

de Rham 上同调与 Jordan 曲线定理

魏子涵

2022 年 8 月 1 日

0 微分形式回顾

我们回顾一下需要用到的有关微分形式的知识.

一个 **1-形式** 是一个形式和 $p dx + q dy$, 其中 p, q 是光滑函数. 一个光滑函数 f 的**微分** 是一个 1-形式 $(\partial f / \partial x) dx + (\partial f / \partial y) dy$. 1-形式中的**闭形式** 是指满足 $\partial p / \partial x = \partial q / \partial y$ 的 $p dx + q dy$; **恰当形式** 是指作为一个光滑函数微分的 1-形式. 闭形式与恰当形式均构成实向量空间.

一个简单的结论是

准则 1.10 恰当形式都是闭形式. [1, p. 10]

以及一个部分的逆命题

命题 1.12 设 U 是两个有限或无限长的开区间的乘积, 那么在 U 上闭形式都是恰当形式.

我们之后需要一个更强的命题

Poincaré 引理 如果 U 中存在一点 P , 使得任意 $Q \in U$ 与 P 连接的线段均在 U 内 (即 U 是星形区域), 那么 U 中的闭形式都是恰当形式.

证明参阅 [2, 定理 4.11]. 此外, 我们需要一个关于卷绕数的命题

命题 3.16 设 γ 是闭路径, $\text{supp } \gamma$ 是 γ 的图像, 那么 γ 的卷绕数 (作为点的函数) 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \text{supp } \gamma$ 的每个连通分支上是常值函数. 特别地, 在无界的连通分支上卷绕数为 0.

1 de Rham 上同调群

本书在这一章只考虑平面上一个开集 U 的第零阶和第一阶上同调群, 分别定义为

$$H^0(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid f \text{ 局部为常值}\}$$

$$H^1(U) = \frac{\{U \text{ 上的闭1-形式}\}}{\{U \text{ 上的恰当1-形式}\}}$$

这两者实质上是实向量空间, 但在传统上会把上同调叫做群.

容易看出 $\dim H^0(U)$ 就是 U 的连通分支个数. 而对于 H^1 , 这一节有一个简单的计算 (命题 5.1), 我们直接证明问题 5.2 的推广形式:

问题 5.2 设 $X = \{P_1, \dots, P_n\}$ 是 \mathbb{R}^2 上 n 个点构成的集合, 那么 $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus X) \cong \mathbb{R}^n$.

分析. 本书是通过直接给出生成元来证明这个命题的. 对 $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 与某个含 P 的开集 U , 设 1-形式

$$\omega_P := \frac{1}{2\pi} \frac{-(y - y_0)dx + (x - x_0)dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

那么 ω_P 都是闭形式, 记 $[\omega_P]$ 为 ω_P 在 $H^1(U \setminus \{P\})$ 中的等价类. 我们希望证明 n 个形式的等价类 $[\omega_{P_1}], \dots, [\omega_{P_n}]$ 是 $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus X)$ 的一组基. 这需要用到引理 1.17 到问题 1.19 的一个结论: 设 $r < \min_{i,j} \{P_i P_j\}$, C_i 为以 P_i 为圆心半径为 r 的圆, 如果 1-形式 ω 满足对每个 $i = 1, 2, \dots, n$ 都有

$$\int_{C_i} \omega = 0 \tag{1}$$

那么 ω 在 $\mathbb{R}^2 \setminus X$ 上是恰当的. 证明这个结论通过归纳法, 通过在一个点处画两根直线, 将平面分为 4 个半平面, 然后在这四个半平面上均存在光滑函数使其微分为 ω , 积分为 0 保证可以通过调整常数使得这些函数在半平面的重合处相等, 从而 ω 是恰当的.

问题 1.19 设 U 是两个有限或无限长的开区间的乘积, X 是 U 中有限个点的集合, 那么满足 (1) 式假设的 1-形式 ω 是恰当的.

证明. 我们对 X 中的点的个数 n 使用归纳法. $n = 0$ 时是命题 1.12. 假设命题对所有不超过 n 个点的情况成立. 对 $n + 1$ 个点构成的集合 X , 取 X 中的一点 P , 在 P 处平行于 U 的边建立坐标系. 设 U 与第 I, II 象限及 y 轴正半轴的交为 U_1 , 类似地逆时针旋转定义 U_2, U_3, U_4 . 那么每个 U_i 均为去掉不超过 n 个点的两个开区间的乘积, 从而按归纳假设, 存在 U_i 上的光滑函数 f_i 满足 $df_i = \omega$. 由于在重叠处有 $df_i = df_j$, 所以 f_i 与 f_j 在 $U_i \cap U_j$ 上只相

差一个常数 (因重叠处是连通的). 那么可以通过调整常数使得 $f_1 = f_2, f_2 = f_3, f_3 = f_4$. 取 $Q \in U_1 \cap U_4$, 考虑

$$\int_{C_P} \omega = f_4(Q) - f_1(Q) = 0$$

从而有 $f_1 = f_4$, 因此在 $U_1 \cup \dots \cup U_4 = U \setminus X$ 上存在 f 使得 $df = \omega$. □

问题 5.2 的证明. 我们首先证明 $[\omega_{P_1}], \dots, [\omega_{P_n}]$ 是线性无关的. 设

$$\sum_{i=1}^n a_i [\omega_{P_i}] = 0$$

即 $\sum_{i=1}^n a_i \omega_{P_i}$ 是恰当的, 那么有

$$0 = \int_{C_i} \sum_{i=1}^n a_i \omega_{P_i} = a_i$$

从而 $[\omega_{P_1}], \dots, [\omega_{P_n}]$ 线性无关. 我们现在证明 $[\omega_{P_1}], \dots, [\omega_{P_n}]$ 生成 $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus X)$. 设 ω_0 是闭的 1-形式, 记

$$\int_{C_i} \omega_0 = c_i$$

设 $\omega := \omega_0 - \sum_{i=1}^n c_i \omega_{P_i}$, 由于对每个 C_i 都有

$$\int_{C_i} \omega = 0$$

所以 ω 在 $\mathbb{R}^2 \setminus X$ 上是恰当的. 因此就有 $[\omega_0] = \sum_{i=1}^n c_i [\omega_{P_i}]$, 从而

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus X) = \langle [\omega_{P_1}], \dots, [\omega_{P_n}] \rangle \cong \mathbb{R}^n$$

□

本章还会用到一个结论

命题 5.3 设 A 是 \mathbb{R}^2 上的连通闭集, $P, Q \in A$, 那么在 $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus A)$ 中有 $[\omega_P] = [\omega_Q]$.

证明. 我们只需要证明 $\omega_P - \omega_Q$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus A$ 中任意闭路径上的积分为 0. 而对闭路径 γ 有

$$\int_{\gamma} (\omega_P - \omega_Q) = W(\gamma, P) - W(\gamma, Q)$$

按命题 3.16, γ 关于 P 和 Q 的卷绕数是相等的, 所以以上积分为 0, 从而命题得证. □

2 上边缘映射

我们换用一个更明晰一些的方法来讲这一节的内容.

对两个开集 U 与 V , 考虑嵌入映射构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ i \nearrow & & \searrow k \\ U \cap V & & U \cup V \\ j \searrow & & \nearrow l \\ & V & \end{array}$$

设线性映射

$$i^* : H^0(U) \rightarrow H^0(U \cap V), f \mapsto f|_{U \cap V}$$

$$j^* : H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V), g \mapsto g|_{U \cap V}$$

$$k^* : H^1(U \cap V) \rightarrow H^1(U), [\omega] \mapsto [\omega|_U]$$

$$l^* : H^1(U \cap V) \rightarrow H^1(V), [\tau] \mapsto [\tau|_V]$$

那么定义**上边缘映射**为一个线性映射 $\delta : H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(U \cup V)$, 满足序列

$$H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^1(U \cup V) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^1(U) \oplus H^1(V) \quad (2)$$

是正合的. 按照这个定义, δ 满足

1. 对 $f \in \ker \delta$, 存在 U 和 V 上的局部常值函数 f_1, f_2 使得 $f = f_1 - f_2$ (严格写应该是 $f_1|_{U \cap V} - f_2|_{U \cap V}$, 但书上的命题 5.7 没有这么写);
2. 如果 $\omega \in \text{im } \delta$, 那么 ω 在 U 和 V 上的限制都是恰当的 (命题 5.9 前半部分);
3. 如果 $H^1(U) = H^1(V) = 0$, 那么 δ 是满射 (命题 5.9 后半部分).

我们证明上边缘映射的存在性. 这需要用单位分解定理. (证明见 [1, 附录 B2] 或 [2, pp. 63–64])

证明. 取 $U \cup V$ 的从属于 $\{U, V\}$ 的一组单位分解 φ_1, φ_2 , 即满足 $\text{supp } \varphi_1 \subset U, \text{supp } \varphi_2 \subset V$ 且 $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$. 对 $f \in H^0(U \cap V)$, 取

$$f_1(p) = \begin{cases} \varphi_2(p)f(p), & p \in U \cap V \\ 0, & p \in U \setminus V \end{cases}$$

$$f_2(p) = \begin{cases} -\varphi_1(p)f(p), & p \in U \cap V \\ 0, & p \in V \setminus U \end{cases}$$

那么 f_1, f_2 都是光滑的, 且 $f_2|_{U \cap V} - f_1|_{U \cap V} = f$. 由于 f 是局部常值的, 那么有 $0 = df = df_2|_{U \cap V} - df_1|_{U \cap V}$, 从而存在闭形式 $\omega_f \in U \cup V$ 使得在 $U \cap V$ 上 $\omega_f = df_1 = df_2$. 定义 $\delta(f) = [\omega_f]$. 我们说明 δ 是良定义的. 如果另外有 $f_3|_{U \cap V} - f_4|_{U \cap V} = f$ 与由 f_3, f_4 定义的 ω'_f , 那么在 $U \cap V$ 上有

$$f_1 - f_2 = f_3 - f_4 \implies f_1 - f_3 = f_2 - f_4$$

从而可以在 $U \cup V$ 上定义 f' 满足 $f'|_{U \cap V} = f_1 - f_3 = f_2 - f_4$, 且有 $df' = \omega_f - \omega'_f$. 那么 $\omega_f - \omega'_f$ 是恰当的, 有 $[\omega_f] = [\omega'_f]$, 因此 δ 是良定义的. 下面我们验证序列 (2) 是正合的. 首先证明 $\text{im}(i^* - j^*) = \ker \delta$. 如果 $f = g|_{U \cap V} - h|_{U \cap V}$, 其中 g, h 分别是 V, U 上的局部常值函数, 那么一定有 $dg = 0, dh = 0$, 从而 $\delta f = 0$. 反过来, 如果 $\delta f = 0$, 按以上过程取 $f_2 - f_1 = f$, 并设 $\omega_f|_U = df_1, \omega_f|_V = df_2$. 由于 $\delta f = [\omega_f] = 0$, 可知 ω_f 是恰当的, 设 $\omega_f = dg$, 那么有

$$df_1 - dg|_U = 0, df_2 - dg|_V = 0$$

所以 $g - f_1$ 与 $g - f_2$ 是局部常值函数, 满足 $(i^* - j^*)(g - f_1, g - f_2) = f$. 其次证明 $\text{im } \delta = \ker k^* \oplus l^*$. 如果 $f = f_2 - f_1$, 那么

$$k^*(\delta(f)) = d(df_1) = 0, l^*(\delta(f)) = d(df_2) = 0$$

从而 $\text{im } \delta \subset \ker(k^* \oplus l^*)$. 反过来, 对任意 $[\omega] \in \ker(k^* \oplus l^*)$, $k^* \oplus l^*([\omega]) = 0$ 意味着 $\omega|_U$ 与 $\omega|_V$ 都是恰当的, 从而存在 U, V 上的光滑函数 f_1, f_2 使得 $\omega|_U = df_1, \omega|_V = df_2$. 定义 $U \cap V$ 上的光滑函数 $f = f_2 - f_1$, 那么 $df = df_2 - df_1 = 0$, 从而 f 是局部常值的, 即 $f \in H^0(U \cap V)$, 那么按定义就有 $\delta(f) = [\omega]$, 所以 $\text{im } \delta = \ker k^* \oplus l^*$. \square

上边缘映射本质上是 **Mayer-Vietoris 序列** 的一部分, 在第 10 章与第 23, 24 章会讲到这个.

3 Jordan 曲线定理

这一节要证明

定理 5.10 (Jordan 曲线定理) 如果 $X \subset \mathbb{R}^2$ 与一个圆周同胚, 那么 $\mathbb{R}^2 \setminus X$ 有两个连通分支, 一个有界, 另一个无界. X 上任意一点的任意邻域均同时包含这两个两个连通分支中的点.

而这依赖于一个命题

定理 5.11 如果 $Y \subset \mathbb{R}^2$ 同胚于一个闭区间, 那么 $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ 是连通的.

这两个命题都需要代数拓扑的方法来证明.

我们先证明定理 5.11.

证明. 设 $I = [0, 1]$ 是单位闭区间, $f : I \rightarrow Y$ 是同胚. 反设 $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ 是不连通的, 即

$$\dim H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y) \geq 2$$

取定两个在不同连通分支中的点 A, B . 设 Y 中与 $[0, \frac{1}{2}]$ 同胚的部分为 Y^+ , 与 $[\frac{1}{2}, 1]$ 同胚的部分为 Y^- , $Y^+ \cap Y^- = Q$. 考虑 Mayer-Vietoris 序列

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y^+) \oplus H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y^-) &\longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}) \\ &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2 \setminus Y^+) \oplus H^1(\mathbb{R}^2 \setminus Y^-) \end{aligned}$$

对 $k^* \oplus l^*$ 而言, 由于 $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}) = \langle [\omega_Q] \rangle$, 而 $\omega_Q|_{\mathbb{R}^2 \setminus Y^+}$ 与 $\omega_Q|_{\mathbb{R}^2 \setminus Y^-}$ 均为非零的闭形式, 所以 $k^* \oplus l^*$ 是单射. 因此有 $\text{im } \delta = \ker(k^* \oplus l^*) = 0$, 那么正合列

$$H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y^+) \oplus H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y^-) \xrightarrow{i^* - j^*} H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y) \xrightarrow{\delta} 0$$

说明 $i^* - j^*$ 是满射. 对某个在 A, B 处取值不同的 $f \in H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y)$, 存在 $g \in H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y^+)$, $h \in H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y^-)$ 使得 $g|_{\mathbb{R}^2 \setminus Y} - h|_{\mathbb{R}^2 \setminus Y} = f$. 如果 g, h 均在 A, B 处取值相等, 可以推出 f 在 A, B 处取值相等, 矛盾. 所以 A, B 在 $H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y^+)$ 或 $H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Y^-)$ 的两个不同连通分支中, 设满足的那个为 $\mathbb{R}^2 \setminus Y_1$. 依次构造下去, 我们可以得到一个集合列

$$Y = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_n \supset \cdots$$

设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n = \{P\}$. 对 $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ 任意两个不同连通分支中的点 A, B , 由于 $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ 是连通的, 存在一条闭路径 γ 连接 A, B . 那么存在 P 的一个邻域 N 与 γ 不交, 但又存在充分大的 n 使得 $Y_n \subset N$, 从而 $\text{supp } \gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus Y_n$, 矛盾. \square

Jordan 曲线定理的证明. 设 P, Q 是 X 上任意两点, 连接 P, Q 的两段闭弧记为 A, B . 考虑对 $U = \mathbb{R}^2 \setminus A, V = \mathbb{R}^2 \setminus B$ 的 Mayer-Vietoris 序列

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{R}^2 \setminus A) \oplus H^0(\mathbb{R}^2 \setminus B) &\xrightarrow{i^* - j^*} H^0(\mathbb{R}^2 \setminus X) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) \\ &\xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^1(\mathbb{R}^2 \setminus A) \oplus H^1(\mathbb{R}^2 \setminus B) \end{aligned}$$

由定理 5.11, $\mathbb{R}^2 \setminus A$ 与 $\mathbb{R}^2 \setminus B$ 是连通的, 所以 $H^0(\mathbb{R}^2 \setminus A)$ 与 $H^0(\mathbb{R}^2 \setminus B)$ 由常值函数构成. 对 $\mathbb{R}^2 \setminus A$ 与 $\mathbb{R}^2 \setminus B$ 上的常值函数 g, h , 那么有 $(i^* - j^*)(g, h) = g|_{\mathbb{R}^2 \setminus X} - h|_{\mathbb{R}^2 \setminus X}$ 为常值函数, 从而 $\dim \text{im}(i^* - j^*) = 1$. 由正合可知 $\dim \ker \delta = \dim \text{im}(i^* - j^*) = 1$. 而对于 $k^* \oplus l^*$, 由于

$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) = \langle [\omega_P], [\omega_Q] \rangle$, 而由命题 5.3 知在 $\mathbb{R}^2 \setminus A$ 上有 $[\omega_P] = [\omega_Q]$, 在 $\mathbb{R}^2 \setminus B$ 上同理, 所以有 $k^* \oplus l^*([\omega|_P]) = k^* \oplus l^*([\omega|_Q])$. 因此 $\dim \operatorname{im} k^* \oplus l^* = 1$, 而 $\dim H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) = 2$, 有

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im} \delta &= \dim \ker k^* \oplus l^* \\ &= \dim H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) - \dim \operatorname{im} k^* \oplus l^* \\ &= 1 \end{aligned}$$

所以 $\dim H^0(\mathbb{R}^2 \setminus X) = \dim \ker \delta + \dim \operatorname{im} \delta = 2$, 即 $\mathbb{R}^2 \setminus X$ 有两个连通分支, 显然一个有界而另一个无界.

我们证明最后一个断言. 对任意一点 $T \in X$ 及 T 的邻域 N , 在 N 中取两点 P, Q , 设两点将 X 分的两段闭弧为 A, B , 其中 A 在 N 内. 设 P_0, P_1 是 $\mathbb{R}^2 \setminus X$ 的两个不同连通分支中的点, 由于 $\mathbb{R}^2 \setminus B$ 是连通的, 所以存在闭路径 γ 连接这两点. γ 一定与 A 相交 (否则 X 将会连通), 且交点的集合是闭集, 那么设

$$t_m = \min_{t \in [0,1]} \{t \mid \gamma(t) \in A\}, t_M = \max_{t \in [0,1]} \{t \mid \gamma(t) \in A\}$$

那么存在某个充分小的 ε , 使得 $\gamma(t_m - \varepsilon)$ 与 P_0 在同一连通分支而 $\gamma(t_M + \varepsilon)$ 与 P_1 在同一连通分支, 且 $\gamma(t_m - \varepsilon), \gamma(t_M + \varepsilon)$ 均在 N 中. 从而命题得证. \square

参考文献

- [1] William Fulton. *Algebraic topology*. Vol. 153. Graduate Texts in Mathematics. A first course. Springer-Verlag, New York, 1995, pp. xviii+430. ISBN: 0-387-94326-9; 0-387-94327-7. DOI: 10.1007/978-1-4612-4180-5.
- [2] Michael Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965, pp. xii+144.