XLV Санкт-Петербургская ЛМШ

Группа C

М.И. Магин
Я.В. Нагибин
А.И. Ратьков

В данном файле находятся задачи и пунктирный конспект занятий группы C в XLV Санкт-Петербургской Летней Математической Школе, проходившей с 7 до 27 августа 2025г. в ДОЛ “Лесная сказка” близ деревни Средняя Ловать Старо-Русского района Новгородской области.

Составлением серий для группы C занимались А.С. Голованов и М.И. Магин, ликбезы читал М.И. Магин. Эта смена стала третьей по счёту для нашего городского кружка и самой урожайной по количеству выданных серий и поставленных плюсиков. Ниже Вы можете наблюдать статистику.

выдано серий	выдано задач	решено задач	гробов	решено суммарно
14	171	169	2	1220

Таблица 1: Статистика по задачам

Мы были рады видеть всех детей в лагере, наблюдать их невероятную продуктивность и тягу к знаниям. Надеемся увидеть всех в следующем году!

Искренне Ваши,
Матвей Ильич Магин,
Ярослав Владимирович Нагибин,
Андрей Игоревич Ратьков

Содержание

1 Серии

Серия 1: новые знания и умения • 9.08.2025

1. а) AM — медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

б) Докажите с помощью векторов, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

2. A, B, C, D, E, F – произвольные точки. Докажите, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$.

3. Сумма четырех единичных векторов равна нулю. Докажите, что среди них найдутся два противоположных.

4. Сумма чисел x и y равна 1. Найдите наибольшее значение выражения $xy^4 + \ x^4y$.

5. Решите уравнение $|x| + |x-1| + \cdots + |x-9| = 25$.

6. Положительные вещественные числа a, b и c удовлетворяют неравенству $0 < (a+b-c)(a+c-b) < 4bc$. Докажите, что $0 < (b+c-a)(b+a-c) < 4ac$.

7. Докажите, что $2x^4 + y^4 + xy^3 \geq 3x^2y^2 + x^3y$ для любых положительных x и y.

8. В последовательности целых чисел $\{a_n\}$ первый член равен k, а при $n \geq 1$ член a_{n+1} равен $a_n - 1$, если a_n четно, и $(a_n-1)/2$, если a_n нечетно. При каком наименьшем положительном k среди первых 2024 членов этой последовательности нет ни одного нуля?

Серия 2: зазерним • 10.08.2025

1. Из каждой из вершин параллелограмма проведены векторы в середины всех его сторон. Докажите, что их сумма равна $\overrightarrow{0}$.

2. Для положительных вещественных чисел x и y докажите неравенство $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

3. Докажите, что при любых целых a и b система уравнений $x+y+2z+2t = a$, $2x-2y+z-t = b$ разрешима в целых числах.

4. Из середины каждой стороны многоугольника отложен во внешнюю сторону вектор, равный по длине и перпендикулярный этой стороне. Докажите, что сумма построенных векторов равна $\overrightarrow{0}$.

5. Числа a, b, c, d таковы, что $a+b > |c-d|$ и $c+d > |a-b|$. Докажите, что $a+c > |b-d|$.

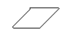
6. Пусть M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD, DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F — середина MP, G — середина NQ. Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет вчетверо меньшую длину с помощью векторов.

7. Докажите, что для любого натурального $n < 45$ существует такое целое число x, что $\left[\frac{2004}{x}\right] = n$ ($[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.)

8. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар A, B этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\overrightarrow{0}$.

Добавка 1: хорошее начало — половина дела! • 10.08.2025

1. Сумма нескольких неотрицательных чисел, не превосходящих 1, равна S. При каком наибольшем S эти числа заведомо можно разбить на две группы, в одной из которых сумма чисел не превосходит 8, а в другой не превосходит 4?

2. Прямоугольник, образованный линиями клетчатой бумаги, разбивается на фигурки трех видов: равнобедренные прямоугольные треугольники с основанием в две клетки  , квадраты из одной клетки  , и параллелограммы  , ограниченные двумя сторонами и двумя диагоналями клеток (фигурки могут быть ориентированы произвольным образом).

Докажите, что в любом разбиении количество фигурок третьего вида четно.

Серия 3: не меняем вектор • 11.08.2025

> И так как часто плывут корабли,
> на всех парусах по волнам спеша,
> физики “вектор” изобрели.
> Нечто бесплотное, как душа.
>
> И. Бродский, “Письмо в бутылке”.

1. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ перпендикулярны, то $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$.

2. Докажите неравенство $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ при $a, b \geq c > 0$.

3. В квадрате $ABCD$ размером 99×99 отметили 100×100 узлов и раскрасили их в четыре цвета – по 2500 узлов каждого цвета. Докажите, что суммы всех векторов, идущих из узлов I цвета в A, из узлов II цвета в B, из узлов III цвета в C и из узлов IV цвета в D, равна $\overrightarrow{0}$.

4. Докажите, что $[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$.

5. Для $0 < a, b < 1/2$ докажите неравенство $\frac{1-a}{1-b} + \frac{1-b}{1-a} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

6. Петя пишет последовательность: $a_1 = 2019$, $a_2 = 100$, $a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{2}{a_n}$ при $n \geq 2$. Докажите, что в этой последовательности встретится число 0 (после чего Петя прекратит ее писать).

7. $a > 1$ – натуральное число. Некоторые целые неотрицательные числа покрашены в зеленый цвет таким образом, что если число k зеленое, то числа $k+2a$ и $\left[\frac{k}{a}\right]$ тоже зеленые. Докажите, что все целые неотрицательные числа зеленые.

8. На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1979 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 векторов равна нулевому вектору.

Серия 4: искусство быть смирным • 12.08.2025

1. Проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{u}$ равны, и проекции $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{v}$, неколлинеарного $\vec{u}$, также равны. Докажите, что $\vec{a} = \vec{b}$.

2. На шахматной доске выбрана клетка. Сумма квадратов расстояний от её центра до центров всех черных клеток обозначена через a, а до центров всех белых клеток – через b. Докажите, что $a = b$.

3. Докажите, что произведение 99 дробей $\frac{k^3-1}{k^3+1}$, где $k = 2, 3, \ldots, 100$, больше 2/3.

4. Сумма n чисел равна S, и каждое из них меньше $\frac{S}{n-1}$.

а) Докажите, что все эти числа положительны.

б) Докажите, что сумма любых двух из них больше любого из оставшихся чисел.

в) Докажите, что сумма любых двух из них не меньше $\frac{S}{n-1}$

5. По окружности выписано 10 чисел, их сумма равна 100. Дано, что сумма любой тройки чисел, стоящих подряд, не меньше 29. Укажите наименьшее такое число A, что в любом таком наборе чисел каждое из чисел не превышает A.

6. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна $\vec{0}$.

7. Для $a, b, c, d > 0$ докажите $(a+b+c-d)(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c) \leq (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$.

8. Даны 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

Серия 5: время пришло • 13.08.2025

1. Найдите все положительные числа x такие, что $\left\{\frac{[x]}{x}\right\} + \left[\frac{\{x\}}{x}\right] = 1$.

2. Десять векторов таковы, что длина суммы любых девяти из них меньше длины суммы всех векторов. Докажите, что существует ось, проекции этих десяти векторов на которую имеют одинаковые знаки.

3. На плоскости дано $2n$ векторов, ведущих из центра правильного $2n$-угольника в его вершины. Сколько из них нужно взять, чтобы их сумма имела максимальную длину?

4. Докажите, что прямые, содержащие диагонали четырехугольника, взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон четырехугольника.

5. Известно, что $a(a+b+c) < 0$. Доказать, что $b^2 - 4ac > 0$.

6. Про положительные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 известно, что $b_1^2 \leq a_1c_1$, $b_2^2 \leq a_2c_2$. Докажите, что $(a_1 + a_2 + 5)(c_1 + c_2 + 2) > (b_1 + b_2 + 3)^2$.

7. Для $a, b, c > 0$ докажите неравенство $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

8. $a_1, \ldots, a_n$ – перестановка чисел $1, \ldots, n$. Какое наибольшее значение может принимать величина $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \cdots + |a_n - n|$?

Серия 6: привет с берегов Енисея • 14.08.2025

1. Пусть a, b, c и d — такие числа, что $ab = 1$ и $ac + bd = 2$. Докажите, что $cd \leq 1$.

2. $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{7}$. Найдите $\frac{x^4}{x^8-x^4+1}$.

3. Стороны a, b, c треугольника удовлетворяют неравенствам $a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$. Какое наибольшее значение может иметь площадь этого треугольника?

4. a, b, c, d – положительные вещественные числа. Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$.

5. Докажите, что корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (почти всегда) могут быть найдены по формуле $x_{1,2} = \frac{2c}{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}$. А когда не могут?

6. Докажите, что из двух квадратных уравнений: $19ax^2 + ax + 91b = 0$ и $19abx^2 - bx - 91 = 0$ хотя бы одно имеет вещественный корень.

7. Докажите для положительных чисел a и b неравенство $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b}) \geq \frac{8}{1+ab}$.

8. Даны два различных положительных числа a и b. Докажите, что найдутся два числа с разностью $\frac{1}{\max\{a,b\}}$ такие, что любое x, находящееся между этими числами, удовлетворяет уравнению $[ax + b] = [bx + a]$.

Письменная олимпиада • 14.08.2025

1. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записали по кругу в некотором порядке. Назовём записанное число *хорошим*, если оно равно сумме двух чисел, записанных рядом с ним. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел среди записанных?

2. В каждой клетке таблицы 100×100 записано одно из чисел 1 или -1. Могло ли оказаться, что ровно в 99 строках суммы чисел отрицательны, а ровно в 99 столбцах – положительны?

3. В трапеции $ABCD$ точка M – середина основания AD. Известно, что $\angle ABD = 90°$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90°$. Докажте, что $MF \perp CD$.

4. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

Серия 7: на любой вкус • 17.08.2025

1. Расставьте в клетках квадрата 3×3 вещественные числа так, чтоб сумма любых двух соседних по горизонтали чисел была равна 6, а произведение любых двух соседних по вертикали чисел было равно 4.

2. Про вещественные числа x_0, x_1, …, x_n известно, что $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$. Докажите неравенство $x_0 + \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{1}{x_1-x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geq x_n + 2n$.

3. Докажите, что $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$.

4. Найдите сумму $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^{k-1}}{2^k}\right] + \ldots$

5. Для простого числа p нашлось такое целое число x, что $x^2 + x + 3$ делится на p. Докажите, что найдется целое число y, для которого $y^2 + y + 25$ делится на p.

6. а) Могут ли при некотором вещественном a одновременно быть целыми числа $a + \sqrt{15}$ и $\sqrt{15} - \frac{1}{a}$?

б) Найдите все такие a.

7. Варвара написала на доске 4 положительных числа, причём произведение двух самых больших из них равно самому маленькому. Оказалось, что если она одновременно заменит каждое из чисел на удвоенное произведение всех остальных, то получит тот же самый набор чисел. Докажите, что все числа Варвары больше $1/2$.

8. (Формула Пика). Пусть V – число узлов внутри, а g – на границе

а) прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки,

б) прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки,

в) треугольника,

г) произвольного многоугольника

с вершинами в узлах целочисленной решетки.

Докажите, что его площадь $S = V + g/2 - 1$.

Серия 8: с новыми фактами • 18.08.2025

1. Докажите формулу для площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

2. Докажите *теорему синусов*: в треугольнике $a = 2R\sin\alpha$.

3. Докажите, что $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}$.

4. Пусть $p > 2$ – простое число. Величину $D = b^2 - 4ac$ мы назовем *дискриминантом* сравнения $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$. Докажите, что это сравнение

а) при $D \equiv 0 \pmod{p}$ имеет единственный корень (двойной);

б) при $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$ имеет два различных корня, а при $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ не имеет корней.

5. Числа a, b, c и d таковы, что для всякого числа x, для которого $cx + d \neq 0$ и $c_1x + d_1 \neq 0$, выполнено неравенство $(ax + b)/(cx + d) > (a_1x + b_1)/(c_1x + d_1)$. Докажите, что величина $(ax + b)/(cx + d) - (a_1x + b_1)/(c_1x + d_1)$ не зависит от числа x (для тех значений x, для которых оба знаменателя отличны от нуля).

6. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2+bx+c$. Сколько существует линейных функций $\ell(x) = mx + n$ таких, что $f(\ell(x))$ тождественно равно $f(x)$?

7. Даны положительные числа a, b, c и d. Докажите, что если $cd = 1$, то на отрезке с концами ab и $(a + c)(b + d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.

8. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d и e выполнено неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.

Серия 9: малость техническая • 19.08.2025

1. Выведите формулу для синуса суммы из формулы для косинуса разности.

2. Докажите, что в равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{ah_a}{b^2}$; б) $\sin\alpha = \frac{ah_a}{b^2}$; в) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$.

3. Высота h_c треугольника образует со стороной a угол α, а со стороной b – угол β. Докажите, что: а) $\sin(\alpha+\beta) = \frac{ch_c}{ab}$; б) $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{ch_c}{ab}$; в) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

4. Докажите, что в треугольнике а) $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$. б) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

5. Пусть a, b, c, d, e и f – некоторые числа, причем $a\cdot c\cdot e \neq 0$. Известно, что значения выражений $|ax + b| + |cx + d|$ и $|ex + f|$ равны при всех значениях x. Докажите, что $ad = bc$.

6. $a, b, c > 0$. Докажите неравенство: $\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geq 27$.

7. а) $x, y, z \geq 0$; $x + y + z = 1/2$. Докажите, что $\frac{1-x}{1+x}\frac{1-y}{1+y}\frac{1-z}{1+z} \geq \frac{1}{3}$.

б) $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$; $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1/2$. Докажите, что $\frac{1-x_1}{1+x_1}\frac{1-x_2}{1+x_2}\ldots\frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}$.

8. Вещественные числа a, b, c таковы, что $a + b \geq 0$, $b + c \geq 0$, $c + a \geq 0$. Докажите, что $a + b + c \geq (|a| + |b| + |c|)/3$.

Серия 10: я список кораблей прочел до середины • 21.08.2025

1. Докажите, что в остроугольном треугольнике

а) $a + b > 2R$;

б) $\sin\alpha + \sin\beta > 1$;

в) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \frac{3}{2}$.

2. Числа a и b лежат в отрезке $[0; 1]$. Докажите, что $\sqrt{a(1-b)}+\sqrt{b(1-a)} \leq 1$.

3. Докажите, что для биссектрисы треугольника имеет место формула $l_c = \frac{2ab\cos(\gamma/2)}{a+b}$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка X. Докажите, что $\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC}$.

5. Найдите $2\sin^2 10^\circ + \sin 70^\circ$.

6. Докажите неравенство $\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta \leq 2$.

7. Докажите, что в треугольнике а) $ab = 2Rh_c$; б) $abc = 4RS$.

8. Найдите $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$.

9. 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125, но дешевле, чем 126 Болтаев. Докажите, что на трех Шалтаев и одного Болтая рубля не хватит.

Серия 11: список кораблей никто не прочтёт до конца • 22.08.2025

1. *Модуль* комплексного числа z – это число $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$. Докажите, что $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

2. Каждому комплексному числу z поставлено в соответствие комплексное число $A(z)$ так, что $A(z_1)\neq A(z_2)$ при $z_1\neq z_2$. Известно, что для любых z_1 и z_2: а) $A(z_1+z_2)=A(z_1)+A(z_2)$, б) $A(z_1z_2)=A(z_1)\cdot A(z_2)$.

Докажите, что либо $A(z)=z$ при всех z, либо $A(z)=\overline{z}$ при всех z.

3. Каждое из чисел a, b и c не меньше 1/2 и не больше 1. Докажите неравенство $2\leq\frac{a+b}{1+c}+\frac{b+c}{1+a}+\frac{c+a}{1+b}\leq 3$.

4. Докажите, что если $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, то $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$.

5. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам $ab(c+d)\geq(a+b)cd$ и $ab+cd\geq(a+b)(c+d)$. Докажите, что $a+b>c+d$.

6. Среди чисел a, b, c и d два положительных и два отрицательных. Докажите, что $|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|\geq|a|+|b|+|c|+|d|$ при любом x.

7. Найдите последнюю цифру перед запятой в десятичной записи числа $\frac{10^{190}}{10^{10}+3}$.

8. Пусть $a_1\leq a_2\leq a_3\leq\dots\leq a_n$ и $b_1\leq b_2\leq b_3\leq\dots\leq b_n$ – два набора чисел, а b'_1, b'_2, b'_3, …, b'_n – некоторая перестановка чисел b_1, b_2, b_3, …, b_n. Докажите, что

а) $a_1b'_1+a_2b'_2+\dots+a_nb'_n\leq a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$,

б) $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\dots+a_nb_1\leq a_1b'_1+a_2b'_2+\dots+a_nb'_n$.

Серия 12: без причин, просто так — из уважения к огню • 23.08.2025

1. Решите систему уравнений $x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3$, $y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0$.

2. а) Докажите, что любая поворотная гомотетия на комплексной плоскости – линейная функция (то есть задаётся уравнением вида $f(z)=az+b$).

б) Докажите, что функция $f(z)=az+b$ при любых комплексных $a\neq 0$ и b задаёт на комплексной плоскости поворотную гомотетию или параллельный перенос.

3. Решите систему уравнений $\cos x+\cos y=\cos\alpha, \sin x+\sin y=\sin\alpha$.

4. Числа a, b, c лежат на отрезке $[0;1]$. Докажите неравенство $\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-a)(1-c)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}\leq 1+\sqrt{abc}$.

5. а) Пусть $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь с натуральными числителем и знаменателем. Докажите, что идущие после запятой цифры ее десятичной записи образуют периодическую последовательность (в которой, возможно, все члены, начиная с некоторого, равны 0).

б) Докажите, что длина периода меньше n.

в) Докажите, что если n взаимно просто с 10, то полученная дробь – чисто периодическая.

6. Докажите, что существует натуральное число n такое, что в записи числа $\sqrt{n}$ сразу после десятичной запятой подряд идут цифры 20252026.

7. Решите уравнение $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{n}] = 999$.

8. Решите систему уравнений: $(x+y)^3 = z$; $(y+z)^3 = x$; $(z+x)^3 = y$.

Добавка 2: когда Достоевский был раненый • 23.08.2025

1. Бинарная операция $\otimes$ на множестве $\mathbb{Z}$ такова, что

а) $x \otimes (x \otimes y) = y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$,

б) $(x \otimes y) \otimes y = x$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$.

Верно ли, что $x \otimes y = y \otimes x$ для любых $x, y \in \mathbb{Z}$?

2. Родион Романович подсчитал количество способов разбить полоску из n клеток на красные клетки, зелёные клетки и жёлтые доминошки. А Алёна Ивановна подсчитала количество способов разбить полоску из $2n+1$ клеток на желтые клетки, зелёные клетки и красные доминошки. Докажите, что при каждом натуральном n количество способов, подсчитанное Алёной Ивановной, делится на число, подсчитанное Родионом Романовичем.

Серия 13: гуманизированная до предела • 24.08.2025

1. Докажите формулу для площади треугольника: $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

2. Для углов α, β, γ справедливо неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}$.

3. Учитель написал на доске пример на сложение десятичных дробей. При переписывании в свою тетрадь Винтик в одном разряде первой дроби одну цифру заменил на другую, а Шпунтик – поставил десятичную запятую во второй дроби на одну позицию правее. Дома каждый правильно выполнил свое задание, и оказалось, что ответы у них совпали. Какую цифру на какую заменил Винтик?

4. У каждого из чисел $\frac{1}{2023}, \frac{2}{2023}, \ldots, \frac{2022}{2023}$ нашли вторую цифру после запятой в десятичной записи. Какая цифра встретилась больше раз – 6 или 7?

5. Назовем положительное вещественное число n *специальным*, если его десятичная запись содержит только цифры 0 и 7. Например, число 0,77 – специальное. При каком наименьшем n единица равна сумме n специальных чисел?

6. С написанными на доске положительными числами разрешается выполнить одну из двух следующих операций: 1) стереть произвольное число x и записать два раза число $\sqrt{x+1} - 1$; 2) стереть два произвольных числа x и y и записать число $x+y+xy$. Изначально на доске написано число a. Через несколько операций на доске оказалось написано одно число. Докажите, что оно равно a.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{z}; \\ \frac{z}{y} + \frac{y}{z} = \frac{1}{x}; \\ \frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{1}{y}. \end{cases}$$

8. Известно, что $a^5 - a^3 + a = 2$. Докажите, что $3 < a^6 < 4$.

Серия 14: повторение пройденного • 25.08.2025

1. Найдите все положительные конечные десятичные дроби, большие 1/10, которые увеличиваются ровно в два раза при вычеркивании некоторой цифры из их десятичной записи.

2. Последовательность $\{n_k\}$ определена рекуррентно: n_0 – некоторое натуральное число, а при $k \geq 0$ n_{k+1} – сумма кубов цифр десятичной записи n_k. Докажите, что последовательность $\{n_k\}$ периодична.

3. $\{a_n\}$ – последовательность натуральных чисел, $a_1 = 1$, $a_n < a_{n+1} \leq 10a_n$. Члены этой последовательности выписали в ряд один за другим. Докажите, что получившаяся последовательность цифр непериодична.

4. Докажите, что периодическая десятичная дробь является записью рационального числа.

5. Дано простое $p > 5$.

а) Докажите, что длины периодов всех дробей вида $\frac{k}{p}$, где k – натуральное число, меньшее p, одинаковы.

б) Докажите, что все числа, получаемые из периода дроби $\frac{1}{p}$ циклической перестановкой цифр (с учетом нулей в начале), делятся на него.

в) Как связаны между собой количество цифр в периоде дроби $\frac{1}{p}$ и количество периодов дробей вида $\frac{k}{p}$, не получающихся друг из друга циклической перестановкой цифр?

6. Докажите неравенства: а) $\sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}$, б) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha \leq 1$.

7. Докажите, что композиция двух поворотных гомотетий – поворотная гомотетия или параллельный перенос.

8. Последовательности x_n и y_n определены условиями $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_n - \frac{1}{2}y_n$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{\sqrt{3}}{2}y_n$. Найдите x_{2025}.

2 Векторы

2.1 Напраленные отрезки

Определение 2.1. *Направленным отрезком* будем называть упорядоченную пару точек на плоскости. Для отрезка AB будем обозначать это как $\overrightarrow{AB}$.

Будем называть два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ *эквивалетными* и писать $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, если выполнены следующие условия:

(1) $|AB| = |CD|$,

(2) $(AB) \parallel (CD)$ или $(AB) = (CD)$,

(3) (*сонаправленность*:)

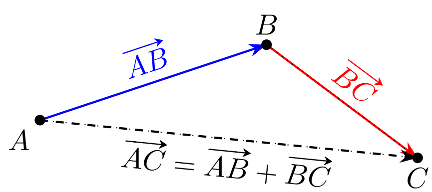
   (a) Если $(AB) \parallel (CD)$, то AB и CD по одну сторону от прямой (AC).

   (b) Если $(AB) = (CD)$, то или $[AB) \subset [CD)$ или наоборот.

Предложение 2.2. Эквивалентность, введённая в определении 2.1 в самом деле является отношением эквивалентности.

Определение 2.3. Определим *сумму* направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ по *правилу треугольника*:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}.$$



Замечание 2.4. Не стоит забывать, что в определении 2.3 треугольник может быть вырожденным, когда три точки A, B, C лежат на одной прямой.

Предложение 2.5. Сложение направленных отрезков ассоциативно, как только все слагаемые определены. Иными словами,

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}).$$

Определение 2.6. Для направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $k \in \mathbb{R}$ определим $k \cdot \overrightarrow{AB}$ как направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, где $C \in (AB)$ такова, что

- $|AC| = k \cdot |AB|$
- если $k \geq 0$, то $C \in [AB)$, а если $k < 0$, то $C \notin [AB)$.

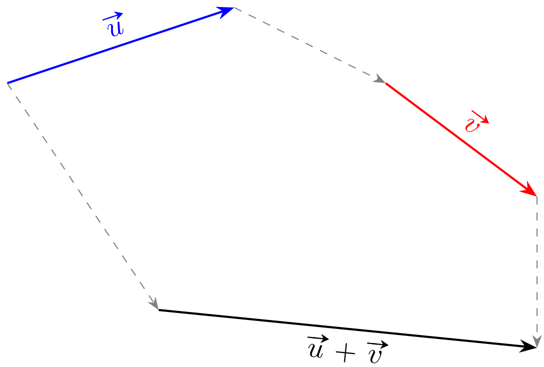
2.2 Векторы и операции над ними

Определение 2.7. *Вектором* мы будем называть класс эквивалентности направленных отрезков.

Соотвественно, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, если сооотв. им направленные отрезки эквивалентны.

Предложение 2.8 (Откладывание вектора от точки)**.** Для любой точки A_1 и направленного отрезка $\overrightarrow{A_0B_0}$ существует единственная точка B_1, для которой $\overrightarrow{A_0B_0} \sim \overrightarrow{A_1B_1}$.

Определение 2.9. *Сумму* $\vec{u} + \vec{v}$ векторов $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ по определению положим равной вектору $\overrightarrow{AC}$.



Предложение 2.10. Определение 2.9 корректно, то есть

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A_1B_1} \\ \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B_1C_1} \end{cases} \implies \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$$

Определение 2.11. *Нулевым вектором* $\vec{0}$ будем называть вектор $\overrightarrow{AA}$.

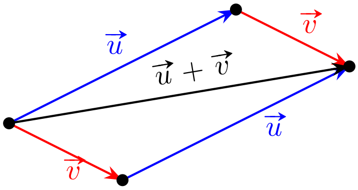
Предложение 2.12 (Свойства сложения векторов)**.** Сложение векторов (опредлённое выше) обладает следующими свойствами:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (коммутативность);

(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (ассоциативность);

(3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

Доказательство. (1): В самом деле, дополним треугольник $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ до параллелограмма. Так как это параллелограмм, напротив $\vec{u}$ тоже $\vec{u}$ и аналогично для $\vec{v}$. Значит, вектор, представляющий из себя диагональ параллелограмма равен как $\vec{u} + \vec{v}$, так и $\vec{v} + \vec{u}$.



(2) Следует из аналогичного свойства для направленных отрезков.

(3) Действительно, по определению: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB} \implies \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$. □

Определение 2.13. Определим умножение вектора $\vec{u}$ на $k \in \mathbb{R}$ так: пусть $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, а $k\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ (см. опр. 2.6); тогда положим $k\cdot\vec{u}:=\vec{v}$.

Предложение 2.14. Определение 2.13 корректно, т.е. если $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}$, то $k\cdot\overrightarrow{AB}\sim k\cdot\overrightarrow{CD}$.

Определение 2.15. Определим *противоположный* к вектору $\vec{v}$ как $-\vec{v}:=(-1)\cdot\vec{v}$. Определим разность векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ как $\vec{u}-\vec{v}:=\vec{u}+(-\vec{v})$.

Предложение 2.16. Справедливы следующие свойства:

(1) $\vec{u}-\vec{u}=\vec{0}$;

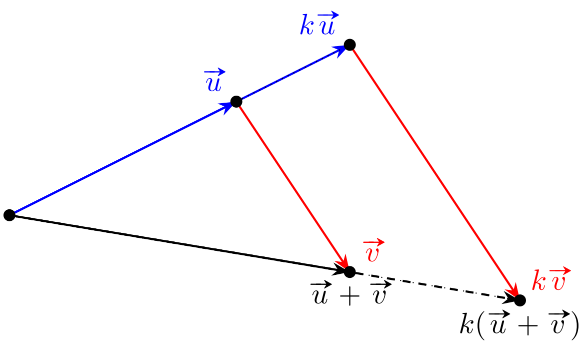
(2) $k\cdot(\vec{u}+\vec{v})=k\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{v}$;

(3) $(k+\ell)\cdot\vec{u}=k\cdot\vec{u}+\ell\cdot\vec{v}$;

(4) $k\cdot(\ell\vec{u})=(k\ell)\cdot\vec{u}$.

Доказательство. (1) $\vec{u}-\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

(2) Построим левую и правую часть по определению:



$$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$$

(3) и (4) проверяются непосредственно. □

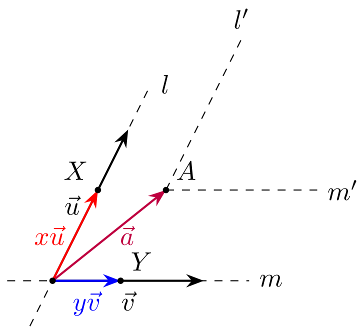
2.3 Коллинеарность и разложение по базису

Определение 2.17. Будем говорить, что вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ *коллинеарны* и писать $\vec{u} \parallel \vec{v}$, если $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.18. Пусть даны два неколлинеарных вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Тогда для любого вектора $\vec{a}$ существуют единственные $x, y \in \mathbb{R}$, для которых $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Доказательство. **Существование.** Отложим все векторы от одной точки O. Пусть $\vec{u}$ лежит на прямой r, $\vec{v}$ на прямой s. Пусть конец вектора $\vec{a}$ — это точка A. Проведём через A прямую $\ell \parallel \vec{v}$ и прямую $m \parallel \vec{u}$. Пусть $X := \ell \cap r$, $Y := m \cap s$. Тогда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$



Единственность. Предположим, что $\vec{a} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v}$, тогда $(x_1 - x_2)\vec{u} = (y_2 - y_1)\vec{v}$, то есть $\vec{u} = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)\vec{v}$. Это противоречит тому, что $\vec{u}$ и $\vec{v}$ неколлинеарны. □

Определение 2.19. Пару неколлинеарных векторов $(\vec{u}, \vec{v})$ называют *базисом*, выражение $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v}$ называют *разложением* $\vec{a}$ по базису $(\vec{u}, \vec{v})$, а пару чисел (x, y) — *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{u}, \vec{v})$.

Зафиксируем некоторый базис $(\vec{u}, \vec{v})$.

Предложение 2.20. $\vec{a}(x_1, y_1) + \vec{b}(x_2, y_2) = \vec{c}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Доказательство. В самом деле,

$$\vec{a} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}, \vec{b} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v} \implies \vec{c} = (x_1 + x_2)\vec{u} + (y_1 + y_2)\vec{v}.$$

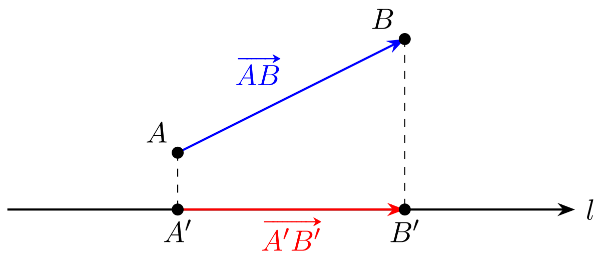
□

Если базис заранее фиксирован, бывает удобным опускать буквы в названии векторов и таким образом отождествлять их с их координатами. По некоторым причинам, удобнее думать, что эти пары чисел — столбцы высоты 2. Тогда действия с ними выглядят так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \qquad k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

2.4 Скалярное произведение векторов

Определение 2.21. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$ и направление ℓ. *Проекцией* $\overrightarrow{AB}$ на направление ℓ называют вектор $\mathrm{Pr}_\ell \overrightarrow{AB} := \overrightarrow{A'B'}$ где



Определим также число $\mathrm{pr}_\ell \overrightarrow{AB}$ так: оно равно $\pm|A'B'|$ в зависимости от того, сонаправлены ℓ и $\mathrm{Pr}_\ell \overrightarrow{AB}$ или нет.

Предложение 2.22. $\mathrm{Pr}_\ell(\vec{u} + \vec{v}) = \mathrm{Pr}_\ell(\vec{u}) + \mathrm{Pr}_\ell(\vec{v})$.

Доказательство. Нужно разобрать два случая: когда $\mathrm{pr}_\ell \vec{v} \cdot \mathrm{pr}_\ell \vec{u} \geq 0$ и когда < 0. Оба разбираются напрямую. □

Определение 2.23. *Скалярным произведением* векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ будем называть число

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \mathrm{pr}_{\vec{v}}\, \vec{u} \cdot |\vec{v}|.$$

Предложение 2.24. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

(1) (a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0 \iff \angle(\vec{u}, \vec{v})$ — острый.
 (b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0 \iff \angle(\vec{u}, \vec{v})$ — тупой.
 (c) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{u}$ или хотя бы один из векторов нулевой.

(2) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = |\vec{u}|^2$;

(3) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (симметричность);

(4) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (линейность).

Доказательство. (4) В самом деле, по предложению 2.22

$$\mathrm{pr}_{\vec{w}}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot |\vec{w}| = \mathrm{pr}_{\vec{w}}(\vec{u}) \cdot |\vec{w}| + \mathrm{pr}_{\vec{w}}(\vec{v}) \cdot |\vec{w}|,$$

из чего следует нужное. □

2.5 Неравенство КБШ на плоскости

Мы уже знаем одно неравенство с участием длин векторов: неравенство треугольника:

$$|\vec{v}+\vec{u}| \leq |\vec{v}|+|\vec{u}|.$$

Докажем еще одно:

Теорема 2.25 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, baby версия)**.** Для любых векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ справедливо неравенство

$$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|.$$

Равенство в нём достигается тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

Доказательство. В самом деле, так как катет короче гипотенузы, $|\operatorname{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u})| \leq |\vec{u}|$, откуда

$$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| = |\operatorname{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u})|\cdot|\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|.$$

Равенство в неравенстве $|\operatorname{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u})| \leq |\vec{u}|$ достигается тогда и только тогда, когда $\vec{v}$ и $\vec{u}$ коллинеарны. □

2.6 Скалярное произведение в координатах

Пусть $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ — базис. Будем называть его *прямоугольной* или *декартовой* системой координат, если

- $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$,
- $|e_1| = |e_2| = 1$.

Предложение 2.26. Пусть $\vec{u}(x_1, y_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2)$ — координаты векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ в прямоугольной системе координат $(\vec{u}, \vec{v})$. Тогда

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2}, x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}\rangle = x_1x_2|\vec{e_1}|^2+x_1y_2\langle\vec{e_1},\vec{e_2}\rangle+x_2y_1\langle\vec{e_1},\vec{e_2}\rangle+y_1y_2|\vec{e_2}|^2 =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2.$$

□

Следствие 2.27. Пусть $\vec{u}(x, y)$ — координаты вектора $\vec{u}$ в прямоугольной системе координат. Тогда

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Следствие 2.28 (Неравенство КБШ, baby-версия)**.** Для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2).$$

Равенство в нём достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = kx_2, y_1 = ky_2$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.29 (Неравенство КБШ)**.** Для вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ справедливо

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

Доказательство. Раскроем скобки в следующем, очевидно, неотрицательном выражении:

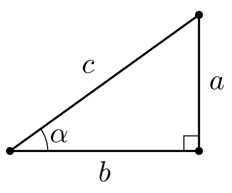
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j - a_jb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \sum_{j=1}^{n} b_ja_j =$$
$$= 2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \geq 0.$$

□

3 Тригонометрия

3.1 Тригонометрические функции острых углов

Определение 3.1. Рассмотрим прямоугольный треугольник с углом α, катетами длин a, b и гипотенузой длины c. Определим *синус, косинус, тангес и котангенс* угла α следующим образом:



$$\sin\alpha := \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha := \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha := \frac{b}{c} \qquad \operatorname{ctg}\alpha := \frac{b}{a}$$

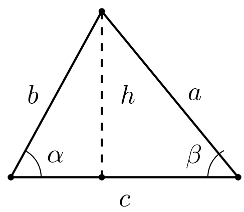
Замечание 3.2. Сразу отметим равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Предложение 3.3 (Основное тригоном. тождество)**.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Доказательство. Нам нужно показать, что $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$. Домножая это равенство на c^2, получаем теорему Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$. □

Пример 3.4. Рассмотрим такой остроугольный треугольник:

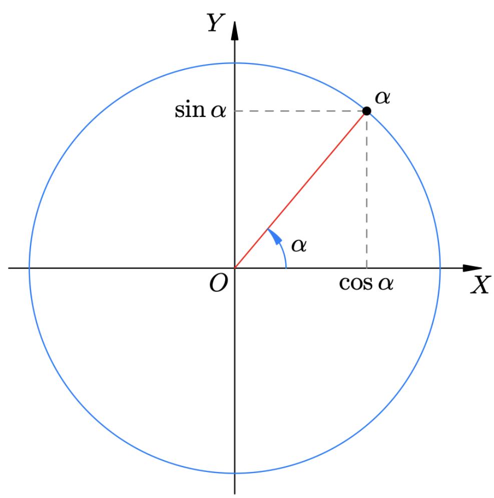


Длину высоты в нём можно вычислить как $h = b\sin\alpha = a\sin\beta$.

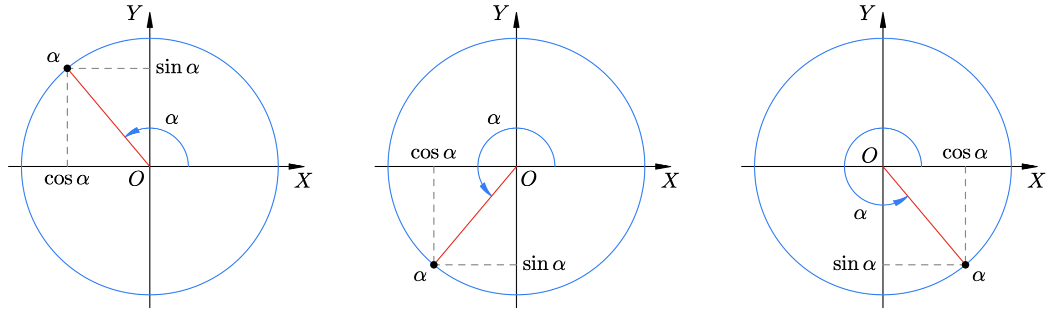
Определим теперь тригонометрические функции произвольного аргумента.

Определение 3.5. Рассмотрим на плоскости со стандартными прямоугольными координатами окружность ω с радиусом 1 и центром в точке $O = (0, 0)$. Всякому угол α (в том числе тупой, или даже больший $360°$) мы можем поставить во взаимно-однозначное соответствие точку на окружности ω (отмеряя угол от оси OX против часовой стрелки).

Будем называть *косинусом* угла α абсциссу этой точки, а *косинусом* угла её ординату.



Легко видеть, что для точек из первой координатной четверти это определение согласовано с предыдущим.



Замечание 3.6. Из этого определения сразу можно сделать такие наблюдения:

(1) $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1,$

(2) $\sin(90^\circ - x) = \cos x,\ \cos(90^\circ - x) = \sin x,$

(3) $\cos(x + 90^\circ) = -\sin x,\ \sin(x + 90^\circ) = \cos x,$

(4) $\sin(180^\circ - x) = \sin x,\ \cos 180^\circ - x = -\cos x,$

(5) $\sin(x + 180^\circ) = -\sin x,\ \cos(x + 180^\circ) = -\cos x,$

(6) $\sin(x + 360^\circ) = \sin x,\ \cos(x + 360^\circ) = \cos x.$

3.2 Связь со скалярным произведением

Теорема 3.7. Пусть ℓ — направление, $\vec{v}$ — вектор. Тогда $\mathrm{pr}_\ell\, \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \ell)$.

Доказательство. Возьмём $O \in \ell$ и пусть $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, а A' — проекция точки A на ℓ.

- Если $\angle(\vec{v}, \ell)$ — острый, то $\mathrm{pr}_\ell\, \vec{v} = |OA'|$; и, с другой стороны, из треугольника OAA' имеем $|OA'| = \cos\alpha |OA| = \cos\alpha |\vec{v}|$.
- Если же $\angle(\vec{v}, \ell)$ — тупой, то $\mathrm{pr}_\ell\, \vec{v} = -|OA'|$. В этом же случае $|OA'| = |OA| \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -|\vec{v}| \cdot \cos\alpha$, чего мы и хотели.

□

Теорема 3.8. Рассмотрим стандартную прямоугольную систему координат на плоскости. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A, образующий угол α с осью OX. Тогда вектор $\vec{a}$ имеет координаты $x = |\vec{a}| \cos\alpha,\ y = |\vec{a}| \sin\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим вектор $\vec{e}$ единичной длины, сонаправленный с вектором $\vec{a}$ (т.е. вектор $\vec{a}/|\vec{a}|$). По определению синуса и косинуса мы имеем

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \implies \vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \\ |\vec{a}| \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$$

□

Следствие 3.9. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по следующей формуле:

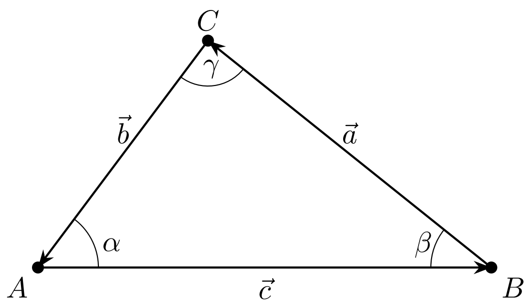
$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Доказательство. Сразу следует из теоремы 3.7 и определения скалярного произведения. □

Теорема 3.10 (Теорема косинусов)**.** В треугольнике $\triangle ABC$ со сторонами $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$ справедливо

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C.$$

Доказательство. Положим $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \overrightarrow{AB} = \vec{c}$, тогда



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \implies c^2 = \langle\vec{c}, \vec{c}\rangle = \langle\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\rangle = a^2 + b^2 - 2\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle.$$

По следствию 3.9 имеем $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$. □

Скалярное произведение крайне продуктивно прилагать, в частности, к доказательствам тригонометрических тождеств. Приведём один из ярких примеров.

Теорема 3.11. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Доказательство. Отметим на тригонометрической окружности точки A и B так что

$$\angle XOA = \alpha, \quad \angle XOB = \beta.$$

Тогда $\angle BOA = \alpha - \beta$. Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$$\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\rangle = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

С другой же стороны, мы знаем как выглядят координаты этих векторов в прямоугольной системе координат:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}\cos\beta \\ \cos\alpha\end{pmatrix},$$

откуда,

$$\cos(\alpha - \beta) = \langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\rangle = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta.$$

□

4 Комплексные числа

4.1 Кубические уравнения и мотивировка

После того как люди научились решать в радикалах квадратные уравнения (а это, как мы помним, умели еще древние вавилоняни), их интриговал вопрос о том, как решать уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$. А точнее, как получить формулу для его корней в терминах его коэффициентов.

Итак, рассмотрим уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$. Сделаем сначала замену $y := x-\frac{a}{3}$. Подставляя, имеем

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0.$$

Раскроем скобки:

$$y^3-3y^2\cdot\frac{a}{3}+3y\cdot\frac{a^2}{9}+\frac{a^3}{27}+ay^2-2y\cdot\frac{a}{3}+a\cdot\frac{a^2}{9}+by-b\cdot a3+c=0.$$

Сокращая, мы видим, что мы смогли убить слагаемое с y^2. Значит, нам достаточно рассматривать уравнения вида

$$x^3+px+q=0.$$

Теперь сделаем замену $x=u+v$:

$$u^3+v^3+3u^2v+3v^2u+pu+pv+q=0,$$

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0.$$

Предположим, что $uv=-p/3$. Тогда уравнение сводится к тому, что $u^3+v^3=-q$. Итого, имеем систему

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \end{cases}.$$

Как мы уже знаем, это квадратное уравнение:

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0 \implies t=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

откуда

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\quad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Итого, так как $x=u+v$, мы получаем следующую чудесную формулу:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (*)$$

Теперь попробуем посмотреть, что же произошло на самом деле. Рассмотрим кубическое уравнение

$$(x-1)(x-2)(x+3)=0.$$

Мы прекрасно знаем, какие у него корни — это числа $1, 2$ и -3. С другой стороны, раскроем скобки:

$$(x-1)(x-2)(x+3)=(x^2-3x+2)(x+3)=x^3-7x+6=0,$$

то есть $p=-7, q=6$. А теперь попробуем найти корни по формуле ($*$):

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=9-\frac{343}{27}=\frac{-100}{27},$$

а это число стоит в формуле под квадратным корнем. Что же произошло?

4.2 Комплексные числа

Определение 4.1. *Комплексным числом* будем называть упорядоченную пару вещественных чисел $z=(a,b)$. Множество комплексных чисел мы будем обозначать буквой $\mathbb{C}$.

Снабдим теперь множество $\mathbb{C}$ операциями сложения и умножения. А именно, *сумму* комплексных чисел $z=(a,b)$ и $w=(c,d)$ покоординатно:

$$z+w:=(a+c,b+d),$$

а *произведение* по формуле

$$z\cdot w=(ac-bd,ad+bc).$$

Предложение 4.2. Операции с комплексными числами обладают следующими свойствами:

(1) $z+w=w+z$,

(2) $(z+w)+v=z+(w+v)$,

(3) существует (единственный) нейтральный элемент по сложению $0\in\mathbb{C}$, т.е. такое комплексное число, что для любого $z\in\mathbb{C}$ справедливо $z+0=0+z=z$. В самом деле, это число $0=(0,0)$.

(4) Для любого $z\in\mathbb{C}$ существует единственное $w\in\mathbb{C}$ такое, что $z+w=0$. Его мы обозначаем как $-z$.

(5) $z\cdot w=w\cdot z$.

(6) $(z\cdot w)\cdot v=z\cdot(w\cdot v)$.

(7) существует (единственный) нейтральный элемент по умножению $1 \in \mathbb{C}$, т.е. тако комплексное число, что для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.

(8) Для любого $0 \neq z \in \mathbb{C}$ существует единственное $w \in \mathbb{C}$ такое, что $z \cdot w = 1$. Его мы обозначаем как $1/z$.

(9) $z(w + v) = zw + zv$.

Доказательство. Набор непосредственных проверок, в данном тексте мы его не приводим. Свойство (8) мы докажем несколько позже. □

Вложение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$.

Заметим, что если $z = (a, 0)$, $w = (b, 0)$, то их сложение и умножение совпадает "обычным" сложением и умножением вещественных чисел:

$$z \cdot w = (ab, 0), \quad z + w = (a + b, 0).$$

Это некоторым образом намекает, что вещественные числа можно вложить в комплексные. А именно, определим отображение

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = (x, 0) \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, что оно инъективно. Кроме того, оно сохраняет сложение и умножение, то есть $f(xy) = f(x)f(y)$ и $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Также, $(x, 0) \cdot (a, b) = (xa, xb)$ и $(x, 0)^{-1} = (\frac{1}{x}, 0)$.

С этого момента комплексные числа вида $(a, 0)$ мы будем писать просто как a.

Заметим теперь, что по нашему определению умножения в $\mathbb{C}$ для $z = (0, 1)$ имеет место равенство $z^2 = (-1, 0)$.

Определение 4.3. *Мнимой единицей* будем называть комплексное число $i :=\ (0, 1)$.

Замечание 4.4. Таким образом, $i^2 = -1 \in \mathbb{C}$.

Предложение 4.5. Для любого $z \in \mathbb{C}$ существуют единственные $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $z = a + bi$.

Доказательство. По определению

$$a + bi = (a, 0) + b \cdot (0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

Значит, если $z = (x, y)$ то достаточно положить $a = x$ и $b = y$. □

Такая форма записи удобна тем, что в ней определённое нами ранее умножение превращается в обычное раскрытие скобок! Действительно,

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = ac-bd+(ad+bc)i, \quad (a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Определение 4.6. Для комплексного числа $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ *сопряженным* к нему назовём комплексное число $\bar{z} := a - bi$.

Предложение 4.7. Операция сопряжения обладает следующими свойствами:

(1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,

(2) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,

(3) $\bar{\bar{z}} = z$.

Определение 4.8. Комплексные числа вида yi, где $y \in \mathbb{R}$, называют *чисто мнимыми*.

Для комплексного числа $z = a + bi$ вещественное число a называют *вещественной частью* z, а вещественное число b — *мнимой частью* z. Мы будем использовать вот такие обозначения: $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$.

Отметим сразу несколько свойств:

(1) $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$,

(2) $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$,

(3) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$,

(4) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.

(5) $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

В частности, мы можем восстанавливать вещественную и мнимую часть по вот таким формулам:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Определение 4.9. *Норма* числа $z \in \mathbb{C}$ — это $\mathrm{N}(z) := z\bar{z} = a^2 + b^2$. *Модуль* комплексного числа z — это $|z| := \sqrt{\mathrm{N}(z)}$.

Предложение 4.10. Норма мультипликативна, то есть $\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \mathrm{N}(zw) = \mathrm{N}(z)\,\mathrm{N}(w)$.

Доказательство. Действительно, это простая проверка, использующая свойство (2) из предложения 4.7:

$$\mathrm{N}(zw) = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = \mathrm{N}(z)\,\mathrm{N}(w).$$

□

Давайте теперь распишем этот факт: пусть $z = a + bi$, $w = c + di$, тогда равенство из 4.10 означает в точности, что

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2.$$

К примеру, если $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, мы получили интересный теоретико-числовой факт: произведение чисел, представимых в виде суммы квадратов двух натуральных чисел само представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Также из этих свойств следует следующее предложение:

Предложение 4.11. Любое комплексное число $z = a + bi$ является корнем уравнения с **вещественными** коэффициентами, а именно, уравнения

$$t^2 - 2\operatorname{Re}(z)t + \mathrm{N}(z) = 0.$$

Оказывается, можно сказать и немного больше.

Предложение 4.12. Любое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексное решение.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $t^2 + pt + q = 0$. Если $D \geq 0$, то у него есть вещественное решение (оно, в частности, комплексное).

Как мы помним, $\left(t + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4} = \frac{D}{4} < 0$. Пусть $t_1 + \frac{p}{2} = i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ (заметим, что теперь число под корнем положительное), тогда

$$\left(t_0 + \frac{p}{2}\right)^2 = i^2\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4}.$$

Значит, t_0 — корень.

Лемма 4.13. Для любого вещественного $x < 0$ существуют два комплексных числа $z = \pm i\sqrt{-x}$ таких что $z^2 = x$.

Значит, мы имеем даже два комплексных корня:

$$t_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

$\square$

Предложение 4.14 (Свойство (8))**.** Для любого $0 \neq z \in \mathbb{C}$ существует единственное $w \in \mathbb{C}$ такое, что $z \cdot w = 1$. Его мы обозначаем как $1/z$.

Доказательство. Пусть $z = a + bi \neq 0$, тогда $z\overline{z} = a^2 + b^2 > 0$. Заметим, что

$$\frac{z\overline{z}}{a^2 + b^2} = 1 \implies \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{1}{z}$$

$\square$

4.3 Геометрическое представление комплексных чисел

Как многие из Вас уже догадались, со всяким комплексным числом $z = a + bi$ можно связать точку плоскости с евклидовыми координатами (a, b), или же, её радиус-вектор с теми же координатами в прямоугольной системе координат.

Естественно, сложению этих векторов соотвествует обычное сложение комплексных чисел:

$$\vec{v}(a, b) + \vec{u}(c, d) = \vec{w}(a + c, b + d) \leftrightarrow (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Но, в отличие от векторов, комплексные числа можно еще и умножать. Поймём, чему это соотвествует геометрически.

Для начала, вспомним, что умножение на вещественное число $\lambda \in \mathbb{R}$ — это гомотетия с коэффициентом λ и центром в нуле:

$$H_O^{\lambda}(a, b) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b).$$

Рассмотрим комплексное число $z = a + bi \neq 0$, для него найдётся $r \in \mathbb{R}_{>0}$ такое, что $rw = z$ и w лежит на единичной окружности. Если $w = x + iy$, то мы знаем, что $x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi$ для некоторого угла φ. Так мы смогли записать z в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Заметим, что

$$\mathrm{N}(z) = \mathrm{N}(r)\,\mathrm{N}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2 \cdot 1 = r^2 \implies |z| = r.$$

Поймём также, как эти новые координаты связаны с предыдущими:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}.$$

Определение 4.15. *Аргументом* (ненулевого!) комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется любой из углов φ, таких, что

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Аргумент числа z мы будем обозначать как $\arg(z)$.

Замечание 4.16. Аргумент определён с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Т.е. для $\varphi_1, \varphi_2\colon\ \arg(z) = \varphi_1 = \varphi_2$ мы имеем $\varphi - \varphi_2 = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $z = |z|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда $\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$, откуда

$$\begin{cases}\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2\\ \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2\end{cases} \implies \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

□

Определение 4.17. Запись в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой записи* комплексного числа $z \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Теорема 4.18. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2 \cdot (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

□

Следствие 4.19. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Следствие 4.20. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда отображение $w \mapsto w \cdot z$ — это поворотная гомотетия на угол φ с коэффициентом r, т.е. композиция поворота на φ против часовой стрелки и гомотетии с коэффициентом r и центром в нуле.

5 Вопросы к зачёту

Список вопросов:

(1) Векторы: определение, сложение, свойства сложения, умножение на число.

(2) Коллинеарные векторы, теорема о разложении по базису, координаты вектора в базисе и их поведение при операциях с векторами.

(3) Проекция вектора на направление: определение, проекция суммы.

(4) Скалярное произведение: определение и свойства.

(5) Неравенство КБШ на плоскости (без координат и с ними), неравенство треугольника (без координат и с ними).

(6) Прямоугольные координаты; скалярное произведение в прямоугольных координатах, формула для длины вектора в терминах координат.

(7) Неравенство КБШ для n переменных.

(8) Транснеравенство (задача 11.8).

(9) Определение тригонометрических функций (произвольного аргумента!). Поведение при добавлении $\pm 90°, \pm 180°, \pm 360°$.

(10) Табличные значения тригонометрических функций (углы $30°, 45°, 60°, 90°$).

(11) Проекция в терминах косинуса. Полярные координаты. Скалярное произведение в терминах косинуса угла между векторами.

(12) Теорема косинусов.

(13) Формула для площади треугольника (задача 8.1), теорема синусов (8.2).

(14) Формула для биссектрисы (задача 9.3), отношения через синусы (9.4). $S = abc/4R$ (9.7).

(15) Формула для косинуса разности. Формулы для косинуса суммы, синуса суммы и разности, как её следствия.

(16) Определение комплексных чисел, определение суммы и произведения. Проверка свойств сложения (коммутативность, ассоциативность, существование нуля и обратного). Проверка коммутативности умножения.

(17) Определение комплексных чисел, определение суммы и произведения. Проверка ассоциативности умножения, существование единицы и обратного по умножению.

(18) Вложение вещественных чисел в комплексные, мнимая единица, запись в виде $a + bi$. Сопряжение и его свойства.

(19) Мнимая и вещественная части, их свойства. Норма комплексного числа и её мультипликативность, модуль комплексного числа. Любое комплексное число — корень квадратного уравнения с вещественными коэффициентами.

(20) Формула для корней квадратного уравнения. Дискриминант, связь его знака со знакоопределённостью квадратного трёхчлена. Любое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень.

(21) Геометрическое представление комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи, модуль и аргумент. Умножение на комплексное число — поворотная гомотетия, прибавление комплексного числа — параллельный перенос.

(22) Формула Муавра для z^n в тригонометрической форме.

. . . .

Список задач:

- **Векторы.** 1.1, 1.2, 2.4, 2.8, 3.1, 3.8, 4.1, 4.6, 4.8, 5.4;
- **Тригонометрия.** 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 10.1, 10.3, 10.4.

6 Обозначения

Общекультурные:

- $\forall$ — для любого
- $\exists$ — существует
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — натуральные, целые, рациональные, вещественные, комплексные числа
- $a \in X$ — x принадлежит A
- $A \subset B$ — A — подмножество B

Геометрия:

- (AB) — прямая, проходящая через точки A и B.
- $[AB)$ — луч с началом A
- $|AB|$ — длина отрезка AB.
- $\overrightarrow{AB}$ — направленный отрезок с началом в A и концом в B.
- $|\vec{v}|$ — длина вектора $\vec{v}$.
- $\overrightarrow{r_A}$ — радиус-вектор точки A.
- $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ — проекция вектора $\vec{u}$ на направление вектора $\vec{v}$.
- $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — вектор $\vec{v}$ имеет координаты x, y в стандартной прямойгольной системе координат на плоскости, т.е. $\vec{v} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$.