

Серия 28(а). Освежим гомотетию.

Напомним, что *гомотетией с коэффициентом k и центром O* называют преобразование плоскости H_O^k , переводящее точку P в такую точку P' , что $\overrightarrow{P'O} = k \cdot \overrightarrow{PO}$.

Упражнение. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. **Сдать письменно на листочке в начале занятия.**

1. Докажите, что любое подобие есть композиция гомотетии и движения.

2. а) Докажите, что для любых двух неравных неконцентрических окружностей ω_1 и ω_2 существуют **ровно две** гомотетии H_A и H_B , переводящие ω_1 в ω_2 . При этом, точки A и B являются точками пересечения прямых, проходящих через концы диаметров, перпендикулярных линии центров

б) Рассмотрим произвольные параллельные диаметры в двух неравных неконцентрических окружностях. Тогда точки пересечения пар прямых, проходящих через соответствующие концы этих диаметров, не зависят от выбора диаметров

3. (*Окружность Эйлера*) а) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно стороны и середины стороны, лежат на описанной окружности. Более того, точка, центрально-симметричная ортоцентру, диаметрально противоположна вершине треугольника.

б) Докажите, что в треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.

4. (*Теорема о трёх колпаках*) а) Для двух гомотетий $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$ постройте такую точку O_3 на прямой O_1O_2 , что $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}(O_3) = O_3$.

б) Докажите, что композиция двух гомотетий $H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2}$ есть гомотетия $H_{O_3}^{k_3}$, где $k_3 = k_1k_2$, а точка O_3 лежит на прямой O_1O_2 .

в) Рассмотрим три окружности, ни одна из которых не лежит внутри другой. Точки пересечения пар внешних касательных, проведенных к любым двум окружностям, лежат на одной прямой.

г) Из пункта а) выведите теорему Менелая.

5. (*теорема Дезарга*) Рассмотрим пару треугольников ABC и $A'B'C'$ с попарно параллельными сторонами. Тогда эти треугольники гомотетичны, причем гомотетия, переводящая один треугольник в другой, единственна. (Мы считаем, что параллельный перенос — тоже гомотетия; почему — станет понятно попозже.)

6. Из точки P , лежащей на радикальной оси окружностей, таких, что одна не лежит внутри другой, провели к ним касательные PA и PB , причём обе окружности лежат внутри угла APB . Докажите, что прямая AB проходит через точку пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

7. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга: ω_A , ω_B , ω_C . Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг ω касается внешним образом их всех в точках A_0 , B_0 и C_0 . Докажите, что прямые AA_0 , BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке.

Приложение — свойства гомотетии, которые мы уже знаем:

1. Переводит прямые в прямые; окружности в окружности.
2. Если точки лежат на одной прямой, то их образы тоже, причём порядок точек на прямой сохраняется.
3. Если точки на одной окружности, то и образы на одной окружности.
4. Сохраняет отношение отрезков.
5. Сохраняет углы.
6. Параллельные прямые переходят в параллельные прямые, а пересекающиеся — в пересекающиеся.
7. Касательные переходят в касательные, секущие — в секущие.
8. Точка, её образ при гомотетии и центр гомотетии — на одной прямой.
9. Для любой пары окружностей (ω_1, O_1) , (ω_2, O_2) существует гомотетия, переводящая ω_1 в ω_2 . Её коэффициент равен \pm отношению радиусов, причём в некоторых случаях мы умеем строить её центр (сравните с задачей 2):
 - Если ω_1 и ω_2 концентрические, т.е. $O_1 = O_2$, то $O = O_1 = O_2$;
 - Если они касаются, то центр в точке касания.
 - Если они не равны, не концентрические и одна не лежит внутри другой, то O — это точка пересечения общих внешних касательных.