**Серия 26. Давненько не было комбинаторики...**

**1.** Дан правильный $mn$-угольник. Среди его вершин $m$ вершин покрашены красным, а $n$ – синим (никакая вершина не покрашены дважды). Докажите, что некоторый отрезок с концами в красных точках равен некоторому отрезку с концами в синих точках.

**2.** В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано действительное число так, что все бесконечные в обе стороны горизонтальные и вертикальные последовательности чисел периодические. Докажите, что найдется бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими периодами тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами.

**3.** В королевстве $N$ городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из $N$ мэров городов стал снова мэром одного из $N$ городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

**4.** Сумма 33 натуральных чисел, не превосходящих 33 равна 99. Докажите, что можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была равна 33.

**5.** Дан набор $\mathbf{P}$ из 2026 различных простых чисел. Докажите, что можно выбрать несколько простых чисел из $\mathbf{P}$ (можно одно, но не все) таким образом, что их произведение, уменьшенное на единицу, будет иметь простой делитель, не входящий в $\mathbf{P}$.

**6.** 100 мальчиков и 100 девочек стоят в две шеренги напротив друг друга. Каждый мальчик выбрал девочку (может случиться, что одну девочку выбрали несколько мальчиков) и направился к ней по кратчайшему пути. При этом их пути не пересеклись. Затем мальчики возвратились на свои места, и такие же действия проделали девочки, причем пути девочек тоже не пересеклись между собой. Докажите, что найдутся мальчик и девочка, выбравшие друг друга.

**7.** На плоскости дано сто одинаковых кругов, окружности которых имеют общую точку. Докажите, что можно выбрать пять из этих кругов, которые покрывают центры всех ста кругов. (Круг покрывает все точки внутри себя и на своей границе.)