计算方法第三次上机作业

曾梦辰*

2024 年 6 月 26 日

1 问题

使用追赶法求解线性方程 $AX = Y$ 的解, 其中

- A 为三对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

- A 为周期三对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

要求采用矩阵稀疏存储的技巧, 并将求解过程写成函数形式.

---

*学号: 202011999050

2 算法

追赶法本质为 Gauss 消元法, 我们列举伪代码如下:

Algorithm 1: 追赶法

Input: Tridiagonal matrix A, column vector Y

Output: Solution of $AX = Y$

$i = 2$;

while $i \leq n$ **do**

  $b_i = b_i - a_i c_{i-1}/b_{i-1}$;

  $y_i = y_i - a_i y_{i-1}/b_{i-1}$;

  $i++$;

end

$x_n = y_n/b_n$;

$i = n - 1$;

while $i > 0$ **do**

  $x_i = (y_i - c_i x_{i+1})/b_i$;

  $i--$;

end

return $X = (x_1, \cdots, x_n)^\top$;

对于周期三对角矩阵, 我们作分解

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

及

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

使用追赶法解出 U 和 V, 那么可以验证

$$x_n = \frac{y_n - c_n v_1 - a_n v_{n-1}}{b_n + c_n u_1 + a_n u_{n-1}}$$

及

$$x_i = u_i x_n + v_i,\ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

给出了解向量 X.

3 运行结果

我们使用两个工作示例:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

代码`program3-1.c`编译的程序给出正确结果 $(-1, 3)^\top$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

代码`program3-2.c`编译的程序给出正确结果 $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)^\top$.

4 运行环境

程序运行环境: Dell Inspiron 14 Plus 7420, Linux 5.15.146.1-microsoft-standard-WSL2.
编译器: gcc version 9.4.0 (Ubuntu 9.4.0-Ubuntu 20.04.2)