

计算方法第二次上机作业

曾梦辰*

2024 年 5 月 15 日

1 问题

已知以下两个方程均有一个实根, 分别使用二分法, Newton 法, 割线法求近似根, 精确到小数点后 8 位, 然后对 Newton 法采用 Aitken 加速.

$$\sin x = 6x + 5$$

$$\ln x + x^2 = 3$$

2 根的分析

设 $f(x) = \sin x - 6x - 5$, $g(x) = \ln x + x^2 - 3$. 那么有简单的不等式

$$\begin{aligned} f(-1) &= \sin(-1) + 1 > 0, & f(0) &= -5 < 0; \\ g(1) &= -2 < 0, & g(2) &= \ln 2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

因此使用二分法求根时, f 的根在 $[-1, 0]$ 中搜索, g 的根在 $[1, 2]$ 中搜索. 使用 Newton 法与割线法迭代时, f 使用 -1 作为起点, g 使用 2 作为起点.

3 算法

以下列举二分法, Newton 法, 割线法与使用 Aitken 加速的 Newton 法.

*学号: 202011999050

Algorithm 1: 二分法

Input: Function f , real number a, b with $a < b$ **Output:** Solution of $f(x) = 0$

```

1  $a_0 = a, b_0 = b;$ 
2 while  $b_n - a_n > 1 \times 10^{-8}$  do
3   if  $\text{sgn}((b_n + a_n)/2) \text{sgn } a_n < 0$  then
4      $a_{n+1} = a_n;$ 
5      $b_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2};$ 
6      $n++;$ 
7   else
8      $a_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2};$ 
9      $b_{n+1} = b_n;$ 
10     $n++;$ 
11  end
12 end
13 return  $(a_n + b_n)/2;$ 

```

Algorithm 2: Newton 法

Input: Function f , real number a **Output:** Solution of $f(x) = 0$

```

1  $a_0 = a;$ 
2 while  $|a_n - a_{n-1}| > 1 \times 10^{-8}$  do
3    $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)};$ 
4    $n++;$ 
5 end
6 return  $a_n;$ 

```

Algorithm 3: 割线法**Input:** Function f , real number a, b with $a < x_0 < b$, where $f(x_0) = 0$ **Output:** Solution of $f(x) = 0$, i.e. x_0

```

1  $a_0 = a, a_1 = b;$ 
2 while  $|a_n - a_{n-1}| > 1 \times 10^{-8}$  do
3    $a_{n+1} = a_n - \frac{(a_n - a_{n-1})f(a_{n-1})}{f(a_n) - f(a_{n-1})};$ 
4    $n++;$ 
5 end
6 return  $a_n;$ 

```

Algorithm 4: 使用 Aitken 加速的 Newton 法**Input:** Function f , real number a **Output:** Solution of $f(x) = 0$

```

1 Define function  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ,  $\Phi(x) = \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))};$ 
2 while  $|a_n - a_{n-1}| > 1 \times 10^{-8}$  do
3    $a_{n+1} = \Phi(a_n);$ 
4    $n++;$ 
5 end
6 return  $a_n;$ 

```

4 运行结果

程序源代码分别参考文件夹中的program2-1.c至program2-4.c.

	二分法	Newton 法	割线法	Aitken 加速的 Newton 法
f 的零点	-0.97089892	-0.97089892	-0.97089892	-0.97089892
g 的零点	1.59214294	1.59214295	1.59214294	1.59214294
f 的迭代次数	27	2	4	32
g 的迭代次数	27	3	6	102

表 1: 结果图表

可以得到迭代效率 Newton 法 > 割线法 > 二分法 > Aitken 加速的 Newton 法. 使用 Aitken 加速后反而迭代效率降低的原因尚不清楚.

5 运行环境

程序运行环境: Dell Inspiron 14 Plus 7420, Linux 5.15.146.1-microsoft-standard-WSL2.

编译器: gcc version 9.4.0 (Ubuntu 9.4.0-Ubuntu 20.04.2)