Специальные разделы высшей математики
Материалы практических занятий

Информация

Преподаватель: Матвей Ильич Магин, mmagin@itmo.ru.

Писать ТОЛЬКО на ЭТУ электронную почту.

Отчётность:

- За практики студент получает **70 баллов**.
- **Контрольные работы:** от 0 до 30 баллов, **Проверочные работы (0-20)**, **Практические работы (0-20)**.
- Контрольных работ за семестр будет 2, большие. Будет по одной переписке на каждую. При этом «переписывание» происходит с штрафным коэффициентом 0,8.
- Проверочные работы – небольшие работы на 15 минут в начале пары. Будет какое-то количество за семестр.
- Теста для допуска к экзамену **больше нет**. Если студент набирает в семестре 60 и больше балов, то имеет оценку **удовл.** и может не ходить на экзамен.

Содержание

1 Геометрия пространств со скалярным произведением

1.1 Евклидовы пространства

Определение 1. *Евклидовым пространством* называют вещественное векторное пространство V, на котором задано *скалярное произведение*, т.е. функция $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. (*Линейность*:) $\langle\alpha u+\beta v, w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$.
2. (*Симметричность*:) $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$;
3. (*Положительная определённость*) $\langle v,v\rangle\geq 0$, причём $\langle v,v\rangle=0 \iff v=0$.

Как только на пространстве V задана евклидова структура, можно измерять длины, углы и расстояние:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad \cos\angle(u,v) := \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}, \quad d(u,v) := \|u-v\|.$$

0. Как на любом конечномерном векторном пространстве ввести скалярное произведение?

1. Какой угол образуют вектора u и v единичной длины, если угол между векторами $u+v$ и $3u-2v$ равен $\pi/3$?

2. Докажите, что функция φ от векторов $x, y \in \mathbb{R}^2$ заданная формулой

$$\varphi(x,y) := (x_1 x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

задаёт скалярное произведение на плоскости. Найдите длины векторов $(1,0)$ и $(0,1)$ и угол между ними.

3. Докажите, что функция $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^T B)$ задаёт скалярное произведение на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Вычислите длины следующим матриц и угол между ними:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Рассмотрим конечное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Проверьте, что формула

$$\langle f, g\rangle := \sum_{x \in X} f(x) g(x)$$

задаёт скалярное произведение на пространстве функций $X \to \mathbb{R}$.

4. В этой задаче мы рассматриваем абстрактное векторное пространство со скалярным произведением.

(a) Докажите *неравенство треугольника*: $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.
(b) Докажите*тождество параллелограмма*: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
(c) Докажите *тождество поляризации*: $\langle u, v\rangle = \dfrac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$.
(d) Докажите, что если $\|u\| = \|v\|$, то $u+v \perp u-v$. Т.е. диагонали ромба перпендикулярны :)

1.2 Нормированные пространства

Определение 2. *Нормой* на векторном пространстве V называют функцию $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. *Положительная определённость:* $\|v\| = 0 \iff v = 0$,
2. *Однородность:* $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$,
3. *Неравенство треугольника:* $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.

Как можно заметить, любое скалярное произведение задаёт норму по правилу $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Обратное (как мы увидим позже) неверно.

5. Докажите, что следующие функции задают нормы на $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1 \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|,$$

Докажите, что $\|\cdot\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|\cdot\|_p$.

6. Нарисуйте *единичные шары* $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$ при
(a) $p = 1$, (b) $p = 2$, (c) $p = \infty$.

7. Докажите, что норма $\|\cdot\|_1$ не индуцирована никаким скалярным произведением.
С этого момента (обычно) будем считать, что норма индуцирована скалярным произведением.

1.3 Ортогональность

Определение 3. Будем говорить, что векторы u и v *ортогональны* и писать $u \perp v$, если $\langle u, v\rangle = 0$. Набор векторов называют *ортонормированным*, если векторы в нём попарно ортогональны и все из них имеют единичную длину.

8. Являются ли ортонормированными (относительно стандартного скалярного произведения) наборы

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$;

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Факт 1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный набор. Тогда

$$\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2.$$

9. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — ортонормированный набор в векторном пространстве. Докажите, что он линейно независим.

10. Докажите утверждение, обратное факту 1: если набор $e_1, \ldots, e_n$ таков, что

$$\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2$$

для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то этот набор ортонормированный.

Разложение вектора по ортонормированному базису. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства V. Тогда

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i, \quad \|v\|^2 = v = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, e_i\rangle|^2, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle \langle v, e_i\rangle.$$

11. Разложите вектор $(1, 2, 4, 7) \in \mathbb{R}^4$ по ортонормированному базису

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

1.4 Ортогонализационный процесс Грамма-Шмидта

Факт 2. Пусть V — евклидово (или унитарное) пространство над полем $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$) со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — набор векторов. Построим последовательность векторов $u_1, \dots, u_k$ следующим образом:

$$u_1 := v_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j, \qquad k = 2, \dots, n.$$

Она обладает следующими свойствами:

(a) векторы $u_1, \dots, u_n$ попарно ортогональны;
(b) как следствие, $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы,
(c) $\mathrm{span}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_k)$,
(d) если $v_k \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$, то $u_k = 0$.
(e) для каждого k вектор u_k ортогонален подпространству $\mathrm{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$.
1. Если исходная система $v_1, \dots, v_n$ была ортонормированной, то процесс ничего не меняет.

QR-разложение. Если столбцы матрицы A линейно независимы, то процесс Грама–Шмидта (над её словами) даёт разложение

$$A = QR,$$

где Q — матрица с ортонормированными столбцами, а R — верхнетреугольная матрица с положительными диагональными элементами. Если скалярное произведение было стандартным, то это условие означает, что $Q^T = Q^{-1}$.

Зачем нужно: посчитать определитель (т.к. $\det(Q) = 1$), численно решать системы линейных уравнений, МНК и т.д.

12. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки системы векторов евклидова (эрмитова) пространства. В пункте 4 напишите QR-разложение матрицы с такими столбцами.

(a) $\big((1, 2, 2, -1),\ (1, 1, -5, 3),\ (3, 2, 8, -7)\big)$,

(b) $\big((1, 1, -1, -2),\ (5, 8, -2, -3),\ (3, 9, 3, 8)\big)$,

(c) $\big((2, 1, 3, -1),\ (7, 4, 3, -3),\ (1, 1, -6, 0),\ (5, 7, 7, 8)\big)$,

1.5 Ортогональное дополнение

Определение 4. Пусть $U \subset V$ — подмножество пространства со скалярным произведением. Тогда его *ортогональное дополнение* $U^\perp$ состоит из векторов, ортогональных ему:

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0\ \forall u \in U\}.$$

13. Опишите ортогональные дополнения следующих множеств:
(a) $U = \{(2, 3, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$, (b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,
(c) $U = \{(a, b, 0, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$, (d) Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонорм. базис V, $U = \mathrm{span}(e_1, \dots, e_k)$.