

Серия 26. Давненько не было комбинаторики...

1. Дан правильный $m n$ -угольник. Среди его вершин m вершин покрашены красным, а n – синим (никакая вершина не покрашены дважды). Докажите, что некоторый отрезок с концами в красных точках равен некоторому отрезку с концами в синих точках.

2. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано действительное число так, что все бесконечные в обе стороны горизонтальные и вертикальные последовательности чисел периодические. Докажите, что найдется бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими периодами тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами.

3. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

4. Сумма 33 натуральных чисел, не превосходящих 33 равна 99. Докажите, что можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была равна 33.

5. Дан набор \mathbf{P} из 2026 различных простых чисел. Докажите, что можно выбрать несколько простых чисел из \mathbf{P} (можно одно, но не все) таким образом, что их произведение, уменьшенное на единицу, будет иметь простой делитель, не входящий в \mathbf{P} .

6. 100 мальчиков и 100 девочек стоят в две шеренги напротив друг друга. Каждый мальчик выбрал девочку (может случиться, что одну девочку выбрали несколько мальчиков) и направился к ней по кратчайшему пути. При этом их пути не пересеклись. Затем мальчики возвратились на свои места, и такие же действия проделали девочки, причем пути девочек тоже не пересеклись между собой. Докажите, что найдутся мальчик и девочка, выбравшие друг друга.

7. На плоскости дано сто одинаковых кругов, окружности которых имеют общую точку. Докажите, что можно выбрать пять из этих кругов, которые покрывают центры всех ста кругов. (Круг покрывает все точки внутри себя и на своей границе.)