

Les exemples du cours

Matthew OZON

November 19, 2014

1 Histoire

2 Les opérateurs : resumées

2.1 Translation et transposée d'ensemble

Translation L'opération la plus basique entre un ensemble X et un vecteur B que l'on note X_b :

$$X_b = \{x + b | x \in X\}$$

Transposé Operation qui transforme tout point en son "opposé", relativement à une origine. Pour un ensemble X , on note X^t son transposé qui est défini par :

$$X^t = \{-x | x \in X\}$$

2.2 addition et soustraction de Minkowski : les opérateurs de dilatation et d'érosion

L'addition et la soustraction de Minkowski sont définies comme suit pour deux ensembles X et B :

$$X \oplus B = \{x + b | x \in X, b \in B\} = \cup \{X_b | b \in B\}$$

$$X \ominus B = \{x | B_{-x} \subseteq X\} = \cap \{X_b | b \in B\}$$

et les opérateurs de dilatation et d'érosion sont :

$$D_B(X) = X \oplus B^t$$

$$E_B(X) = X \ominus B^t$$

Quelques propriétés intéressantes de la dilatation et de l'érosion :

- extensivité : $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$
- croissance : $X \subset Y \Rightarrow E_B(X) \subset E_B(Y)$ et $D_B(X) \subset D_B(Y)$
- distributivité : $E_B(X \cap Y) = E_B(X) \cap E_B(Y)$ et $D_B(X \cup Y) = D_B(X) \cup D_B(Y)$
- connexité : non préservée par les deux opérateurs.
- composition : $D_{B_2}(D_{B_1}(X)) = D_{D_{B_2^t}(B_1)}(X)$ et $E_{B_2}(E_{B_1}(X)) = E_{D_{B_2^t}(B_1)}(X)$
- dualité : $E_B(X) = \overline{D_B(\overline{X})}$

Application de l'érosion : détection de la période d'un motif En choisissant judicieusement un élément structurant, on peut utiliser l'érosion pour détecter la période d'un motif dans une image. Par exemple pour une image comme celle de la figure 1, on peut utiliser un élément s structurant ligne $B_{\text{ligne}}^{(n)}$ tel que :

$$B_{\text{ligne}}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n \text{ zéros}} & 1 \end{bmatrix}$$

et en utilisant une formule de covariance comme :

$$C_{B_{\text{ligne}}^{(n)}}(X) = \frac{1}{\sum_{\text{pixel } (i,j)} X(i,j)} \sum_{\text{pixel } (i,j)} E_{B_{\text{ligne}}^{(n)}}(X)(i,j)$$

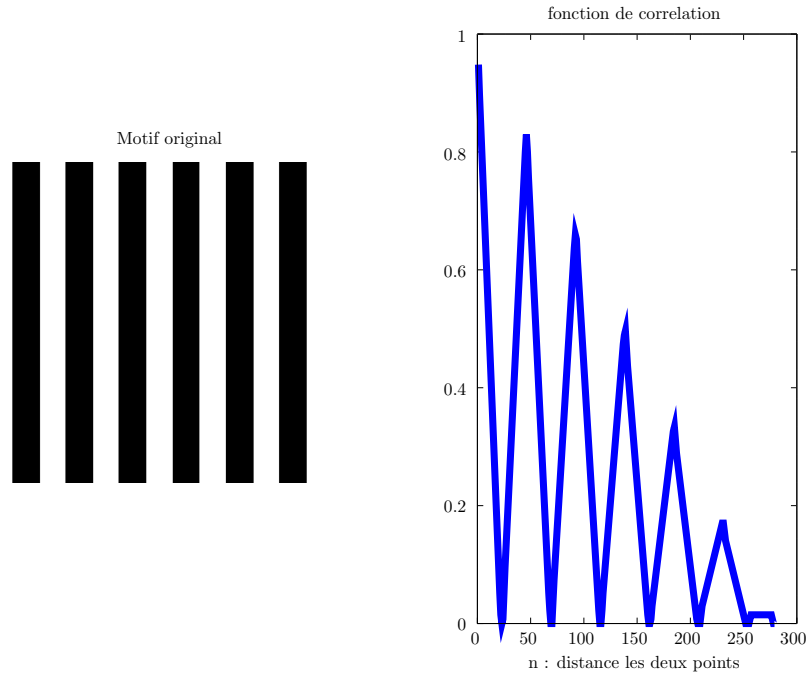


Figure 1: Image de rayure verticale à droite et fonction de corrélation (morphologique) entre l'image originale et son érodée par une paire de points distante de n

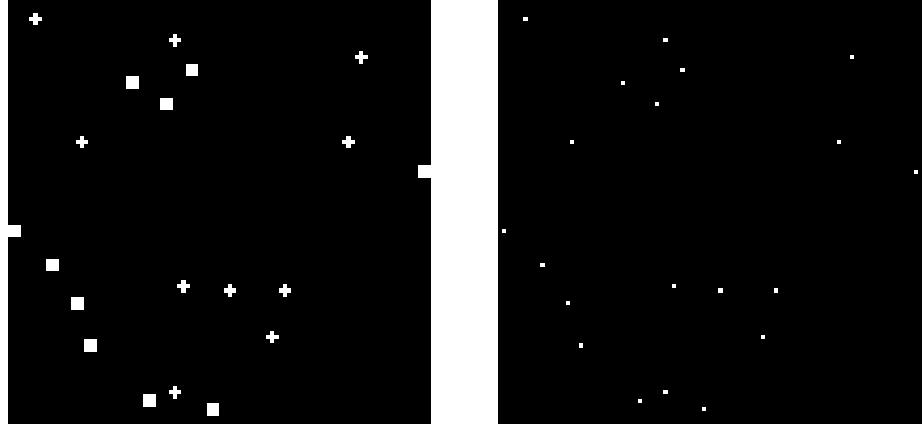


Figure 2: Image d'origine a gauche et résultat de lérosion par la boule unité au sens du 4-voisinage à droite

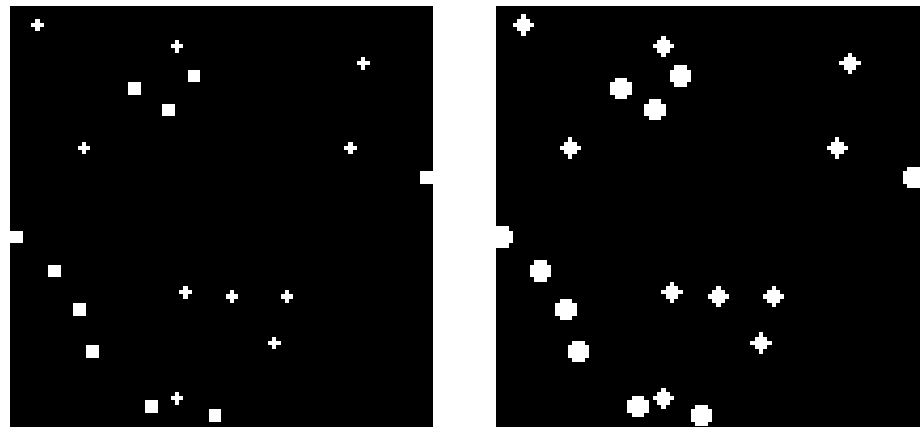


Figure 3: Image d'origine a gauche et résultat de la dilatation par la boule unité au sens du 4-voisinage à droite

3 Ouverture, fermeture, squelettisation

Les opérateurs d'ouverture \mathcal{O} , de fermeture \mathcal{F} et de squelettisation \mathcal{S} sont respectivement défini comme suit :

$$\begin{aligned} X \circ B &= D_{B^t} (E_B (X)) \\ X \bullet B &= E_{B^t} (D_B (X)) \\ \mathcal{S}_B (X) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_{B_n} (X) \setminus (E_{B_n} (X)) \circ B) \end{aligned}$$

où $B_n = \underbrace{B \oplus \dots \oplus B}_{n \text{ fois}}$ et par convention B_0 est l'ensemble de un pixel à l'origine. En pratique,

on ne fait pas tendre n vers $+\infty$, mais on s'arrête quand on atteint idempotence.

Quelques propriétés de l'ouverture et de la fermeture

- croissance : $X \subset Y \Rightarrow X \bullet B \subset Y \bullet B$ et $X \circ B \subset Y \circ B$
- idempotence : $(X \bullet B) \bullet B = X \bullet B$ et $(X \circ B) \circ B = X \circ B$
- dualité : $X \bullet B = \overline{\overline{X \circ B}}$ et $X \circ B = \overline{\overline{X \bullet B}}$

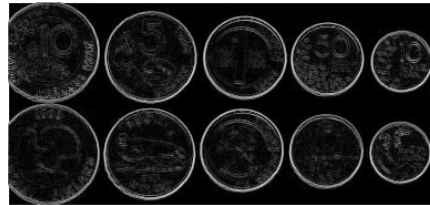
Pour démontrer ces propriétés, il suffit de les écrire avec les définitions... ce qui peut être un exercice.

Voici quelques exemples d'applications d'ouverture et de fermeture, figures 4 et 5.

image originale



Norme du gradient



Contours

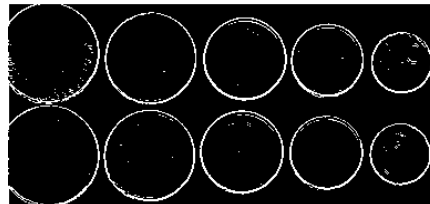


Figure 4: Image d'origine en haut, image de la norme du gradient au milieu et, en bas, image binaire des contours (seuillage de la norme du gradient à 100)

Ouverture



Fermeture

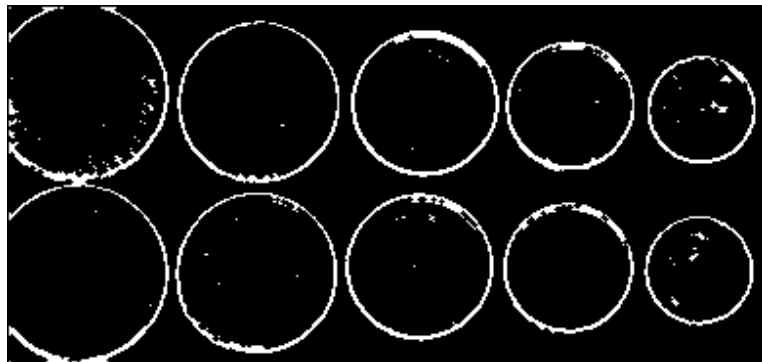


Figure 5: En haut) image ouverte, en bas) image fermée

Exemple d'utilisation pour du débruitage Dans le cas où une image est composée de larges morceaux de même niveau (0 ou 1) avec quelques pixel altérés, il est possible de faire du débruitage à partir des opérations d'ouverture et de fermeture. Voici un exemple sur les figures 6 montrant image d'origine et image bruitée, figure 7 gauche) la première étape enlevant le bruit du fond (noir) et figure 7 droite) l'étape débruitant l'objet (blanc).



Figure 6: Image d'origine à gauche, et, à droite, image bruitée.

Remarque On peut remarquer que le filtrage n'est pas vraiment parfait, même si le bruit est complètement parti. En effet, les objets ont été déformés pendant les étapes.

filtrage du fond par ouverture

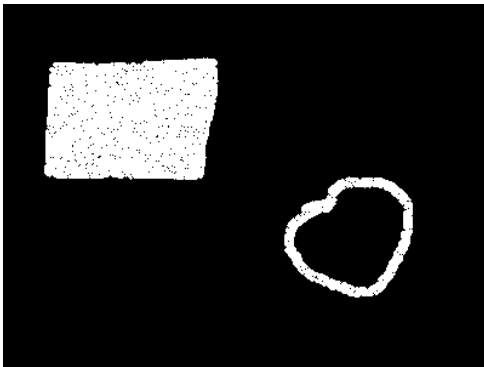


Image filtrée par une ouverture puis fermeture



Figure 7: Étapes du processus de filtrage : gauche) image après ouverture, droite) image après ouverture puis fermeture

Application : squelettisation

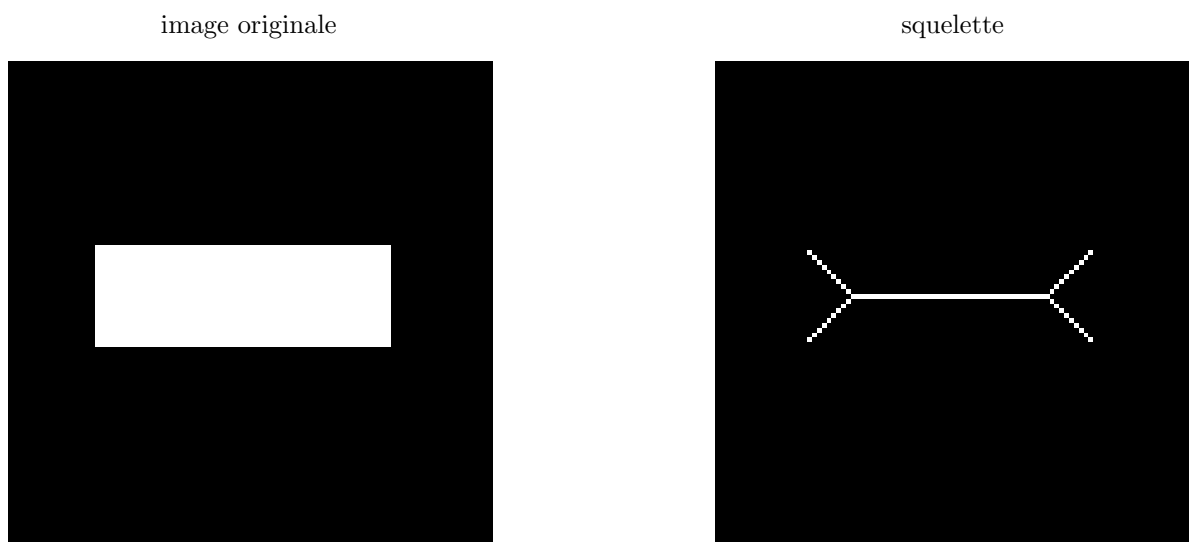


Figure 8: Image d'origine, un rectangle, à gauche, et, à droite, le squelette.

image petit veau



squelette du petit veau



Figure 9: Image de veau segmentée, à gauche, et, à droite, le squelette.

3.1 Hit or Miss Transform

Ou sous son nom français, la transformée tout-ou-rien. Elle sert à extraire des motifs d'une image, par exemple les points qui sont à la fois dans l'objet et qui n'ont aucun voisin (il faut préciser le voisinage utilisé). Formellement, on la définit comme suit :

$$X \odot B = E_{B_{fg}}(X) \cap E_{B_{bg}}(\bar{X})$$

avec $B = (B_{fg}, B_{bg})$, ou B_{fg} représente l'opération sur l'objet et B_{bg} l'opération sur le fond. Les deux éléments structurants doivent satisfaire $B_{fg} \cap B_{bg} = \emptyset$

3.1.1 Applications

Points isolés Au sens du 4-voisinage, des points isolés sont des points qui sont dans l'objet et qui n'ont pas de voisins sur le 4-voisinage, ainsi, on définit les éléments structurants :

$$B_{fg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B_{bg} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

on verifie bien que $B_{fg} \cap B_{bg} = \emptyset$. Voici le résultats figure 10 sur laquelle les points isolés figurent en rouge, pour une image de contour binarisée (fig. 4).

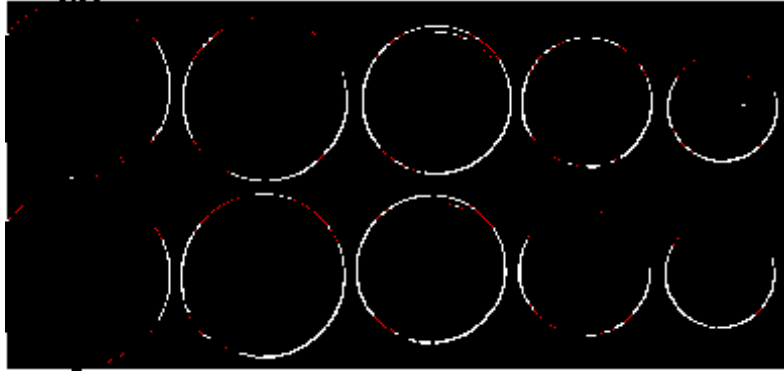


Figure 10: Les points rouge sont isolés au sens du 4-voisinage.

Extrémités La détection des extrémités est plus subtile car il faut considérer plusieurs cas. Ici, on cherche à détecter les extrémités au sens du 8-voisinage. Il faut extraire tout les points qui sont dans l'objet et qui n'ont qu'un seul voisin. Pour cela, on va faire plusieurs extractions et le résultat final sera l'union de tous les résultats. Figure 11 montre le résultat de cette opération en rouge sur l'image (les points ont été dilatés pour plus de clareté).

Voici les masque utilises :

$$B_{\text{fig}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$B_{\text{bg}} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

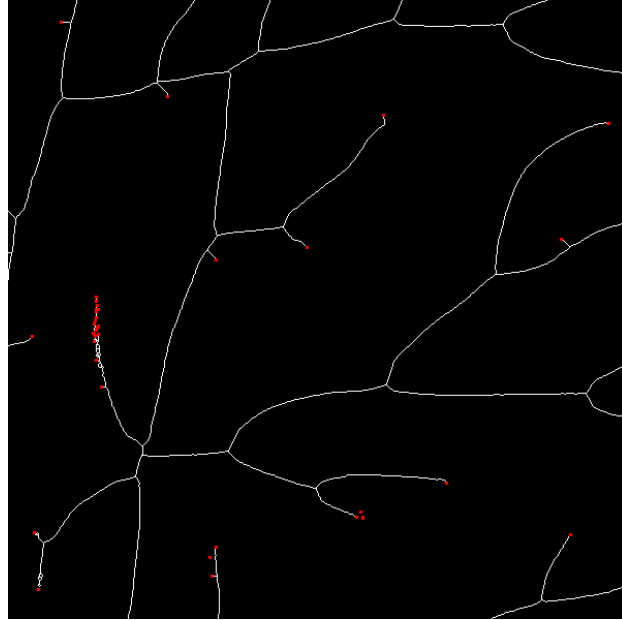


Figure 11: Les points rouge sont les extrémités au sens du 8-voisinage.

Détection de contour et comparaison On introduit la notion de gradient morphologique G_B comme la différence entre la dilatation et l'érosion d'une image par un élément structurant B .

$$G_B(X) = D_B(X) \setminus E_B(X) \text{ avec, dans notre exemple : } B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

En suivant la même logique qu'au paragraphe précédent, on définit aussi les pairs structurantes pour la détection de contours par transformation Tout-ou-Rien :

$$B_{fg} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

et

$$B_{bg} \in \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Figure 12 et figure 13 représentent les résultats respectifs du gradient morphologique et de la détection par transformée Tout-ou-Rien en pixel rouge.

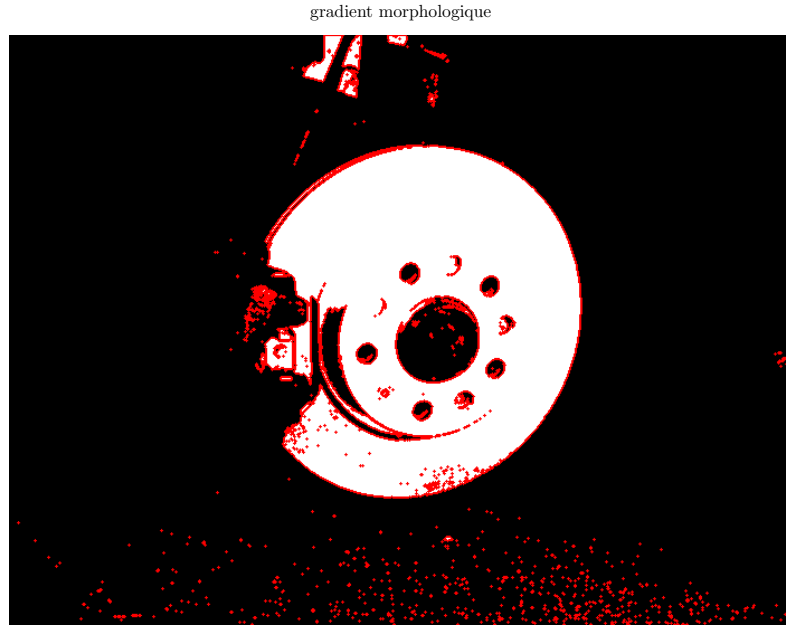


Figure 12: Les points rouges sont les contours au sens du gradient morphologique

Hit or Miss method

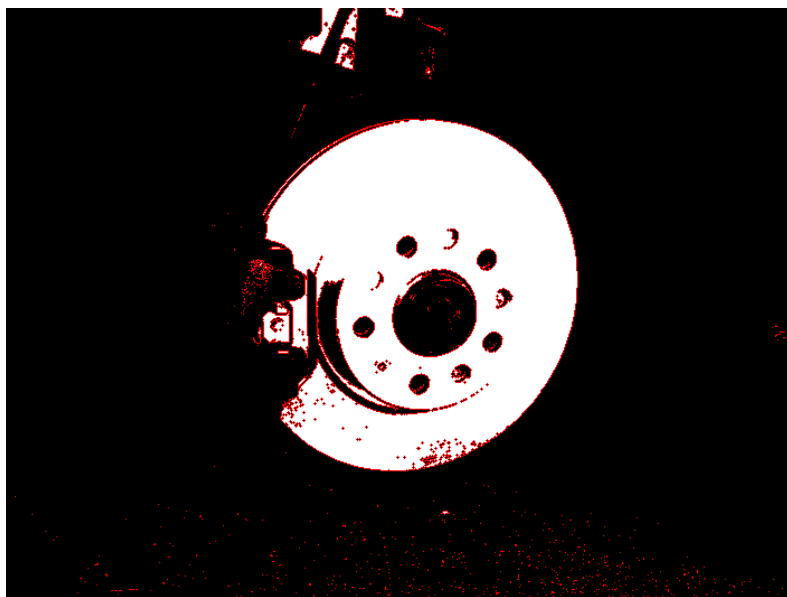


Figure 13: Les points rouges sont les contours au sens de la transformee Tout-ou-Rien

3.2 Lien entre dilatation et carte de distance

La dilatation d'une image a déjà été introduite, il ne reste que la notion de carte de distance. C'est tout simplement une image qui en chaque point donne la distance à l'objet le plus proche. Elle est implémentée dans l'opérateur *bwdist* sous *octave*

La figure 14 montre le résultat d'une dilatation par la méthode utilisant la somme de Minkowski (la ligne du haut) et le seuillage de la carte de distance.

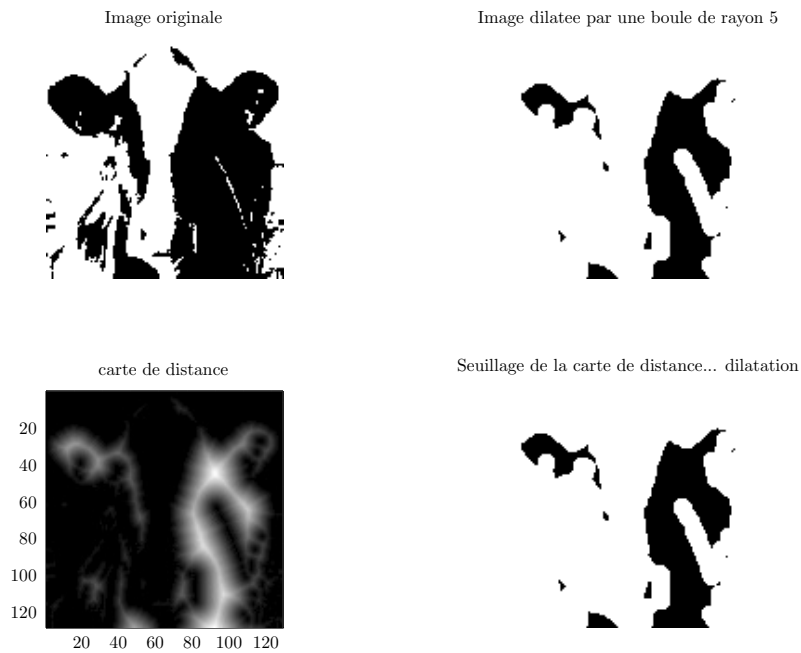


Figure 14