СРВМ • занятие 1 • 10 сентября

Информация

Преподаватель: Матвей Ильич Магин, `mmagin@itmo.ru`.

Писать ТОЛЬКО на ЭТУ электронную почту.

Зачётная система: про неё написано в файле с материалами практик, в самом начале.

. . . .

Евклидовы пространства

Определение 1. *Евклидовым пространством* называют вещественное векторное пространство V, на котором задано *скалярное произведение*, т.е. функция $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. (*Линейность*:) $\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$.
2. (*Симметричность*:) $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$;
3. (*Положительная определённость*) $\langle v,v\rangle\geq 0$, причём $\langle v,v\rangle = 0 \iff v=0$.

Как только на пространстве V задана евклидова структура, можно измерять длины, углы и расстояние:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle},\quad \cos\angle(u,v) := \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|},\quad d(u,v):=\|u-v\|.$$

0. Как на любом конечномерном векторном пространстве ввести скалярное произведение?

1. Какой угол образуют вектора u и v единичной длины, если угол между векторами $u+v$ и $3u-2v$ равен $\pi/3$?

2. Докажите, что функция φ от векторов $x,y\in\mathbb{R}^2$ заданная формулой

$$\varphi(x,y) := (x_1 x_2)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}.$$

задаёт скалярное произведение на плоскости. Найдите длины векторов $(1,0)$ и $(0,1)$ и угол между ними.

3. Докажите, что функция $\langle A,B\rangle := \operatorname{tr}(A^T B)$ задаёт скалярное произведение на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Вычислите длины следующим матриц и угол между ними:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Рассмотрим конечное множество $X=\{x_1,\dots,x_n\}$. Проверьте, что формула

$$\langle f,g\rangle := \sum_{x\in X} f(x)g(x)$$

задаёт скалярное произведение на пространстве функций $X\to\mathbb{R}$.

4. В этой задаче мы рассматриваем абстрактное векторное пространство со скалярным произведением.

(a) Докажите *неравенство треугольника*: $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

(b) Докажите*тождество параллелограмма*: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

(c) Докажите *тождество поляризации*: $\langle u,v\rangle = \dfrac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2}{4}$.

(d) Докажите, что если $\|u\|=\|v\|$, то $u+v\perp u-v$. Т.е. диагонали ромба перпендикулярны :)

Нормированные пространства

Определение 2. *Нормой* на векторном пространстве V называют функцию $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. *Положительная определённость:* $\|v\| = 0 \iff v = 0$,
2. *Однородность:* $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$,
3. *Неравенство треугольника:* $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Как можно заметить, любое скалярное произведение задаёт норму по правилу $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Обратное (как мы увидим позже) неверно.

5. Докажите, что следующие функции задают нормы на $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1 \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|,$$

Докажите, что $\|\cdot\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|\cdot\|_p$.

6. Нарисуйте *единичные шары* $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$ при
(a) $p = 1$, (b) $p = 2$, (c) $p = \infty$.

7. Докажите, что норма $\|\cdot\|_1$ не индуцирована никаким скалярным произведением.
С этого момента (обычно) будем считать, что норма индуцирована скалярным произведением.

Ортогональность

Определение 3. Будем говорить, что векторы u и v *ортогональны* и писать $u \perp v$, если $\langle u, v\rangle = 0$. Набор векторов называют *ортонормированным*, если векторы в нём попарно ортогональны и все из них имеют единичную длину.

8. Являются ли ортонормированными (относительно стандартного скалярного произведения) наборы

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$;
(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Факт 1. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный набор. Тогда

$$\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2.$$

8. Пусть $v_1, \dots, v_k$ — ортонормированный набор в векторном пространстве. Докажите, что он линейно независим.

9. Докажите утверждение, обратное факту 1: если набор $e_1, \dots, e_n$ таков, что

$$\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2$$

для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то этот набор ортонормированный.