Серия 30(b), Тригонометрия, комплексные числа II.

1. Докажите неравенства: а) $\sin\alpha+\cos\alpha\le\sqrt{2}$, б) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\le 1$.

2. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вершины которых занумерованы по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, равные соответственно векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$. Докажите, что точки A, B, C также являются вершинами равностороннего треугольника.

3. Каждую сторону n-угольника в процессе обхода по часовой стрелке продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков служат вершинами правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник – правильный.

4. При помощи комплексных чисел докажите, что прямые, содержащие диагонали четырехугольника, взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон четырехугольника.

5. На плоскости дано $2n$ векторов, ведущих из центра правильного $2n$-угольника в его вершины. Сколько из них нужно взять, чтобы их сумма имела максимальную длину?

6. (**важная задача!**) а) Докажите, что геометрическое преобразование, сопоставляющее точке с комплексной координатой z точку с комплексной координатой $z'=az+b$ — параллельный перенос, поворот, гомотетия или поворотная гомотетия, и выясните, какое именно, при каждых a и b.

б) Докажите, что композиция двух поворотов (вообще говоря, с разными центрами) – поворот или параллельный перенос, и выясните, что именно, в зависимости от центров и углов поворотов.

в) Докажите, что любая поворотная гомотетия на комплексной плоскости – линейная функция комплексного аргумента (то есть задаётся уравнением вида $f(z)=az+b$).

г) Докажите, что композиция двух поворотных гомотетий – поворотная гомотетия или параллельный перенос.

7. Последовательности x_n и y_n определены условиями $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}x_n-\frac{1}{2}y_n$, $y_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{\sqrt{3}}{2}y_n$. Найдите x_{2025}.