

## Серия 24: широкий фундамент и ликвидация некоторых пробелов.

Но каким образом постепенно, из поколения в поколение, строился этот дом, как и почему были задуманы и изготовлены эти инструменты (а не другие...), почему комнаты размещены и устроены здесь так, а там иначе — вот сколькими вопросами наследникам никогда и в голову не приходило задаться.

А. Гротендик, “Урожаи и посевы”.

**1.** В полоске из 100 красных и белых клеток разрешено менять местами любые две клетки, между которыми расположены еще две. Полоски, которые можно получить друг из друга такими операциями, назовем *эквивалентными*. Каково наибольшее возможное количество неэквивалентных полосок

- а) из 1 красной и 99 белых клеток,
- б) из 2 красных и 98 белых клеток?

**2.** 10 белых и 20 черных фишек расставлены по окружности. Разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят еще три фишки. Две расстановки фишек (в данных 30 точках) назовем эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько существует неэквивалентных расстановок?

**3.** Найдите  $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ .

**4.** а) (Обратная теорема Виета) Докажите, что числа  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями уравнения  $x^2 - px + q = 0$ , где  $p = x_1 + x_2$ ,  $q = x_1 x_2$ .

б) Положим  $S_n = x_1^n + x_2^n$ . Докажите, что  $S_{n+2} = pS_{n+1} - qS_n$ .

**5.** Преобразование плоскости  $f$  переводит каждую точку  $P(x, y)$  плоскости в точку  $P'(ax - by, bx + ay)$ , где  $a$  и  $b$  — вещественные числа, среди которых хотя бы одно отлично от 0.

а) Докажите, что это преобразование плоскости, которое переводит прямые в прямые.

б) Найдите обратное преобразование.

в) Преобразование  $g$  переводит точку  $(x, y)$  в точку  $(cx - dy, dx + cy)$ . Найдите координаты точки  $f(g(P))$ .

**6.** а) Докажите, что из медиан любого треугольника  $\Delta$  можно составить другой треугольник  $\Delta_1$ ;

б) Докажите, что это можно сделать параллельным переносом медиан;

в) Найдите площадь этого треугольника;

г) Докажите, что треугольник  $\Delta_2$ , составленный из медиан треугольника  $\Delta_1$ , подобен исходному треугольнику  $\Delta$ .

**7.** а) Докажите формулу для площади треугольника:  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ .

б) Докажите *теорему синусов*: в треугольнике  $a = 2R \sin \alpha$ .