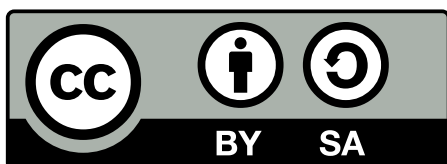


# 曲面曲线论笔记

魔法少女 Alkali

北京师范大学数学科学学院

2022 年 5 月



本作品采用知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际 (CC BY-SA 4.0) 协议进行共享. 您可以访问<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>查看该协议.

# 前言

还没想好写什么.



# 目录

前言	i
第零章 准备	1
0.1 几何学是什么? . . . . .	1
0.2 微分流形 . . . . .	2
0.3 切空间与微分映射 . . . . .	5
0.4 子流形 . . . . .	12
参考文献	13



# 第 0 章

## 准备

### 0.1 几何学是什么？

现代几何学源于古希腊. 在古希腊语中, “几何学”一词为  $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$  (*geōmetría*), 意为测量大地. 这反映了早期几何学主要是对长度, 面积, 体积, 角度的经验性原理的收集, 主要用于满足实用性用途. 直至今日, 初步的几何学教学仍然是从对几何体的大小的直观认识开始的. 因此几何学的一个经典要件就是度量.

Euclid 所著的 *Elements* (汉语中通常称作《几何原本》) 是古希腊几何的代表. 他在 *Elements* 的开篇引入了这样的一条公理:

**公理 4.** 彼此能重合的物体是全等的.

然后第一个引用了这条公理的命题是

**命题 4.** 如果两个三角形中, 一个的两边分别等于另一个的两边, 而且这些线段所夹的角相等. 那么它们的底边等于底边, 这样其余的角也等于相应的角, 即那些等边所对应的角.

(译文引自 [4])

在这最原始的直觉中, “重合”蕴含了运动的概念, 而边角的相等则蕴含了不变量的概念. 因此, 几何学的另一个经典要件就是变换与不变量.

古希腊的几何学主要研究直线与圆锥曲线. 到了微积分发明之后, 数学家可以使用微积分的工具来研究更一般的几何体了. Leibniz 通过密切圆引入了曲线的曲率, Bernoulli 与 Euler 研究了曲面的法曲率与测地线. 对“曲”的研究正式进入了几何学之中. 1827 年,

Gauss 在论文 *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (关于曲面的一般研究) 中证明了“Gauss 绝妙定理” (Theorema Egregium). 从此一种观念开始进入几何学: 我们可以研究抽象的几何体, 而不考虑它在欧式空间中的实现. 进而不久非欧几何便产生了.

回到几何学的两个要件上. 有了以上基础, 1854 年 Riemann 写作了论文 *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (论奠定几何学基础的假设), 正式引入了 Riemann 度量与流形的概念 (之后的笔记中我们会详细解释这两个概念). 同时, 19 世纪正在经历一个射影几何的复兴潮, 当时正在流行使用射影变换的方法研究射影几何. 于是在 1893 年 F. Klein 发表了对整个几何学的“总结性”综述 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (关于近代几何学研究的比较考察). 文章中提到几何学的目的在于

给定一个流形和其上的变换群, 建立关于这个变换群的不变量理论.

([1], 自译)

自此, 经典几何学的舞台已经搭好. 但我们还有一个问题:

**问题.** 微分几何是什么?

接下来我们开始慢慢搭微分几何的舞台.

## 0.2 微分流形

由于我们要在一般的几何体上处理问题, 所以我们要先引入流形的概念. 在数学分析的课程中, 我们学习过了  $\mathbb{R}^n$  的  $k$  维子流形的概念 (例如在 [2] 的第 8 章).  $k$  维子流形的概念是一个局部长得像  $\mathbb{R}^k$  的空间. 这启发我们给出一般流形的定义:

**定义 0.2.1.** 一个  $n$  维拓扑流形  $M$  是一个第二可数, Hausdorff 的拓扑空间, 并且  $M$  的每一点都有一个邻域同胚于  $\mathbb{R}^n$  中的一个开集.

**评注 0.2.2.** 拓扑流形定义中的第二可数与 Hausdorff 这两个条件目前看起来没有什么作用, 但这两个条件能够保证单位分解定理这个重要的工具成立, 之后遇到了我们会再讨论这一点. 此外, 给出上述定义之后我们需要证明  $n$  维拓扑流形是良定义的, 即证明  $\mathbb{R}^n$  与  $\mathbb{R}^m$  在  $m \neq n$  时不同胚, 但这需要用到代数拓扑的工具. 不过证明微分流形是良定义的会相对比较简单, 之后我们会处理这件事情.

由于我们不太需要关心流形的拓扑, 所以以上定义对微分几何来说其实并不是特别重要<sup>1</sup>. 对流形而言, 重要的是它上面的微分结构.

<sup>1</sup>也就是你不懂的话也不必深究的意思.



**定义 0.2.3.** 设  $M$  是  $n$  维拓扑流形. 设  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  是  $M$  的一族开覆盖, 满足其中每个开集都同胚于  $\mathbb{R}^n$  中的开集. 每个开集对应的同胚映射  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  被称为**坐标卡**. 如果两个坐标卡  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  满足  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  在其定义域上是  $C^\infty$  的, 那么称这两个坐标卡**相容**. 如果这一族开覆盖的任意两个坐标卡相容, 那么这一族开覆盖  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  便称为  $M$  的一个**图册**. 如果  $M$  的一个图册中无法再加入新的相容的坐标卡, 那么称这个图册是**极大的**. 极大的图册构成  $M$  的一个**微分结构**. 拥有微分结构的拓扑流形被称为**微分流形**.

有时我们会将  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  称为**转移函数**. 我们有一张图可以用来直观地理解转移函数:

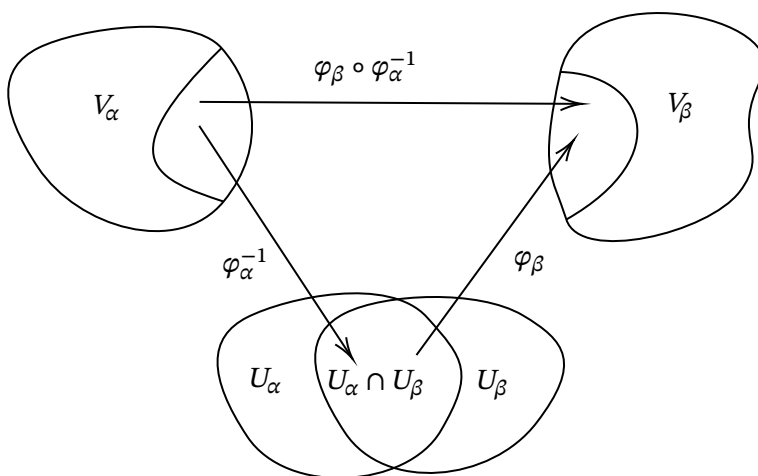


图 1: 转移函数

**例 0.2.4.** 我们举几个微分流形的例子.

- (1)  $\mathbb{R}^n$ , 以恒等映射  $1_{\mathbb{R}^n}$  为坐标卡. 我们指出一点, 证明一个流形具有微分结构只需要找出一组图册就可以了, 这组图册对应的微分结构就是所有与图册相容的坐标卡的集合. 一般将恒等映射所在的图册称为  $\mathbb{R}^n$  的**标准微分结构**.
- (2)  $\mathbb{R}$ , 以  $\varphi : u \mapsto u^3$  为坐标卡. 注意到  $\varphi$  是  $\mathbb{R}$  到自身的同胚, 所以决定了一个微分结构. 但是  $1_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}$  在  $u = 0$  处不可导, 所以这个微分结构与标准微分结构不相容. 这说明了一个微分流形上的微分结构可以有不止一个.
- (3) 单位球面  $S^n$ , 南北两极的球极投影. 两个球极投影  $p_N, p_S$  分别满足

$$p_N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$p_S(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

在截面上用简单的平面几何可以推出转移函数为  $1_{\mathbb{R}^n}/|1_{\mathbb{R}^n}|^2$ , 是光滑函数.

由于我们主要关心曲线曲面论, 所以我们不在这里再举其他奇怪 (但是有趣) 的流形的例子了. 而作为流形的曲线与曲面, 我们将在后面子流形的部分讨论它们.

微分结构的一个很重要的作用是可以定义光滑函数.

**定义 0.2.5.** 设  $M$  是微分流形, 函数  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  被称为是光滑的是指对任意  $p \in M$ , 都存在一个包含  $p$  的坐标卡  $(U, \varphi)$  使得  $f \circ \varphi$  是  $C^\infty$  的.

**记号 0.2.6.** 我们用  $C^\infty(M)$  来表示  $M$  上全体光滑函数的集合, 在逐点定义的加法与乘法下, 这是一个  $\mathbb{R}$ -代数 (同时是交换环与  $\mathbb{R}$ -向量空间).

在这一节的最后我们引入流形的定向的概念.

**定义 0.2.7.** 设  $M$  是微分流形, 如果它拥有一组图册满足任意转移函数的 Jacobi 行列式  $\det d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ , 那么就称  $M$  为可定向流形, 这样的一组图册称为给出了  $M$  的一个定向; 否则称  $M$  为不可定向流形.

**例 0.2.8.** (1)  $\mathbb{R}^3$  的一组基对应了一个坐标卡, 转移函数的行列式就是过渡矩阵的行列式. 我们知道  $\mathbb{R}^3$  的基有左手系和右手系的区分, 右手系到右手系的过渡矩阵行列式为正, 右手系到左手系的过渡矩阵行列式为负. 因此左手系和右手系分别决定了  $\mathbb{R}^3$  的一种定向, 这也是定向这一概念的来源.

(2) 如果流形  $M$  的一个图册中只有两个坐标卡, 那么  $M$  一定可定向: 设这两个坐标卡是  $(U_1, \varphi_1)$  与  $(U_2, \varphi_2)$ , 如果  $\det d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0$ , 那么已经完成证明; 否则我们复合一个  $\mathbb{R}^n$  上的反射变换  $r$ , 得到新的坐标卡  $\varphi_3 = r \circ \varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 那么新的图册  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_3)\}$  就满足  $\det d(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}) = \det d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \det r^{-1} > 0$ , 从而  $M$  可定向.

(3) 按照上面的判别法, 单位球面  $S^n$  拥有两个球极投影构成的图册, 所以是可定向的.

关于流形的定向有一个基础的结论:

**命题 0.2.9.** 一个连通的可定向流形恰好有两个定向.

**证明.** 证明这个命题需要一些拓扑论证, 但我们不希望在这份笔记里出现太多的拓扑, 所以我们直接引用 [3, 引理 1.1.2].  $\square$

事实上确实存在不可定向的流形, 比如大家熟悉的 Möbius 带, 我们在之后再来讨论这个例子.

### 0.3 切空间与微分映射

用“切”的手段来研究流形是微分几何学的基本想法,我们在这一节建立有关切的几个概念. 首先我们使用内蕴的方法定义切向量,并定义切空间与切丛. 然后我们讨论切空间之间的微分映射,以及通过链式法则得到的重要推论,即维度的微分同胚不变性.

#### 切向量与切空间

在数学分析课程中,我们会考虑由函数图像给定的曲面,并使用这个函数的微分映射的像来定义切平面. 但是在一般的微分流形中,我们没有办法先验地给坐标卡定义微分,所以我们要寻找其他的办法来定义流形的切向量.

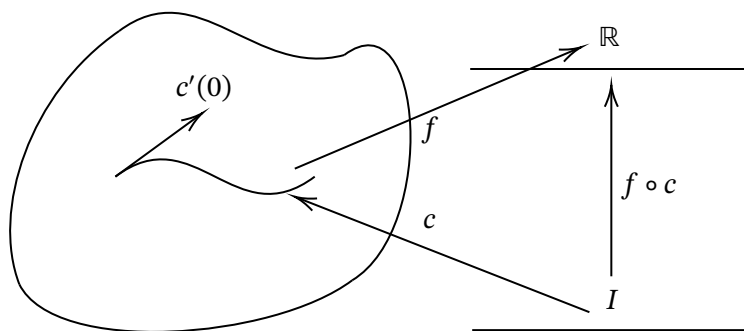


图 2: 曲面上的切向量

对于曲面  $S$  上  $p$  点处的一个切向量  $v$ , 我们可以找到一条曲线  $c: I \rightarrow S$  使得  $p = c(0), v = c'(0)$  (这里的导数定义为逐分量求导). 为了去掉全空间, 我们考虑一个函数  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ , 那么由链式法则有

$$(f \circ c)'(0) = \langle \text{grad } f(p), c'(0) \rangle$$

我们熟悉右侧是由切向量决定的方向导数. 由梯度与内积的线性性可知

$$((\lambda f + \mu g) \circ c)'(0) = \lambda(f \circ c)'(0) + \mu(g \circ c)'(0) \quad (0.3.1)$$

又由乘积函数的求导法则, 可以得到

$$((fg) \circ c)'(0) = (f \circ c)(0)(g \circ c)'(0) + (g \circ c)(0)(f \circ c)'(0) \quad (0.3.2)$$

通过以上式子, 我们可以看出方向导数可以被  $S$  上的曲线决定, 从而并不需要全空间. 事实上, (0.3.1) 和 (0.3.2) 两个性质就足够给出方向导数的定义了.

**定义 0.3.1.** 对  $n$  维微分流形  $M$  与  $p \in M$ , 点  $p$  处的一个切向量  $v$  是一个  $C^\infty(M)$  到  $\mathbb{R}$  的  $\mathbb{R}$ -线性映射, 并且满足 *Leibniz* 法则: 对任意  $f, g \in C^\infty(M)$  有  $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$ .  $p$  处所有的切向量的集合构成  $p$  处的切空间  $T_p M$ .

通过显然定义的法与数乘,  $T_p M$  构成一个  $\mathbb{R}$ -向量空间. 我们接下来讨论一下  $T_p M$  的维度.

首先我们考虑一个包含  $p$  的坐标卡  $(U, \varphi)$ , 定义  $n$  个切向量  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 满足

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

等式右侧是  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  上的函数对  $u^i$  分量的偏导数<sup>2</sup>. 为了简洁起见, 之后在  $p$  点确定的时候我们会省略这个脚标. 按照我们前面的讨论, 它们确实满足线性性和 *Leibniz* 法则, 所以是切向量 (用古典微分几何的语言来说,  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  相当于  $f$  复合一个坐标曲线之后再求导). 我们期望它们刚好就是  $T_p M$  的一组基. 为此我们建立以下引理:

**引理 0.3.2.** 切向量  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 线性无关.

**证明.** 记函数  $x^i = \pi^i \circ \varphi^{-1}$ , 其中  $\pi^i$  为向第  $i$  个分量的投影. 设有线性关系

$$\sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \quad (0.3.3)$$

用 (0.3.3) 两端作用在  $x^i$  上, 可以得到  $c_i = 0$ . 由  $i$  的任意性可知  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 线性无关.  $\square$

**记号 0.3.3.** 我们第一次遇到了求和式. 以后如果遇到的是有限求和, 我们会省略求和上下限, 并且此时如果有多个指标, 可以交换求和顺序, 我们会把指标写在一个求和号底下. 不过我们永远不会使用 *Einstein* 求和约定.

我们接下来说明  $T_p M$  可以被  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 生成.

**引理 0.3.4.** 设  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  中  $0$  的一个邻域,  $f \in C^\infty(U)$ . 那么存在  $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$  使得

$$f(u) = f(0) + \sum_i u^i f_i(u)$$

且  $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(0)$ .

<sup>2</sup>虽然后面我们会看出  $\partial/\partial x^i$  表现得确实很像偏导数, 但是请仔细区分偏导数与切向量: 偏导数是定义在  $\mathbb{R}^n$  里的.

**证明.** 固定  $u \in U$ , 考虑关于  $t$  的函数  $f(tu)$ , 我们有

$$\begin{aligned} f(u) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tu) dt \\ &= \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} u^i dt \quad (\text{链式法则}) \\ &= \sum_i u^i \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} dt \end{aligned}$$

取  $f_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} dt$  即可 (光滑性容易验证). □

**命题 0.3.5.**  $T_p M$  可以被  $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$  生成, 这组基称为关于坐标卡  $\varphi$  的坐标基.

**证明.** 设  $v \in T_p M$ , 不妨设  $\varphi(p) = 0$ . 对任意一个  $f \in C^\infty(M)$ , 由引理 0.3.4, 可以将  $(f \circ \varphi^{-1})(u)$  写成

$$(f \circ \varphi^{-1})(0) + \sum_i u^i (f_i \circ \varphi^{-1})(u) \quad (0.3.4)$$

设  $x^i$  定义如引理 0.3.2, 那么可以将 (0.3.4) 写成

$$f(p) + \sum_i x^i f_i \quad (0.3.5)$$

注意到对常函数  $c$  总有

$$v(c) = v(1 \cdot c) = 1 \cdot v(c) + cv(1) = 2v(c)$$

从而  $v(c) = 0$ , 那么将  $v$  作用在 (0.3.5) 有

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_i v(x^i f_i) \\ &= \sum_i (x^i(p)v(f_i) + f_i(p)v(x^i)) \end{aligned}$$

注意到  $x^i(p) = \pi^i \circ \varphi(p) = 0$ , 且由引理 0.3.4 可知

$$f_i(p) = (f_i \circ \varphi^{-1})(0) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p$$

所以有

$$v(f) = \sum_i v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

注意到上式对所有  $f$  均成立, 所以有

$$v = \sum_i v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (0.3.6)$$

□

**推论 0.3.6.**  $n$  维流形上任意一点处的切空间维度为  $n$ .

评注 0.3.7. 在一些文献中坐标卡的逆映射  $\varphi^{-1}$  会被称为**局部坐标系**, 而

$$c^i(t) = \varphi^{-1}(0, \dots, \overset{\text{第 } i \text{ 个分量}}{t}, \dots, 0)$$

被称为**坐标曲线**, 尤其是古典微分几何教材喜欢用这个术语. 那么就有

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = (f \circ c^i)'(0)$$

(依然假设  $\varphi(p) = 0$ ). 当局部坐标系成为  $\mathbb{R}^n$  的恒等映射时, 坐标曲线变成了坐标轴,  $(f \circ c^i)'$  刚好就是对第  $i$  个分量的偏导数,  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  与数学分析中使用的偏导记号便一致了. 因此我们便选择了这样一个记号来表示切空间的基.

我们给出一个很重要的构造.

**定义 0.3.8.** 定义  $TM := \{(p, v) | p \in M, v \in T_p M\}$ , 或者用不交并这个更代数的记号写作  $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M$ , 称为  $M$  的**切丛**. 切丛的**自然投影映射**  $\pi : TM \rightarrow M$  将每个  $(p, v)$  映为  $p$ .

**命题 0.3.9.**  $n$  维流形  $M$  的切丛  $TM$  是一个  $2n$  维流形.

**证明.** 我们承认  $TM$  是一个拓扑流形. 设  $M$  有微分结构  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ , 我们按照如下方式赋予  $TM$  微分结构: 对一个坐标卡  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi$  的坐标基诱导了一个  $T_p M$  到  $\mathbb{R}^n$  的向量空间同构  $I_\varphi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . 取开覆盖  $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \varphi_\alpha \times I_{\varphi_\alpha})\}_{\alpha \in A}$ , 我们证明它是相容的, 从而给出了  $TM$  的一个微分结构. 对  $(U_1 \times \mathbb{R}^n, \varphi_1 \times I_{\varphi_1})$  与  $(U_2 \times \mathbb{R}^n, \varphi_2 \times I_{\varphi_2})$ , 容易验证

$$(\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = \varphi_1^{-1} \times I_{\varphi_1}^{-1}$$

从而转移函数为

$$(\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

这显然是光滑的, 因此  $\varphi_1, \varphi_2$  是相容的. 由  $\varphi_1, \varphi_2$  的任意性可知命题成立.

因此  $\varphi_1, \varphi_2$  是相容的. 由  $\varphi_1, \varphi_2$  的任意性可知命题成立.

□

这应该是我们遇到的第一个与常见的曲线曲面相去甚远的流形.

评注 0.3.10. 命题 0.3.9 中给出的坐标卡  $\varphi \times I_\varphi$  使得  $TM$  在局部同胚于  $V \times \mathbb{R}^n$ , 这叫做  $TM$  的局部平凡化. 实际上这也是我们对切丛的直观: 每一点处长出了一根由切空间构成的纤维.

关于切丛的一个简单的性质是:

**命题 0.3.11.** 无论  $M$  是否可定向, 切丛总是可定向的.

**证明.** 我们考虑命题 0.3.9 证明中的转移函数的行列式, 有

$$\det d((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = \det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \det d(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

而对  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ , 我们有  $I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \dots, u^n) = \sum_j u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ , 而由 (0.3.6) 可知

$$I_{\varphi_2}^i \circ I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \dots, u^n) = \sum_i u^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_p$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial u^j} I_{\varphi_2}^i \circ I_{\varphi_1^{-1}} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

那么  $\det d(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1}) = \det \left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]_{i,j}$ . 又注意到

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^i} = \frac{\partial(\pi^i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)}{\partial u^j}$$

所以  $\left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]_{i,j} = d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ , 因此

$$\det d((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = (\det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}))^2 > 0$$

□

## 微分映射

我们把光滑性推广到任意两个流形间的映射上.

**定义 0.3.12.** 设  $f$  是微分流形  $M, N$  间的映射  $f : M \rightarrow N$ , 如果对  $M, N$  的微分结构  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$  中任意两个坐标卡  $\varphi, \psi$  有  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  是  $C^\infty$  的, 那么称  $f$  是光滑的.

显然定义 0.3.12 与定义 0.2.5 是相容的.

对流形间的光滑映射, 我们没有办法像数学分析中那样把微分定义为最佳逼近的线性映射. 不过我们可以像上一小节那样考察一下切向量的行为. 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f$  在  $x$  点处的微分是  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  的一个线性映射, 在各自的标准正交基下可以表示为一个  $m \times n$  矩阵  $L_x$ .  $L_x$  把一个  $v \in \mathbb{R}^n$  映到一个  $L_x v \in \mathbb{R}^m$ . 考虑一个  $\mathbb{R}^m$  上的光滑函数  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , 设它的梯度表示为行向量  $N$ , 那么  $g$  在  $f(x)$  点处沿  $L_x v$  方向的方向导数为

$$\langle \text{grad } g(f(x)), L_x v \rangle = g L_x v$$

由链式法则可知  $g L_x$  是  $g \circ f$  在  $x$  点处的微分, 因此  $L_x v$  在一个函数上的作用相当于  $v$  在这个函数复合  $f$  之后的函数上作用. 把这个过程整理一下, 我们可以类比地给出流形间光滑映射的微分:

**定义 0.3.13.** 设  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射, 那么  $f$  在  $p \in M$  点处的微分  $f_*|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  将  $v \in T_p M$  映为  $f_*|_p(v)$ ,  $f_*|_p(v)$  在  $C^\infty(N)$  上的作用为  $f_*|_p(v)(g) = v(g \circ f)$ .

显然微分映射是线性映射.

**记号 0.3.14.** 微分映射传统的记号是  $df_p$  或者  $df(p)$ , 但现在更多会写成我们定义的这个形式. 具体为什么我们留到后面再讲. 和之前一样, 如果  $p$  点是明确的, 我们就不会写脚标.

我们接下来证明关于微分映射最重要的结论:

**定理 0.3.15** (链式法则). 设流形  $M, N, P$  间有光滑映射  $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow P, h = g \circ f$ . 点  $p \in M, q \in N, r \in P$  满足  $f(p) = q, g(q) = r$ , 那么一定有  $h_*|_p = g_*|_q \circ f_*|_p$ . 换言之, 图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & P \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & N & \end{array}$$

交换蕴含以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{h_*} & T_r P \\ & \searrow f_* & \nearrow g_* \\ & T_q N & \end{array}$$

**证明.** 对  $v \in T_p M$  与  $\psi \in C^\infty(P)$ , 我们有

$$(g_* \circ f_*)(v)(\psi) = g_*(f_* v)(\psi)$$



$$\begin{aligned}
&= f_*(v)(\psi \circ g) \\
&= v(\psi \circ g \circ f) \\
&= v(\psi \circ h) \\
&= h_*(v)(\psi)
\end{aligned}$$

由  $v$  与  $\psi$  的任意性即知  $g_* \circ f_* = h_*$ . □

作为链式法则的第一个应用, 我们来证明之前被搁置的一个问题, 那就是微分流形维度的良定义性.

**命题 0.3.16.** 设开集  $U \subset \mathbb{R}^m$  与开集  $V \subset \mathbb{R}^n$  微分同胚, 即存在一个双射  $\varphi: U \rightarrow V$  使得  $\varphi, \varphi^{-1}$  都是  $C^\infty$  的, 那么一定有  $m = n$ . 特别的, 微分流形的维度是良定义的.

**证明.** 由于  $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi \circ \varphi^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$ , 在某一点取微分可以得到

$$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$$

从而  $\varphi_*$  同时有左右逆, 是向量空间之间的同构, 那么一定有  $m = n$ .

对一个微分流形  $M$  而言,  $M$  的维度定义为与微分结构中的一个开集  $U$  同胚的  $\varphi(U)$  所在欧式空间的维度. 而对两个不同的  $\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)$  而言, 两个方向的转移函数构成了它们(的一部分)之间的微分同胚, 按照上面的论证, 它们所在的欧式空间维度一定是一样的. 所以微分流形的维度是良定义的. □

**评注 0.3.17.** 最后我们解释一下  $f_*$  这个记号. 微分对复合映射的作用  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  表现得很像范畴论中的协变函子, 而一类很常见的协变函子  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  作用在  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  上得到的态射一般会记为  $h_*$ . 选用这个记号可以一定程度上体现协变性. 此外,  $f_*$  也会被称为推前映射, 也许是因为  $f_*$  的箭头是向前的. 之后我们还会遇到一类与微分对偶的映射, 被称为拉回映射, 记作  $f^*$ , 它的箭头是向后的. 拉回映射传统上就一直使用  $f^*$  作为记号, 所以用  $f_*$  表示推前映射也是恰当的. 如果我们剧透一些张量的知识的话, 我们会把一个函数的微分看作余切空间  $T_p^*M$  中的一个元素, 但是流形间的微分映射却是  $T_pM^* \otimes T_pN$  中的一个元素, 使用相同的记号会造成一定的混淆.

最后, 我们必须指出, 虽然我们提到了协变性, 推前, 拉回这些词语, 但是他们和范畴论中一样的词语含义并不一样. 它们的相似性只是巧合, 这些巧合让我们采用了相似的记号, 但并不意味着可以把范畴论的观点生搬硬套进来.

## 0.4 子流形

子结构在数学中随处可见, 从最简单的子集 (作为一切基础), 到代数中的子群, 子空间 (先是子集, 并且在大集合的运算下仍然具有相同的代数结构), 大多具有“子集-相同结构”这一模式. 因此子流形大约就是大流形中一个自己是流形的子集. 但我们还需要更多的一些限制条件, 以下我们从浸入, 嵌入的概念开始介绍.

**定义 0.4.1.** 映射  $f : M \rightarrow N$  被称为  $M$  到  $N$  的一个**浸入**, 如果对任意  $p \in M$  都有  $f_*|_p$  是单射. 如果进一步地,  $f$  是  $M$  与赋予了  $N$  的子空间拓扑的  $f(M)$  之间的微分同胚, 那么  $f$  被称为是  $M$  到  $N$  的一个**嵌入**.

## 参考文献

- [1] Felix Klein. “*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*”. *Math. Ann.* **1893**, 43(1): 63–100. <https://doi.org/10.1007/BF01446615>.
- [2] Vladimir A. Zorich. *Mathematical analysis. I*. Second. Springer-Verlag, Berlin, **2015**, Translated from the 6th corrected Russian edition, Part I, 2012 by Roger Cooke, With Appendices A–F and new problems translated by Octavio Paniagua T: xx+616. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1>.
- [3] 梅加强。流形与几何初步。北京：科学出版社，**2013**。
- [4] 欧几里得。几何原本。兰纪正，朱恩宽 译。西安：陕西科学技术出版社，**2003**。