

Серия 31, вызывающая желание узнать, что же такое вещественное число.

1. Существует ли натуральное $n > 1$, для которого: а) $\sqrt[n]{n} < 1,001$? б) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0,1$? в) $\sqrt{n^2+n} - n < 0,1$?

Назовём отрезок $[a, b]$ числовой оси *ловушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если вне этого отрезка или совсем нет членов последовательности, или их только конечное число.

Назовём отрезок $[a, b]$ числовой оси *кормушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если на этом отрезке лежит бесконечно много членов последовательности.

2. Для некоторой последовательности каждый из отрезков $[0, 1]$ и $[9, 10]$ является кормушкой. Может ли у этой последовательности быть а) ловушка длины 1? б) ловушка длины 9?

3. а) Существует ли последовательность, не имеющая ни одной кормушки?

- б) Существует ли последовательность, для которой всякий отрезок является кормушкой?

4. На луче $(0, +\infty)$ числовой прямой расположено несколько (более двух) отрезков длиной 1. Оказалось, что для каждого двух разных отрезков на них можно выбрать по одному числу так, чтобы эти числа отличались ровно в 2 раза. Левый конец самого левого отрезка — число a , правый конец самого правого отрезка — число b . Какое наибольшее значение может принимать величина $b - a$?

5. Дана невозрастающая последовательность положительных чисел: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$; $a_1 = \frac{1}{2k}$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Доказать, что найдутся k чисел, из которых самое маленькое больше половины самого большого.

6. Докажите, что в бесконечной последовательности целых чисел, попарно различных и больших единицы, найдётся а) сто, б) бесконечно много чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.

7. На доске написано нецелое положительное число. За одну операцию можно записать на доску квадрат одного из записанных на доске чисел либо неотрицательную разность двух записанных на доске чисел. При этом запрещается записывать на доску число, которое там уже есть. Докажите, что такими операциями можно получить на доске число, меньшее 1.