

Специальные разделы высшей математики

Материалы практических занятий

Информация

Преподаватель: [Матвей Ильич Магин](mailto:mmagin@itmo.ru), mmagin@itmo.ru.

ПИСАТЬ ТОЛЬКО НА ЭТУ ЭЛЕКТРОННУЮ ПОЧТУ.

Отчётность:

- За практики студент получает **70 баллов**.
- **Контрольные работы:** от 0 до 30 баллов, **Проверочные работы (0-20)**, **Практические работы (0-20)**.
- Контрольных работ за семестр будет 2, большие. Будет по одной переписке на каждую. При этом «переписывание» происходит с штрафным коэффициентом 0,8.
- Проверочные работы – небольшие работы на 15 минут в начале пары. Будет какое-то количество за семестр.
- Теста для допуска к экзамену **больше нет**. Если студент набирает в семестре 60 и больше баллов, то имеет оценку **удовл.** и может не ходить на экзамен.

Содержание

1	Геометрия пространств со скалярным произведением	1
1.1	Евклидовы пространства	1
1.2	Нормированные пространства	2
1.3	Ортогональность	3

1 Геометрия пространств со скалярным произведением

1.1 Евклидовы пространства

Определение 1. *Евклидовым пространством* называют вещественное векторное пространство V , на котором задано *скалярное произведение*, т.е. функция $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. (*Линейность*;) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.
2. (*Симметричность*;) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
3. (*Положительная определённость*) $\langle v, v \rangle \geq 0$, причём $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

Как только на пространстве V задана евклидова структура, можно измерять длины, углы и расстояние:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \cos \angle(u, v) := \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad d(u, v) := \|u - v\|.$$

0 Как на любом конечномерном векторном пространстве ввести скалярное произведение?

1 Какой угол образуют вектора u и v единичной длины, если угол между векторами $u + v$ и $3u - 2v$ равен $\pi/3$?

2 Докажите, что функция φ от векторов $x, y \in \mathbb{R}^2$ заданная формулой

$$\varphi(x, y) := (x_1 x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

задаёт скалярное произведение на плоскости. Найдите длины векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и угол между ними.

3 Докажите, что функция $\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T B)$ задаёт скалярное произведение на пространстве матриц $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$. Вычислите длины следующим матриц и угол между ними:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Рассмотрим конечное множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Проверьте, что формула

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x \in X} f(x)g(x)$$

задаёт скалярное произведение на пространстве функций $X \rightarrow \mathbb{R}$.

4 В этой задаче мы рассматриваем абстрактное векторное пространство со скалярным произведением.

- (а) Докажите *неравенство треугольника*: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- (б) Докажите *тождество параллелограмма*: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
- (в) Докажите *тождество поляризации*: $\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}$.
- (г) Докажите, что если $\|u\| = \|v\|$, то $u + v \perp u - v$. Т.е. диагонали ромба перпендикулярны :)

1.2 Нормированные пространства

Определение 2. *Нормой* на векторном пространстве V называют функцию $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

- 1. *Положительная определённость*: $\|v\| = 0 \iff v = 0$,
- 2. *Однородность*: $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$,
- 3. *Неравенство треугольника*: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Как можно заметить, любое скалярное произведение задаёт норму по правилу $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Обратное (как мы увидим позже) неверно.

5 Докажите, что следующие функции задают нормы на \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

Докажите, что $\|\cdot\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\cdot\|_p$.

6 Нарисуйте *единичные шары* $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$ при

- (а) $p = 1$, (б) $p = 2$, (в) $p = \infty$.

7 Докажите, что норма $\|\cdot\|_1$ не индуцирована никаким скалярным произведением.

С этого момента (обычно) будем считать, что норма индуцирована скалярным произведением.

1.3 Ортогональность

Определение 3. Будем говорить, что векторы u и v *ортогональны* и писать $u \perp v$, если $\langle u, v \rangle = 0$. Набор векторов называют *ортонормированным*, если векторы в нём попарно ортогональны и все из них имеют единичную длину.

8 Являются ли ортонормированными (относительно стандартного скалярного произведения) наборы

- (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right);$
 (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$

Факт 1. Пусть e_1, \dots, e_n — ортонормированный набор. Тогда

$$\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2.$$

8 Пусть v_1, \dots, v_k — ортонормированный набор в векторном пространстве. Докажите, что он линейно независим.

9 Докажите утверждение, обратное факту 1: если набор e_1, \dots, e_n таков, что

$$\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$$

для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то этот набор ортонормированный.