Серия 27. То, что нужно и прямо сейчас!

1. Два фокусника показывают следующий фокус. Первый фокусник выходит из комнаты. Второй фокусник берет колоду из 2026 карт, пронумерованных числами от 1 до 2026, и просит двух зрителей взять по одной карте (второй фокусник видит, какую карту взял каждый из зрителей). После этого второй фокусник добавляет к этим двум одну карту из оставшейся части колоды. Зрители перемешивают эти три карты, зовут первого фокусника и отдают их ему. Первый фокусник изучает эти карты и "угадывает какая карта была добавлена вторым фокусником. Объясните, как можно показать такой фокус.

2. Докажите, что для любого $n > 3$ число $n!$ можно разложить на два сомножителя, отношение которых не меньше $2/3$ и не больше $3/2$.

3. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

4. На острове Новая Вавилония используются 44 языка, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Известно, что любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно, при посредничестве нескольких переводчиков. Докажите, что тогда любые два островитянина смогут поговорить между собой, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков.

5. В наборе из N вещественных чисел можно заменить любые два числа двумя экземплярами их среднего арифметического. При каких N в любом наборе из N чисел можно сделать все числа равными?

6. На плоскости отмечены 2026 различных точек. Они покрашены в красный и синий цвета так, что от каждой синей точки на расстоянии 1 находятся хотя бы 2 красных. Докажите, что красных точек больше 40.

7. Конечное множество разбито на m подмножеств с одинаковым количеством элементов, и это же множество разбито на m^2 подмножеств с одинаковым числом элементов. Докажите, что можно выбрать m^2 различных элементов так, что каждое из множеств первого разбиения содержит ровно m выбранных элементов, а каждое из множеств второго разбиения содержит ровно один выбранный элемент.