

# Алгебраическая геометрия и теория чисел.

## Вопросы к письменному экзамену.

М. И. Магин

1. Нормированные поля: основные определения. Теорема о связи неравенства треугольника и ультраметрического неравенства.
2. Построение кольца  $p$ -адических чисел: определение, арифметические операции в кольце, канонический способ задания целого  $p$ -адического числа.
3. Мультипликативная группа кольца  $\mathbb{Z}_p$ .
4. Теорема о представлении целого  $p$ -адического числа в виде  $p^\ell \cdot \varepsilon$ .
5. Локализация кольца в мультипликативном подмножестве: определение, универсальное свойство, начало построения (утверждение про отношение эквивалентности).
6. Локализация кольца в мультипликативном подмножестве: конец построения — действия в локализации, корректность свойств арифметических операций, универсальное свойство.
7. Поле  $\mathbb{Q}_p$  как поле частных  $\mathbb{Z}_p$ . Представление  $p$ -адического числа в виде  $p^\ell \cdot \varepsilon$ .
8. Сходимость в поле  $p$ -адических чисел, теоремы о действиях с пределами (доказательство на примере одного свойства на выбор).
9. Сравнения по модулю в кольце целых  $p$ -адических чисел. Теорема о сравнениях в кольце  $\mathbb{Z}_p$ .
10.  $p$ -адическое число как предел определяющей его последовательности.
11. Лемма Больцано-Вейерштрасса (без доказательства), критерий Коши в поле  $p$ -адических чисел.
12. Теорема о том, что сходимость  $\{\xi_n\}$  равносильна тому, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$ .
13. Ряды с  $p$ -адическими членами. Критерий сходимости рядов с  $p$ -адическими членами.
14.  $p$ -адическое число, как сумма ряда. Аналогия между представлением вещественных чисел в десятичной записи и  $p$ -адическими числами.
15. Метод касательных Ньютона.
16. Лемма Гензеля.
17. Следствия из леммы Гензеля и переформулировки леммы Гензеля.
18. Проективная плоскость и различные модели. Склейка многогранника, факторпространство  $D^2$  или  $S^2$ , прямые на проективной плоскости.
19. Проективная плоскость как евклидова плоскость с бесконечно удаленными точками. Прямые в такой модели. Бесконечно удалённая прямая.
20. Определение проективных пространств, свойства, однородные координаты.

21. Проективное пополнение  $\mathbb{R}^n$ .

22. Проективные преобразования. Группа преобразований Мёбиуса проективной прямой  $\mathbb{R}P^1$ .

23. Квадратичные функции и квадрики. Рациональные параметризации. Вывод формул для Пифагоровых троек.

24. Билинейные формы и их матрицы. Квадратичные формы и соответствующие им билинейные формы. Теорема о диагонализации (без доказательства).

25. Сигнатура квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм (без доказательства). Классификация квадрик на прямой, проективизация.

26. Квадрики на плоскости: эллипс, парабола, гипербола (определение, принадлежность к квадрикам (можно либо для эллипса, либо для гиперболы)), проективизация.

27. Проективная классификация квадрик.

28. Аффинная классификация квадрик на плоскости.

29. Принцип Минковского-Хассе для квадратичных форм (формулировка и основные моменты доказательства).

30. Алгебраические кривые. Эллиптические кривые. Группа точек на эллиптической кривой (корректность, всего кроме ассоциативности).

31. Ассоциативность сложения точек на эллиптической кривой.