

И так как часто плывут корабли,  
на всех парусах по волнам спеша,  
физики “вектор” изобрели.  
Нечто бесплотное, как душа.

---

И. Бродский, “Письмо в бутылке”.

1. а)  $AM$  – медиана треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ .  
 б) Докажите с помощью векторов, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
2.  $M, N, P, Q$  – середины сторон  $AB, BC, CD$  и  $DE$  выпуклого пятиугольника  $ABCDE$ ;  $F$  – середина  $MP$ ,  $G$  – середина  $NQ$ . Докажите, что отрезок  $FG$  параллелен отрезку  $AE$  и имеет вчетверо меньшую длину.
3.  $A, B, C, D, E, F$  – произвольные точки. Докажите, что  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ .
4. Сумма четырех единичных векторов равна нулю. Докажите, что среди них найдутся два противоположных.
5. Докажите, что на ребрах тетраэдра нельзя расставить стрелки так, чтобы сумма образовавшихся векторов равнялась  $\vec{0}$ .
6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^5 + y^5 = 33. \end{cases}$$

7.  $z + \frac{1}{z} = 1$ . Найдите  $z^n + \frac{1}{z^n}$  при всех натуральных  $n$ .