de Rham 上同调与 Jordan 曲线定理

魏子涵

2022 年 7 月 10 日

0 微分形式回顾

我们回顾一下需要用到的有关微分形式的知识.

一个 1–**形式**是一个形式和 $p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$, 其中 p, q 是光滑函数. 一个光滑函数 f 的**微分**是一个 1–形式 $(\partial f/\partial x)\,\mathrm{d}x + (\partial f/\partial y)\,\mathrm{d}y$. 1–形式中的**闭形式**是指满足 $\partial p/\partial x = \partial q/\partial y$ 的 $p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$; **恰当形式**是指作为一个光滑函数微分的 1–形式. 闭形式与恰当形式均构成实向量空间.

一个简单的结论是

准则 1.10 恰当形式都是闭形式. [1, p. 10]

以及一个部分的逆命题

命题 1.12 设 U 是两个有限或无限长的开区间的乘积, 那么在 U 上闭形式都是恰当形式.

我们之后需要一个更强的命题

Poincaré 引理 如果 U 中存在一点 P, 使得任意 $Q \in U$ 与 P 连接的线段均在 U 内 (即 U 是星形区域), 那么 U 中的闭形式都是恰当形式.

证明参阅 [2, 定理 4.11]. 此外, 我们需要一个关于卷绕数的命题

命题 3.16 设 γ 是闭路径, $\operatorname{supp}\gamma$ 是 γ 的图像, 那么 γ 的卷绕数 (作为点的函数) 在 $\mathbb{R}^2 \backslash \operatorname{supp}\gamma$ 的每个连通分支上是常值函数. 特别地, 在无界的连通分支上卷绕数为 0.

1 de Rham 上同调群

本书在这一章只考虑平面上一个开集 U 的第零阶和第一阶上同调群, 分别定义为

$$H^0(U) = \{f \in C^\infty(U) | \ f \text{ 局部为常值}\}$$
$$H^1(U) = \frac{\{U\text{上的闭1–形式}\}}{\{U\text{上的恰当1–形式}\}}$$

这两者实质上是实向量空间, 但在传统上会把上同调叫做群.

容易看出 $\dim H^0(U)$ 就是 U 的连通分支个数. 而对于 H^1, 这一节有一个简单的计算 (命题 5.1), 我们直接证明问题 5.2 的推广形式:

问题 5.2 设 $X = \{P_1, \cdots, P_n\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上 n 个点构成的集合, 那么 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash X) \cong \mathbb{R}^n$.

分析. 本书是通过直接给出生成元来证明这个命题的. 对 $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 与某个含 P 的开集 U, 设 1–形式

$$\omega_P := \frac{1}{2\pi} \frac{-(y - y_0)\,\mathrm{d}x + (x - x_0)\,\mathrm{d}y}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

那么 ω_P 都是闭形式, 记 $[\omega_P]$ 为 ω_P 在 $H^1(U \backslash \{P\})$ 中的等价类. 我们希望证明 n 个形式的等价类 $[\omega_{P_1}], \cdots, [\omega_{P_n}]$ 是 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash X)$ 的一组基. 这需要用到引理 1.17 到问题 1.19 的一个结论: 设 $r < \min_{i,j}\{|P_i P_j|\}$, C_i 为以 P_i 为圆心半径为 r 的圆, 如果 1–形式 ω 满足对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都有

$$\int_{C_i} \omega = 0 \tag{1}$$

那么 ω 在 $\mathbb{R}^2 \backslash X$ 上是恰当的. 证明这个结论通过归纳法, 通过在一个点处画两根直线, 将平面分为 4 个半平面, 然后在这四个半平面上均存在光滑函数使其微分为 ω, 积分为 0 保证可以通过调整常数使得这些函数在半平面的重合处相等, 从而 ω 使恰当的.

问题 1.19 设 U 是两个有限或无限长的开区间的乘积, X 是 U 中有限个点的集合, 那么满足 (1) 式假设的 1–形式 ω 是恰当的.

然后我们给出问题 5.2 的证明.

本章还会用到一个结论

命题 5.3 设 A 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连通闭集, $P, Q \in A$, 那么在 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash A)$ 中有 $[\omega_P] = [\omega_Q]$.

2 上边缘映射

我们换用一个更明晰一些的方法来讲这一节的内容.

对两个开集 U 与 V, 设线性映射

$$
\begin{aligned}
i^* &: H^0(U) \to H^0(U \cap V),\ f \mapsto f|_{U\cap V} \\
j^* &: H^0(V) \to H^0(U \cap V),\ g \mapsto g|_{U\cap V} \\
k^* &: H^1(U \cap V) \to H^1(U),\ [\omega] \mapsto [\omega|_U] \\
l^* &: H^1(U \cap V) \to H^1(V),\ [\tau] \mapsto [\tau|_V]
\end{aligned}
$$

那么定义**上边缘映射**为一个线性映射 $\delta : H^0(U \cap V) \to H^1(U \cup V)$, 满足序列

$$
H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{i^*-j^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^1(U \cup V) \xrightarrow{k^*\oplus l^*} H^1(U) \oplus H^1(V) \tag{2}
$$

是正合的. 按照这个定义, δ 满足

1. 对 $f \in \ker\delta$, 存在 U 和 V 上的局部常值函数 f_1, f_2 使得 $f = f_1 - f_2$ (严格写应该是 $f_1|_{U\cap V} - f_2|_{U\cap V}$, 但书上的命题 5.7 没有这么写);
2. 如果 $\omega \in \operatorname{im}\delta$, 那么 ω 在 U 和 V 上的限制都是恰当的 (命题 5.9 前半部分);
3. 如果 $H^1(U) = H^1(V) = 0$, 那么 δ 是满射 (命题 5.9 后半部分).

我们证明上边缘映射的存在性. 这需要用到单位分解定理. (证明见 [1, 附录 B2] 或 [2, pp. 63–64])

上边缘映射本质上是 ***Mayer-Vietoris 序列***的一部分, 在第 *10* 章与第 *23, 24* 章会讲到这个.

3 Jordan 曲线定理

这一节要证明

定理 5.10 (Jordan 曲线定理) 如果 $X \subset \mathbb{R}^2$ 与一个圆周同胚, 那么 $\mathbb{R}^2 \backslash X$ 有两个连通分支, 一个有界, 另一个无界. X 上任意一点的任意邻域均同时包含这两个两个连通分支中的点.

而这依赖于一个命题

定理 5.11 如果 $Y \subset \mathbb{R}^2$ 同胚于一个闭区间, 那么 $\mathbb{R}^2 \backslash Y$ 是连通的.

这两个命题都需要代数拓扑的方法来证明.