Серия 29(b), Тригонометрия, комплексные числа I.

Напомним, что по определению $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, bc + ad) \in \mathbb{C}$.

0. Докажите, что умножение комплексных чисел *ассоциативно*, т.е. что для $z = (a, b), w = (c, d)$ и $u = (e, f)$ имеет место равенство $z \cdot (w \cdot u) = (z \cdot w) \cdot u$.

1. *Модуль* комплексного числа z – это число $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Докажите, что $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2. Каждому комплексному числу z поставлено в соответствие комплексное число $A(z)$ так, что $A(z_1) \neq A(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Известно, что для любых z_1 и z_2: а) $A(z_1 + z_2) = A(z_1) + A(z_2)$, б) $A(z_1 z_2) = A(z_1) \cdot A(z_2)$.

Докажите, что либо $A(z) = z$ при всех z, либо $A(z) = \bar{z}$ при всех z.

3. Докажите формулу для площади треугольника: $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

4. Для углов α, β, γ справедливо неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}$.

5. Найдите $2\sin^2 10^\circ + \sin 70^\circ$.

6 . Числа a, b, c лежат на отрезке $[0; 1]$. Докажите неравенство $\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leq 1 + \sqrt{abc}$.

7. Решите систему уравнений $\cos x + \cos y = \cos\alpha, \sin x + \sin y = \sin\alpha$.