Линейная алгебра

Материалы практических занятий

Отчётность.

В конце семестра студенты получают за практики 60 баллов, которые складываются (по-ровну) из следующих вещей:

- *контрольные работы* — чтоб получить максимальный балл, нужно закрыть все задачи на всех КР; можно переписывать (или переписать в конце). В первой К/Р можно закрыть задачу баллами за Д/З 1, 2 и 3.

  Задача на КР считается *решённой*, если за неё стоит ≥ 5 баллов (или иное специально оговорено!). КР считается *зачтённой*, если в ней решены все задачи.

- *обязательные дз* — чтоб получить максимальный балл, нужно решить все[1] задачи.

- *работа на практиках* — те, кто активно работают на практиках (участвуют в обсуждениях, показывают решения задач, рассказывают решения у доски и т.п.) автоматически получают максимальный балл.

  Остальные смогут добрать баллы в декабре, если попросят выдать *индивидуальное домашнее задание*. В нём, как правило, более сложные задачи, чем на практиках.

Содержание

[1] Или почти все, если какие-то задачи окажутся слишком сложны…

1 Комплексные числа и многочлены

1.1 Поля. Поле комплексных чисел.

Что такое *сжатое поле*?...

Фольклор.

Определение 1. Множество F с бинарными операциями $+\colon F\times F\to F$ и $\cdot\colon F\times F\to F$ называют *полем*, если выполнены следующие аксиомы:

1. $a+b=b+a$
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. $\exists 0\colon a+0=a$
4. $\forall a\ \exists(-a) : a+(-a)=0$
5. $a\cdot b=b\cdot a$
6. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
7. $\exists 1\neq 0 : a\cdot 1=a$
8. $\forall a\neq 0\ \exists a^{-1}\colon a\cdot a^{-1}=1$
9. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

1. Являются ли полями следующие множества:
а) $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$,
б) $\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.

2. Для каких чисел $n=2,3,4,5,6,7$ существует поле из n элементов?

Определение 2. *Комплексным числом* называют (упорядоченную) пару вещественных чисел (a,b). Сложение и умножение комплексных чисел определяются следующим образом:

$$(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d),\quad (a,b)\cdot(c,d):=(ac-bd,ad+bc).$$

Факт 1. Комплексные числа образуют поле, обозначим его $\mathbb{C}$.

Факт 2. Комплексное число вида $(x,0)$ можно отождествить с вещественными, обозначим его x.

Факт 3. Всякое комплексное число z можно (единственным образом) представить в виде $z=a+bi$, где $i=(0,1)$ — *мнимая единица*, а $a,b\in\mathbb{R}$. Число a называют *вещественной частью* z и обозначают $\mathrm{Re}(z)$, а b — мнимой частью z и обозначают $\mathrm{Im}(z)$, соотвественно.

3. Вычислите а) $\frac{2-7i}{2i-1}$; б) $(1+i)^5/(1-i)^3$; в) i^{2025}; г) $(1+i)^{8n}$ при $n\in\mathbb{Z}$; д) $(1+i)^{4n}$ при $n\in\mathbb{Z}$.

4. Решите в комплексных числах уравнение а) $z^2+z+1=0$; б) $z^3-1=0$.

Определение 3. *Сопряженным* к комплексному числу $z = a + bi$ называют комплексное число $\overline{z} := a - bi$.

Факт 4. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ а) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, б) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

5. Найдите все комплексные числа, сопряженные а) своему квадрату; б) своему кубу.

6. Пусть $f(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. а) Докажите, что $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$; б) Пусть z_0 — корень f. Докажите, что $\overline{z_0}$ — тоже корень f (а значит, корни многочлена с вещественными коэффициентами либо вещественны, либо разбиваются на пары комплексно сопряженных).

7. Биективное отображение $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ будем называть *неплохим*, если для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathbb{R}$ выполнено
(1) $A(z_1 + z_2) = A(z_1) + A(z_2)$;
(2) $A(z_1 z_2) = A(z_1)A(z_2)$;
(3) $A(x) = x$.

Докажите, что есть всего два неплохих отображения: $A(z) = z$ и $A(z) = \overline{z}$.

8. Докажите, что если $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$, то $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\varphi)$.

9. Вычислите а) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$;
б) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots$;
в) $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots$.

Комментарий. Такие знакопеременные суммы могут возникать, например, когда Вы пытаетесь провести какое-то комбинаторное вычисление при помощи *формулы включений-исключений*.

10. а) Докажите, что для всяких $z, w \in \mathbb{C}$ справедливо

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Какой геометрический смысл у этого тождества?
б) Докажите, что для всяких комплексных z_1, z_2 справедливо тождество

$$|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1 + z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2}\right| + \left|\frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2}\right|.$$

Напомним, что *модулем* комплексного числа z называют $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Факт 5. Любое $0 \neq z \in \mathbb{C}$ можно (единственным образом) представить в виде $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$ (α выбирают для удобства). Такую запись называют *тригонометрической формой* комплексного числа. Угол φ называют *аргументом* комплексного числа z.

Факт 6. Аргумент произведения равен сумме аргументов: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$:

$$wr = r \cdot R(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Факт 7. (*Формула Муавра*) Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ для $n \in \mathbb{Z}$.

11. Представьте в тригонометрической форме: а) $i + \sqrt{3}$; б) $i + 1$; в) $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$; в) $\sin\xi + i\cos\xi$.

12. При $n \in \mathbb{Z}$ вычислите а) $(1 + i)^n$; б) $\left(\frac{1 - i\operatorname{tg}\varphi}{1 + i\operatorname{tg}\varphi}\right)^n$; в) $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

Факт 8. (*Формула Эйлера*) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. В частности, из факта 5 и формулы Эйлера видим, что любое комплексное число zединственным (с точностью до выбора аргумента) образом записывается в виде $z = r \cdot e^{i\varphi}$, где $r = |z|$.

13. Найдите а) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$; б) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$.

14. Пусть $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, а $a \in \mathbb{Z}$. Вычислите а) $1 + \zeta^a + \zeta^{2a} + \ldots + \zeta^{(n-1)a}$; б) $1 + 2\zeta^a + 3\zeta^{2a} + \ldots + n\zeta^{(n-1)a}$.

15. Докажите, что

$$\frac{\sin\omega + \sin 3\omega + \ldots \sin{(2n-1)\omega}}{\cos\omega + \cos 3\omega + \ldots + \cos{(2n-1)\omega}} = \operatorname{tg} n\omega.$$

Факт 9. Все (комплексные) решения уравнения $z^n = w$ (где z — переменная, $w = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$) находятся следующим образом:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, \ldots, n-1,$$

где под $\sqrt[n]{|w|}$ подразумевается *вещественный* корень степени n. Это множество обычно обозначают $\sqrt[n]{w}$. **Важно:** операция взятия “комплексного корня степени n” **многозначная**! Комплексных корней степени n всегда n штук!

16. Определим $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $0 \le k < n$.

а) Доказать, что $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$;

б) $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ для $0 \le k < n$;

в) $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_\ell = \begin{cases} \varepsilon_{k+\ell}, & \text{если } k + \ell < n, \\ \varepsilon_{k+\ell-n}, & \text{если } k + \ell \ge n \end{cases}$, $0 \le k < n,\ 0 \le \ell < n$;

г) Будем называть корень n-й степени из единицы ε *примитивным*, если $\varepsilon^m \ne 1$ при всех $m < n$. Докажите, что примитивных корней из единицы степени n ровно $\varphi(n)$, где φ — функция Эйлера.[2]

17. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varphi(n)}$ — все примитивные корни из единицы степени n. Рассмотрим многочлен

$$\Phi_n(x) = (x - \zeta_1) \cdot (x - \zeta_2) \cdot \ldots \cdot (x - \zeta_{\varphi(n)}).$$

а) Докажите, что $\prod\limits_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.[3]

б) Докажите, что $\Phi_n(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

в) Найдите Φ_n при $n \le 4$.

г) Найдите Φ_p, где p — простое число.

18. Докажите, что $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(x + \varepsilon_k y)^n = x^n + y^n$.

1.2 Многочлены. Деление с остатком, алгоритм Евклида.

Определение 1. Пусть даны два многочлена $A(x)$ и $B(x)$ с коэффициентами из некоторого поля (например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), причём $B(x) \not\equiv 0$. Тогда существуют **единственные** многочлены $Q(x)$ (*неполное частное*) и $R(x)$ (*остаток*) такие, что выполняется равенство:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x), \text{ причём } \deg R(x) < \deg B(x).$$

Если $R(x) \equiv 0$, то говорят, что многочлен $A(x)$ **делится нацело** на $B(x)$ и пишут $A \vdots B$.

19. Разделите многочлен $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на многочлен $g(x) = x^2 - 3x + 1$ с остатком.

[2] Напомним, что $\varphi(n)$ — количество чисел от 1 до n, взаимнопростых с n.

[3] Мы рассматриваем произведение Φ_d по всем делителям d числа n.

Алгоритм Евклида позволяет найти *наибольший общий делитель* (НОД) двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$. Он опирается на следующее наблюдение: если $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ — деление с остатком, то $(A, B) = (B, R)$. Алгоритм выглядит следующим образом:

1. Пусть $\deg A(x) \geq \deg B(x)$. Разделим $A(x)$ на $B(x)$ с остатком:
$$A(x) = B(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x), \quad \text{где } \deg R_1(x) < \deg B(x)$$
2. Если $R_1(x) \not\equiv 0$, то разделим $B(x)$ на $R_1(x)$:
$$B(x) = R_1(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x), \quad \text{где } \deg R_2(x) < \deg R_1(x)$$
3. Затем разделим $R_1(x)$ на $R_2(x)$:
$$R_1(x) = R_2(x) \cdot Q_3(x) + R_3(x), \quad \text{где } \deg R_3(x) < \deg R_2(x)$$
4. Процесс продолжается до тех пор, пока не получится остаток, равный нулю.
$$\begin{aligned} R_{n-2}(x) &= R_{n-1}(x) \cdot Q_n(x) + R_n(x), \\ R_{n-1}(x) &= R_n(x) \cdot Q_{n+1}(x) + 0. \end{aligned}$$

Последний ненулевой остаток $R_n(x)$ и будет искомым НОД многочленов $A(x)$ и $B(x)$ с точностью до ненулевого *постоянного* множителя (чтобы сделать его единственным, часто выбирают *унитарный* многочлен, т.е. со старшим коэффициентом 1)[4]:
$$(A(x), B(x)) = c \cdot R_n(x), \quad \text{где } c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$$

20. Найдите наибольший общий делитель многочленов а) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$; б) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x + 1$; в) $x^n - 1$ и $x^m - 1$.

Факт 10. Пусть $(A(x), B(x)) = d(x)$. Тогда существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$, для которых
$$u(x) \cdot A(x) + v(x) \cdot B(x) = d(x).$$

Равенство выше называют *линейным представлением* наибольшего общего делителя A и B. Чтоб найти u и v нужно развернуть алгоритм Евклида. Посмотрим на минимальный пример.

Пример 1. Найдём и линейно представим НОД многочленов $f(x) = x^3 - 2x + 1$ и $g(x) = x^2 - 1$

Алгоритм Евклида	**Линейное представление**
$f(x) = x \cdot g(x) + (-x + 1)$	$-x + 1 = f(x) - x \cdot g(x)$
$g(x) = (-x - 1) \cdot (-x + 1) + 0$	

21. Подберите такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, где
а) $f(x) = x^3$ и $g(x) = (1 - x)^2$; б) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ и $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; в) x^m и $(1 - x)^n$.

[4] Но это далеко не всегда оптимально. Иногда это усложняет вычисления и так делать не стоит.

1.3 Многочлены. Линейные множители, теорема Безу, теорема Виета.

Как мы помним, *основная теорема алгебры* утверждает, что любой многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ степени n имеет ровно n корней (с учётом кратности). В частности, раскладывается на n (с учётом кратностей) линейных сомножителей.

22. Разложите на линейные множители над полем $\mathbb{C}$ многочлены
а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; б) $x^4 + 4$; в) $x^6 + 27$; г) $x^{2n} + x^n + 1$.

Факт 11. (**Теорема Безу**) Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен $P(a)$.

23. Найдите остаток $R(x)$ от деления многочлена $x^n + x + 2$ на $x^2 - 1$.

24. При каком значении a многочлен $f(x) = x^{1000} + ax^2 + 9$ делится на $x + 1$?

25. Найдите все многочлены $f(x)$ для которых $xf(x-1) = (x-26)f(x)$.

Определение 2. Многочлен $P(x)$ называется *симметрическим*, если он не изменяется при любых перестановках своих переменных. *Элементарными симметрическими многочленами* называют многочлены

$$\begin{aligned}
e_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\
e_2(x_1, \dots, x_n) &= x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
e_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdot \dots \cdot x_n.
\end{aligned}$$

Факт 12. (**Теорема Виета**) Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — корни многочлена $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Тогда элементарные симметрические многочлены от корней P выражаются через коэффициенты P следующим образом:

$$\begin{aligned}
e_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
e_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
&\vdots \\
e_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

26. Найдите сумму чисел, обратных к комплексным корням многочлена $x^4 - x^2 - x - 1$.

27. Найдите значение μ, при котором один из корней многочлена $x^3 - 7x + \mu$ вдвое больше другого.

28. Пусть $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ — комплексные корни из n-й степени из 1. Вычислите значения всех элементарных симметричекских многочленов от них, т.е. $e_1(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}), e_2(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}), \dots, e_n(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})$.

29. Решите систему уравнений а) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = \alpha^3 \end{cases}$.

Следующая задача в некотором смысле обобщает теорему Виета (*подставьте* $g(x) = x$ *и посмотрите, что получается*).

30. Пусть f, g — два вещественных многочлена без кратных и общих корней степеней m и n, причём у f ровно m корней, а у g — ровно n. Матвей посчитал произведение значений f в корнях g, а Вася — произведение значений g в корнях f. Как связаны их числа?

1.4 Контрольная работа №1

Вариант 3108

1. Вычислите $\sqrt[3]{\dfrac{1-5i}{1+i} - 5\dfrac{1+2i}{2-i} + 2}$.

2. Решите уравнение $(z+3108)^n + (z-3108)^n = 0$.

3. Вычислите $\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x + \ldots + \sin^2 (2n-1)x$.

4. Найдите и линейно представьте наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^5 + x^3 + x$ и $g(x) = x^4 + x + 1$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=24 \end{cases}$.

Вариант 3109

1. Вычислите $\sqrt[4]{\dfrac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \dfrac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)}$.

2. Решите уравнение $(z+3109)^n - (z-3109)^n = 0$.

3. Вычислите $\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x + \ldots + \cos^2 (2n-1)x$.

4. Найдите и линейно представьте наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^5 - x + 1$ и $g(x) = x^4 + x^3 - 1$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=36 \end{cases}$.

2 Линейная алгебра

2.1 Матрицы и их умножение

Определение 1. *Произведение* матриц $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ и $B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}$ — это матрица $C \in \mathrm{Mat}_{m\times k}$, элементы которой вычисляются следующим образом:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj}$$

То есть, чтоб найти элемент в позиции (i, j) нужно умножить i-ю строку матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Важно: Умножение $A \cdot B$ определено, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства умножения матриц:

- $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность),
- $A(B+C) = AB + AC \quad$ и $\quad (A+B)C = AC + BC$ (дистрибутивность)
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (ассоциативность умножения на число)
- $AE_n = E_m A = A$, где E_r — единичная матрица соответствующего размера.

Также важно иметь в виду следующее.

- Умножение матриц **не коммутативно**: вообще говоря, $AB \neq BA$.
- Если $AB = 0$, то это **не** означает, что $A = 0$ или $B = 0$.
- Если $AB = AC$ и $A \neq 0$, то **не** всегда следует, что $B = C$.

1. Выполните умножение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Возведите матрицы в степень:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, в) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3. Будем называть *числами Фибоначчи* последовательность F_n, заданную рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ с начальными данными $F_0 = 0, F_1 = 1$. Докажите, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Комментарий. Какой будет асимптотика алгоритма, вычисляющего n-е число Фибоначчи при помощи соображений задачи **3**? А какая асимптотика динамического алгоритма для той же задачи?[5]

Напомним, что *обратной* к матрице $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ называется такая матрица $B := A^{-1}$, что $AB = BA = E$, где E — единичная матрица.

4. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. При каких условиях на $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ существует обратная к A? Попробуйте выписать её в этом случае.

Рассмотрим неориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$. Для простоты будем считать, что в нём нет петель и кратных рёбер. *Матрицей смежности* графа G называется матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$,

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i v_j) \in E, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

[5] Как (должно быть или будет) известно из курса теории алгоритмов, динамический алгоритм вычисляет n-е число Фибоначчи за линейное время, т.е. за $O(n)$. В то же время, возведение в n-ю степень матрицы 2×2 можно реализовать за $O(\log(n))$ аналогично быстрому возведению в степень чисел.

5. Докажите, что в клетке (i,j) у матрицы A^k записано количество путей длины k между вершинами i и j.

6. Рассмотрим матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$. Как изменятся её элементы при домножении справа (слева) на:

а) Матричную единицу E_{ij} — матрицу, у которой в позиции (i,j) стоит 1, а в остальных — нули.

б) Элементарную трансвекцию $T_{ij}(\lambda) := E + \lambda E_{ij}$, где $i \neq j$.

2.2 Линейная независимость. Полнота.

Определение 1. Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ называется *линейно независимой*, если из равенства

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Определение 2. Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ называется *полной* в пространстве V (или *системой образующих*), если любой вектор $x \in V$ можно представить в виде линейной комбинации:

$$x = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k \quad \text{для некоторых } \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}.$$

Эквивалентно: линейная оболочка системы совпадает со всем пространством: $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k) = V$.

7. Покажите, что векторы $u = (1,1,0), v = (0,1,2), w = (3,1,-4)$ линейно зависимы в $\mathbb{R}^3$.

8. Рассмотрим векторы $w = (1,1,0,0), x = (1,0,1,0), y = (0,0,1,1), z = (0,1,0,1)$.
а) Докажите, что система w, x, y, z не является полной, найдя вектор $u \in \mathbb{R}^4$, не представимый в виде линейной комбинации w, x, y, z.
б) Покажите, что w, x, y, z линейно зависимы, найдя их нулевую нетривиальную линейную комбинацию.
в) Выразите z через w, x, y.

9. а) Из 5 векторов в $\mathbb{R}^5$ любые 4 линейно независимы. Верно ли, что все 5 векторов линейно независимы?
б) Из n векторов в $\mathbb{R}^n$ любые $n-1$ линейно независимы. Верно ли, что все n векторов линейно независимы?

10. Пусть u, v, w — линейно независимые векторы. Всегда ли линейно независимы следующие наборы?

а) $v - w, w - u, u - v$;

б) $u + v, v + w, w + u$;

в) $u + v + w, v + w, u$.

11. Многочлены степени не выше n-ой являются векторным пространством. Пусть есть множество многочленов $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$, где $\deg(f_i) = i$.

- Докажите, что они являются системой образующих, то есть любой многочлен степени не выше n представляется как линейная комбинация f_i.
- Докажите, что они линейно независимы.

12. Докажите, что для попарно различных $a, b, c \in \mathbb{R}$ векторы $(1,1,1)$, (a,b,c) и (a^2,b^2,c^2) линейно независимы в $\mathbb{R}^3$.

3 Метод Гаусса

3.1 Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

Ниже описан **метод Гаусса** для решения систем линейных уравнений.

- Рассматривается система из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  где A — матрица коэффициентов размера $m \times n$, x — столбец неизвестных, b — столбец свободных членов.

- На первом этапе из уравнения с первым ненулевым коэффициентом выбирается ведущая переменная. С помощью элементарных преобразований (прибавление к одному уравнению другого, домноженного на число, перестановка уравнений) эта переменная исключается из всех последующих уравнений.

- Процесс продолжается: на k-м шаге выбирается уравнение, в котором коэффициент при переменной x_k ненулевой, и затем переменная x_k исключается из всех уравнений с номерами больше k.

- В результате прямого хода исходная система приводится к системе в ступенчатом виде, когда каждое последующее уравнение содержит меньшее число неизвестных. Для квадратной невырожденной матрицы это эквивалентно приведению к верхнетреугольному виду:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\qquad u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n = c_2, \\ \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_{nn}x_n = c_n. \end{cases}$$

- На обратном ходе переменные находятся начиная с последнего уравнения:

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}.$$

  Затем неизвестные определяются последовательно вверх:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j \right), \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Упражнение. Выведите из метода Гаусса, что линейная независимость строк в квадратной матрице равносильна линейной независимости столбцов.

13. Решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2, \\ 6x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$

Вопрос. Какова арифметическая сложность метода Гаусса? Иными словами, сколько приблизительно (в зависимости от n) операций потребуется для решения системы линейных уравнений $n \times n$ при помощи метода Гаусса?

Ответ. Посмотрим на k-й шаг прямого хода метода Гаусса:

- Для i-й строки при $i = k+1, \ldots, n$ мы считаем $\lambda = a_{ik}/a_{kk}$ — это $(n-k)$ делений;
- Потом мы вычитаем строку из строк, т.е. считаем $a_{ij} - \lambda a_k j$. Это по одному умножению и одному вычитанию для каждой пары (i, j). Так как i и j пробегают множество от $k+1$ до n, это $(n-k)^2$ операций.
- Итого, на k-м шаге мы делаем $(n-k)$ делений, $(n-k)^2$ вычитаний и $(n-k)^2$ умножений.
- Для матрицы $n \times n$ шагов у нас не более $n-1$, то есть нужно просуммировать по k от единицы до $n-1$.

$$\text{делений} = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2),$$

$$\text{умножений/вычитаний} = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = O(n^3)$$

Итого, асимптотика прямого хода — $O(n^3)$. На обратном ходе когда мы делаем подстановку, это занимает порядка $1 + 2 + \ldots + n - 1 = O(n^2)$ операций, поэтому вклада в асимптотику всего алгоритма не вносит. $\square$

Замечание. На самом деле, в рассуждении выше доказано несколько больше: что асимптотика имеет вид $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$, т.е. мы знаем точную константу.

3.2 Ранг матрицы

Определение 3. Пусть дана матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Рассмотрим строки матрицы A как векторы из $\mathbb{R}^n$, обозначим их $a_{1\bullet}, \ldots, a_{m\bullet}$. Тогда *строчный ранг матрицы* A определяется как размерность линейной оболочки $a_{1\bullet}, \ldots, a_{m\bullet}$.

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}(A) := \dim \mathrm{span}(a_{1\bullet}, \ldots, a_{m\bullet}).$$

Столбцовый ранг определяется аналогично: если рассматривать столбцы матрицы A как векторы $a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n}$ в $\mathbb{R}^m$, то столбцовый ранг равен

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}(A) := \dim \mathrm{span}(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n}).$$

Факт 1. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Факт 2. Для любой матрицы A имеет место равенство $\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}(A) = \mathrm{rank}_{\mathrm{col}}(A)$. Общепринятое обозначение для этого числа — $\mathrm{rank}(A)$.

Факт 3. Ранг матрицы не меняется при домножении на обратимую:

1. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, а $M \in \mathrm{Mat}_{m\times m}$ — обратимая матрица. Тогда $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(MA)$.
2. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, а $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ — обратимая матрица. Тогда $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AM)$.

Факт 4. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в матрице после того как её привели к ступенчатому виду методом Гаусса.

14. Найдите ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Найти ранг матрицы в зависимости от параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

3.3 Обязательное ДЗ

1. Вычислите $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

2. Найдите ранг матрицы A в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \alpha \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Рассмотрим векторное пространство $M_2(\mathbb{R})$ вещественных матриц 2×2. Найдите какой-нибудь базис этого пространства, содержащий матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Какие координаты имеет в этом базисе единичная матрица $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$?

4. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Докажите, что A имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде произведение ненулевых столбца и строки, т.е. в виде $A = a\cdot b$ где $a \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}$, а $b \in \mathrm{Mat}_{1\times n}$.

5. Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

а) Докажите, что $\mathrm{rank}(A+B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

б)* Докажите, что $\mathrm{rank}(AB) \le \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$.

6. Пусть $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$ — вещественные числа, а $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ определяется так: $A_{ij} = x_i + y_j$. Докажите, что $\mathrm{rank}(A) \le 2$.

3.4 Базис пространства решений линейной системы

Факт 5. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Решения однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$ образуют подпространство $\mathrm{Ker}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \le \mathbb{R}^n$. Имеет место следующее равенство:

$$\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

Базис подпространства $\mathrm{Ker}(A)$ можно найти следующим образом:

1. Приведите матрицу A к ступенчатому (или к приведённому ступенчатому) виду с помощью элементарных преобразований строк.

2. Определите ведущие переменные (соответствующие столбцам с ведущими единицами) и свободные переменные (остальные).

3. Выразите ведущие переменные через свободные.

4. Параметризуйте общее решение, введя параметры для свободных переменных, и представьте вектор x как линейную комбинацию векторов — коэффициенты при параметрах дадут векторы базиса ядра.

Пример 1. Пусть после применения метода Гаусса матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущие переменные: x_1, x_2. Свободные: x_3, x_4. Система задаётся уравнениями

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4, \\ x_2 = 3x_3 - 4x_4. \end{cases}$$

Пусть $t = x_3,\ s = x_4$ — параметры (свободные переменные). Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Отсюда базис ядра матрицы A задаётся векторами $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

16. а) Найдите базис линейной оболочки строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 6 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдите базис пространства решений однородной системы $Ax = 0$.

17. Найдите базис $\mathrm{Ker}(A)$ для матриц

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

3.5 Итог: системы линейных уравнений и ранг матрицы

Определение 3. Система линейных уравнений $Ax = b$ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Свойство	**Неоднородная система** $Ax = b$	**Однородная система** $Ax = 0$
Совместна?	Если $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A\|b)$	Всегда ($\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A\|0)$)
Всегда есть решение?	Не всегда	Всегда есть *тривиальное* $(0, 0, \ldots, 0)$
Когда 1 решение?	$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A\|b) = n$	$\mathrm{rank}(A) = n$
Когда ∞ решений?	$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A\|b) < n$	$\mathrm{rank}(A) < n$
Критерий	Теорема Кронекера–Капелли: Система совместна $\iff \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A\|b)$	

Факт 6. (**теорема Кронекера-Капелли**) Система линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}(A|b) = \mathrm{rank}(A)$.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, т.е. мы рассматриваем систему из m уравнений с n неизвестными.

18. Найдите общее решение системы $Ax = b$.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & -4 & -8 & -13 \\ 2 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$.

19. 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица размером 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи "галочкой"так, что каждый из студентов решил чётное число (в частности, может быть, нуль) отмеченных задач; б) можно отметить некоторые из задач знаком “+”, а некоторые из остальных — знаком “−” и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками “+” и “−”.

3.6 Обратная матрица

Определение 4. (*напоминание*) Матрица X называется *обратной* к матрице A, если $AX = XA = E$, где E — единичная матрица подходящих размеров. Её обозначают A^{-1}. Если у матрицы A существует обратная, её называют *обратимой*.

Факт 7. Обратимыми могут быть лишь квадратные матрицы. Более того, квадратная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ обратима тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}(A) = n$.

Факт 8. Нахождение обратной матрицы при помощи метода Гаусса. Пусть дана квадратная матрица A порядка n и ранга n. Найдём матрицу A^{-1}.

1. Составим расширенную матрицу $(A \mid E)$, где E — единичная матрица $n \times n$.
2. Применяем элементарные преобразования строк, чтобы превратить левую часть в единичную матрицу.
3. Если в процессе окажется, что в каком-то шаге невозможно получить ненулевой ведущий элемент (т.е. все элементы столбца ниже и на диагонали равны нулю), то $\mathrm{rank}(A) < n$ и обратной не существует.
4. После приведения левой части к единичной матрице правая и будет равна A^{-1}.

Пример 1. Найдём обратную матрицу для $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Составляем расширенную матрицу $(A \mid E)$ и при помощи метода Гаусса преобразуем левую часть к единичной:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{2C_2-5C_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{C_1-C_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{C_1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right).$$

Значит, $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

19. Найдите обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

20. Найдите обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.7 Контрольная работа №2

1. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

2. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

а) Найдите $\operatorname{rank}(A)$, б) Найдите общее решение системы $Ax = 0$ и базис $\operatorname{Ker}(A)$.

3. Найдите $2 \cdot A^{-1}$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Предположим, что для матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ справедливо, что $A^2 = A$. Докажите, что имеет место $\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Im}(A) = \{0\}$.

4 Определители

4.1 Вычисление определителей

Определение 1. *Полилинейной кососимметричной формой* называют функцию

$$F\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{ раз}} \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющую следующим свойствам:

1. F линейна по каждому аргументу: при фиксированных остальных столбцах

$$F(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu w_i, \ldots, v_n) = \lambda F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \mu F(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_n).$$

2. $F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$. Или, эквивалентно: при перестановке двух аргументов форма меняет знак.

Среди всех таких форм существует единственная, для которой $F(e_1, \ldots, e_n) = 1$, где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$. Эту форму обозначают через $\det$ и называют *определителем*. Для квадратной матрицы $A = (v_1 \ \ldots \ v_n)$, $v_i \in \mathbb{R}^n$, её определитель определяется как $\det A := \det(v_1, \ldots, v_n)$.

Определение 2. Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель матрицы, полученной из A удалением i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число $C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Факт 1. Свойства определителя:

1. полилинейность, кососимметричность и нормировка (см. выше).
2. *элементарные преобразования:*[6]
   (a) При добавлении к столбцу линейной комбинации других столбцов определитель не меняется.
   (b) При умножении столбца на λ определитель умножается на λ.
   (c) При перестановке двух столбцов определитель меняет знак.
3. *Разложение по столбцу:* определитель разлагается по j-му столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij},$$

   где C_{ij} — алгебраическое дополнение, то есть
4. *Геометрический смысл:* $|\det A|$ равно объёму параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_n$.
5. *Формула*:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

6. $\det(A) = \det(A^t)$. В частности, всё описанное выше можно делать над строками.
7. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
8. Система векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ линейно независима $\iff$ $\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

[6]Как следствия полилинейности и антисимметричности.

1. Вычислите определители

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}$, где $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, г) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{x+z}{2} & \frac{x+y}{2} & \frac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

2. Пусть $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ — верхнетреугольная (т.е. $u_{ij} = 0$ при $i > j$). Вычислите $\det(U)$.

3. Вычислите определители при помощи метода Гаусса:

а) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0.1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0.1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0.1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 6 \end{vmatrix}$.

4. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

5. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & 2n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a_1 + x & x & \cdots & x \\ x & a_2 + x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}$.

6. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = F_{n+1},$$

где F_{n+1} — $(n+1)$-е число Фиббоначчи.

7. Вычислите

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

8. Вычислите определитель, предполагая, что размер матрицы чётный:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & . & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

9. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

10. Сумма элементов в каждой строке матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ равна нулю. Чему может быть равен её определитель?

11. Матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2n+1}(\mathbb{R})$ *кососимметрическая*, т.е. $a_{ij} + a_{ji} = 0$ для всех $i, j = 1, \dots, 2n+1$. Чему может быть равен её определитель?

12. Пусть $f_i(x)$ — многочлены степени не выше $n-2$; вычислите

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n). \end{vmatrix}$$

4.2 Выпускайте Крамера.

Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$ с n неизвестными и n уравнениями. Предположим, что $\det(A) \neq 0$, т.е. A обратима. Тогда система имеет единственное решение $x = A^{-1}b$. *Метод Крамера* позволяет выписать это решение *явно.*

Для каждой переменной x_i составим матрицу A_i, получающуюся из A заменой i-го столбца на столбец b. Тогда решение нашей системы находится по формулам

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Дисклеймер. Если вычислять каждый определитель разложением по столбцу, то это очень уж трудоёмко. А именно, время работы вычисления одной значения одной неизвестной удовлетворяет рекурренте $T(n) = nT(n-1)+O(n)$, откуда $T(n) = O(n!)$ и на все вычисления нам нужно $O((n+1)!)$.

Соотвественно, метод Крамера имеет смысл в следующих случаях:

- система имеет маленький размер;
- вам абстрактно нужна формула по которой решения выражаются через параметры системы.

13. С помощью метода Крамера решите системы уравнений:
а) $\begin{cases} 2x_2 - x_2 = 1 \\ x_1 + 16x_2 = 17 \end{cases}$, б) $\begin{cases} \cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot x_2 = \cos\beta \\ -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 = \sin\beta \end{cases}$.

14. При помощи метода Крамера выведите общую формулу для решения линейной системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

15. Решите методом Крамера системы линейных уравнений:
а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \end{cases}$.

4.3 Присоединённая матрица или формула для элементов обратной матрицы.

Напомним, что *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы A называют $C_{ij}(A) := (-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} — определитель матрицы, полученной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца из матрицы A.

Определение 3. *Присоединённой* к матрице A называют матрицу A^{ad}, транспонированную к матрице, составленной из алгебраических дополнений. То есть, $\left(A^{\mathrm{ad}}\right)_{ij} = C_{ji}(A)$.

Факт 2. Пусть $\det(A) \neq 0$. Тогда обратную матрицу к A можно найти по следующей формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\mathrm{ad}}.$$

16. Выпишите формулу для обратной матрицы к матрице $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

17. Найдите обратную матрицу к матрице
а) $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ -9 & -7 & -9 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Найдите обратную матрицу к матрице
а) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} e^x & \cos x & \sin x \\ e^x & -\sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\sin x \end{pmatrix}$.

4.4 Д/З по определителям

1. Решите уравнение $p(t) = 0$, где

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-t & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-t & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-t \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \dots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix},$$

где $\binom{n}{k} = C_n^k$ — количество k-элементных подмножеств в n-элементном множестве.

3. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

4. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n. \end{vmatrix}$$

4.5 Контрольная работа №3

1. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{n-1} \\ \xi^{n-1} & 1 & \xi & \dots & \xi^{n-2} \\ \xi^{n-2} & \xi^{n-1} & 1 & \dots & \xi^{n-3} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \xi & \xi^2 & \xi^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ: $(1-\xi^n)^{n-1}$.

2. Вычислите определитель:

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Ответ: $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

3. При каких зачениях параметра λ система линейных уравнений имеет единственное решение? Найдите его.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ: Система имеет единственное решение при $\lambda \neq 2$: $(1, 1, -\frac{\lambda+1}{\lambda-2}, \frac{3}{\lambda-2})$.

4. При помощи присоединённой матрицы найдите при каких значениях a матрица A обратима и найдите обратную к ней.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Ответ: $\det A = a^3 + 1$, $A^{-1} = \frac{1}{a^3+1} \begin{pmatrix} a^2 & -a & 1 \\ 1 & a^2 & -a \\ -a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$.

4.6 Приложения определителя

К примеру, определители можно применять в вычислительной геометрии. Иллюстрирующий это детский пример — следующая задача:

13. Пусть $u = (a, b)$, $v = (c, d)$ — два вектора на плоскости. Докажите, что площадь параллелограмма, натянутого на векторы u и v равна $\det(u, v)$.

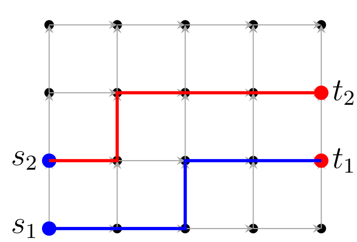
Следующая задача иллюстрирует богатство приложений определителя в перечислительной комбинаторике. Поробнее про этот сюжет можно прочитать, например, здесь.

14. (Лемма Линдстрёма–Гесселя–Виена для решётки) Рассмотрим квадратную решётку $\mathbb{Z}^2$. Разрешены только шаги вправо $(x, y) \to (x + 1, y)$ и вверх $(x, y) \to (x, y + 1)$.

Пусть заданы n точек-источников $S = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_i = (x_i, y_i)$ и n точек-стоков $T = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_i = (X_i, Y_i)$, расположенные так, что

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \qquad X_1 < X_2 < \cdots < X_n, \qquad \text{и} \qquad y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n, \qquad Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n.$$

Для двух точек $A = (x, y)$ и $B = (X, Y)$ обозначим через $p(A \to B)$ количество путей из A в B, состоящих только из шагов вверх и вправо (если $X < x$ или $Y < y$, то $p(A \to B) = 0$).Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, где $a_{ij} = p(s_i \to t_j)$.



(а) В случае $n = 2$ докажите, что число пар непересекающихся путей (P_1, P_2), $P_i \colon s_i \to t_i$, равно

$$\det \begin{pmatrix} p(s_1 \to t_1) & p(s_1 \to t_2) \\ p(s_2 \to t_1) & p(s_2 \to t_2) \end{pmatrix}.$$

(б) Докажите в общем случае, что число непересекающихся семейств путей $(P_1, \ldots, P_n)$, $P_i \colon s_i \to t_i$, равно определителю матрицы путей:

$$\det(A) = \det\big(p(s_i \to t_j)\big)_{i,j=1}^{n}.$$

5 Приложение: задачи переписываний контрольных работ.

5.1 Контрольная работа №1

1. Вычислите $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

Ответ. $w_k = 2^{-1/12} e^{i\left(-\frac{5\pi}{72} + \frac{\pi k}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

2. Пусть $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Вычислите $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$.
Ответ. $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - 3\big(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2\big) + 12abc.$

3. Вычислите $1 + a\cos\varphi + a^2\cos^2 2\varphi + \ldots + a^k \cos k\varphi$.

Ответ. $\sum_{m=0}^{k} a^m \cos(m\varphi) = \frac{1 - a\cos\varphi - a^{k+1}\cos\big((k+1)\varphi\big) + a^{k+2}\cos(k\varphi)}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}.$

4. При помощи алгоритма Евклида найдите многочлены $u(x), v(x)$ так, чтобы $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, где $d(x)$ — наибольший общий делитель f и g:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \qquad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$$

Ответ. $(-x - 1)f(x) + (x + 2)g(x) = x^2 - 2.$

5. Решите над полем $\mathbb{C}$ систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = -4 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -3 \end{cases}.$$

Ответ: (1,1,-2) и все перестановки.

5.2 Контрольная работа №2

1. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3. \end{cases}$$

Ответ. $(2, 0, -2, -2, 1)$.

2. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

а) Найдите $\mathrm{rank}(A)$; б) Найдите общее решение системы $Ax = 0$ и базис $\mathrm{Ker}(A)$.
Ответ. Ранг равен 3, остальное надо смотреть!

3. При помощи метода Гаусса найдите обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Пусть A — нильпотентная матрица ступени n, то есть $A^n = 0$. Докажите, что $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$.

$4^{\star}$**.** Матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ обратима, а матрица $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ такова, что матрицы $A + B$ и $A - B$ обратимы. Всегда ли обратима матрица $X = (A + B)^{-1} + (A - B)^{-1}$?

5.3 Контрольная работа №3

С тяжелым сердцем я должен признаться, что все мои усилия пропали даром и даже, к моему ужасу, дали обратный результат.

М.А. Булгаков, “Театральный роман”

1. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot n!$.

2. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}.$$

Ответ. $\frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$.

3. При каких α, β система линейных уравнений имеет единственное решение? (Опишите это множество пар). Найдите это решение в этих случаях.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + (1+\alpha)x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + (1+\beta)x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + (1+\alpha+\beta)x_4 = 4. \end{cases}$$

Ответ. $(1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\beta} - \frac{3}{\alpha+\beta}, \frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\beta}, \frac{3}{\alpha+\beta})$.

4. При помощи присоединённой матрицы найдите обратную матрицу к матрице.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 0 & c & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix},$$

Ответ. $A^{-1} = \frac{1}{a^2c - bc + 1} \begin{pmatrix} ca & -a & 1-bc \\ 1 & a^2 - b & -a \\ -c & 1 & ac \end{pmatrix}$.

6 Приложение: дополнительные задачи

Про комплексные числа и многочлены.

1. (2 балла) Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех первообразных корней из единицы степени n. Докажите, что

(a) $\sigma(1) = 1$;
(b) если $n > 1$, то $\sum_{d|n} \sigma(d) = 0$;
(c) $\sigma(p) = -1$, если p — простое;
(d) $\sigma(p^k) = 0$, если p — простое и $k > 1$;
(e) σ — мультипликативная функция, то есть $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$, если m и n взаимно простые;
(f) функция $\sigma(n)$ совпадает с функцией Мёбиуса $\mu(n)$, которая определяется так:

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n \text{ — произведение } k \text{ различных простых}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

2. (1 балл) Докажите, что при нечётном $n > 1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)} = \frac{n^2-1}{3}.$$

3. (1 балл) Пользуясь первообразными корнями из единицы, решите следующую школьную задачу. Известно, что (клетчатый) квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 2×2 и квадраты 3×3. Докажите, что его можно разрезать либо только на квадраты 2×2, либо только на квадраты 3×3.

4. (1 балл) Пусть f, g и h — попарно взаимно простые комплексные многочлены **положительной степени** и $f^n + g^n = h^n$. Докажите, что $n \leq 2$.

5. (1 балл) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — элементарные симметрические многочлены от n переменных. Определим k-*ю степенную сумму* равенством

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) := x_1^k + \ldots + x_n^k.$$

Докажите, что

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} e_{k-1} p_1 + (-1)^k k e_k = 0.$$

Тут мы полагаем, что $e_k = 0$ при $k > n$.

Про определитель.

1. (1 балл) Будем использовать обозначения задачи 4 про комплексные числа и многочлены.

(a) Докажите, что

$$p_k = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \ldots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \ldots & e_2 & e_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Докажите, что

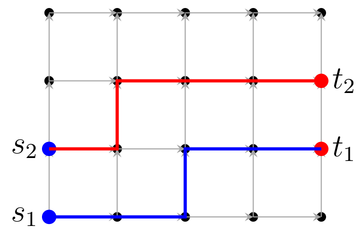
$$e_k = \frac{1}{k!} \det \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \ldots & p_1 & k-1 \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \ldots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}.$$

2. (Лемма Линдстрёма–Гесселя–Виена для решётки, 2 балла) Рассмотрим квадратную решётку $\mathbb{Z}^2$. Разрешены только шаги вправо $(x, y) \to (x+1, y)$ и вверх $(x, y) \to (x, y+1)$.

Пусть заданы n точек-источников $S = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_i = (x_i, y_i)$ и n точек-стоков $T = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_i = (X_i, Y_i)$, расположенные так, что

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \qquad X_1 < X_2 < \cdots < X_n, \qquad \text{и} \qquad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n, \qquad Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_n.$$

Для двух точек $A = (x, y)$ и $B = (X, Y)$ обозначим через $p(A \to B)$ количество путей из A в B, состоящих только из шагов вверх и вправо (если $X < x$ или $Y < y$, то $p(A \to B) = 0$).Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, где $a_{ij} = p(s_i \to t_j)$.



(a) В случае $n = 2$ докажите, что число пар непересекающихся путей (P_1, P_2), $P_i\colon s_i \to t_i$, равно

$$\det \begin{pmatrix} p(s_1 \to t_1) & p(s_1 \to t_2) \\ p(s_2 \to t_1) & p(s_2 \to t_2) \end{pmatrix}.$$

(b) Докажите в общем случае, что число непересекающихся семейств путей $(P_1, \dots, P_n)$, $P_i\colon s_i \to t_i$, равно определителю матрицы путей:

$$\det(A) = \det\big(p(s_i \to t_j)\big)_{i,j=1}^{n}.$$

(c) Пусть c_n — n-е число Каталана (т.е. количество путей на клетчатой бумаге, идущих вверх и вправо, и не поднимающихся выше прямой $y = x$ из точки $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ в точку $(n, n) \in \mathbb{Z}^2$)[7]. Вычислите

$$\det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{2n} \end{pmatrix}.$$

Определение 0. *Разбиением* натурального числа k называют последовательность $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0)$, для которой $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = k$.

3. (1 балл) Рассмотри мультииндексы $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ и $\alpha = \lambda + \delta$. Для мультииндекса $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ определим многочлен

$$A_\beta(x_1, \dots, x_n) := \det(x_i^{\beta_j})_{i,j=1}^{n}.$$

Далее, для каждой последовательности λ как выше определим многочлен

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \frac{A_{\lambda+\delta}(x_1, \dots, x_n)}{A_\delta(x_1, \dots, x_n)}.$$

(a) Докажите, что s_λ — симметрический многочлен с целыми коэффициентами.

(b) Рассмотрим векторное пространство Λ всех однородных симметрических многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ степени k. Докажите, что $\{s_\lambda \mid \lambda \text{ — разбиение}\}$ — базис Λ.

[7] Есть еще много комбинаторных интерпретаций этой последовательности, посмотрите википедию.