Les exemples du cours

Matthew OZON

November 20, 2014

1 Histoire

2 Les opérateurs : resumées

2.1 Translation et transposée d'ensemble

Translation L'opération la plus basique entre un ensemble X et un vecteur B que l'on note X_b:

$$X_b = \{x + b | x \in X\}$$

Transposé Operation qui transforme tout point en son "oposé", relativement á une origine. Pour un ensemble X, on note X^t son transposé qui est défini par :

$$X^t = \{-x | x \in X\}$$

2.2 addition et soustraction de Minkowski : les opérateurs de dilatation et d'érosion

L'addition et la soustraction de Minkowski sont définit comme suit pour deux ensembles X et B :

$$X \oplus B = \{x + b | x \in X, b \in B\} = \cup\{X_b | b \in B\}$$
$$X \ominus B = \{x | B_{-x} \subseteq X\} = \cap\{X_b | b \in B\}$$

et les opérateurs de dilatation et d'érosion sont :

$$D_B(X) = X \oplus B^t$$
$$E_B(X) = X \ominus B^t$$

Quelques propriétés intêressantes de la dilatation et de l'érosion :

- extensivité : $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$
- croissance : $X \subset Y \Rightarrow E_B(X) \subset E_B(Y)$ et $D_B(X) \subset D_B(Y)$
- distributivité : $E_B(X \cap Y) = E_B(X) \cap E_B(Y)$ et $D_B(X \cup Y) = D_B(X) \cup D_B(Y)$
- connexité : non préservée par les deux opérateurs.
- composition : $D_{B_2}(D_{B1}(X)) = D_{D_{B_2^t(B_1)}}(X)$ et $E_{B_2}(E_{B1}(X)) = E_{D_{B_2^t(B_1)}}(X)$
- dualité : $E_B(X) = \overline{D_B\left(\overline{X}\right)}$

3 Ouverture, fermeture, squelétisation

Les opérateurs d'ouverture $\mathcal{O}$, de fermeture $\mathcal{F}$ et de sequéletisation $\mathcal{S}$ sont respectivement défini comme suit :

$$X \circ B = D_{B^t}\left(E_B\left(X\right)\right)$$
$$X \bullet B = E_{B^t}\left(D_B\left(X\right)\right)$$

Quelques propriétés de l'ouverture et de la fermeture

- croissance : $X \subset Y \Rightarrow X \bullet B \subset Y \bullet B$ et $X \circ B \subset Y \circ B$
- idempotence : $(X \bullet B) \bullet B = X \bullet B$ et $(X \circ B) \circ B = X \circ B$
- dualité : $X \bullet B = \overline{\overline{X} \circ B}$ et $X \circ B = \overline{\overline{X} \bullet B}$

Pour démontrer ces propriétés, il suffit de les ecrire avec les definitions... ce qui peut etre un exercice.

Voici quelques exemples d'applications d'ouverture et de fermeture, figures 1 et 2.

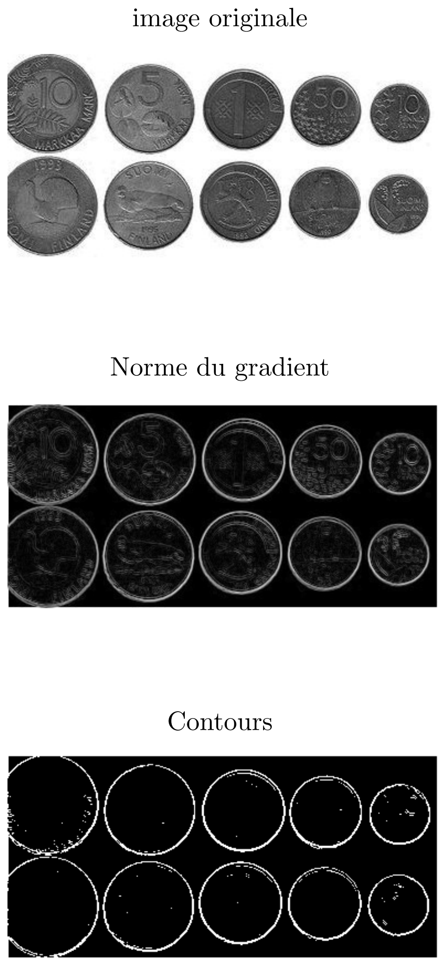
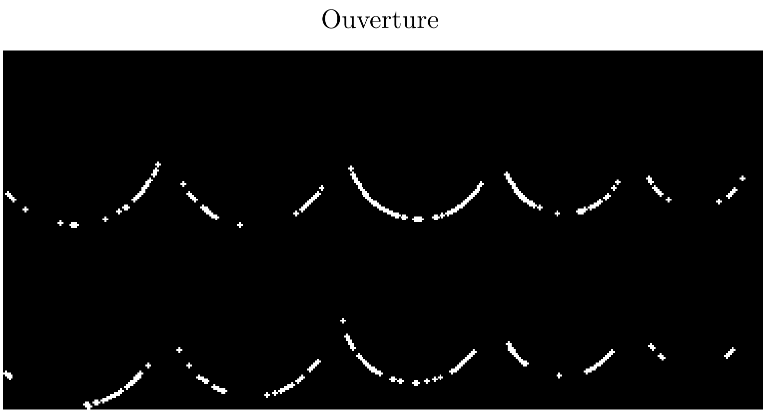


Figure 1: Image d'origine en haut, image de la norme du gradient au milieu et, en bas, image binaire des contours (seuillage de la norme du gradient à 100)



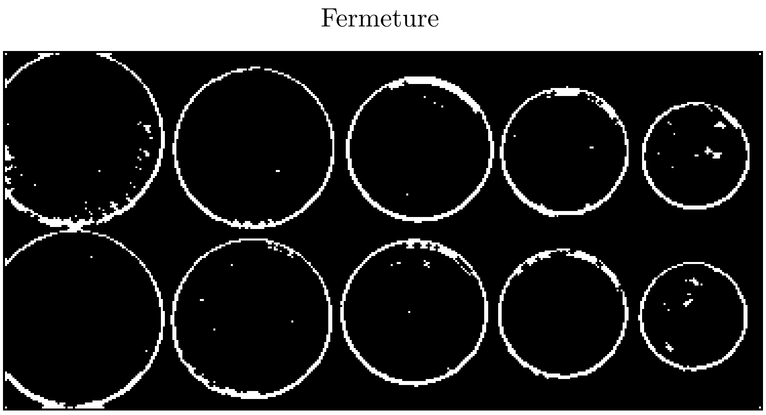


Figure 2: En haut) image ouverte, en bas) image fermée

Exemple d'utilisation pour du débruitage Dans le cas ou une image est composée de larges morceaux de même niveau (0 ou 1) avec quelques pixel altères, il est possible de faire du débruitage a partir des opérations d'ouverture et de fermeture. Voici un exemple sur les figures 3 montrant image d'origine et image bruitée, figure 4 gauche) la première étape enlevant le bruit du fond (noir) et figure 4 droite) l'étape débruitant l'objet (blanc).

Image sans bruit

Image avec bruit

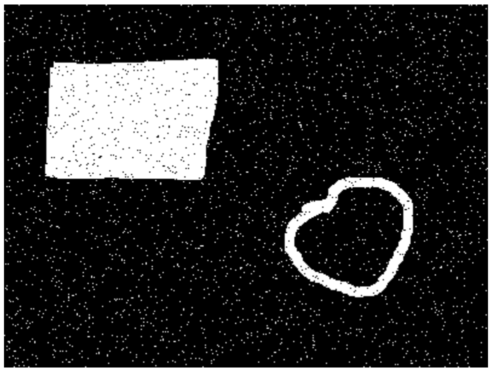


Figure 3: Image d'origine à gauche, et, à droite, image bruitée.

Remarque On peut remarquer que le filtrage n'est pas vraiment parfait, même si le bruit et complètement parti. En effet, les objets ont étés dformés pendant les étapes.

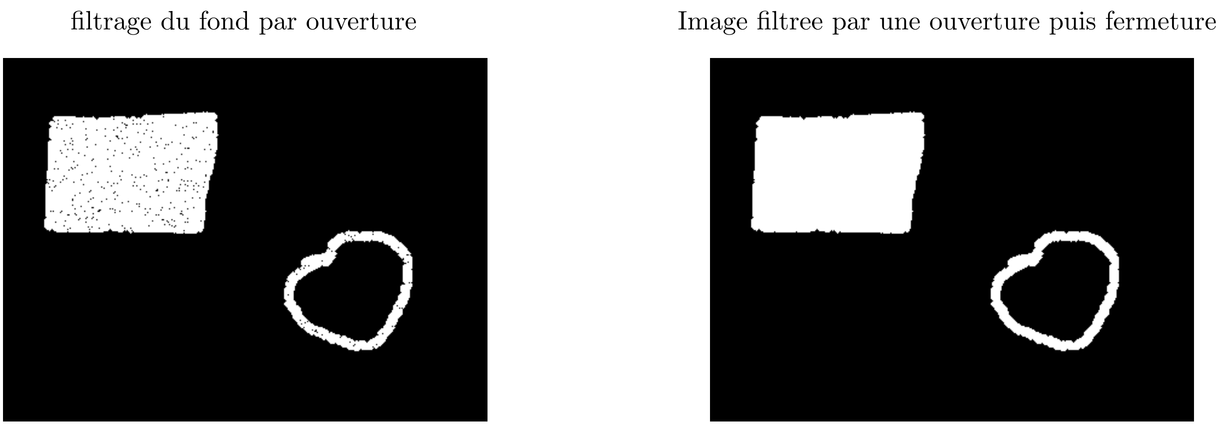


Figure 4: Étapes du processus de filtrage : gauche) image après ouverture, droite) image après ouverture puis fermeture

3.1 Hit or Miss Transform

Ou sous son nom franąis, la transformée tout-ou-rien. Elle sert à extraire des motifs d'une image, par exemple les points qui sont à la fois dans l'objet et qui n'ont aucun voisin (il faut préciser le voisinage utilisé). Formellement, on la définit comme suit :

$$X \odot B = E_{B\mathrm{fg}}\left(X\right) \cap E_{B\mathrm{bg}}\left(\overline{X}\right)$$

avec $B = (B\mathrm{fg}, B\mathrm{bg})$, ou $B\mathrm{fg}$ représente l'opération sur l'objet et $B\mathrm{bg}$ l'opération sur le fond. Les deux éléments structurants doivent satisfaire $B\mathrm{fg} \cap B\mathrm{bg} = \varnothing$

3.1.1 Applications

Points isolés Au sens du 4-voisinage, des points isolés sont des points qui sont dans lobjet et qui n'ont pas de voisins sur le 4-voisinage, ainsi, on définit les éléments structurants :

$$B_{\mathrm{fg}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \text{ et } B_{\mathrm{bg}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

on verifie bien que $B\mathrm{fg} \cap B\mathrm{bg} = \varnothing$. Voici le résultats figure 5 sur laquelle les points isolés figurent en rouge, pour une image de contour binarisée (fig. 1).

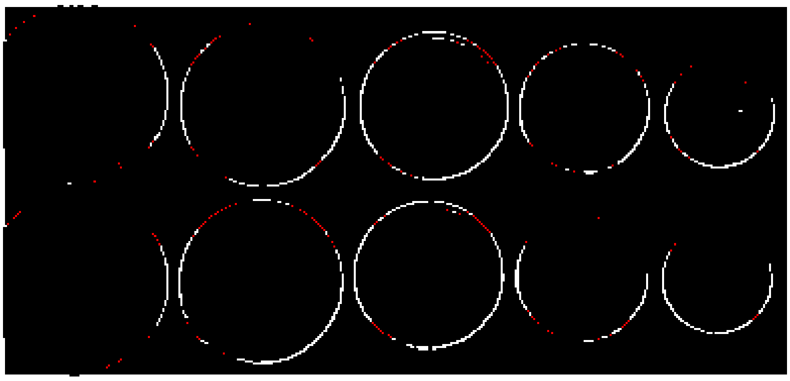


Figure 5: Les points rouge sont isolés au sens du 4-voisinage.

Extremités La détection des extrémités est plus subtile car il faut considérer plusieurs cas. Ici, on cherche à détecter les extrémités au sens du 8-voisinage. Il faut extraire tout les points qui sont dans l'objet et qui n'ont qu'un seul voisin. Pour cela, on va faire plusieurs extractions et le résultat final sera l'union de touts les résultats. Figure 6 montre le résultat de cette opération en rouge sur l'image (les points ont étés dilatés pour plus de clareté).

Voici les masque utilises :

$$B_{\text{fg}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

et

$$B_{\text{bg}} \in \left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}$$

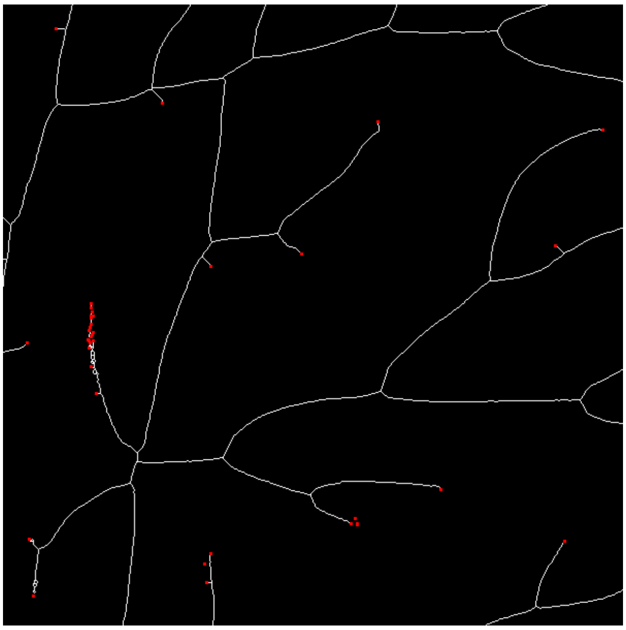


Figure 6: Les points rouge sont les extrémités au sens du 8-voisinage.

Détection de contour et comparaison On introduit la notion de gradient morphologique $G_B$comme la différence entre la dilatation et l'érosion d'une image par un élément structurant B.

$$G_B\left(X\right) = D_B\left(X\right) \backslash E_B\left(X\right) \text{ avec, dans notre exemple : } B = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

En suivant la même logique qu'au paragraphe précédent, on définit aussi les pairs structurantes pour la détection de contours par transformation Tout-ou-Rien :

$$B_{\text{fg}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

et

$$B_{\text{bg}} \in \left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \right\}$$

Figure 7 et figure 8 représentent les résultats respectifs du gradient morphologique et de la détection par transformée Tout-ou-Rien en pixel rouge.

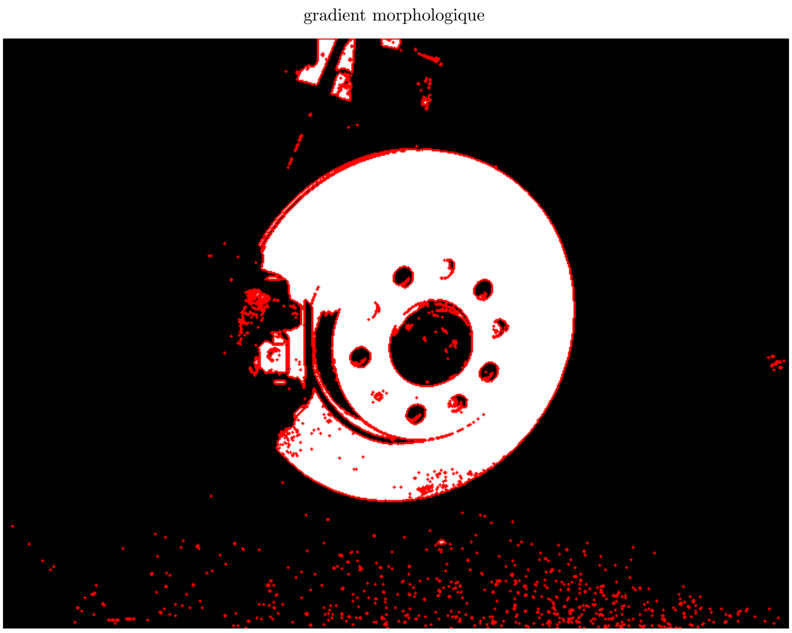


Figure 7: Les points rouges sont les contours au sens du gradient morphologique

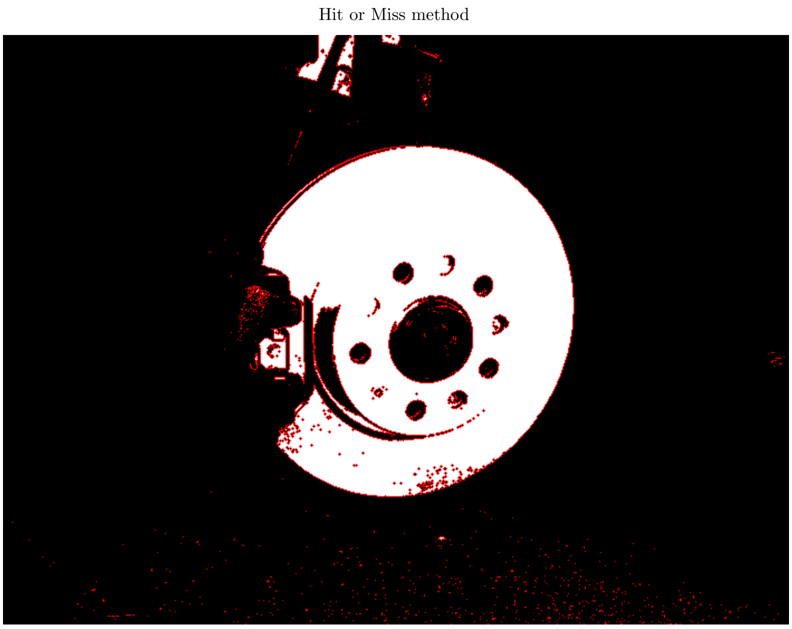


Figure 8: Les points rouges sont les contours au sens de la transformee Tout-ou-Rien

3.2 Lien entre dilatation et carte de distance

La dilatation d'une image a déjà été introduite, il ne reste que la notion de carte de distance. C'est tout simplement une image qui en chaque point donne la distance ã l'objet le plus proche. Elle est implémentée dans l'opérateur *bwdist* sous *octave*

La figure 9 montre le résultat d'une dilatation par la méthode utilisant la somme de Minkowski (la ligne du haut) et le seuillage de la carte de distance.

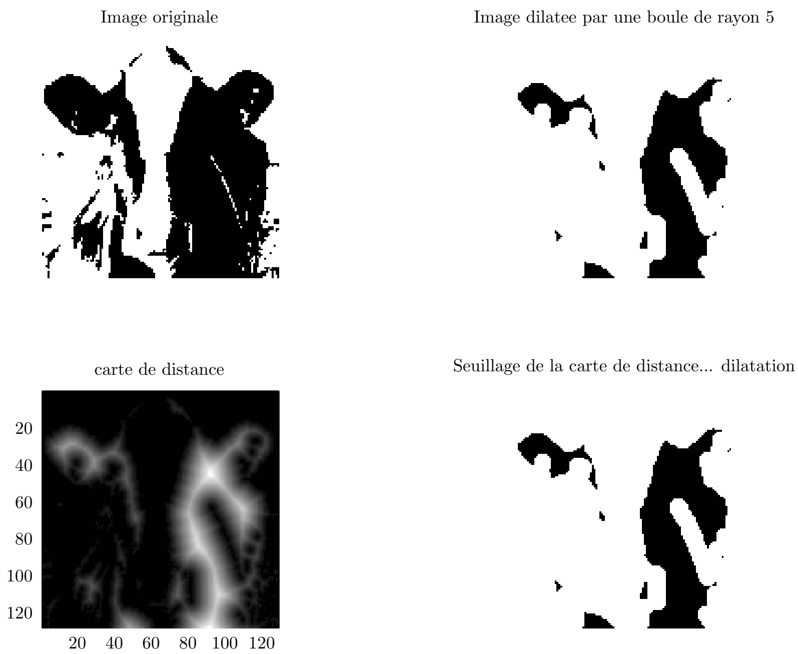


Figure 9

4 Divers applications

4.1 Application de l'érosion : détection de la période d'un motif

En choisissant judicieusement un élément structurant, on peut utiliser l'érosion pour détecter la période d'un motif dans une image. Par exemple pour une image comme celle de la figure 10, on peut utiliser un élément s structurant ligne $B^{(n)}_{\text{ligne}}$ tel que :

$$B^{(n)}_{\text{ligne}} = \boxed{1}\underbrace{\boxed{0 \quad \dots \quad 0}}_{\text{n zéros}}\boxed{1}$$

et en utilisant une formule de covariance comme :

$$C_{B^{(n)}_{\text{ligne}}}(X) = \frac{1}{\sum\limits_{\text{pixel }(i,j)} X(i,j)} \sum_{\text{pixel }(i,j)} E_{B^{(n)}_{\text{ligne}}}(X)(i,j)$$

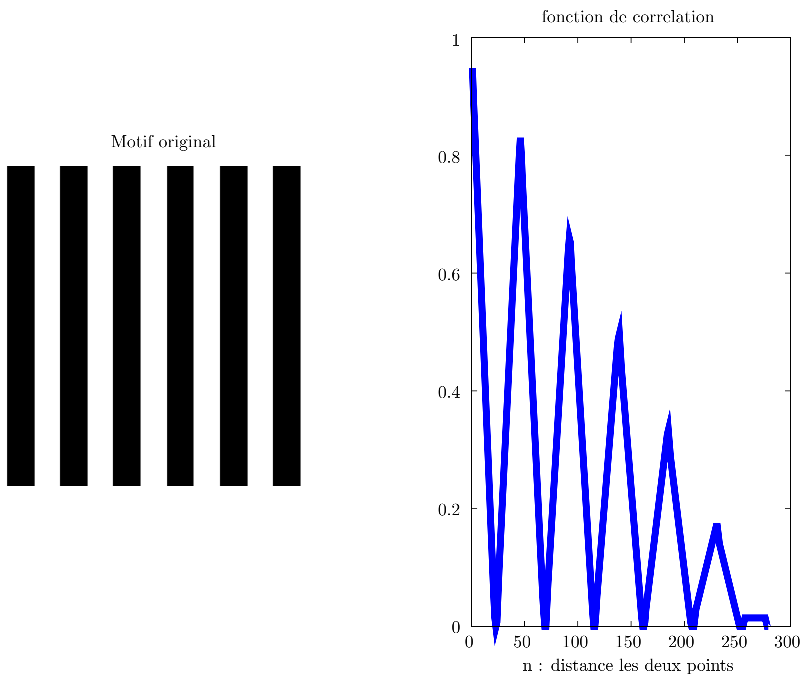


Figure 10: Image de rayure verticale a droite et fonction de corrélation (morphologique) entre l'image originale et son érodée par une pair de point distante de n

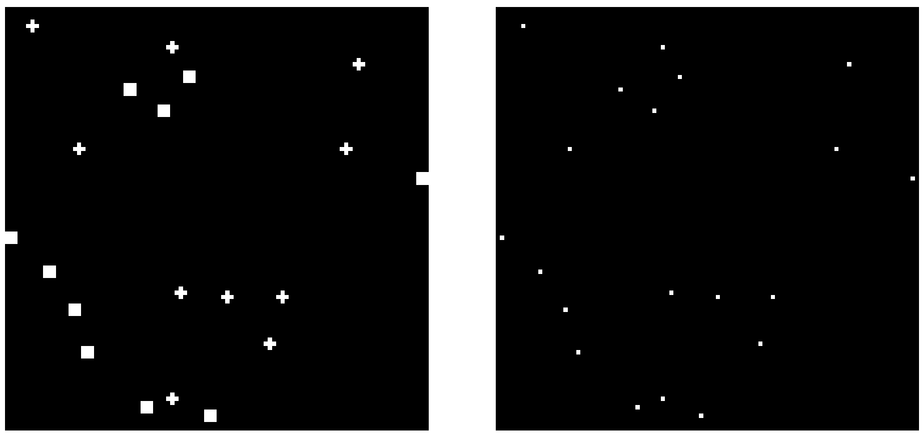


Figure 11: Image d'origine a gauche et résultat de lérosion par la boule unité au sens du 4-voisinage à droite

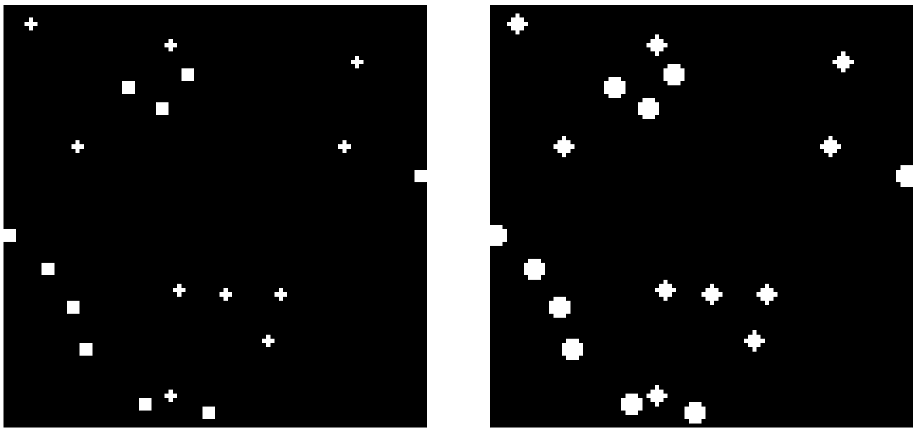


Figure 12: Image d'origine a gauche et résultat de la dilatation par la boule unité au sens du 4-voisinage à droite

4.2 granulométrie

En morphologie, la granulométrie est la mesure de granularité qui consiste à dénombrer les grains en fonction de leur tailles. Une approche possible est “débruiter” l’image X par des éléments structurant B_n de plus en plus grand et de compter le nombre de pixels restants. Plus formellement, la fonction granulometrique peut se definir comme l’application γ_n pour $n \in \ltimes$ telle que

$$\begin{aligned} \gamma_n : \mathfrak{X} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ X &\longmapsto |X \circ B_n| \end{aligned}$$

ou $|A|$ denote le cardinal de l’ensemble A et $B_n = \underbrace{B \oplus \ldots \oplus B}_{\text{n fois}}$. Par convention, B_0 est le singleton $\{1\}$ centré sur lui même. On remarque que cette mesure depend du l’élément structurant utilisé.

4.3 Comptage de connexité

On considère le graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ avec $\mathcal{X}$ un ensemble de points et $\mathcal{E}$ un ensemble d’arètes (paires de points). Le nombre de connexité N_c du graphe $\mathcal{G}$ est définit comme :

$$N_c = N_s - N_a + N_f$$

ou N_s est le nombre de sommet ($|\mathcal{X}|$), N_a le nombre d’arêtes ($|\mathcal{E}|$) et N_f le nombre de faces de $\mathcal{G}$.

Une face f du graphe G est une cycle de longueur au moins égale à 3 et ne contenant aucun sommet ou arète en son intérieur. On appelle cycle une chaîne fermée et simple (constituée d’arêtes distinctes).

Avec Hit-or-Miss? Oui il y a une possibilité. Il suffit de considérer l’image binaire comme un graphe dont les sommets sont les pixels. En analisant la maille élémentaire $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$, on peut montrer que

$$N_c = \left| X \odot \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\} \right| + \left| X \odot \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right\} \right| - \left| X \odot \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right\} \right|$$

4.4 Squelette

$$\mathcal{S}_B(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(E_{B_n}(X) \setminus \left(E_{B_n}(X) \right) \circ B \right)$$

où $B_n = \underbrace{B \oplus \ldots \oplus B}_{n \text{ fois}}$ et par convention B_0 est l'ensemble de un pixel à l'origine. En pratique, on ne fait pas tendre n vers $+\infty$, mais on s'arrête quand on atteint idempotence.

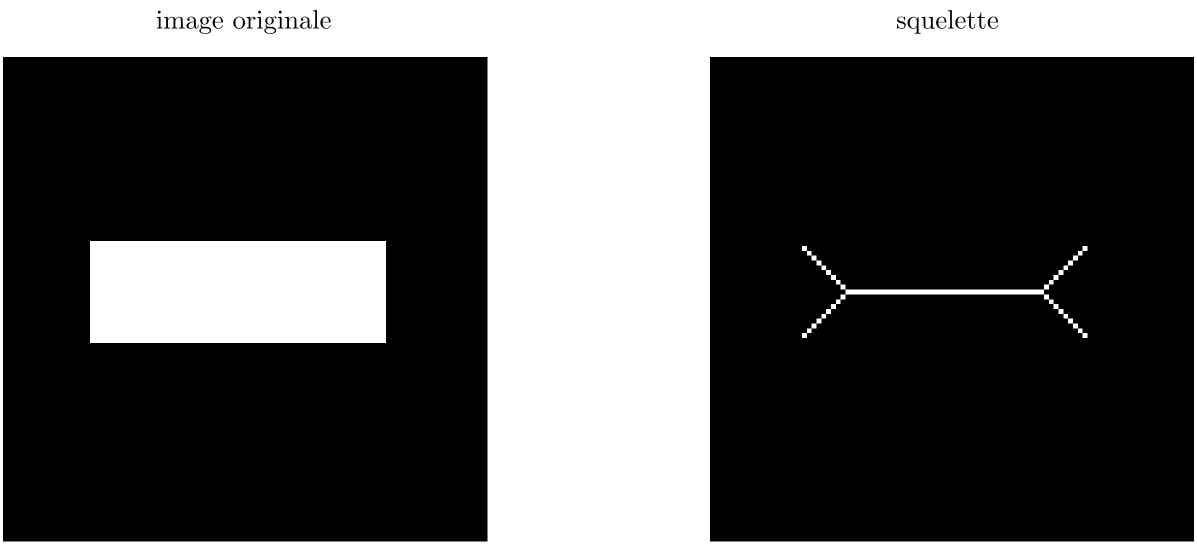


Figure 13: Image d'origine, un rectangle, à gauche, et, à droite, le squelette.

image petit veau

squelette du petit veau

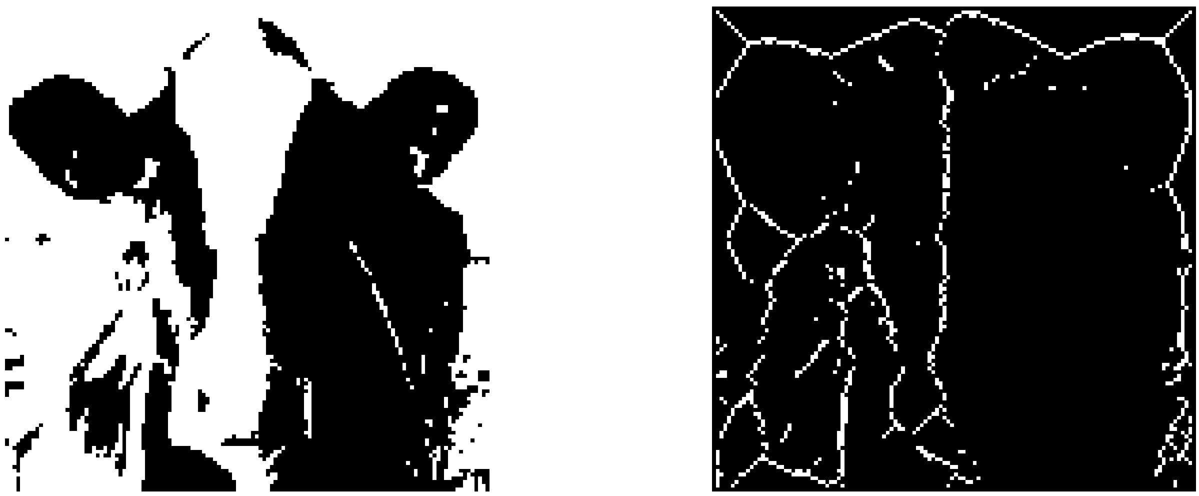


Figure 14: Image de veau segmentée, à gauche, et, à droite, le squelette.