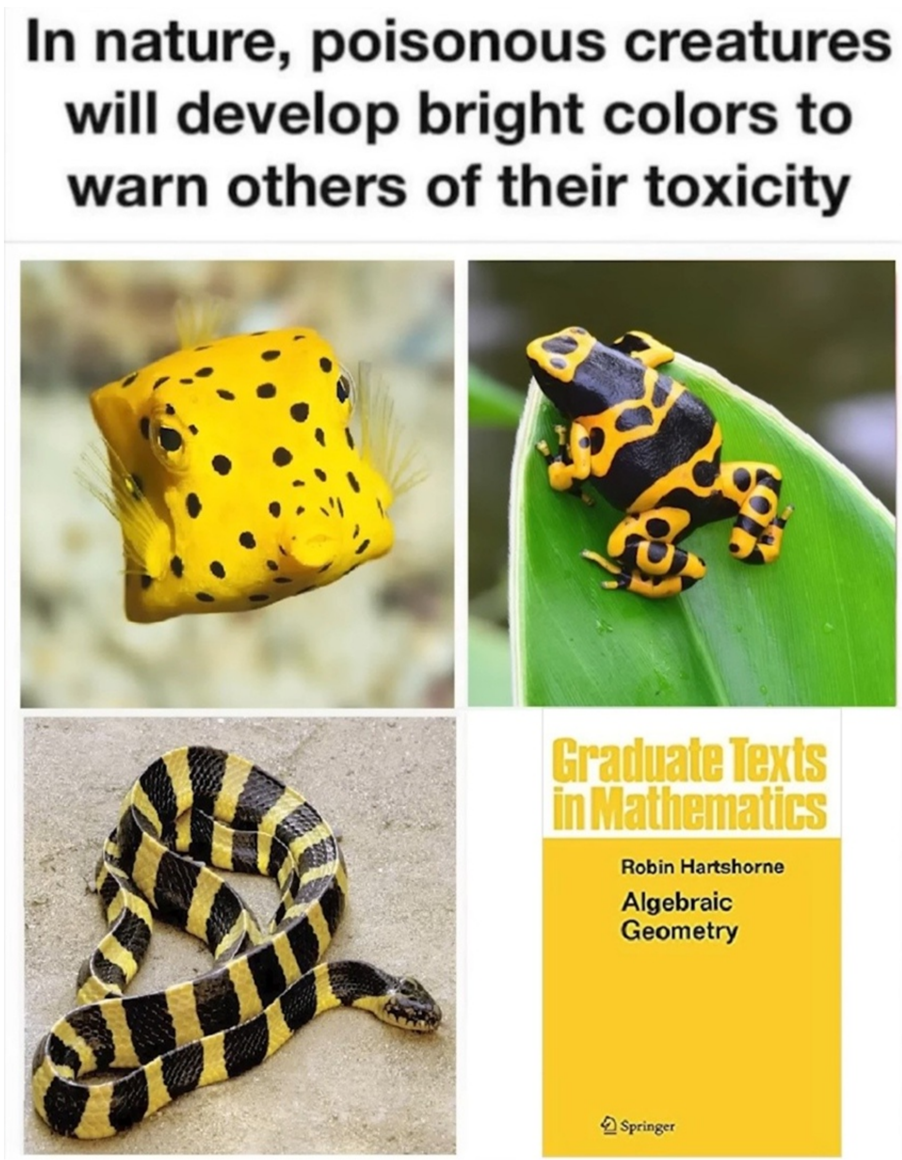
Летняя математическая школа ЛНМО

Поставы, 2022г.

Алгебраическая геометрия и теория чисел



Конспект по материалам лекций, прочитанных М.И. Магиным
11-му математическому классу

Лаборатория непрерывного
математического образования

Алгебраическая геометрия и теория чисел

Содержание

1. Нормированные поля

1.1 Нормированное поле. Неархимедовы нормы.

Здесь и вдальнейшем будем полагать F полем, хотя многие вещи работают и для кольца (а для области целостности существует единственное продолжение на поле частных).

Definition 1. *Нормой (нормированием, абсолютным значением) на поле F называют отображение $\|\cdot\|\colon F \to \mathbb{R}_{>0}$, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x, y \in F \ \|xy\| = \|x\|\|y\|$.
3. $\exists C > 0\colon \forall x, y \in F\colon$
$$\|x + y\| \leq C \cdot \max(\|x\|, \|y\|)$$

Пара $(F, \|\cdot\|)$ называется нормированным полем.

Remark 1. Тем, кто уже до этого видел определение нормы, это определение может показаться странным, так как обычно вместо третьего свойства требуют неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in F \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ясно, что третье свойство следует из неравенства треугольника с $C = 2$. Ниже мы покажем и обратную импликацию.

Ясно, что любая норма задаёт метрику $d(x, y) = \|x - y\|$, а любая метрика индуцирует топологию стандартным образом.

Example 1. *Если $F \leq \mathbb{C}$, то подходит $|\cdot|$ (модуль комплексного числа). Если $F \leq \mathbb{R}$ или $F \leq \mathbb{Q}$, то подходит $|\cdot|$.*

Example 2. *На любом поле можно ввести тривиальную норму (иногда соответствующую ей метрику называют метрикой лентяя):*

$$\|x\| = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x \neq 0 \end{cases}$$

Theorem 1. *Если в определении 1 постоянная C равна 2, то норма удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. Сначала отметим, что если $n, m \in \mathbb{N},\ n \leq 2^m$, то в случае произвольной постоянно C выполняется оценка:

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leq C^m \cdot \| \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$$

В самом деле, достаточно просто расписать дерево неравенств.
Отсюда следует неравенство

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \leq (2n)^{c_0} \max_{1 \leq k \leq n} (\|x_k\|), \quad c_0 = \log_2 C$$

В самом деле, $(2n)^{\log_2 C} = C \cdot n^{\log_2 C}$. Это также даёт удобную оценку: $\|n\| \leq (2n)^{c_0}$.
Теперь заметим, что в нашем случае $c_0 = \log_2 C = \log_2 2 = 1$, а значит, мы можем провести вот такую оценку:

$$\|x+y\|^n = \|(x+y)^n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left\|\binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right\| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left(2\binom{n}{k}\|x\|^k\|y\|^{n-k}\right) \leq$$
$$\leq 4(n+1)(\|x\| + \|y\|)^n$$

Преобразуем это неравенство

$$\left(\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|}\right)^n \leq 4(n+1) \leftrightarrow \frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} \leq 4^{\frac{1}{n}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем:

$$\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} \leq 1 \Leftrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

Remark 2. Пример $F = \mathbb{C}$ с нормой $\|\cdot\| = |\cdot|^\alpha$, $\alpha > 1$ показывает, что константу $C = 2$ нельзя улучшить.

Remark 3. Тем самым, мы показали, что норму можно понимать, как функтор из категории $\mathcal{F}ield$ в категорию $\mathcal{M}etr$.

Corollary 1. *Норма непрерывна.*

Definition 2. *Нормы, с постойнной $C = 1$ в определении 1 называют неархимедовыми. Нормы, не являющиеся неархимедовыми, называют архимедовыми.*

Example 3. *Тривиальная норма на любом поле F является неархимедовой.*

Definition 3. *Ясно, что любое $x \in \mathbb{Q}$ представимо в виде $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots\, p$, $a \not\vdots\, p$, а $n \in \mathbb{Z}$. В таком случае число n называют p-адическим показателем числа x и обозначают $\upsilon_p(x)$.*

Definition 4. ***(Самое важное)***
Пусть p — простое число. Тогда норму

$$\|x\|_p = \begin{cases} 0, x = 0 \\ p^{-\upsilon_p(x)}, x \neq 0 \end{cases}$$

на поле $\mathbb{Q}$ называют p-адической нормой.

Remark 4. Ясно, что подоходит $r^{-\upsilon_p(x)}$, где $r > 1$, но p брать удобно, так как для $x \in \mathbb{Q}^*$ справедлива формула произведения

$$1 = \prod_p |x| \cdot \|x\|_p$$

Lemma 1. *Если норма неархимедова, то для x, y: $\|x\| \neq \|y\|$ выполняется $\|x+y\| = \max \|x\|, \|y\|$.*

Corollary 2. *Рассмотрим $(F, \|\cdot\|)$, где норма $\|\cdot\|$ неархимедова. Тогда, если $b \in B_r(a)$, то $B_r(a) = B_r(b)$.*

Corollary 3. *(Забавное)*
Если на поле F введена неархимедова норма F, то $\forall x, y, z \in F$ по крайней мере два числа из $\|x-y\|$, $\|x-z\|$, $\|y-z\|$ равны.
Иными словами, в метрическом пространстве (F, d) $(d(x,y) = \|x-y\|)$ все треугольники равнобедренные.

2. p-адические числа

2.1 Кольцо целых p-адических чисел.

Прежде чем давать какие-либо определения, рассмотрим следующий мотивирующий пример.
Рассмотрим сравнение $x^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Если $n = 1$, то ясно, что

$$x_0 \equiv \pm 3 \pmod 7$$

Теперь рассмотрим $n = 2$. $x^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod 7$, а значит, решения сравнения с $n = 2$ надо искать в виде $x_0 + 7t_1$.
Займемся поиском решений вида $x_1 = 3 + 7t_1$. Подставим:

$$(3+7t_1)^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Leftrightarrow 9+6\cdot 7t_1 + 7^2t_1^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow 1+6t_1 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow t_1 \equiv 1 \pmod 7$$

Отсюда имеем решение $x_1 \equiv 3 + 7 \cdot 1 \pmod{7^2}$.
При $n = 3$ мы получим $x_2 = x_1 + 7^2t_2$ и подставляя

$$(3 + 7 + 7^2t_2)^2 \equiv 2 \pmod{7^3}$$

мы найдём $t_2 \equiv 2 \pmod 7$, а значит,

$$x_2 \equiv 3 + 7 \cdot 1 + 7^2 \cdot 2 \pmod{7^3}$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ со свойствами

$$x_0 \equiv 3 \pmod 7, \quad x_n \equiv x_{n-1} \pmod{7^n}, \quad x_n^2 \equiv \pmod{7^{n+1}}$$

Процесс построения этой последовательности может напонмить внимательному читателю процесс вычисления $\sqrt{2}$ при помощи приблиэения рациональными числами. Там мы тоже строим последовательность рационаьных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, квадраты которых становятся сколь угодно близки к 2, например, $|r_n^2 - 2| < 1/10^n$.
Если мы зафиксируем простое число p будем считать два целых числа близкими, если их разность делится на достаточно большую степени p (то есть, близкими в смысле p-адической метрики):

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p = p^{-v_p(x-y)}$$

В конкретном примере выше,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \colon \forall n \geq N \; d_7(x_n^2, 2) < \varepsilon$$

Как мы помним, задание последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$ определяет вещественное число $\sqrt{2}$. Проводя аналогию, здесь мы также можем предположить, что последовательность $\{x_n\}$ определяет некоторое число α совершенно новой природы.
Заметим также, что если у нас есть такая последовательность рациональных чисел $\{r'_n\}$, что $\forall \varepsilon > 0 \; N \colon \forall n > N \; |r_n - r'_n| < \varepsilon$, то её пределом также будет $\sqrt{2}$ (и в этом смысле определение корректно). Соответсвенно, здесь нам также будет естественно предположить, что последовательность $\{x'_n\}$, для которой $x_n \equiv x'_n \pmod{7^{n+1}}$ определяет то же самое число α.

Remark 5. В общем, во всей этой аналогии мы просто заменили метрику на p-адическую.

Definition 5. *Пусть p — некоторое простое число. Последовательность целых чисел $\{x_n\}$, обладающих свойством*

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n} \; \forall n \geq 1$$

определяет новый объект, называемый p-адическим числом. Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ определяют одно и то же целое p-адическое число, когда $x_n \equiv x'_n \pmod{p^{n+1}} \; \forall n \geq 0$.
То есть, целые p-адические числа — предел по p-адическое норме целых.
Множество всех целых p-адических чисел мы будем обозначать через $\mathbb{Z}_p$.

Обычные целые числа (не p-адические) будем с этого момента называть целыми рациональными.

Заметим, что каждому целому рациональному числу x можно сопоставить целое p-адиеческое число, определяемое последовательностью $\{x, x, x, \ldots\}$. Такое целое p-адическое число мы будем обозачать той же буквой x. Таким образом, мы получили естественное вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ (инективность вполне очевидна).

Remark 6. **Канонический способ задания p-адического числа.**
Пусть целое p-адическое число задается последовательностью $\{x_n\}$. Обозначим наименьшее неотрицательное число, сравнимое с x_n по модулю p^{n+1} за $\overline{x_n}$.

$$x_n \equiv \overline{x_n} \pmod{p^{n+1}},\ 0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1}$$

Ясно, что

$$\overline{x_n} \equiv x_n \equiv x_{n-1} \equiv \overline{x_{n-1}} \pmod{p^n}$$

То есть, последовательность $\{\overline{x_n}\}$ определяют то же целое p-адическое число, что и $\{x_n\}$. Заметим, что если две последовательности $\{\overline{x_n}\}$ и $\overline{y_n}$ определяют одно и то же целое p-адическое число, то в силу

$$\overline{x_n} \equiv \overline{y_n} \pmod{p^{n+1}},\ 0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1},\ 0 \leq \overline{y_n} < p^{n+1}$$

мы имеем $\overline{x_n} = \overline{y_n}$, то есть, такое представление единственно. Его мы и будем называть каноническим представлением.

Заметим, что $\overline{x^n} \equiv \overline{x_{n-1}} \pmod{p^n}$, а так как $0 \leq \overline{x_n} < p^{n+1}$, вся каноническая последовательность имеет вид

$$\{a_0,\ a_0 + a_1 p,\ a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \ldots\},\quad 0 \leq a_i < p$$

С другой стороны, ясно, что каждая последовательность такого вида задаёт некоторое целое p-адическое число.

Ясно, что операции сложения и умножения на p-адических числах определяются поточечными операциями с соответствующими последовательностями.
Все свойства операций очевидны, значит, $\mathbb{Z}_p$ — коммутативное кольцо. Поймём что-нибудь про множество обратимых элементов кольца.

Theorem 2. *Целое p-адическое число α, определяемое последовательностью $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ я тогда и только тогда, когда $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

Доказательство. Путь $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$. Тогда существует такое целое p-адическое число β, что $\alpha\beta = 1$.
Пусть β определяется последовательностью $\{y_n\}$. Тогда

$$x_n y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$$

В частности, $x_0 y_0 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$. И обратно, так как $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$ мы имеем

$$x_n \equiv x_{n-1} \equiv \ldots \equiv x_0 \pmod{p} \Rightarrow x_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Значит, так как p — простое, $\forall n\ \exists y_n \colon x_n y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$.

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n},\ x_n y_n \equiv x_{n-1} y_{n-1} \pmod{p^n} \Rightarrow y_n \equiv y_{n-1} \pmod{p^n}$$

а значит, $\{y_n\}$ определяет некоторое целое p-адическое число β.
Таким образом, $\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}_p^*$. □

Theorem 3. *Любое отличное от нуля целое p-адическое число α можно единственным образом представить в виде*

$$\alpha = p^m \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*,\ m \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Если $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, то равенство справедливо при $m = 0$.
Пусть теперь $\alpha \notin \mathbb{Z}_p^*$ и $\{x_n\} \to \alpha$. Тогда, по предыдущей теореме $x_0 \equiv 0 \pmod p$. Так как $\alpha \neq 0$, $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\ x_n \not\equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$. Пусть m — наимеьший индекс, для которого

$$x_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}}$$

Заметим, что в таком случае $\forall s \geq 0$

$$x_{m+s} \equiv x_{m-1} \equiv 0 \pmod{p^m} \Rightarrow y_s = \frac{x_{m+s}}{p^m} \in \mathbb{Z}$$

$$p^m y_s - p^m y_{s-1} = x_{m+s} - x_{m+s-1} \equiv 0 \pmod{p^{m+s}} \Rightarrow y_s \equiv y_{s-1} \pmod{p^s}$$

То есть, последовательность $\{y_s\}$ тоже определяет некоторое p-адическое число $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p$. Заметим, что $y_0 = x_m/p^m \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$.
Из сравнения

$$p^m y_s = x_{m+s} \equiv x_s \pmod{p^{s+1}}$$

следует, что $\alpha = p^m \cdot \varepsilon$. Покажем теперь единственность. Предположим, что $\alpha = p^k \xi,\ k \geq 0,\ \xi \in \mathbb{Z}_p^*$. Пусть $\{z_s\} \to \xi$.

$$p^m y_s \equiv p^k z_s \pmod{p^{s+1}}\ \forall s \geq 0$$

Так как ε и ξ — обратимые элементы кольца, по предыдущей теореме $y_s \not\equiv 0 \pmod p$, $z_s \not\equiv 0 \pmod p$. Подставим в предыдущее сравнения $s = m$:

$$p^m y_m \equiv p^k z_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}} \Rightarrow k \leq m$$

Так как мы можем проделать то же самое абсолютно симметрично для k, мы также имеем $k \geq m$, а значит $k = m$. То есть, мы получили, что $y_{m+s} \equiv z_{m+s} \pmod{p^{s+1}}$, а так как $y_{s+1} \equiv y_s \pmod{p^{s+1}}$, $z_{s+1} \equiv z_s \pmod{p^{s+1}}$, мы имеем $z_s \equiv y_s \pmod{p^{s+1}}\ \forall s \geq 0 \Rightarrow \varepsilon = \xi$. □

Corollary 4. $\mathbb{Z}_p$ *— область целостности.*

Доказательство. Упражнение в листочке. □

Теперь ясно, что число m в представлении $\alpha = p^m \varepsilon$ — p-адический показатель α ($\upsilon_p(\alpha)$).
В терминах p-адического показателя легко вырадать свойства делимости p-адических чисел.

Corollary 5. *Целое p-адическое число α делится на целое p-адическое число β тогда и только тогда, когда $\upsilon_p(\alpha) \geq \upsilon(\beta)$.*

Резюмируя всё это, мы получили, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ всего один (с точностью до ассоциированности) простой элемент — число p, а все остальные (отличные от нуля) — его степени, домноженные на обратимые.

2.2 Локализация и поле частных кольца.

Вообще, эта тема совершенно никак не относится к программе курса, но, прочитать всё равно надо.
Идея: уметь обращать набор элементов кольца *универсальным* образом.

Remark 7. Отметим, что обратимый элемент не может являться делителем нуля, поэтому, если мы хотим обращать делители нуля, все элементы, которые в произведении с ним дают 0 должны перейти в 0. Кроме того, если два элемента обратимы, то их произведение обратимо. Кроме того, если мы добавим в множество, которое хотим обращать единицу, то ничего не изменится, так как умножение на единицу ничего не меняет.

Таким образом, будем заниматься обращением множеств, замкнуты относительно умножения и содержат единицу (будем называть такие множества мультипликативными).

Тут можно рассказать, с чего бы это называется локализацией, но как-то лень, если время останется, расскажу.

Definition 6. *Пусть S — мультипликативное подмножество кольца R. Локализацией кольца R в S называется кольцо $S^{-1}R$ вместе с локализационным гомоморфизмом $\lambda_s\colon R \to S^{-1}R$, удовлетворяющее свойствам*

1. *$\forall s \in S$ $\lambda_s(s)$ обратим в $S^{-1}R$.*
2. *Для любого гомоморфизма $\varphi\colon R \to A$, при котором $\varphi(s) \in A^*$ для всех S существует единственный гомоморфизм $\psi\colon S^{-1}R \to A$ такой, что $\psi \circ \lambda_s = \varphi$. Иными словами, коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\lambda_s"'] & & A \\ & S^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Как и всегда, определение объекта через универсальное свойство ничего не говорит о существовании объекта, поэтому сейчас мы будем больно и мучительно строить локализацию.

Построение локализации:

Определим отношение $\sim$ на множестве $R \times S$ по правилу

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff ss_2r_1 = ss_1r_2$$

Remark 8. Здесь мы домножаем на s как раз за тем, чтоб делители нуля ушли в ноль.

Statement 1. $\sim$ *— отношение эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность очевидны.
Самое неприятное — транзитивность.
Пусть $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ и $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$, то есть

$$sr_1s_2 = sr_2s_1, \quad s'r_2s_3 = s'r_3s_2, \; s, s' \in S$$

Домножим первое равенство $s's_3$, а второе ss_1, получим

$$sr_1s_2 = sr_2s_1 \to s's_3sr_1s_2 = s's_3sr_2s_1, \qquad s'r_2s_3 = s'r_3s_2 \to ss_1s'r_2s_3 = ss_1s'r_3s_2$$

Остается заметить, что

$$ss's_2 \in S \Rightarrow (r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$$

то есть, транзитивность доказана. ☐

Теперь, положим $S^{-1}R = R \times S/\sim$. Класс эквивалентности, содержащий представитель (r, s) будем обозначать $\frac{r}{s}$.
Определим локализационный гомоморфизм $\lambda_s \colon R \to S^{-1}R$ формулой $\lambda_S(r) = \frac{r}{1}$.

Теперь, научимся складывать дроби.

Theorem 4. *Пусть S — мультипликативное подмножество кольца R. Определим на $S^{-1}R$ операции следующим образом*

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_2 s_2}, \quad \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{s_1 r_2 + s_2 r_1}{s_1 s_2}$$

Тогда $S^{-1}R$ — локализация R в мультипликативном подмножестве S с локализицонном гомоморфизмом λ_s (как написано выше).

Доказательство. Докажем сначала, что наше определение сложения и умножения не зависит от выбора представителя.
Пусть выплняются равенства

$$\frac{r_1'}{s_1'} = \frac{r_1}{s_1} \leftrightarrow s r_1 s_1' = s r_1' s_1, \quad \frac{r_2'}{s_2'} = \frac{r_2}{s_2} \leftrightarrow s' r_2 s_2' = s' r_2' s_2$$

Перемножим последние равенства

$$s s' r_1 s_1' r_2 s_2' = s s' r_1' s_1 r_2' s_2$$

Отсюда имеем

$$\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} = \frac{r_1' r_2'}{s_1' s_2'}$$

Далее, будет некоторая боль, а именно, надо доказать

$$\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} = \frac{r_1' s_2' + r_2' s_1'}{s_1' s_2'}$$

Если Вы немного помедитируете на формулы ниже, станет понятно, почему это так:

$$s s' (r_1 s_2 + r_2 s_1) s_1' s_2' = s s' (e_1 s_2 s_1' s_2' + r_2 s_1 s_1' s_2') = s s' (r_1' s_2 s_1 s_2' + r_2' s_1 s_2' s_2) = s s' (r_1' s_2' + r_2' s_1') s_1 s_2$$

Вообще, честно говоря, также нужно доказывать ассоциативность сложения, коммутативность и дистрибутивность. Давайте непосредственно проврим ассоциативность сложения

$$\left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right) + \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} + \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + r_2 s_1 s_3 + r_3 s_1 s_2}{s_1 s_2 s_3}$$

$$\frac{r_1}{s_1} + \left(\frac{r_2}{s_2} + \frac{r_3}{s_3}\right) = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2 s_3 + r_3 s_2}{s_2 s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + r_2 s_3 s_1 + r_3 s_2 s_1}{s_1 s_2 s_3}$$

Нейтральным элементом по сложению будет $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$, обратным по сложению к $\frac{r}{s}$ — $-\frac{r}{s}$. Нейтральным элементом по умножению —$\frac{1}{1} = \frac{s}{s}$. Проверим свочтва локализации:

$$\lambda_s(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1$$

то есть, первое свойство выполнено.

Пусть $\varphi\colon R \to A$ — такой гомоморфизм колец, что $\varphi(s) \in A^* \ \forall s \in S$. Определим отображение $\psi\colon S^{-1}R \to A$ равенством $\psi(\frac{r}{s}) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$.

Если $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$, то по определению

$$\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow r's = rs',\ s'' \in S \Rightarrow \varphi(s'')\varphi(r')\varphi(s) = \varphi(s'')\varphi(r)\varphi(s')$$

Домножим на $\varphi(s'')^{-1}\varphi(s')^{-1}\varphi(s')^{-1}$, получим

$$\varphi(r')\varphi(s')^{-1} = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$$

а значит, ψ определён корректно. Так как $\varphi(1) = 1$, имеем $\varphi = \psi \circ \lambda_S$. Ясно, что ψ — гомоморфизм.

Равенство $\varphi = \psi \circ \lambda_S$ однозначно задаёт $\psi(\frac{r}{1}) = \varphi(r)$. Так как ψ должен быть гомоморфизмом,

$$\varphi(r) = \psi(\frac{r}{1}) = \psi(\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{1}) = \psi(\frac{r}{s}) \cdot \varphi(s)$$

Так как по условию $\varphi(s) \in A^*$, имеем $\psi(\frac{r}{s}) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$, что завершает доказательство.

□

Примеры локализации:

1. Для $s \in R$ положим $\langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Локализация $\langle s \rangle^{-1}R$ обозначается через R_s и называется главной локализацией в элементе s (по аналогии с главным идеалом).
2. Если P — простой идеал кольца R, то $R \setminus P$ является мультипликативным подмножеством. В этом случае локализация $R_P = (R \setminus P)^{-1}R$ называется локализацией R в простом идеале P. R_P является локальным кольцом (т.е. кольцом с единственным максимальным идеалом).
3. S — множество всех элементов R, не являющийся делителями нуля. Тогда $S^{-1}R$ называется полным кольцом частных кольца R. Это максимальная локализация, для которой гомоморфизм локализации инъективен.

Если R — область целостности, то $\{0\}$ — простой идеал. Локализация в этом идеале, очевидно, будет полем, которое называется полем частных кольца R.

Иными словами, поле частных — это полное кольцо частных области целостности. Локализационный гомоморфизм — это универсальное вложение в следующем смысле:

Lemma 2. *Пусть R — область целостности, а $S = R\{0\}$. Тогда $F = S^{-1}R$ является полем, а гомоморфизм локализации $\lambda_S\colon R \to F$ инъективен, а λ_S удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого поля K и мономорфизма $R \to K$ существует единственный мономорфизм $\psi\colon F \to K$, что $\varphi = \psi \circ \lambda_s$.*

2.3 Поле p-адических чисел, как поле частных кольца $\mathbb{Z}_p$.

Как мы уже выяснили, кольцо $\mathbb{Z}_p$ — область целостности, его можно вложить в поле частных, используя конструкцию локализации.
В нашем случае это сводится к рассмотрению дробей α/p^k, где $\alpha \in \mathbb{Z}_p,\ k \geq 0$.

Definition 7. *Дробь вида α/p^k, где $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, а $k \geq 0$ называется дробным p-адмическим числом или просто p-адическим числом.*

Remark 9. Две дроби α/p^k и β/p^m определяют одно и то же p-адическое число, если $\alpha p^m = \beta p^k$.

Definition 8. *Полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ называется поле частных кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$.*

Theorem 5. *Всякое p-адическое число $\xi \neq 0$ единственным образом представляется в виде*

$$\xi = p^m \cdot \varepsilon, \quad m \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$$

Доказательство. Пусть $\xi = \alpha/p^k,\ \alpha \in \mathbb{Z}_p$. По теореме 3 α можно представить в виде $p^\ell \varepsilon,\ \ell \geq 0, \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$. Тогда $\xi = p^m \varepsilon, m = \ell - k$.
Единственность вытеакет из единственности представления для 3. □

2.4 Сходимость в поле p-адических чисел

Мы уже много раз говорили об аналогии между p-адическими числами и вещественными. В случае вещественных, они определяются последовательностями рациональных и являются пределами этих последоватлеьностей.

Неформально мы уже обсуждали, почему это так в случае p-адических чисел, давайте теперь поймем, почему это так формально.

Теперь, после того как мы доопределили p-адический показатель на $\mathbb{Q}_p$, мы можем вводить на $\mathbb{Q}_p$ (заметьте, уже не на $\mathbb{Q}$) знакомое нам p-адическое нормирование (и, соответственно, p-адическую метрику).

Definition 9. *Последовательность p-адических чисел $\{\xi_n\}$ называется сходящейся к p-адическому числу ξ если*

$$\lim_{n\to\infty} \upsilon_p(\xi_n - \xi) = \infty$$

Remark 10. Ясно, что эквивалентно сходимость можно определять, как

$$\lim_{n\to\infty} \{\xi_n\} = \xi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$$

то есть, как и обычно, начиная с некоторого довольно большого номера, p-адические числа становятся сколь угодно близки к пределу.

Рассмотрим сначала для удобства некоторые свойства p-адического показателя:

1. $\upsilon_p(\alpha\beta) = \upsilon_p(\alpha) + \upsilon_p(\beta)$.
2. $\upsilon_p(\alpha + \beta) \geq \min(\upsilon_p(\alpha), \upsilon_p(\beta))$.
3. $\upsilon_p(\alpha + \beta) = \min(\upsilon_p(\alpha), \upsilon_p(\beta)),\ \alpha \neq \beta$.

Для поля $\mathbb{Q}_p$ справедливы все стандартные свойства пределов. Докажем, например, что при $\{\xi_n\} \to \xi,\ \xi \in \mathbb{Z}_p^*$ выполняется $\{1/\xi_n\} \to 1/\xi_n$.

Сначала отметим, что, начиная с некоторого места $\upsilon_p(\xi_n - \xi) > \upsilon_p(\xi)$, откуда $\upsilon_p(\xi_n) = \min(\upsilon_p(\xi_n - \xi), \upsilon_p(\xi)) = \upsilon_p(\xi)\ \Rightarrow \upsilon_p(\xi_n) \neq \infty \Rightarrow \xi_n \neq 0$, то есть, на него в самом деле можно делить.

Далее мы имеем

$$\upsilon_p\left(\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{\xi}\right) = \upsilon_p(\xi - \xi_n) - \upsilon_p(\xi_n) - \upsilon_p(\xi) = \upsilon_p(\xi_n - \xi) - 2\upsilon_p(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Теперь, для доказательства факта, который мы хотели формализовать, нам нужно понять, как вводятся сравнения на кольце целых p-адическиъ чисел. Сравнения в кольце целых p-адиечских чисел определяются также, как и в кольце целых чисел, то есть $\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma} \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \vdots \gamma$.

Если $\gamma = p^n \varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$, то всякое сравнение по модулю γ равносильно сравнению по модулю p_n, а значит, достаточно рассматривать только такие (в этом случае).

Theorem 6. *Всякое целое p-адическое число сравнимо с целым рациональным числом по модулю p^n. Два целых рациональных числа тогда и только тогда сравнимы по модулю p^n в кольце $\mathbb{Z}_p^*$, когда они сравнимы по этому модулю в кольце $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что если α — целое p-адическое число, определяемое последовательностью $\{x_n\}$, то

$$\alpha \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$$

Как целое p-адическое число, x_n определяется последовательностью $\{x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots\}$. Тогда последовательность, определяющая целое p-адическое число $\alpha - x_n$ выглядит следующим образом

$$\{x_0 - x_{n-1},\ x_1 - x_{n-1}, \ldots, 0, x_n - x_{n-1}, \ldots\}$$

Из того, что всякое целое p-адическое число α представимо в виде

$$\alpha = p^k \cdot \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$$

следует, что целое p-адическое число α, определяемое последовательностью $\{y_n\}$ делится на p^ℓ тогда и только тогда, когда $x_n \equiv 0 \pmod{p^{n+1}} \forall n = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда, сравнение $\alpha \equiv x_n \pmod{p^n}$ равносильно сравнениям

$$x_k - x_{n-1} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

а эти сравнения выполены по определению p-адиечских чисел.
Докажем теперь, что для двух целых рациональных p-адических чисел x и y сравнимость по модулю p^n в кольце $\mathbb{Z}_p$ равносильна сравнимости по модулю p^n в кольце $\mathbb{Z}$.
Положим $x - y = p^m a,\ a \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда, в кольце $\mathbb{Z}$ сравнение $x \equiv y \pmod{p^n}$ равносильно условию $n \leq m$. С другой стороны, так как $a \not\equiv - \pmod{p}$, соответсвующее ему целое p-адическое число обратимо в $\mathbb{Z}_p^*$, а значит, для числа $x - y$ есть представление в виде $p^m \alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, а значит, $\upsilon_p(x-y) = m$, то есть, $n \leq \upsilon_p(x-y)$, а в $\mathbb{Z}_p$ это равносильно сравнению $x \equiv y \pmod{p^n}$, так как $\upsilon_p(p^n) = n$. □

Theorem 7. *Если целое p-адическое число α определяется последовательностью $\{x_n\}$, то эта последовательность сходится к α. Произвольное p-адическое число ξ является пределом последовательности рациональных чисел.*

Доказательство. Как мы понимаем из предыдущей теоремы, если $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ определяется последовательностью $\{x_n\}$, то $\alpha \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$, а это по определению влечёт $\upsilon_p(x_n - \alpha) \geq n + 1$. Значит, $\upsilon_p(x_n - \alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, а это по определению означает, что $\{x_n\}$ стремится к α.

Теперь рассмотрим дробное p-адическое число $\xi = \alpha/p^k$.

$$\upsilon_p\left(\frac{x_n}{p^k} - \xi)\right) = \upsilon_p\left(\frac{x_n - \alpha}{p^k}\right) = \upsilon_p(x_n - \alpha) - k \xrightarrow[n\to]{} \infty$$

а значит, $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \{y_n\}$, где $\{y_n\} = \{x_n/p^k\}$.

□

Definition 10. *Последовательность p-адических чисел $\{\xi_n\}$ называется ограниченной, если все значения $\|\xi\|_n$ ограничены сверху.*

Theorem 8. ***(Лемма Больцано-Вейерштрасса для поля p-адических чисел)***
Из всякой ограниченной последовательности p-адических чисел можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Наверное, не успеваю рассказать. Можно прочитать в книге Шафаревича (ссылку). □

Оказывается (хоть это и не особенно неожиданно), для p-адических чисел справедлив критерий Коши, то есть

Theorem 9. ***(Критерий Коши)*** *Пусть нам дана последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \mathbb{Q}_p$. Тогда она сходится тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n,m\to\infty} \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

Доказательство. Заметим, что из условия

$$\lim_{n,m\to\infty} \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

следует, что $\exists n_0 \colon \upsilon_p(\xi_m - \xi_{n_0}) \geq 0 \ \forall m \geq n_0$. Но тогда, по свойству $\upsilon_p(\alpha+\beta) \geq \min(\upsilon_p(\alpha), \upsilon_p(\beta))$. мы имеем

$$\upsilon_p(\xi_m) = \upsilon_p((\xi_m - \xi_{m_0}) + \xi_{n_0}) \geq \min(0, \upsilon_p(\xi_{n_0}))$$

а отсюда следует ограниченность. Значит, по предыдущей теореме, из неё можно извлечь сходящуюся попоследовательность $\{\xi_{n_i}\}$ с пределом ξ. Значит, по определению сходимости $\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n, m \geq N \ \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) \geq M$ и $\upsilon_p(\xi_{n_i} - \xi) \geq M$ Тогда

$$\upsilon_p(\xi_m - \xi) \geq \min(\upsilon_p(\xi_m - \xi_{n_i}), \upsilon_p(\xi_{n_i} - \xi)) \geq M \ forall m \geq N$$

а значит $\lim\limits_{m\to\infty} \upsilon_p(\xi_m - \xi) = \infty$, то есть, последователньость $\{\xi_m\}$ сходящаяся. □

В поле p-адических чисел этому признаку можно придать и более сильную форму. А именно, если для последоватльности $\{\xi_n\}$ выполенено

$$\lim_{m,n\to\infty} \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) = \infty$$

то мы имеем и

$$\lim_{n\to\infty} \upsilon_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$$

Оказывается, что верно и обратное следствие. Действительно, если $\forall n \geq N \ \upsilon_p(\xi_{n+1} - \xi_n) \geq M$, то в силу того, что $\upsilon_p(\alpha+\beta) \geq \min(\upsilon_p(\alpha), \upsilon_p(\beta))$ из равенства

$$\xi_m - \xi_n = \sum_{i-n}^{m-1} (\xi_{i+1} - \xi_i), \quad m > n \geq N$$

вытекает и оценка

$$\upsilon_p(\xi_m - \xi_n) \geq \min_{i\in\{n,\ldots,m-1\}} \upsilon_p(\xi_{i+1} - \xi_i) \geq M \Rightarrow \upsilon_p(\xi_m - \xi_n) \to \infty$$

Theorem 10. *Для сходимости последовательности p-адических чисел $\{\xi_n\}$ необходимо и достаточно, чтоб $\lim\limits_{n\to\infty} \upsilon_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$.*

Ясно, что благодаря теории пределов мы можем определить секвенциальную непрерывность (непрерывность по Гейне) для функций p-адического аргумента.
К тому же, ясны стандартные арифметические свойства непрерывных функций, из которых следует, например, что многочлен непрерывен.

Definition 11. *Если последовательность частичных сумм* $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i$ *ряда*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

с p-адическими членами сходится к p-адическому числу α*, то будем говорить, что ряд сходится и его сумма равна* α*.*

Из теоремы 10 можно легко получить критерий сходимости рядов из p-адических чисел.

Theorem 11. ***(Критерий сходимости рядов с*** p***-адическими членами)***
Для сходимости ряда $\sum \alpha_n$ *с p-адическими членами необходимо и достаточно, чтоб* $\|\alpha_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *(или, что равносильно,* $\upsilon_p(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$*).*

Доказательство. Действительно, мы имеем цепочку

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \text{ — сходится} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|s_{n+1} - s_n\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \right\|_p = \lim_{n\to\infty} \|\alpha_{n+1}\|_p = 0$$

□

Ясно, что как и в случае вещественного анализа, сходящиеся p-адические ряды можно складывать, умножать на константу. Также справедлива следующая теорема:

Theorem 12. *При любой перестановке членов сходящегося p-адического ряда его сходимость не нарушается и сумма не меняется.*

Доказательство. Упражнение в листочке. □

Как мы знаем, в курсе вещественного (и комплексного) анализа это свойство характеризует абсолютно сходящиеся ряды. То есть, все сходящиеся p-адические ряды являются и абсолютно сходящимися, а значит, их можно и перемножать:

написать сюда произведение рядов

Теперь уже ясно, что если целое p-адическое число α определяется канонической последовательностью $\{x_n\}$, где

$$x_0 = a_0,\ x_1 = a_0 + a_1 p,\ x_2 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \ldots,\ x_n = \sum_{k=1}^{n} a_n p^n$$

то, так как мы доказали, что эта последовательность сходится к α, а значит

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k p^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k,\ 0 \le a_i < p$$

Так как различные канонические последоватлеьности определяют различные p-адические числа, такое представление единственно для каждого числа. Представление целых p-адических чисел рядами напоминает запись вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей, то есть

$$\overline{0,a_1\dots a_n\dots} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{10}\right)^k,\ 0 \le a_i < 10$$

Рассмотрим теперь ряд

$$b_0 + b_1p + b_2p^2 + \ldots + b_np^n + \ldots,\ b_0 \in \mathbb{Z}$$

то он будет сходящимся, так как $\upsilon_p(b_np^n) \ge n$, и его сумма будет равна некоторому α.

Для того, что бы для этого α получить каноническое представление, достаточно заменить все b_i на $b_i \mod p$, относя неполное частное на каждом шаге к следующему члену.

Это замечание актуально для действий в $\mathbb{Z}_p$, так как при сложении, вычитании и перемножении рядов вида $\sum a_kp^k,\ 0 \le a_i < p$, мы получаем ряды вида $\sum b_kp^k,\ b_k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что в этом представлении, действия с p-адическими числами полностью аналогичны действиям с вещественными числами в десятичной записи.

Из теоремы (ссылка) следует, что целое p-адическое число, представленное в виде ряда обратимо тогда и только тогда, когда a_0. Вместе с теоремой (`вставить ссыоку`) это даёт следующую теорему:

Theorem 13. *Каждое отличное от нуля целое p-адическое число ξ однозначно записывается ввиде*

$$\xi = p^m(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots + a_np^n + \ldots)$$

где $m = \upsilon_p(\xi),\ 1 \le a_0 \le p-1,\ 0 \le a_n \le p-1\ \forall n \ge 2.$

Заметим, что эта запись соответсвует записи последовательности цифр, бесконечной влево, а именно

$$\alpha = \begin{cases} \ldots a_{m+1}a_m \overbrace{\underset{(p)}{00\ldots0}}^{m-1},\ m \ge 0 \\ \ldots a_1a_0a_{-1}\ldots a_{m(p)}, m < 0 \end{cases}$$

p-адические числа, как проективный предел:

Разобранное нами построение кольца целых p-адических чисел соотвествует более общей алгебраической конструкции. А именно, мы на пальцах разобрали конструкцию проективного предела обратного спектра топологических пространств, групп, колец (не важно чего, в общем).

Пусть I — направленное множество $\le$ и каждому элементу $i \in I$ сопоставлена какая-нибудь алгебраическая система X_i (все алгбраические структуры одного типа, например, группы, кольца и так далее), а каждой паре $(i,j) \in I,\ i \le j$ сопоставлен морфизм $f_{ij}\colon X_j \to X_i$, причем f_{ii} – тождественный морфизм, а $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{ji}\ \forall i \le j \le k$ из I. Тогда множество-носитель проективного предела направленного семейства — это фактормножество прямого произведения X_i по транзитивному замыканию отношения эквивалентности, говорящего, что каждый элемент эквивалентен «меньшим» элементам, то есть

$$\varprojlim X_i = \left\{(x_i) \in \prod X_i \mid x_i = f_{ij}(x_j)\ \forall i \le j\right\}$$

Так вот, из нашего построения ясно, что кольцо $\mathbb{Z}_p$ является проективным пределом последовательности $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ с естественным отображением $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ «взятие остатка».

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

2.5 Пополнение метрических пространств.

Definition 12. *Пусть (X, d_X) — метрическое пространство, $\mathcal{F}(X)$ — множество всех ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$. Тогда введём расстояние d_∞ между функциями $f, g \in \mathcal{F}(X)$:*

$$d_\infty(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in X\}$$

Заметим, что определение корректно, так как функции ограничены.

Lemma 3. $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$ *— метрическое пространство.*

Доказательство. Проверим три аксиомы метрики:

1. Пусть $f = g$. Тогда $|f(x) - g(x)| = 0$ для всякого $x \in X$, так что $d_\infty(f, g) = 0$. Если же наоборот $d_\infty(f, g) = 0$, то $0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup = 0$, а значит $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$, что и означает $f \equiv g$.
2. Так как $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, то и $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$.
3. Рассмотрим три ограниченные функции $f, g, h \in \mathcal{F}(X)$, и покажем, что

$$d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) \geq d_\infty(f, h)$$

Мы знаем, что:

$$\forall x \in X : |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \geq |f(x) - h(x)|$$

в силу неравенства треугольника для стандартной метрики на $\mathbb{R}$. Для всякого $\varepsilon > 0$ мы можем взять x_0 такой, что $|f(x_0) - h(x_0)| \geq \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon$. Получаем, что

$$d_\infty(f, h) - \varepsilon = \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in X\} - \varepsilon \leq |f(x_0) - h(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - h(x_0)| \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$$

а раз это верно для любого $\varepsilon > 0$, то искомое неравенство доказано.

□

Lemma 4. $\mathcal{F}(X)$ *— полно.*

Доказательство. Пусть f_n — фундаментальная последовательность функций. Тогда $\forall x_0 \in X$: $\{f_n(x_0)\}$ — также фундаментальная последовательность, так как $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|, x \in X\}$. Следовательно,

$$\forall x_0 \in X : \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$$

и сходимость по всем точкам равномерна, так как не зависит от выбора точки x_0. Иными словами,

$$\exists f(x) : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

где $f(x_0)$ определяется как предел $\lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$. Так что $f(x)$ — функция, являющаяся пределом искомой последовательности функций. □

Definition 13. *Пусть (X, d_X) — метрическое пространство, $\mathcal{F}(X)$ — множество ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$. Построим изометрическое вложение $k : X \to \mathcal{F}(X)$ следующим образом:*

1. *Если X — ограничено, то определим $k(x) = d_x$, где*

$$\forall y \in X : d_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} d_X(x, y)$$

Функция d_x ограничена, так как X ограничено. Заметим также, что

$$d_\infty(d_x, d_y) = \sup_z |d_x(z) - d_y(z)| = \sup_z \big(d_X(x, z) - d_X(z, y)\big) \leq d_X(x, y)$$

однако равенство достигается при $z = y$, так что $d_\infty(d_x, d_y) = d_X(x, y)$, а значит вложение изометрическое.

2. *Пусть X, возможно, не ограничено. Тогда определим $k(x) = d_x - d_{x_0}$ для некоторой фиксированной точки $x_0 \in X$, где*

$$\forall y \in X : \big(k(x)\big)(y) \overset{\text{def}}{=} d_x(y) - d_{x_0}(y) = d_X(x, y) - d_X(y, x_0)$$

что есть ограниченная функция, так как $\forall y \in X : d_X(x, y) - d_X(y, x_0) \leq d_X(x, x_0)$.
Заметим, что это аналогичным образом будет изометрическим вложением:

$$d_\infty(d_x - d_{x_0}, d_y - d_{x_0}) = \sup_z |d_x(z) - d_{x_0}(z) - d_y(z) + d_{x_0}(z)| =$$

$$= \sup_z \big(d_X(x, z) - d_X(z, y)\big) \leq d_X(x, y)$$

где равенство достигается при $z = y$.

Любое метрическое пространство (X, d_X) имеет пополнение $(\overline{X}, d_{\overline{X}})$, то есть такое метрическое пространство $\overline{X}$, что выполнено:

1. $X \subseteq \overline{X}$
2. X — всюдю плотно в $\overline{X}$
3. $d_{\overline{X}}|_X = d_X$, то есть вложение из X в $\overline{X}$ является изометрическим
4. $(\overline{X}, d_{\overline{X}})$ — полно.

Доказательство. Возьмём изометрическое вложение Куратовского $k : X \to \mathcal{F}(X)$, и возьмём его замыкание в топологическом пространстве $\mathcal{F}(X)$ с топологией, индуцированной метрикой d_∞ — назовём это замыкание $\overline{X}$. Заметим, что

1. $X \subseteq \overline{X}$ естественным образом
2. X всюду плотно в $\overline{X}$, так как любое множество всюду плотно в своём замыкании
3. Вложение X в $\overline{X}$ изометрическое, так как оно изометрическое и во всё пространство $\mathcal{F}(x)$
4. $\overline{X}$ полно как замкнутое подмножество полного пространства.

□

Remark 11. Пополнение метрического пространства **единственно** с точностью до изометрии.

Remark 12. Выражение $X \subseteq \overline{X}$ тоже подразумевается с точностью до изометрии.

2.6 Пополнение нормированного поля.

Теперь мы умеем пополнять метрические пространства, но нам никто не гарантирует, что при пополнении поля по норме получится поле.

Definition 14. *Пополнением нормированного поля $(F_0, \|\cdot\|_0)$ называется нормированное поле $(F, \|\cdot\|)$, уловлетворяющее следующим свойствам*

1. *Существует вложение $i\colon F_0 \hookrightarrow F$, сохраняющее норму (изометрическое), то есть $\|i(x)\| = \|x\|_0$.*
2. *$(F, \|\cdot\|)$ полно, как метрическое пространство.*
3. *$i(F_0)$ всюду плотно в F, то есть, $\forall x, \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in F_0\colon \|x - i(x_0)\| < \varepsilon$.*

Example 4. *Из курса анализа ясно, что $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ — пополнение $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.*

Theorem 14. *Для любого нормированного поля существует пополнение.*

Доказательство. Будем рассматривать случай нормы с неравенством треугольника.
Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех последовательностей Коши $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $(F_0, \|\cdot\|_0)$.
На $\mathfrak{A}$ можно естествнным образом определить операции сложения и умножения (поточечно), а также ввести норму $\|\cdot\|$, как $\|\{x_n\}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_0$.
Это определение корректно, так как предел всегда существует в силу неравенства треугольника и того, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши

$$|\|x_n\|_0 - \|x_m\|_0| \leq \|x_n - x_m\|_0$$

Ясно, что остальные свойства нормы также выполняются.

Введём на $\mathfrak{A}$ отношение эквивалентности $\sim$:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_0 = 0$$

Нетрудно заметить, что это отношение эквивалентности «уважает» арифметические действия и норму, то есть

1. $\{x_n\} \sim \{u_n\},\ \{y_n\} \sim \{v_n\} \Rightarrow \{x_n + y_n\} \sim \{u_n + v_n\},\ \{x_n y_n\} \sim \{u_n v_n\}$.
2. $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Rightarrow \|\{x_n\}\| = \|\{y_n\}\|$.

В качестве поля F возьмем фактормножество $\mathfrak{A}/\sim$. Приведенные выше свойства естественно индуцируют арифметические операции и норму с A на F:

- $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x_n + y_n\}]$.
- $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}]$.
- $\|[\{x_n\}]\| = \|\{x_n\}\|$.

Аксиомы кольца вполне очевидны, проверим существование обратного по умножению элемента. Если $[\{x_n\}] \neq 0$, то $\lim \|x_n\|_0 > 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0\ \|x_n\|_0 > \delta > 0$ для некоторого δ.
Тогда в качестве $[\{x_n\}]^{-1}$ возьмем класс $[\{y_n\}]$, где

$$y_n = \begin{cases} 0, & n < n_0 \\ \frac{1}{x_n}, & n \geq n_0 \end{cases}$$

Осталось проверить, что мы получили пополнение.
В качестве вложения возьмем $i(x) = [(x, x, \ldots)]$. Ясно, что $i(F_0)$ плотно в F, так как, если $X = [\{x_n\}] \in F$, то $i(x_n) \to X$ в пространстве $(F, \|\cdot\|)$.
Теперь проверим полноту. Пусть $X^{(n)} = [(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)] \in F$ — последовательность Коши. Возьмем такую последовательность $k_n \in \mathbb{N}$, что

$$\sup_{k,\ell \geq k_n} \|x_k^{(n)} = x_\ell^{(n)}\|_0 < \frac{1}{n}$$

Покажем, что в качестве предела можно взять $X = [\{x_{k_n}^{(n)}\}]$. Пусть $N \geq k_n,\ M \geq k_m,\ K \geq \max\{k_n, k_m\}$.

$$\|x_N^{(n)} - x_M^{(m)}\|_0 \leq \|x_N^{(n)} - x_K^{(n)}\|_0 + \|x_K^{(n)} - x_K^{(m)}\|_0 \leq \frac{1}{n} + \|x_K^{(n)} - x_K^{(m)}\|_0 + \frac{1}{m}$$

Устремим K к бесконечности и получим

$$\|x_N^{(n)} - x_M^{(m)}\|_0 \leq \|X^{(n)} - X^{(m)}\| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

Положим $N = k_n,\ M = k_m$ и получим, что $x_{k_n}^{(n)}$ — последовательность Коши, а её класс эквивалентности — искомый предел. $\square$

Далее отождествим $i(F_0)$ с F_0 и будем считать, что $F \subseteq F$.

В неархимедовом случае можно сказать даже несколько больше.
Пусть $(F, \|\cdot\|)$ — неархимедово нормированное поле. Если $\{x_n\} \to x,\ x \in F^*$, то для достаточно больших n $\|x_n\| = \|x\|$.

Lemma 5. *Пусть* $(F, \|\cdot\|)$ *— пополнение неархимедова поля* $(F_0, \|\cdot\|_0)$*. Тогда*

1. $(F, \|\cdot\|)$ *неархимедово.*
2. $\mathrm{Im}(\|\cdot\|) = \mathrm{Im}(\|\cdot\|_0)$.