Серия 23. Геометрические преобразования IV.

1. а) Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

б) Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка O так, что $\angle OAD = \angle OCD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODC$.

3. (*лемма Архимеда*) В сегмент окружности ω, ограниченный хордой MN, вписана окружность, касающаяся ω в точке A, а MN в точке B. Докажите, что AB – биссектриса угла MAN.

4. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что: а) прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке Q; б) точка M лежит на отрезке PQ, причём$PM : MQ = 1 : 2$.

5. Пусть в трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а длины оснований — a и b. Проведем отрезок KL через точку O, параллельный основаниям трапеции. Тогда $KO = OL$ и $KL = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

6. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольникиABC и CDE; точки M и P – середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

7. Рассмотрим произвольные параллельные диаметры в двух неравных неконцентрических окружностях. Тогда точки пересечения пар прямых, проходящих через соответствующие концы этих диаметров, не зависят от выбора диаметров.

. . . .

Доделываем.

XX.6. M и N – середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $MN \le \frac{1}{2}(BC + AD)$.

XX.7. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектрисы внутренних углов A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D – в точке N. Докажите, что длина отрезка MN равна половине разности между суммой оснований и суммой боковых сторон трапеции.

XX.8. Даны две окружности S_1 и S_2 и прямая ℓ. Проведите прямую, параллельную ℓ, так, чтобы расстояние между точками пересечения этой прямой с окружностями S_1 и S_2 имело данную величину a.

XXI.6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O. Точки M и N – середины сторон CD и DE. Прямые AM и BN пересекаются в точке L. Докажите, что: а) треугольник ABL и четырехугольник $DMLN$ имеют равные площади; б) $\widehat{ALO} = \widehat{OLN} = 60^\circ$; в) $\widehat{OLD} = 90^\circ$.

XXI.7. Докажите, что середины оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

XXI.8. Дан угол и точка P внутри него. Постройте окружность, проходящую через P и касающуюся сторон угла.

XXII.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол B равен 30 градусам. Докажите, что периметр треугольника ACD не меньше длины BD.

XXII.3. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P – середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

XXII.4. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

XXII.5. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята произвольная точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на прямую A_2P, из вершины A_2 – на A_3P, из A_3 на A_4P, из A_4 – на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

XXII.6. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен R. На плоскости нарисована некоторая окружность радиуса $R/2$. Докажите, что существует такая точка O, что отрезки OA, OB и OC делятся этой окружностью пополам.

XXII.7. б) (Прямая Эйлера) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на одной прямой с ортоцентром и центром описанной окружности. В каком отношении она делит соединяющий их отрезок?

XXII.8. а) График функции $f(x) = x^2$ (то есть множество всех точек с координатами (x, x^2)) подвергли гомотетии с коэффициентом $a \neq 0$ и центром в начале координат. График какой функции получился?

б) Докажите, что любой график вида $y = x^2 + px + q$ отличается от графика $y = x^2$ параллельным переносом.