Серия 29: движение – всё, цель – ничто.

1. Сумма четырёх натуральных чисел равна 2025. Найдите наибольшее возможное значение их произведения.

2. а) По окружности расставлено $n > 3$ неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. Докажите, что сумма n попарных произведений соседних чисел не больше $1/4$.

б) Сумма пяти неотрицательных чисел равна единице. Докажите, что эти числа можно расставить по окружности так, что сумма всех пяти попарных произведений соседних чисел будет не больше $1/5$.

3. У Джона есть n мешков, в которых находится a_1, a_2, …, a_n унций золотого песка (в i-м мешке — a_i унций). Джон обнаружил, что $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Мэри сообщила Джону числа $b_1 \geq b_2 \cdots \geq b_n$ такие, что $a_1 \geq b_1$, $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$, …, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Джон может взять любые два мешка и пересыпать часть золотого песка из более тяжёлого мешка в более лёгкий; при этом, однако, нельзя допускать, чтобы какой-то мешок, не обязательно один из этих двух, становился тяжелее мешка с меньшим номером. Докажите, что Джон сможет добиться того, чтобы в мешках стало b_1, b_2, …, b_n унций песка. Числа a_i и b_i – вещественные.

4. Сумма трёх неотрицательных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что $\sqrt{1+3a} + \sqrt{1+3b} + \sqrt{1+3c} \leq 3\sqrt{2}$.

5. Дана таблица $n \times n$, заполненная по следующему правилу: в клетке, стоящей в i-ой строке и j-ом столбце таблицы записано число $1/(i+j-1)$. В таблице отметили n чисел таким образом, что никакие два отмеченных числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма отмеченных чисел не меньше 1.

6. Для любых чисел x_1, …, x_n докажите неравенство

$$\max\{x_1, \ldots, x_n, -x_1 - \cdots - x_n\} \geq \frac{|x_1| + \cdots + |x_n|}{2n-1}.$$

7. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n

$$\min_i \frac{a_i}{b_i} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq \max_i \frac{a_i}{b_i}.$$