曲面曲线论笔记

魔法少女 Alkali

北京师范大学数学科学学院

2022 年 5 月

前言

还没想好写什么.

目录

第 0 章

准备

0.1　几何学是什么?

现代几何学源于古希腊. 在古希腊语中, “几何学” 一词为 γεωμετρία *(geōmetría)*, 意为测量大地. 这反映了早期几何学主要是对长度, 面积, 体积, 角度的经验性原理的收集, 主要用于满足实用性用途. 直至今日, 初步的几何学教学仍然是从对几何体的大小的直观认识开始的. 因此几何学的一个经典要件就是度量.

Euclid 所著的 *Elements* (汉语中通常称作《几何原本》) 是古希腊几何的代表. 他在 *Elements* 的开篇引入了这样的一条公理:

> **公理** 4. 彼此能重合的物体是全等的.

然后第一个引用了这条公理的命题是

> **命题** 4. 如果两个三角形中, 一个的两边分别等于另一个的两边, 而且这些线段所夹的角相等. 那么它们的底边等于底边, 这样其余的角也等于相应的角, 即那些等边所对应的角.
>
> (译文引自 [5])

在这最原始的直觉中, “重合” 蕴含了运动的概念, 而边角的相等则蕴含了不变量的概念. 因此, 几何学的另一个经典要件就是变换与不变量.

古希腊的几何学主要研究直线与圆锥曲线. 到了微积分发明之后, 数学家可以使用微积分的工具来研究更一般的几何体了. Leibniz 通过密切圆引入了曲线的曲率, Bernoulli 与 Euler 研究了曲面的法曲率与测地线. 对 “曲” 的研究正式进入了几何学之中. 1827 年, Gauss 在论文 *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (关于曲面的一般研究) 中证明了 “Gauss 绝妙定理” (Theorema Egregium). 从此一种观念开始进入几何学: 我们可以研究抽象的几何体, 而不考虑它在欧氏空间中的实现. 进而不久非欧几何便产生了.

回到几何学的两个要件上. 有了以上基础, 1854 年 Riemann 写作了论文 *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (论奠定几何学基础的假设), 正式引入了 Riemann 度量与流形的概念 (之后的笔记中我们会详细解释这两个概念). 同时, 19 世纪正在经历一个射影几何的复兴潮, 当时正在流行使用射影变换的方法研究射影几何. 于是在 1893 年 F. Klein 发表了对整个几何学的 “总结性” 综述 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (关于近代几何学研究的比较考察). 文章中提到几何学的目的在于

> 给定一个流形和其上的变换群, 发展关于这个群的不变量理论.
>
> ([1], 自译)

自此, 经典几何学的舞台已经搭好. 但我们还有一个问题:

问题. *微分几何是什么?*

接下来我们开始慢慢搭微分几何的舞台.

0.2 微分流形

由于我们要在一般的几何体上处理问题, 所以我们要先引入*流形*的概念. 在数学分析的课程中, 我们学习过了 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形的概念 (例如在 [3] 的第 8 章). k 维子流形的概念是一个局部长得像 $\mathbb{R}^k$ 的空间. 这启发我们给出一般流形的定义:

定义 0.2.1. 一个 n 维**拓扑流形** M 是一个第二可数, Haussdorf 的拓扑空间, 并且 M 的每一点都有一个邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集.

评注 0.2.2. 拓扑流形定义中的第二可数与 Haussdorf 这两个条件目前看不出来有什么作用, 但这两个条件能够保证*单位分解定理*这个重要的工具成立, 之后遇到了我们会再讨论这一点. 此外, 给出上述定义之后我们需要证明 n 维拓扑流形是良定义的, 即证明 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 在 $m \neq n$ 时不同胚, 但这需要用到代数拓扑的工具 (参考 [2, 定理 17.26], 那里用的是 de Rham 理论). 不过证明微分流形是良定义的会相对比较简单, 之后我们会处理这件事情.

由于我们不太需要关心流形的拓扑, 所以以上定义对微分几何来说其实并不是特别重要[1]. 对流形而言, 重要的是它上面的*微分结构*.

定义 0.2.3. 设 M 是 n 维拓扑流形. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的一族开覆盖, 满足其中每个开集都同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 每个开集对应的同胚映射 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ 被称为**坐标卡**. 如果两个坐标卡 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ 满足 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在其定义域上是 C^∞ 的, 那么称这两个坐标卡相容. 如果这一族开覆盖的任意两个坐标卡相容, 那么这一族开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 便称为 M 的一个**图册**. 如果 M 的一个图册中无法再加入新的相容的坐标卡, 那么称这个图册是**极大**的. 极大的图册构成 M 的一个**微分结构**. 拥有微分结构的拓扑流形被称为**微分流形**.

有时我们会将 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 称为**转移函数**. 我们有一张图可以用来直观地理解转移函数:

[1]也就是你不懂的话也不必深究的意思.

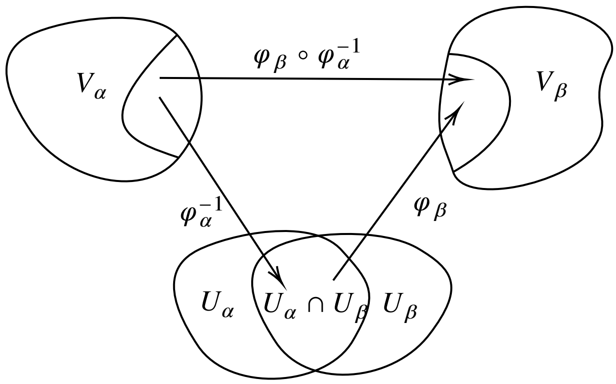

图 1: 转移函数

例 0.2.4. 我们举几个微分流形的例子.

(1) $\mathbb{R}^n$, 以恒等映射 $1_{\mathbb{R}^n}$ 为坐标卡. 我们指出一点, 证明一个流形具有微分结构只需要找出一组图册就可以了, 这组图册对应的微分结构就是所有与图册相容的坐标卡的集合. 一般将恒等映射所在的图册称为 $\mathbb{R}^n$ 的**标准微分结构**.

(2) $\mathbb{R}$, 以 $\varphi : u \mapsto u^3$ 为坐标卡. 注意到 φ 是 $\mathbb{R}$ 到自身的同胚, 从而决定了一个微分结构. 但是 $1_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}$ 在 $u = 0$ 处不可导, 因此这个微分结构与标准微分结构不相容. 这说明了一个微分流形上的微分结构可以有不止一个.

(3) 单位球面 $\mathbb{S}^n$, 南北两极的球极投影. 两个球极投影 p_N, p_S 分别满足

$$p_N(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$p_S(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

在截面上用简单的平面几何可以推出转移函数为 $1_{\mathbb{R}^n}/|1_{\mathbb{R}^n}|^2$, 是光滑函数.

由于我们主要关心曲线曲面论, 所以我们不在这里再举其他奇怪 (但是

有趣) 的流形的例子了. 而作为流形的曲线与曲面, 我们将在后面子流形的部分讨论它们.

微分结构的一个很重要的作用是可以定义光滑函数.

定义 0.2.5. 设 M 是微分流形, 函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 被称为是**光滑**的是指对任意 $p \in M$, 都存在一个包含 p 的坐标卡 (U, φ) 使得 $f \circ \varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的.

记号 0.2.6. 我们用 $C^\infty(M)$ 来表示 M 上全体光滑函数的集合, 在逐点定义的加法与乘法下, 这是一个 $\mathbb{R}$-代数 (同时是交换环与 $\mathbb{R}$-向量空间).

在这一节的最后我们引入流形的定向的概念. 我们用 $\mathrm{d}f$ 来表示一个可微映射 f 的微分, 即最佳近似线性映射.

定义 0.2.7. 设 M 是微分流形, 如果它拥有一组图册满足任意转移函数的 Jacobi 行列式 $\det \mathrm{d}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$, 那么就称 M 为**可定向流形**, 这样的一组图册称为给出了 M 的一个**定向**; 否则称 M 为**不可定向流形**.

例 0.2.8. (1) $\mathbb{R}^3$ 的一组基对应了一个坐标卡, 转移函数的行列式就是过渡矩阵的行列式. 我们知道 $\mathbb{R}^3$ 的基有左手系和右手系的区分, 右手系到右手系的过渡矩阵行列式为正, 右手系到左手系的过渡矩阵行列式为负. 因此左手系和右手系分别决定了 $\mathbb{R}^3$ 的一种定向, 这也是定向这一概念的来源.

(2) 如果流形 M 的一个图册中只有两个坐标卡, 那么 M 一定可定向: 设这两个坐标卡是 (U_1, φ_1) 与 (U_2, φ_2), 如果 $\det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0$, 那么已经完成证明; 否则我们复合一个 $\mathbb{R}^n$ 上的反射变换 r, 得到新的坐标卡 $\varphi_3 = r \circ \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$, 那么新的图册 $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_3)\}$ 就满足 $\det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}) = \det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \det r^{-1} > 0$, 从而 M 可定向.

(3) 按照上面的判别法, 单位球面 $\mathbb{S}^n$ 拥有两个球极投影构成的图册, 所以是可定向的.

关于流形的定向有一个基础的结论:

命题 0.2.9. 一个连通的可定向流形恰好有两个定向.

证明. 证明这个命题需要一些拓扑论证, 但我们不希望在这份笔记里出现太多的拓扑, 所以我们直接引用 [4, 引理 1.1.2]. □

事实上确实存在不可定向的流形, 比如大家熟悉的 Möbius 带, 我们在之后再来讨论这个例子.

0.3 切空间与微分映射

用 "切" 的手段来研究流形是微分几何学的基本想法, 我们在这一节建立有关切的几个概念. 首先我们使用内蕴的方法定义切向量, 并定义切空间与切丛. 然后我们讨论切空间之间的微分映射, 以及通过链式法则得到的重要推论, 即维度的微分同胚不变性.

切向量与切空间

在数学分析课程中, 我们会考虑由函数图像给定的曲面, 并使用这个函数的微分映射的像来定义切平面. 但是在一般的微分流形中, 我们没有办法先验地给坐标卡定义微分, 所以我们要寻找其他的办法来定义流形的切向量.

对于曲面 S 上 p 点处的一个切向量 v, 我们可以找到一条曲线 $c : I \to S$ 使得 $p = c(0), v = c'(0)$ (这里的导数定义为逐分量求导). 为了去掉全空间, 我们考虑一个函数 $f : S \to \mathbb{R}$, 那么由链式法则有

$$(f \circ c)'(0) = \langle \operatorname{grad} f(p), c'(0) \rangle$$

我们熟悉右侧是由切向量决定的方向导数. 由梯度与内积的线性性可知

$$((\lambda f + \mu g) \circ c)'(0) = \lambda (f \circ c)'(0) + \mu (g \circ c)'(0) \tag{0.3.1}$$

又由乘积函数的求导法则, 可以得到

$$((fg)\circ c)'(0) = (f\circ c)(0)(g\circ c)'(0) + (g\circ c)(0)(f\circ c)'(0) \tag{0.3.2}$$

通过以上式子, 我们可以看出方向导数可以被 S 上的曲线决定, 从而并不需要全空间.

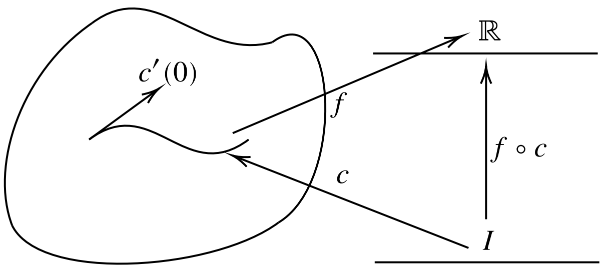

图 2: 曲面上的切向量

事实上, (0.3.1) 和 (0.3.2) 两个性质就足够给出方向导数的定义了.

定义 0.3.1. 对 n 维微分流形 M 与 $p\in M$, 点 p 处的一个**切向量** v 是一个 $C^\infty(M)$ 到 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{R}$-线性映射, 并且满足 *Leibniz* 法则: 对任意 $f,g\in C^\infty(M)$ 有 $v(fg)=f(p)v(g)+g(p)v(f)$. p 处所有的切向量的集合构成 p 处的**切空间** T_pM.

通过显然定义的加法与数乘, T_pM 构成一个 $\mathbb{R}$-向量空间. 我们接下来讨论一下 T_pM 的维度.

首先我们考虑一个包含 p 的坐标卡 (U,φ), 定义 n 个切向量 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 满足

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

等式右侧是 $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数对 u^i 分量的偏导数[2]. 为了简洁起见, 之后

[2] 虽然后面我们会看出 $\partial/\partial x^i$ 表现得确实很像偏导数, 但是请仔细区分偏导数与切向量: 偏导数是定义在 $\mathbb{R}^n$ 里的.

在 p 点确定的时候我们会省略这个脚标. 按照我们前面的讨论, 它们确实满足线性性和 Leibniz 法则, 所以是切向量 (用古典微分几何的语言来说, $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ 相当于 f 复合一个坐标曲线之后再求导). 我们期望它们刚好就是 T_pM 的一组基. 为此我们建立以下引理:

引理 0.3.2. 切向量 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 线性无关.

证明. 记函数 $x^i = \pi^i \circ \varphi^{-1}$, 其中 π^i 为向第 i 个分量的投影. 设有线性关系

$$\sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \tag{0.3.3}$$

用 (0.3.3) 两端作用在 x^i 上, 可以得到 $c_i = 0$. 由 i 的任意性可知 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 线性无关. □

记号 0.3.3. 我们第一次遇到了求和式. 以后如果遇到的是有限求和, 我们会省略求和上下限, 并且此时如果有多个指标, 可以交换求和顺序, 我们会把指标写在一个求和号底下. 不过我们永远不会使用 Einstein 求和约定.

我们接下来说明 T_pM 可以被 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 生成.

引理 0.3.4. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中 0 的一个邻域, $f \in C^\infty(U)$. 那么存在 $f_1, \cdots, f_n \in C^\infty(U)$ 使得

$$f(u) = f(0) + \sum_i u^i f_i(u)$$

且 $f_i(0) = \dfrac{\partial f}{\partial u^i}(0)$.

证明. 固定 $u \in U$, 考虑关于 t 的函数 $f(tu)$, 我们有

$$\begin{aligned} f(u) - f(0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d} f(tu)}{\mathrm{d} t} \, \mathrm{d} t \\ &= \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} u^i \, \mathrm{d} t \quad \text{(链式法则)} \end{aligned}$$

$$= \sum_i u^i \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i}\,\mathrm{d}t$$

取 $f_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i}\,\mathrm{d}t$ 即可 (光滑性容易验证). □

命题 0.3.5. *T_pM 可以被 $\frac{\partial}{\partial x^i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 生成, 这组基称为关于坐标卡 φ 的**坐标基**.*

证明. 设 $v \in T_pM$, 不妨设 $\varphi(p) = 0$. 对任意一个 $f \in C^\infty(M)$, 由引理 0.3.4, 可以将 $(f \circ \varphi^{-1})(u)$ 写成

$$(f \circ \varphi^{-1})(0) + \sum_i u^i (f_i \circ \varphi^{-1})(u) \tag{0.3.4}$$

设 x^i 定义如引理 0.3.2, 那么可以将 (0.3.4) 写成

$$f(p) + \sum_i x^i f_i \tag{0.3.5}$$

注意到对常函数 c 总有

$$v(c) = v(1 \cdot c) = 1 \cdot v(c) + cv(1) = 2v(c)$$

从而 $v(c) = 0$, 那么将 v 作用在 (0.3.5) 有

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_i v\left(x^i f_i\right) \\ &= \sum_i \left(x^i(p)v(f_i) + f_i(p)v(x^i)\right) \end{aligned}$$

注意到 $x^i(p) = \pi^i \circ \varphi(p) = 0$, 且由引理 0.3.4 可知

$$f_i(p) = (f_i \circ \varphi^{-1})(0) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$$

所以有

$$v(f) = \sum_i v(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

注意到上式对所有 f 均成立, 所以有

$$v = \sum_i v(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \tag{0.3.6}$$

□

推论 0.3.6. *n 维流形上任意一点处的切空间维度为 n.*

评注 0.3.7. 在一些文献中坐标卡的逆映射 φ^{-1} 会被称为**局部坐标系**, 而

$$c^i(t) = \varphi^{-1}(0, \cdots, \overset{\text{第}i\text{个分量}}{t}, \cdots, 0)$$

被称为**坐标曲线**, 尤其是古典微分几何教材喜欢用这个术语. 那么就有

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = (f \circ c^i)'(0)$$

(依然假设 $\varphi(p) = 0$). 当局部坐标系成为 $\mathbb{R}^n$ 的恒等映射时, 坐标曲线变成了坐标轴, $(f \circ c^i)'$ 刚好就是对第 i 个分量的偏导数, $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 与数学分析中使用的偏导记号便一致了. 因此我们便选择了这样一个记号来表示切空间的基.

我们给出一个很重要的构造.

定义 0.3.8. 定义 $TM := \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$, 或者用不交并这个更有代数味道的记号写作 $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$, 称为 M 的**切丛**. 切丛的**自然投影映射** $\pi : TM \to M$ 将每个 (p, v) 映为 p.

命题 0.3.9. *n 维流形 M 的切丛 TM 是一个 $2n$ 维流形.*

证明. 我们承认 TM 是一个拓扑流形. 设 M 有微分结构 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, 我们按照如下方式赋予 TM 微分结构: 对一个坐标卡 (U, φ), φ 的坐标基诱导了一个 T_pM 到 $\mathbb{R}^n$ 的向量空间同构 $I_\varphi : T_pM \to \mathbb{R}^n$. 取开覆盖 $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \varphi_\alpha \times I_{\varphi_\alpha})\}_{\alpha \in A}$, 我们证明它是相容的, 从而给出了 TM 的一个微分结构. 对 $(U_1 \times \mathbb{R}^n, \varphi_1 \times I_{\varphi_1})$ 与 $(U_2 \times \mathbb{R}^n, \varphi_2 \times I_{\varphi_2})$, 容易验证

$$(\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = \varphi_1^{-1} \times I_{\varphi_1}^{-1}$$

从而转移函数为

$$(\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

这显然是光滑的, 因此 φ_1, φ_2 是相容的. 由 φ_1, φ_2 的任意性可知命题成立.

因此 φ_1, φ_2 是相容的. 由 φ_1, φ_2 的任意性可知命题成立. □

这应该是我们遇到的第一个与常见的曲线曲面相去甚远的流形.

评注 0.3.10. 命题 0.3.9 中给出的坐标卡 $\varphi \times I_\varphi$ 使得 TM 在局部同胚于 $V \times \mathbb{R}^n$, 这叫做 TM 的**局部平凡化**. 实际上这也是我们对切丛的直观: 每一点处长出了一根由切空间构成的纤维.

关于切丛的一个简单的性质是:

命题 0.3.11. *无论 M 是否可定向, 切丛总是可定向的.*

证明. 我们考虑命题 0.3.9 证明中的转移函数的行列式, 有

$$\det \mathrm{d}((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = \det \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \det \mathrm{d}(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

而对 $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$, 我们有 $I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \cdots, u^n) = \sum_j u^j \left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$, 而由 (0.3.6) 可知

$$I_{\varphi_2}^i \circ I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \cdots, u^n) = \sum_i u^j \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_p$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(I_{\varphi_2}^i \circ I_{\varphi_1^{-1}}) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

那么 $\det \mathrm{d}(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1}) = \det \left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{i,j}$. 又注意到

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^i} = \frac{\partial(\pi^i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)}{\partial u^j}$$

所以 $\left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{i,j} = \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$, 因此

$$\det \mathrm{d}((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = (\det \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}))^2 > 0$$ □

微分映射

我们把光滑性推广到任意两个流形间的映射上.

定义 0.3.12. 设 f 是微分流形 M,N 间的映射 $f: M \to N$, 如果对 M,N 的微分结构 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A},\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ 中任意两个坐标卡 φ,ψ 有 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的, 那么称 f 是光滑的.

显然定义 0.3.12 与定义 0.2.5 是相容的.

对流形间的光滑映射, 我们没有办法像数学分析中那样把微分定义为最佳逼近的线性映射. 不过我们可以像上一小节那样考察一下切向量的行为. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$,$f$ 在 x 点处的微分是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个线性映射, 在各自的标准正交基下可以表示为一个 $m\times n$ 矩阵 L_x. L_x 把一个 $v\in\mathbb{R}^n$ 映到一个 $L_xv\in\mathbb{R}^m$. 考虑一个 $\mathbb{R}^m$ 上的光滑函数 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, 设它的梯度表示为行向量 N, 那么 g 在 $f(x)$ 点处沿 L_xv 方向的方向导数为

$$\langle \operatorname{grad} g(f(x)), L_xv\rangle = NL_xv$$

由链式法则可知 NL_x 是 $g\circ f$ 在 x 点处的微分, 因此 L_xv 在一个函数上的作用相当于 v 在这个函数复合 f 之后的函数上作用. 把这个过程整理一下, 我们可以类比地给出流形间光滑映射的微分:

定义 0.3.13. 设 $f: M\to N$ 是光滑映射, 那么 f 在 $p\in M$ 点处的微分 $f_*|_p : T_pM\to T_{f(p)}N$ 将 $v\in T_pM$ 映为 $f_*|_p(v)$, $f_*|_p(v)$ 在 $C^\infty(N)$ 上的作用为 $f_*|_p(v)(g)=v(g\circ f)$.

显然微分映射是线性映射.

记号 0.3.14. 微分映射传统的记号是 df_p 或者 $df(p)$, 但现在更多会写成我们定义的这个形式. 具体为什么我们留到后面再讲. 和之前一样, 如果 p 点是明确的, 我们就不会写脚标.

我们接下来证明关于微分映射最重要的结论:

定理 0.3.15 (链式法则)**.** 设流形 M, N, P 间有光滑映射 $f: M \to N, g: N \to P$, $h = g \circ f$. 点 $p \in M, q \in N, r \in P$ 满足 $f(p) = q, g(q) = r$, 那么一定有

$$h_*|_p = g_*|_q \circ f_*|_p$$

换言之, 图表

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & P \end{tikzcd}$$

交换蕴含以下图表交换

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "h_*"'] & T_pN \arrow[d, "g_*"] \\ & T_pP \end{tikzcd}$$

证明. 对 $v \in T_pM$ 与 $\psi \in C^\infty(P)$, 我们有

$$\begin{aligned} (g_* \circ f_*)(v)(\psi) &= g_*(f_*v)(\psi) \\ &= f_*(v)(\psi \circ g) \\ &= v(\psi \circ g \circ f) \\ &= v(\psi \circ h) \\ &= h_*(v)(\psi) \end{aligned}$$

由 v 与 ψ 的任意性即知 $g_* \circ f_* = h_*$. □

作为链式法则的第一个应用, 我们来证明之前被搁置的一个问题, 那就是微分流形维度的良定义性.

命题 0.3.16. 设开集 $U \subset \mathbb{R}^m$ 与开集 $V \subset \mathbb{R}^n$ 微分同胚, 即存在一个双射 $\varphi: U \to V$ 使得 φ, φ^{-1} 都是 C^∞ 的, 那么一定有 $m = n$. 特别的, 微分流形的维度是良定义的.

证明. 由于 $\varphi^{-1}\circ\varphi = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi\circ\varphi^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$, 在某一点取微分可以得到

$$\varphi_*^{-1}\circ\varphi_* = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi_*\circ\varphi_*^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$$

从而 φ_* 同时有左右逆, 是向量空间之间的同构, 那么一定有 $m = n$.
对一个微分流形 M 而言, M 的维度定义为与微分结构中的一个开集 U 同胚的 $\varphi(U)$ 所在欧氏空间的维度. 而对两个不同的 $\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)$ 而言, 两个方向的转移函数构成了它们 (的一部分) 之间的微分同胚, 按照上面的论证, 它们所在的欧氏空间维度一定是一样的. 综上所述, 微分流形的维度是良定义的. □

评注 0.3.17. 实际上命题 0.3.16 的证明用到的只是数学分析课程中证明过的欧氏空间的链式法则, 并没有用到流形上的链式法则. 不过由于想法是一样的, 所以我们仍然在这里陈述它的证明.

评注 0.3.18. 最后我们解释一下 f_* 这个记号. 首先, 我们更倾向使用 $f_*|_p$ 而不是 $df(p)$ 的一个简单的理由是前者更紧凑一些, 在写微分映射作用在切空间上的向量时会节约很多空间. 同时, $\mathrm{d}f$ 更多特指欧氏空间之间的可微映射, 会有更多分析学上的用途 (比如用来写 Jacobi 矩阵和行列式).

其次, 从范畴论的角度来看, 微分对复合映射的作用 $(f\circ g)_* = f_*\circ g_*$ 表现得很像协变函子, 而一类很常见的协变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, \quad) : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ 作用在 $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$ 上得到的态射一般会记为 h_*. 选用这个记号可以一定程度上体现链式法则代表的协变性.

此外, 在微分几何传统中, f_* 也会被称为推前映射, 也许是因为 f_* 的箭头是向前的. 之后我们还会遇到一类与微分对偶的映射, 被称为拉回映射, 记作 f^*, 它的箭头是向后的. 拉回映射传统上就一直使用 f^* 作为记号, 因此用 f_* 表示推前映射也是恰当的.

最后, 我们必须指出, 虽然我们提到了协变性, 推前, 拉回这些词语, 但是他们和范畴论中一样的词语含义并不一样. 它们的相似性只是**巧合**, 这些巧合让我们采用了相似的记号, 但并不意味着可以把范畴论的观点生搬硬套进来.

0.4 子流形

子结构在数学中随处可见, 从最简单的子集 (作为一切基础), 到代数中的子群, 子空间 (先是子集, 并且在大集合的运算下仍然具有相同的代数结构), 大多具有 “子集-相同结构” 这一模式. 因此子流形大约就是大流形中一个自己是流形的子集. 但我们还需要更多的一些限制条件, 以下我们从浸入, 嵌入的概念开始介绍.

定义 0.4.1. 映射 $f : M \to N$ 被称为 M 到 N 的一个**浸入**, 如果对任意 $p \in M$ 都有 $f_*|_p$ 是单射. 如果进一步地, f 是 M 与赋予了 N 的子空间拓扑的 $f(M)$ 之间的微分同胚, 那么 f 被称为是 M 到 N 的一个**嵌入**.

例 0.4.2. (1) 考虑最简单的的流形 $\mathbb{R}$, 以及映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到 $\varphi_*|_t = (-\sin t, \cos t)$, 由于 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, 所以总有 $\varphi_* \neq 0$, 从而 φ_* 是满秩的. 因此 φ 是一个浸入. 注意到 φ 不是双射, 从而不是一个嵌入.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中的曲面片. 我们用古典的语言来说这件事. 设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集 (从而自然是一个 2 维流形), 映射 $r : U \mapsto \mathbb{R}^3$ 在某一点 p 处的两个偏导数 $r_1(p), r_2(p)$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量 (r_i 表示对第 i 个分量求偏导). 如果对任意 $p \in U$ 都有 $r_1(p) \times r_2(p) \neq 0$, 那么 r 就是一个浸入, 并得到了 $\mathbb{R}^3$ 中的一块曲面片. 如果要解释一下的话, $r_1(p), r_2(p)$ 是 $T_pU \cong \mathbb{R}^2$ 的标准基在 r_* 下的像, 而 $r_1(p) \times r_2(p) \neq 0$ 保证了他们线性无关, 所以 r 是一个浸入.

(3) ∞ 符号: $r(t) = (2\sin t, \sin(2t)), t \in (-\pi, \pi)$. 显然 r_* 总是非零的, 所以 r 是一个浸入. 并且我们也能发现 r 是一个单射. 然而 r 不是一个嵌

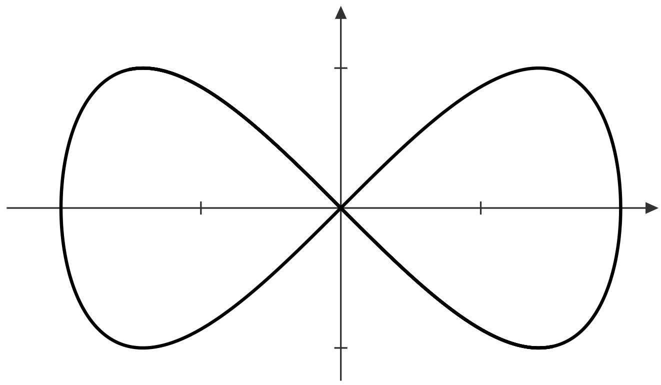

图 3: “∞” 或双纽线

入: 作为 $\mathbb{R}$ 的开子集, $(-\pi, \pi)$ 不是一个紧集, 但它在 r 下的像在 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑下是一个紧集, 所以 r 不是一个同胚. 有时候这个曲线也被称为双纽线.

按照我们之前的想法, 子流形是大流形的一个子集, 而且自己也是一个流形. 不过我们要求这个子集是要在大流形的拓扑下成为流形, 不然会出现双纽线那样自交等各种情况. 所以我们利用嵌入给出子流形的定义:

定义 0.4.3. 设微分流形 M, N 满足 $M \subset N$, 如果包含映射 $\iota : M \to N$ 是一个嵌入, 那么就称 M 为 N 的**子流形**. M 在 N 中的**余维度**定义为 $\operatorname{codim} M = \dim N - \dim M$.

对曲线曲面论而言, 最重要的是欧氏空间子流形, 尤其是曲线与超曲面. 我们引用 [3, 8.7 节定义 1] 中引入 k-维曲面所用的定义.

定理 0.4.4. *设 $S \subset \mathbb{R}^n$, 赋予了 $\mathbb{R}^n$ 的子空间拓扑. 如果对每一点 $x_0 \in S$ 都存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个邻域 $U(x_0)$ 以及一个微分同胚 $\varphi : U(x_0) \to I^n$ 将这个邻域映为 $\mathbb{R}^n$ 中的 n-维单位立方体 $I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \| |t^i| < 1, i = 1, \cdots, n\}$, 并且满足集合 $S \cap U(x_0)$ 的像是 $\mathbb{R}^n$ 中由关系 $t^{k+1} = \cdots = t^n = 0$ 定义的 k-维平面在 I^n 中的部分, 那么 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k-维子流形.*

证明. 这基本上是把流形的定义说了一遍. 由于 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 所以自动是第二可数的 Haussdorff 空间. 由子空间拓扑可知 $S \cap U(x_0)$ 是 x_0 在 S 中的一个邻域, 按照假设它同胚于

$$I^n \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{t \in \mathbb{R}^n \| t^i| < 1, i = 1, \cdots, k, t^{k+1} = \cdots = t^n = 0\}$$

而这个集合又同胚于 $\mathbb{R}^k$ 中的标准单位立方体 I^k, 从而 x_0 的邻域同胚于 $\mathbb{R}^k$ 中的开集. 因此 S 是一个 k 维拓扑流形. 而又由于假设, 所有同胚都是微分同胚, 所以转移函数都是光滑的. 因此 S 有微分结构, 是一个微分流形. 由于 S 的拓扑即为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间拓扑, 所以 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子流形. □

定义 0.4.5. 欧氏空间中的**曲线**指的是维度为 1 的子流形. 欧氏空间中的**超曲面**指的是余维度为 1 的子流形, 特别地, 3 维欧氏空间中的超曲面会被直接称为**曲面**.

实践中我们更多处理的是例 0.4.2 (2) 中的参数化曲面片. 对一般的浸入来说, 我们没有办法说明它是不是嵌入, 从而也不能说明曲面片是不是流形. 但是以下的定理可以保证在局部上每个浸入都是嵌入, 从而每一个曲面片在局部都是一个 2 维子流形, 或者说曲面.

定理 0.4.6. *设 M, N 是微分流形, $f : M \to N$ 是光滑映射. 那么 f 是一个浸入当且仅当 M 中的每一个点都有一个邻域 U 使得 $f|U : U \to N$ 是一个嵌入.*

证明. [2, 定理 4.25]. □

0.5 向量场

向量场是我们研究流形的主要工具之一, 本节我们讨论一些简单的有关向量场的性质.

向量场与微分映射

定义 0.5.1. 设 $X: M \to TM$ 是一个光滑映射, 如果有 $\pi \circ X = 1_M$ 成立, 其中 1_M 是 M 到自身的恒等映射, 那么称 X 是 M 上的一个**向量场**.

评注 0.5.2. 我们讲一下这个定义是怎么回事. 向量场实际上是希望在流形每一点的切空间处光滑地指派一个向量. 为了描述光滑, 我们会直接定义一个光滑的映射 $X: M \to TM$, 同时为了让点 p 处的向量 X_p 在 T_pM 中, 我们让 $\pi \circ X = 1_M$ 成立. 如果套用传统的定义来说的话, 我们会取定一个坐标卡 (U, φ), 对任意一点 $p \in U$, 我们指派一个切向量:

$$p \mapsto \left(p, \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{0.5.1}$$

其中 a^i 是 M 上的函数. 那么取 TM 的坐标卡 $(U \times \mathbb{R}^n, \varphi \times \varphi_*)$ 可知

$$\begin{aligned}(\varphi \times \varphi_*) \circ X \circ \varphi^{-1} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \left(u, (a^1 \circ \varphi^{-1})(u), \cdots, (a^n \circ \varphi^{-1})(u)\right)\end{aligned}$$

所以向量场 X 是光滑的当且仅当每个坐标分量函数是光滑的. 同时, (0.5.1) 也给出了一个向量场在某组坐标卡下的具体表示.

记号 0.5.3. 我们用 $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M 上全体向量场的集合, 它是一个 $\mathbb{R}$-向量空间. 按照显然定义的运算, 它也是一个 $C^\infty(M)$-模 (一种在环上的满足类似向量空间运算律的结构, 之后会在定义 2.1.1 正式遇到它).

例 0.5.4. 对给定的坐标卡 (U, φ), $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 是 $\mathfrak{X}(U)$ 中的 n 个向量场, 它们在每点 p 处的取值构成了 T_pU 的一组基. 这样的一组向量场被称为一组**局部自然标架**. 如果存在 $\mathfrak{X}(M)$ 中的 n 个向量场满足它们在每点处的取值都构成切空间的一组基, 那么这组向量场称为 M 的一组**标架**, 同时我们称切丛 TM 是**平凡的**. 容易注意到, 平凡的切丛 TM 总是同胚于 $M \times \mathbb{R}^n$, 所以我们会将其称为是平凡的. 这也再次说明了评注 0.3.10 中将坐标卡称为局部平凡化的理由.

向量场的一个特点是可以像微分一样作用在光滑函数上. 我们知道 p 点处的一个切向量 X_p 将一个光滑函数映成一个数, 那么一个向量场 X 在每一点都将一个光滑函数映成一个数, 因此我们有

命题 0.5.5. 设 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 那么 X 诱导了 $C^\infty(M)$ 到自身的一个映射. 如果把 f 在映射下的像记作 Xf, 那么这个映射定义为

$$Xf(p) = X_p(f)$$

证明. 只需验证 Xf 是光滑的. 而只需注意到在局部设 $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么有

$$Xf = \sum_i a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

从而由 a^i 的光滑性与光滑函数的线性性可知 Xf 是光滑的. □

反过来, 我们还有一个判别方法:

命题 0.5.6. 如果 Y 是一个 $C^\infty(M)$ 到自身的映射, 那么 Y 是 $\mathfrak{X}(M)$ 中的向量场按命题 0.5.5 诱导出来的当且仅当它满足 *Leibniz* 法则, 即对任意 $f, g \in C^\infty(M)$ 有 $Y(fg) = fYg + gYf$.

证明. 如果 Y 是向量场诱导出来的, 那么它显然满足 Leibniz 法则. 如果 Y 满足 Leibniz 法则, 考虑等式两侧在 p 点处的取值, 可知此时 "Y 作用 + 赋值 p" 相当于 T_pM 中的一个元素. 收集所有的元素得到一个 (不一定连续的) 向量场 X, X 可以诱导出 Y. 我们还需要说明 X 是光滑的. 设在局部有 $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么有

$$Xx^i = a^i,\ i = 1, 2 \cdots, n$$

由假设, X 将光滑函数映成光滑函数, 所以 a^i 都是光滑的, 从而 X 是光滑的. □

Lie 括号

对于两个向量场 X, Y 与光滑函数 f, 我们知道 $XYf = X(Yf)$ 仍然是一个光滑函数. 但 XY 的作用是向量场诱导出来的吗? 我们来验证 XY 是否满足 Leibniz 法则. 注意到

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X(fYg + gYf) \\ &= fXYg + gXYf + XfYg + XgYf \end{aligned} \tag{0.5.2}$$

从而 XY 是不满足 Leibniz 法则的. 不过我们考虑反过来的 YX:

$$YX(fg) = fYXg + gYXf + XfYg + XgYf \tag{0.5.3}$$

那么只需要让 (0.5.2) 与 (0.5.3) 两式相减, 就可以发现 $XY - YX$ 的作用满足 Leibniz 法则. 因此我们有

命题 0.5.7. 对 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $XY - YX$ 的作用可以由向量场诱导得到, 这个向量场记为 $[X, Y]$, 称作 X, Y 的 ***Lie* 括号**.

例 0.5.8. (1) 对局部的自然标架 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$, 总有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

这实际上是反映了求偏导可以交换顺序.

(2) 对于两个向量场 $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 我们计算它们的 Lie 括号有

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_i \left(\sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) b^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_i \left(\sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} a^j \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right) - \sum_{i,j} b^j \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} \left(a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

通过这个表达式也可以证明 $[X,Y]$ 是一个向量场. 实际操作中, 我们会更多用这个表达式来计算 Lie 括号.

命题 0.5.9 (Lie 括号的性质)**.** 对任意 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ 有

(1) (双线性性) 对任意 $a,b\in\mathbb{R}$ 有

$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$$
$$[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y]$$

(2) (反对称性)

$$[X,Y]=-[Y,X]$$

(3) (*Jacobi* 恒等式)

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

(4) 对 $f,g\in C^\infty(M)$ 有

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+(fXg)Y-(gYf)X$$

证明. 这些都是直接的计算, 也可以参考 [2, 命题 8.28]. □

命题 0.5.9 的前 3 条性质可以用来公理化地定义 *Lie* 代数, 向量场与 Lie 括号也是我们见到的第一个 Lie 代数. 我们在此就不展开了.

子流形与向量场

除了流形自身上的向量场以外, 我们还要对子流形再定义一种向量场.

定义 0.5.10. 设 M 是 $\tilde{M}$ 的子流形, $\tilde{M}$ 中一个**沿 M 的向量场**为一个光滑映射 $X:M\to T\tilde{M}$, 满足 $\pi\circ X=1_M$. $\tilde{M}$ 中所有沿 M 的向量场的集合记为 $\Gamma(T\tilde{M}|_M)$[3].

[3] 这个记号来自于向量丛的截面.

评注 0.5.11. “沿 M 的向量场” 和 “M 上的向量场” 是有区别的. 对前者而言, 每点 p 处的切向量可以在 $T_p\tilde{M}$ 中取值, 而后者的切向量只能在 T_pM 中取值. 例如对 $\mathbb{R}^n$ 的子流形 S 而言, $\Gamma(T\mathbb{R}^n|S)$ 中的元素可以在 $\mathbb{R}^n$ 中取值, 而 $\mathfrak{X}(S)$ 中的元素 (局部上) 只能在 $\mathbb{R}^n$ 的某个子空间里取值.

我们考虑一下 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面 S. 由于 $\operatorname{codim} S = 1, T_pS \oplus T_pS^{\perp} = \mathbb{R}^n$, 可知 $\dim T_pS^{\perp} = 1$. 从而每一点处存在两个单位法向量, 适当地选取其中一个, 我们希望可以得到 S 的**单位法向量场**. 但这并不总是能够做到的, 事实上, 这与我们之前提到的流形的定向有关.

定理 0.5.12. $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面 S 上存在单位法向量场的充分必要条件是 S 可定向.

证明. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的两组基, 如果它们的过渡矩阵行列式为正, 那么称它们定向相同. 否则称为定向相反. 固定 $\mathbb{R}^n$ 的一组规范正交基 $\mathcal{O}$.
必要性. 假设 N 是单位法向量场. 考虑一组覆盖了 S 的图册 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, 并考察 U 中标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 的定向. 由于每一点处的标架到 $\mathcal{O}$ 的过渡矩阵行列式是连续的, 所以 U 中标架场的过渡矩阵行列式总是恒正或恒负, 从而局部标架场的定向是良定义的. 此时如果 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 与 $\mathcal{O}$ 定向不同, 那么将 φ_α 复合一个对称变换 $(u^1, u^2, \cdots, u^n) \mapsto (-u^1, u^2, \cdots, u^n)$, 得到的新坐标卡下的标架场 $\left\{-\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 便与 $\mathcal{O}$ 定向相同. 因此, 存在一组图册使得每个坐标卡的局部标架场定向都与 $\mathcal{O}$ 相同. 对坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, 设它们的标架场到 $\mathcal{O}$ 的过渡矩阵分别为 A, B, 考虑这两个标架场之间的过渡矩阵, 注意到 N 是共同的一个向量, 有

$$
\begin{aligned}
0 &< \det A \det B^{-1} \\
&= \det \begin{bmatrix} (\varphi_\alpha)_* \circ (\varphi_\beta^{-1})_* & \\ & 1 \end{bmatrix} \\
&= \det(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_*
\end{aligned}
$$

所以 S 可定向.

充分性. 取定 S 的一个定向与决定这个定向的图册. 对 $p \in S$, 我们选取一个包含 p 的坐标卡 (U,φ), 并在 $T_pS^\perp$ 中选择一个单位向量 N_p 使得标架 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p,N_p\right\}$ 与 $\mathscr{O}$ 定向相同. 我们证明 N_p 是良定义的. 如果 (V,ψ) 是另一个坐标卡, 设 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p,N|_p\right\}$ 到 $\mathscr{O}$ 的过渡矩阵为 A, $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}\right|_p,N|_p\right\}$ 到 $\mathscr{O}$ 的过渡矩阵为 B. 那么有

$$
\begin{aligned}
\det B &= \det\begin{bmatrix}(\psi\circ\varphi^{-1})_* & \\ & 1\end{bmatrix}\det A\\
&> 0
\end{aligned}
$$

因此是同向的, 从而 N_p 有良定义. 我们最后需要说明 N 是光滑的. 设局部标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right\}$ 在 $\mathscr{O}:=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下的坐标为

$$
\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_j a_i^j e_j,\quad i=1,2,\cdots,n-1
$$

又设 $N=\sum_i N^i e_i$, 那么由垂直关系知 $(N^1,N^2,\cdots,N^n)$ 是线性方程组

$$
\begin{cases}
a_1^1x_1+a_1^2x_2+\cdots+a_1^nx_n &= 0\\
a_2^1x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_2^nx_n &= 0\\
\cdots\cdots & \\
a_{n-1}^1x_1+a_{n-1}^2x_2+\cdots+a_{n-1}^nx_n &= 0
\end{cases}
$$

的解, 可以被代数函数表示, 所以一定是光滑的. □

这是我们翻来覆去嚼了很多定义之后遇到的第一个真正的“定理”.

此外, 如果我们发散一下定理 0.5.12 的证明思路, 可以直觉出来一个结论: 可定向流形上面一定存在标架场, 从而切丛是平凡的. 但是目前我们还证明不了这件事情, 我们还需要等待单位分解定理的出场.

作为定理 0.5.12 的结束, 我们来讨论在第 0.2 节结尾处留下的问题, 即证明 Möbius 带是不可定向的.

例 0.5.13. Möbius 带是把一个纸条扭转一次, 然后粘合两端得到的. 比较自然的方法是使用商拓扑 (也叫 “手术”), 但我们在这里直接一些, 把 Möbius 带看成直纹面写参数方程. 我们有

$$r(u,v) = a(u) + vl(u)$$

其中

$$\begin{aligned} a(u) &= a(\cos 2u, \sin 2u, 0) \\ l(u) &= a(u)\cos u + (0,0,a\sin u) \\ u &\in [0,\pi), v \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

假如 Möbius 带可定向, 那么它有单位法向量场 N, 不妨设 $(a,0,0)$ 处取值为

$$\begin{aligned} \frac{r_u(0,0)\times r_v(0,0)}{|r_u(0,0)\times r_v(0,0)|} &= \frac{(0,2a,0)\times(a,0,0)}{2a^2} \\ &= (0,0,-1) \end{aligned}$$

(回忆例 0.4.2 (2) 中表示偏导数的记号) 考虑 N 在准线 $a(u)$ 上的限制, 按照连续性, 对任意 $0 \le t < \pi$ 都有

$$\begin{aligned} N_{a(t)} &= \frac{r_u(t)\times r_v(t)}{|r_u(t)\times r_v(t)|} \\ &= (r_u(t)\times r_v(t))^0 \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\pi} N_{a(t)} &= \left(\lim_{t\to\pi} r_u(t) \times \lim_{t\to\pi} r_v(t)\right)^0 \\ &= ((0,2a,0)\times(0,-a,0))^0 \\ &= (0,0,1) \\ &\neq N_{a(0)} \end{aligned}$$

与连续性矛盾. 所以 Möbius 带不可定向.

$\mathfrak{X}(M)$ 的自同态

本笔记中需要用到这一小节的地方离我们还有点远, 第一次阅读时可以先跳过这一小节.

第 1 章

曲线

稍稍忘记前面我们建立起来的流形理论, 我们回忆一下传统语言中的曲线. 一般来说曲线指的是一个连续或者光滑的映射 $c : I \to \mathbb{R}^n$, 其中 I 是一个区间. 我们也会提到正则性, 这是说对 $t \in I$ 总有

$$c'(t) = ((c^1)'(t), \cdots, (c^n)'(t)) \neq 0$$

接下来我们假设曲线都是光滑而正则的, 然后开启我们的旅程.

第 2 章

计算

前面我们遇到的大量几何量实际上都是张量. 我们打算在这一章提供一些必要的代数预备知识, 并介绍张量入门. 本章中所有的环都有单位元.

2.1 代数知识

定义 2.1.1. 一个环 R 上的**左模**由一个 Abel 群 M 与 R 到 M 的自同态群的一个同态构成. 换言之, 任意一个 $r \in R$ 都诱导了一个 $M \to M$ 的映射, 对 $m \in M$, m 在 r 诱导的映射下的像记为 rm. 我们要求这些映射满足如下公理:

1. 对 $r \in R, m, n \in M$ 有 $r(m+n) = rm + rn$;
2. 对 $r, s \in R, m \in M$ 有 $(r+s)m = rm + sm$;
3. 对 $r, s \in R, m \in M$ 有 $(rs)m = r(sm)$;
4. 对任意 $m \in M$ 有 $1m = m$.

定义 2.1.2. 一个环 R 上的**右模**由一个 Abel 群 M 与 R 到 M 的自同态群的一个反同态构成. 即将定义 2.1.1 中的公理 3 变为 $(rs)m = s(rm)$.

评注 2.1.3. 如果 R 是交换的, 那么左模和右模是一样的, 称为**双侧模**或者

直接简称为**模**. 此外, 我们也可以把右模的像写成 mr, 那么 "数乘的结合公理"[1]可以写成很好看的形式 $m(sr) = (ms)r$.

[1]打引号是因为我们只对向量空间说数乘, 模一般说作用.

参考文献

[1] Felix Klein. “*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*”. *Math. Ann.* **1893**, *43*(1): 63–100.

[2] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Second. Springer, New York, **2013**: xvi+708.

[3] Vladimir A. Zorich. *Mathematical analysis. I*. Second. Springer-Verlag, Berlin, **2015**, Translated from the 6th corrected Russian edition, Part I, 2012 by Roger Cooke, With Appendices A–F and new problems translated by Octavio Paniagua T: xx+616. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1.

[4] 梅加强。流形与几何初步。北京：科学出版社，**2013**。

[5] 欧几里得。几何原本。兰纪正，朱恩宽 译。西安：陕西科学技术出版社，**2003**。