

# Специальные разделы высшей математики

## Материалы практических занятий

### Информация

Преподаватель: Матвей Ильич Магин, [mmagin@itmo.ru](mailto:mmagin@itmo.ru).

Писать ТОЛЬКО на ЭТУ электронную почту.

#### Отчётность:

- За практики студент получает **70 баллов**.
- **Контрольные работы:** от 0 до 30 баллов, **Проверочные работы (0-20)**, **Практические работы (0-20)**.
- Контрольных работ за семестр будет 2, большие. Будет по одной переписке на каждую. При этом «переписывание» происходит с штрафным коэффициентом 0,8.
- Проверочные работы – небольшие работы на 15 минут в начале пары. Будет какое-то количество за семестр.
- Теста для допуска к экзамену **больше нет**. Если студент набирает в семестре 60 и больше баллов, то имеет оценку **удовл.** и может неходить на экзамены.

### Содержание

<b>1 Геометрия пространств со скалярным произведением</b>	<b>1</b>
1.1 Евклидовы пространства . . . . .	1
1.2 Нормированные пространства . . . . .	2
1.3 Ортогональность . . . . .	3

## 1 Геометрия пространств со скалярным произведением

### 1.1 Евклидовы пространства

**Определение 1.** Евклидовым пространством называют вещественное векторное пространство  $V$ , на котором задано скалярное произведение, т.е. функция  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. (Линейность:)  $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ .
2. (Симметричность:)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ;
3. (Положительная определённость)  $\langle v, v \rangle \geq 0$ , причём  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ .

Как только на пространстве  $V$  задана евклидова структура, можно измерять длины, углы и расстояние:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \cos \angle(u, v) := \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad d(u, v) := \|u - v\|.$$

0 Как на любом конечномерном векторном пространстве ввести скалярное произведение?

1 Какой угол образуют вектора  $u$  и  $v$  единичной длины, если угол между векторами  $u + v$  и  $3u - 2v$  равен  $\pi/3$ ?

2 Докажите, что функция  $\varphi$  от векторов  $x, y \in \mathbb{R}^2$  заданная формулой

$$\varphi(x, y) := (x_1 x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

задаёт скалярное произведение на плоскости. Найдите длины векторов  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  и угол между ними.

3 Докажите, что функция  $\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T B)$  задаёт скалярное произведение на пространстве матриц  $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ . Вычислите длины следующим матриц и угол между ними:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Рассмотрим конечное множество  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Проверьте, что формула

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x \in X} f(x)g(x)$$

задаёт скалярное произведение на пространстве функций  $X \rightarrow \mathbb{R}$ .

4 В этой задаче мы рассматриваем абстрактное векторное пространство со скалярным произведением.

- (a) Докажите неравенство треугольника:  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .
- (b) Докажите тождество параллелограмма:  $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ .
- (c) Докажите тождество поляризации:  $\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}$ .
- (d) Докажите, что если  $\|u\| = \|v\|$ , то  $u + v \perp u - v$ . Т.е. диагонали ромба перпендикулярны :)

## 1.2 Нормированные пространства

**Определение 2.** Нормой на векторном пространстве  $V$  называют функцию  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. Положительная определённость:  $\|v\| = 0 \iff v = 0$ ,
2. Однородность:  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ ,
3. Неравенство треугольника:  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

Как можно заметить, любое скалярное произведение задаёт норму по правилу  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Обратное (как мы увидим позже) неверно.

5 Докажите, что следующие функции задают нормы на  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1 \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

Докажите, что  $\|\cdot\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\cdot\|_p$ .

6 Нарисуйте единичные шары  $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$  при

- (a)  $p = 1$ ,
- (b)  $p = 2$ ,
- (c)  $p = \infty$ .

7 Докажите, что норма  $\|\cdot\|_1$  не индуцирована никаким скалярным произведением.

С этого момента (обычно) будем считать, что норма индуцирована скалярным произведением.

### 1.3 Ортогональность

**Определение 3.** Будем говорить, что векторы  $u$  и  $v$  *ортогональны* и писать  $u \perp v$ , если  $\langle u, v \rangle = 0$ . Набор векторов называют *ортонормированным*, если векторы в нём попарно ортогональны и все из них имеют единичную длину.

8 Являются ли ортонормированными (относительно стандартного скалярного произведения) наборы

- (a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right);$
- (b)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$

**Факт 1.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный набор. Тогда

$$\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2.$$

8 Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — ортонормированный набор в векторном пространстве. Докажите, что он линейно независим.

9 Докажите утверждение, обратное факту 1: если набор  $e_1, \dots, e_n$  таков, что

$$\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$$

для всех  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , то этот набор ортонормированный.