

Серия 27(b), векторы, скалярное произведение и другие наши преступления

1. Из каждой из вершин параллелограмма проведены векторы в середины всех его сторон. Докажите, что их сумма равна $\vec{0}$.
2. Докажите, что если векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
3. Проекции векторов \vec{a} и \vec{b} на направление вектора \vec{u} равны, и проекции \vec{a} и \vec{b} на направление вектора \vec{v} , неколлинеарного \vec{u} , также равны. Докажите, что $\vec{a} = \vec{b}$.
4. Докажите (при помощи векторов!), что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
5. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n -угольника в его вершины, равна $\vec{0}$.
6. Десять векторов таковы, что длина суммы любых девяти из них меньше длины суммы всех векторов. Докажите, что существует ось, проекции этих десяти векторов на которую имеют одинаковые знаки.
7. Докажите (при помощи векторов!), что прямые, содержащие диагонали четырехугольника, взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон четырехугольника.
8. Даны 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h . Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh$ неотрицательно.