Серия 30(а). Штурм и еще одна новая полезная идея.

1. а) Сумма положительных чисел x_i равна 1. Докажите, что $\frac{(1-x_1)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)}{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \geq (n-1)^n$.

б) Для чисел $x_1, \ldots, x_n \geq 1$ докажите, что $\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots x_n}}$ при $n \geq 2$.

2. 100 карандашей раскрасили в 7 цветов. Назовём пару карандашей *прекрасной*, если они разных цветов. Найдите наибольшее возможное количество прекрасных пар.

3. На стороне AC треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ADB = 2\angle ABD$. Точка E на отрезке BD выбрана так, что $DC = 2DE$. Оказалось, что $\angle AED = 90°$. Докажите, что из отрезков AD, BC и удвоенного отрезка BE можно составить треугольник.

4. Для положительных $x_1, \ldots, x_n$ с суммой 1 докажите

а) $\frac{x_1+1}{x_1} \cdot \frac{x_2+1}{x_2} \times \ldots \times \frac{x_n+1}{x_n} \geq (n+1)^n$,

б) $\frac{1+x_1}{1-x_1} \cdot \frac{1+x_2}{1-x_2} \times \ldots \times \frac{1+x_n}{1-x_n} \geq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.

5. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника.

а) Докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq 2$.

б) Докажите, что $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

6. Произведение положительных чисел x, y, z равно 2 и любые два из этих чисел отливаются не более чем в 2 раза. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$2x^2y + 2y^2z + 2z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2.$$

7. а) Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшей будет площадь правильного n-угольника.

б) Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим является периметр правильного n-угольника.