Геометрические преобразования

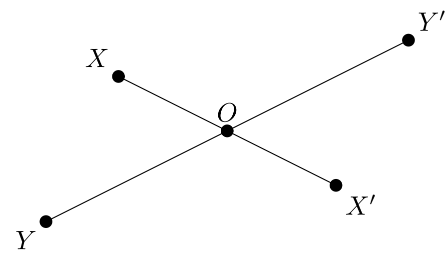
В этом тексте буква П обозначает множество точек плоскости.

Определение 1. *Преобразованием плоскости* будем называть взаимно однозначное отображение $F\colon \Pi \to \Pi$.
Будем говорить, что $X \in \Pi$ — неподвижная точка преобразования F, если $F(X) = X$.

Приведём несколько примеров, близких и знакомых читателю с раннего детства.

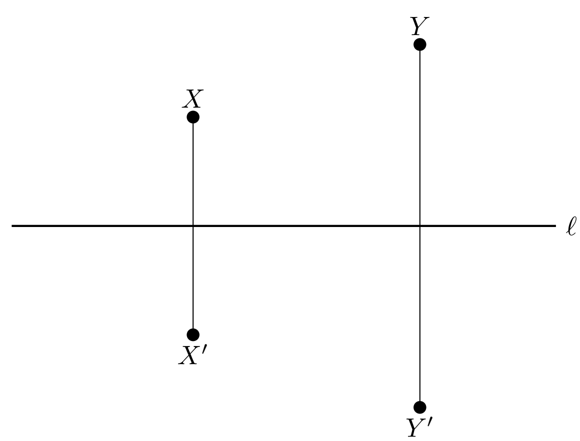
1. Есть *тождественное преобразование* плоскости, которое каждой точке $P \in \Pi$ сопоставляет её же саму, то есть $F(P) = P$ для всякой $P \in \Pi$.

2. *Центральная симметрия.* Выберем точку $O \in \Pi$ и определим преобразование *центральной симметрии* (с центром O) $Z_O(X) = X'$, где X' лежит на луче $[XO)$ и $|XO| = |OX'|$.



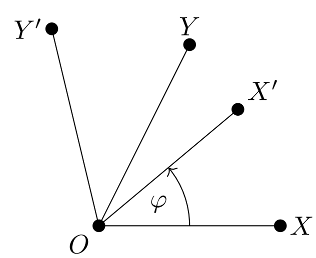
Ясно, что единственная неподвижная точка Z_O — это центр симметрии, то есть точка O.

3. *Осевая симметрия.* Выберем прямую $\ell \subset \Pi$ и определим преобразование *осевой симметрии* (с осью ℓ) $Z_\ell(X) = X'$, где $XX' \perp \ell$, и точка пересечения XX' с ℓ — середина отрезка XX'.



Ясно, что все неподвижные точки преобразования Z_ℓ — это сама ось ℓ.

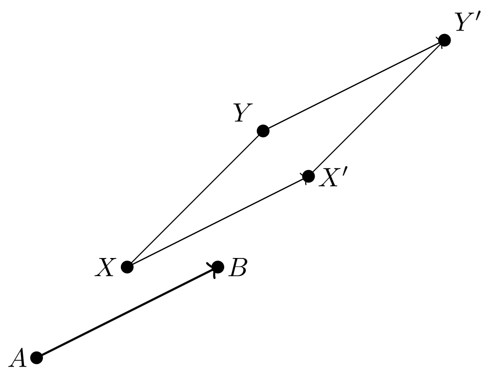
4. *Поворот.* Определим *поворот* R_O^φ с центром в точке $O \in \Pi$ на угол φ так: $R_O^\varphi(X) = X'$, где $|OX| = |OX'|$, $\angle XOX' = \varphi$ (подчеркнем, что поворот осуществляется it против часовой стрелки!).



Единственная неподвижная точка поворота — это его центр.

5. *Параллельный перенос.* Зафиксируем направление $\vec{\ell}$ (т.е. направленную прямую) и выберем на ней отрезок длины AB. Тогда *параллельный перенос* в направлении $\vec{\ell}$ на $|AB|$ — это преобразование плоскости $T_{\vec{\ell},|AB|}$, посоставляющее точке X точку X' так, что $AXX'B$ — параллелограмм и лучи $[XX')$ и $[AB)$ сонаправлены.

   В частности, для любой другой точки Y верно следующее: если $Y' = T_{\vec{\ell},|AB|}(Y)$, то $XYY'X'$ — параллелограмм.

   У параллельного переноса нет неподвижных точек.

6. *Антипример:* Выберем точку $O \in \Pi$ и такую функцию $F\colon \Pi \to \Pi$, которая всякой точке $P \in \Pi$ сопоставляет точку O, то есть $F(P) = O$ для любой $P \in \Pi$. Такая функция, естественно, не является геометрическим преобразованием.

Определение 2. Преобразование плоскости $F\colon \Pi \to \Pi$ называют *движением*, если оно не изменяет расстояния между точками, то есть: для любых $A, B \in \Pi \quad |F(A)F(B)| = |AB|$.

Упражнение 1. Докажите, что преобразования 1-5 из примеров выше являются движениями. Проверьте, что преобразование подобия не является движением.

Определение 3. Пусть $F\colon \Pi \to \Pi$ и $G\colon \Pi \to \Pi$ — преобразования плоскости. Их *композицией* называют преобразование плоскости, которое переводит точку $P \in \Pi$ в $G(F(P))$. То есть, мы сначала действуем преобразованием F, а потом к тому, что получилось мы применяем преобразование G. Композицию преобразований F и F обозначают как $G \circ F$.

Пример 1. К примеру, ясно, что $R_O^{30^\circ} \circ R_O^{60^\circ} = R_O^{60^\circ} \circ R_O^{30^\circ} = R_O^{90^\circ}$. Но вообще говоря, обычно порядок записи важен. К примеру, если у поворотов разный центр, то порядок их применения важен! (**проверьте это:** нарисуйте в тетрадке композицию в одном порядке и в другом).