

Алгебраическая геометрия и теория чисел.

Вопросы к письменному экзамену.

М. И. Магин

1. Нормированные поля: основные определения. Теорема о связи неравенства треугольника и ультраметрического неравенства.
2. Построение кольца p -адических чисел: определение, арифметические операции в кольце, канонический способ задания целого p -адического числа.
3. Мультипликативная группа кольца \mathbb{Z}_p .
4. Теорема о представлении целого p -адического числа в виде $p^\ell \cdot \varepsilon$.
5. Локализация кольца в мультипликативном подмножестве: определение, универсальное свойство, начало построения (утверждение про отношение эквивалентности).
6. Локализация кольца в мультипликативном подмножестве: конец построения — действия в локализации, корректность свойств арифметических операций, универсальное свойство.
7. Поле \mathbb{Q}_p как поле частных \mathbb{Z}_p . Представление p -адического числа в виде $p^\ell \cdot \varepsilon$.
8. Сходимость в поле p -адических чисел, теоремы о действиях с пределами (доказательство на примере одного свойства на выбор).
9. Сравнения по модулю в кольце целых p -адических чисел. Теорема о сравнениях в кольце \mathbb{Z}_p .
10. p -адическое число как предел определяющей его последовательности.
11. Лемма Больцано-Вейерштрасса (без доказательства), критерий Коши в поле p -адических чисел.
12. Теорема о том, что сходимость $\{\xi_n\}$ равносильна тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$.
13. Ряды с p -адическими членами. Критерий сходимости рядов с p -адическими членами.
14. p -адическое число, как сумма ряда. Аналогия между представлением вещественных чисел в десятичной записи и p -адическими числами.
15. Метод касательных Ньютона.
16. Лемма Гензеля.
17. Следствия из леммы Гензеля и переформулировки леммы Гензеля.
18. Проективная плоскость и различные модели. Склейка многогранника, факторпространство D^2 или S^2 , прямые на проективной плоскости.
19. Проективная плоскость как евклидова плоскость с бесконечно удаленными точками. Прямые в такой модели. Бесконечно удалённая прямая.
20. Определение проективных пространств, свойства, однородные координаты.

21. Проективное пополнение \mathbb{R}^n .

22. Проективные преобразования. Группа преобразований Мёбиуса проективной прямой \mathbb{RP}^1 .

23. Квадратичные функции и квадрики. Рациональные параметризации. Вывод формул для Пифагоровых троек.

24. Билинейные формы и их матрицы. Квадратичные формы и соответствующие им билинейные формы. Теорема о диагонализации (без доказательства).

25. Сигнатура квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм (без доказательства). Классификация квадрик на прямой, проективизация.

26. Квадрики на плоскости: эллипс, парабола, гипербола (определение, принадлежность к квадрикам (можно либо для эллипса, либо для гиперболы)), проективизация.

27. Проективная классификация квадрик.

28. Аффинная классификация квадрик на плоскости.

29. Принцип Минковского-Хассе для квадратичных форм (формулировка и основные моменты доказательства).

30. Алгебраические кривые. Эллиптические кривые. Группа точек на эллиптической кривой (корректность, всего кроме ассоциативности).

31. Ассоциативность сложения точек на эллиптической кривой.