Программа зачёта по геометрическим преобразованиям

Теория.

1. Преобразование плоскости. Примеры: тождественное, центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, параллельный перенос. Пример функции $f\colon \Pi \to \Pi$, не являющейся преобразованием плоскости.

2. Движения. Доказательство, что центральная и осевая симметрии, параллельный перенос, поворот — движения.

3. Композиция преобразований плоскости. Примеры. Пример преобразований плоскости $F, G\colon \Pi \to \Pi$, для которых $F \circ G \neq G \circ F$. Композиция движений — движение.

4. Преобразование подобия. Подобие переводит отрезки в отрезки.

5. Гомотетия с положительным и отрицательным коэффициентами: определение и стандартные свойства.

6. Для любой пары окружностей существует гомотетия, переводящая одну в другую.

Задачи.

1. Докажите, что движение переводит отрезки в отрезки.

2. Деревни Альфино и Бетино находятся

   а) по разные стороны,

   б) по одну сторону

   от прямолинейной железной дороги. В каком месте дороги нужно построить станцию для того, чтобы сумма расстояний от деревень до станции была наименьшей?

3. Деревни Альфино и Бетино расположены по разные стороны от молочной реки с параллельными прямолинейными кисельными берегами. В каком месте нужно построить мост через молочную реку, чтобы путь из Альфино в Бетино был кратчайшим?

4. Точку M симметрично отразили от сторон заключавшего ее угла, то есть построили такие точки M' и M'', что отрезки MM' и MM'' перпендикулярны сторонам угла и делятся ими пополам. Докажите, что часть отрезка $M'M''$, высекаемая на нем углом, составляет менее половины этого отрезка.

5. На сторонах OB_1 и OB_2 угла с вершиной O взяты точки A_1 и A_2 такие, что $OA_1 = OA_2$ и $A_1B_1 = A_2B_2$. Докажите, что точка O_1 пересечения отрезков A_1B_2 и A_2B_1 лежит на биссектрисе угла.

6. M и N – середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $MN \leq \frac{1}{2}(BC + AD)$.

7. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектрисы внутренних углов A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D – в точке N. Докажите, что длина отрезка MN равна половине разности между суммой оснований и суммой боковых сторон трапеции.

8. Даны две окружности S_1 и S_2 и прямая ℓ. Проведите прямую, параллельную ℓ, так, чтобы расстояние между точками пересечения этой прямой с окружностями S_1 и S_2 имело данную величину a.

9. Каким преобразованием может быть композиция двух осевых симметрий?

10. Может ли фигура, состоящая из пяти точек, иметь один центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

11. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $AC + CB < AM + MB$.

12. Четырехугольник вписан в квадрат (то есть на каждой стороне квадрата лежит по вершине четырехугольника). Докажите, что периметр четырехугольника

    а) больше удвоенной стороны квадрата;

    б) не меньше его удвоенной диагонали.

13. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен правильный треугольник CDN, вершина N которого лежит вне квадрата, а на диагонали AC – правильный треугольник ACM, внутри которого лежит точка D. Докажите, что MN равно стороне квадрата.

14. Докажите, что середины оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

15. Внутри прямого угла с вершиной O взята точка C, а на его сторонах – точки A и B. Докажите, что $2|OC| \leq P_{ABC}$.

16. а) Найдите центр гомотетии, переводящей треугольник в его серединный треугольник.

    б) (Прямая Эйлера) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на одной прямой с ортоцентром и центром описанной окружности. В каком отношении она делит соединяющий их отрезок?

17. а) График функции $f(x) = x^2$ (то есть множество всех точек с координатами (x, x^2)) подвергли гомотетии с коэффициентом $a \neq 0$ и центром в начале координат. График какой функции получился?

    б) Докажите, что любой график вида $y = x^2 + px + q$ отличается от графика $y = x^2$ параллельным переносом.

18. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен R. На плоскости нарисована некоторая окружность радиуса $R/2$. Докажите, что существует такая точка O, что отрезки OA, OB и OC делятся этой окружностью пополам.

19. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P – середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

20. а) Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

    б) Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.

21. (*лемма Архимеда*) В сегмент окружности ω, ограниченный хордой MN, вписана окружность, касающаяся ω в точке A, а MN в точке B. Докажите, что AB – биссектриса угла MAN.

22. Пусть в трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а длины оснований — a и b. Проведем отрезок KL через точку O, параллельный основаниям трапеции. Тогда $KO = OL$ и $KL = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.