СРВМ • занятие 3 • 13 февраля

10. Докажите утверждение, обратное факту 1: если набор $e_1, \ldots, e_n$ таков, что

$$\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2$$

для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то этот набор ортонормированный.

Разложение вектора по ортонормированному базису. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства V. Тогда

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i, \quad \|v\|^2 = v = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, e_i \rangle|^2, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle.$$

11. Разложите вектор $(1, 2, 4, 7) \in \mathbb{R}^4$ по ортонормированному базису

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Ортогонализационный процесс Грамма-Шмидта

Факт 2. Пусть V — евклидово (или унитарное) пространство над полем $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$) со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — набор векторов. Построим последовательность векторов $u_1, \ldots, u_k$ следующим образом:

$$u_1 := v_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j, \qquad k = 2, \ldots, n.$$

Она обладает следующими свойствами:

(a) векторы $u_1, \ldots, u_n$ попарно ортогональны;
(b) как следствие, $u_1, \ldots, u_n$ линейно независимы,
(c) $\mathrm{span}(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$,
(d) если $v_k \in \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_{k-1})$, то $u_k = 0$.
(e) для каждого k вектор u_k ортогонален подпространству $\mathrm{span}(u_1, \ldots, u_{k-1})$.
(f) Если исходная система $v_1, \ldots, v_n$ была ортонормированной, то процесс ничего не меняет.

QR-разложение. Если столбцы матрицы A линейно независимы, то процесс Грама–Шмидта (над её словами) даёт разложение

$$A = QR,$$

где Q — матрица с ортонормированными столбцами, а R — верхнетреугольная матрица с положительными диагональными элементами. Если скалярное произведение было стандартным, то это условие означает, что $Q^T = Q^{-1}$.

Зачем нужно: посчитать определитель (т.к. $\det(Q) = 1$), численно решать системы линейных уравнений, МНК и т.д.

12. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки системы векторов евклидова (эрмитова) пространства. В пункте 4 напишите QR-разложение матрицы с такими столбцами.

(a) $\big((1, 2, 2, -1),\ (1, 1, -5, 3),\ (3, 2, 8, -7)\big)$,

(b) $\big((1,1,-1,-2),\ (5,8,-2,-3),\ (3,9,3,8)\big)$,

(c) $\big((2,1,3,-1),\ (7,4,3,-3),\ (1,1,-6,0),\ (5,7,7,8)\big)$,

Ортогональное дополнение

Определение 4. Пусть $U \subset V$ — подмножество пространства со скалярным произведением. Тогда его *ортогональное дополнение* $U^\perp$ состоит из векторов, ортогональных ему:

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0\ \forall u \in U\}.$$

13. Опишите ортогональные дополнения следующих множеств:
(a) $U = \{(2,3,5)\} \subset \mathbb{R}^3$, (b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ | 2x + 3y + 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,
(c) $U = \{(a,b,0,0,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$, (d) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонорм. базис V, $U = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_k)$.