de Rham 上同调与 Jordan 曲线定理

魏子涵

2022 年 7 月 10 日

0 微分形式回顾

我们回顾一下需要用到的有关微分形式的知识.

一个 1–**形式**是一个形式和 $p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$, 其中 p, q 是光滑函数. 一个光滑函数 f 的**微分**是一个 1–形式 $(\partial f/\partial x)\,\mathrm{d}x + (\partial f/\partial y)\,\mathrm{d}y$. 1–形式中的**闭形式**是指满足 $\partial p/\partial x = \partial q/\partial y$ 的 $p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$; **恰当形式**是指作为一个光滑函数微分的 1–形式. 闭形式与恰当形式均构成实向量空间.

一个简单的结论是

准则 1.10 恰当形式都是闭形式. [1, p. 10]

以及一个部分的逆命题

命题 1.12 设 U 是两个有限或无限长的开区间的乘积, 那么在 U 上闭形式都是恰当形式.

我们之后需要一个更强的命题

Poincaré 引理 如果 U 中存在一点 P, 使得任意 $Q \in U$ 与 P 连接的线段均在 U 内 (即 U 是*星形区域*), 那么 U 中的闭形式都是恰当形式.

证明参阅 [2, 定理 4.11]. 此外, 我们需要一个关于卷绕数的命题

命题 3.16 设 γ 是闭路径, $\operatorname{supp}\gamma$ 是 γ 的图像, 那么 γ 的卷绕数 (作为点的函数)

在 $\mathbb{R}^2 \backslash \operatorname{supp}\gamma$ 的每个连通分支上是常值函数. 特别地, 在无界的连通分支上卷绕数为 0.

1 de Rham 上同调群

本书在这一章只考虑平面上一个开集 U 的第零阶和第一阶上同调群, 分别定义为

$$H^0(U) = \{f \in C^\infty(U) | \ f \text{ 局部为常值}\}$$
$$H^1(U) = \frac{\{U\text{上的闭1–形式}\}}{\{U\text{上的恰当1–形式}\}}$$

这两者实质上是实向量空间, 但在传统上会把上同调叫做群.

容易看出 $\dim H^0(U)$ 就是 U 的连通分支个数. 而对于 H^1, 这一节有一个简单的计算 (命题 5.1), 我们直接证明问题 5.2 的推广形式:

问题 5.2 设 $X = \{P_1, \cdots, P_n\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上 n 个点构成的集合, 那么 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash X) \cong \mathbb{R}^n$.

分析. 本书是通过直接给出生成元来证明这个命题的. 对 $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 与某个含 P 的开集 U, 设 1–形式

$$\omega_P := \frac{1}{2\pi} \frac{-(y-y_0)\,\mathrm{d}x + (x-x_0)\,\mathrm{d}y}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

那么 ω_P 都是闭形式, 记 $[\omega_P]$ 为 ω_P 在 $H^1(U \backslash \{P\})$ 中的等价类. 我们希望证明 $[\omega_{P_1}], \cdots, [\omega_{P_n}]$ 是 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash X)$ 的一组基. 这需要用到引理 1.17 到问题 1.19 的一个结论: 设 $r < \min_{i,j}\{|P_iP_j|\}$, C_i 为以 P_i 为圆心半径为 r 的圆, 如果 1–形式 ω 满足对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都有

$$\int_{C_i} \omega = 0 \tag{1}$$

那么 ω 在 $\mathbb{R}^2 \backslash X$ 上是恰当的. 证明这个结论通过归纳法, 通过在一个点处画两根直线, 将平面分为 4 个半平面, 然后在这四个半平面上均存在光滑函数

使其微分为 ω, 积分为 0 保证可以通过调整常数使得这些函数在半平面的重合处相等, 从而 ω 使恰当的.

问题 1.19 设 U 是两个有限或无限长的开区间的乘积, X 是 U 中有限个点的集合, 那么满足 (1) 假设的 1–形式 ω 是恰当的.

证明. 未完待续. □

问题 5.2 的证明. 我们首先证明 $[\omega_{P_1}], \cdots, [\omega_{P_n}]$ 是线性无关的. 设

$$\sum_{i=1}^{n} a_i[\omega_{P_i}] = 0$$

即 $\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_{P_i}$ 是恰当的, 那么有

$$0 = \int_{C_i} \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_{P_i} = a_i$$

从而 $[\omega_{P_1}], \cdots, [\omega_{P_n}]$ 线性无关. 我们现在证明 $[\omega_{P_1}], \cdots, [\omega_{P_n}]$ 生成 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash X)$. 设 ω_0 是闭的 1–形式, 记

$$\int_{C_i} \omega_0 = c_i$$

我们证明 $\omega := \omega_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_{P_i}$ 是恰当的. □

本章还会用到一个结论

设 A 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连通闭集, $P, Q \in A$, 那么在 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash A)$ 中有 $[\omega_P] = [\omega_Q]$.

2 上边缘映射

我们换用一个更明晰一些的方法来讲这一节的内容.

对两个开集 U 与 V, 考虑嵌入映射构成的交换图

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & U \cup V \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

设线性映射

$$\begin{aligned} i^* &: H^0(U) \to H^0(U \cap V),\ f \mapsto f|_{U\cap V} \\ j^* &: H^0(V) \to H^0(U \cap V),\ g \mapsto g|_{U\cap V} \\ k^* &: H^1(U \cap V) \to H^1(U),\ [\omega] \mapsto [\omega|_U] \\ l^* &: H^1(U \cap V) \to H^1(V),\ [\tau] \mapsto [\tau|_V] \end{aligned}$$

那么定义**上边缘映射**为一个线性映射 $\delta : H^0(U \cap V) \to H^1(U \cup V)$, 满足序列

$$H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{i^*-j^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^1(U \cup V) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^1(U) \oplus H^1(V)$$

是正合的. 按照这个定义, δ 满足

1. 对 $f \in \ker \delta$, 存在 U 和 V 上的局部常值函数 f_1, f_2 使得 $f = f_1 - f_2$ (严格写应该是 $f_1|_{U\cap V} - f_2|_{U\cap V}$, 但书上的命题 5.7 没有这么写);
2. 如果 $\omega \in \operatorname{im} \delta$, 那么 ω 在 U 和 V 上的限制都是恰当的 (命题 5.9 前半部分);
3. 如果 $H^1(U) = H^1(V) = 0$, 那么 δ 是满射 (命题 5.9 后半部分).

我们证明上边缘映射的存在性. 这需要用到单位分解定理.

上边缘映射本质上是 ***Mayer-Vietoris 序列*** *的一部分, 在第 10 章与第 23, 24 章会讲到这个.*

3 Jordan 曲线定理

这一节要证明

定理 5.10 (Jordan 曲线定理) 如果 $X \subset \mathbb{R}^2$ 与一个圆周同胚, 那么 $\mathbb{R}^2 \backslash X$ 有两个连通分支, 一个有界, 另一个无界. X 上任意一点的任意邻域均同时包含这两个两个连通分支中的点.

而这依赖于一个命题

定理 5.11 如果 $Y \subset \mathbb{R}^2$ 同胚于一个闭区间, 那么 $\mathbb{R}^2 \backslash Y$ 是连通的.

这两个命题都需要代数拓扑的方法来证明.

我们先证明定理 5.11.

4 应用和变体

本节需要用到一个 (现在还证不出来的) 结论:

设 K 是平面上的非空紧集.

(a) 如果 K 是连通的, 那么 $\dim H^1(\mathbb{R}^2 \backslash K) = 1$, 且 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash K) = \langle [\omega_P] \rangle$, 对任意 $P \in K$;

(b) 如果 K 不连通且 P, Q 在不同的连通分支中, 那么 $[\omega_P]$ 与 $[\omega_Q]$ 在 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash K)$ 中线性无关;

(c) 如果 K 恰好有两个连通分支, 那么任取两个连通分支中的 P, Q, 有 $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash K) = \big\langle [\omega_P], [\omega_Q] \big\rangle$.

习题 5.13 到习题 5.16 是证明 Jordan 曲线定理中处理 H^0 的技巧的一些应用.

习题 5.13 如果 A, B 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连通紧集, 且 $A \cap B$ 非空而不连通, 证明 $\mathbb{R}^2 \backslash (A \cup B)$ 不连通.

习题 5.14 如果 Y 是平面上同胚于一个矩形或者闭圆盘的子集, 证明它的补是连通的.

习题 5.15 如果 X 是平面上同胚于一个圆环的子集, 证明它的补有两个连通

分支.

习题 5.16 如果 X 是平面上同胚于一个 "8 字形" 的子集, 证明它的补有三个连通分支.

此题略过不证.

命题 5.17 到推论 5.19 是 Jordan 曲线定理的一个简单应用.

命题 5.17 设 D 是闭圆盘, 记 D° 为其内部, C 为其边界圆. 设 $f : D \to \mathbb{R}^2$ 是连续的双射, 那么 $\mathbb{R}^2 \backslash f(C)$ 有两个连通分支, 分别为

$$f(D^\circ) \quad 与 \quad \mathbb{R}^2 \backslash f(D)$$

特别地, $f(D^\circ)$ 是平面上的一个开集.

推论 5.18 (区域不变定理) 如果 U 是平面上的开集, $F : U \to \mathbb{R}^2$ 是连续的双射, 那么 $F(U)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的开子集, 且 F 是 U 到 $F(U)$ 的一个同胚.

利用区域不变定理给出第 4 章中的一个结论的另一证明.

推论 5.19 2 维球面不同胚于平面的任何子集.

以下是一些和 Jordan 曲线定理相关的结论.

命题 5.20 设 $F : C \to \mathbb{R}^2$ 是连续的双射, 那么对 $\mathbb{R}^2 \backslash F(C)$ 的有界连通分支中的任一点 P 有 $W(F, P) = \pm 1$.

接下来两个问题是有关平面图的问题.

问题 5.21 (Euler 公式) 设 X 是平面上 $v \geq 1$ 个顶点与 $e \geq 0$ 条边构成的集合, 边指连接点与点的不自交的路径, 同时假设不同的边在顶点之外不相交. 假设 X 有 k 个连通分支, 证明 $\mathbb{R}^2 \backslash X$ 有 $f = e - v + k + 1$ 个连通分支, 从而有

$$v - e + f = 2 + (k - 1)$$

问题 5.22 证明

$$K_{3,3} := (\{P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}, \{\{P_i, Q_j\} | i, j = 1, 2, 3\})$$
$$K_5 := (\{P_1, \cdots, P_5\}, \{\{P_i, P_j\} | 1 \leq i < j \leq 5\})$$

不能被嵌入平面.

问题 5.23 是定理 5.11, Jordan 曲线定理以及 Euler 公式缩小到一个连通的开集上. 实际上证明方法是一样的, 这里不再详细写.

习题 5.24 证明定理 5.11, Jordan 曲线定理以及 Euler 公式在 2 维球面上也成立.

问题 5.25 在球面上找两个图, 使得他们是同胚的, 但是不存在球面之间的同胚将其中一个映为另一个.

问题 5.26 证明不存在 Möbius 带到平面的连续双射.

问题 5.27 设 X 是平面上同胚于圆周的子集, P_1, P_2 在其补集中, 由一条穿过 X n 次的路径连接. 证明当 n 是偶数时 P_1, P_2 在 $\mathbb{R}^2 \backslash X$ 的同一个连通分支中, n 为奇数时在不同的连通分支中. (穿过是需要被定义的)

问题 5.28 一个**带边的拓扑曲面**是指一个第二可数的 Hausdorff 空间, 满足对任意一点 P, 都存在 P 的一个邻域同胚于平面或上半平面 $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \geq 0\}$ 中的一个开集. 如果这个同胚是到 $\mathbb{H}^2$ 的且将 P 映为 x 轴上的点, 则称 P 为**边界点**, 否则称为**内点**[1]. 证明同胚的带边曲面有着同胚的边界 (即边界点的集合), 从而 Möbius 带与圆锥面不同胚.

[1]这里对带边拓扑流形的定义是更加现代的定义, 与书上略微不同

参考文献

[1] William Fulton. *Algebraic topology*. Vol. 153. Graduate Texts in Mathematics. A first course. Springer-Verlag, New York, 1995, pp. xviii+430. ISBN: 0-387-94326-9; 0-387-94327-7. DOI: 10.1007/978-1-4612-4180-5. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4180-5.

[2] Michael Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965, pp. xii+144.