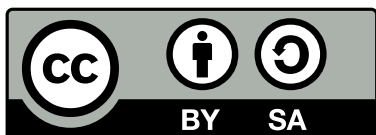


# 曲面曲线论笔记

魔法少女 Alkali

北京师范大学数学科学学院

2022 年 5 月



本作品采用知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际 (CC BY-SA 4.0) 协议进行共享. 您可以访问<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>查看该协议.

# 前言

还没想好写什么.



# 目录

前言	i
第零章 准备	1
0.1 几何学是什么?	1
0.2 微分流形	3
0.3 切空间与微分映射	6
0.4 子流形	15
0.5 向量场	17
第一章 曲线	21
第二章 计算	23
2.1 代数知识	23
参考文献	25



# 第 0 章

## 准备

### 0.1 几何学是什么？

现代几何学源于古希腊. 在古希腊语中, “几何学”一词为 γεωμετρία (*geōmetría*), 意为测量大地. 这反映了早期几何学主要是对长度, 面积, 体积, 角度的经验性原理的收集, 主要用于满足实用性用途. 直至今日, 初步的几何学教学仍然是从对几何体的大小的直观认识开始的. 因此几何学的一个经典要件就是度量.

Euclid 所著的 *Elements* (汉语中通常称作《几何原本》) 是古希腊几何的代表. 他在 *Elements* 的开篇引入了这样的一条公理:

**公理 4.** 彼此能重合的物体是全等的.

然后第一个引用了这条公理的命题是

**命题 4.** 如果两个三角形中, 一个的两边分别等于另一个的两边, 而且这些线段所夹的角相等. 那么它们的底边等于底边, 这样其余的角也等于相应的角, 即那些等边所对应的角.

(译文引自 [5])

在这最原始的直觉中,“重合”蕴含了运动的概念,而边角的相等则蕴含了不变量的概念. 因此,几何学的另一个经典要件就是变换与不变量.

古希腊的几何学主要研究直线与圆锥曲线. 到了微积分发明之后,数学家可以使用微积分的工具来研究更一般的几何体了. Leibniz 通过密切圆引入了曲线的曲率, Bernoulli 与 Euler 研究了曲面的法曲率与测地线. 对“曲”的研究正式进入了几何学之中. 1827 年, Gauss 在论文 *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (关于曲面的一般研究) 中证明了“Gauss 绝妙定理” (Theorema Egregium). 从此一种观念开始进入几何学: 我们可以研究抽象的几何体, 而不考虑它在欧氏空间中的实现. 进而不久非欧几何便产生了.

回到几何学的两个要件上. 有了以上基础, 1854 年 Riemann 写作了论文 *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (论奠定几何学基础的假设), 正式引入了 Riemann 度量与流形的概念 (之后的笔记中我们会详细解释这两个概念). 同时, 19 世纪正在经历一个射影几何的复兴潮, 当时正在流行使用射影变换的方法研究射影几何. 于是在 1893 年 F. Klein 发表了对整个几何学的“总结性”综述 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (关于近代几何学研究的比较考察). 文章中提到几何学的目的在于

给定一个流形和其上的变换群, 发展关于这个群的不变量理论.

( [1], 自译)

自此, 经典几何学的舞台已经搭好. 但我们还有一个问题:

**问题.** 微分几何是什么?

接下来我们开始慢慢搭微分几何的舞台.



## 0.2 微分流形

由于我们要在一般的几何体上处理问题,所以我们要先引入流形的概念. 在数学分析的课程中,我们学习过了  $\mathbb{R}^n$  的  $k$  维子流形的概念 (例如在 [3] 的第 8 章).  $k$  维子流形的概念是一个局部长得像  $\mathbb{R}^k$  的空间. 这启发我们给出一般流形的定义:

**定义 0.2.1.** 一个  $n$  维**拓扑流形**  $M$  是一个第二可数, Hausdorff 的拓扑空间, 并且  $M$  的每一点都有一个邻域同胚于  $\mathbb{R}^n$  中的一个开集.

评注 0.2.2. 拓扑流形定义中的第二可数与 Hausdorff 这两个条件目前看来有什么作用, 但这两个条件能够保证单位分解定理这个重要的工具成立, 之后遇到了我们会再讨论这一点. 此外, 给出上述定义之后我们需要证明  $n$  维拓扑流形是良定义的, 即证明  $\mathbb{R}^n$  与  $\mathbb{R}^m$  在  $m \neq n$  时不同胚, 但这需要用到代数拓扑的工具 (参考 [2, 定理 17.26], 那里用的是 de Rham 理论). 不过证明微分流形是良定义的会相对比较简单, 之后我们会处理这件事情.

由于我们不太需要关心流形的拓扑, 所以以上定义对微分几何来说其实并不是特别重要<sup>1</sup>. 对流形而言, 重要的是它上面的微分结构.

**定义 0.2.3.** 设  $M$  是  $n$  维拓扑流形. 设  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  是  $M$  的一族开覆盖, 满足其中每个开集都同胚于  $\mathbb{R}^n$  中的开集. 每个开集对应的同胚映射  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  被称为**坐标卡**. 如果两个坐标卡  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  满足  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  在其定义域上是  $C^\infty$  的, 那么称这两个坐标卡相容. 如果这一族开覆盖的任意两个坐标卡相容, 那么这一族开覆盖  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  便称为  $M$  的一个**图册**. 如果  $M$  的一个图册中无法再加入新的相容的坐标卡, 那么称这个图册是**极大的**. 极大的图册构成  $M$  的一个**微分结构**. 拥有微分结构的拓扑流形被称为**微分流形**.

有时我们会将  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  称为**转移函数**. 我们有一张图可以用来直观地理解转移函数:

---

<sup>1</sup>也就是你不懂的话也不必深究的意思.

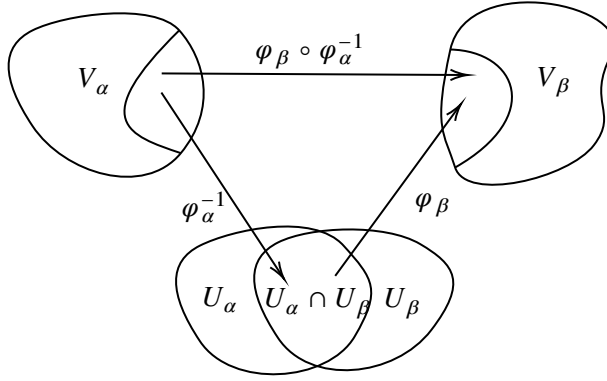


图 1: 转移函数

**例 0.2.4.** 我们举几个微分流形的例子.

- (1)  $\mathbb{R}^n$ , 以恒等映射  $1_{\mathbb{R}^n}$  为坐标卡. 我们指出一点, 证明一个流形具有微分结构只需要找出一组图册就可以了, 这组图册对应的微分结构就是所有与图册相容的坐标卡的集合. 一般将恒等映射所在的图册称为  $\mathbb{R}^n$  的**标准微分结构**.
- (2)  $\mathbb{R}$ , 以  $\varphi: u \mapsto u^3$  为坐标卡. 注意到  $\varphi$  是  $\mathbb{R}$  到自身的同胚, 从而决定了一个微分结构. 但是  $1_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}$  在  $u = 0$  处不可导, 因此这个微分结构与标准微分结构不相容. 这说明了一个微分流形上的微分结构可以有不止一个.
- (3) 单位球面  $\mathbb{S}^n$ , 南北两极的球极投影. 两个球极投影  $p_N, p_S$  分别满足

$$p_N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$p_S(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

在截面上用简单的平面几何可以推出转移函数为  $1_{\mathbb{R}^n}/|1_{\mathbb{R}^n}|^2$ , 是光滑函数.

由于我们主要关心曲线曲面论, 所以我们不在这里再举其他奇怪 (但是

有趣) 的流形的例子了. 而作为流形的曲线与曲面, 我们将在后面子流形的部分讨论它们.

微分结构的一个很重要的作用是可以定义光滑函数.

**定义 0.2.5.** 设  $M$  是微分流形, 函数  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  被称为是**光滑**的是指对任意  $p \in M$ , 都存在一个包含  $p$  的坐标卡  $(U, \varphi)$  使得  $f \circ \varphi$  是  $C^\infty$  的.

**记号 0.2.6.** 我们用  $C^\infty(M)$  来表示  $M$  上全体光滑函数的集合, 在逐点定义的正加与乘法下, 这是一个  $\mathbb{R}$ -代数 (同时是交换环与  $\mathbb{R}$ -向量空间).

在这一节的最后我们引入流形的定向的概念. 我们用  $df$  来表示一个可微映射  $f$  的微分, 即最佳近似线性映射.

**定义 0.2.7.** 设  $M$  是微分流形, 如果它拥有一组图册满足任意转移函数的 Jacobi 行列式  $\det d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ , 那么就称  $M$  为**可定向流形**, 这样的一组图册称为给出了  $M$  的一个**定向**; 否则称  $M$  为**不可定向流形**.

**例 0.2.8.** (1)  $\mathbb{R}^3$  的一组基对应了一个坐标卡, 转移函数的行列式就是过渡矩阵的行列式. 我们知道  $\mathbb{R}^3$  的基有左手系和右手系的区分, 右手系到右手系的过渡矩阵行列式为正, 右手系到左手系的过渡矩阵行列式为负. 因此左手系和右手系分别决定了  $\mathbb{R}^3$  的一种定向, 这也是定向这一概念的来源.

(2) 如果流形  $M$  的一个图册中只有两个坐标卡, 那么  $M$  一定可定向: 设这两个坐标卡是  $(U_1, \varphi_1)$  与  $(U_2, \varphi_2)$ , 如果  $\det d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0$ , 那么已经完成证明; 否则我们复合一个  $\mathbb{R}^n$  上的反射变换  $r$ , 得到新的坐标卡  $\varphi_3 = r \circ \varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 那么新的图册  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_3)\}$  就满足  $\det d(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}) = \det d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \det r^{-1} > 0$ , 从而  $M$  可定向.

(3) 按照上面的判别法, 单位球面  $\mathbb{S}^n$  拥有两个球极投影构成的图册, 所以是可定向的.

关于流形的定向有一个基础的结论:

**命题 0.2.9.** 一个连通的可定向流形恰好有两个定向.

**证明.** 证明这个命题需要一些拓扑论证, 但我们不希望在这份笔记里出现太多的拓扑, 所以我们直接引用 [4, 引理 1.1.2].  $\square$

事实上确实存在不可定向的流形, 比如大家熟悉的 Möbius 带, 我们在之后再讨论这个例子.

### 0.3 切空间与微分映射

用“切”的手段来研究流形是微分几何学的基本想法, 我们在这一节建立有关切的几个概念. 首先我们使用内蕴的方法定义切向量, 并定义切空间与切丛. 然后我们讨论切空间之间的微分映射, 以及通过链式法则得到的重要推论, 即维度的微分同胚不变性.

#### 切向量与切空间

在数学分析课程中, 我们会考虑由函数图像给定的曲面, 并使用这个函数的微分映射的像来定义切平面. 但是在一般的微分流形中, 我们没有办法先验地给坐标卡定义微分, 所以我们要寻找其他的办法来定义流形的切向量.

对于曲面  $S$  上  $p$  点处的一个切向量  $v$ , 我们可以找到一条曲线  $c: I \rightarrow S$  使得  $p = c(0)$ ,  $v = c'(0)$  (这里的导数定义为逐分量求导). 为了去掉全空间, 我们考虑一个函数  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ , 那么由链式法则有

$$(f \circ c)'(0) = \langle \text{grad} f(p), c'(0) \rangle$$

我们熟悉右侧是由切向量决定的方向导数. 由梯度与内积的线性性可知

$$((\lambda f + \mu g) \circ c)'(0) = \lambda (f \circ c)'(0) + \mu (g \circ c)'(0) \quad (0.3.1)$$

又由乘积函数的求导法则, 可以得到

$$((fg) \circ c)'(0) = (f \circ c)(0)(g \circ c)'(0) + (g \circ c)(0)(f \circ c)'(0) \quad (0.3.2)$$

通过以上式子, 我们可以看出方向导数可以被  $S$  上的曲线决定, 从而并不需要全空间.

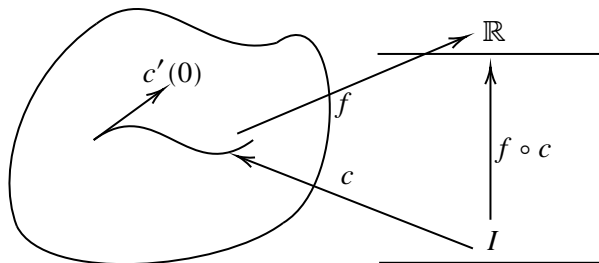


图 2: 曲面上的切向量

事实上, (0.3.1) 和 (0.3.2) 两个性质就足够给出方向导数的定义了.

**定义 0.3.1.** 对  $n$  维微分流形  $M$  与  $p \in M$ , 点  $p$  处的一个**切向量**  $v$  是一个  $C^\infty(M)$  到  $\mathbb{R}$  的  $\mathbb{R}$ -线性映射, 并且满足 *Leibniz* 法则: 对任意  $f, g \in C^\infty(M)$  有  $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$ .  $p$  处所有的切向量的集合构成  $p$  处的**切空间**  $T_p M$ .

通过显然定义的加法与数乘,  $T_p M$  构成一个  $\mathbb{R}$ -向量空间. 我们接下来讨论一下  $T_p M$  的维度.

首先我们考虑一个包含  $p$  的坐标卡  $(U, \varphi)$ , 定义  $n$  个切向量  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 满足

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} (\varphi(p))$$

等式右侧是  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  上的函数对  $u^i$  分量的偏导数<sup>2</sup>. 为了简洁起见, 之后

<sup>2</sup>虽然后面我们会看出  $\partial/\partial x^i$  表现得确实很像偏导数, 但是请仔细区分偏导数与切向量: 偏导数是定义在  $\mathbb{R}^n$  里的.

在  $p$  点确定的时候我们会省略这个脚标. 按照我们前面的讨论, 它们确实满足线性性和 Leibniz 法则, 所以是切向量 (用古典微分几何的语言来说,  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  相当于  $f$  复合一个坐标曲线之后再求导). 我们期望它们刚好就是  $T_p M$  的一组基. 为此我们建立以下引理:

**引理 0.3.2.** 切向量  $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$  线性无关.

**证明.** 记函数  $x^i = \pi^i \circ \varphi^{-1}$ , 其中  $\pi^i$  为向第  $i$  个分量的投影. 设有线性关系

$$\sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \quad (0.3.3)$$

用 (0.3.3) 两端作用在  $x^i$  上, 可以得到  $c_i = 0$ . 由  $i$  的任意性可知  $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$  线性无关.  $\square$

**记号 0.3.3.** 我们第一次遇到了求和式. 以后如果遇到的是有限求和, 我们会省略求和上下限, 并且此时如果有多个指标, 可以交换求和顺序, 我们会把指标写在一个求和号底下. 不过我们永远不会使用 Einstein 求和约定.

我们接下来说明  $T_p M$  可以被  $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$  生成.

**引理 0.3.4.** 设  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  中  $0$  的一个邻域,  $f \in C^\infty(U)$ . 那么存在  $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$  使得

$$f(u) = f(0) + \sum_i u^i f_i(u)$$

且  $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(0)$ .

**证明.** 固定  $u \in U$ , 考虑关于  $t$  的函数  $f(tu)$ , 我们有

$$\begin{aligned} f(u) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tu) \, dt \\ &= \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} u^i \, dt \quad (\text{链式法则}) \end{aligned}$$

$$= \sum_i u^i \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} dt$$

取  $f_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} dt$  即可 (光滑性容易验证).  $\square$

**命题 0.3.5.**  $T_p M$  可以被  $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$  生成, 这组基称为关于坐标卡  $\varphi$  的坐标基.

**证明.** 设  $v \in T_p M$ , 不妨设  $\varphi(p) = 0$ . 对任意一个  $f \in C^\infty(M)$ , 由引理 0.3.4, 可以将  $(f \circ \varphi^{-1})(u)$  写成

$$(f \circ \varphi^{-1})(0) + \sum_i u^i (f_i \circ \varphi^{-1})(u) \quad (0.3.4)$$

设  $x^i$  定义如引理 0.3.2, 那么可以将 (0.3.4) 写成

$$f(p) + \sum_i x^i f_i \quad (0.3.5)$$

注意到对常函数  $c$  总有

$$v(c) = v(1 \cdot c) = 1 \cdot v(c) + cv(1) = 2v(c)$$

从而  $v(c) = 0$ , 那么将  $v$  作用在 (0.3.5) 有

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_i v(x^i f_i) \\ &= \sum_i (x^i(p) v(f_i) + f_i(p) v(x^i)) \end{aligned}$$

注意到  $x^i(p) = \pi^i \circ \varphi(p) = 0$ , 且由引理 0.3.4 可知

$$f_i(p) = (f_i \circ \varphi^{-1})(0) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p$$

所以有

$$v(f) = \sum_i v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

注意到上式对所有  $f$  均成立, 所以有

$$v = \sum_i v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (0.3.6)$$

□

**推论 0.3.6.**  $n$  维流形上任意一点处的切空间维度为  $n$ .

评注 0.3.7. 在一些文献中坐标卡的逆映射  $\varphi^{-1}$  会被称为**局部坐标系**, 而

$$c^i(t) = \varphi^{-1}(0, \dots, \overset{\text{第 } i \text{ 个分量}}{t}, \dots, 0)$$

被称为**坐标曲线**, 尤其是古典微分几何教材喜欢用这个术语. 那么就有

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = (f \circ c^i)'(0)$$

(依然假设  $\varphi(p) = 0$ ). 当局部坐标系成为  $\mathbb{R}^n$  的恒等映射时, 坐标曲线变成了坐标轴,  $(f \circ c^i)'$  刚好就是对第  $i$  个分量的偏导数,  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  与数学分析中使用的偏导记号便一致了. 因此我们便选择了这样一个记号来表示切空间的基.

我们给出一个很重要的构造.

**定义 0.3.8.** 定义  $TM := \{(p, v) | p \in M, v \in T_p M\}$ , 或者用不交并这个更代数的记号写作  $TM := \coprod_{p \in M} T_p M$ , 称为  $M$  的**切丛**. 切丛的**自然投影映射**  $\pi : TM \rightarrow M$  将每个  $(p, v)$  映为  $p$ .

**命题 0.3.9.**  $n$  维流形  $M$  的切丛  $TM$  是一个  $2n$  维流形.

**证明.** 我们承认  $TM$  是一个拓扑流形. 设  $M$  有微分结构  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ , 我们按照如下方式赋予  $TM$  微分结构: 对一个坐标卡  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi$  的坐标基诱导了一个  $T_p M$  到  $\mathbb{R}^n$  的向量空间同构  $I_\varphi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . 取开覆盖  $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \varphi_\alpha \times I_{\varphi_\alpha})\}_{\alpha \in A}$ , 我们证明它是相容的, 从而给出了  $TM$  的一个微分结构. 对  $(U_1 \times \mathbb{R}^n, \varphi_1 \times I_{\varphi_1})$  与  $(U_2 \times \mathbb{R}^n, \varphi_2 \times I_{\varphi_2})$ , 容易验证

$$(\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = \varphi_1^{-1} \times I_{\varphi_1}^{-1}$$



从而转移函数为

$$(\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

这显然是光滑的, 因此  $\varphi_1, \varphi_2$  是相容的. 由  $\varphi_1, \varphi_2$  的任意性可知命题成立.

因此  $\varphi_1, \varphi_2$  是相容的. 由  $\varphi_1, \varphi_2$  的任意性可知命题成立.  $\square$

这应该是我们遇到的第一个与常见的曲线曲面相去甚远的流形.

评注 0.3.10. 命题 0.3.9 中给出的坐标卡  $\varphi \times I_\varphi$  使得  $TM$  在局部同胚于  $V \times \mathbb{R}^n$ , 这叫做  $TM$  的**局部平凡化**. 实际上这也是我们对切丛的直观: 每一点处长出了一根由切空间构成的纤维.

关于切丛的一个简单的性质是:

**命题 0.3.11.** 无论  $M$  是否可定向, 切丛总是可定向的.

**证明.** 我们考虑命题 0.3.9 证明中的转移函数的行列式, 有

$$\det d((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = \det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \det d(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

而对  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ , 我们有  $I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \dots, u^n) = \sum_j u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ , 而由 (0.3.6) 可知

$$I_{\varphi_2}^i \circ I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \dots, u^n) = \sum_i u^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_p$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial u^j} (I_{\varphi_2}^i \circ I_{\varphi_1^{-1}}) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

那么  $\det d(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1}) = \det \left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]_{i,j}$ . 又注意到

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^i} = \frac{\partial (\pi^i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)}{\partial u^j}$$

所以  $\left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]_{i,j} = d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ , 因此

$$\det d((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = (\det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}))^2 > 0$$

$\square$

## 微分映射

我们把光滑性推广到任意两个流形间的映射上.

**定义 0.3.12.** 设  $f$  是微分流形  $M, N$  间的映射  $f : M \rightarrow N$ , 如果对  $M, N$  的微分结构  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$  中任意两个坐标卡  $\varphi, \psi$  有  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  是  $C^\infty$  的, 那么称  $f$  是光滑的.

显然定义 0.3.12 与定义 0.2.5 是相容的.

对流形间的光滑映射, 我们没有办法像数学分析中那样把微分定义为最佳逼近的线性映射. 不过我们可以像上一小节那样考察一下切向量的行为. 设  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f$  在  $x$  点处的微分是  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  的一个线性映射, 在各自的标准正交基下可以表示为一个  $m \times n$  矩阵  $L_x$ .  $L_x$  把一个  $v \in \mathbb{R}^n$  映到一个  $L_x v \in \mathbb{R}^m$ . 考虑一个  $\mathbb{R}^m$  上的光滑函数  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , 设它的梯度表示为行向量  $N$ , 那么  $g$  在  $f(x)$  点处沿  $L_x v$  方向的方向导数为

$$\langle \text{grad } g(f(x)), L_x v \rangle = g L_x v$$

由链式法则可知  $g L_x$  是  $g \circ f$  在  $x$  点处的微分, 因此  $L_x v$  在一个函数上的作用相当于  $v$  在这个函数复合  $f$  之后的函数上作用. 把这个过程整理一下, 我们可以类比地给出流形间光滑映射的微分:

**定义 0.3.13.** 设  $f : M \rightarrow N$  是光滑映射, 那么  $f$  在  $p \in M$  点处的微分  $f_*|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  将  $v \in T_p M$  映为  $f_*|_p(v)$ ,  $f_*|_p(v)$  在  $C^\infty(N)$  上的作用为  $f_*|_p(v)(g) = v(g \circ f)$ .

显然微分映射是线性映射.

**记号 0.3.14.** 微分映射传统的记号是  $df_p$  或者  $df(p)$ , 但现在更多会写成我们定义的这个形式. 具体为什么我们留到后面再讲. 和之前一样, 如果  $p$  点是明确的, 我们就不会写脚标.

我们接下来证明关于微分映射最重要的结论:

**定理 0.3.15** (链式法则). 设流形  $M, N, P$  间有光滑映射  $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow P$ ,  $h = g \circ f$ . 点  $p \in M, q \in N, r \in P$  满足  $f(p) = q, g(q) = r$ , 那么一定有  $h_*|_p = g_*|_q \circ f_*|_p$ . 换言之, 图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & P \\ & \searrow f \quad \nearrow g & \\ & N & \end{array}$$

交换蕴含以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{h_*} & T_r P \\ & \searrow f_* \quad \nearrow g_* & \\ & T_q N & \end{array}$$

**证明.** 对  $v \in T_p M$  与  $\psi \in C^\infty(P)$ , 我们有

$$\begin{aligned} (g_* \circ f_*)(v)(\psi) &= g_*(f_*v)(\psi) \\ &= f_*(v)(\psi \circ g) \\ &= v(\psi \circ g \circ f) \\ &= v(\psi \circ h) \\ &= h_*(v)(\psi) \end{aligned}$$

由  $v$  与  $\psi$  的任意性即知  $g_* \circ f_* = h_*$ . □

作为链式法则的第一个应用, 我们来证明之前被搁置的一个问题, 那就是微分流形维度的良定义性.

**命题 0.3.16.** 设开集  $U \subset \mathbb{R}^m$  与开集  $V \subset \mathbb{R}^n$  微分同胚, 即存在一个双射  $\varphi: U \rightarrow V$  使得  $\varphi, \varphi^{-1}$  都是  $C^\infty$  的, 那么一定有  $m = n$ . 特别的, 微分流形的维度是良定义的.

**证明.** 由于  $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_{\mathbb{R}^m}$ ,  $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$ , 在某一点取微分可以得到

$$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$$

从而  $\varphi_*$  同时有左右逆, 是向量空间之间的同构, 那么一定有  $m = n$ .

对一个微分流形  $M$  而言,  $M$  的维度定义为与微分结构中的一个开集  $U$  同胚的  $\varphi(U)$  所在欧氏空间的维度. 而对两个不同的  $\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)$  而言, 两个方向的转移函数构成了它们 (的一部分) 之间的微分同胚, 按照上面的论证, 它们所在的欧氏空间维度一定是一样的. 综上所述, 微分流形的维度是良定义的.  $\square$

评注 0.3.17. 实际上命题 0.3.16 的证明用到的只是数学分析课程中证明过的欧氏空间的链式法则, 并没有用到流形上的链式法则. 不过由于想法是一样的, 所以我们仍然在这里陈述它的证明.

评注 0.3.18. 最后我们解释一下  $f_*$  这个记号. 首先, 我们更倾向使用  $f_*|_p$  而不是  $df(p)$  的一个简单的理由是前者更紧凑一些, 在写微分映射作用在切空间上的向量时会节约很多空间. 同时,  $df$  更多特指欧氏空间之间的可微映射, 会有更多分析学上的用途 (比如用来写 Jacobi 矩阵和行列式).

其次, 从范畴论的角度来看, 微分对复合映射的作用  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  表现得很像协变函子, 而一类很常见的协变函子  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \ ) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  作用在  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  上得到的态射一般会记为  $h_*$ . 选用这个记号可以一定程度上体现链式法则代表的协变性.

此外, 在微分几何传统中,  $f_*$  也会被称为推前映射, 也许是因为  $f_*$  的箭头是向前的. 之后我们还会遇到一类与微分对偶的映射, 被称为拉回映射, 记作  $f^*$ , 它的箭头是向后的. 拉回映射传统上就一直使用  $f^*$  作为记号, 因此用  $f_*$  表示推前映射也是恰当的.

最后, 我们必须指出, 虽然我们提到了协变性, 推前, 拉回这些词语, 但是它们和范畴论中一样的词语含义并不一样. 它们的相似性只是巧合, 这些巧合让我们采用了相似的记号, 但并不意味着可以把范畴论的观点生搬硬套进来.

## 0.4 子流形

子结构在数学中随处可见,从最简单的子集(作为一切基础),到代数中的子群,子空间(先是子集,并且在大集合的运算下仍然具有相同的代数结构),大多具有“子集-相同结构”这一模式.因此子流形大约就是大流形中一个自己是流形的子集.但我们还需要更多的一些限制条件,以下我们从浸入,嵌入的概念开始介绍.

**定义 0.4.1.** 映射  $f: M \rightarrow N$  被称为  $M$  到  $N$  的一个**浸入**,如果对任意  $p \in M$  都有  $f_*|_p$  是单射.如果进一步地, $f$  是  $M$  与赋予了  $N$  的子空间拓扑的  $f(M)$  之间的微分同胚,那么  $f$  被称为是  $M$  到  $N$  的一个**嵌入**.

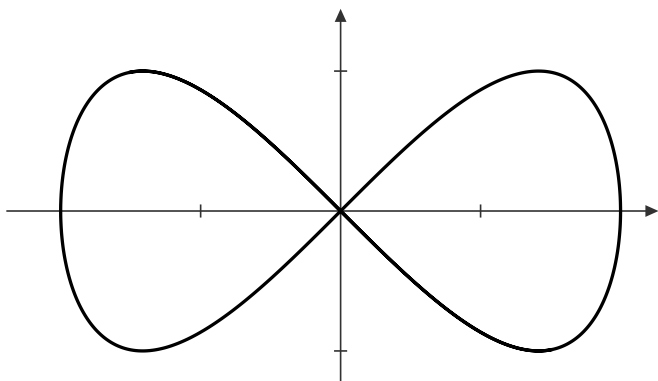
**例 0.4.2.** (1) 考虑最简单的的流形  $\mathbb{R}$ , 以及映射

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到  $\varphi_*|_t = (-\sin t, \cos t)^\top$ , 由于  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , 所以总有  $\varphi_* \neq 0$ , 从而  $\varphi_*$  是满秩的. 因此  $\varphi$  是一个浸入. 注意到  $\varphi$  不是双射, 从而不是一个嵌入.

(2)  $\mathbb{R}^3$  中的曲面片. 我们用古典的语言来说这件事. 设  $U$  是  $\mathbb{R}^2$  中的开集(从而自然是一个 2 维流形), 映射  $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  在某一点  $p$  处的两个偏导数  $r_1(p), r_2(p)$  构成  $\mathbb{R}^3$  中的两个向量( $r_i$  表示对第  $i$  个分量求偏导). 如果对任意  $p \in U$  都有  $r_1(p) \times r_2(p) \neq 0$ , 那么  $r$  就是一个浸入, 并得到了  $\mathbb{R}^3$  中的一块曲面片. 如果要解释一下的话,  $r_1(p), r_2(p)$  是  $T_p U \cong \mathbb{R}^2$  的标准基在  $r_*$  下的像, 而  $r_1(p) \times r_2(p) \neq 0$  保证了他们线性无关, 所以  $r$  是一个浸入.

(3)  $\infty$  符号:  $r(t) = (2 \sin t, \sin(2t))$ ,  $t \in (-\pi, \pi)$ . 显然  $r_*$  总是非零的, 所以  $r$  是一个浸入. 并且我们也能发现  $r$  是一个单射. 然而  $r$  不是一个

图 3: “ $\infty$ ” 或双纽线

嵌入: 作为  $\mathbb{R}$  的开子集,  $(-\pi, \pi)$  不是一个紧集, 但它在  $r$  下的像在  $\mathbb{R}^2$  的子空间拓扑下是一个紧集, 所以  $r$  不是一个同胚. 有时候这个曲线也被称为双纽线.

按照我们之前的想法, 子流形是大流形的一个子集, 而且自己也是一个流形. 不过我们要求这个子集是要在大流形的拓扑下成为流形, 不然会出现双纽线那样自交等各种情况. 所以我们利用嵌入给出子流形的定义:

**定义 0.4.3.** 设微分流形  $M, N$  满足  $M \subset N$ , 如果包含映射  $\iota : M \rightarrow N$  是一个嵌入, 那么就称  $M$  为  $N$  的**子流形**.  $M$  在  $N$  中的**余维度**定义为  $\text{codim } M = \dim N - \dim M$ .

对曲线曲面论而言, 最重要的是欧氏空间子流形, 尤其是曲线与超曲面. 我们引用 [3, 8.7 节定义 1] 中引入  $k$ -维曲面所用的定义.

**定理 0.4.4.** 设  $S \subset \mathbb{R}^n$ , 赋予了  $\mathbb{R}^n$  的子空间拓扑. 如果对每一点  $x_0 \in S$  都存在  $\mathbb{R}^n$  的一个邻域  $U(x_0)$  以及一个微分同胚  $\varphi : U(x_0) \rightarrow I^n$  将这个邻域映为  $\mathbb{R}^n$  中的  $n$ -维单位立方体  $I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1, i = 1, \dots, n\}$ , 并且满足集合  $S \cap U(x_0)$  的像是  $\mathbb{R}^n$  中由关系  $t^{k+1} = \dots = t^n = 0$  定义的  $k$ -维平面在  $I^n$  中的部分, 那么  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个  $k$ -维子流形.

**证明.** 这基本上是把流形的定义说了一遍. 由于  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  的子空间, 所以自动是第二可数的 Hausdorff 空间. 由子空间拓扑可知  $S \cap U(x_0)$  是  $x_0$  在  $S$  中的一个邻域, 按照假设它同胚于

$$I^n \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1, i = 1, \dots, k, t^{k+1} = \dots = t^n = 0\}$$

而这个集合又同胚于  $\mathbb{R}^k$  中的标准单位立方体  $I^k$ , 从而  $x_0$  的邻域同胚于  $\mathbb{R}^k$  中的开集. 因此  $S$  是一个  $k$  维拓扑流形. 而又由于假设, 所有同胚都是微分同胚, 所以转移函数都是光滑的. 因此  $S$  有微分结构, 是一个微分流形. 由于  $S$  的拓扑即为  $\mathbb{R}^n$  的子空间拓扑, 所以  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  的子流形.  $\square$

**定义 0.4.5.** 欧氏空间中的**曲线**指的是维度为 1 的子流形. 欧氏空间中的**超曲面**指的是余维度为 1 的子流形, 特别地, 3 维欧氏空间中的超曲面会被直接称为**曲面**.

实践中我们更多处理的是例 0.4.2 (2) 中的参数化曲面片. 对一般的浸入来说, 我们没有办法说明它是不是嵌入, 从而也不能说明曲面片是不是流形. 但是以下的定理可以保证在局部上每个浸入都是嵌入, 从而每一个曲面片在局部都是一个 2 维子流形, 或者说曲面.

**定理 0.4.6.** 设  $M, N$  是微分流形,  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射. 那么  $f$  是一个浸入当且仅当  $M$  中的每一个点都有一个邻域  $U$  使得  $f|U: U \rightarrow N$  是一个嵌入.

**证明.** [2, 定理 4.25].  $\square$

## 0.5 向量场

向量场是我们研究流形的主要工具之一, 本节我们讨论一些简单的有关向量场的性质.

**定义 0.5.1.** 设  $X: M \rightarrow TM$  是一个光滑映射, 如果有  $\pi \circ s = 1_M$  成立, 其中  $1_M$  是  $M$  到自身的恒等映射, 那么称  $X$  是  $M$  上的一个**向量场**.

评注 0.5.2. 我们讲一下这个定义是怎么回事. 向量场实际上是希望在流形每一点的切空间处光滑地指派一个向量. 为了描述光滑, 我们会直接定义一个光滑的映射  $X : M \rightarrow TM$ , 同时为了让点  $p$  处的向量  $X_p$  在  $T_p M$  中, 我们让  $\pi \circ X = 1_M$  成立. 如果套用传统的定义来说的话, 我们会取定一个坐标卡  $(U, \varphi)$ , 对任意一点  $p \in U$ , 我们指派一个切向量:

$$p \mapsto \left( p, \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (0.5.1)$$

其中  $a^i$  是  $M$  上的函数. 那么取  $TM$  的坐标卡  $(U \times \mathbb{R}^n, \varphi \times \varphi_*)$  可知

$$\begin{aligned} & (\varphi \times \varphi_*) \circ X \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & u \mapsto (u, (a^1 \circ \varphi^{-1})(u), \dots, (a^n \circ \varphi^{-1})(u)) \end{aligned}$$

所以向量场  $X$  是光滑的当且仅当每个坐标分量函数是光滑的. 同时, (0.5.1) 也给出了一个向量场在某组坐标卡下的具体表示.

**记号 0.5.3.** 我们用  $\mathfrak{X}(M)$  表示  $M$  上全体向量场的集合, 它是一个  $\mathbb{R}$ -向量空间. 按照显然定义的运算, 它也是一个  $C^\infty(M)$ -模 (一种在环上的满足类似向量空间运算律的结构, 之后会在定义 2.1.1 正式遇到它).

**例 0.5.4.** 对给定的坐标卡  $(U, \varphi)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  是  $\mathfrak{X}(U)$  中的  $n$  个向量场, 它们在每点  $p$  处的取值构成了  $T_p U$  的一组基. 这样的一组向量场被称为一组**局部标架**. 如果存在  $\mathfrak{X}(M)$  中的  $n$  个向量场满足它们在每点处的取值都构成切空间的一组基, 那么这组向量场称为  $M$  的一组**标架**, 同时我们称切丛  $TM$  是**平凡的**. 容易注意到, 平凡的切丛  $TM$  总是同胚于  $M \times \mathbb{R}^n$ , 所以我们会将其称为是平凡的. 这也再次说明了评注 0.3.10 中将坐标卡称为局部平凡化的理由.

我们知道  $p$  点处的一个切向量  $X_p$  将一个光滑函数映成一个数, 那么一个向量场  $X$  在每一点都将一个光滑函数映成一个数, 因此我们有



**命题 0.5.5.** 设  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , 那么  $X$  诱导了  $C^\infty(M)$  到自身的一个映射. 如果把  $f$  在映射下的像记作  $Xf$ , 那么这个映射定义为

$$Xf(p) = X_p(f)$$

**证明.** 只需验证  $Xf$  是光滑的. 而只需注意到在局部设  $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , 那么有

$$Xf = \sum_i a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

从而由  $a^i$  的光滑性与光滑函数的线性性可知  $Xf$  是光滑的.  $\square$

反过来, 我们还有一个判别方法:

**命题 0.5.6.** 如果  $Y$  是一个  $C^\infty(M)$  到自身的映射, 那么  $Y$  是  $\mathfrak{X}(M)$  中的向量场按命题 0.5.5 诱导出来的当且仅当它满足 *Leibniz* 法则, 即对任意  $f, g \in C^\infty(M)$  有  $Y(fg) = fYg + gYf$ .

**证明.** 如果  $Y$  是向量场诱导出来的, 那么它显然满足 *Leibniz* 法则. 如果  $Y$  满足 *Leibniz* 法则, 考虑等式两侧在  $p$  点处的取值, 可知此时“ $Y$  作用 + 赋值  $p$ ”相当于  $T_p M$  中的一个元素. 收集所有的元素得到一个向量场, 这个向量场可以诱导出  $Y$ . 我们还需要说明这个向量场是光滑的.  $\square$



# 第 1 章

## 曲线

稍稍忘记前面我们建立起来的流形理论,我们回忆一下传统语言中“曲线”. 一般来说曲线指的是一个连续或者光滑的映射  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 其中  $I$  是一个区间. 接下来我们假设曲线都是光滑的, 然后开启我们的旅程.



## 第 2 章

# 计算

前面我们遇到的大量几何量实际上都是张量. 我们打算在这一章提供一些必要的代数预备知识, 并介绍张量入门. 本章中所有的环都有单位元.

### 2.1 代数知识

**定义 2.1.1.** 一个环  $R$  上的**左模**由一个 Abel 群  $M$  与  $R$  到  $M$  的自同构群的一个同态构成. 换言之, 任意一个  $r \in R$  都诱导了一个  $M \rightarrow M$  的映射, 对  $m \in M$ ,  $m$  在  $r$  诱导的映射下的像记为  $rm$ . 我们要求这些映射满足如下公理:

1. 对  $r \in R, m, n \in M$  有  $r(m + n) = rm + rn$ ;
2. 对  $r, s \in R, m \in M$  有  $(r + s)m = rm + sm$ ;
3. 对  $r, s \in R, m \in M$  有  $(rs)m = r(sm)$ ;
4. 对任意  $m \in M$  有  $1m = m$ .

**定义 2.1.2.** 一个环  $R$  上的**右模**由一个 Abel 群  $M$  与  $R$  到  $M$  的自同构群的一个反同态构成. 即将定义 2.1.1 中的公理 3 变为  $(rs)m = s(rm)$ .

评注 2.1.3. 如果  $R$  是交换的, 那么左模和右模是一样的, 称为**双侧模**或者

直接简称为**模**. 此外, 我们也可以把右模的像写成  $mr$ , 那么“数乘的结合公理”<sup>1</sup>可以写成很好看的形式  $m(sr) = (ms)r$ .

---

<sup>1</sup>打引号是因为我们只对向量空间说数乘, 模一般说作用.

## 参考文献

- [1] Felix Klein. “*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*”. *Math. Ann.* **1893**, 43(1): 63–100.
- [2] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Second. Springer, New York, **2013**: xvi+708.
- [3] Vladimir A. Zorich. *Mathematical analysis. I*. Second. Springer-Verlag, Berlin, **2015**, Translated from the 6th corrected Russian edition, Part I, 2012 by Roger Cooke, With Appendices A–F and new problems translated by Octavio Paniagua T: xx+616. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1>.
- [4] 梅加强。流形与几何初步。北京：科学出版社，**2013**。
- [5] 欧几里得。几何原本。兰纪正，朱恩宽 译。西安：陕西科学技术出版社，**2003**。