Метод Штурма

Пример 1. Рассмотрим $x, y \in \mathbb{R}$ с $x + y = 1$. Заменим их на пару x', y', расположенные ближе, чем x, y: $|x' - y'| \le |x - y|$ с сохранением суммы: $x' + y' = x + y = 1$. Как при этом изменятся $xy, x^2 + y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

Так как рассматриваемые выражения симметричны по x, y, без ограничения общности мы можем полагать, что $x \le y$. Тогда $x = \frac{1}{2} - t$, $y = \frac{1}{2} + t$ для некоторого $t \ge 0$. Имеем:

- $xy = \left(\frac{1}{2} - t\right)\left(\frac{1}{2} + t\right) = \frac{1}{4} - t^2$. Ясно, что такая функция возрастает при уменьшении t и максимальна при $t = 0$, то есть, когда числа равны.
- $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + t\right)^2 = \frac{1}{4} - t + t^2 + \frac{1}{4} + t + t^2 = \frac{1}{2} + 2t^2$. Такая функция наоборот убывает при уменьшении t и минимальная при равенстве чисел.
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{\frac{1}{4} - t^2}$. Такая функция также убывает при уменьшении t.

Итого: при сближении чисел с фиксированной суммой

xy	$x^2 + y^2$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
возрастает	убывает	убывает

Упражнение 1. Исследуйте, что происходит с функциями $x + y, x^2 + y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при сближении чисел с фиксированным произведением.

Перед тем как формулировать общий метод, рассмотрим чуть менее тривиальный пример.

Пример 2. Докажем, что для положительных $x_1, \ldots, x_n$ с произведением 1 имеет место неравенство $x_1 + \ldots + x_n \ge n$.

Доказательство. Предположим, что все x_i равны. Тогда $x_1 = \ldots = x_n = 1$ и в неравенстве достигается равенство.

Теперь предположим, что не все они равны. Тогда найдутся такие i, j, что $x_i < 1$, а $x_j > 1$. Так как условие симметрично, без ограничения общности мы можем полагать, что $x_1 < 1$, а $x_2 > 1$. Заметим, что тогда $x_1 + x_2 > 1 + x_1 x_2$. В самом деле, это неравенство равносильно тому, что $(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0$, а это верно по предположениям.

Значит, имеет место и неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 1 + x_1 x_2 + x_3 + \ldots + x_n.$$

Обозначим $y_1 = 1, y_2 = x_1 x_2$ и $y_i = x_i$ при $i \ge 3$. Заметим, что $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Так как $x_1 + \ldots + x_n > y_1 + \ldots + y_n$, нам достаточно доказать требуемое неравенство для набора $y_1, \ldots, y_n$, а с набором $y_1, \ldots, y_n$ мы можем провернуть ту же процедуру. Так, такими преобразованиями мы не более чем за n шагов придём к набору из единиц:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightsquigarrow (1, x_1 x_2, \ldots, x_n) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow (1, 1, \ldots, 1, x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = (1, \ldots, 1).$$

□

Отметим также, что из доказательства следует, что равенство достигается только в случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Метод Штурма состоит в следующем. Допустим, мы хотим доказать неравенство $f(x_1, \ldots, x_n) \ge C$ (где C — константа) при некотором условии $P(x_1, \ldots, x_n)$.

Предположим, что нам удалось заменить набор $(x_1, \ldots, x_n)$ на набор $(y_1, \ldots, y_n)$ так что

1. $f(x_1, \ldots, x_n) \ge f(y_1, \ldots, y_n)$;
2. условие $P(y_1, \ldots, y_n)$ выполняется.

Тогда ясно, что для доказательства исходного неравенства нам достаточно доказывать неравенство

$$f(y_1, \ldots, y_n) \geq C.$$

Обычно это применяется так: есть некоторый набор $w_1, \ldots, w_n$, для которого мы всё знаем; чаще всего это тот, на котором достигается равенство $f(w_1, \ldots, w_n) = C$. Мы за конечное число действие преобразуем наш исходный набор $(x_1, \ldots, x_n)$ к набору $(w_1, \ldots, w_n)$ так, чтоб условие сохранялось.

Пример 3. В примере 2 у нас было

$$f(x_1, \ldots, x_n) > f(1, x_1x_2, \ldots, x_n) > \ldots > f(1, 1, \ldots, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = f(1, \ldots, 1).$$

Теперь видно, что мы действовали очень логично: мы хотим перейти от набор $(x_1, \ldots, x_n)$ к набору $(1, 1, \ldots, 1)$. С этими целями логично заменить x_1 на единицу. Тогда, чтоб произведение осталось равным единице, можно положить $y_2 = x_1x_2$.

Условие P — это, чаще всего, условие про сумму/произведение и т.д., то есть:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = C, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = C, \quad \prod_{i=1}^{n} x_i = C, \quad \ldots$$

Рассмотрим теперь еще один пример.

Пример 4. При помощи метода Штурма докажем, что при $x_1 + \ldots + x_n = 1$ имеет место

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Доказательство. Заметим, что если $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$, то в неравенстве достигается равенство.

Теперь, если среди чисел не все равны, найдутся $x_i < \frac{1}{n}$ и $x_j > \frac{1}{n}$. Так как условие симметрично, мы можем полагать, что $x_1 < \frac{1}{n}$ и $x_2 > \frac{1}{n}$.

Давайте попробуем преобразовать набор $(x_1, \ldots, x_n)$ в набор $\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$. Для этого заменим x_1 на $\frac{1}{n}$, а чтоб сумма сохранилась, заменим x_2 на $x_1 + x_2 - \frac{1}{n}$. Проверим, что сумма квадратов при такой операции изменится в нужную сторону. Действительно,

$$x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{n^2} + \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^2} - \frac{2(x_1 + x_2)}{n} + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \iff \frac{1}{n^2} - \frac{x_1 + x_2}{n} + x_1x_2 < 0 \iff$$
$$\iff \left(\frac{1}{n^2} - \frac{x_1}{n}\right) + \left(x_1x_2 - \frac{x_2}{n}\right) < 0 = \left(\frac{1}{n} - x_1\right)\left(\frac{1}{n} - x_2\right) < 0,$$

что верно по предположениям. Значит,

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > \frac{1}{n^2} + \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + x_n^2$$

Проделывая такие преобразования, не более чем за n шагов мы придём к нужному нам набору:

$$(x_1, \ldots, x_n) \rightsquigarrow \left(\frac{1}{m}, x_1 + x_2 - \frac{1}{n}, \ldots, x_n\right) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

Так как на каждом шаге сумма квадратов уменьшается, а в конце она равна $\frac{1}{n}$, мы доказали нужное. □

Извлечём из наших изысканий некоторую пользу:

Теорема 1 (Неравенства о средних)**.** При $x_i > 0$ выполнено неравенство (1); при произвольных x_i выполнено неравенство (2):

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \overbrace{\leq}^{(1)} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \overbrace{\leq}^{(2)} \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{2}}$$

Равенство (и там и там) достигается тогда и только тогда, когда все числа равны.

Доказательство. Действительно, рассмотрим набор $(y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = \frac{x_i}{\sum x_i}$. Так как $\sum y_i = 1$, по примеру 3:

$$y_1^2 + \ldots + y_n^2 \geq \frac{1}{n} \iff \frac{x_1^2}{(x_1 + \ldots + x_n)^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{(x_1 + \ldots + x_n)^2} \geq \frac{1}{n}.$$

Домножая обе части на $\frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{n}$, получаем неравенство (2).

Теперь рассмотрим набор $(w_1, \ldots, w_n)$, где $w_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}$. Заметим, что $w_1 \cdot \ldots \cdot w_n = 1$. Тогда по примеру 2 имеем

$$w_1 + \ldots + w_n \geq n \iff \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} \geq n \iff \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

$\square$

В том, что произошло в доказательства теоремы 1 также есть некоторая мораль: изначально в неравенстве не было условий; но, отнормировав набор, мы добавили условия исскусстенным образом.