Les exemples du cours

Matthew OZON

November 18, 2014

1 Histoire

2 Les opérateurs : resumées

2.1 Translation et transposée d'ensemble

Translation L'opération la plus basique entre un ensemble X et un vecteur B que l'on note X_b:

$$X_b = \{x + b | x \in X\}$$

Transposé Operation qui transforme tout point en son "oposé", relativement á une origine. Pour un ensemble X, on note X^t son transposé qui est défini par :

$$X^t = \{-x | x \in X\}$$

2.2 addition et soustraction de Minkowski : les opérateurs de dilatation et d'érosion

L'addition et la soustraction de Minkowski sont définit comme suit pour deux ensembles X et B :

$$\begin{aligned} X \oplus B &= \{x + b | x \in X, b \in B\} = \cup\{X_b | b \in B\} \\ X \ominus B &= \{x | B_{-x} \subseteq X\} = \cap\{X_b | b \in B\} \end{aligned}$$

et les opérateurs de dilatation et d'érosion sont :

$$\begin{aligned} D_B(X) &= X \oplus B^t \\ E_B(X) &= X \ominus B^t \end{aligned}$$

Quelques propriétés intêressantes de la dilatation et de l'érosion :

- extensivité : $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$
- croissance : $X \subset Y \Rightarrow E_B(X) \subset E_B(Y)$ et $D_B(X) \subset D_B(Y)$
- distributivité : $E_B(X \cap Y) = E_B(X) \cap E_B(Y)$ et $D_B(X \cup Y) = D_B(X) \cup D_B(Y)$
- connexité : non préservée par les deux opérateurs.

- composition : $D_{B_2}\left(D_{B1}\left(X\right)\right)=D_{D_{B_2^t\left(B_1\right)}}\left(X\right)$ et $E_{B_2}\left(E_{B1}\left(X\right)\right)=E_{D_{B_2^t\left(B_1\right)}}\left(X\right)$
- dualité : $E_B\left(X\right)=\overline{D_B\left(\overline{X}\right)}$

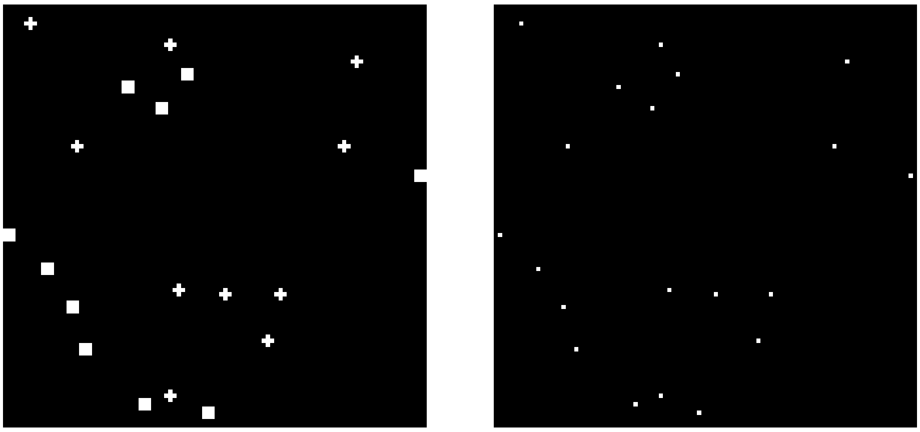


Figure 1: Image d'origine a gauche et resultat de l'erosion par la boule unite au sens du 4-voisinage a droite

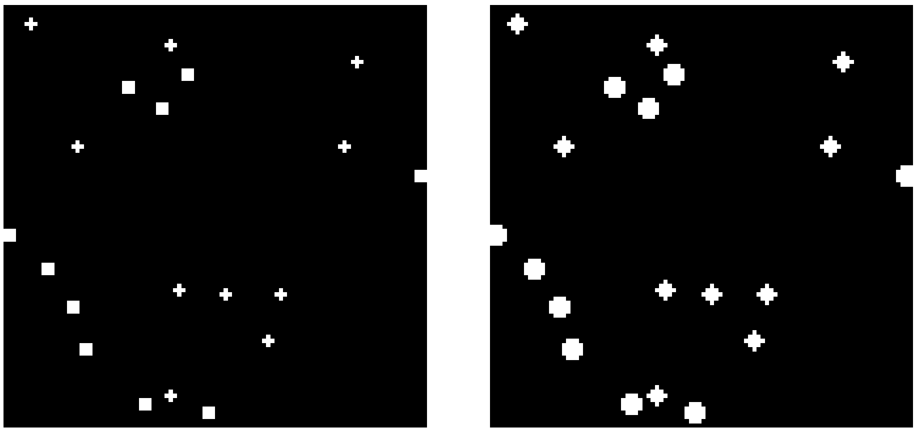


Figure 2: Image d'origine a gauche et résultat de la dilatation par la boule unité au sens du 4-voisinage a droite

3 Ouverture, fermeture, squelétisation

Les opérateurs d'ouverture $\mathcal{O}$, de fermeture $\mathcal{F}$ et de sequéletisation $\mathcal{S}$ sont respectivement defini comme suit :

$$\begin{aligned} X \circ B &= D_{B^t}\left(E_B\left(X\right)\right) \\ X \bullet B &= E_{B^t}\left(D_B\left(X\right)\right) \\ \mathcal{S}_B\left(X\right) &= \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\left(E_{B_n}\left(X\right) \setminus \left(E_{B_n}\left(X\right)\right)\circ B\right) \end{aligned}$$

où $B_n = \underbrace{B \oplus \ldots \oplus B}_{nfois}$ et par convention B_0 est l'ensemble de un pixel à l'origine. En pratique, on ne fait pas tendre n vers $+\infty$, mais on s'arrête quand on atteint idempotence.

Quelques propriétés de l'ouverture et de la fermeture

- croissance : $X \subset Y \Rightarrow X \bullet B \subset Y \bullet B$ et $X \circ B \subset Y \circ B$
- idempotence : $(X \bullet B) \bullet B = X \bullet B$ et $(X \circ B) \circ B = X \circ B$
- dualité : $X \bullet B = \overline{\overline{X} \circ B}$ et $X \circ B = \overline{\overline{X} \bullet B}$

Pour démontrer ces propriétés, il suffit de les ecrire avec les definitions... ce qui peut etre un exercice.

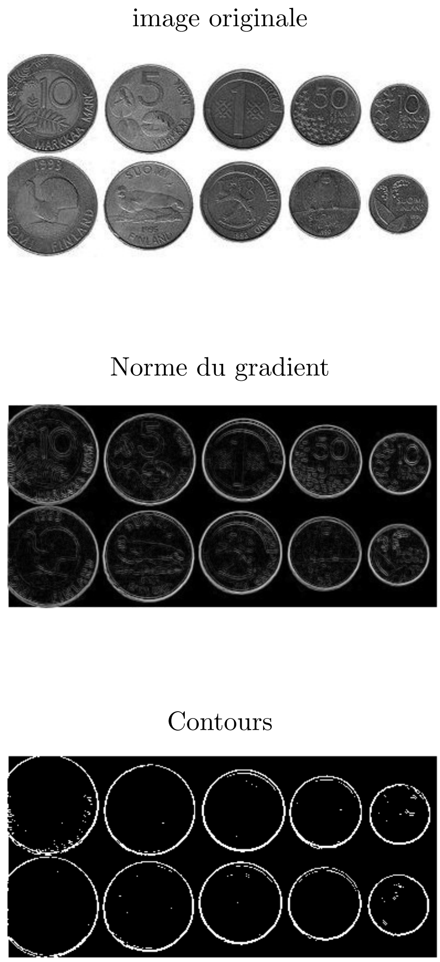
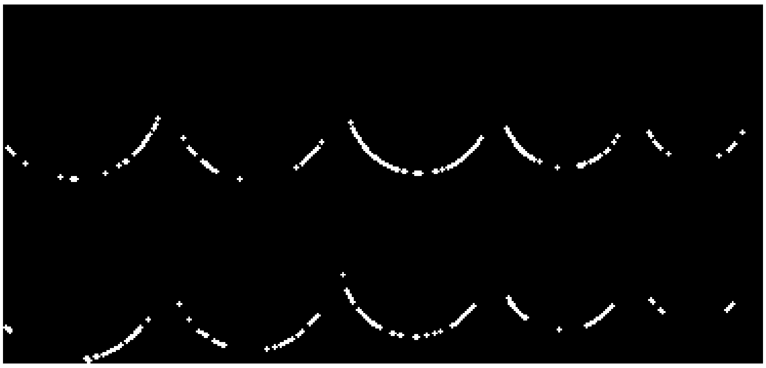


Figure 3: Image d'origine en haut, image de la norme du gradient au milieu et, en bas, image binaire des contours (seuillage de la norme du gradient à 100)

Ouverture



Fermeture

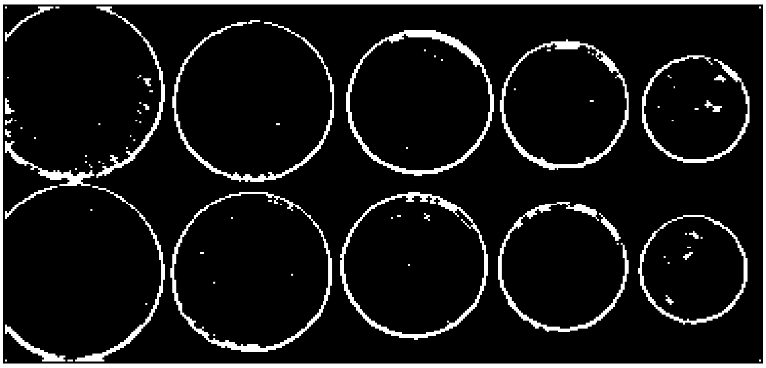


Figure 4: En haut) image ouverte, en bas) image fermée

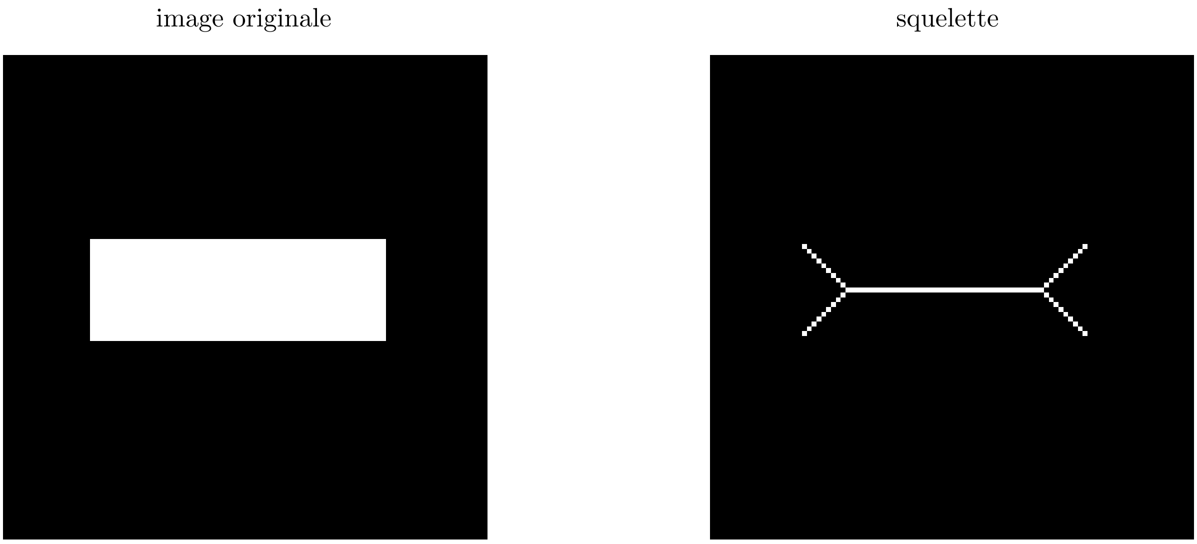


Figure 5: Image d'origine, un rectangle, à gauche, et, à droite, le squelette.

image petit veau — squelette du petit veau

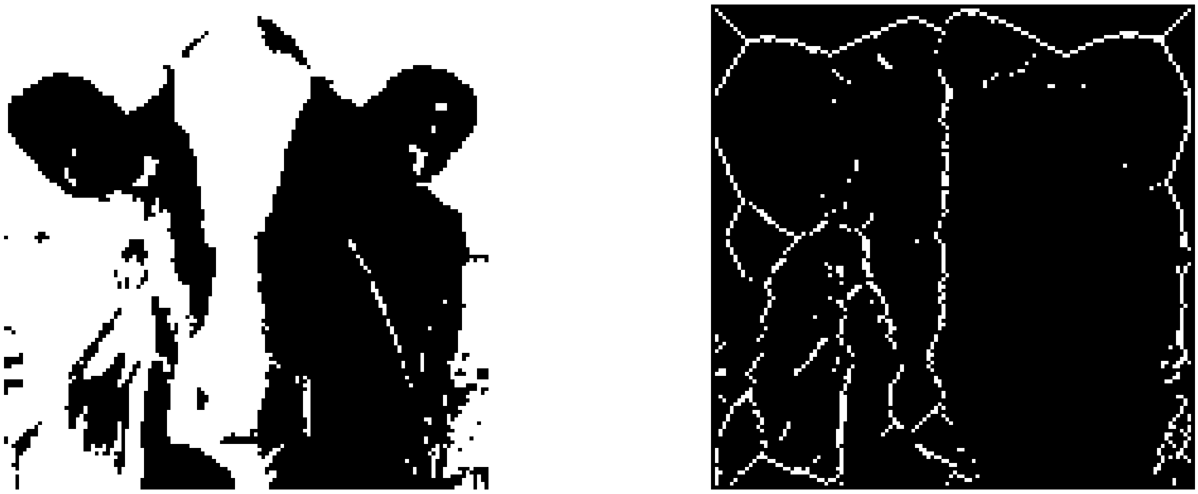


Figure 6: Image de veau segmentée, à gauche, et, à droite, le squelette.

3.1 Hit or Miss Transform

Ou sous son nom franąis, la transformée tout-ou-rien. Elle sert à extraire des motifs d'une image, par exemple les points qui sont à la fois dans l'objet et qui n'ont aucun voisin (il faut préciser le voisinage utilisé). Formellement, on la définit comme suit :

$$X \odot B = E_{B\text{fg}}(X) \cap E_{B\text{bg}}\left(\overline{X}\right)$$

avec $B = (B\text{fg}, B\text{bg})$, ou $B\text{fg}$ représente l'opération sur l'objet et $B\text{bg}$ l'opération sur le fond. Les deux éléments structurants doivent satisfaire $B\text{fg} \cap B\text{bg} = \varnothing$

3.1.1 Applications

Points isolés Au sens du 4-voisinage, des points isolés sont des points qui sont dans lobjet et qui n'ont pas de voisins sur le 4-voisinage, ainsi, on définit les éléments structurants :

$$B_{\text{fg}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \text{ et } B_{\text{bg}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

on verifie bien que $B\text{fg} \cap B\text{bg} = \varnothing$. Voici le résultats figure 7 sur laquelle les points isolés figurent en rouge, pour une image de contour binarisée (fig. 3).

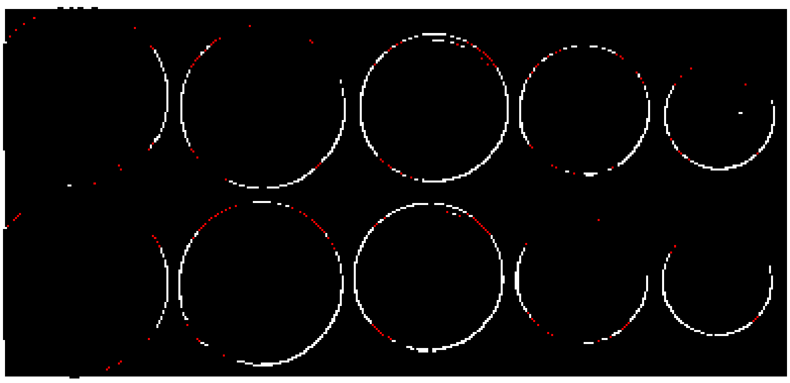


Figure 7: Les points rouge sont isolés au sens du 4-voisinage.

Extremités La détection des extrémités est plus subtile car il faut considérer plusieurs cas. Ici, on cherche à détecter les extrémités au sens du 8-voisinage. Il faut extraire tout les points qui sont dans l'objet et qui n'ont qu'un seul voisin. Pour cela, on va faire plusieurs extractions et le résultat final sera l'union de touts les résultats. Figure 8 montre le résultat de cette opération en rouge sur l'image (les points ont étés dilatés pour plus de clareté).

Voici les masque utilises :

$$B_{\text{fg}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

et

$$B_{\text{bg}} \in \left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}$$

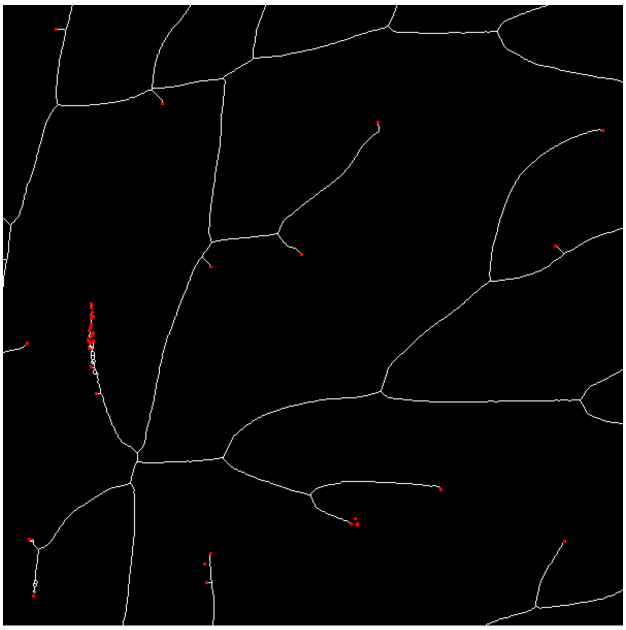


Figure 8: Les points rouge sont les extrémités au sens du 8-voisinage.

Détection de contour et comparaison On introduit la notion de gradient morphologique $G_B$comme la différence entre la dilatation et l'érosion d'une image par un élément structurant B.

$$G_B\left(X\right)=D_B\left(X\right)\backslash E_B\left(X\right) \text{ avec, dans notre exemple : } B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 1&1&1\\\hline 0&1&0\\\hline\end{array}$$

En suivant la même logique qu'au paragraphe précédent, on définit aussi les pairs structurantes pour la détection de contours par transformation Tout-ou-Rien :

$$B_{\text{fg}}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array}$$

et

$$B_{\text{bg}}\in\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 1&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&1\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array}\right\}$$

Figure 9 et figure 10 représentent les résultats respectifs du gradient morphologique et de la détection par transformée Tout-ou-Rien en pixel rouge.

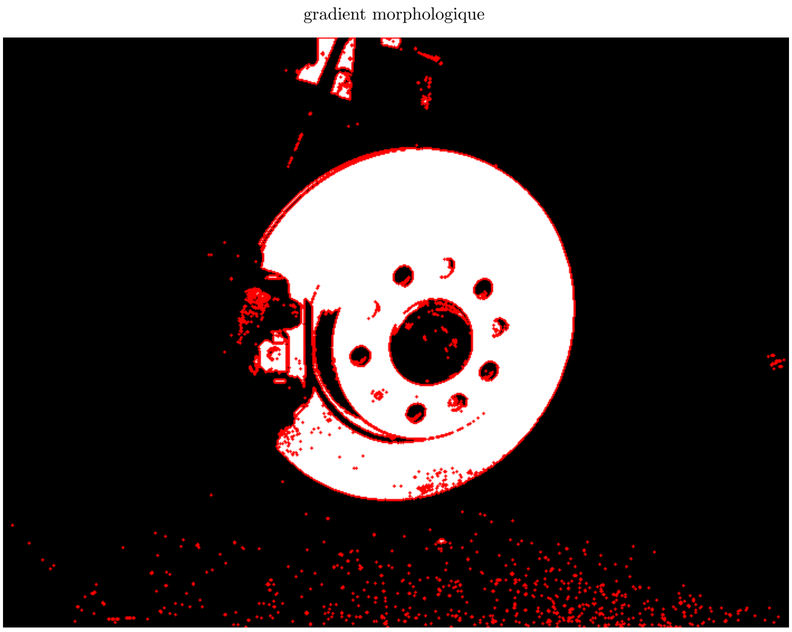


Figure 9: Les points rouges sont les contours au sens du gradient morphologique

Hit or Miss method

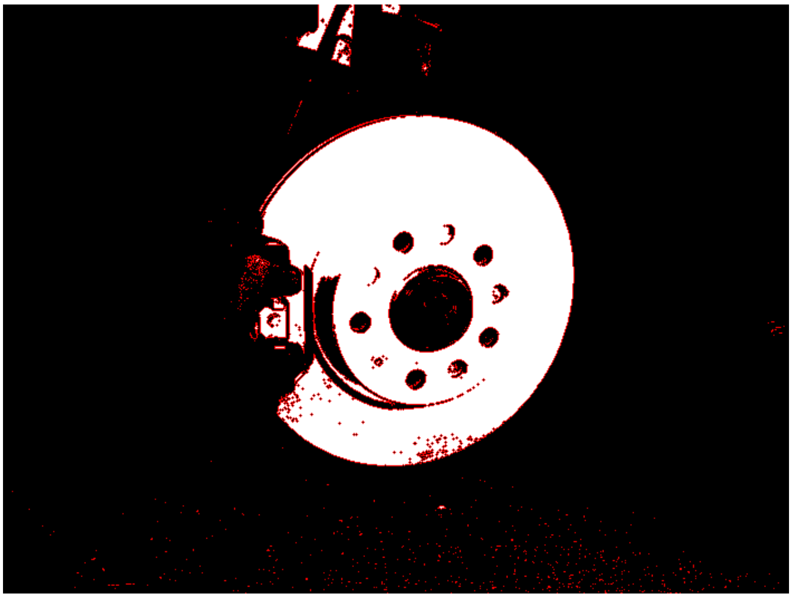


Figure 10: Les points rouges sont les contours au sens de la transformee Tout-ou-Rien

3.2 Lien entre dilatation et carte de distance

La dilatation d'une image a déjà été introduite, il ne reste que la notion de carte de distance. C'est tout simplement une image qui en chaque point donne la distance ã l'objet le plus proche. Elle est implémentée dans l'opérateur *bwdist* sous *octave*

La figure 11 montre le résultat d'une dilatation par la méthode utilisant la somme de Minkowski (la ligne du haut) et le seuillage de la carte de distance.

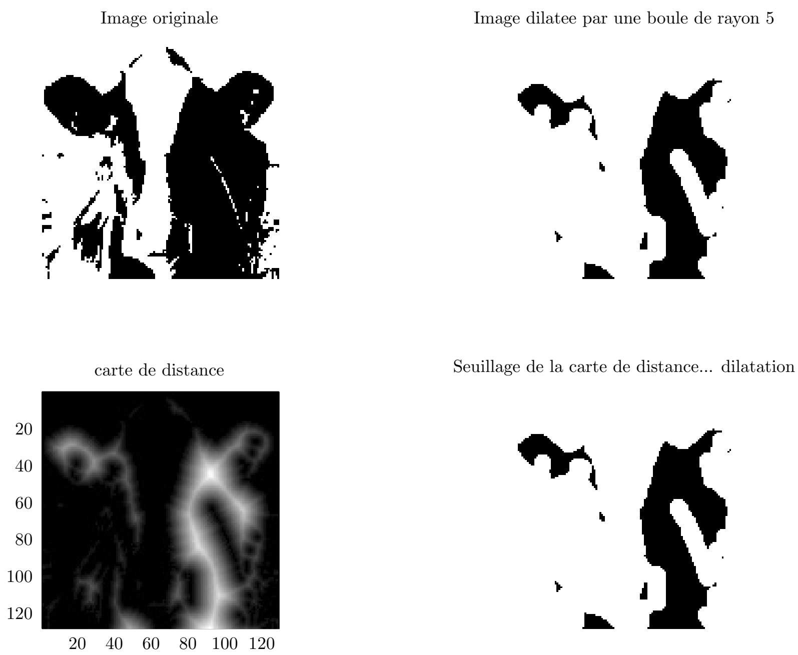


Figure 11