоморфную 1-форму называют абелевым дифференциалом первого рода; мероморфную 1-форму, у которой все



вычеты равны нулю, называют абелевым дифференциалом *второго рода* (абелев дифференциал первого рода тоже считается абелевым дифференциалом второго рода), а произвольную мероморфную 1-форму называют абелевым дифференциалом *третьего рода*.

Назовем *элементарным дифференциалом третьего рода* мероморфную 1-форму  $\alpha$ , у которой есть два полюса  $p$  и  $q$ , причем эти полюсы простые и  $\operatorname{Res}_p \alpha = \frac{1}{2\pi i}$ ,  $\operatorname{Res}_q \alpha = -\frac{1}{2\pi i}$ .

**Теорема 12.4.1.** Для любых двух различных точек  $p$  и  $q$  кривой  $C$  существует элементарный дифференциал третьего рода  $\alpha$ , для которого  $(\alpha)_\infty = p + q$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать, что существует мероморфная 1-форма  $\alpha$ , для которой  $(\alpha)_\infty = p + q$ . Действительно, тогда  $p$  — простой полюс 1-формы  $\alpha$ , поэтому  $\operatorname{Res}_p \alpha \neq 0$ . Кроме того, по теореме о вычетах  $\operatorname{Res}_p \alpha + \operatorname{Res}_q \alpha = 0$ . Поэтому после умножения 1-формы  $\alpha$  на подходящее число получаем требуемую 1-форму.

Для дивизора  $D = -(p + q)$ , где  $p$  и  $q$  — различные точки кривой  $C$  рода  $g$ , степень которого равна  $-2$ , по теореме Римана—Роха получаем

$$l(D) - i(D) = -2 + 1 - g.$$

Учитывая, что  $l(D) = 0$  (поскольку не бывает голоморфных функций, имеющих нули), заключаем, что  $i(D) = g + 1$ . Это означает, что пространство мероморфных 1-форм, имеющих полюсы не выше первого порядка в точках  $p$  и  $q$  и не имеющих других полюсов, имеет размерность  $g + 1$  — большую, чем размерность пространства голоморфных 1-форм. В частности, существует 1-форма с полюсами в точности первого порядка в каждой из точек  $p$  и  $q$ .  $\square$

**Пример 12.4.2.** В случае  $g = 0$  такую 1-форму легко написать. Так, если точки  $p$  и  $q$  имеют координаты  $0$  и  $\infty$  соответственно, то требуемая 1-форма имеет вид  $dz/z$ . Для переноса полюсов в другую пару точек достаточно применить соответствующее дробно-линейное преобразование.

**Упражнение 12.4.3.** Для заданной пары точек на эллиптической кривой выразите мероморфную 1-форму, имеющую полюсы первого порядка в этих точках, через голоморфную 1-форму и функцию Вейерштрасса кривой.

Мы постепенно приближаемся к завершению доказательства достаточности. Пусть  $D = \sum_{j=1}^k p_j - \sum_{j=1}^k q_j \in \operatorname{Div}^0(C)$ , где точки  $p_j$  (а так-

же  $q_j$ ) не обязательно различны. Построим 1-формы  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  так, что  $(\alpha_j)_\infty = p_j + q_j$ ,  $\text{Res}_{p_j} \alpha_j = \frac{1}{2\pi i}$  и  $\text{Res}_{q_j} \alpha_j = -\frac{1}{2\pi i}$ . Положим  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ . Тогда  $\alpha$  — дифференциал третьего рода, обладающий двумя первыми требуемыми свойствами. Для любой голоморфной 1-формы  $\omega$  дифференциал  $\alpha + \omega$  тоже обладает двумя первыми свойствами. Попробуем подобрать  $\omega$  так, чтобы он обладал и третьим свойством. Для этого нам понадобятся билинейные соотношения Римана, которым мы посвятим отдельный параграф.

### § 12.5. Билинейные соотношения Римана

Пусть  $C$  — риманова поверхность рода  $g$ . Выберем на ней замкнутые кривые  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ , классы гомологий которых порождают группу гомологий  $H_1(C, \mathbb{Z})$ , с индексами пересечений

$$(\gamma_j, \gamma_{j+g}) = -(\gamma_{j+g}, \gamma_j) = 1 \quad \text{для } j = 1, \dots, g$$

и с остальными индексами пересечения, равными нулю. Для голоморфной 1-формы  $\omega$  рассмотрим периоды  $\pi_j(\omega) = \int_{\gamma_j} \omega$ ,  $j = 1, \dots, 2g$ .

**Теорема 12.5.1** (билинейные соотношения Римана). *Для любых голоморфных 1-форм  $\omega$  и  $\alpha$ , отличных от нуля, выполняются соотношения*

$$\sum_{j=1}^g (\pi_j(\omega) \pi_{j+g}(\alpha) - \pi_{j+g}(\omega) \pi_j(\alpha)) = 0,$$

$$i \sum_{j=1}^g (\pi_j(\omega) \overline{\pi_{j+g}(\alpha)} - \pi_{j+g}(\omega) \overline{\pi_j(\alpha)}) > 0,$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

**Доказательство.** Риманову поверхность, соответствующую кривой  $C$ , можно склеить из  $4g$ -угольника  $P$ , стороны которого при склейке переходят в кривые  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ . Каждая из кривых склеена из двух сторон многоугольника  $P$ . Ту из них, ориентация которой вдоль границы многоугольника совпадает с ориентацией пути  $\gamma_j$ , мы обозначим через  $c_j$ , а вторую сторону — с противоположной ориентацией — через  $c_j^{-1}$ . Фиксируем в многоугольнике точку  $q$ . Формула

$v_q(p) = \int_q^p \omega$  задает однозначную функцию на многоугольнике  $P$ , поскольку он односвязен.

По формуле Стокса  $\int_{\partial P} v_q \alpha = \int_P d(v_q \alpha) = 0$ . Вычислим теперь интеграл  $\int_{\partial P} v_q \alpha$  другим способом. Разобьем стороны многоугольника  $P$  на четверки, отвечающие парам кривых  $\gamma_j$  и  $\gamma_{j+g}$  для  $j = 1, \dots, g$ :

$$\int_{\partial P} v_q \alpha = \sum_{j=1}^g \left( \int_{c_j} v_q \alpha + \int_{c_{g+j}} v_q \alpha + \int_{c_j^{-1}} v_q \alpha + \int_{c_{g+j}^{-1}} v_q \alpha \right).$$

Далее,

$$\int_{c_j} v_q \alpha + \int_{c_j^{-1}} v_q \alpha = \int_{\gamma_j} ((v_q(p) - v_q(p')) \alpha),$$

где  $p, p'$  — точки, в которые переходят концы сторон  $c_j$  и  $c_j^{-1}$  при склейке. При этом

$$v_q(p) - v_q(p') = \int_{p'}^p \omega = \int_{p'}^q \omega - \int_{p'}^q \omega + \int_p^q \omega = - \int_{\gamma_{g+j}} \omega = -\pi_{g+j}(\omega).$$

Таким образом,

$$\int_{c_j} v_q \alpha + \int_{c_j^{-1}} v_q \alpha = -\pi_{g+j}(\omega) \int_{\gamma_j} \alpha = -\pi_{g+j}(\omega) \pi_j(\alpha).$$

Аналогично

$$\int_{c_{j+1}} v_q \alpha + \int_{c_{j+1}^{-1}} v_q \alpha = \pi_j(\omega) \pi_{g+j}(\alpha),$$

и мы получаем требуемое равенство.

Чтобы доказать требуемое неравенство, нужно рассмотреть дифференциальную форму  $iv_q \bar{\omega}$ . Форма  $\omega$  голоморфна, поэтому  $d\bar{\omega} = 0$ . Следовательно,  $d(iv_q \bar{\omega}) = i\omega \wedge \bar{\omega}$  и

$$i \int_{\partial P} v_q \bar{\omega} = i \iint_P d(v_q \bar{\omega}) = i \iint_P \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны.  $\square$

**Замечание 12.5.2.** Билинейные соотношения Римана можно переписать следующим образом. Пусть  $I_g$  — единичная матрица порядка  $g$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ , а  $\Pi$  — матрица периодов, т. е.  $g \times 2g$ -матрица с элементами  $\int_{\gamma_j} \omega_i$ . Тогда

$\Pi Q \Pi^T = 0$  и матрица  $i \Pi Q \bar{\Pi}^T$  эрмитова положительно определенная.

Мы доказали билинейные соотношения Римана для некоторого выделенного базиса  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$  одномерных гомологий. Докажем их для произвольного канонического базиса  $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2g}$ , т. е. такого базиса, что индекс пересечения кривых  $\gamma'_i$  и  $\gamma'_{i+g}$  равен 1 для  $i = 1, \dots, g$ , а остальные пары кривых имеют нулевой индекс пересечения. Пусть  $\Gamma$  — столбец элементов  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ , а  $\Gamma'$  — столбец элементов  $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2g}$ . Тогда  $\Gamma' = A\Gamma$  для некоторой квадратной матрицы  $A$  с целочисленными элементами. Каноничность базисов означает, что  $\Gamma\Gamma^T = Q$  и  $\Gamma'(\Gamma')^T = Q$ , следовательно,  $S\Gamma\Gamma^T S^T = Q$  и  $SQ S^T = Q$ . Матрицу  $S$ , удовлетворяющую соотношению  $SQ S^T = Q$ , называют *симплектической*. Легко проверить, что матрица, транспонированная к симплектической, сама является симплектической.

Если  $\Pi$  — матрица периодов для базиса  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ , а  $\Pi'$  — матрица периодов для базиса  $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2g}$ , то  $\Pi' = \Pi S^T$ . Поэтому

$$\Pi' Q (\Pi')^T = \Pi S^T Q S \Pi^T = \Pi Q \Pi^T = 0$$

и

$$i\Pi' Q \bar{\Pi}'^T = i\Pi S^T Q \bar{S} \bar{\Pi}^T = i\Pi S^T Q S \bar{\Pi}^T = i\Pi Q \bar{\Pi}^T.$$

Матрицу периодов  $\Pi$  можно упростить, выбрав подходящий базис в пространстве голоморфных форм  $\Omega^1(C)$ . Запишем матрицу периодов в виде  $\Pi = (A, B)$ , где  $A$  и  $B$  — квадратные  $g \times g$ -матрицы. В терминах этих матриц билинейные соотношения Римана означают следующее: 1)  $AB^T = BA^T$ ; 2) матрица  $i(\bar{A}\bar{B}^T - B\bar{A}^T)$  положительно определенная. Из второго свойства, в частности, следует, что матрица  $A$  невырожденная. Поэтому можно воспользоваться матрицей  $(A^T)^{-1}$ , чтобы преобразовать базис пространства  $\Omega^1(C)$ . После этого преобразования матрица периодов примет вид  $\Pi' = (I_g, Z)$ , где  $I_g$  — единичная ( $g \times g$ )-матрица. Матрицу  $Z$  называют *нормализованной матрицей периодов*. Для нормализованной матрицы периодов билинейные соотношения Римана означают следующее:

$$1) Z = Z^T;$$

2) вещественная матрица  $\text{Im } Z$ , состоящая из мнимых частей матрицы  $Z$ , положительно определена.

### § 12.6. Завершение доказательства достаточности

Пусть  $D = \sum_{j=1}^k p_j - \sum_{j=1}^k q_j \in \text{Div}^0(C)$ , причем точки  $p_j$  (и  $q_j$ ) здесь могут повторяться. Построим элементарные дифференциалы третьего

рода  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  так, что  $\alpha_j$  имеет простые полюсы в точках  $p_j$  и  $q_j$ , причем  $\text{Res}_{p_j} \alpha_j = \frac{1}{2\pi i}$  и  $\text{Res}_{q_j} \alpha_j = -\frac{1}{2\pi i}$ . Положим  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ . Выберем кривые  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ , представляющие базис одномерных гомотопий римановой поверхности  $C$ ; можно считать, что ни одна из этих кривых не проходит через полюсы 1-форм  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Выберем базис  $\omega_1, \dots, \omega_g$  голоморфных 1-форм так, чтобы матрица периодов имела вид  $(I_g Z)$ . Пусть

$$\alpha' = \alpha - \sum_{s=1}^g \left( \int_{\gamma_s} \alpha \right) \omega_s.$$

Полюсы и вычеты у 1-формы  $\alpha'$  такие же, как у 1-формы  $\alpha$ . Кроме того, для  $j = 1, \dots, g$  получаем

$$\int_{\gamma_j} \alpha' = \int_{\gamma_j} \alpha - \sum_{s=1}^g \left( \int_{\gamma_s} \alpha \right) \int_{\gamma_j} \omega_s = \int_{\gamma_j} \alpha - \sum_{s=1}^g \left( \int_{\gamma_s} \alpha \right) \pi_j(\omega_s) = \int_{\gamma_j} \alpha - \int_{\gamma_j} \alpha = 0$$

(мы воспользовались тем, что  $\pi_j(\omega_s) = \delta_{js}$ ).

Будем считать, что риманова поверхность  $C$  стандартным образом склеена из многоугольника  $P$ . Фиксируем точку  $b \in P$  и для данной голоморфной 1-формы  $\omega$  положим  $v_b(p) = \int_b^p \omega$ . Так мы определим голоморфную функцию на многоугольнике. Мероморфный дифференциал  $v_b \alpha'$  имеет те же полюсы, что и  $\alpha$ . По теореме о вычетах

$$2\pi i \sum_{j=1}^k (\text{Res}_{p_j}(v_b \alpha') - \text{Res}_{q_j}(v_b \alpha')) = \int_{\partial P} v_b \alpha'.$$

Ясно, что

$$2\pi i \sum_{j=1}^k (\text{Res}_{p_j}(v_b \alpha') - \text{Res}_{q_j}(v_b \alpha')) = \sum_{j=1}^k (v_b(p_j) - v_b(q_j)) = \sum_{j=1}^k \int_{q_j}^{p_j} \omega.$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 12.5.1, получаем

$$\int_{\partial P} v_b \alpha' = \sum_{j=1}^g (\pi_j(\omega) \pi_{g+j}(\alpha') - \pi_{g+j}(\omega) \pi_j(\alpha')) = \sum_{j=1}^g \pi_j(\omega) \pi_{g+j}(\alpha'),$$

поскольку  $\pi_j(\alpha') = 0$ . Если мы положим  $\omega = \omega_s$  для  $s = 1, \dots, g$ , то получим

$$\sum_{j=1}^k \int_{q_j}^{p_j} \omega = \sum_{j=1}^g \pi_j(\omega_s) \pi_{g+j}(\alpha') = \pi_{g+s}(\alpha'),$$

поскольку  $\pi_j(\omega_s) = \delta_{js}$ .

Пока мы не пользовались тем, что  $D \in \text{Ker}(u: \text{Div}^0(C) \rightarrow J(C))$ . Будем теперь предполагать, что дивизор  $D$  обладает этим свойством. Это означает, что сумма интегралов по отрезкам  $[q_j, p_j]$  является элементом решетки периодов, т. е. целочисленной линейной комбинацией интегралов по базисным циклам:

$$\sum_{j=1}^k \int_{q_j}^{p_j} = \sum_{l=1}^{2g} m_l \int_{\gamma_l} = \sum_{l=1}^g \left( m_l \int_{\gamma_l} + m_{g+l} \int_{\gamma_{g+l}} \right),$$

где числа  $m_l$  целые. В частности, для всякой базисной 1-формы  $\omega_s$  имеем

$$\sum_{j=1}^k \int_{q_j}^{p_j} \omega_s = m_s + \sum_{l=1}^g m_{g+l} \int_{\gamma_{g+l}} \omega_s.$$

Свойство  $Z = Z^T$  означает, что  $\int_{\gamma_{g+l}} \omega_s = \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l$ , поэтому

$$\sum_{j=1}^k \int_{q_j}^{p_j} \omega_s = m_s + \sum_{l=1}^g m_{g+l} \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l.$$

Таким образом,

$$\pi_{g+s}(\alpha') = m_s + \sum_{l=1}^g m_{g+l} \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l.$$

Покажем, что 1-форма

$$\alpha'' = \alpha' - \sum_{l=1}^g m_{g+l} \omega_l$$

обладает всеми требуемыми свойствами. Действительно, поскольку  $\pi_s(\omega_l) = \delta_{ls}$  и  $\int_{\gamma_s} \alpha' = 0$ , мы получаем

$$\int_{\gamma_s} \alpha'' = \int_{\gamma_s} \alpha' - \sum_{l=1}^g m_{g+l} \int_{\gamma_s} \omega_l = -m_{g+s} \in \mathbb{Z}.$$

А поскольку

$$\pi_{g+s}(\alpha') = m_s + \sum_{l=1}^g m_{g+l} \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l,$$

мы получаем

$$\int_{\gamma_{g+s}} \alpha'' = \pi_{g+s}(\alpha') - \sum_{l=1}^g m_{g+l} \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l = m_s \in \mathbb{Z}.$$

□

### § 12.7. Доказательство теоремы обращения Якоби

Мы докажем несколько более общее утверждение, чем то, которое приведено на с. 165, см. теорему 12.7.5. Предварительно сделаем некоторые замечания.

Пусть  $C$  — гладкая кривая. Симметрической степенью  $C^{(d)}$ ,  $d = 1, 2, \dots$ , кривой  $C$  называют множество эффективных дивизоров  $D = p_1 + \dots + p_d$  степени  $d$  (среди точек  $p_1, \dots, p_d$  могут быть совпадающие). Симметрическая степень — это то же самое, что множество неупорядоченных наборов  $\{p_1, \dots, p_d\}$  точек кривой.

**Теорема 12.7.1.** *Симметрическая степень  $C^{(d)}$  имеет структуру комплексного многообразия размерности  $d$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим прямое произведение  $C^d = C \times \dots \times C$ ; ясно, что оно имеет структуру комплексного многообразия. Топологическое пространство  $C^{(d)}$  является фактором пространства  $C^d$  по действию группы перестановок  $S_d$  множества  $\{1, 2, \dots, d\}$ , заданному формулой

$$\rho(p_1, \dots, p_d) = (p_{\rho(1)}, \dots, p_{\rho(d)}), \quad \rho \in S_d.$$

Следовательно, пространство  $C^{(d)}$  компактно и хаусдорфово.

Введем на  $C^{(d)}$  локальные координаты. Пусть  $D = k_1 p_1 + \dots + k_l p_l$  — эффективный дивизор степени  $d$ ; здесь точки  $p_1, \dots, p_l$  попарно различны. Выберем в окрестности точки  $p_j$  локальную координату  $z_j$ . Тогда набор

$$(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{k_1 1}, \dots, \sigma_{1l}, \dots, \sigma_{k_l l}),$$

где  $\sigma_{rj}(z_j^{(1)}, \dots, z_j^{(k_j)})$  —  $r$ -я элементарная симметрическая функция от  $k_j$  переменных  $z_j^{(1)}, \dots, z_j^{(k_j)}$  в окрестности точки  $(p_j, \dots, p_j)$ , определяет локальные голоморфные координаты в окрестности точки  $D \in C^{(d)}$ . Для доказательства этого достаточно проверить, что отображение  $(z_1, \dots, z_k) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ , где  $\sigma_i = \sigma_i(z_1, \dots, z_k)$ , задает локальные координаты в окрестности нуля в  $\mathbb{C}^{(k)}$ . В действительности это отображение задает гомеоморфизм  $\mathbb{C}^{(k)} \rightarrow \mathbb{C}^k$ . Взаимная однозначность этого отображения следует из того, что его можно рассматривать как сопоставление набору корней многочлена набор его коэффициентов. Для доказательства непрерывности обратного отображения удобно продолжить отображение  $\mathbb{C}^{(k)} \rightarrow \mathbb{C}^k$  до отображения  $(\mathbb{CP}^1)^{(k)} \rightarrow \mathbb{CP}^k$ . Это отображение, очевидно, непрерывно и является взаимно однозначным отображением компактного про-

пространства на хаусдорфово, а такое отображение всегда является гомеоморфизмом.  $\square$

Пусть  $D \in \text{Div}(C)$  и  $\deg D = d$ . Рассмотрим снова пространство  $L(D)$ , состоящее из мероморфных функций  $f$ , для которых  $(f) + D \geq 0$ . Размерность этого пространства равна  $l(D)$ . Каждой функции  $f \in L(D)$  можно сопоставить эффективный дивизор  $E = (f) + D$  степени  $d$ , который является точкой многообразия  $C^{(d)}$ . Функциям  $f$  и  $\lambda f$ , где  $\lambda \neq 0$  — число, сопоставляется один и тот же дивизор, поэтому мы получаем отображение

$$\alpha_D: \mathbb{CP}^{l(D)-1} \rightarrow C^{(d)}, \quad [f] \mapsto E = (f) + D,$$

где  $[f]$  — класс эквивалентности функции  $f \in L(D) = \mathbb{C}^{l(D)}$  в проективном пространстве.

Проверим, что это отображение  $\alpha_D$  мономорфно. Пусть  $\alpha_D[f] = \alpha_D[g]$ . Тогда  $(f) = (g)$ , поэтому  $(f/g) = 0$ . Следовательно,  $f/g$  — ненулевая константа, т. е.  $[f] = [g]$ . Таким образом, проективизацию пространства  $L(D)$  можно рассматривать как подмножество в  $C^{(d)}$ . В действительности это подмножество является подмногообразием. Чтобы убедиться в этом, докажем, что отображение  $\alpha_D$

голоморфно. Пусть  $D = \sum_{j=1}^k m_j p_j$ , где все точки  $p_j$  попарно различны.

Пусть  $l(d) = n + 1$ ; фиксируем базис  $f_0, f_1, \dots, f_n$  пространства  $L(D)$ .

Любую функцию из  $L(D)$  можно представить в виде  $\sum_{j=0}^n \lambda_j f_j = f_\lambda$ .

Набор  $(\lambda_0 : \dots : \lambda_n)$  является однородными координатами точки  $[f_\lambda]$  в проективизации пространства  $L(D)$ . Отображение  $\alpha_D$  задается формулой  $\lambda \mapsto E_\lambda = (f_\lambda) + D$ . Фиксируем точку  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_0 : \dots : \tilde{\lambda}_n)$  и проверим, что отображение  $\alpha_D$  голоморфно вблизи нее.

Пусть в дивизор  $(f_\lambda)$  помимо точек  $p_1, \dots, p_k$  входят точки  $p_{k+1}, \dots, p_{k+l}$ . Выберем окрестности точек  $p_1, \dots, p_{k+l}$  так, чтобы они попарно не пересекались. Пусть  $W$  — объединение этих окрестностей. Построим мероморфную функцию  $g$  на  $W$  так, чтобы она была тождественно равна 1 в окрестностях точек  $p_{k+1}, \dots, p_{k+l}$  и дивизор  $(g)$  совпадал с  $D$  в окрестностях точек  $p_1, \dots, p_k$ . Тогда для  $\lambda$  вблизи  $\tilde{\lambda}$  выполняется равенство  $E_\lambda = (f_\lambda g)$ .

Можно считать, что  $\tilde{\lambda}_0 \neq 0$ . Тогда для точек вблизи  $\tilde{\lambda}$  мы получаем  $(\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n) = (1 : \mu_1 : \dots : \mu_n)$ , где  $\mu_j = \lambda_j / \lambda_0$ . Положим  $f_{(\mu)} = f_0 + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_n f_n$ . Произведение  $f_{(\mu)} g$  можно рассматривать



как функцию от  $\mu$  и от точки из  $W$ . Вблизи  $\tilde{\mu} = \left( \frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_0} : \dots : \frac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_0} \right)$  и точек  $p_1, \dots, p_{k+l}$  функция  $f_{(\mu)}g$  голоморфна, поскольку в рассматриваемой области  $E_\lambda \geq 0$ . Голоморфность отображения  $\alpha_D$  следует теперь из приведенной ниже леммы.

**Лемма 12.7.2.** Пусть  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$  и  $z \in \mathbb{C}$ . Предположим, что функция  $h(\mu, z)$  голоморфна в точке  $(0, 0)$  и функция  $h(0, z)$  имеет нуль порядка  $k$  в точке  $z = 0$ . Тогда можно выбрать  $\rho > 0$  и  $\varepsilon > 0$  так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) для любого  $\mu_0 \in U_\rho = \{\mu \in \mathbb{C}^n \mid |\mu_j| < \rho, j = 1, \dots, n\}$  функция  $h(\mu_0, z)$  имеет ровно  $k$  корней  $z_1(\mu_0), \dots, z_n(\mu_0)$  в области  $|z| < \varepsilon$ ;
- 2) на множестве  $U_\rho$  все  $k$  элементарных симметрических функций от  $z_1(\mu), \dots, z_n(\mu)$  являются голоморфными функциями от  $\mu$ .

**Доказательство.** Функция  $h(0, z)$  имеет в точке  $z = 0$  изолированный нуль, поэтому можно выбрать  $\varepsilon > 0$  так, чтобы при  $|z| = \varepsilon$  для некоторого  $\delta > 0$  выполнялось равенство  $|h(0, z)| \geq \delta$ . Затем можно выбрать  $\rho > 0$  так, чтобы при  $|z| = \varepsilon$  и  $\mu \in U_\rho$  выполнялось неравенство  $|h(\mu, z)| \geq \delta/2$ .

Если  $f(z) = c_0(z-a)^r + c_1(z-a)^{r+1} + \dots$ , где  $c_0 \neq 0$ , то  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{r}{z-a} + \dots$ , поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z^m \frac{f'(z)}{f(z)} = r$$

для любого положительно ориентированного контура  $C$ , содержащего точку  $a$  и не содержащего других нулей или полюсов функции  $f$ . Таким образом, для голоморфной функции  $f$  интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}$$

равен числу ее нулей внутри контура  $C$ . Легко также видеть, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z^m \frac{f'(z)}{f(z)}$$

равен  $z_1^m + \dots + z_k^m$ , где  $z_1, \dots, z_k$  — нули функции  $f$ , расположенные внутри контура  $C$ .

Пусть

$$s_m(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} z^m \frac{\partial h(\mu, z)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{h(\mu, z)},$$

где  $t = 0, 1, \dots, k$ . Функция  $s_m$  голоморфна на  $U_\rho$ . Функция  $s_0(\mu)$  равна числу нулей функции  $h(\mu, z)$  в круге  $|z| < \varepsilon$  при фиксированном  $\mu$ . Она непрерывна на  $U_\rho$  и принимает только целые значения, поэтому  $\sigma_0(\mu) = k$  для всех  $\mu \in U_\rho$ . Первое утверждение леммы доказано. Чтобы доказать второе утверждение, достаточно выразить элементарные симметрические функции от  $z_1, \dots, z_k$  через суммы степеней  $z_1^m + \dots + z_k^m$ .  $\square$

Обозначим через  $|D|$  образ проективизации пространства  $L(D)$  при отображении  $\alpha_D$ . Ограничение на  $C^{(d)}$  отображения Абеля—Якоби  $u: \text{Div}(C) \rightarrow J(C)$  мы будем по-прежнему обозначать  $u$ . В дальнейшем мы будем считать, что точка  $q \in C$  фиксирована.

Дивизор  $D = p_1 + \dots + p_d$ , где точки  $p_1, \dots, p_d$  попарно различны, называют *общим*. Отображение  $u: C^{(d)} \rightarrow J(C)$  голоморфно в окрестности общего дивизора  $D$  и локально ограничено, поэтому по теореме Римана о продолжении оно голоморфно на всем многообразии  $C^{(d)}$ .

**Теорема 12.7.3.** *Каждый слой отображения  $u: C^{(d)} \rightarrow J(C)$  является проективным пространством, а именно, для любого дивизора  $D \in C^{(d)}$  имеет место равенство  $u^{-1}(u(D)) = |D|$ .*

**Доказательство.** Проверим сначала, что  $u^{-1}(u(D)) \subset |D|$ . Пусть для дивизора  $E \in C^{(d)}$  выполняется равенство  $u(E) = u(D)$ . Тогда  $u(E - D) = 0$ , поэтому по теореме Абеля существует мероморфная функция  $f$ , для которой  $E - D = (f)$ , т. е.  $E = (f) + D$ . Из условия  $E \in C^{(d)}$  следует, в частности, что  $E \geq 0$ , поэтому  $f \in L(D)$ . Следовательно,  $E = \alpha_D([f]) \in |D|$ .

Проверим теперь, что  $u^{-1}(u(D)) \supset |D|$ . Предположим, что  $E \in |D|$ , т. е. существует мероморфная функция  $f$ , для которой  $E = (f) + D$ . Тогда по теореме Абеля

$$u(E) = u((f)) + u(D) = 0 + u(D) = u(D),$$

а значит,  $E \in u^{-1}(u(D))$ .  $\square$

Выясним, как устроен дифференциал отображения  $u: C^{(d)} \rightarrow J(C)$  при  $d \leq g$ . Пусть  $D \in C^{(d)}$ . Тогда дифференциал отображения  $u$  в точке  $D$  — это отображение касательных пространств

$$(u_*)_D: T_D(C^{(d)}) \rightarrow T_{u(D)}(J(C)).$$

Пусть  $D = p_1 + \dots + p_d$  — общий дивизор, а  $z_j$  — локальная координата в окрестности точки  $p_j$ . Тогда  $(z_1, \dots, z_d)$  — локальные координаты в окрестности точки  $D$  в  $C^{(d)}$ . Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_g$  — базис пространства голоморфных 1-форм; в окрестности точки  $p_j$  получаем

$\omega_\alpha = f_{\alpha j}(z_j)dz_j$ , где  $f_{\alpha j}(z_j)$  — голоморфная функция. В окрестности точки  $D$  отображение Абеля—Якоби представляется в виде

$$\begin{aligned} u(z_1, \dots, z_d) &= (u_1(z_1, \dots, z_d), \dots, u_g(z_1, \dots, z_d)) = \\ &= \left( \sum_{j=1}^d \int_q^{z_j} f_{1j}(z_j)dz_j, \dots, \sum_{j=1}^d \int_q^{z_j} f_{gj}(z_j)dz_j \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(u_*)_D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial u_g}{\partial z_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial z_d} & \dots & \frac{\partial u_g}{\partial z_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(p_1) & \dots & f_{g1}(p_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{1d}(p_d) & \dots & f_{gd}(p_d) \end{pmatrix}$$

и ранг матрицы  $(u_*)_D$  равен рангу так называемой *матрицы Брилля—Нётера*  $\begin{pmatrix} \omega_1(p_1) & \dots & \omega_g(p_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1(p_d) & \dots & \omega_g(p_d) \end{pmatrix}$ .

Пусть  $C$  — кривая рода  $g \geq 2$ . Рассмотрим каноническое отображение  $\varphi_K: C \rightarrow \mathbb{CP}^{g-1}$ , сопоставляющее точке  $p \in C$  точку  $(\omega_1(p) : \dots : \omega_g(p)) \in \mathbb{CP}^{g-1}$ . Пусть  $D = p_1 + \dots + p_d$  — общий дивизор. Ранг матрицы  $(u_*)_D$  равен рангу матрицы Брилля—Нётера, который, в свою очередь, равен размерности векторного пространства, натянутого на  $\varphi_K(p_1), \dots, \varphi_K(p_d)$ . Поэтому если мы обозначим через  $\varphi_K(D)$  размерность проективного пространства, натянутого на  $\varphi_K(p_1), \dots, \varphi_K(p_d)$ , то получим  $\text{rank}(U_*)_D = \dim \varphi_K(D) - 1$ .

В алгебраической геометрии словосочетание «общий объект некоторого семейства, параметризованного комплексным многообразием, обладает данным свойством» означает, что все объекты, не обладающие данным свойством, могут быть параметризованы подмногообразием строго меньшей размерности.

**Теорема 12.7.4.** Пусть  $C$  — гладкая кривая рода  $g \geq 1$ . Тогда для общей точки  $D \in C^{(g)}$  выполняется равенство  $\text{rank}(u_*)_D = g$ .

**Доказательство.** Если  $g = 1$ , то  $(u_*)_p = \omega(p) \neq 0$  для любой точки  $p$ . В этом случае равенство  $\text{rank } u_* = 1$  выполняется для всех точек.

Пусть теперь  $g \geq 1$ . Требуется доказать, что дивизоры  $D = p_1 + \dots + p_g \in C^{(g)}$ , для которых выполняется неравенство  $\text{rank}(u_*)_D \leq g - 1$ , лежат в подмногообразии в  $C^{(g)}$ , размерность которого меньше  $\dim C^{(g)} = g$ . По предположению  $\dim \varphi_K(D) \leq g - 2$ , т. е. существует

$(g - 2)$ -мерное проективное подпространство  $H$  в  $\mathbb{CP}^{g-1}$ , содержащее все точки  $\varphi_K(p_j)$ . Подпространство  $H$  не может содержать компоненту канонической кривой  $\varphi_K(C)$ . Действительно, если бы равенство  $\sum \lambda_s \omega_s(p) = 0$  выполнялось для всех  $p$ , то 1-формы  $\omega_1, \dots, \omega_g$  были бы линейно зависимы. Поэтому число точек пересечения подпространства  $H$  с канонической кривой  $\varphi_K(C)$  не превосходит степени канонической кривой  $\varphi_K(C)$ , которая равна  $2g - 2$  (степени дивизора нулей голоморфной 1-формы). Таким образом, количество дивизоров  $D \in C^{(d)}$ , для которых все точки  $\varphi_K(p_j)$  лежат в  $H$ , не превосходит  $2g - 2$ . Многообразию проективных подпространств размерности  $g - 2$  в  $\mathbb{CP}^{g-1}$  изоморфно  $\mathbb{CP}^{g-1}$ , т.е. имеет размерность  $g - 1$ . Каждому такому подпространству соответствует не более  $2g - 2$  точек  $D$ , поэтому искомые точки  $D$  лежат в многообразии, размерность которого не превосходит  $g - 1$ .  $\square$

Докажем теперь усиленную версию теоремы обращения Якоби.

**Теорема 12.7.5.** *Отображение Абеля—Якоби  $u: C^{(g)} \rightarrow J(C)$  сюръективно и в общей точке инъективно.*

**Доказательство.** Нам потребуется следующее свойство голоморфных отображений комплексных многообразий одной и той же размерности.

**Лемма 12.7.6.** *Пусть  $X$  и  $Y$  — связные компактные комплексные многообразия одной и той же размерности. Предположим, что голоморфное отображение  $f: X \rightarrow Y$  обладает двумя следующими свойствами: 1) прообраз  $f^{-1}(y)$  каждой точки  $y \in Y$  связан; 2) дифференциал  $f_*$  в общей точке является изоморфизмом касательных пространств. Тогда отображение  $f$  сюръективно и в общей точке инъективно.*

**Доказательство.** Подмножество  $f(X) \subset Y$  является подмногообразием. Если дифференциал  $f_*$  в точке  $x_0$  является изоморфизмом, то  $f$  отображает некоторую открытую окрестность точки  $x_0$  на открытую окрестность точки  $f(x_0)$ . Поэтому  $f(X)$  — подмногообразие в  $Y$ , содержащее открытое в  $Y$  множество. Для связного замкнутого многообразия  $Y$  это означает, что  $f(X) = Y$ . Таким образом,  $f$  сюръективно.

По теореме Сарда для общей точки  $x \in X$  дифференциал  $f_*$  является изоморфизмом для всех точек  $x' \in f^{-1}(f(x))$ . Поэтому по теореме об обратной функции для общей точки  $x \in X$  множество  $f^{-1}(f(x))$  дискретно. Но по предположению множество  $f^{-1}(f(x))$  связано для любой точки  $x \in X$ , поэтому оно состоит из одной точки.  $\square$

Остается проверить, что отображение Абеля—Якоби обладает обоими свойствами, сформулированными в лемме. Но мы уже знаем, что для любого дивизора  $D \in C^{(d)}$  множество  $u^{-1}(u(D)) = |D|$  является образом проективизации пространства  $L(D)$  при голоморфном отображении  $\alpha$ . Кроме того, по теореме 12.7.4 дифференциал отображения Абеля—Якоби в общей точке является изоморфизмом.  $\square$

Теорема обращения Якоби теперь легко получается из теоремы 12.7.5. Фиксируем точку  $p \in C$  и обозначим через  $C^{(g)} - g \cdot p$  множество дивизоров вида  $D - g \cdot p$ , где  $D \in C^{(g)}$ ; каждый из этих дивизоров имеет степень 0. Ограничение отображения Абеля—Якоби  $u$  на  $C^{(g)} - g \cdot p$  сюръективно, поэтому ограничение отображения  $u$  на  $C^{(g)} - g \cdot p$  тоже сюръективно. Следовательно, ограничение отображения  $u$  на  $\text{Div}^0(C)$  сюръективно.

### § 12.8. $\theta$ -дивизор и $\theta$ -функции

Образы симметрических степеней  $C^{(d)}$  кривой  $C$  в якобиане  $J(C)$  относительно отображения Абеля—Якоби  $u_q$  при  $d = 1, \dots, g - 1$  являются в нем выделенными подмногообразиями размерности  $d$ . Они определены инвариантно с точностью до сдвига — изменение начальной точки  $q$  приводит к сдвигу образа отображения Абеля—Якоби. В частности, имеется естественное отображение в якобиан самой кривой  $C$  и ее  $(g - 1)$ -й симметрической степени  $C^{(g-1)}$ . Образ последнего отображения является многомерным дивизором — подмногообразием коразмерности 1 в многообразии размерности  $g$ . Он называется  $\theta$ -дивизором.

Мы видели, что по дивизору на кривой (точнее, по классу линейно эквивалентных дивизоров) строится линейное расслоение на ней. Аналогично по дивизору в многообразии большой размерности строится линейное расслоение над этим многообразием. В частности,  $\theta$ -дивизор в  $J(C)$  определяет линейное расслоение над  $J(C)$ ; оно называется  $\theta$ -расслоением. Его многозначные сечения называются  $\theta$ -функциями — их можно рассматривать как функции на пространстве  $(\Omega^1(C))^{\vee}$ , результатом факторизации которого является тор  $J(C)$ .

$\theta$ -функции имеют многообразные применения, и их изучению посвящена обширная литература.

## Глава 13

# Примеры пространств модулей

Мы уже обсуждали в § 6.3, как выглядит пространство модулей эллиптических кривых, т. е. кривых рода 1. Это довольно типичный пример, на котором можно проследить многие черты, общие для всех пространств модулей. В этой главе мы более подробно его изучим и рассмотрим примеры других пространств модулей. С самого начала мы будем говорить о пространствах модулей кривых с отмеченными точками — свойства таких пространств можно изучать «на пальцах» уже для кривых малых родов, и эти свойства глубоко нетривиальны. С ростом рода кривых геометрия пространств их модулей усложняется, и ее полное описание, как правило, недоступно. Несмотря на это, многие важные геометрические характеристики пространств модулей кривых высоких родов удастся вычислить.

### § 13.1. Первые примеры

Мы начинаем строить пространства  $\mathcal{M}_{g,n}$  модулей кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками. Мы предполагаем, что  $n \geq 3$  при  $g=0$  и  $n \geq 1$  при  $g=1$ . При таких ограничениях группа автоморфизмов кривой с отмеченными точками конечна. Причину их введения мы обсудим ниже. Точки считаются занумерованными, т. е. в качестве отношения эквивалентности берутся биголоморфизмы кривой, переводящие каждую из отмеченных точек в отмеченную точку с тем же номером. Как правило, мы будем обозначать отмеченные точки  $x_1, \dots, x_n$ .

Согласно вычислению Римана (см. § 9.5) при  $g \geq 2$  размерность пространства  $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0}$  равна  $3g - 3$ . Добавление каждой отмеченной точки увеличивает размерность пространства модулей на 1, поэтому  $\dim \mathcal{M}_{g,n} = 3g - 3 + n$ . Последняя формула справедлива для произвольных значений  $g$  и  $n$ , удовлетворяющих сформулированным выше ограничениям.

Пространство модулей  $\mathcal{M}_{0,3}$  устроено совсем просто: как мы знаем из § 6.1, любые две тройки точек на проективной прямой переводятся друг в друга автоморфизмом проективной прямой, т. е.

дробно-линейным преобразованием. Поэтому  $\mathcal{M}_{0,3}$  состоит из одной точки. Эту точку можно представлять себе проективной прямой с фиксированной координатой  $z$ , причем отмеченные точки имеют координаты  $0, 1$  и  $\infty$ .

Пространство модулей  $\mathcal{M}_{0,4}$  естественным образом отождествляется с проективной прямой с тремя проколотыми точками (выбор проколов, согласно приведенному выше рассуждению, не важен). При фиксированных точках  $x_1, x_2, x_3$  на проективной прямой четвертая точка  $x_4$  может занимать любое положение, не совпадающее с положением ни одной из первых трех точек. Положение этой четвертой точки и является параметром на пространстве модулей. Если точки  $x_1, x_2, x_3, x_4$  в произвольной координате на проективной прямой имеют координаты соответственно  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , то значение этого параметра выражается двойным отношением (см. § 3.2, с. 53)

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Если в выбранной нами координате точки  $x_1, x_2, x_3$  имеют координаты  $z_1 = 0, z_2 = 1$  и  $z_3 = \infty$ , то координата  $z_4$  четвертой отмеченной точки  $x_4$  не может принимать значений  $0, 1$  и  $\infty$ , а все остальные значения принимает.

Случай эллиптических (т.е. рода  $g = 1$ ) кривых с  $n = 1$  более сложен. Мы рассмотрели его в § 6.3. Такая кривая является фактором комплексной прямой по некоторой двумерной решетке. Отмеченная точка совпадает с образами точек решетки при факторизации. Решетка задается парой своих образующих — таких комплексных векторов  $\tau_1, \tau_2$ , что отношение  $\tau_1/\tau_2$  не вещественно. Мы будем предполагать, что порядок этих векторов задает на комплексной прямой ориентацию, совпадающую с обычной комплексной ориентацией.

Различные решетки могут задавать одну и ту же кривую. Так, группа  $\mathbb{C}^*$  ненулевых комплексных чисел по умножению действует на множестве образующих решеток по правилу

$$\lambda : (\tau_1, \tau_2) \mapsto (\lambda\tau_1, \lambda\tau_2), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Такое действие устанавливает бигоморфизм кривых, отвечающих этим двум решеткам. Кроме того, на множестве образующих решеток действует группа  $SL_2(\mathbb{Z})$  (модулярная группа Клейна), состоящая из дробно-линейных преобразований с целыми коэффициентами:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

Такое действие меняет базис решетки, сохраняя саму решетку. Поэтому оно сохраняет и соответствующую кривую.

Умножив базис  $(\tau_1, \tau_2)$  на  $c = 1/\tau_1$ , мы получим базис  $(1, \tau)$ , где  $\tau = \tau_2/\tau_1$  — комплексный вектор, лежащий в верхней полуплоскости. Дальнейшая факторизация по действию модулярной группы Клейна позволяет отождествить пространство векторов  $\tau$  с *модулярной кривой*. Это фундаментальная область действия группы  $SL_2(\mathbb{Z})$  на верхней полуплоскости. В качестве фундаментальной области можно выбрать полосу, ограниченную единичной окружностью и двумя прямыми:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1, \operatorname{Im} z > 0 \right\}.$$

При этом на границах фундаментальной области необходимо провести отождествление. Точки склеиваются попарно в соответствии с правилом  $x + iy \equiv -x + iy$ . Результат этого отождествления граничных точек полосы и есть пространство модулей эллиптических кривых с одной отмеченной точкой. Полученное пространство некомпактно и имеет две особенности — точки, отвечающие эллиптическим кривым с дополнительными симметриями. Это точка  $\tau = e^{\pi i/2}$  и склеенная вместе пара точек  $\tau = e^{\pi i/3}$  и  $\tau = e^{2\pi i/3}$ .

### § 13.2. Пространство $\mathcal{M}_{1,1}$

Пространство модулей  $\mathcal{M}_{1,1}$  является результатом факторизации верхней полуплоскости  $\mathcal{H}$  по дискретному действию группы  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Его будет удобнее изучать, однако, если представить его в виде факторпространства другой кривой по действию конечной группы.

**Утверждение 13.2.1.** Рассмотрим следующее действие группы  $\mathbb{Z}_2 \times S_3$  на проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$ , проколотой в трех точках  $\{0, 1, \infty\}$ :

- множитель  $\mathbb{Z}_2$  действует тривиально;
- множитель  $S_3$  действует дробно-линейными преобразованиями, осуществляя все возможные перестановки тройки точек  $\{0, 1, \infty\}$ .

Пространство  $\mathcal{M}_{1,1}$  является результатом факторизации проколотой проективной прямой по этому действию.

**Доказательство.** Пусть  $SL(2, \mathbb{Z})[2] \subset SL(2, \mathbb{Z})$  — подгруппа, состоящая из матриц, сравнимых с единичной по модулю 2 (2-модулярная подгруппа). Эта подгруппа нормальна в  $SL(2, \mathbb{Z})$ , и фактор-



группа

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) / \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})[2] \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2),$$

являющаяся группой  $(2 \times 2)$ -матриц с определителем 1 над полем из двух элементов, изоморфна группе перестановок  $S_3$ . Ядро гомоморфизма

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2),$$

сопоставляющего целочисленной матрице матрицу вычетов по модулю 2, представляет собой группу  $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})[2]$ . Первый сомножитель действует на верхней полуплоскости тривиально, а второй свободно. При этом  $\mathcal{H} / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})[2]$  есть проективная прямая, проколота в трех точках, что и требовалось.  $\square$

**Упражнение 13.2.2.** Докажите, что группа  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})[2]$  действительно действует на верхней полуплоскости свободно. Найдите фундаментальную область этого действия и проверьте последнее утверждение доказательства.

Как мы знаем, всякая эллиптическая кривая представима в виде разветвленного накрытия проективной прямой степени 2 с четырьмя точками ветвления. При этом четверка точек на  $\mathbb{CP}^1$ , рассматриваемая с точностью до дробно-линейных преобразований, однозначно определяет накрывающую эллиптическую кривую. Точки ветвления не занумерованы, что и позволяет представить пространство модулей  $\mathcal{M}_{1,1}$  в виде факторпространства пространства модулей  $\mathcal{M}_{0,4}$  по действию группы перестановок.

Действие группы  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_2) \cong S_3$  на  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  порождается двумя дробно-линейными преобразованиями

$$z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad z \mapsto 1 - z,$$

осуществляющими транспозиции точек  $(0, \infty)$  и  $(0, 1)$  соответственно. Почти все орбиты действия группы имеют длину 6. Исключение составляют две орбиты длины 3 и 2 соответственно. Первая из них состоит из точек  $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ , вторая — из точек  $\{e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}\}$ . Орбита длины 3 соответствует решетке с квадратной ячейкой, орбита длины 2 — решетке из правильных треугольников.

### § 13.3. Универсальная кривая над $\mathcal{M}_{1,1}$

Каждой точке  $\tau$  верхней полуплоскости  $\mathcal{H}$  соответствует эллиптическая кривая, являющаяся результатом факторизации прямой  $\mathbb{C}$

по целочисленной решетке, натянутой на векторы 1 и  $\tau$ . На прямом произведении  $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$  можно определить действие группы  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , расслоенное над базой  $\mathcal{H}$ , по правилу

$$(m, n): (z, \tau) \rightarrow (z + m + n\tau, \tau).$$

Мы будем обозначать результат факторизации по этому действию через  $\mathcal{C}_H$  и называть его *универсальной эллиптической кривой* над верхней полуплоскостью. Универсальная эллиптическая кривая естественно проектируется на верхнюю полуплоскость  $\mathcal{C}_H \rightarrow \mathcal{H}$ , причем слой проекции над точкой  $\tau \in \mathcal{H}$  — это в точности эллиптическая кривая  $\mathbb{C}/\langle \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \rangle$ .

Действие группы  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  на слоях прямого произведения  $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$  комбинируется с действием группы  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  на верхней полуплоскости. А именно, рассмотрим полупрямое произведение

$$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2.$$

Множество элементов этой группы совпадает с  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$ , а умножение в ней устроено следующим образом:

$$(\gamma_1, v_1)(\gamma_2, v_2) = (\gamma_1\gamma_2, v_1\gamma_2 + v_2),$$

где  $\gamma_i \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ ,  $v_i \in \mathbb{Z}^2$ ,  $i = 1, 2$ .

**Упражнение 13.3.1.** Докажите, что группа  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$  изоморфна группе  $(3 \times 3)$ -матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\},$$

операцией в которой является матричное умножение.

Определим теперь действие группы  $G$  на прямом произведении  $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$  равенством

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}: (z, \tau) \mapsto \left( \frac{m\tau + n + z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right).$$

Другими словами,

$$\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{c\tau + d} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

При таком определении действия полупрямого произведения действия группы  $SL(2, \mathbb{Z})$  на верхней полуплоскости сопровождается согласованным с ним действием на пространстве решеток. Факторпространство  $\mathcal{C}_{1,1} = \mathbb{C} \times \mathcal{H} / \Gamma$  снабжено естественной проекцией  $\mathcal{C}_{1,1} \rightarrow \mathcal{M}_{1,1} = \mathcal{H} / SL(2, \mathbb{Z})$  и называется *универсальной кривой* над пространством модулей  $\mathcal{M}_{1,1}$ . Слой такой проекции над точкой пространства  $\mathcal{M}_{1,1}$  представляет собой факторкривую эллиптической кривой, отвечающей этой точке, по группе ее автоморфизмов.

### § 13.4. Когомологии пространства $\mathcal{M}_{1,1}$

Мы не собираемся подробно вдаваться в построение когомологий орбифолдов. Цель настоящего параграфа состоит лишь в том, чтобы показать на примере орбифолда  $\mathcal{M}_{1,1}$ , как в принципе можно строить соответствующие конструкции. Этот параграф можно пропустить, не читая, без ущерба для понимания дальнейшего материала.

Орбифолд  $\mathcal{M}_{1,1}$  является результатом факторизации проективной прямой, проколотой в трех точках, по действию конечной группы  $\Gamma$ . Обозначим эту проколотую прямую через  $X$  и рассмотрим прямое произведение  $E\Gamma \times X$ . Здесь  $E\Gamma$  — произвольное стягиваемое топологическое пространство, на котором группа  $\Gamma$  действует свободно. Такое пространство всегда существует: в качестве него можно взять, например, бесконечномерный симплициальный комплекс,  $n$ -мерные симплексы в котором находятся во взаимно однозначном соответствии с точками множества  $\Gamma^{n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Группа  $\Gamma$  действует на таком симплициальном комплексе диагонально.

Факторпространство  $B\Gamma$  пространства  $E\Gamma$  по действию группы  $\Gamma$  называется *классифицирующим пространством* группы  $\Gamma$ , а его (ко)гомологии — (ко)гомологиями этой группы.

**Пример 13.4.1.** Группа  $\mathbb{Z}$  свободно действует сдвигами на целые числа на прямой  $\mathbb{R}^1$ , которую естественно выбирать в качестве пространства  $E\mathbb{Z}$ . Классифицирующее пространство  $B\mathbb{Z}$  в этом случае представляет собой окружность  $S^1$ .

**Пример 13.4.2.** Для группы  $\mathbb{Z}_2$  вычетов по модулю 2 в качестве классифицирующего пространства можно взять бесконечномерное проективное пространство  $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$ .

(Ко)гомологиями фактора гладкого многообразия  $X$  по действию группы  $\Gamma$  естественно считать (ко)гомологии фактора прямого произведения  $E\Gamma \times X$  по диагональному действию группы  $\Gamma$  на этом

прямом произведении. Для орбифолда  $\mathcal{M}_{1;1}$  этот подход приводит к следующим результатам.

**Утверждение 13.4.3.** *Орбифолд  $\mathcal{M}_{1;1}$  имеет следующие группы гомологий и когомологий в малых размерностях:*

$$H_1(\mathcal{M}_{1;1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{12}, \quad H^1(\mathcal{M}_{1;1}, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2(\mathcal{M}_{1;1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{12}.$$

## Глава 14

# Подходы к построению пространств модулей

Построение пространств модулей — технически сложное занятие, включающее анализ множества тонкостей. В этой главе мы обсудим, не углубляясь в детали, один из возможных способов такого построения. В ней описана общая последовательность действий, а обеспечивающие обоснование ее корректности многочисленные утверждения либо сформулированы без доказательств, либо предложены в качестве упражнений.

### § 14.1. Требования к пространству модулей

В предыдущей главе мы привели примеры пространств модулей кривых. Однако у нас до сих пор нет строгого определения того, что это такое. В то же время ясно, что это определение должно быть устроено так, чтобы включать в себя приведенные выше примеры. Итак, обсудим, какие требования представляются естественными.

1. Точки пространства модулей должны взаимно однозначно соответствовать классам биголоморфной эквивалентности комплексных кривых. Несмотря на естественность, это требование представляется не очень сильным, поскольку мы пока не наложили никаких специальных требований на взаимно однозначное соответствие, о котором идет речь.

2. На пространстве модулей должны иметься топология и комплексная структура. Это тоже не слишком сильное требование, поскольку упомянутые структуры пока никак не связаны с самими точками — модулями кривых. В то же время мы вправе ожидать, что *комплексные кривые, задающиеся близкими уравнениями в проективном пространстве, определяют близкие точки пространства модулей*. Формализация этого требования содержится в следующем пункте.

3. Предположим пока, что  $g \geq 3$ ,  $n = 0$ . Мы вправе ожидать, что пространство модулей кривых существует не само по себе, а в со-

четании с *универсальной кривой*, т. е. с таким комплексным многообразием  $\mathcal{C}_{g;0}$  размерности  $\dim \mathcal{C}_{g;0} = \dim \mathcal{M}_{g;0} + 1$  и таким отображением  $\pi: \mathcal{C}_{g;0} \rightarrow \mathcal{M}_{g;0}$ , что прообраз  $\pi^{-1}(c)$  общей точки является комплексной кривой  $C$ , класс эквивалентности которой совпадает с  $c \in \mathcal{M}_{g;0}$ . Необщие точки пространства модулей — это кривые, имеющие автоморфизмы. Отметим, что отсутствие автоморфизмов у общей кривой гарантируется условием на род  $g \geq 3$ . Слоем универсальной кривой над такой необщей точкой является факторкривая самой кривой по действию ее группы автоморфизмов. Кстати, именно существование кривых с нетривиальными автоморфизмами является препятствием к существованию *тонкого* пространства модулей кривых, т. е. такого пространства модулей, слои универсальной кривой над которым — это всегда сами кривые, а не результаты их факторизации по группе автоморфизмов.

4. Пространство модулей должно быть *универсальным*, т. е. в нем должны содержаться все возможные семейства кривых. Пусть  $E, B$  — два комплексных многообразия, а  $p: E \rightarrow B$  — такое голоморфное отображение, что прообраз  $p^{-1}(b)$  любой точки  $b \in B$  является результатом факторизации комплексной кривой рода  $g$  по ее группе автоморфизмов. Тогда мы требуем, чтобы существовали голоморфные отображения  $E \rightarrow \mathcal{C}_{g;0}$  и  $B \rightarrow \mathcal{M}_{g;0}$ , составляющие вместе с  $p$  и  $\pi$  коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{C}_{g;0} \\ \downarrow p & & \downarrow \pi \\ B & \longrightarrow & \mathcal{M}_{g;0}. \end{array}$$

5. Как показывает пример пространства модулей эллиптических кривых с одной отмеченной точкой, мы не вправе ожидать, что пространство модулей будет *многообразием*. Действительно, на модулярной кривой есть две специальные точки, не имеющие окрестности, изоморфной диску. Однако эта кривая является *орбифолдом*: у каждой ее точки есть окрестность, изоморфная фактору диска по действию конечной группы. Мы отложим обсуждение орбифолдов, отметив сейчас лишь, что их введение является необходимым элементом построения пространств модулей.

Теперь можно дать определение.

**Определение 14.1.1.** *Грубым пространством модулей кривых рода  $g$  называется тройка  $(\mathcal{C}_{g;0}, \mathcal{M}_{g;0}, \pi: \mathcal{C}_{g;0} \rightarrow \mathcal{M}_{g;0})$ , состоящая из*

двух комплексных орбифолдов и отображения из первого орбифолда на второй, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) всякий слой  $\pi^{-1}(b)$ ,  $b \in \mathcal{M}_{g;0}$ , является результатом факторизации гладкой комплексной кривой рода  $g$  по группе ее автоморфизмов;
- 2) всякая кривая рода  $g$  встречается в качестве слоя этого отображения в точности один раз;
- 3) для всякого голоморфного семейства  $p: E \rightarrow B$ , слои которого — результаты факторизации гладких комплексных кривых рода  $g$  по группам их автоморфизмов, существуют голоморфные отображения  $E \rightarrow \mathcal{C}_{g;0}$  и  $B \rightarrow \mathcal{M}_{g;0}$ , первое из которых — послыйный изоморфизм, образующие вместе с проекциями  $\pi$  и  $p$  коммутативный квадрат.

Для случая кривых с отмеченными точками данное выше определение следует незначительно модифицировать. А именно, в тройку следует добавить четвертый элемент — набор из  $n$  сечений  $\sigma_i: \mathcal{M}_{g;n} \rightarrow \mathcal{C}_{g;n}$ , отвечающих отмеченным точкам: отмеченная точка  $x_i$  в слое  $\pi^{-1}(b)$  — это значение  $\sigma_i(b)$  сечения  $\sigma_i$  в точке  $b$ . Разумеется, различные сечения не должны пересекаться.

**Упражнение 14.1.2.** Сформулируйте определение грубого пространства модулей кривых с отмеченными точками.

**Упражнение 14.1.3.** Как выглядит универсальная рациональная кривая с тремя отмеченными точками? б) А с четырьмя? в) Как выглядит универсальная эллиптическая кривая с одной отмеченной точкой?

## § 14.2. Наивная попытка построения пространства модулей

Пространство модулей кривых рода 3 можно пробовать строить следующим образом. Как мы знаем, всякая такая кривая  $C$ , не являющаяся гиперэллиптической, представима плоской кривой степени 4 (образом кривой  $C$  при каноническом отображении  $\varphi: C \rightarrow \mathbb{CP}^2$ ). Наоборот, всякая гладкая плоская кривая степени 4 является кривой рода 3. Поэтому мы можем взять пространство всех однородных кубических многочленов от трех переменных, проецивизировать его и выделить в проецивизированном пространстве (открытое) подмножество многочленов, отвечающих неособым кривым.

На проецивизированном пространстве многочленов действует группа  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$  проективных преобразований проективной плоскости. Фактор по этому действию и является искомым пространством модулей.

Построенное таким образом пространство модулей несложно оснастить и универсальной кривой. Для этого следует рассмотреть прямое произведение пространства кубических многочленов на проективную плоскость и выделить в слое над каждым многочленом задаваемую им кривую. В результате мы получим гиперповерхность в прямом произведении. Действие группы проективных преобразований на базе продолжается до ее действия на всем прямом произведении. Ограничив это действие на выделенную гиперповерхность и профакторизовав эту гиперповерхность по указанному действию, мы получим универсальную кривую.

С кривыми рода 2 можно было бы попытаться поступить аналогичным образом, только на этот раз в пространстве однородных многочленов четвертой степени нужно выбрать подмножество, состоящее из всех многочленов, задающих кривые с одной двойной точкой. Построение универсальной кривой в этом случае затруднено необходимостью разрешить особенности слоя.

Какие трудности встречаются на описанном пути? Если мы хотим включить в рассмотрение гиперэллиптические кривые рода 3 (размерность пространства которых, как мы знаем, на единицу меньше размерности пространства всех кривых и равна 5), то предложенная схема уже не работает. Причина этого в том, что образ гиперэллиптической кривой при каноническом отображении — проективная прямая, а значит, он не изоморфен самой кривой. Другой универсальной трудностью является необходимость факторизовать по действию большой непрерывной группы — группы проективных преобразований проективной плоскости. Проблема в том, что, даже если такая группа действует на хорошем пространстве, фактор по этому действию может иметь очень плохие особенности — гораздо хуже тех, что мы ожидаем от орбифолда (последний локально является фактором по дискретному действию группы). Доказательство невозможности появления особенностей неалгебраического типа — трудная и принципиально важная задача. Кроме того, при  $g > 3$  далеко не всякая кривая рода  $g$  реализуется гладкой плоской кривой.

Еще одна трудность касается проблемы компактификации пространства модулей. Строя пространство модулей, мы рассчитываем в дальнейшем построить его компактификацию — компактное пространство, содержащее пространство модулей в качестве открытого плотного подмножества. У каждого некомпактного пространства есть много различных компактификаций. При этом естественно ис-



кать *модулярную* компактификацию, т. е. такую, точки которой взаимно однозначно соответствуют модулям некоторых кривых. Поскольку все гладкие кривые уже исчерпаны, эти точки должны соответствовать *особым* кривым.

Если мы компактифицируем пространство плоских кривых, то естественной компактификацией будет пространство плоских же кривых заданной степени. Однако, как показывают простейшие примеры, такая компактификация не может существовать.

**Пример 14.2.1.** Рассмотрим следующее семейство плоских эллиптических кривых:

$$y^2 - x^3 - t = 0,$$

зависящее от параметра  $t$ . При всех ненулевых значениях параметра  $t$  соответствующие кривые попарно биголоморфны (докажите!). Поэтому предельная кривая при  $t \rightarrow 0$  должна быть точно такой же. Однако при  $t = 0$  соответствующая кривая семейства  $y^2 = x^3$  рациональна и имеет особенность типа точки возврата (каска), что указывает на невозможность построить компактификацию таким образом.

В дальнейшем мы будем компактифицировать пространство модулей модулями таких кривых, которые имеют лишь простейшие особенности — двойные самопересечения. Для этого приходится использовать вложения гладких кривых не в плоскость и даже не в проективное пространство размерности  $g - 1$ , как при каноническом отображении, а в пространство большей размерности, где бóльшая свобода позволяет кривым вырождаться, не приобретая сложных особенностей. Интересующие нас пространства кривых в этом случае уже не описываются пространствами однородных многочленов, поскольку множество нулей однородного многочлена в многомерном случае — гиперповерхность, а не кривая. Такие пространства кривых описываются новым для нас объектом — *схемой Гильберта*. Для определения схемы Гильберта нам потребуется сначала ввести понятие многочлена Гильберта.

### § 14.3. Многочлен Гильберта

Рассмотрим на проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$  конечный набор точек  $X \subset \mathbb{CP}^1$ , состоящий из  $|X| = d$  различных точек. Пусть  $(x_0 : x_1)$  — такая проективная координата в  $\mathbb{CP}^1$ , что  $X$  не содержит точку  $(0 : 1)$ . Обозначим через  $I_X$  идеал в кольце  $\mathbb{C}[x_0, x_1]$  многочленов от двух переменных, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на

множестве  $X$ . Этот идеал раскладывается в прямую сумму конечномерных подпространств, состоящих из однородных многочленов:

$$I_X = I_X^{(1)} \oplus I_X^{(2)} \oplus I_X^{(3)} \oplus \dots,$$

где через  $I_X^{(n)}$  обозначено подпространство однородных многочленов степени  $n$  в  $I_X$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Размерности пространств  $I_X^{(n)}$  равны

$$\dim I_X^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < d, \\ n - d + 1 & \text{при } n \geq d. \end{cases}$$

Действительно, однородный многочлен принадлежит  $I_X$  в том и только в том случае, если все точки множества  $X$  являются его корнями. Поэтому степень такого многочлена не может быть меньше  $d$ .

Зафиксируем какой-нибудь однородный многочлен  $p_X(x_0, x_1)$  степени  $d$ , корнями которого являются точки множества  $X$  (любые два таких многочлена отличаются друг от друга ненулевым постоянным множителем). Всякий многочлен из  $I_X$  степени  $n \geq d$  является результатом умножения выбранного однородного многочлена  $p_X(x_0, x_1)$  на какой-то однородный многочлен степени  $n - d$ . Пространство однородных многочленов от двух переменных степени  $n - d$  имеет размерность  $n - d + 1$ , что и дает приведенную формулу.

Рассмотрим теперь последовательность  $\dim \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1]/I_X^{(n)}$  размерностей факторпространств пространств однородных многочленов степени  $n$  от переменных  $x_0, x_1$  по подпространствам многочленов той же степени, входящим в идеал  $I_X$ . При  $n = 1, 2, \dots, d - 1$  элементы этой последовательности равны  $n + 1$ ; начиная с  $n = d$  они принимают значения  $(n + 1) - (n - d + 1) = d$ . Тем самым справедливо равенство

$$\dim \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1]/I_X^{(n)} = d \quad \text{при } n \geq d.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для конечного набора точек на плоскости. Пусть  $X \subset \mathbb{CP}^2$  — набор из  $d$  попарно различных точек,  $(x_0 : x_1 : x_2)$  — проективные координаты в  $\mathbb{CP}^2$ , и пусть  $I_X$  — идеал в кольце многочленов  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ , состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на множестве  $X$ . Размерности подпространств  $I_X^{(n)} \subset \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]$  однородных многочленов степени  $n$  в этом случае уже зависят от взаимного расположения точек. Так, если все  $d$  точек множества  $X$  лежат на одной прямой, то  $\dim I_X^{(1)} = 1$ ,

в противном случае эта размерность равна 0. Несмотря на это, если  $n$  достаточно велико, то

$$\dim \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]/I_X^{(n)} = d. \quad (14.1)$$

Действительно, при больших значениях  $n$  класс смежности многочлена в  $\mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]$  по подпространству  $I_X^{(n)}$  однозначно определяется значениями этого многочлена в точках множества  $X$ , а набор этих значений может быть любым. При этом значение  $n$ , при котором равенство (14.1) начинает выполняться, зависит от конкретного расположения точек.

**Упражнение 14.3.1.** Докажите, что при  $n \geq d$  равенство (14.1) выполняется, как бы ни были расположены на плоскости точки множества  $X$ .

**Упражнение 14.3.2.** Пусть  $X$  — множество из  $d$  попарно различных точек в проективном пространстве размерности  $N \geq 2$ . Докажите, что при  $n \geq d$  равенство

$$\dim \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, \dots, x_N]/I_X^{(n)} = d.$$

выполняется, как бы ни были расположены точки множества  $X$ .

Пусть теперь  $X$  — прямая на проективной плоскости. Идеал  $I_X \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  состоит из многочленов от трех переменных, обращающихся в нуль на прямой  $X$ . Размерности однородных компонент этого идеала равны

$$\dim I_X^{(n)} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Действительно, выбрав проективные координаты так, чтобы прямая  $X$  задавалась уравнением  $x_0 = 0$ , мы получаем, что  $I_X$  состоит из многочленов, делящихся на  $x_0$ . Размерность пространства таких однородных многочленов степени  $n$  равна размерности пространства однородных многочленов степени  $n-1$  от трех переменных, что и утверждается приведенным выше равенством. Тем самым справедливо равенство

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]/I_X^{(n)} &= \\ &= \binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n+1. \end{aligned}$$

Если же мы возьмем в качестве  $X$  гладкую квадратiku на плоскости, то

$$\dim I_X^{(n)} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{при } n \geq 2$$

(поскольку  $I_X^{(n)}$  состоит из однородных многочленов степени  $n$ , делящихся на определяющий квадратичный многочлен квадратiku) и при тех же значениях  $n$  мы имеем

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, x_2]/I_X^{(n)} &= \\ &= \binom{n+2}{2} - \binom{n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1. \end{aligned}$$

Мы рассмотрели несколько простых примеров алгебраических подмногообразий в проективных пространствах. Во всех рассмотренных примерах величина  $\dim \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, \dots, x_N]/I_X^{(n)}$  при больших значениях  $n$  оказывается многочленом от  $n$  степени, равной размерности подмногообразия: для подмногообразия нулевой размерности многочлен представляет собой константу, для подмногообразий размерности 1 многочлен линейен. При этом полученный многочлен зависит не только от самого многообразия  $X$ , но и от способа его вложения в проективное пространство: и прямая, и гладкая квадратика на плоскости представляют собой рациональную кривую, однако сопоставляемые им многочлены различны.

Оказывается, перечисленные выше свойства наблюдаются у любого алгебраического подмногообразия в проективном пространстве.

**Теорема 14.3.3** (Гильберт). Пусть  $X$  — алгебраическое подмногообразие в  $\mathbb{CP}^N$ ,  $(x_0 : \dots : x_N)$  — проективные координаты и  $I_X^{(n)} \subset \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, \dots, x_N]$  — подпространство в пространстве однородных многочленов степени  $n$ , состоящее из многочленов, обращающихся в 0 на  $X$ . Тогда для достаточно больших значений  $n$  величина

$$\dim \mathbb{C}^{(n)}[x_0, x_1, \dots, x_N]/I_X^{(n)}$$

является многочленом от  $n$ . Степень  $t = t_X$  этого многочлена равна размерности подмногообразия  $X$ , а коэффициент при  $n^m$  в нем равен  $\frac{d}{m!}$ , где  $d = d_X$  — степень подмногообразия  $X$ .

Многочлен  $h_X(n)$ , существование которого утверждается в теореме, называется *многочленом Гильберта* подмногообразия  $X$ . Мы не приводим доказательства теоремы, отсылая читателя, например, к книге [7].

**Упражнение 14.3.4.** Найдите многочлены Гильберта следующих подмногообразий:

- прямой в проективном пространстве;
- гладкой кубики на плоскости;
- плоскости в проективном пространстве;
- объединении прямой и точки на плоскости;
- объединения прямой и трансверсально пересекающей ее гладкой квадрики на плоскости;
- объединении прямой и касающейся ее гладкой квадрики на плоскости;
- гладкой гиперповерхности степени  $d$  в проективном пространстве размерности  $N$  (такая гиперповерхность задается одним неприводимым однородным уравнением степени  $d$  от  $N + 1$  переменных);
- скрученной кубики в проективном пространстве;
- пары пересекающихся прямых в проективном пространстве;
- пары скрещивающихся (т. е. непересекающихся) прямых в проективном пространстве.

**Упражнение 14.3.5.** Пусть  $X \subset \mathbb{CP}^2$  — «двойная точка» на плоскости. По определению ее идеал  $I_X \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  состоит из многочленов, имеющих в данной точке нуль порядка не меньше 2. Вычислите многочлен Гильберта  $h_X(n)$ . Совпадает ли он с многочленом Гильберта пары различных точек на плоскости?

## § 14.4. Схемы Гильберта

Схема Гильберта — это пространство модулей подмногообразий в данном проективном пространстве, имеющих данный многочлен Гильберта. Используемое в этом параграфе слово «схема» следует воспринимать как «алгебраическое многообразие». Причина использования именно слова «схема» состоит в том, что пространство модулей проективных многообразий с данным многочленом Гильберта может существовать, но не быть при этом алгебраическим многообразием. Более общее понятие *схемы* покрывает уже все возможные ситуации. Для построения пространств модулей кривых, однако, эта более общая конструкция не понадобится.

По данному многочлену  $p(n)$  схема Гильберта подмногообразий в  $\mathbb{CP}^N$  с многочленом Гильберта  $p(n)$  строится следующим образом. Обозначим через  $Q_N(n)$  размерность пространства однородных

многочленов степени  $n$  от  $N + 1$  переменных. Это многочлен степени  $N$  от  $n$ :

$$Q_N(n) = \binom{N+n}{N} = \frac{(n+N)(n+N-1)\dots(n+1)}{N!},$$

многочлен Гильберта всего проективного пространства. Для любого подмногообразия  $X \subset \mathbb{CP}^N$  с данным многочленом Гильберта  $h_X(n) = p(n)$  существует такое значение  $n_0$ , что при  $n > n_0$  размерность однородной составляющей  $I_X^{(n)}$  идеала  $I_X$  задается значением  $p(n)$  этого многочлена.

Для произвольного  $n > n_0$  однородная составляющая  $I_X^{(n)}$  определяет плоскость размерности  $Q_N(n) - p(n)$  в пространстве  $\mathbb{C}^{(n)}[x_0, \dots, x_N]$  размерности  $Q_N(n)$ . Можно показать, что для любых двух различных подмногообразий в  $\mathbb{CP}^N$  с данным многочленом Гильберта  $p(n)$  соответствующие им плоскости различны. Тем самым мы сопоставили многочлену  $p(n)$  некоторое подмножество в грассманиане  $\text{Gr}(Q_N(n), Q_N(n) - p(n))$  плоскостей размерности  $Q_N(n) - p(n)$  в пространстве размерности  $Q_N(n)$ . Это подмножество и является *схемой Гильберта*  $\text{Hilb}_N^{p(n)}$  подмногообразий в  $\mathbb{CP}^N$  с многочленом Гильберта  $p(n)$ .

Как и в случае других пространств модулей, схема Гильберта наделена универсальным расслоением: в прямом произведении  $\mathbb{CP}^N \times \times \text{Hilb}_N^{p(n)}$  выделим над каждой точкой схемы Гильберта отвечающее ей подмногообразие  $X$  в  $\mathbb{CP}^N$ . Объединение всех этих подмногообразий и будет требуемым универсальным расслоением.

### § 14.5. Плюриканонические вложения

Для помещения кривой в пространства большой размерности будем пользоваться плюриканоническими вложениями. Как мы видели (см. § 9.4), каноническое отображение кривой рода  $g \geq 2$  является вложением в том и только в том случае, если кривая негиперэллиптическая.

**Теорема 14.5.1.** *Рассмотрим на кривой  $C$  рода  $g \geq 2$  третью тензорную степень  $(T^\vee)^{\otimes 3}(C)$  канонического линейного расслоения. Тогда соответствующее этому линейному расслоению отображение  $\varphi_{3K}$  кривой  $C$  в проективизацию пространства, двойственного пространству его голоморфных сечений, является вложением.*

Напомним, что отображение  $\varphi_L$  строится по линейному расслоению  $L$  следующим образом (см. § 8.5). Каждая точка  $x$  кривой  $C$  корректно определяет линейный функционал на пространстве сечений

расслоения  $L$  с точностью до множителя: отношение значений этого функционала на двух сечениях  $\sigma_1, \sigma_2: C \rightarrow L$  равно  $\sigma_1(x) : \sigma_2(x)$ . Поэтому каждая точка  $x$  кривой  $C$  корректно определяет точку проективизации пространства, двойственного к пространству голоморфных сечений расслоения  $L$ .

**Замечание 14.5.2.** Третью степень в утверждении теоремы можно заменить на любую большую степень.

**Упражнение 14.5.3.** Найдите размерность  $N$  проективного пространства голоморфных сечений третьей степени канонического расслоения на кривой рода  $g$ .

**Упражнение 14.5.4.** Приведите пример кривой рода  $g = 2$ , на которой отображение  $\varphi_{2K}$ , отвечающее тензорному квадрату кокасательного расслоения, не задает вложения.

**Доказательство теоремы.** Для доказательства теоремы можно воспользоваться следующим утверждением.

**Лемма 14.5.5.** Пусть  $D$  — дивизор на данной кривой  $C$ . Отображение  $\varphi_D: C \rightarrow P(H^0(L(D)))^\vee$  этой кривой в проективизацию пространства, двойственного пространству голоморфных сечений расслоения  $L(D)$ , является вложением в том и только в том случае, если для любой пары различных точек  $x, y$  кривой  $C$  выполняются соотношения для размерностей

$$l(D - x) = l(D) + 1, \quad l(D - x - y) = l(D) + 2.$$

Доказательство этого утверждения и доказательство теоремы на его основе мы оставляем читателю.  $\square$

**Упражнение 14.5.6.** Пусть на кривой  $C$  рода  $g$  отмечены попарно различные точки  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ , если  $g = 0$ , и  $n \geq 1$ , если  $g = 1$ ). Обозначим через  $X$  дивизор на  $C$ , состоящий из этих точек, взятых с кратностью 1,  $X = x_1 + \dots + x_n$ . Какую тензорную степень  $k$  линейного расслоения  $L(K + X)$  достаточно взять, чтобы отображение  $\varphi_{k(K+X)}$ , строящееся по этой степени, было вложением для любой кривой рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками?

## § 14.6. Факторизация по действию группы проективных преобразований и стабильность

Мы подготовили почву для построения пространств модулей  $\mathcal{M}_{g;0}$  при  $g \geq 2$ . Основой для построения такого пространства является схема Гильберта  $\text{Hilb}_{5g-6}^{p_g(n)}$ . Здесь  $p_g(n) = 3(2g - 2)n - g + 1$  — член Гильберта 3-канонической кривой рода  $g$ . На данном этапе нас

будет интересовать, впрочем, не все пространство  $\text{Hilb}_{5g-6}^{p_g(n)}$ , а открытое подпространство в нем, состоящее из точек Гильберта гладких кривых. Отметим, что всякая гладкая кривая в  $\mathbb{CP}^{5g-6}$  с таким многочленом Гильберта является 3-канонической кривой.

**Упражнение 14.6.1.** Проверьте, что многочлен Гильберта 3-канонической кривой равен

$$p_g(n) = 3(2g - 2)n - g + 1,$$

и докажите, что любая гладкая кривая с таким многочленом Гильберта в  $\mathbb{CP}^{5g-6}$  является 3-канонической кривой рода  $g$ .

Пространство  $\mathcal{M}_{g;0}$  является результатом факторизации подпространства в схеме Гильберта по действию группы проективных преобразований  $\text{PGL}(5g - 6)$ . Факторпространство по действию большой непрерывной группы, как правило, имеет плохие особенности неалгебраической природы. В случае интересующего нас действия группы  $\text{PGL}(5g - 6)$  на открытом подмножестве в  $\text{Hilb}_{5g-6}^{p_g(n)}$  такого, однако, не происходит. Попробуем разобраться, откуда возникают особенности и почему их нет в интересующем нас случае.

Пусть группа Ли  $G$  действует линейными преобразованиями на векторном пространстве  $V$ , и пусть  $M \subset V$  —  $G$ -инвариантное подмножество в  $V$ . Факторпространство  $M/G$  имеет неалгебраические особенности в случае, когда две различные орбиты  $Gx$  и  $Gy$  точек  $x, y \in M$  имеют пересекающиеся замыкания (в этом случае соответствующие точки факторпространства неотделимы). Замыкания двух различных орбит пересекаются в том и только в том случае, если оба эти замыкания содержат начало координат. Точка  $x \in M \subset V$  называется *стабильной по Гильберту*, если замыкание  $\overline{Gx}$  ее орбиты  $Gx$  не содержит начала координат.

**Пример 14.6.2.** Пусть  $V = \mathbb{C}^2$  — комплексная плоскость, и пусть группа  $\mathbb{C}^*$  ненулевых комплексных чисел по умножению действует на  $V$  линейными преобразованиями. Всякое такое действие раскладывается в прямую сумму одномерных. В свою очередь, всякое одномерное действие группы  $\mathbb{C}^*$  имеет вид  $\lambda: t \mapsto \lambda^w t$  для некоторого целого числа  $w$ , называемого *характеристическим числом* действия. Поэтому действию группы  $\mathbb{C}^*$  на  $V$  сопоставляется пара целых чисел  $(w_1, w_2)$  (которые могут и совпадать): в подходящих координатах действие группы имеет вид  $\lambda: (t_1, t_2) \mapsto (\lambda^{w_1} t_1, \lambda^{w_2} t_2)$ . Стабильность по Гильберту точек плоскости  $V$  зависит от знаков чисел  $w_1$  и  $w_2$ . Если оба числа  $w_1$  и  $w_2$  положительны, то при  $\lambda \rightarrow 0$  любая



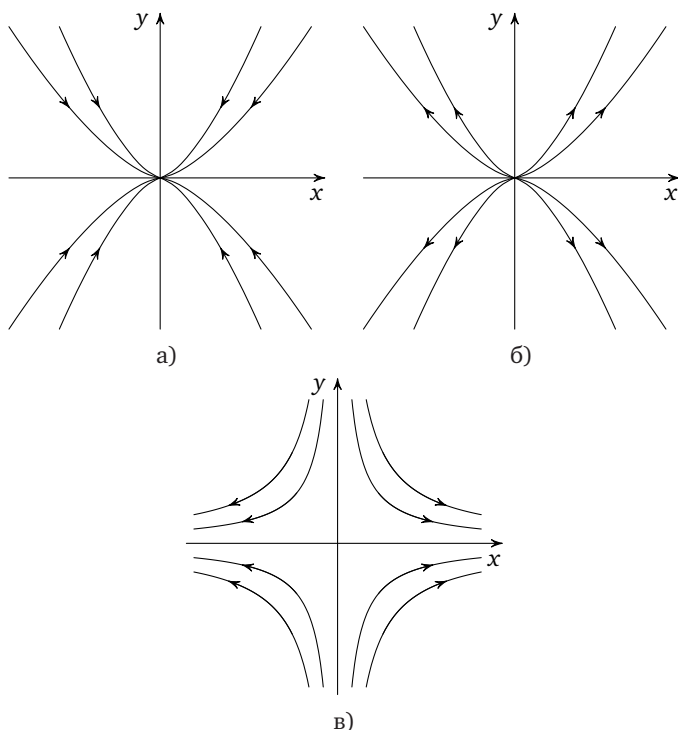


Рис. 14.1. Орбиты действия группы  $\mathbb{C}^*$  на плоскости по правилу  $\lambda: (x, y) \rightarrow (\lambda^{w_1} x, \lambda^{w_2} y)$  при а)  $w_1, w_2 > 0$ ; б)  $w_1, w_2 < 0$ ; в)  $w_1 > 0, w_2 < 0$

точка плоскости стремится к началу координат и, следовательно, замыкания орбит любых двух точек пересекаются (см. рис. 14.1 а). Если они оба отрицательны, то к началу координат стремится любая точка плоскости при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Напротив, если одно из чисел  $w_1, w_2$  положительно, а другое отрицательно, то на плоскости имеется открытая плотная область *стабильности*, состоящая из точек, не лежащих ни на одной из осей координат. Замыкания орбит точек из этой области не содержат начала координат (см. рис. 14.1 в), и факторпространство этой области по действию группы  $\mathbb{C}^*$  не имеет особенностей. Замыкания орбит точек осей (на которых одна из координат обращается в 0) содержат начало координат.

Приведенный выше пример носит общий характер и позволяет сформулировать критерий стабильности по Гильберту для действия

произвольной группы на векторном пространстве линейными преобразованиями.

**Теорема 14.6.3** (численный критерий Гильберта—Мамфорда). *Точка  $x \in V$  стабильна относительно действия группы  $G$  на  $V$  линейными преобразованиями, если среди координат разложения точки  $x$  по собственным направлениям любой однопараметрической подгруппы группы  $G$  есть ненулевые координаты как с положительными, так и с отрицательными характеристическими числами.*

Теперь построение пространства модулей  $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0}$  при  $g \geq 2$  выглядит следующим образом.

1. Строим схему Гильберта  $\text{Hilb}_{5g-6}^{p_g(n)}$  подмногообразий в  $\mathbb{CP}^{5g-6}$  с многочленом Гильберта  $p_g(n) = (6g - 6)n - g + 1$ . Эта схема Гильберта вложена в грассманиан  $\text{Gr}(Q_N(n), Q_N(n) - p_g(n))$ .

2. Вкладываем грассманиан  $\text{Gr}(Q_N(n), Q_N(n) - p_g(n))$  в проективное пространство  $\wedge^{p_g(N)}(\mathbb{C}^{(N)}[x_0, \dots, x_{5g-6}])$  с помощью вложения Плюккера<sup>1</sup> и рассматриваем конус над грассманианом в соответствующем векторном пространстве на единицу большей размерности. Действие группы проективных преобразований  $\text{PSL}_{5g-6}$  на  $\mathbb{CP}^{5g-6}$  поднимается до действия группы линейных преобразований пространства, объемлющего конус над грассманианом.

3. С помощью численного критерия Гильберта—Мамфорда убеждаемся, что точки схемы Гильберта, отвечающие образам гладких кривых рода  $g$  при 3-каноническом вложении, стабильны относительно линейного действия указанной группы. Как следствие, соответствующее фактормногообразие является гладким орбифолдом, который и представляет собой пространство модулей  $\mathcal{M}_{g,0}$ .

4. Каждый из предыдущих шагов сопровождается построением соответствующей универсальной кривой.

## § 14.7. Пространства модулей кривых с отмеченными точками

Пространства  $\mathcal{M}_{g,n}$  модулей кривых с отмеченными точками можно строить аналогично пространствам модулей  $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0}$ , только вместо 3-канонических вложений мы рассматриваем вложения, опре-

<sup>1</sup> Вложение Плюккера переводит точку грассманиана во внешнее произведение элементов произвольного базиса в плоскости, соответствующей этой точке, рассматриваемое с точностью до умножения на константу. Образ вложения Плюккера задается квадратичными уравнениями (соотношениями Плюккера).

деленные подходящей степенью линейного расслоения  $L(K + X)$ , где  $X$  — дивизор отмеченных точек.

Еще один способ построения пространств модулей кривых с отмеченными точками — индуктивный. Если мы уже построили пространство модулей  $\mathcal{M}_{g,n}$ , то мы можем попробовать построить пространство модулей  $\mathcal{M}_{g,n+1}$  кривых того же рода с увеличенным на единицу количеством отмеченных точек. На самом деле в качестве такого пространства может выступать универсальная кривая  $\mathcal{C}_{g,n}$ , из которой выкинуты структурные сечения. Действительно, каждая точка этого пространства определяет кривую рода  $g$  с  $n + 1$  отмеченными точками — первые  $n$  точек задаются структурными сечениями, а  $(n + 1)$ -й точкой является сама выбранная точка. Это пространство обладает всеми необходимыми свойствами, но над ним надо, в свою очередь, построить универсальную кривую. Отметим, что проекция  $\pi$  из определения универсальной кривой в такой интерпретации становится отображением забывания  $\pi_{g,n}: \mathcal{M}_{g,n+1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$ : она «забывает»  $(n + 1)$ -ю отмеченную точку, превращая кривую с  $n + 1$  отмеченными точками в кривую с  $n$  отмеченными точками.

Для рациональных кривых эта конструкция выглядит особенно просто. Рассмотрим прямое произведение  $\mathcal{M}_{0,n} \times \mathbb{CP}^1$ , где второй сомножитель представляет собой проективную прямую с фиксированной координатой  $z$ . Сопоставим каждой точке пространства модулей  $\mathcal{M}_{0,n}$  рациональную кривую, в которой отмеченные точки  $x_1, x_2$  и  $x_3$  имеют координаты  $0, 1$  и  $\infty$  соответственно. Тогда координаты всех остальных отмеченных точек однозначно определены и мы получаем  $n$  попарно непересекающихся сечений  $\sigma_1, \dots, \sigma_n: \mathcal{M}_{0,n} \rightarrow \mathcal{M}_{0,n} \times \mathbb{CP}^1$ . Дополнение к этим сечениям в прямом произведении и есть искомая универсальная кривая  $\mathcal{C}_{0,n} \equiv \mathcal{M}_{0,n+1}$ .

**Замечание 14.7.1.** Очередное пространство модулей рациональных кривых является подмножеством в прямом произведении предыдущего пространства и проективной прямой. Однако само оно не является прямым произведением нетривиальных сомножителей. Отображение забывания превращает его в расслоение над предыдущим пространством модулей, слои которого имеют одинаковую топологию (проколотой в нескольких точках сферы), но различные комплексные структуры.

Разумеется, полученная конструкция совпадает со следующей, которая выглядит на первый взгляд более простой. Возьмем про-

странство  $\mathbb{C}^{n-3}$  с координатами  $z_4, \dots, z_n$ , которые приобретают последние  $n-3$  отмеченных точек после того, как в качестве координат первых точек выбраны  $0, 1$  и  $\infty$ , и выкинем из него гиперплоскости  $z_i = 0, z_i = 1, i = 4, \dots, n$  и  $z_i = z_j$  при  $i \neq j$ , отвечающие возможным совпадениям отмеченных точек. Однако она гораздо лучше приспособлена к построению в последующем интересующей нас компактификации.

## Глава 15

# Пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками

В предыдущей главе мы описали процедуру построения пространств модулей кривых с отмеченными точками. Эти пространства, как правило, некомпактны. Ключевым моментом в понимании геометрии некомпактных пространств является построение их компактификаций. У каждого некомпактного пространства много различных компактификаций, однако лишь немногие из них удобны для работы. Пространство модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{0,n}$ , в отличие от случая старших родов, является гладким многообразием (а не орбифолдом). Это обстоятельство несколько упрощает исследование пространств модулей в случае рода 0.

В этой главе мы описываем геометрическую конструкцию пространства модулей  $\mathcal{M}_{0,n}$ , принадлежащую М. Капранову. В его конструкции всякая рациональная кривая с  $n$  отмеченными точками реализуется как кривая Веронезе в проективном пространстве размерности  $n - 2$ , проходящая через фиксированный набор из  $n$  точек в общем положении. Вырождения кривых Веронезе уже не являются гладкими кривыми, и соответствующие этим особым кривым точки добавляются к пространству модулей гладких кривых для его компактификации.

Геометрическая конструкция Капранова не дает инструмента для вычисления гомологических характеристик компактифицированных пространств модулей. Подобное вычисление требует более абстрактного подхода, и мы приводим описание кольца когомологий по Килью. Результат Концевича и Манина, дающий набор образующих и линейных соотношений на них в пространствах когомологий каждой размерности, дополняет описание Килья. Впрочем, и описание Килья, и описание Концевича—Манина не слишком эффективны, и поиски более явных описаний колец когомологий пространств  $\bar{\mathcal{M}}_{0,n}$  продолжаются до сих пор.

### § 15.1. Конструкция Капранова

В этом параграфе мы изложим принадлежащую М. М. Капранову [12] простую реализацию пространства модулей рациональных кривых как семейств кривых Веронезе в проективных пространствах. Каждая кривая семейства проходит через фиксированный набор точек, которые и образуют отмеченные точки на кривой.

Рассмотрим сначала проективную плоскость. Набор точек на ней находится в общем положении, если никакие три точки из этого набора не лежат на одной прямой. Коника — это кривая второго порядка на плоскости, т. е. кривая, задаваемая однородным уравнением

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0.$$

Она пересекает любую прямую в двух точках (совпадающих, если прямая касается коники).

Напомним, что гладкая коника рациональна — ее можно задать как образ однозначного отображения проективной прямой. Для этого достаточно выбрать точку на конике и сопоставить каждой прямой, проходящей через эту точку, вторую точку пересечения этой прямой с коникой.

Если мы фиксируем пять точек в общем положении, то через них проходит единственная коника — такие пять точек задают пять линейных уравнений на коэффициенты  $a, b, c, d, e, f$  уравнения коники, по которым эти коэффициенты восстанавливаются однозначно с точностью до умножения на общий ненулевой множитель. А через четыре точки  $x_1, x_2, x_3, x_4$  в общем положении проходит однопараметрическое семейство гладких коник. Это однопараметрическое семейство естественным образом отождествляется с пространством модулей  $\mathcal{M}_{0,4}$ . Для доказательства нам нужно показать, что любая рациональная кривая с четырьмя отмеченными точками встречается в этом семействе ровно один раз.

Вспомним, что любую упорядоченную четверку точек в общем положении в  $\mathbb{CP}^2$  можно перевести в любую другую такую четверку проективным преобразованием проективной плоскости, причем такое проективное преобразование единственно. Таким образом, с точки зрения проходящих через них коник любые две четверки точек на плоскости в общем положении ничем не отличаются друг от друга.

Рассмотрим двойственную проективную плоскость к  $\mathbb{CP}^2$ , т. е. пространство прямых в  $\mathbb{CP}^2$ . Пересечение прямой в  $\mathbb{CP}^2$  с коникой  $C$

сопоставляет этой прямой пару точек коники  $C$ , отождествляя тем самым двойственную проективную плоскость с симметрическим квадратом  $C^{(2)}$  кривой  $C$ . Изоморфизм кривых  $C$  и  $C'$  индуцирует изоморфизм их симметрических квадратов, т. е. проективное преобразование двойственной проективной плоскости. Двойственное ему проективное преобразование плоскости  $\mathbb{CP}^2$  сохраняет четыре точки, а значит, является тождественным преобразованием. Тем самым кривые  $C$  и  $C'$  совпадают, что и требовалось доказать.

К сожалению, рассуждение про коники не обобщается напрямую на проективные пространства большей размерности. Проблема в том, что начиная с размерности  $m = 3$  кривая в  $\mathbb{CP}^m$  уже не является, вообще говоря, полным пересечением, т. е. не задается системой из  $m - 1$  независимых полиномиальных уравнений. Поэтому кривые в пространствах больших размерностей удобно рассматривать как образы вложений.

Отображением Веронезе проективной прямой в проективное пространство  $\mathbb{CP}^{n-2}$  называется отображение

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^{n-2} : t_0^{n-2}t_1 : t_0^{n-3}t_1^2 : \dots : t_1^{n-2}),$$

заданное мономами степени  $n - 2$ . Степень такой кривой равна  $n - 2$ , т. е. совпадает с размерностью пространства, куда она вложена. В аффинной карте отображение Веронезе имеет вид  $t \mapsto (t, t^2, \dots, t^{n-2})$ . Очевидно, что оно является изоморфизмом на образ. Очевидно также, что образы любых  $n$  различных точек на проективной прямой при отображении Веронезе находятся в общем положении, т. е. никакие  $n - 1$  из них не лежат в одной гиперплоскости. (Это сразу же вытекает из того, что отличен от нуля определитель Вандермонда.) Результаты проективных преобразований образа отображения Веронезе будем называть *кривыми Веронезе* (они также называются *рациональными нормальными кривыми*).

Так, гладкие коники на плоскости — это кривые Веронезе при  $n = 4$ . При  $n = 5$  кривые Веронезе называются *скрученными кубиками* в проективном пространстве.

Рассуждения для коник на плоскости без изменений переносятся на кривые Веронезе в пространствах большей размерности. Зафиксируем  $n$  точек  $x_1, \dots, x_n$  в общем положении в проективном пространстве  $\mathbb{CP}^{n-2}$ . Через точки  $x_1, \dots, x_n$  проходит  $(n - 3)$ -мерное семейство кривых Веронезе. На каждой кривой этого семейства точки  $x_1, \dots, x_n$  образуют набор отмеченных точек.

**Теорема 15.1.1.** Семейство кривых Веронезе, проходящих через данные точки  $x_1, \dots, x_n$  в общем положении в  $\mathbb{CP}^{n-2}$ , изоморфно пространству модулей  $\mathcal{M}_{0;n}$ .

**Доказательство.** Поскольку любой набор из  $n$  точек в общем положении в  $\mathbb{CP}^{n-2}$  можно перевести в любой другой проективным преобразованием, ясно, что любая рациональная кривая с  $n$  отмеченными точками реализуется кривой Веронезе, содержащей точки  $x_1, \dots, x_n$ . Повторяя наше рассуждение для случая плоскости, докажем, что никакая кривая не встречается в таком семействе дважды. Рассмотрим двойственное проективное пространство к  $\mathbb{CP}^{n-2}$ . Оно состоит из гиперплоскостей в  $\mathbb{CP}^{n-2}$ . Пересечение гиперплоскости в  $\mathbb{CP}^{n-2}$  с кривой Веронезе  $C$  сопоставляет этой гиперплоскости набор из  $n - 2$  точек кривой  $C$ , отождествляя тем самым двойственное проективное пространство с  $(n - 2)$ -й симметрической степенью  $C^{(n-2)}$  кривой  $C$ . Изоморфизм кривых  $C$  и  $C'$  индуцирует изоморфизм их  $(n - 2)$ -х симметрических степеней  $C^{(n-2)}$  и  $C'^{(n-2)}$ , т. е. проективное преобразование двойственного проективного пространства. Двойственное ему проективное преобразование пространства  $\mathbb{CP}^{n-2}$  сохраняет  $n$  точек  $x_1, \dots, x_n$ , а значит, является тождественным преобразованием. Тем самым кривые  $C$  и  $C'$  совпадают, что и требовалось доказать.  $\square$

**Упражнение 15.1.2.** Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — попарно различные точки проективной прямой,  $n \geq 3$ . Рассмотрим векторное пространство  $\Omega^1(x_1 + \dots + x_n)$ , состоящее из рациональных 1-форм на проективной прямой, имеющих в точках  $x_1, \dots, x_n$  полюсы не выше первого порядка. а) Докажите, что размерность этого пространства равна  $n - 1$ . б) Докажите, что образ отображения проективной прямой в проективизацию пространства, двойственного к  $\Omega^1(x_1 + \dots + x_n)$ , переводящего точку  $x$  в функционал  $\omega \mapsto \omega(x)$  (см. § 8.5), является кривой Веронезе.

## § 15.2. Компактификация пространства модулей

Капранов заметил, что кривые Веронезе позволяют построить компактификацию пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками.

**Пример 15.2.1.** Рассмотрим в примере с  $n = 4$  семейство всех плоских коник, проходящих через данные четыре точки, не ограничиваясь гладкими. Это означает, что мы должны добавить к уже рассмотренному семейству особые коники, каждая из которых пред-



ставляет собой пару прямых, соединяющих данные точки попарно. Таких коник три — в зависимости от того, с какой точкой мы соединяем прямой точку  $x_1$ . Тем самым мы построили замыкание пространства  $\mathcal{M}_{0;4}$ , отождествив это замыкание с проективной прямой в пространстве однородных форм степени 2 на плоскости. Эта проективная прямая состоит из форм, обращающихся в нуль в каждой из точек  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Мы будем обозначать это компактифицированное пространство через  $\bar{\mathcal{M}}_{0;4}$ .

Из примера мы видим, что для построения компактификации пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками нам требуется добавлять к этому пространству точки, отвечающие особым кривым. При этом добавляемые в примере особые кривые представляют собой пары проективных прямых, пересекающихся в одной точке, а отмеченные точки расположены по две на каждой из прямых и не совпадают с точкой их пересечения.

Пусть у нас имеется конечный набор рациональных кривых и некоторые из них попарно пересекаются. Эти кривые образуют особую кривую и являются ее *неприводимыми компонентами*. Несвязное объединение неприводимых компонент называется *нормализацией* особой кривой. Сопоставим особой кривой граф (называемый *графом неприводимых компонент* или *модулярным графом*), вершины которого взаимно однозначно соответствуют неприводимым компонентам, причем две вершины соединены ребром, если соответствующие им прямые пересекаются (количество ребер, соединяющих вершины, равно количеству пересечений соответствующих прямых). Исходный набор рациональных кривых называется *рациональной нодальной кривой*, если построенный граф оказывается деревом.

**Определение 15.2.2.** Рациональная нодальная кривая с  $n$  отмеченными точками называется *модулярно стабильной*, если

- ни одна из этих точек не лежит в точках пересечения неприводимых компонент кривой;
- ее группа автоморфизмов конечна, т. е. на каждой неприводимой компоненте есть по крайней мере три специальные точки (отмеченные точки или точки пересечения с другими компонентами).

В дальнейшем мы будем опускать слово «модулярно» и говорить просто о стабильных кривых.

В случае коник на плоскости добавляемые к пространству модулей при компактификации кривые стабильны — каждая из них

представляет собой пару пересекающихся прямых с тремя специальными точками.

Для случая произвольной размерности компактификация строится аналогичным образом — к пространству кривых Веронезе добавляются предельные особые кривые. Они стабильны, однако, в отличие от двумерного случая, не допускают простого определения. Причина состоит в том, что в старших размерностях кривые Веронезе уже не являются полными пересечениями.

**Пример 15.2.3.** Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  — точки общего положения в трехмерном проективном пространстве. Посмотрим, какие особые кривые добавляются к пространству модулей  $\mathcal{M}_{0,5}$  при компактификации.

Проведем прямую через точки  $x_1, x_2$ . Эта прямая пересекает плоскость, проходящую через точки  $x_3, x_4, x_5$ , в некоторой точке, отличной от каждой из исходных точек. При замыкании к пространству гладких кривых добавляются особые кривые, состоящие из прямой, проходящей через точки  $x_1, x_2$ , и коники, проходящей через точки  $x_3, x_4, x_5$  и точку пересечения прямой и плоскости. Как мы знаем, семейство таких коник (а значит, и семейство особых кривых такого вида) одномерно. При вырождении коники в пару прямых наша особая кривая вырождается в тройку прямых в пространстве, одна из которых пересекает две другие. Эта средняя прямая содержит одну отмеченную точку, а каждая из оставшихся двух прямых содержит по две отмеченные точки. Распределение отмеченных точек по прямой и конике, а также по всем прямым тройки может быть произвольным — с сохранением их количества.

**Теорема 15.2.4.** *Каждая стабильная рациональная кривая с  $n$  отмеченными точками единственным образом реализуется как стабильная кривая, проходящая через данный набор точек  $x_1, \dots, x_n$  в общем положении в  $\mathbb{CP}^{n-2}$ .*

Для доказательства необходимо распространить понятие отображения Веронезе на особые стабильные кривые. Мы уже видели (см. упражнение 15.1.2), что для гладких рациональных кривых с отмеченными точками отображение Веронезе совпадает с отображением, задаваемым мероморфными 1-формами с полюсами не выше первого порядка в отмеченных точках. Перенесем эту конструкцию на особые кривые.

Пусть  $(C; x_1, \dots, x_n)$  — стабильная рациональная кривая. Рассмотрим пространство мероморфных 1-форм на  $C$ , имеющих полюсы

не выше первого порядка в точках  $x_1, \dots, x_n$  и не имеющих других полюсов, за исключением, быть может, полюсов первого порядка в двойных точках. Каждая такая 1-форма определяет набор мероморфных 1-форм на неприводимых компонентах особой кривой. Мы требуем, чтобы *сумма вычетов этих 1-форм на двух прообразах одной и той же двойной точки равнялась 0*.

Пространство таких мероморфных 1-форм  $(n-1)$ -мерно, и стандартная конструкция из § 8.5 определяет отображение кривой в проективизацию  $\mathbb{CP}^{n-2}$  двойственного к нему пространства. Его мы и будем называть отображением Веронезе для особых кривых. Нетрудно видеть, что образы точек  $x_1, \dots, x_n$  при этом отображении находятся в общем положении. Дальнейшее доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 15.1.1. За деталями мы отсылаем читателя к работе [12].

**Упражнение 15.2.5.** Докажите, что канонический образ гиперэллиптической кривой рода  $g$  является кривой Веронезе в  $\mathbb{CP}^{g-1}$ .

**Упражнение 15.2.6.** Рассмотрим стабильную рациональную кривую в  $\mathbb{CP}^3$ , представляющую собой объединение прямой с двумя отмеченными точками и коники с тремя отмеченными точками, трансверсально перескающих в одной точке. Постройте голоморфное однопараметрическое семейство (параметризованное проколотым диском  $D^* \subset \mathbb{C}$ ) скрученных кубик, проходящих через пять отмеченных точек, предельным элементом которого (отвечающим точке прокола) является наша особая кривая.

**Замечание 15.2.7.** Формальное доказательство корректности приведенного определения компактифицированного пространства модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$  требует использования формализма схем Гильберта, см. предыдущую главу.

Многочлены Гильберта всех гладких кривых Веронезе в  $\mathbb{CP}^{n-2}$  одинаковы, и Капранов определяет компактифицированное пространство модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$  как замыкание в соответствующей схеме Гильберта пространства кривых Веронезе, проходящих через выбранные  $n$  точек в общем положении. Дальнейшее рассуждение требует проверки того, что многочлены Гильберта у особых кривых Веронезе такие же, как и у гладких, и все подмногообразия с таким многочленом Гильберта имеют указанный вид.

**Упражнение 15.2.8.** Найдите многочлен Гильберта кривой Веронезе в  $\mathbb{CP}^{n-2}$ . Докажите, что особые кривые Веронезе имеют тот же многочлен Гильберта. Проверьте, что всякая кривая (на самом

деле всякое подмногообразие) с тем же многочленом Гильберта является стабильной кривой Веронезе.

### § 15.3. Многочлены Пуанкаре пространств модулей

Пусть  $X$  — компактное топологическое пространство. Его *многочлен Пуанкаре* — это многочлен

$$P_X(t) = b_d t^d + \dots + b_0,$$

где  $b_i = b_i(X) = \dim(H_i(X, \mathbb{C}))$  —  $i$ -е число Бетти пространства  $X$ ,  $d = \dim X$ . Тем самым многочлен Пуанкаре дает грубое описание топологии пространства  $X$ . Например, многочлен Пуанкаре комплексной проективной прямой (являющейся с топологической точки зрения двумерной сферой) равен

$$P_{\mathbb{CP}^1}(t) = t^2 + 1.$$

Поскольку  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{CP}^1$ , этот многочлен является и многочленом Пуанкаре  $P_{\bar{\mathcal{M}}_{0,4}}(t)$  пространства модулей стабильных рациональных кривых с четырьмя отмеченными точками.

Пусть теперь  $X$  — топологическое пространство, представимое в виде  $X = X_1 \setminus X_2$ , где  $X_2 \subset X_1$  — два компактных алгебраических многообразия. Определим *мотивный многочлен Пуанкаре* пространства  $X$  равенством

$$P_X(t) = P_{X_1}(t) - P_{X_2}(t).$$

Скажем, многочлен Пуанкаре пространства модулей  $\mathcal{M}_{0,4}$  есть

$$P_{\mathcal{M}_{0,4}}(t) = P_{\bar{\mathcal{M}}_{0,4}}(t) - 3P_{\{\cdot\}}(t) = (t^2 + 1) - 3 = t^2 - 2.$$

Оказывается, введенное таким образом понятие мотивного многочлена Пуанкаре определено корректно — любые два представления пространства  $X$  в виде разности компактных алгебраических многообразий приводят к одному и тому же мотивному многочлену Пуанкаре.

Многочлен Пуанкаре естественным образом ведет себя относительно операций над многообразиями — объединения и взятия прямого произведения. Так,

$$P_{\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1}(t) = (1 + t^2)^2 = 1 + 2t^2 + t^4.$$

Воспользуемся естественностью многочлена Пуанкаре, чтобы вычислить его для пространств модулей  $\mathcal{M}_{0,n}$  для любого  $n$ . Для этого вспомним индуктивную конструкцию пространства  $\mathcal{M}_{0;n+1}$ .

Зафиксируем на проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$  координату и рассмотрим прямое произведение  $\mathcal{M}_{0;n} \times \mathbb{CP}^1$ . В каждом одномерном слое проекции этого прямого произведения на первый сомножитель выколем точки  $x_1, \dots, x_n$ , предполагая, что значения координаты точек  $x_1, x_2, x_3$  равны  $\infty, 0$  и  $1$  соответственно. При этом значения координат остальных точек однозначно определяются классом проективной эквивалентности всего набора  $x_1, \dots, x_n$ . В результате  $n$  отмеченных точек зададут  $n$  сечений прямого произведения

$$\sigma_i: \mathcal{M}_{0;n} \rightarrow \mathcal{M}_{0;n} \times \mathbb{CP}^1.$$

Дополнение к этим сечениям в прямом произведении естественно изоморфно пространству модулей  $\mathcal{M}_{0;n+1}$ . Действительно, каждая точка в этом дополнении при добавлении к  $n$  выколотым точкам слоя определяет набор из  $n+1$  точек на рациональной кривой с точностью до проективной эквивалентности. Наоборот, любой набор из  $n+1$  попарно различных точек однозначно реализуется таким образом — нужно посмотреть на слой, отвечающий набору из первых  $n$  точек.

Тем самым для каждого  $n$  определено отображение забывания  $\pi: \mathcal{M}_{0;n+1} \rightarrow \mathcal{M}_{0;n}$ , расслаивающее очередное пространство модулей над предыдущим. Каждый слой этого отображения является рациональной кривой с  $n$  проколами, что позволяет нам вычислить многочлены Пуанкаре пространств модулей гладких кривых.

**Утверждение 15.3.1.** *Многочлен Пуанкаре пространства  $\mathcal{M}_{0;n}$  равен*

$$P_{\mathcal{M}_{0;n}}(t) = (t^2 - 2)(t^2 - 3) \dots (t^2 - n + 3).$$

Действительно, многочлен Пуанкаре расслоенного пространства является произведением многочленов Пуанкаре слоя и базы.

Компактифицированные пространства модулей склеены из кусочков, каждый из которых является произведением некомпактифицированных пространств модулей. Эта конструкция позволяет вычислять многочлены Пуанкаре компактифицированных пространств.

**Пример 15.3.2.** Вычислим многочлен Пуанкаре пространства модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{0;5}$ . Это пространство является несвязным объединением следующих пространств:

- пространства модулей гладких кривых  $\mathcal{M}_{0;5}$ ;
- пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой; каждое такое пространство представляет собой прямое произведение пространств  $\mathcal{M}_{0;3} \times \mathcal{M}_{0;4}$  (на одной неприводимой компо-

ненте кривой имеется две отмеченные точки, на другой — три, и на каждой из компонент дополнительно имеется точка пересечения с другой компонентой);

- пространств модулей стабильных кривых с двумя особыми точками; каждое такое пространство представляет собой прямое произведение пространств  $\mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,3}$ .

Для подсчета многочлена Пуанкаре пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  нам требуется знать также количество содержащихся в нем пространств каждого типа. Это количество вычисляется из комбинаторных соображений, и в данном случае вычисление несложно:

- пространство первого типа одно;
- пространств второго типа 10 — это число способов выделить две пометки из пяти;
- пространств третьего типа 15 — пометку на средней неприводимой компоненте можно выбрать 5 способами, после чего разбить оставшиеся 4 пометки на две пары для крайних компонент можно 3 способами.

В результате мы получаем

$$\begin{aligned} P_{\bar{\mathcal{M}}_{0,5}} &= P_{\mathcal{M}_{0,5}} + 10P_{\mathcal{M}_{0,3}}P_{\mathcal{M}_{0,4}} + 15P_{\mathcal{M}_{0,3}}^3 = \\ &= (t^2 - 2)(t^2 - 3) + 10(t^2 - 2) + 15 = t^4 + 5t^2 + 1. \end{aligned}$$

С ростом числа отмеченных точек комбинаторика вычислений быстро усложняется, и мы приведем лишь еще один подсчет.

**Пример 15.3.3.** Пространство  $\bar{\mathcal{M}}_{0,6}$  является несвязным объединением следующих пространств:

- пространства модулей гладких кривых  $\mathcal{M}_{0,6}$ ;
- пространств модулей стабильных кривых с одной особой точкой; каждое такое пространство представляет собой либо прямое произведение пространств  $\mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,5}$  (на одной неприводимой компоненте кривой имеется две отмеченные точки, на другой — четыре), либо прямое произведение пространств  $\mathcal{M}_{0,4} \times \mathcal{M}_{0,4}$  (по три отмеченные точки на каждой компоненте);
- пространств модулей стабильных кривых с двумя особыми точками; каждое такое пространство представляет собой прямое произведение пространств  $\mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,4}$ , при этом на средней компоненте могут оказаться либо две отмеченные точки, либо одна;
- пространств модулей стабильных кривых с тремя особыми точками; каждое такое пространство представляет собой прямое

произведение пространств  $\mathcal{M}_{0;3} \times \mathcal{M}_{0;3} \times \mathcal{M}_{0;3} \times \mathcal{M}_{0;3}$ , при этом дерево неприводимых компонент может быть либо цепочкой из четырех вершин, либо звездой с центром валентности 3.

Подсчитаем количество пространств каждого типа:

- пространство первого типа одно;
- количество пространств кривых с одной особой точкой и распределением отмеченных точек  $2-4$  равно 15, а с распределением  $3-3$  их число равно 10;
- количество пространств кривых с двумя особыми точками и двумя отмеченными точками на средней компоненте равно 45, а с одной отмеченной точкой на средней компоненте — 60;
- количество пространств кривых с тремя особыми точками, дерево неприводимых компонент для которых является цепочкой, равно 90, а тех, дерево неприводимых компонент которых — звезда, — 15.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 P_{\bar{\mathcal{M}}_{0;6}} &= P_{\mathcal{M}_{0;5}} + 15P_{\mathcal{M}_{0;3}}P_{\mathcal{M}_{0;5}} + 10P_{\mathcal{M}_{0;4}}^2 + \\
 &\quad + (45 + 60)P_{\mathcal{M}_{0;3}}^2P_{\mathcal{M}_{0;4}} + (90 + 15)P_{\mathcal{M}_{0;3}}^4 = \\
 &= (t^2 - 2)(t^2 - 3)(t^2 - 4) + 15(t^2 - 2)(t^2 - 3) + \\
 &\quad + 10(t^2 - 2)^2 + 105(t^2 - 2) + 105 = \\
 &= t^6 + 16t^4 + 16t^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, мы получили многочлен с неотрицательными коэффициентами. При этом получившийся многочлен возвратный — последовательность его коэффициентов симметрична относительно середины, как и должно быть — по двойственности Пуанкаре — для любого компактного многообразия.

Оказывается, продемонстрированные выше на примерах трудоемкие комбинаторные рассуждения допускают кодирование в компактной и эффективной форме. А именно, введем две производящие функции для многочленов Пуанкаре пространств модулей гладких и стабильных рациональных кривых с отмеченными точками:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(x, t) &= x - \sum_{n=2}^{\infty} P_{\mathcal{M}_{n+1}}(t) \frac{x^n}{n!}, \\
 \bar{\mathcal{P}}(y, t) &= y + \sum_{n=2}^{\infty} P_{\bar{\mathcal{M}}_{n+1}}(t) \frac{y^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

**Теорема 15.3.4.** *Производящие функции  $\mathcal{P}(x, t)$  и  $\bar{\mathcal{P}}(y, t)$  взаимно обратны относительно подстановки, т. е.*

$$\mathcal{P}(\bar{\mathcal{P}}(y, t), t) \equiv y; \quad \bar{\mathcal{P}}(\mathcal{P}(x, t), t) \equiv x.$$

Доказательство теоремы 15.3.4 можно найти в работе [4]. Поскольку многочлены Пуанкаре пространств модулей гладких кривых нам известны, мы получаем эффективный механизм для вычисления многочленов Пуанкаре компактифицированных пространств. Этот механизм не требует рассмотрения графов неприводимых компонент и легко реализуется в любой системе компьютерных алгебраических вычислений.

Эйлерова характеристика любого компактного многообразия есть результат подстановки значения  $t = -1$  в его многочлен Пуанкаре. Аналогично тому, как мы определяли мотивный многочлен Пуанкаре, мы можем определить *мотивную эйлерову характеристику*. Для разности двух компактных гладких алгебраических многообразий она определяется как разность соответствующих эйлеровых характеристик. Мотивная эйлерова характеристика некомпактного многообразия также равна результату подстановки  $t = -1$  в его многочлен Пуанкаре. В частности, теорему 15.3.4 можно перенести на эйлеровы характеристики.

**Следствие 15.3.5.** *Экспоненциальные производящие функции*

$$\mathcal{P}(x, -1) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

*и  $\bar{\mathcal{P}}(y, -1)$  для эйлеровых характеристик некомпактифицированных и компактифицированных пространств модулей взаимно обратны относительно подстановки.*

Поскольку эйлеровы характеристики некомпактифицированных пространств модулей известны,

$$\chi(\mathcal{M}_{0;n}) = (-1)^{n-1} (n-1)!,$$

это утверждение позволяет быстро дополнить список уже вычисленных нами значений эйлеровых характеристик компактифицированных пространств:

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$\chi(\mathcal{M}_{0;n})$	2	7	34	213	1630	14747	153946	1821473



### § 15.4. Компактифицированные пространства: когомологии по Килью

За исключением простейших случаев, знания чисел Бетти, т. е. коэффициентов многочлена Пуанкаре, недостаточно для понимания того, как устроены (ко)гомологии пространства. Для описания же более тонкой структуры кольца когомологий необходимо не только понимать, из каких кусочков состоит то или иное пространство, но и знать, как именно эти кусочки приклеены друг к другу.

**Пример 15.4.1.** Мы знаем, что пространство модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  склеено из  $\mathcal{M}_{0,5}$ , десяти копий прямого произведения  $\mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,4}$  и пятнадцати копий прямого произведения  $\mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,3}$ . Чтобы понять, как все эти пространства склеены друг с другом, дадим явную конструкцию пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ .

Рассмотрим прямое произведение  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4} \times \mathbb{CP}^1$ . Зафиксируем на прямой  $\mathbb{CP}^1$  координату, в которой координаты отмеченных точек  $x_1, x_2, x_3$  равны  $\infty, 0, 1$  соответственно. Тогда эти три отмеченные точки определяют три попарно непересекающихся структурных сечения  $\sigma_i: \bar{\mathcal{M}}_{0,4} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0,4} \times \mathbb{CP}^1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Четвертое сечение  $\sigma_4$ , отвечающее отмеченной точке  $x_4$ , пересекает каждое из трех первых сечений трансверсально в одной точке, см. рис. 15.1. Эти точки пересечения лежат над точками границы  $\partial \bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ .

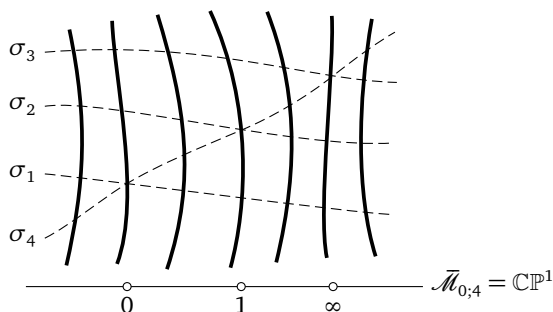


Рис. 15.1. Прямое произведение  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4} \times \mathbb{CP}^1$  и структурные сечения в нем

Для построения пространства модулей кривых  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  достаточно раздуть на поверхности  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4} \times \mathbb{CP}^1$  каждую из трех точек пересечения сечения  $\sigma_4$  с первыми тремя сечениями, см. рис. 15.2. Тем самым мы добавляем в прямое произведение двух проективных прямых  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4} \times \mathbb{CP}^1 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ , имеющее многочлен Пуан-

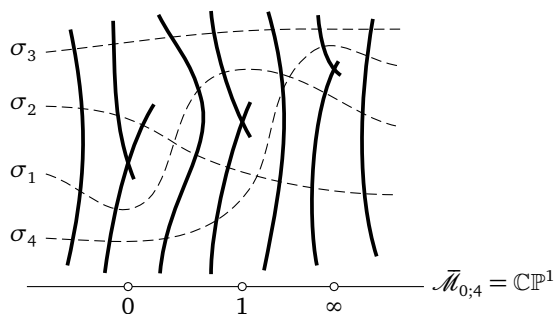


Рис. 15.2. Результат раздутия точек пересечения структурных сечений в прямом произведении  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4} \times \mathbb{CP}^1$  и структурные сечения в нем

каре  $(1+t^2)(1+t^2) = 1 + 2t^2 + t^4$ , еще тройку двумерных циклов, получая многочлен Пуанкаре  $P_{\bar{\mathcal{M}}_{0,5}}(t) = 1 + 5t^2 + t^4$ , что согласуется с выполненным нами ранее вычислением. В результате мы получим реализацию пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  как универсальной кривой  $\bar{\mathcal{C}}_{0,4}$  над пространством модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ . Слои универсальной кривой над точками пространства гладких кривых  $\mathcal{M}_{0,4}$  остаются рациональными кривыми с четырьмя отмеченными точками. Слой над каждой точкой границы представляет собой пару пересекающихся трансверсально рациональных кривых, на каждой из которых отмечено по две точки. При этом одна из кривых в паре является слоем в прямом произведении, а вторая вклеена при осуществлении раздутия.

В частности, пространство  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  отождествляется таким образом с универсальной кривой  $\bar{\mathcal{C}}_{0,4}$  над пространством модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ . Это означает, что каждый слой проекции  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  является той самой кривой с четырьмя отмеченными точками, модулем которой является точка базы.

В полученном таким образом геометрическом представлении пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  оно оказывается разбито на предписанные ранее части. Действительно, оно состоит из

- пространства  $\mathcal{M}_{0,5}$  — дополнения к четырем сечениям  $\sigma_i$  в  $\mathcal{M}_{0,4} \times \mathbb{CP}^1$ ;
- 10 экземпляров пространства  $\mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,4}$ , представленных четырьмя сечениями  $\sigma_i$  и тремя проколотыми особыми слоями проекции раздутой поверхности на множитель  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ , каждый из которых представляет собой объединение двух проколотых прямых;

- 15 точек попарного пересечения замыканий этих 10 проколотых прямых.

**Замечание 15.4.2.** Примененное для построения пространства модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  раздутие — стандартный прием разрешения особенностей в алгебраической геометрии. В данном случае особенность, от которой нам хотелось избавиться, — это точка пересечения двух структурных сечений. Раздутие можно выполнять в гладком многообразии любой размерности вдоль гладкого подмногообразия, коразмерность которого не меньше двух. Нас будет интересовать в первую очередь случай раздутия двумерной поверхности вдоль точки. Если  $X$  — двумерная поверхность и  $p \in X$ , то раздутием называется пара, состоящая из двумерной поверхности  $Y$  и голоморфного отображения  $\Sigma_p: Y \rightarrow X$ , которое является изоморфизмом над  $X \setminus \{p\}$ , причем прообраз точки  $p$  является проективной прямой. Эту проективную прямую следует понимать как проективизацию касательной плоскости  $T_p X$  к поверхности  $X$  в точке  $p$ .

Раздутие является локальной операцией, которая не затрагивает структуру поверхности вне точки раздутия. В локальных координатах  $x, y$  в окрестности точки  $p$  и  $u, v$  в окрестности ее прообраза раздутие записывается в виде  $x = uv$ ,  $y = v$ . Видно, что при таком отображении всякая прямая  $x = au$  является образом прямой  $u = a$ , т. е. прямые, пересекающиеся в точке  $p$ , при раздутии являются образами параллельных прямых.

Результат раздутия плоскости  $X = \mathbb{C}^2$  в начале координат естественно отождествляется с тотальным пространством линейного расслоения  $\mathcal{O}(-1)$  над проективной прямой. Действительно, каждая точка плоскости  $\mathbb{C}^2$ , отличная от начала координат, однозначно определяет прямую на плоскости, проходящую через эту точку и начало координат, т. е. слой расслоения  $\mathcal{O}(-1)$  над  $\mathbb{CP}^1$ , и дополнительно точку в этом слое. Слой расслоения  $\mathcal{O}(-1)$  над началом координат отождествляется с вклеенной при раздутии проективной прямой: точки этого слоя взаимно однозначно соответствуют прямым в  $\mathbb{C}^2$ , проходящим через начало координат. При раздутии точки на поверхности полный прообраз окрестности этой точки биголоморфен окрестности слоя над началом координат в  $\mathcal{O}(-1)$ .

Аналогично для любого натурального  $n \geq 2$  результат раздутия начала координат в пространстве  $\mathbb{C}^n$  отождествляется с тотальным пространством линейного расслоения  $\mathcal{O}(-1)$  над проективным пространством  $\mathbb{CP}^{n-1}$ .

**Упражнение 15.4.3.** Опишите типичную стабильную рациональную кривую, отвечающую каждой из составляющих пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0;5}$  в приведенном выше описании.

**Упражнение 15.4.4.** Поверхность  $\bar{\mathcal{M}}_{0;5}$  является результатом раздутия трех точек в  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ . Верно ли, что любая тройка точек в прямом произведении двух проективных прямых переводится в любую другую тройку биголоморфным преобразованием? Зависит ли кольцо когомологий поверхности  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ , раздутой в трех точках, от того, какие именно три точки раздуваются?

С помощью обобщения этой конструкции Кильо [13] удалось найти простое описание колец когомологий пространств  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$ .

Обозначим через  $D = A \sqcup B$  неупорядоченное разбиение множества индексов отмеченных точек  $\{1, 2, \dots, n\}$  на два непересекающихся подмножества  $A$  и  $B$ , в каждом из которых не менее двух элементов. (Разбиение  $A \sqcup B$  совпадает с  $B \sqcup A$ .) Рассмотрим все стабильные рациональные кривые в  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$ , состоящие из двух неприводимых компонент, одна из которых содержит все точки с индексами из набора  $A$ , а вторая — все точки с индексами из набора  $B$ . Такие стабильные кривые образуют подмногообразие (комплексной) коразмерности 1 в  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$ . Его замыкание является гладким компактным комплексным подмногообразием коразмерности 1. Оно изоморфно прямому произведению многообразий  $\bar{\mathcal{M}}_{0;|A|+1}$  и  $\bar{\mathcal{M}}_{0;|B|+1}$  (точка пересечения двух неприводимых компонент общей кривой является дополнительной выделенной точкой на каждой из компонент). Обозначим через  $[D]$  двойственный этому подмногообразию по Пуанкаре класс вторых когомологий,  $[D] \in H^2(\bar{\mathcal{M}}_{0;n})$ .

**Теорема 15.4.5.** Классы  $[D]$  порождают кольцо когомологий  $H^*(\bar{\mathcal{M}}_{0;n})$ .

В частности, эти классы линейно порождают пространство вторых когомологий  $H^2(\bar{\mathcal{M}}_{0;n})$ , все кольцо когомологий порождено вторыми когомологиями и нечетные когомологии отсутствуют.

Образующие  $[D]$  не являются линейно независимыми. Например, при  $n = 4$  все три образующие, отвечающие разбиениям

$$\{1, 2\} \sqcup \{3, 4\}, \quad \{1, 3\} \sqcup \{2, 4\}, \quad \{1, 4\} \sqcup \{2, 3\},$$

представляют один и тот же класс когомологий, а именно класс, двойственный точке.

Более общим образом, зафиксируем любую четверку  $i, j, k, l$  попарно различных чисел между 1 и  $n$ . Обозначим через  $[ij \mathcal{D} kl] \in$

$\in H^2(\bar{\mathcal{M}}_{0;n})$  сумму всех тех образующих  $D$ , в которых индексы  $i, j$  лежат в одной части разбиения, а  $k, l$  — в другой. Тогда образующие  $[D]$  удовлетворяют системе линейных соотношений

$$R_{ijkl}: [ij\mathcal{D}kl] = [ik\mathcal{D}jl] = [il\mathcal{D}jk].$$

Эти соотношения легко выводятся из рассмотрения сквозного забывающего отображения  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0;4}$ , которое забывает все точки, кроме  $x_i, x_j, x_k, x_l$ , и стягивает в точку все ставшие в результате нестабильными компоненты кривой.

**Теорема 15.4.6.** *Соотношения  $R_{ijkl}$  линейно порождают пространство линейных соотношений в  $H^2(\bar{\mathcal{M}}_{0;n})$ .*

Наконец, назовем два разбиения  $D, D'$  совместимыми, если множество индексов  $\{1, 2, \dots, n\}$  допускает такое разбиение на три попарно не пересекающихся подмножества  $A, B, C$ , что

$$D = (A \sqcup B) \sqcup C, \quad D' = A \sqcup (B \sqcup C).$$

Легко видеть, что если два разбиения  $D$  и  $D'$  не совместимы, то соответствующие циклы не пересекаются. Поэтому произведение образующих  $[D]$  и  $[D']$  в кольце когомологий равно 0.

**Теорема 15.4.7.** *Алгебра когомологий  $H^*(\bar{\mathcal{M}}_{0;n})$  порождена образующими  $[D]$  по модулю аддитивных соотношений  $R_{ijkl}$  и мультипликативных соотношений  $[D][D'] = 0$  для любых несовместимых разбиений  $D$  и  $D'$ .*

Киль устанавливает также и изоморфизм кольца Чжоу многообразия  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$  (т. е. кольца пересечений классов рациональной эквивалентности подмногообразий в  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$ ) кольцу его когомологий, получая тем самым описание кольца Чжоу.

**Доказательство теоремы 15.4.7.** В конструкции Кили пространства модулей стабильных рациональных кривых строятся индуктивно. Предположим, что пространство  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$  уже построено. Тогда пространство  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n+1}$  строится как результат последовательности раздутий прямого произведения  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n} \times \bar{\mathcal{M}}_{0;4}$ . При этом раздутия осуществляются вдоль гладких подмногообразий коразмерности 2.

Обозначим через  $p_1$  проекцию прямого произведения  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n} \times \bar{\mathcal{M}}_{0;4}$  на первый сомножитель; через  $\pi: \bar{\mathcal{M}}_{0;n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0;n}$ , как обычно, обозначено отображение забывания последней отмеченной точки. Тогда существует отображение  $\pi_1: \bar{\mathcal{M}}_{0;n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0;n} \times \bar{\mathcal{M}}_{0;4}$ , достраивающее

коммутативный треугольник.

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\mathcal{M}}_{0;n+1} & \xrightarrow{\pi_1} & \bar{\mathcal{M}}_{0;n} \times \bar{\mathcal{M}}_{0;4} \\
 & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\
 & \bar{\mathcal{M}}_{0;n} &
 \end{array}$$

К построению этого отображения как композиции последовательных раздутий мы сейчас и переходим.

Пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_n: \bar{\mathcal{M}}_{0;n} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0;n+1}$  — структурные сечения универсальной кривой. Их композиция с отображением  $\pi_1$  задает отображения

$$\pi_1(\sigma_i): \bar{\mathcal{M}}_{0;n} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0;n} \times \bar{\mathcal{M}}_{0;4}.$$

При каждом из этих отображений всякий дивизор  $[D] \subset \bar{\mathcal{M}}_{0;n}$  переходит в гладкое подмногообразие коразмерности 2 в  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n} \times \bar{\mathcal{M}}_{0;4}$ . Будем обозначать эти подмногообразия  $\langle D \rangle$ . Обозначим через  $\langle D_k \rangle$  объединение всех подмногообразий  $\langle D \rangle$ , отвечающих упорядоченным разбиениям  $D = A \sqcup B$ , часть  $B$  которых состоит из  $k$  элементов,  $k = 2, 3, \dots, n-2$ . Положим  $X_1 = \bar{\mathcal{M}}_{0;n} \times \bar{\mathcal{M}}_{0;4}$  и, осуществив последовательные раздутия многообразия  $X_1$  вдоль  $\langle D_2 \rangle, \langle D_3 \rangle, \dots, \langle D_{n-2} \rangle$ , получим  $X_{n-2} = \bar{\mathcal{M}}_{0;n+1}$ .

Говоря более детально, многообразие  $X_2$  является результатом раздутия  $X_1$  вдоль  $\langle D_2 \rangle$ . Обратим внимание на то, что  $\langle D_2 \rangle$  является несвязным объединением попарно изоморфных подмногообразий, занумерованных парами различных индексов из  $\{1, \dots, n\}$ . Пусть  $f_1: X_2 \rightarrow X_1$  — это раздутие. Каждый прямой прообраз  $f_1^{-1}(\langle D_k \rangle)$ ,  $k \geq 3$ , представляет собой объединение попарно изоморфных неприводимых гладких компонент. При этом неприводимые компоненты в  $f_1^{-1}(\langle D_3 \rangle)$  попарно не пересекаются. Действительно, пересечение двух неприводимых компонент многообразия  $\langle D_3 \rangle$  является непустым в случае, если части  $B$  разбиений, отвечающих этим компонентам, отличаются одним элементом. После раздутия вдоль  $\langle D_2 \rangle$  прямые прообразы этих компонент уже не пересекаются. Точно так же последующие раздутия происходят вдоль подмногообразий, представляющих собой несвязное объединение гладких попарно изоморфных компонент.  $\square$

**Упражнение 15.4.8.** Пользуясь теоремой Килья, дайте полное описание колец когомологий  $H^*(\bar{\mathcal{M}}_{0;5})$ ,  $H^*(\bar{\mathcal{M}}_{0;6})$ .

**Упражнение 15.4.9.** Верно ли, что классы когомологий, двойственные любым пяти граничным стратам коразмерности 1 в  $\mathcal{M}_{0;5}$ , линейно независимы, т. е. образуют базис в  $H^2(\mathcal{M}_{0;5})$ ?

**Упражнение 15.4.10.** Вычислите  $S_n$ -симметрическую часть в кольцах когомологий пространств  $\mathcal{M}_{0;5}$  и  $\mathcal{M}_{0;6}$ .

### § 15.5. Компактифицированные пространства: когомологии по Концевичу—Манину

При больших значениях параметра  $n$  описание по Килью пространств когомологий  $H^k(\mathcal{M}_{0;n})$  становится трудоемким из-за большого количества образующих и соотношений. М.Л. Концевич и Ю.И. Манин предложили описание этих пространств в терминах модулярных деревьев.

Сопоставим стабильной рациональной кривой с  $n$  отмеченными точками ее модулярное дерево, в вершинах которого расставлены пометки из множества  $\{1, \dots, n\}$  — номера отмеченных точек, лежащих на соответствующей компоненте. Одна вершина может нести на себе несколько пометок. Каждому модулярному дереву  $T$  можно сопоставить подмногообразие в  $\mathcal{M}_{0;n}$  — замыкание множества всех кривых с модулярным деревом  $T$  — и двойственный этому подмногообразию класс когомологий  $[T] \in H^*(\mathcal{M}_{0;n})$ . Мы будем называть это подмногообразие *модулярным стратом*. Например, дереву, состоящему из одной вершины, отвечают все многообразия  $\mathcal{M}_{0;n}$  и единичный класс когомологий в  $H^0(\mathcal{M}_{0;n})$ . Размерность класса когомологий  $[T]$ , отвечающего модулярному дереву  $T$ , равна удвоенному количеству ребер в этом дереве, т. е. количеству особых точек в кривой с таким модулярным деревом.

**Упражнение 15.5.1.** Нарисуйте все помеченные модулярные деревья с двумя ребрами для  $n = 6$ .

**Теорема 15.5.2.** Классы  $[T]$ , отвечающие деревьям с  $k$  ребрами, линейно порождают пространство  $H^{2k}(\mathcal{M}_{0;n})$ .

Эти классы не независимы и подчиняются линейным соотношениям, которые строятся следующим образом. Фиксируем дерево  $T$ , четверку пометок  $i, j, k, l$  вершин этого дерева и вершину  $v$ , разделяющую эти пометки. Последнее требование означает, что все четыре кратчайших пути, соединяющих  $v$  с каждой из вершин, помеченных индексами  $i, j, k$  и  $l$ , начинаются с различных ребер.

На модулярных деревьях определено понятие стягивания ребра  $T' \rightarrow T$  — операции, при которой число ребер и число вершин в де-

реве уменьшается на 1. Будем говорить, что стягивание  $T' \rightarrow T$  отделяет пометки  $i, j$  от пометок  $k, l$ , если вершина  $v$  дерева  $T$  есть результат стягивания в дереве  $T'$  ребра, кратчайшие пути из одного конца которого в вершины с пометками  $i, j$ , а из другого конца в вершины с пометками  $k, l$ , не содержат само это ребро.

**Лемма 15.5.3.** *Классы когомологий, отвечающие модулярным деревьям, удовлетворяют линейным соотношениям*

$$\sum_{ijT'kl} [T'] = \sum_{ikT''jl} [T''],$$

где суммирование в левой части идет по всем стягиваниям  $T' \rightarrow T$ , отделяющим пометки  $i, j$  от пометок  $k, l$ , а суммирование в правой части — по всем стягиваниям  $T'' \rightarrow T$ , отделяющим пометки  $i, k$  от пометок  $j, l$ .

**Доказательство леммы.** Рассмотрим результат стягивания в дереве  $T$  всех ребер, не содержащих меток  $i, j, k, l$ . В результате мы получим отображение соответствующего страта в  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ , причем левая и правая части равенства будут соответствовать двум различным точкам границы в  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ . Прообразы этих двух точек в  $\bar{\mathcal{M}}_{0,n}$  представляют один и тот же класс вторых когомологий и дают один и тот же класс когомологий в  $H^{2(k+1)}(\bar{\mathcal{M}}_{0,n})$  в пересечении с классом  $[T] \in H^{2k}(\bar{\mathcal{M}}_{0,n})$ .  $\square$

**Теорема 15.5.4.** *Описанные в лемме линейные соотношения порождают все пространство линейных соотношений между классами  $[T]$ .*

**Упражнение 15.5.5.** Выпишите все линейные соотношения между классами модулярных стратов в

$$\text{а) } H^2(\bar{\mathcal{M}}_{0,6}), \quad \text{б) } H^4(\bar{\mathcal{M}}_{0,6}), \quad \text{в) } H^4(\bar{\mathcal{M}}_{0,7})$$

и найдите размерности соответствующих пространств прямым вычислением.



## Глава 16

# Стабильные кривые

В предыдущей главе мы ввели понятие стабильной рациональной кривой с отмеченными точками. В этой главе мы распространяем это понятие на кривые старших родов. (Модулярная) стабильность кривой означает, что она имеет конечную группу автоморфизмов.

Кривые маленьких родов ( $g = 0$  и  $g = 1$ ) становятся стабильными, только если на них отметить несколько (по крайней мере три в рациональном случае и по крайней мере одну в эллиптическом случае) точек. Если род кривой не меньше двух, то гладкие кривые стабильны, даже если на них нет отмеченных точек. Однако для компактификации пространства модулей гладких стабильных кривых к нему приходится добавлять и модули особых кривых. Пространство  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  стабильных нодальных кривых данного рода  $g$  с фиксированным числом  $n$  отмеченных точек является естественной компактификацией пространства гладких кривых. Как и пространство модулей гладких кривых положительного рода, оно, вообще говоря, не является многообразием, благодаря тому что стабильные кривые могут иметь нетривиальные, хотя и конечные, группы автоморфизмов. Однако это не мешает пространству  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  быть гладким орбиобразием (орбифолдом).

### § 16.1. Определение и примеры стабильных кривых

Необходимость компактификации пространств модулей кривых и требование модулярности (состоящее в том, что добавляемые к пространству модулей точки также должны соответствовать какому-то кривым) приводят к необходимости помимо гладких рассматривать также и особые кривые. При этом хотелось бы, чтобы вновь рассматриваемые особые кривые имели как можно более простые особенности и их группа автоморфизмов по-прежнему была конечной. Этим требованиям удовлетворяют так называемые стабильные кривые. Добавление стабильных кривых компактифицирует пространство модулей.

**Определение 16.1.1.** *Стабильной кривой* называется нодальная кривая, группа автоморфизмов которой конечна.

Это определение требует пояснения, но, прежде чем давать его, приведем пару примеров.

**Пример 16.1.2.** Пусть  $C_1, C_2$  — две эллиптические кривые, и пусть  $p_1, p_2$  — точки соответственно на первой и на второй кривой. Рассмотрим кривую, полученную путем отождествления точек  $p_1$  и  $p_2$ . Эта кривая стабильна. Действительно, ее автоморфизмы порождены автоморфизмами кривой  $C_1$ , сохраняющими точку  $p_1$ , автоморфизмами кривой  $C_2$ , сохраняющими точку  $p_2$ , а также, быть может, автоморфизмами перестановки кривых  $C_1$  и  $C_2$ , переводящими точку  $p_1$  в точку  $p_2$  (последние существуют, только если кривые  $C_1$  и  $C_2$  изоморфны).

**Пример 16.1.3.** Пусть  $p, q$  — точки эллиптической кривой  $\tilde{C}$ . Рассмотрим кривую  $C$ , полученную путем отождествления точек  $p$  и  $q$ . Эта кривая стабильна. Действительно, ее автоморфизмы порождены автоморфизмами исходной эллиптической кривой  $\tilde{C}$ , полученной из  $C$  «разделением» точек  $p$  и  $q$ , сохраняющими пару точек  $p$  и  $q$ . Группа таких автоморфизмов конечна.

Напомним, что *нодальной кривой* называется такая алгебраическая кривая, у которой помимо гладких точек могут быть также точки, имеющие окрестность, биголоморфную паре дисков с одной общей точкой (которую можно считать центром обоих дисков). Такие особые точки называются *простыми двойными точками*, или *узлами*, или точками *простого самопересечения*. Число простых двойных точек на нодальной кривой конечно. Мы говорим об абстрактных кривых, однако простую двойную точку удобно представлять себе как точку трансверсального самопересечения плоской или пространственной кривой.

Для каждой нодальной кривой  $C$  определена ее *нормализация*. Это гладкая комплексная кривая  $\tilde{C}$  вместе с отображением  $\tilde{C} \rightarrow C$ , являющимся локальным биголоморфизмом всюду, за исключением прообразов двойных точек. У каждой из двойных точек имеется в точности два прообраза, и у каждого из этих прообразов имеется окрестность, биголоморфно отображающаяся на один из дисков окрестности двойной точки (каждый из прообразов приписан к своему диску). В примере 16.1.2 нормализация  $\tilde{C}$  нодальной кривой  $C$  является несвязным объединением гладких кривых  $C_1$  и  $C_2$ , а в примере 16.1.3 это связная гладкая эллиптическая кривая.

Образ каждой компоненты связности при отображении нормализации называется *неприводимой компонентой* кривой  $C$ , так что кривая в примере 16.1.2 состоит из двух неприводимых компонент, а в примере 16.1.3 — из одной.

**Пример 16.1.4.** При  $t \neq 0$  кривые семейства  $y^2 = x^3 + x^2 + t$  являются гладкими плоскими эллиптическими кривыми. При  $t = 0$  кривая этого семейства особая, имеющая простое самопересечение в начале координат. Ее нормализация — рациональная кривая, и сама вырожденная кубика получена склейкой двух точек этой рациональной кривой. Как мы увидим ниже, предельную кривую естественно также считать эллиптической.

Формальное определение нодальной кривой требует определения кольца мероморфных функций на ней (это нужно, скажем, для того, чтобы отличать трансверсальное самопересечение от касания). Определим кольцо мероморфных функций на нодальной кривой как кольцо мероморфных функций на ее нормализации, принимающих одинаковые конечные значения в обоих прообразах любой двойной точки.

Условие стабильности нодальной кривой накладывает на нее некоторые ограничения. Эти ограничения состоят в следующем:

- на каждой рациональной компоненте нормализации стабильной нодальной кривой должно быть по меньшей мере три прообраза двойных точек;
- на каждой эллиптической компоненте нормализации должен быть по меньшей мере один прообраз двойной точки.

Действительно, группа автоморфизмов кривой бесконечна, только если ее род меньше двух, и компоненты таких родов должны быть стабилизированы прообразами двойных точек.

Теперь мы можем дать определение стабильной кривой с отмеченными точками.

**Определение 16.1.5.** *Стабильной кривой с отмеченными точками* называется нодальная кривая с отмеченными точками, точки самопересечения которой не совпадают с отмеченными точками и группа автоморфизмов которой конечна.

Последнее требование означает, что

- на каждой рациональной компоненте нормализации стабильной нодальной кривой должно быть по меньшей мере три специальные точки (т. е. точки, являющиеся отмеченными или прообразами двойных точек);

- на каждой эллиптической компоненте нормализации должна быть по меньшей мере одна специальная точка.

## § 16.2. Род нодальной кривой

Для того чтобы иметь возможность доклеивать пространство модулей кривых рода  $g$  стабильными кривыми, мы должны знать, что такое род нодальной кривой. Понятие рода нужно ввести таким образом, чтобы при вырождениях гладких кривых род сохранялся. Одна из возможностей состоит в том, чтобы определить пространство голоморфных 1-форм на нодальных кривых. Тогда родом кривой будет размерность этого пространства.

Ясно, что голоморфная 1-форма на нодальной кривой должна быть голоморфной в гладких точках этой кривой. Осталось предписать ее поведение в особых точках. Разрешим такой 1-форме иметь полюсы первого порядка в двойных точках на каждой ветви и потребуем, чтобы сумма вычетов в этих точках обращалась в нуль.

Итак, *геометрическим родом* нодальной кривой называется размерность пространства мероморфных 1-форм на ее нормализации, все полюсы которых расположены в прообразах двойных точек, причем порядок каждого полюса не превосходит единицы и сумма вычетов на двух прообразах одной двойной точки равна нулю.

Типичным примером поведения голоморфных (и, более общим образом, мероморфных) 1-форм на вырожденной кривой, который, собственно, и приводит к данному выше определению, служит следующий. Рассмотрим на плоскости однопараметрическое семейство рациональных кривых  $xy = t$ . Ограничение 1-формы  $dx/x$  на кривую этого семейства задает мероморфную 1-форму на ней, имеющую два полюса первого порядка — оба на бесконечности (вычеты в которых не зависят от  $t$ ). Это ограничение совпадает с ограничением на ту же кривую 1-формы  $-dy/y$ . (Действительно, разность этих 1-форм равна

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{d(xy)}{xy},$$

и ее ограничение на кривую  $xy = \text{const}$  тождественно равно нулю.) При обращении параметра  $t$  в нуль коника  $xy = t$  вырождается в две координатные прямые, а предельная 1-форма выглядит так: на прямой  $y = 0$  она совпадает с 1-формой  $dx/x$ , а на прямой  $x = 0$  —

с 1-формой  $-dy/y$ . В точке пересечения вычеты у этих 1-форм противоположны. Равенство нулю суммы вычетов в прообразах двойной точки непосредственно следует из равенства нулю суммы вычетов любой мероморфной 1-формы на гладкой кривой.

Вот другое определение того же понятия рода. Окрестность двойной точки изоморфна паре дисков, пересекающихся по одной точке. Граница этой окрестности — пара окружностей. Сгладим эту пару дисков, превратив ее в цилиндр, граница которого — та же пара окружностей, и поступим так с каждой двойной точкой кривой. В результате получим гладкую компактную двумерную поверхность. Ее род и называется родом соответствующей нодальной кривой.

**Упражнение 16.2.1.** Докажите, что приведенные выше два определения рода нодальной кривой дают одинаковый результат.

**Упражнение 16.2.2.** Докажите, что если нодальная кривая получена склейкой пары точек гладкой кривой рода  $g$ , то ее род равен  $g + 1$ . То же верно и для склейки пары точек нодальной кривой геометрического рода  $g$ .

**Упражнение 16.2.3.** Найдите род нодальной кривой, полученной склейкой двух нодальных кривых родов  $g_1$  и  $g_2$  соответственно по паре точек.

Понятие модулярного графа рациональной нодальной кривой распространяется на кривые произвольного рода. Сопоставим нодальной кривой граф, вершины которого — неприводимые компоненты кривой, причем две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие компоненты пересекаются. Количество ребер, соединяющих две вершины, равно количеству точек пересечения соответствующих им неприводимых компонент. Каждой точке самопересечения неприводимой компоненты отвечает петля — ребро с совпадающими концами — в графе. Каждую вершину пометим родом нормализации соответствующей этой вершине компоненты. Такой граф называется *модулярным графом* кривой.

**Упражнение 16.2.4.** Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 2 и 3 без отмеченных точек.

Вершины модулярных графов нодальных кривых с отмеченными точками принято помечать метками расположенных на соответствующих неприводимых компонентах отмеченных точек.

**Упражнение 16.2.5.** Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 1 с одной, двумя и тремя отмеченными точками и рода 2 с одной отмеченной точкой.

**Упражнение 16.2.6.** Верно ли, что порядок группы автоморфизмов стабильной кривой рода  $g$  (быть может, с отмеченными точками) не может превышать  $84(g-1)$ ?

### § 16.3. Вырождения гладких кривых

Точками компактифицированного (по Делиню—Мамфорду) пространства модулей кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками служат классы биголоморфной эквивалентности стабильных кривых. Если компактное пространство модулей стабильных кривых  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  действительно существует, то оно обладает следующим свойством: любой голоморфный морфизм проколотого диска в  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  продолжается в выколотую точку. Это означает, что любое голоморфное семейство гладких кривых над проколотым диском доклеивается стабильной кривой. Посмотрим, как это происходит на практике.

**Пример 16.3.1.** Пусть нодальная кривая  $C$  с отмеченной точкой  $x_1$  получена как результат склейки двух отличных от  $x_1$  точек рациональной кривой. Геометрический род кривой  $C$  равен 1. Действительно, пространство голоморфных 1-форм на ней — это пространство мероморфных 1-форм на  $\mathbb{CP}^1$ , имеющих полюсы 1-го порядка в склеиваемых точках (сумма вычетов такой 1-формы в склеиваемых точках автоматически равна 0). Размерность последнего пространства равна 1.

Кривая  $C$  стабильна — группа ее автоморфизмов конечна. Как нетрудно видеть, других особых стабильных эллиптических кривых с одной отмеченной точкой нет. Присоединение к пространству модулей  $\mathcal{M}_{1,1}$  точки, отвечающей кривой  $C$ , дает компактифицированное пространство модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{1,1}$ . Локально это присоединение выглядит как результат вырождения семейства эллиптических кривых, описанного в примере 16.1.4 (отмеченную на всех кривых семейства точку  $x_1$  можно считать расположенной на бесконечности). В терминах представления пространства  $\mathcal{M}_{1,1}$  в виде фундаментальной области действия группы  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  на прямой  $\mathbb{C}$  присоединяемая к нему точка описывает предельную структуру эллиптической кривой, отвечающей решетке, натянутой на векторы 1 и  $\tau = a + bi$  при  $b \rightarrow \infty$ .

**Упражнение 16.3.2.** Какую группу автоморфизмов имеет рассмотренная в предыдущем примере нодальная эллиптическая кривая с отмеченной точкой?

**Пример 16.3.3.** Пусть  $C$  — кривая рода  $g \geq 1$ ,  $x_1$  — фиксированная точка этой кривой,  $x_2$  — переменная точка этой кривой. Обозначим че-

рез  $C_{x_2}$  кривую  $C$  с отмеченными точками  $x_1$  и  $x_2$ . Нас интересует, к какой точке пространства модулей стремится эта кривая при  $x_2 \rightarrow x_1$ .

Рассмотрим двумерную поверхность  $C \times D$  (которую мы интерпретируем как тождественное одномерное семейство кривых) — прямое произведение кривой  $C$  на комплексный диск, расслоенное над диском  $D$ . Диск  $D$  отождествляется с окрестностью точки  $x_1$  в кривой  $C$ , и его точки — это возможные положения точки  $x_2$ . В этом расслоении выделены два сечения — постоянное  $s_1: D \rightarrow C \times D$ , соответствующее точке  $x_1$ , и переменное  $s_2: D \rightarrow C \times D$ , отвечающее точке  $x_2$ . Эти два сечения трансверсально пересекаются в единственной точке — над центром диска.

Для построения стабильного предела этого семейства выполним раздутие поверхности  $C \times D$  в точке пересечения сечений. В результате в эту поверхность будет вклеена проективная прямая, а сечения будут пересекать ее трансверсально. Эта прямая пересекает слой над выколотой точкой трансверсально. Вместе со слоем она образует предельную кривую. Прообразы сечений при раздутии оставляют следы на вклеенной проективной прямой. Эти следы суть предельные положения точек  $x_1$  и  $x_2$ . Точное их расположение не имеет значения: все тройки точек на проективной прямой эквивалентны.

Итак, предельным стабильным элементом нашего семейства является кривая  $C$ , в фиксированной точке которой приклеена проективная прямая (до вырождения эта точка является отмеченной точкой  $x_1$ ), содержащая обе отмеченные точки. Возникает вопрос, нельзя ли с помощью другой конструкции получить другой предел. Единственность предела как раз и гарантируется существованием пространства модулей стабильных кривых.

**Упражнение 16.3.4.** Как выглядит стабильный предел однопараметрического семейства кривых рода  $g + 1$ ,  $g \geq 1$ , полученных из данной гладкой кривой  $C$  рода  $g$  склейкой постоянной точки  $p$  с переменной точкой  $q$  при стремлении точки  $q$  к точке  $p$ ?

## § 16.4. Компактификация пространств модулей стабильными кривыми и плюриканонические вложения

Теперь мы можем дать строгое определение пространства модулей стабильных кривых. Про это пространство правильно думать как про универсальное семейство стабильных кривых данного рода с данным количеством отмеченных точек.

**Определение 16.4.1.** Семейством стабильных кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками называется набор  $(B, X, \pi, \{s_1, \dots, s_n\})$ , состоящий из

- гладкого орбифолда  $B$ ;
- гладкого орбифолда  $X$  комплексной размерности  $\dim B + 1$ ;
- голоморфного отображения  $\pi: X \rightarrow B$ ;
- набора голоморфных отображений  $s_i: B \rightarrow X$

и обладающий следующими свойствами:

- образы  $s_i(B)$  отображений  $s_i$  не пересекаются между собой и не проходят через особые точки слоев отображения  $\pi$ , причем для всех  $i = 1, \dots, n$  композиция  $\pi \circ s_i$  является тождественным отображением, т. е.  $s_i$  — сечения отображения  $\pi$ ;
- слои отображения  $\pi$  являются результатами факторизации стабильных комплексных кривых рода  $g$  с отмеченными на них  $n$  точками пересечения с образами сечений  $s_i$  по их группам автоморфизмов.

Пространство модулей гладких кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками  $\mathcal{M}_{g,n}$  является гладким комплексным орбифолдом комплексной размерности  $3g - 3 + n$ . Над ним определено семейство гладких стабильных кривых  $\mathcal{C}_{g,n}$ , размерность которого равна  $3g - 2 + n$ . Компактификация  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  пространства  $\mathcal{M}_{g,n}$  является компактным гладким комплексным орбифолдом той же размерности. Универсальная кривая  $\mathcal{C}_{g,n}$  над  $\mathcal{M}_{g,n}$  также допускает компактификацию. Точнее говоря, справедлива следующая теорема.

**Теорема 16.4.2** (Делинь—Мамфорд). Для всякого целого неотрицательного числа  $g$  и целого неотрицательного числа  $n$ , удовлетворяющих условию  $2g - 3 + n \geq 0$ , существует такое семейство стабильных кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками

$$(\bar{\mathcal{M}}_{g,n}, \bar{\mathcal{C}}_{g,n}, \pi_{g,n}, \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}),$$

что для любого семейства стабильных кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками  $(X, B, \pi, \{s_1, \dots, s_n\})$  существует единственная пара голоморфных отображений  $F: X \rightarrow \bar{\mathcal{C}}_{g,n}$ ,  $G: B \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ , обеспечивающих коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & \bar{\mathcal{C}}_{g,n} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_{g,n} \\ B & \xrightarrow{G} & \bar{\mathcal{M}}_{g,n} \end{array}$$



и таких, что  $F \circ s_i = \sigma_i \circ G$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Пространство модулей  $\bar{\mathcal{M}}_{g;n}$  определено однозначно с точностью до бигоморфизма и неприводимо.

Допуская вольность речи, мы в дальнейшем будем говорить о пространстве модулей стабильных кривых с  $n$  отмеченными точками  $\bar{\mathcal{M}}_{g;n}$ , имея в виду весь определяющий его набор пространств и отображений.

**Замечание 16.4.3.** Заключение теоремы означает, что это пространство модулей является грубым. Оно было бы тонким пространством модулей, если бы пространства  $\bar{\mathcal{C}}_{g;n}$  и  $\bar{\mathcal{M}}_{g;n}$  были гладкими многообразиями, а не орбифолдами, а слои отображения  $\pi_{g;n}$  — самими стабильными кривыми, а не результатами их факторизации по действию группы автоморфизмов. Пространство  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$  является тонким пространством модулей при любом значении  $n \geq 3$ , однако при  $g \geq 1$  тонких пространств модулей стабильных кривых не существует ни при каком  $n$ . Впрочем, при любом  $g$  некомпактифицированное пространство модулей  $\mathcal{M}_{g;n}$  при достаточно большом  $n$  является тонким пространством модулей — нужно лишь выбрать значение  $n$  превосходящим максимальное количество неподвижных точек у нетривиального автоморфизма гладкой кривой рода  $g$ .

Пространство модулей гладких кривых  $\mathcal{M}_{g;n}$  является плотным по Зарисскому подмножеством в  $\bar{\mathcal{M}}_{g;n}$ . Его дополнение

$$\partial \bar{\mathcal{M}}_{g;n} = \bar{\mathcal{M}}_{g;n} \setminus \mathcal{M}_{g;n}$$

называется *границей* пространства модулей стабильных кривых. Так, граница  $\partial \bar{\mathcal{M}}_{1;1}$  состоит из единственной точки — рациональной кривой  $\mathbb{CP}^1$  с одной отмеченной и двумя склеенными точками.

Точки границы  $\partial \bar{\mathcal{M}}_{g;n}$  отвечают особым стабильным кривым. Как и в случае рациональных стабильных кривых, эта граница стратифицирована вырождениями кривых — каждый страт определяет количество особых точек на своей типичной кривой, родами ее неприводимых компонент, конфигурацией склейки неприводимых компонент между собой и распределением отмеченных точек по неприводимым компонентам. Страты находятся во взаимно однозначном соответствии с модулярными графами. При  $g \geq 1$  такой граф уже необязательно является деревом, а каждой его вершине (сопоставляемой неприводимой компоненте общей кривой страта) помимо набора отмеченных точек приписано еще и неотрицательное целое число — род этой неприводимой компоненты.

Доказательство теоремы 16.4.2 проводится по той же схеме, что и доказательство существования пространства модулей гладких кривых. Стабильные кривые с отмеченными точками отображаются в проективное пространство большой размерности с помощью плюриканонического отображения подходящей степени (достаточно взять пятую степень канонического расслоения). Их образы в этом пространстве имеют совпадающие многочлены Гильберта. Множество образов плюриканонических отображений стабильных кривых совпадает с замыканием в схеме Гильберта множества образов гладких стабильных кривых. Пространство  $\mathcal{M}_{g,n}$  можно определить как факторпространство этого замыкания по действию группы проективных преобразований объемлющего пространства.

На этом пути встречается множество трудностей. В частности, неизвестно прямых доказательств того, что точки Гильберта особых стабильных кривых стабильны. Ниже мы приводим ряд упражнений, пунктирно намечающих общую схему доказательства.

**Упражнение 16.4.4.** Сформулируйте и докажите формулу Римана—Роха для стабильных кривых.

**Упражнение 16.4.5.** Проверьте, что степень канонического класса на стабильной кривой рода  $g$  равна  $2g - 2$ .

**Упражнение 16.4.6.** Найдите размерность пространства голоморфных сечений а) канонического расслоения; б)  $r$ -канонического расслоения на стабильной кривой.

**Упражнение 16.4.7.** Докажите, что 5-каноническое отображение стабильной кривой рода  $g \geq 2$  без отмеченных точек является вложением.

**Упражнение 16.4.8.** Найдите многочлен Гильберта образа стабильной кривой рода  $g \geq 2$  при 5-каноническом вложении. Докажите, что любое алгебраическое подмногообразие в проективном пространстве соответствующей размерности с таким многочленом Гильберта является образом стабильной кривой при 5-каноническом вложении.

**Упражнение 16.4.9.** Обобщите конструкции из предыдущих упражнений на случай стабильных кривых с отмеченными точками.

## Глава 17

### Взгляд назад с точки зрения характеристических классов

Введение характеристических классов позволяет по-новому посмотреть на многие ранее проведенные вычисления и упростить их вывод. Характеристические классы являются универсальным инструментом для вычисления топологических характеристик алгебраических многообразий — как гладких, так и имеющих особенности. Мы начнем с обсуждения определений и общих свойств классов Черна векторных расслоений, а затем покажем, как воспользоваться этими классами для получения некоторых уже известных нам результатов и их обобщений. В следующей главе мы расскажем о характеристических классах, естественно возникающих при изучении топологии пространств модулей кривых.

#### § 17.1. Первый класс Черна линейного расслоения

Проще всего характеристические классы определяются для линейных расслоений (т. е. для векторных расслоений с одномерным слоем). Нам уже приходилось встречаться с линейными расслоениями над кривыми, см. главу 7. Примером линейного расслоения над многообразием большей размерности служит тавтологическое расслоение  $\mathcal{O}(-1)$  над проективным пространством  $\mathbb{CP}^n$ . Слой этого расслоения над точкой пространства  $\mathbb{CP}^n$ , отвечающей прямой в  $\mathbb{C}^{n+1}$ , проходящей через начало координат, служит сама эта прямая. Простейшим линейным расслоением над данным многообразием  $M$  является тривиальное расслоение — прямое произведение  $M \times \mathbb{C}$ , проектируемое на первый сомножитель.

Двойственное расслоение к данному линейному расслоению также является линейным расслоением. Так, линейным расслоением является расслоение  $\mathcal{O}(1)$  над  $\mathbb{CP}^n$ , двойственное тавтологическому. Тензорное произведение  $L_1 \otimes L_2$  двух линейных расслоений над данным многообразием  $M$  также является линейным расслоением над  $M$ . Результаты возведения расслоений  $\mathcal{O}(1)$  и  $\mathcal{O}(-1)$  в  $d$ -ю

тензорную степень обозначаются соответственно  $\mathcal{O}(d) = (\mathcal{O}(1))^{\otimes d}$  и  $\mathcal{O}(-d) = (\mathcal{O}(-1))^{\otimes d}$ .

Первый класс Черна  $c_1(L) \in H^2(M)$  линейного расслоения  $L$  над многообразием  $M$  — это препятствие к существованию всюду ненулевого голоморфного сечения у такого расслоения. Если у голоморфного линейного расслоения есть всюду ненулевое голоморфное сечение, то это расслоение тривиально. Первый класс Черна тривиального линейного расслоения равен нулю, значит, первый класс Черна измеряет отклонение данного линейного расслоения от тривиального.

Для определения *первого класса Черна линейного расслоения* достаточно взять его произвольное ненулевое мероморфное сечение: класс когомологий, представленный дивизором нулей и полюсов такого сечения, не зависит от выбора сечения. Более того, дивизор нулей и полюсов определен однозначно с точностью до рациональной эквивалентности подмногообразий: разность двух таких дивизоров, отвечающих различным сечениям, является главным дивизором — дивизором нулей и полюсов некоторой мероморфной функции (эта функция — отношение сечений, которое корректно определено в любом линейном расслоении). Другими словами, первый класс Черна линейного расслоения корректно определен не только как элемент группы вторых когомологий, но и как элемент *кольца Чжоу* — кольца классов рациональной эквивалентности подмногообразий. Как правило, кольцо Чжоу является более тонким — но и более трудно вычислимым — инвариантом алгебраического многообразия, чем кольцо когомологий.

Например, первый класс Черна линейного расслоения  $\mathcal{O}(1)$  над  $\mathbb{CP}^n$  — это класс, двойственный к гиперплоскости в  $\mathbb{CP}^n$ .

**Упражнение 17.1.1.** Докажите, что при тензорном умножении линейных расслоений их первые классы Черна складываются:

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2),$$

а первые классы Черна двойственных линейных расслоений противоположны:

$$c_1(L^\vee) = -c_1(L).$$

## § 17.2. Классы Черна векторных расслоений

Характеристические классы векторных расслоений служат для измерения того, насколько эти расслоения отличны от тривиаль-

ных. Вообще, *характеристический класс*  $\chi$  — это правило, сопоставляющее каждому векторному расслоению  $L$  над многообразием  $M$  класс когомологий  $\chi(M) \in H^*(M)$  и обладающее свойством естественности при замене базы. Свойство *естественности* допускает точное математическое выражение. А именно, для любого отображения  $f: N \rightarrow M$  двух многообразий должно выполняться равенство

$$\chi(f^*L) = f^*\chi(L).$$

В левой части этого равенства  $f^*L$  — это расслоение над  $N$ , поднятое из расслоения  $L$  с помощью отображения  $f$ ; в правой части  $f^*\chi(L)$  обозначает результат поднятия класса когомологий  $\chi(L) \in H^*(M)$  в  $H^*(N)$  с помощью отображения обратного образа  $f^*: H^*(M) \rightarrow H^*(N)$ .

В зависимости от того, какие многообразия и расслоения — топологические, гладкие или комплексные — и какие отображения многообразий — непрерывные, гладкие или голоморфные — мы рассматриваем, различаются топологические, гладкие или комплексные характеристические классы. Ниже нас будут интересовать в первую очередь голоморфные расслоения над комплексными многообразиями и естественность относительно голоморфных отображений этих многообразий. Следует отметить, однако, что на практике условие естественности обычно выполняется, если характеристический класс задается естественной в «общематематическом» смысле конструкцией.

**Упражнение 17.2.1.** Докажите естественность первого класса Черна линейных голоморфных расслоений над комплексными многообразиями, введенного в предыдущем параграфе.

**Пример 17.2.2. Класс Эйлера.** Аналогом первого класса Черна для расслоений ранга, большего 1, служит класс Эйлера. Пусть  $E \rightarrow M$  — векторное расслоение ранга  $r$ , где  $M$  — комплексное многообразие. Выберем его произвольное ненулевое голоморфное сечение общего положения. Нули такого сечения образуют подмногообразие  $Z$  вещественной коразмерности  $2r$  в  $M$ . Классом Эйлера  $e(E)$  расслоения  $E$  называется класс когомологий  $e(E) = [Z] \in H^{2r}(M)$ , двойственный по Пуанкаре подмногообразию  $Z$ .

Класс Эйлера можно определить и в ситуации, когда у голоморфного расслоения  $E$  нет голоморфных сечений. В этом случае вместо голоморфного можно взять  $C^\infty$ -гладкое сечение общего положения. Класс Эйлера будет представлен подмногообразием  $Z$  его нулей.

Это вещественное гладкое подмногообразие вещественной коразмерности  $2n$ . Чтобы определить класс Эйлера как целочисленный, нужно еще задать коориентацию этого подмногообразия. Наличие естественной коориентации подмногообразия  $Z$  вытекает из существования естественной ориентации всякого комплексного расслоения. Выбранная коориентация задается комплексной структурой. Нетрудно проверить, что класс Эйлера не зависит от выбора сечения и удовлетворяет свойству естественности.

Более алгебраический способ определить класс Эйлера состоит в том, чтобы перейти от многообразия  $M$  базы расслоения к его тотальному пространству  $E$ . Проекция  $p: E \rightarrow M$  имеет стягиваемые слои, поэтому гомоморфизм обратного образа  $p^*: H^*(M) \rightarrow H^*(E)$  является изоморфизмом. Обратный образ расслоения  $p^*E$  на  $E$  имеет естественное «тавтологическое» голоморфное сечение, и его нулями является само подмногообразие  $M \subset E$ , вложенное в качестве нулевого сечения. Таким образом, класс Эйлера расслоения  $E$  задается как прообраз при изоморфизме  $p^*$  класса, двойственного нулевому сечению расслоения  $E$ .

В случае, когда в качестве расслоения  $E$  выступает касательное расслоение  $TM$ , а база  $M$  расслоения компактна, значение класса Эйлера на фундаментальном классе базы равно эйлеровой характеристике  $\chi(M)$  многообразия  $M$ . Обозначив класс Эйлера через  $e(M)$ , мы можем записать

$$\chi(M) = \int_M e(M).$$

Более общим образом, через  $\int_M c$  обозначается значение характеристического класса  $c$  на фундаментальном классе многообразия  $M$ .

В общем случае определение класса Эйлера может быть применено к произвольному расслоению. Более того, класс Эйлера естественно продолжается на расслоения, у которых база не обязательно гладкая (и даже не обязательно является алгебраическим многообразием, а может быть произвольным клеточным пространством).

Классы Черна  $c_i(E) \in H^{2i}(M)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \dim M$ , представляют собой выделенные характеристические классы голоморфных расслоений. (Это написание фамилии китайского математика пришло к нам из английского языка — большую часть своей долгой творческой жизни S. S. Chern провел в США; ранее в русскоязычной литературе бы-

ло принято написание Чжень, более близкое к исходному китайскому произношению.) Всякий характеристический класс является полиномиальной комбинацией классов Черна. Ниже мы дадим определение классов Черна при помощи ряда свойств (аксиом), достаточных для их вычисления в конкретных примерах. Мы не будем доказывать ни корректность приведенного определения, ни полноту построенной теории характеристических классов комплексных расслоений. Вместе с тем сам факт непротиворечивости построенной теории (независимость классов Черна от выбранной стратегии их вычисления) дает эффективный инструмент решения большого количества геометрических задач. Как и первый класс Черна линейного расслоения, классы Черна расслоения произвольного ранга можно рассматривать как элементы кольца Чжоу, а не как элементы кольца когомологий.

Векторное расслоение  $E \rightarrow M$  ранга  $r, r \geq 0$ , называется *расщепленным*, если в нем имеется полный флаг подрасслоений

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r = E, \quad \text{rk } V_k = k.$$

Последовательные факторрасслоения  $I_k = V_k/V_{k-1}$  являются линейными расслоениями над  $M$ , и первые классы Черна для них уже определены.

**Определение 17.2.3.** В случае, когда расслоение  $E$  является расщепленным, его  $k$ -м классом Черна  $c_k(E)$  называется  $k$ -я элементарная симметрическая функция от классов  $t_i = c_1(I_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ :

$$c_k(E) = e_k(c_1(I_1), \dots, c_1(I_r)).$$

Приведенное определение можно переписать в следующем виде:

$$1 + c_1(E) + \dots + c_r(E) = \prod_{i=1}^r (1 + t_i).$$

Неоднородный класс, стоящий в левой части этого равенства, называется *полным классом Черна* расслоения  $E$  и обозначается через  $c(E)$ , а классы  $t_i \in H^2(M)$  называются его *корнями Черна*.

Оказывается, условие естественности позволяет однозначно продолжить определение классов Черна с расщепимых расслоений на произвольные. Иными словами, всякое расслоение может быть расщеплено после подходящей замены базы. Стандартная конструкция такого «виртуального» расщепления состоит в следующем. Пусть  $E \rightarrow M$  — векторное расслоение. Обозначим через  $p: F(E) \rightarrow M$  (ло-

кально тривиальное) расслоение полных флагов. Это расслоение уже не векторное: его слоем  $p^{-1}(x)$  над точкой  $x$  служит многообразие полных флагов в векторном пространстве  $E_x \simeq \mathbb{C}^r$ .

**Упражнение 17.2.4.** Дайте строгое определение расслоения полных флагов, которое описывало бы топологию на пространстве  $F(E)$ . В частности, покажите, что  $F(E)$  является комплексным многообразием, если  $E \rightarrow M$  — голоморфное расслоение над комплексной базой.

Пространство  $F(E)$  обладает следующими двумя важными свойствами. Во-первых, обратный образ  $p^*E$  расслоения  $E$  является, очевидно, расщепимым векторным расслоением над  $F(E)$ , и потому корректно определены классы Черна  $c_k(p^*E)$  индуцированного расслоения. Во-вторых, гомоморфизм обратного образа  $p^*: H^*(M) \rightarrow H^*(F(E))$  инъективен, и потому всякий класс когомологий на  $M$  однозначно определяется своим обратным образом в когомологиях пространства  $F(E)$ . Мы определяем  $c_k(E)$  как класс, обратный образ которого равен  $c_k(p^*E)$ .

Приведенное определение классов Черна нуждается в проверке корректности (нужно проверить, что классы Черна расщепимых расслоений не зависят от расщепления, а также, что класс  $c_k(p^*E)$  лежит в образе гомоморфизма  $p^*$ ). Эту проверку мы опускаем.

Возможность сведения всякого расслоения к расщепимому формализуется в **принципе расщепления**. Этот принцип утверждает, что во всех вычислениях с классами Черна можно формально считать, что все расслоения, участвующие в вычислениях, являются расщепимыми. Ответ, полученный в результате вычислений, является симметричным многочленом от корней Черна исследуемого расслоения и следовательно, может быть выражен через элементарные симметрические функции от них, т. е. через классы Черна. При этом ответ, полученный в предположении расщепимости расслоения, справедлив и в общем случае.

В качестве примера применения принципа расщепления докажем **формулу Уитни** для классов Черна прямой суммы расслоений:

$$c(E' \oplus E'') = c(E') c(E''), \quad c_k(E' \oplus E'') = \sum_{i+j=k} c_i(E') c_j(E''),$$

где мы полагаем  $c_0(E) = 1$  и  $c_k(E) = 0$  при  $k < 0$  или при  $k > \text{rk } E$ .

Действительно, пусть  $t'_1, \dots, t'_{n'}$  и  $t''_1, \dots, t''_{n''}$  — корни Черна расслоений  $E'$  и  $E''$  соответственно. Тогда все эти классы вместе образуют



корни Черна прямой суммы  $E' \oplus E''$  и мы получаем

$$c(E' \oplus E'') = \prod_{i=1}^{n'} (1 + t'_i) \prod_{j=1}^{n''} (1 + t''_j) = c(E') c(E'').$$

Формула Уитни остается справедливой, если в ней прямую сумму расслоений заменить на косую: для всякой короткой точной последовательности расслоений

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

выполняется равенство  $c(E) = c(E') c(E'')$ . С топологической точки зрения всякая короткая точная последовательность расслоений расщепляется в прямую сумму, однако вложение  $E'' \subset E$ , реализующее такое расщепление, в общем случае не будет алгебраическим, если таковыми являются расслоения, участвующие в точной последовательности. Имея в виду формулу Уитни, в обозначении ко-сой суммы часто используют знак  $+$  вместо  $\oplus$  и пишут, например<sup>1</sup>,  $c(E) = c(E' + E'') = c(E') c(E'')$  и  $c(E'') = c(E - E') = c(E) / c(E')$ .

Другим важным следствием принципа расщепления является следующее

**Утверждение 17.2.5.** *Старший класс Черна  $c_r(E)$ ,  $r = \text{rk}(E)$ , равен классу Эйлера.*

Действительно, это утверждение, очевидно, справедливо, когда расслоение является прямой суммой линейных. Тогда согласно принципу расщепления оно справедливо и в общем случае.

Перечислим еще раз основные выведенные свойства классов Черна  $c_k(E)$  векторных расслоений, которые можно рассматривать в качестве **аксиом**:

1) классы  $c_k$  являются характеристическими классами вещественной градуировки  $2k$  — они естественно ведут себя под действием операции замены базы;

2)  $c_k(E) = 0$  при  $k < 0$  или при  $k > \text{rk}(E)$ ;  $c_0(E) = 1$ ;

3)  $c_r(E) = e(E)$  — класс Эйлера, где  $r = \text{rk}(E)$ ;

4) для расслоений, образующих короткую точную последовательность, выполняется формула Уитни.

Перечисленные свойства (аксиомы) однозначно определяют классы Черна векторных расслоений. Из самого факта корректности

<sup>1</sup> Такое обозначение пришло из  $K$ -теории.

(непротиворечивости) этих аксиом вытекает, как мы увидим, большое количество следствий.

### § 17.3. Другие подходы к определению классов Черна

Опишем вкратце другие возможные подходы к построению классов Черна.

Пусть  $p: P(E) \rightarrow M$  — проективизация векторного расслоения  $E \rightarrow M$ ; ее слои — проективные пространства, являющиеся проективизациями слоев расслоения  $E$ . Аналогично тому, как над проективизацией  $\mathbb{CP}^n$  векторного пространства  $\mathbb{C}^{n+1}$  строится тавтологическое линейное расслоение  $\mathcal{O}(-1)$ , над проективизацией  $P(E)$  векторного расслоения  $E$  строится тавтологическое линейное расслоение  $\mathcal{O}(-1)$ , представляющее собой объединение послойных расслоений над проективными пространствами.

Тавтологическое линейное расслоение  $\mathcal{O}(-1)$  над  $P(E)$  является подрасслоением в индуцированном расслоении  $p^*E$ . Обозначим через  $Q = p^*E/\mathcal{O}(-1)$  соответствующее факторрасслоение ранга  $r - 1$  и положим  $t = c_1(\mathcal{O}(1)) = -c_1(\mathcal{O}(-1)) \in H^2(P(E))$ . Набор классов  $1, t, t^2, \dots, t^{r-1}$  при ограничении на слой расслоения  $p$  образует базис в когомологиях слоя (изоморфного проективному пространству). Из известного принципа Дольда вытекает, что эти классы являются свободными образующими пространства когомологий пространства  $P(E)$ , рассматриваемого как модуль над кольцом когомологий базы,

$$H^*(P(E)) \simeq H^*(M) 1 \oplus H^*(M) t \oplus \dots \oplus H^*(M) t^{r-1}.$$

Иными словами, всякий класс когомологий на  $P(E)$  однозначно представляется в виде линейной комбинации классов  $1, t, t^2, \dots, t^{r-1}$ , коэффициенты которой — классы когомологий базы. Это свойство, примененное, в частности, к классу  $-t^r$ , означает существование таких классов  $c_1, \dots, c_r$  в  $H^*(M)$ , что

$$t^r + c_1 t^{r-1} + \dots + c_{r-1} t + c_r = 0 \in H^*(P(E)).$$

Нетрудно увидеть, что классы  $c_i$  суть не что иное, как классы Черна расслоения  $E$ , а это равенство можно использовать в качестве их альтернативного определения. Действительно, согласно формуле Уитни мы получаем

$$c(Q) = \frac{c(p^*E)}{c(\mathcal{O}(-1))} = \frac{1 + c_1 + \dots + c_n}{1 - t} = (1 + c_1 + \dots + c_r)(1 + t + t^2 + \dots).$$

В частности, левая часть предыдущего соотношения есть не что иное, как  $r$ -й класс Черна расслоения  $Q$ , который равен нулю, поскольку расслоение  $Q$  имеет ранг  $r - 1$ .

Еще один возможный подход к определению классов Черна использует гомоморфизм прямого образа («послойное интегрирование»)

$$p_*: H^k(P(E)) \rightarrow H^{k-2(r-1)}(M),$$

переводящий класс, двойственный по Пуанкаре к алгебраическому подмногообразию  $Z \subset P(E)$ , в класс, двойственный по Пуанкаре к образу  $p(Z)$  этого подмногообразия. При проекции размерность подмногообразий сохраняется, а коразмерность уменьшается на размерность слоя. Отсюда и происходит сдвиг в градуировке. Гомоморфизм прямого образа не является мультипликативным, вместо этого имеет место *формула проекции*

$$p_*(p^*(a) b) = a p_*(b)$$

для любых классов когомологий  $a \in H^*(M)$ ,  $b \in H^*(P(E))$ . Иными словами,  $p_*$  является гомоморфизмом  $H^*(M)$ -модулей.

Вычислим действие гомоморфизма  $p_*$  на мономе  $t^k$ . Этот моном равен  $k$ -му члену геометрической прогрессии  $(1 - t)^{-1} = c(-\mathcal{O}(-1))$ , поэтому

$$\begin{aligned} t^k &= c_k(-\mathcal{O}(-1)) = c_k(p^*E - \mathcal{O}(-1) - p^*E) = c_k(Q - p^*E) = \\ &= \sum_{i+j=k} c_i(Q) c_j(-p^*E). \end{aligned}$$

Применяя  $p_*$  и используя формулу проекции, мы получаем

$$p_*(t^k) = \sum_{i=0}^{r-1} c_{k-i}(-E) p_*(c_i(Q)).$$

Класс  $p_*(c_i(Q))$  равен нулю при  $i < r - 1$  по соображениям размерности, а при  $i = r - 1$  мы получаем класс  $p_*(c_{r-1}(Q)) \in H^0(M)$ , который является универсальной константой. Рассматривая один произвольный слой расслоения, мы получаем, что значение этой константы равно 1. (Равенство  $p_*(c_{r-1}(Q)) = 1$  выражает тот факт, что всякий ненулевой вектор в  $\mathbb{C}^r$  содержится в единственной прямой.) В результате мы окончательно получаем

$$p_*(t^k) = c_{k-r+1}(-E).$$

Класс  $c(-E) = c(E)^{-1}$  называется (полным) *классом Сегре* расслоения  $E$ . Поледное равенство можно использовать в качестве независимого определения классов Сегре, а следовательно, и классов Черна.

**Упражнение 17.3.1.** Пусть  $E \rightarrow M$  — расслоение ранга  $r$ ,  $c(E) = 1 + c_1 + \dots + c_r$ , и пусть  $L$  — линейное расслоение с той же базой и первым классом Черна  $c_1(L) = h$ . Вычислите классы Черна расслоения  $E \otimes L$ .

*Решение.* Пусть  $t_1, \dots, t_r$  — корни Черна расслоения  $E$ , тогда  $t_1 + h, \dots, t_r + h$  — корни Черна расслоения  $E \otimes L$ . Поэтому

$$c(E \otimes L) = \prod_{i=1}^r (1 + h + t_i) = (1 + h)^r + c_1 (1 + h)^{r-1} + \dots + c_r.$$

В частности, для старшего класса Черна мы получаем

$$c_r(E \otimes L) = h^r + c_1 h^{r-1} + \dots + c_r = c_r(E + L).$$

**Упражнение 17.3.2.** Вычислите классы Черна касательного расслоения проективного пространства  $\mathbb{CP}^n$ .

*Решение.* Инфинитезимальный сдвиг прямой в  $\mathbb{C}^{n+1}$  задается линейным отображением из этой прямой в  $\mathbb{C}^n$ . При этом растяжения задают тривиальный инфинитезимальный сдвиг. Поэтому имеется канонический изоморфизм  $T\mathbb{CP}^n \simeq \text{Hom}(\mathcal{O}(-1), \mathbb{C}^{n+1}/\mathcal{O}(-1)) \simeq \text{Hom}(\mathcal{O}(-1), \mathbb{C}^{n+1})/\mathbb{C}$ . Отсюда мы находим

$$c(T\mathbb{CP}^n) = c(\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{n+1}) = (1 + t)^{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} t^i,$$

где  $t = c_1(\mathcal{O}(1))$  — класс гиперплоскости. В частности, эйлерова характеристика комплексного проективного пространства равна

$$\chi(\mathbb{CP}^n) = \int_{\mathbb{CP}^n} c_n(T\mathbb{CP}^n) = \binom{n+1}{n} = n + 1,$$

что согласуется с тем фактом, что  $\mathbb{CP}^n$  может быть разбито на  $n + 1$  четномерных клеток. Здесь мы пользуемся очевидным равенством  $\int_{\mathbb{CP}^n} t^n = 1$  (означающим, что  $n$  гиперплоскостей общего положения пересекаются по единственной точке в  $\mathbb{CP}^n$ ).

## § 17.4. Род гладкой плоской кривой

Пусть  $C$  — гладкая плоская кривая степени  $d$ . В § 3.2 мы вычислили род такой кривой с помощью формулы Римана—Гурвица. Воспользуемся теперь для решения той же задачи развитыми выше

методами классов Черна. Значение эйлеровой характеристики кривой  $C$  есть не что иное, как значение первого класса Черна  $c_1(TC)$  касательного расслоения к кривой на ее фундаментальном классе,  $\chi(C) = \int_C c_1(TC)$ .

Для его вычисления воспользуемся короткой точной последовательностью расслоений

$$0 \rightarrow TC \rightarrow T\mathbb{CP}^2|_C \rightarrow \nu \rightarrow 0.$$

Здесь  $\nu$  — нормальное расслоение к плоской кривой  $C$ , и мы рассматриваем касательное расслоение к кривой как подрасслоение в ограничении касательного расслоения к плоскости на кривую.

Обозначим через  $t$  образующую кольца когомологий  $H^*(\mathbb{CP}^2)$ , представленную гиперплоским сечением,  $t \in H^2(\mathbb{CP}^2)$ . Через этот класс когомологий выражаются все интересующие нас классы Черна.

Имеем

$$c(T\mathbb{CP}^2) = (1+t)^3.$$

С другой стороны, кривая степени  $d$  является многообразием нулей некоторого однородного многочлена  $f$  степени  $d$ , т. е. сечения расслоения  $\mathcal{O}(d)$  над  $\mathbb{CP}^2$ . Поэтому

- эта кривая представляет класс когомологий  $d \cdot t$ ;
- полный класс Черна нормального расслоения к ней равен

$$c(\nu) = 1 + d \cdot t.$$

Таким образом,

$$c(TC) = \frac{(1+t)^3}{1+dt} = \frac{1+3t+3t^2}{1+dt} = 1 + (3-d)t$$

(старшие степени класса  $t$  обращаются в нуль при ограничении на кривую  $C$ ). Значение класса Эйлера  $c_1(TC) = (3-d)t$  на классе кривой  $[C] = dt$  есть эйлерова характеристика  $\chi(C) = 2 - 2g$  кривой, и мы получаем равенство

$$(3-d)d = 2 - 2g,$$

откуда следует, что

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

в согласии с результатами § 3.2.

Приведенное рассуждение легко обобщается до вычисления эйлеровой характеристики произвольной гиперповерхности  $M$  степени  $d$  в проективном пространстве  $\mathbb{CP}^n$  произвольной размерности  $n$ . Точная последовательность для расслоений над кривой превращается в точную последовательность для расслоений над гиперповерхностью

$$0 \rightarrow TM \rightarrow T\mathbb{CP}^n|_M \rightarrow \nu \rightarrow 0.$$

Воспользовавшись тем, что  $c(T\mathbb{CP}^n) = (1+t)^{n+1}$ ,  $c(\nu) = 1+dt$ , получаем

$$c(TM) = \frac{(1+t)^{n+1}}{1+dt},$$

и, поскольку  $[M] = dt$ , эйлерова характеристика гиперповерхности принимает вид

$$\chi(M) = [t^n] dt \frac{(1+t)^{n+1}}{1+dt},$$

т. е. она равна коэффициенту при  $t^n$  в разложении в степенной ряд в нуле рациональной функции в правой части равенства,

$$\chi(M) = \frac{(1-d)^{n+1} - 1 + (n+1)d}{d}.$$

### § 17.5. Род полного пересечения

Гиперповерхность в проективном пространстве является частным случаем полного пересечения — гладкого многообразия коразмерности  $k$ , представленного в виде трансверсального пересечения  $k$  гладких гиперповерхностей в  $\mathbb{CP}^n$ .

Вычислим род пересечения двух общих гиперповерхностей степеней  $m$  и  $n$  в  $\mathbb{CP}^3$ . Применяя формулу присоединения, находим

$$c(TM) = \frac{(1+t)^4}{(1+mt)(1+nt)} = 1 + (4-m-n)t + \dots$$

Отсюда следует, что

$$2 - 2g = \chi(M) = \int_M c_1(TM) = \int_{\mathbb{CP}^3} mn t^2 c_1(TM) = mn(4-m-n),$$

то есть  $g = \frac{mn}{2}(m+n-4) + 1$ . В частности, пересечение двух квадрик имеет род 1, пересечение квадрики и кубики имеет род 4 и т. д.

### § 17.6. Формулы Плюккера

С использованием классов Черна можно привести еще одну, возможно, концептуально более правильную интерпретацию формул Плюккера, см. главу 5. Пусть задана комплексная кривая  $C \subset \mathbb{CP}^2$ , имеющая в качестве особенностей простые двойные точки и полукубические точки возврата, и предположим, что ее двойственная кривая  $C^\vee \subset (\mathbb{CP}^2)^\vee$  также имеет особенности только тех же видов — простые двойные точки и точки возврата. Тогда формулы Плюккера утверждают, что геометрические инварианты кривых  $C$  и  $C^\vee$  — числа их двойных точек  $\delta$  и  $\delta^\vee$ , а также числа их точек возврата  $k$  и  $k^\vee$  соответственно — являются в действительности их топологическими инвариантами и однозначно выражаются через базисные топологические характеристики этих кривых, в качестве которых можно взять их степени  $n$  и  $n^\vee$ , а также род их нормализации  $g$  (или эйлерову характеристику нормализации  $\chi = 2 - 2g$ ).

Обозначим через  $M \subset \mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^\vee$  гиперповерхность инцидентности, образованную такими парами  $(x, \ell)$ , что точка  $x$  лежит на прямой  $\ell$ . Естественные проекции  $p: M \rightarrow \mathbb{CP}^2$  и  $p^\vee: M \rightarrow (\mathbb{CP}^2)^\vee$  на первый и второй множители отождествляют  $M$  с пространствами проективизации кокасательного расслоения  $PT^*\mathbb{CP}^2$  и  $PT^*(\mathbb{CP}^2)^\vee$  соответственно. Напомним, что конормальная развертка  $\hat{C} \subset M$ , образованная такими парами  $(x, \ell)$ , что  $x \in C$  и  $\ell$  — касательная прямая к кривой  $C$  в точке  $x$ , является общей нормализацией кривых  $C$  и  $C^\vee$ .

Идея вычисления чисел  $k$  и  $k^\vee$  состоит в том, чтобы отождествить точки возврата кривых  $C$  и  $C^\vee$  с нулями сечений подходящих расслоений над  $\hat{C}$ , и необходимо лишь правильно идентифицировать эти расслоения, чтобы вычислить их степени. Касательное расслоение к многообразию  $M$  имеет важное так называемое *контактное* подрасслоение ранга 2, которое задается как прямая сумма  $L_1 \oplus L_2$  двух линейных расслоений, образованных касательными векторами к слоям проекций  $p$  и  $p^\vee$  соответственно. По определению имеем

$$c_1(L_1) = c_1(TM - T\mathbb{CP}^2) = \\ = c_1(T(\mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^\vee) - \nu_{\mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^\vee} M - T\mathbb{CP}^2),$$

откуда находим степень ограничения расслоения  $L_1$  на  $\hat{C}$ :

$$\deg L_1 = 3(n + n^\vee) - (n + n^\vee) - 3n = 2n^\vee - n,$$

и аналогично  $\deg L_2 = 2n - n^\vee$ .

Касательная прямая к кривой  $\hat{C} \subset M$  всегда лежит в контактной плоскости, а точки возврата ее образа  $C = p(\hat{C})$  — это те точки, в которых касательная прямая имеет направление проекции  $p$ , т. е. совпадает с прямой расслоения  $L_1$ . Иными словами, точки возврата кривой  $C$  — это нули проекции  $T\hat{C} \subset L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_2$ , а значит,

$$k = \deg \text{Hom}(TC, L_2) = \deg L_2 - \deg TC = 2n - n^\vee - \chi,$$

и аналогично

$$k^\vee = 2n^\vee - n - \chi.$$

Для вычисления количества двойных точек у каждой из кривых предположим сначала, что кривая  $C \subset \mathbb{C}P^2$  иммерсирована, т. е. что  $k = 0$ . Вычислим количество точек пересечения этой кривой с ее малым шевелением (полученным, например, в результате применения проективного преобразования плоскости, близкого к тождественному). С одной стороны, по теореме Безу это число равно  $n^2$ . С другой стороны, появление некоторых из этих точек обусловлено нетривиальностью нормального расслоения. Количество таких точек равно степени нормального расслоения и вычисляется по формуле присоединения: таких точек  $3n - \chi$ . Другая часть обусловлена наличием двойных точек, и их количество равно  $2\delta$ . В результате получается равенство

$$n^2 = (3n - \chi) + 2\delta.$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда у кривой имеются точки возврата. Представим такую кривую как образ гладкой кривой при проекции из проективного пространства большой размерности. Немного пошевелив направление проектирования, мы получим уже иммерсированную кривую (той же степени и с нормализацией того же рода, как и у исходной), имеющую  $n + \delta$  двойных точек. Поэтому выполняется равенство

$$n^2 = (3n - \chi) + 2(\delta + k)$$

и аналогично

$$(n^\vee)^2 = (3n^\vee - \chi) + 2(\delta^\vee + k^\vee).$$

Полученные два равенства вместе с приведенными выше выражениями для чисел  $k$  и  $k^\vee$  равносильны формулам Плюккера.



## Глава 18

# Пространства модулей стабильных отображений

В этой главе мы продемонстрируем, как применять пространства модулей отображений для вычисления топологических характеристик различных многообразий. Понятие стабильного отображения кривой было введено М. Л. Концевичем. Он применил стабильные отображения для решения классической задачи — перечисления рациональных кривых данной степени на плоскости, проходящих через заданный набор точек. Предложенные им методы оказались применимы к широкому кругу задач перечислительной геометрии и в настоящее время служат основным инструментом для вычисления инвариантов Громова—Виттена.

Пространства стабильных отображений кривых очень тесно связаны с пространствами стабильных кривых (хотя отображение кривой может быть стабильным, даже если сама кривая нестабильна). Как правило, пространства стабильных отображений расслоены над пространствами стабильных кривых, причем иногда — несколькими различными способами. В результате вычисления чисел пересечений в пространствах стабильных отображений можно производить, опираясь на знание геометрии пространств стабильных кривых, и наоборот.

### § 18.1. Рациональные кривые на плоскости

Количество параметров, задающих плоскую рациональную кривую степени  $d$ , равно  $3d - 1$ . Действительно, для того чтобы задать параметризованную рациональную кривую  $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ ,  $(u : v) \mapsto (x : y : z)$ , необходимо  $3d + 2$  параметров — по  $d + 1$  параметров на каждую из координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ , определенных с точностью до общего множителя. Группа замены параметров  $u$ ,  $v$  в прямой-образе трехмерна, поэтому пространство непараметризованных рациональных прямых на плоскости имеет размерность  $(3d + 2) - 3 = 3d - 1$ .

Еще один способ сосчитать эту размерность состоит в том, чтобы рассмотреть пространство однородных многочленов степени  $d$  от

трех переменных. Такой многочлен задается своими  $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$  коэффициентами, поэтому плоские кривые степени  $d$  образуют проективное пространство  $Q_d$  на единицу меньшей размерности. Такая гладкая кривая имеет род  $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ , и, так как каждая двойная точка уменьшает род нормализации на единицу, именно столько двойных точек должна иметь рациональная кривая. Условие наличия особой точки является условием коразмерности один, и мы получаем, что размерность многообразия рациональных кривых равна

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 3d - 1.$$

Поскольку размерность пространства рациональных кривых степени  $d$  равна  $3d - 1$ , через  $3d - 1$  точек на плоскости в общем положении должно проходить конечное число рациональных кривых степени  $d$ . Так, через две точки проходит единственная прямая, через пять точек — единственная коника. Рациональная кубика обязана иметь одну особую точку. Как показывает следующий пример, через восемь точек в общем положении проходит 12 рациональных кубиков — каждая из них имеет двойную точку.

**Пример 18.1.1.** Вычислим количество рациональных кубических кривых, проходящих через восемь данных точек в общем положении на плоскости. Каждая плоская кубическая кривая представляет собой множество нулей однородного многочлена третьей степени от трех переменных, определенного однозначно с точностью до умножения на ненулевой множитель. Векторное пространство таких многочленов имеет размерность 10, а его проективизация — размерность 9; обозначим это проективизированное пространство через  $Q_3$ .

Замыкание множества многочленов, определяющих рациональные кубические кривые, представляет собой гиперповерхность — многообразие размерности 8 — в этом проективном пространстве; обозначим ее через  $R_3$ ,  $R_3 \subset Q_3$ . Прохождение кривой через заданную точку — линейное условие на коэффициенты многочлена, и для общей конфигурации точек эти линейные условия линейно независимы. Поэтому количество кривых, проходящих через заданные восемь точек в общем положении, совпадает со степенью подмногообразия рациональных кубиков, т. е. с количеством точек пересечения подмногообразия  $R_3$  и общей прямой в пространстве кубиков  $Q_3$ .

Возьмем в качестве общей прямой множество линейных комбинаций  $uF + vG$ ,  $u, v \in \mathbb{C}$ , двух невырожденных кубических многочле-

нов  $F, G$ , кривые нулей которых  $F = 0, G = 0$  пересекаются трансверсально в 9 точках. Обозначим через  $S$  подмногообразие нулей многочлена  $uF + vG$  в прямом произведении  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^2$ , где  $(u : v)$  — однородная координата на сомножителе  $\mathbb{CP}^1$ . Вычислим двумя способами эйлерову характеристику поверхности  $S$ .

С одной стороны, поверхность  $S$  расслоена над проективной прямой  $\mathbb{CP}^1$ . Общий слой этого расслоения — гладкая эллиптическая кривая. Однако на проективной прямой есть несколько точек  $(u : v)$ , для которых слой является рациональной кубикой. Поскольку эйлерова характеристика гладкой эллиптической кривой равна 0, а эйлерова характеристика рациональной кубики равна 1 (топологически рациональная кубика представляет собой двумерную сферу с двумя склеенными точками), эйлерова характеристика поверхности  $S$  равна количеству особых слоев.

С другой стороны, проекция на второй сомножитель задает отображение поверхности  $S$  в проективную плоскость  $\mathbb{CP}^2$ . Как нетрудно видеть, это отображение взаимно однозначно всюду, кроме девяти точек пересечения кривых  $F = 0$  и  $G = 0$ . Локальный анализ показывает, что в окрестности такой точки отображение проекции является не чем иным, как раздутием плоскости в этой точке: выбрав локальные координаты  $(x, y)$  на плоскости в окрестности точки трансверсального пересечения кривых  $F = 0$  и  $G = 0$  так, что  $F = x$ , а  $G = y$ , мы получаем проекцию гиперповерхности  $ux + vy = 0$  на плоскость  $(x, y)$ . Тем самым поверхность  $S$  является результатом раздутия проективной плоскости в девяти точках. Каждое раздутие заменяет точку на проективную прямую, добавляя тем самым единицу к эйлеровой характеристике раздуваемой поверхности. Поэтому эйлерова характеристика поверхности  $S$  равна увеличенной на 9 эйлеровой характеристике проективной плоскости, т. е. равна 12.

Отсюда мы заключаем, что степень  $\deg R_3$  гиперповерхности рациональных кубик  $R_3$ , а значит, и число  $N_3$  равны 12.

Еще один способ вычислить значение  $N_3$  состоит в следующем. Рассмотрим в прямом произведении  $Q_3 \times \mathbb{CP}^2$  многообразие  $X$  пар вида (кривая, ее особая точка). Особая точка задается обращением в нуль всех трех частных производных многочлена (точки из  $Q_3$ ). Выражение для частной производной линейно по коэффициентам многочлена и квадратично по координатам в плоскости. Поэтому каждая частная производная является сечением линейного расслоения  $\mathcal{O}_{Q_3}(1) \times \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(2)$  с первым классом Черна  $t + 2h$ . Здесь  $t$  и  $h$  — клас-

сы, двойственные гиперплоскостям, в кольцах когомологий  $H^*(Q_3)$  и  $H^*(\mathbb{CP}^2)$  соответственно. Тем самым многообразие  $X$  является пересечением трех гиперповерхностей бистепени  $(1, 2)$ , и двойственный ему класс когомологий в  $H^*(Q_3 \times \mathbb{CP}^2)$  равен  $(t + 2h)^3$ .

Многообразие особых кубик  $R_3$  является образом многообразия  $X$  при проекции  $Q_3 \times \mathbb{CP}^2 \rightarrow Q_3$  на первый сомножитель. Ассоциированный гомоморфизм прямого образа переводит класс  $h^2$  в единицу и остальные степени класса  $h$  в нуль (что соответствует тому, что две прямые на проективной плоскости пересекаются по точке, а большее количество прямых имеет, как правило, пустое пересечение). Мы заключаем, что степень многообразия особых кубик  $R_3$  равна коэффициенту при  $th^2$  в многочлене  $(t + 2h)^3$ , т. е. она равна 12.

При  $d \geq 3$  всякая плоская рациональная кривая степени  $d$  является особой: гладкая кривая степени  $d$  должна иметь род  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} > 0$ . Задача нахождения эффективного способа подсчета количества рациональных кривых степени  $d$  на плоскости решена Концевичем сравнительно недавно. Ответ в ней дается следующей рекуррентной формулой.

**Теорема 18.1.2.** Число  $N_d$  плоских рациональных кривых степени  $d$ , проходящих через данные  $3d - 1$  точек в общем положении на проективной плоскости, дается равенством

$$N_d = \sum_{k=1}^{d-1} N_k N_{d-k} \left( k^2(d-k)^2 \binom{3d-4}{3k-2} - k^3(d-k) \binom{3d-4}{3k-1} \right).$$

Первые значения величины  $N_d$  приведены в следующей таблице:

$d$	1	2	3	4	5	6
$N_d$	1	1	12	640	87 304	26 312 976

## § 18.2. Пространства модулей стабильных отображений

Вычисление Концевича является простым следствием весьма общего утверждения об ассоциативности так называемых квантовых когомологий. Для определения квантовых когомологий нам потребуются понятия стабильного отображения и пространства модулей стабильных отображений.

Пусть  $M$  — компактное комплексное многообразие произвольной размерности. Рассмотрим пространство  $H = H^{\text{ev}}(M, \mathbb{C})$  когомологий четной степени многообразия  $M$ . Это конечномерное градуированное векторное пространство, наделенное невырожденным скалярным произведением — спариванием Пуанкаре  $(\cdot, \cdot)$  — и умножением. Эти две структуры согласованы между собой — для любой тройки элементов  $a, b, c \in H$  выполняется равенство  $(a \cdot b, c) = (a, b \cdot c)$  — и согласованы с градуировкой. Кроме того, в алгебре  $H$  имеется единица.

**Пример 18.2.1.** Для случая  $M = \mathbb{CP}^2$  пространство  $H \cong \mathbb{C}^3$  порождено тремя классами  $e_0, e_1, e_2$ , степеней 0, 2, 4 соответственно. Здесь  $e_0$  — это класс, двойственный всей плоскости,  $e_1$  — класс, двойственный прямой, а  $e_2$  — класс, двойственный точке. Скалярное произведение имеет вид  $(e_0, e_2) = (e_1, e_1) = 1$ , а все остальные спаривания обращаются в нуль. Элемент  $e_0$  является единичным,  $e_2 = e_1^2$ , а  $e_1^3 = 0$ . Отметим, что проективная плоскость не имеет нетривиальных когомологий нечетной степени.

Квантовые когомологии многообразия  $M$  — это деформация умножения в алгебре  $H$ . Коэффициенты деформации перечисляют рациональные кривые в  $M$ , а параметры деформации отвечают классам когомологий из  $H$ .

Обозначим через  $\mathcal{M}_{g;n}(M, d)$  пространство модулей голоморфных отображений кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками в  $M$ , образ которых  $f(C)$  представляет заданный класс вторых гомотопий  $d \in H_2(M, \mathbb{Z})$ . В случае, когда пространство  $\mathcal{M}_{g;n}(M, d)$  гладкое, оно имеет размерность  $3g - 3 + n(c_1(M), d) + (1 - g) \dim M$ . Здесь  $(c_1(M), d)$  — значение первого класса Черна  $c_1(M) \in H^2(M)$  касательного расслоения к многообразию  $M$  на классе гомотопий  $d \in H_2(M)$ .

Аналогично тому, как пространство модулей гладких кривых с отмеченными точками  $\mathcal{M}_{g;n}$  допускает компактификацию  $\bar{\mathcal{M}}_{g;n}$  стабильными кривыми, пространство  $\mathcal{M}_{g;n}(M, d)$  допускает компактификацию  $\bar{\mathcal{M}}_{g;n}(M, d)$  стабильными отображениями. Отображение называется *стабильным по Концевичу*, если группа его автоморфизмов конечна. В частности, стабильное по Концевичу отображение рациональной кривой в комплексное многообразие  $M$  — это такое голоморфное отображение дерева рациональных кривых в  $M$ , при котором все компоненты, стягивающиеся в точку, имеют не менее трех специальных точек. Можно показать, что простран-

ство  $\bar{\mathcal{M}}_{g;n}(M, d)$  существует. Однако оно особо и содержит компоненты разных размерностей, из которых главный интерес представляет компонента, содержащая пространство отображений гладких кривых.

До этого момента отмеченные точки на кривой играли лишь вспомогательную роль. Сейчас они выходят на первый план. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — подмногообразия в  $M$ ,  $A_i \subset M$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Рассмотрим множество таких голоморфных отображений

$$f: (C; x_1, \dots, x_n) \rightarrow (M; A_1, \dots, A_n),$$

что  $f(x_i) \in A_i$ . При некоторых условиях на подмногообразия  $A_i$  это множество конечно, и количество элементов в нем можно определить следующим образом.

Определим «вычисляющие» отображения

$$\text{ev}_i: \bar{\mathcal{M}}_{g;n}(M, d) \rightarrow M, \quad i = 1, \dots, n,$$

сопоставляющие всякому отображению кривой его значение в точке  $x_i$ ,

$$\text{ev}_i: f \mapsto f(x_i).$$

Тогда количество отображений, образы отмеченных точек при которых попадают на подмногообразия  $A_1, \dots, A_n$ , зависит лишь от классов когомологий, представленных подмногообразиями  $A_i$ , и определяется равенством

$$\varphi_{g;d}(a_1, \dots, a_n) = \int_{\bar{\mathcal{M}}_{g;n}(M, d)} \text{ev}_1^*(a_1) \dots \text{ev}_n^*(a_n).$$

Здесь  $a_i = [A_i] \in H$  — это класс когомологий, двойственный по Пуанкаре многообразию  $A_i$ .

Ввиду особенности многообразия  $\bar{\mathcal{M}}_{g;n}(M, d)$  определение интеграла по нему представляет, вообще говоря, существенную техническую сложность. Для обеспечения корректности определения необходимо построить так называемый «виртуальный фундаментальный класс» этого многообразия, размерность которого совпадает с размерностью пространства отображений гладких кривых  $\mathcal{M}_{g;n}(M, d)$  и называется *ожидаемой размерностью* пространства отображений. Выписанный интеграл может быть отличен от нуля только в том случае, если степень класса под знаком интеграла совпадает с ожидаемой размерностью.

**Пример 18.2.2.** Пусть  $g = 0$ ,  $M = \mathbb{CP}^2$ ,  $A_1, \dots, A_n$  — точки на плоскости  $M$ . Пространство  $\mathcal{M}_{0;n}(\mathbb{CP}^2, de_1)$  состоит из отображений рациональных кривых в плоскость, при которых отмеченные точки

$x_1, \dots, x_n$  попадают в точки  $A_1, \dots, A_n$  соответственно, а образ кривой является кривой степени  $d$  (т. е. класс гомологий образа является  $d$ -кратным классом прямой  $e_1$ ). Имеем  $c_1(\mathbb{CP}^2)(de_1) = 3d$ , поэтому  $\dim \mathcal{M}_{0;n}(\mathbb{CP}^2, de_1) = -3 + n + d + 2 = n + d - 1$ . Условие, что данная точка кривой при отображении попадает в данную точку плоскости, является условием комплексной коразмерности 2, поэтому  $\deg ev^*(a_i) = 2$ , а значит, интеграл может быть ненулевым лишь при выполнении равенства

$$2n = n + 3d - 1,$$

т. е. при  $n = 3d - 1$ , и

$$\varphi_{0;d}(\underbrace{e_2, \dots, e_2}_{3d-1}) = N_d.$$

Наряду с отображениями, при которых образ данной отмеченной точки попадает в выбранную точку, мы можем рассматривать отображения, при которых образ данной отмеченной точки попадает на выбранную прямую. Поскольку всякая прямая общего положения пересекает кривую степени  $d$  в  $d$  точках, мы заключаем, что

$$\varphi_{0;d}(\underbrace{e_2, \dots, e_2}_{3d-1}, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_r) = N_d \cdot d^r.$$

Отметим, что добавление в качестве аргумента класса прямой  $e_1$  увеличивает на 1 как размерность пространства  $\mathcal{M}_{0;n}(\mathbb{CP}^2, de_1)$  (за счет появления новой отмеченной точки  $n$  заменяется на  $n + 1$ ), так и степень интегрируемого класса (поскольку  $\pi^*(e_1)$  имеет степень 1). Поэтому классы  $e_1$  можно добавлять в произвольном количестве — выполнение условия на размерности не зависит от количества этих классов.

### § 18.3. Квантовые когомологии и уравнение ассоциативности

Величины  $\varphi_{0;d}(a_1, \dots, a_n)$ , называемые *инвариантами Громова—Виттена* рода 0, собираются в производящий ряд

$$\Phi(t_1, \dots, t_N) = \sum_{n; k_1, \dots, k_n; d} \frac{1}{n!} \varphi_{0;d}(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) q^d t_{k_1} \dots t_{k_n},$$

где  $e_1, \dots, e_N$  — базис в пространстве  $H$  размерности  $N = \dim H$ . Если пространство  $H_2(M, \mathbb{C})$   $r$ -мерно, то элемент  $d = (d_1, \dots, d_r)$  является  $r$ -мерным вектором и под записью  $q^d$  мы подразумеваем моном

$q^d = q_1^{d_1} \dots q_r^{d_r}$ , где  $q_1, \dots, q_r$  — дополнительные формальные переменные. В случае  $M = \mathbb{CP}^2$  мы имеем  $N = 3$ ,  $r = 1$  и ввиду приведенных выше рассуждений ряд  $\Phi$  имеет следующий явный вид:

$$\Phi(t_0, t_1, t_2) = \frac{1}{2}(t_0^2 t_2 + t_0 t_1^2) + \sum_{d=1}^{\infty} N_d \frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!} q^d e^{dt_1}.$$

Переменные  $t_1, \dots, t_N$  можно рассматривать как координаты в пространстве  $H$ , тогда  $\Phi$  — (формальная) функция на этом пространстве. Квантовое умножение — структура алгебры в касательном пространстве  $T_t H$  пространства  $H$  в каждой его точке  $t \in H$ . Мы обозначаем его символом  $\star$ . Покоординатно квантовое умножение задается равенством

$$(e_i \star e_j, e_k) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k},$$

где  $e_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$  рассматривается как касательный вектор. Построенное умножение автоматически коммутативно (ввиду равенства смешанных частных производных). Основным нетривиальным свойством квантового умножения является следующее.

**Теорема 18.3.1.** *Квантовое умножение ассоциативно.*

В интересующем нас примере  $M = \mathbb{CP}^2$  единственным нетривиальным соотношением, вытекающим из условия ассоциативности, является равенство  $(e_1 \star e_1, e_2 \star e_2) = (e_1 \star e_2, e_1 \star e_2)$ , которое записывается в виде

$$\sum_{i+j=2} \Phi_{1,1,i} \Phi_{j,2,2} = \sum_{i+j=2} \Phi_{1,2,i} \Phi_{j,1,2},$$

т. е.

$$\Phi_{1,1,1} \Phi_{1,2,2} + \Phi_{2,2,2} - \Phi_{1,1,2}^2 = 0,$$

где нижними индексами обозначены третьи смешанные частные производные. Полученное равенство эквивалентно рекуррентному соотношению теоремы 18.1.2.

**Доказательство теоремы 18.3.1.** В основе доказательства свойства ассоциативности лежит простое наблюдение, которое мы уже использовали при описании кольца когомологий пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0;n}$  по Килу: в когомологиях пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  различные компоненты граничного дивизора представляют один и тот же класс когомологий. Действительно,  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{CP}^1$ , и каждая (из трех возможных) компонент границы представлена точкой.



Еще одно полезное наблюдение, вытекающее из двойственности Пуанкаре, состоит в том, что класс диагонали в когомологиях декартова квадрата  $H^*(M \times M, \mathbb{C}) = H^*(M, \mathbb{C}) \otimes H^*(M, \mathbb{C})$  представлен классом  $\sum_{i,j} \eta^{i,j} e_i \otimes e_j$ , где  $e_1, \dots, e_N$  — базис в пространстве когомо-

гий, и матрица  $\eta^{i,j}$ , компоненты которой обозначены верхними индексами, обратна матрице с компонентами  $\eta_{i,j} = (e_i, e_j)$ .

Более подробно, рассмотрим следующий интеграл, обобщающий определение инвариантов Громова—Виттена:

$$\int_{\bar{\mathcal{M}}_{0,4}(M,d)} p^*([\text{pt}]) \text{ev}_1^*(a_1) \text{ev}_2^*(a_2) \text{ev}_3^*(a_3) \text{ev}_4^*(a_4),$$

где  $p: \bar{\mathcal{M}}_{0,4}(M, d) \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  — отображение, сопоставляющее отображению его кривую области определения. Интеграл не зависит от выбора цикла  $[\text{pt}]$ , представляющего точку. Возьмем в качестве такого цикла компоненту связности границы, в которой отмеченные точки с номерами 1 и 2 лежат на отдельной рациональной кривой. Всякая нодальная кривая из этого цикла представляется парой таких кривых степеней  $d_1$  и  $d_2$ , что  $d_1 + d_2 = d$ , и условие склейки этих кривых по дополнительной паре отмеченных точек позволяет представить этот интеграл в виде

$$\sum_{d_1+d_2=d} \sum_{i,j} \varphi_{0,d_1}(a_1, a_2, e_i) \eta^{i,j} \varphi_{0,d_2}(a_3, a_4, e_j).$$

Аналогичным образом, если в качестве цикла, представляющего класс точки, взять другую компоненту связности границы пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  — ту, в которой на отдельной рациональной кривой лежат отмеченные точки с номерами 1 и 3, мы получим другое выражение

$$\sum_{d_1+d_2=d} \sum_{i,j} \varphi_{0,d_1}(a_1, a_3, e_i) \eta^{i,j} \varphi_{0,d_2}(a_2, a_4, e_j)$$

для того же интеграла. Равенство двух приведенных выражений эквивалентно условию ассоциативности квантового умножения в касательном пространстве  $T_0H$  в начале координат. Доказательство ассоциативности для общей точки пространства  $H$  вытекает из аналогичных соображений, в которых разные представители класса точки в когомологиях пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  заменены на соответствующие представители обратного образа класса точки в когомологиях пространства  $\bar{\mathcal{M}}_{0,n}$  при отображении забывания всех отмеченных точек, кроме четырех.  $\square$

Капоразо и Харрис обобщили вычисление Концевича количества рациональных кривых, проходящих через фиксированный набор точек, на случай плоских кривых произвольного рода.

**Упражнение 18.3.2.** Докажите, что число  $N_{p,q}$  рациональных кривых бистепени  $(p, q)$  в  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ , проходящих через  $2(p+q) - 2$  точек в общем положении, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} N_{p,q} &= \sum_{p_1=1}^{p-1} \sum_{q_1=1}^{q-1} N_{p_1,q_1} N_{p-p_1,q-q_1} (p_1(q-q_1) + q_1(p-p_1))(q-q_1) = \\ &= \left( p_1 \binom{2p+2q-4}{2p_1+2q_1-2} - (p-p_1) \binom{2p+2q-4}{2p_1+2q_1-1} \right). \end{aligned}$$

## Глава 19

### Задачи к экзаменам

Ниже приведены задачи, которые использовались в качестве экзаменационных в годовом специальном курсе, неоднократно читавшемся М. Э. Казаряном и С. К. Ландо на факультете математики Высшей школы экономики в 2010—2014 гг. Эти задачи, как правило, содержатся в качестве упражнений в основном тексте книги, и здесь они собраны вместе для удобства читателя. Помимо задач мы приводим также вопросы к экзаменам.

**§ 19.1. 1 семестр**

1. Докажите, что ориентируемую поверхность рода  $g$  можно получить, склеивая попарно стороны данного многоугольника с  $2n$  сторонами, в том и только в том случае, если  $n \geq 2g$ .

2. Пусть число  $h - 1$  делит число  $g - 1$ ,  $h \geq 2$ . Докажите, что в этом случае существует накрытие поверхности рода  $h$  поверхностью рода  $g$ .

3. Постройте в проективном пространстве гладкую рациональную кривую степени 4.

4. Докажите, что всякая кривая степени 3 в проективном пространстве, не лежащая ни в какой гиперплоскости, рациональна.

5. Докажите, что кривая степени 4 в проективном пространстве, не лежащая ни в какой гиперплоскости, является либо рациональной, либо кривой рода 1.

6. Найдите род кривой в проективном пространстве, являющейся гладким пересечением двух квадрик.

7. Найдите род кривой в проективном пространстве, являющейся гладким пересечением квадрики и кубики.

8. Приведите пример мероморфного дифференциала на эллиптической кривой, имеющего нуль второго порядка и два полюса первого порядка.

9. Нарисуйте кривую, двойственную к кривой  $y = x^4 - x^2$ , найдите ее уравнение и особые точки.

10. Окружность радиуса  $1/3$  катится изнутри по окружности радиуса 1. Найдите уравнение кривой (*гипоциклоиды, дельтоиды*), являющейся следом точки на меньшей окружности, род этой кривой, ее особенности и двойственную кривую.

11. Окружность радиуса  $1/4$  катится изнутри по окружности радиуса 1. Найдите уравнение кривой (*гипоциклоиды, астроида*), являющейся следом точки на меньшей окружности, род этой кривой, ее особенности и двойственную кривую.

12. Докажите, что плоская кривая  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  рациональна, и найдите ее рациональную параметризацию.

13. Докажите, что плоская кривая  $(x - 1)(x^2 + y^2) = x^2$  рациональна, и найдите ее рациональную параметризацию.

14. Докажите, что плоская кривая  $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x(x^2 + y^2)$  рациональна, и найдите ее рациональную параметризацию.

15. Докажите, что плоская кривая  $x^4 = x^3 - y^3$  рациональна, и найдите ее рациональную параметризацию.

16. Найдите особые точки плоской кривой

$$(y^2 - x^2)(x - 1)(2x - 3) = 4(x^2 + y^2 - 2x)^2,$$

определите их тип и род кривой.

17. Рассмотрим на плоскости с координатами  $x, y$  кривую, состоящую из тех пар значений  $(x, y)$ , при которых многочлен  $t^4 - t^2 + xt + y$  от переменной  $t$  имеет кратные корни. Найдите уравнение этой кривой, определите ее особые точки и двойственную к ней кривую.

18. Докажите, что неприводимая кривая, заданная уравнением  $P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) = 0$ , где  $P_n$  — ненулевой однородный многочлен степени  $n$ , а  $P_{n-1}$  — ненулевой однородный многочлен степени  $n - 1$ , допускает рациональную параметризацию.

19. Найдите группу автоморфизмов плоской кривой  $y^2 = x^3 + x^2$ .

20. При каких значениях параметра  $m$  кривая  $x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$  является гладкой? Найдите ее точки перегиба.

21. Пусть  $C$  — кривая в проективном пространстве. Рассмотрим проекцию кривой  $C$  из точки в пространство на единицу меньшей размерности. Докажите, что при проектировании из общей точки вне кривой проекция имеет ту же степень, что и  $C$ , а при проектировании из общей точки на кривой — на единицу меньшую степень.

22. Докажите, что всякая кривая рода 2 допускает погружение в проективную плоскость с одной простой двойной точкой.

23. Пусть эллиптическая кривая реализуется как разветвленное накрытие степени 2 над проективной прямой с точками ветвления  $-1, 0, 1, \infty$ . Найдите группу автоморфизмов этой эллиптической кривой.

24. Пусть  $f$  — многочлен степени  $n$  с  $n$  попарно различными корнями  $a_1, \dots, a_n$ . Докажите, что

$$\frac{1}{f'(a_1)} + \frac{1}{f'(a_2)} + \dots + \frac{1}{f'(a_n)} = 0.$$

25. Пусть  $X$  — компактная алгебраическая кривая рода 5, а  $Y$  — компактная алгебраическая кривая рода 4. Докажите, что всякое голоморфное отображение  $f: X \rightarrow Y$  является отображением в точку.

26. Пусть  $X$  — компактная алгебраическая кривая рода 2,  $Y$  — компактная алгебраическая кривая рода 1 и  $f: X \rightarrow Y$  — непостоянное голоморфное отображение. Докажите, что на поверхности  $X$  может быть не более двух точек ветвления отображения  $f$ . Может ли точка ветвления на  $X$  быть единственной?

27. Пусть плоская алгебраическая кривая задана в аффинной карте уравнением  $w^4 = z^3 - 3z$ . Найдите ее род. Найдите полюсы и вычеты 1-формы  $dz/w$  на этой кривой. Постройте явно базис в пространстве голоморфных 1-форм на ней.

28. Рассмотрим алгебраическую кривую

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + zw + w^2 = 3\}$$

и точку  $p = (1, 1) \in X$ . Найдите вычет 1-формы  $\frac{dz}{w^2 - 1}$  в точке  $p \in X$ .

29. Докажите, что не существует кривой Гурвица рода  $g = 2$ .

30. Докажите, что группа сохраняющих ориентацию симметрий икосаэдра изоморфна  $\mathrm{PSL}(2, 5)$ .

31. Укажите полюсы, их порядки и вычеты для 1-формы, являющейся поднятием на кривую  $y^2 = x^3 - x$  1-формы  $dx$  относительно проектирования кривой на ось  $x$ .

32. Найдите полюсы и вычеты в них у мероморфной 1-формы  $\frac{x^3 dx}{x^2 - 1}$ . Какова ее область определения (опишите компактную гладкую риманову поверхность, на которой она задана)?

33. Найдите полюсы и вычеты в них у мероморфной 1-формы  $\frac{x^4 dx}{x^2 - 1}$ . Какова ее область определения (опишите компактную гладкую риманову поверхность, на которой она задана)?

34. Найдите полюсы и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы  $dx$  на кривую  $x^3 + y^3 + xy = 1$ .

35. Найдите полюсы и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы  $dx$  на кривую  $x^3 + y^3 + xy = 0$ .

36. Найдите полюсы и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы  $dx/y$  на кривую  $x^3 + y^3 + xy = 1$ .

37. Найдите полюсы и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы  $dx/y$  на кривую  $x^3 + y^3 + xy = 0$ .

38. Найдите полюсы и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы  $dx/y^2$  на кривую  $x^3 + y^3 + xy = 1$ .

39. Найдите полюсы и вычеты в них у ограничения мероморфной 1-формы  $dx/y^2$  на кривую  $x^3 + y^3 + xy = 0$ .

40. Определите особые точки (замыкания) следующих плоских кривых и определите род нормализации. В случае, если род равен 0, предъявите рациональную параметризацию. В случае, если род равен 1, постройте какую-нибудь мероморфную функцию степени 2, вычислите ее критические значения, их двойное отношение и зна-

чение  $j$ -инварианта:  $x^3 + y^3 + xy = 1$ ,  $y^2 - x^4 = xy^3$ ,  $y^2 = x^4 + x^2$ ,  $y^2 = x^5 + x^2$ .

41. Опишите все возможные кривые рода 1, на которых существует мероморфная функция степени 3 с ровно тремя критическими значениями.

**§ 19.2. Вопросы к экзамену**

1. Склейка двумерных поверхностей из многоугольников.
2. Накрытия и разветвленные накрытия двумерных поверхностей. Построение разветвленного накрытия по монодромии.
3. Формула Римана—Гурвица.
4. Теорема Безу и ее приложения.
5. Рациональная параметризация плоских кривых.
6. Род гладкой плоской кривой. Род нормализации плоской кривой с простыми самопересечениями.
7. Гессиан и точки перегиба.
8. Гиперэллиптические кривые. Род гиперэллиптической кривой.
9. Теорема Уитни о вложениях и погружениях кривых.
10. Мероморфные функции на кривых в проективных пространствах.
11. Проективная двойственность для кривых.
12. Формулы Пюккера для неособых кривых.
13. Формулы Пюккера для кривых с особенностями.
14. Автоморфизмы сферы Римана. Конечные группы автоморфизмов.
15. Эллиптические кривые. Отображения эллиптических кривых.
16. Модули эллиптических кривых.
17. Кубики как эллиптические кривые.
18.  $j$ -инвариант кубических кривых.
19. Автоморфизмы кривых. Теорема Гурвица.
20. Касательное и кокасательное расслоения. Дифференциальные 1-формы на кривых.
21. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской гладкой кривой.
22. Интегрирование 1-форм. Точные 1-формы.
23. Размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой с простыми самопересечениями.
24. Вычеты и интегралы от мероморфных 1-форм.



### § 19.3. 2 семестр

1. Докажите, что для любых двух точек на эллиптической кривой существует мероморфная функция степени 2, имеющая в этих точках полюсы первого порядка. Выразите эту функцию через функцию Вейерштрасса.

2. Докажите, что если для двух точек  $x_1, x_2$  на кривой  $C$  существует функция с полюсами первого порядка в этих точках и без других полюсов, то каноническое отображение кривой  $C$  переводит эти две точки в одну.

3. Докажите, что образ гиперэллиптической кривой любого рода при каноническом отображении — рациональная кривая.

4. Всякая мероморфная функция степени 2 на комплексной кривой определяет на этой кривой инволюцию — автоморфизм второго порядка, переставляющий прообразы каждой точки из  $\mathbb{CP}^1$ . Неподвижные точки этой инволюции — критические точки функции. Найдите размерность пространства  $L(D)$  мероморфных функций на гиперэллиптической кривой рода  $g \geq 2$  для следующих случаев:

- а)  $D = 2x$ , где  $x$  — неподвижная точка инволюции;
- б)  $D = 2x$ , где  $x$  не является неподвижной точкой инволюции;
- в)  $D = x_1 + x_2$ , где точки  $x_1, x_2$  образуют орбиту инволюции;
- г)  $D = x_1 + x_2$ , где точки  $x_1, x_2$  не образуют орбиту инволюции.

5. Докажите, что всякая негиперэллиптическая кривая рода 5 биголоморфна пересечению трех квадрик в  $\mathbb{CP}^4$ .

6. Докажите, что всякая кривая рода два допускает погружение в проективную плоскость в качестве кривой степени 4 с одной простой двойной точкой.

7. Докажите теорему Клиффорда: если кривая  $C$  негиперэллиптическая, то для любой точки  $x \in C$  имеет место неравенство  $l(kx) < \frac{k}{2} + 1$  при  $k = 1, \dots, 2g - 1$ .

8. Найдите все точки Вейерштрасса на плоской кривой Ферма  $x^4 + y^4 = 1$  и укажите их тип. Пользуясь этим результатом, найдите группу автоморфизмов плоской кривой Ферма  $x^4 + y^4 = 1$ .

9. Найдите многочлен Гильберта объединения прямой и точки на плоскости.

10. Найдите многочлен Гильберта объединения прямой и трансверсально пересекающей ее гладкой квадрики на плоскости.

11. Найдите многочлен Гильберта объединения прямой и касающейся ее гладкой квадрики на плоскости.

12. Найдите многочлен Гильберта скрученной кубики в проективном пространстве.

13. Найдите многочлен Гильберта пары пересекающихся прямых в проективном пространстве.

14. Найдите многочлен Гильберта пары скрещивающихся прямых в проективном пространстве.

15. Найдите размерность  $N$  проективного пространства голоморфных сечений третьей степени канонического расслоения на кривой рода  $g$ .

16. Приведите пример кривой рода  $g = 2$ , на которой 2-каноническое отображение  $\varphi_{2K}$ , отвечающее тензорному квадрату кокасательного расслоения, не задает вложения.

17. Проверьте, что многочлен Гильберта 3-канонической кривой равен

$$p_g(n) = 3(2g - 2)n - g + 1,$$

и докажите, что любая гладкая кривая с таким многочленом Гильберта в  $\mathbb{CP}^{5g-6}$  является 3-канонической кривой рода  $g$ .

18. Найдите многочлен Гильберта кривой Веронезе в  $\mathbb{CP}^{n-2}$ . Докажите, что особые кривые Веронезе имеют тот же многочлен Гильберта. Проверьте, что всякая кривая (на самом деле всякое подмногообразие) с тем же многочленом Гильберта, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости, является стабильной кривой Веронезе.

19. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 2 и 3 без отмеченных точек.

20. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 2 с одной отмеченной точкой.

21. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 1 с тремя отмеченными точками.

22. Верно ли, что порядок группы автоморфизмов стабильной кривой рода  $g$  не может превышать  $84(g - 1)$ ?

23. Как выглядит стабильный предел однопараметрического семейства кривых рода  $g + 1$ ,  $g \geq 1$ , полученных из данной гладкой кривой  $C$  рода  $g$  склейкой постоянной точки  $p$  с переменной точкой  $q$  при стремлении точки  $q$  к точке  $p$ ?

24. Сформулируйте и докажите формулу Римана—Роха для стабильных кривых.

25. Докажите, что 5-каноническое отображение стабильной кривой рода  $g \geq 2$  без отмеченных точек является вложением.

26. Вычислите эйлерову характеристику пространства  $\bar{M}_{1,2}$ .

27. Вычислите эйлерову характеристику пространства  $\bar{M}_{2;0}$ .
28. Вычислите эйлерову характеристику пространства  $\bar{M}_{2;1}$ .
29. Построив сечения соответствующих расслоений, вычислите индекс пересечения  $\int_{\bar{M}_{0,5}} \psi_1 \psi_2 = \langle \tau_1^2 \tau_0^3 \rangle$ .
30. Построив сечения соответствующих расслоений, вычислите индекс пересечения  $\int_{\bar{M}_{0,6}} \psi_1^2 \psi_2 = \langle \tau_1 \tau_2 \tau_0^4 \rangle$ .
31. Построив сечения соответствующих расслоений, вычислите индекс пересечения  $\int_{\bar{M}_{0,6}} \psi_1^3 = \langle \tau_3 \tau_0^5 \rangle$ .

**§ 19.4. Вопросы к экзамену**

1. Теорема Римана—Роха с доказательством.
2. Приложения формулы Римана—Роха: гиперэллиптические кривые и кривые рода 2.
3. Приложения формулы Римана—Роха: вычисление Римана.
4. Приложения формулы Римана—Роха: кривые рода 3.
5. Точки Вейерштрасса на кривых рода 3 и точки перегиба плоских кватрик.
6. Точки Вейерштрасса: веса.
7. Точки Вейерштрасса: конечность группы автоморфизмов кривой.
8. Якобиан и тета-дивизор.
9. Теорема Абеля.
10. Пространство модулей  $\mathcal{M}_{1,1}$  и универсальная кривая над ним.
11. Пространства модулей гладких рациональных кривых с отмеченными точками.
12. Канонические и плюриканонические вложения.
13. Многочлен Гильберта гладкой кривой рода  $g$  при каноническом и плюриканоническом вложении.
14. Стабильные кривые. Род стабильной кривой.
15. Многочлен Гильберта стабильной кривой при плюриканоническом вложении.
16. Эйлерова характеристика пространств модулей рациональных кривых с отмеченными точками.
17. Когомологии пространств модулей рациональных кривых с небольшим числом отмеченных точек.
18. Комбинаторика стратификации пространств модулей рациональных кривых с небольшим числом отмеченных точек.

## Литература

1. Arbarello E., Cornalba M., Griffiths P.A., Harris J. Geometry of algebraic curves. Vol. I. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 1985. (Fundamental Principles of Mathematical Sciences; Vol. 267).
2. Arbarello E., Cornalba M., Griffiths P.A. Geometry of algebraic curves. Vol. II / With a contribution by J. D. Harris. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Heidelberg: Springer, 2011. (Fundamental Principles of Mathematical Sciences; Vol. 268).
3. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии: В 2 т. М.: Мир, 1982.
4. Getzler E. Operads and moduli spaces on genus 0 Riemann surfaces // The Moduli Spaces of Curves. Boston: Birkhäuser, 1995. P. 199—230.
5. Клеменс Г. Мозаика теории комплексных кривых. М.: Мир, 1984.
6. Харрис Дж., Моррисон Я. Модули кривых. М.: Мир, 2004.
7. Eisenbud D. Commutative algebra. New York: Springer-Verlag, 1995.
8. Fulton W. Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. Addison-Wesley, 1969.
9. Griffiths P.A. Variations on a theorem of Abel // Inv. Math. 1976. Vol. 35. P. 321—390.
10. Griffiths P.A. Introduction to algebraic curves. AMS, 1989.
11. Miranda R. Algebraic curves and Riemann surfaces. AMS, 1995.
12. Kapranov M. M. Veronese curves and Grothendieck—Knudsen moduli space  $\bar{M}_{0,n}$  // J. Algebraic Geometry. 1993. Vol. 2. P. 239—262.
13. Keel S. Intersection theory on moduli space of stable  $N$ -pointed curves of genus zero // Transactions of the AMS. 1992. Vol. 330, № 2. P. 545—574.
14. Kontsevich M., Manin Yu. Gromov—Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry // Comm. Math. Phys. 1994. Vol. 164, № 3. P. 525—562.
15. Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А. Униформизация и клейновы группы. 1979.
16. Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 1999.
17. Прасолов В. В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004.
18. Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
19. Уокер Р. Алгебраические кривые. М.: ИЛ, 1952.
20. Mumford D. Curves and their Jacobians. The University of Michigan Press, 1974.
21. van der Waerden B. L. Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin: Springer, 1939.

## Предметный указатель

$j$ -инвариант 54, 98

абелев дифференциал 167

— — второго рода 168

— — первого рода 167

— — третьего рода 168

Абеля теорема 164

Абеля—Якоби отображение 164

— теорема 164

автоморфизм кривой 86

алгебраическая кривая

неприводимая 24

— — плоская 24

— — приводимая 24

аффинные координаты 11

Безу теорема 34

бесконечно удаленная точка 11

биголоморфное отображение

кривых 46

билинейные соотношения Римана

169

Бриллю—Нётера матрица 178

Вейерштрасса точка 155

— функция 94

вектор касательный 109

— кокасательный 110

векторное поле 110

Веронезе кривая 206

— отображение 28, 206

ветвления индекс 22

— порядок 59

вещественная часть вещественной

кривой 23

вронскиан 156

выпуклая кривая 74

вычет 121

Гельфанда—Лере форма 118

гессиан многочлена 54

Гильберта многочлен 195

гиперэллиптическая инволюция 58

— кривая 58, 63

главная конгруэнцподгруппа 106

— часть функции в полюсе 135

главный дивизор 126

гладкая кривая 25, 66

голоморфное отображение 46

граф модулярный 228

группа модулярная 91

— Пикара 125

Гурвица теорема 104

двойная касательная 52

— точка кривой 26

двойное отношение 53

двойственная кривая 74

двойственное векторное

пространство 73

двумерная поверхность 13

дельтоида 83

дивизор 124

— главный 126

— канонический 127

— нулей сечения линейного

расслоения 123

— общий 177

— полюсов сечения линейного

расслоения 123

— сечения линейного расслоения  
123

— эффективный 131

- дивизора степень 125  
 дивизоры линейно эквивалентные 125  
 дифференциал абелев 167  
 дифференциальная форма 110  
 дифференцирование 110  
  
 забывания отображение 202  
 замкнутая поверхность 13  
  
 изоморфизм кривых 46  
 инволюция 58  
 — гиперэллиптическая 58  
 индекс ветвления 22  
 индуцированная ориентация 16  
  
 каноническая кривая 131  
 канонический дивизор 127  
 — класс дивизоров 127  
 каноническое отображение 131  
 карта 11  
 касания точка 31  
 касательная двойная 52  
 — к кривой 27  
 касательный вектор 109  
 класс дивизоров канонический 127  
 — плоской кривой 75  
 — Сегре 243  
 — Черна полный 238  
 Клейна кривая 106  
 кокасательный вектор 110  
 комплексная структура 46  
 комплексное проективное пространство 11  
 компонента неприводимая 208  
 координаты аффинные 11  
 — однородные 11  
 корни Черна 238  
 кратность особой точки 27  
 кривая Веронезе 206  
 — выпуклая 74  
 — гиперэллиптическая 58, 63  
 — гладкая 25, 66  
 — двойственная 74  
 — каноническая 131  
 — Клейна 106  
 — локально неприводимая 84  
 — рациональная 11  
 — эллиптическая 57, 60  
 кривой автоморфизм 86  
 кубика 93  
 — скрученная 68, 206  
 Кэли теорема 38  
  
 Лейбница правило 110  
 линейная система 133  
 — — полная 133  
 линейно эквивалентные дивизоры 125  
 линейное расслоение 110, 128  
 — — тавтологическое 127  
 линейный ряд 133  
 локальная ветвь кривой 84  
 — координата 45  
  
 матрица Брилля—Нётера 178  
 — периодов нормализованная 171  
 — симплектическая 171  
 мероморфная функция 61  
 многообразии Пикара 165  
 многочлен Гильберта 195  
 — Пуанкаре мотивный 211  
 многочлена гессиян 54  
 модулярная группа 91  
 — кривая 183  
 — функция 99  
 модулярный граф 208, 228  
 монодромия 17  
 мотивная эйлерова характеристика 215  
 мотивный многочлен Пуанкаре 211  
  
 накрытие 16

- разветвленное 19
- накрытия степень 16
- неприводимая алгебраическая кривая 24
- компонента 208
- неравенство Римана 147
- нодальная кривая 225
- модулярно стабильная 208
- нормализация кривой 71
- нодальной кривой 225
- особой кривой 208
  
- общий объект 178
- однородные координаты 11
- ориентация 13
- индуцированная 16
- ориентируемая поверхность 13
- отображение Абеля—Якоби 164
- Веронезе 28, 206
- голоморфное 46
- забывания 202
- каноническое 131
  
- параметризация рациональная 41
- перегиба точка 52, 54
- пересечение трансверсальное 31
- перехода функция 128
- периодов матрица  
нормализованная 171
- Пикара группы 125
- многообразие 165
- плоская алгебраическая кривая 24
- Плюккера формулы 81
- плуриканоническое отображение 131
- поверхность двумерная 13
- замкнутая 13
- погружение 70
- поднятие 1-формы 114
- поле векторное 110
- полная линейная система 133
- полный класс Черна 238
  
- порядок ветвления 59
- правило Лейбница 110
- преобразование проективное 12
- приводимая алгебраическая кривая 24
- проективное преобразование 12
- пространство комплексное 11
- пучок кривых 36
  
- разветвленное накрытие 19
- расслоение линейное 110
- расслоения степень 126
- рациональная кривая 11
- — нодальная 208
- — нормальная 68
- параметризация 41
- результат 33
- Римана билинейные соотношения 169
- неравенство 147
- сфера 11
- Римана—Гурвица формула 20
- риманова поверхность 46
- ручка 13
  
- связная сумма 13
- симметрическая степень 174
- симплектическая матрица 171
- скрученная кубика 68, 206
- слабомодулярная функция 99
- стабильная кривая 225
- с отмеченными точками 226
- степень алгебраической кривой 66
- дивизора 125
- кривой 24
- линейной системы 133
- накрытия 16
- расслоения 126
- симметрическая 174
- структура комплексная 46
- сумма связная 13
- сфера Римана 11



- 
- с ручками 13
  - тавтологическое линейное  
  расслоение 127
  - теорема Абеля 164
    - Абеля—Якоби 164
    - Безу 34
    - Гурвица 104
    - Кэли 38
    - обращения Якоби 165
  - тождество Эйлера 25
  - тор 13
  - точка бесконечно удаленная 11
    - Вейерштрасса 155
    - перегиба 52, 54
    - — простая 54
  - точная форма 113
  - трансверсальное пересечение 31
  - триангуляция 14
  - форма Гельфанда—Лере 118
  - дифференциальная 110
  - точная 113
  - формула проекции 242
  - Римана—Гурвица 20
  - формулы Плюккера 81
  - функция Вейерштрасса 94
    - мероморфная 61
    - перехода 128
  - характеристика эйлера 14
  - Эйлера тождество 25
  - эйлерова характеристика 14
    - — мотивная 215
  - элементарный дифференциал  
  третьего рода 168
  - эллиптическая кривая 57, 60
  - эффективный дивизор 131
  - Якоби теорема обращения 165

## **Магазин «Математическая книга»**

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; [biblio.mccme.ru](http://biblio.mccme.ru)

Книга — почтой: <http://biblio.mccme.ru/shop/order>

Книги в электронном виде: <http://www.litres.ru/mcnmo/>

## **Мы сотрудничаем с интернет-магазинами**

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; [www.umlit.ru](http://www.umlit.ru), [www.textbook.ru](http://www.textbook.ru), [абрис.рф](http://абрис.рф)
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; [www.kniga.ru](http://www.kniga.ru)

## **Наши партнеры в Москве и Подмоскowie**

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; [www.mdk-arbat.ru](http://www.mdk-arbat.ru)
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; [www.bookmg.ru](http://www.bookmg.ru)
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; [www.arg.ru](http://www.arg.ru)
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; [www.uchebnik.com](http://www.uchebnik.com)
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; [www.shkolkniga.ru](http://www.shkolkniga.ru)
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, [www.urss.ru](http://www.urss.ru)
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

## **Наши партнеры в Санкт-Петербурге**

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; [k\\_i@bk.ru](mailto:k_i@bk.ru), [k\\_i@petroglyph.ru](mailto:k_i@petroglyph.ru)
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

## **Наши партнеры в Челябинске**

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

## **Наши партнеры в Украине**

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; [df-al-el@bk.ru](mailto:df-al-el@bk.ru)