СРВМ • занятие 2 • 12 февраля

Евклидовы пространства

4. В этой задаче мы рассматриваем абстрактное векторное пространство со скалярным произведением.
(a) Докажите *неравенство треугольника*: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
(b) Докажите*тождество параллелограмма*: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
(c) Докажите *тождество поляризации*: $\langle u, v\rangle = \dfrac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$.
(d) Докажите, что если $\|u\| = \|v\|$, то $u+v \perp u-v$. Т.е. диагонали ромба перпендикулярны :)

Нормированные пространства

Определение 2. *Нормой* на векторном пространстве V называют функцию $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. *Положительная определённость:* $\|v\| = 0 \iff v = 0$,
2. *Однородность:* $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$,
3. *Неравенство треугольника:* $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Как можно заметить, любое скалярное произведение задаёт норму по правилу $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Обратное (как мы увидим позже) неверно.

5. Докажите, что следующие функции задают нормы на $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1 \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|,$$

Докажите, что $\|\cdot\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|\cdot\|_p$.

6. Нарисуйте *единичные шары* $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\|x\|_p \leq 1\}$ при
(a) $p = 1$, (b) $p = 2$, (c) $p = \infty$.

7. Докажите, что норма $\|\cdot\|_1$ не индуцирована никаким скалярным произведением.
С этого момента (обычно) будем считать, что норма индуцирована скалярным произведением.

Ортогональность

Определение 3. Будем говорить, что векторы u и v *ортогональны* и писать $u \perp v$, если $\langle u, v\rangle = 0$. Набор векторов называют *ортонормированным*, если векторы в нём попарно ортогональны и все из них имеют единичную длину.

8. Являются ли ортонормированными (относительно стандартного скалярного произведения) наборы
(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$;
(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Факт 1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный набор. Тогда

$$\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2.$$

8. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — ортонормированный набор в векторном пространстве. Докажите, что он линейно независим.

9. Докажите утверждение, обратное факту 1: если набор $e_1, \ldots, e_n$ таков, что

$$\|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2$$

для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то этот набор ортонормированный.