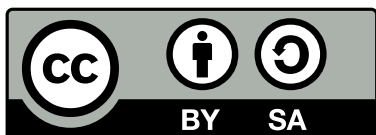


曲面曲线论笔记

魔法少女 Alkali

北京师范大学数学科学学院

最后编译时间: 2022 年 6 月 2 日



本作品采用知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际 (CC BY-SA 4.0) 协议进行共享. 您可以访问<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>查看该协议.

前言

还没想好写什么.

目录

前言	i
目录	iii
第一章 流形	1
1.1 几何学是什么?	1
1.2 微分流形	3
1.3 切空间与微分映射	6
1.4 子流形	15
1.5 向量场	17
第二章 张量	25
2.1 模与对偶空间	25
2.2 自由模与张量积	31
第三章 曲线	45
参考文献	47

第 1 章

流形

我们从几何学的源头开始, 找寻一些经典几何学的关键要素, 然后在这些要素之上来搭建我们的舞台: 微分流形.

1.1 几何学是什么?

现代几何学源于古希腊. 在古希腊语中, “几何学” 一词为 $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ (*geōmetría*), 意为测量大地. 这反映了早期几何学主要是对长度, 面积, 体积, 角度的经验性原理的收集, 主要用于满足实用性用途. 直至今日, 初步的几何学教学仍然是从对几何体的大小的直观认识开始的. 因此几何学的一个经典要件就是度量.

Euclid 所著的 *Elements* (汉语中通常称作《几何原本》) 是古希腊几何的代表. 他在 *Elements* 的开篇引入了这样的一条公理:

公理 4. 彼此能重合的物体是全等的.

然后第一个引用了这条公理的命题是

命题 4. 如果两个三角形中, 一个的两边分别等于另一个的两边, 而且这些线段所夹的角相等. 那么它们的底边等于底边,

这样其余的角也等于相应的角, 即那些等边所对应的角.

(译文引自 [5])

在这最原始的直觉中, “重合” 蕴含了运动的概念, 而边角的相等则蕴含了不变量的概念. 因此, 几何学的另一个经典要件就是变换与不变量.

古希腊的几何学主要研究直线与圆锥曲线. 到了微积分发明之后, 数学家可以使用微积分的工具来研究更一般的几何体了. Leibniz 通过密切圆引入了曲线的曲率, Bernoulli 与 Euler 研究了曲面的法曲率与测地线. 对“曲”的研究正式进入了几何学之中. 1827 年, Gauss 在论文 *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (关于曲面的一般研究) 中证明了“Gauss 绝妙定理” (Theorema Egregium). 从此一种观念开始进入几何学: 我们可以研究抽象的几何体, 而不考虑它在欧氏空间中的实现. 进而不久非欧几何便产生了.

回到几何学的两个要件上. 有了以上基础, 1854 年 Riemann 写作了论文 *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (论奠定几何学基础的假设), 正式引入了 Riemann 度量与流形的概念 (之后的笔记中我们会详细解释这两个概念). 同时, 19 世纪正在经历一个射影几何的复兴潮, 当时正在流行使用射影变换的方法研究射影几何. 于是在 1893 年 F. Klein 发表了对整个几何学的“总结性”综述 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (关于近代几何学研究的比较考察). 文章中提到几何学的目的在于

给定一个流形和其上的变换群, 发展关于这个群的不变量理论.

([1], 自译)

自此, 经典几何学的舞台已经搭好. 但我们还有一个问题:

问题. 微分几何是什么?

接下来我们开始慢慢搭微分几何的舞台.

1.2 微分流形

由于我们要在一般的几何体上处理问题,所以我们要先引入流形的概念. 在数学分析的课程中,我们学习过了 \mathbb{R}^n 的 k 维子流形的概念 (例如在 [3] 的第 8 章). k 维子流形的概念是一个局部长得像 \mathbb{R}^k 的空间. 这启发我们给出一般流形的定义:

定义 1.2.1. 一个 n 维**拓扑流形** M 是一个第二可数, Hausdorff 的拓扑空间, 并且 M 的每一点都有一个邻域同胚于 \mathbb{R}^n 中的一个开集.

评注 1.2.2. 拓扑流形定义中的第二可数与 Hausdorff 这两个条件目前看来有什么作用, 但这两个条件能够保证单位分解定理这个重要的工具成立, 之后遇到了我们会再讨论这一点. 此外, 给出上述定义之后我们需要证明 n 维拓扑流形是良定义的, 即证明 \mathbb{R}^n 与 \mathbb{R}^m 在 $m \neq n$ 时不同胚, 但这需要用到代数拓扑的工具 (参考 [2, 定理 17.26], 那里用的是 de Rham 理论). 不过证明微分流形是良定义的会相对比较简单, 之后我们会处理这件事情.

由于我们不太需要关心流形的拓扑, 所以以上定义对微分几何来说其实并不是特别重要¹. 对流形而言, 重要的是它上面的微分结构.

定义 1.2.3. 设 M 是 n 维拓扑流形. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 M 的一族开覆盖, 满足其中每个开集都同胚于 \mathbb{R}^n 中的开集. 每个开集对应的同胚映射 $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ 被称为**坐标卡**. 如果两个坐标卡 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ 满足 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在其定义域上是 C^∞ 的, 那么称这两个坐标卡相容. 如果这一族开覆盖的任意两个坐标卡相容, 那么这一族开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 便称为 M 的一个**图册**. 如果 M 的一个图册中无法再加入新的相容的坐标卡, 那么称这个图册是**极大的**. 极大的图册构成 M 的一个**微分结构**. 拥有微分结构的拓扑流形被称为**微分流形**.

有时我们会将 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 称为**转移函数**. 我们有一张图可以用来直观地理解转移函数:

¹也就是你不懂的话也不必深究的意思.

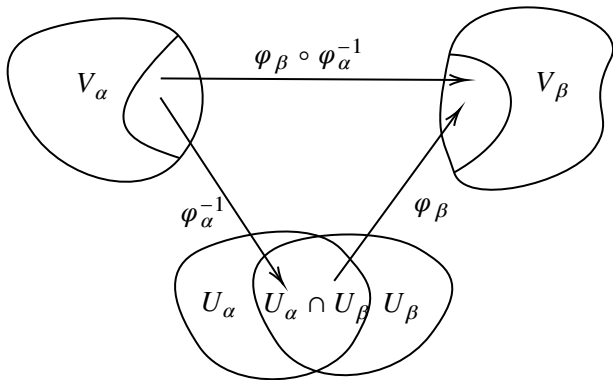


图 1.1: 转移函数

例 1.2.4. 我们举几个微分流形的例子.

- (1) \mathbb{R}^n , 以恒等映射 $1_{\mathbb{R}^n}$ 为坐标卡. 我们指出一点, 证明一个流形具有微分结构只需要找出一组图册就可以了, 这组图册对应的微分结构就是所有与图册相容的坐标卡的集合. 一般将恒等映射所在的图册称为 \mathbb{R}^n 的**标准微分结构**.
- (2) \mathbb{R} , 以 $\varphi: u \mapsto u^3$ 为坐标卡. 注意到 φ 是 \mathbb{R} 到自身的同胚, 从而决定了一个微分结构. 但是 $1_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}$ 在 $u = 0$ 处不可导, 因此这个微分结构与标准微分结构不相容. 这说明了一个微分流形上的微分结构可以有不止一个.
- (3) 单位球面 \mathbb{S}^n , 南北两极的球极投影. 两个球极投影 p_N, p_S 分别满足

$$p_N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$p_S(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

在截面上用简单的平面几何可以推出转移函数为 $1_{\mathbb{R}^n}/|1_{\mathbb{R}^n}|^2$, 是光滑函数.

由于我们主要关心曲线曲面论, 所以我们不在这里再举其他奇怪 (但是

有趣) 的流形的例子了. 而作为流形的曲线与曲面, 我们将在后面子流形的部分讨论它们.

微分结构的一个很重要的作用是可以定义光滑函数.

定义 1.2.5. 设 M 是微分流形, 函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 被称为是**光滑**的是指对任意 $p \in M$, 都存在一个包含 p 的坐标卡 (U, φ) 使得 $f \circ \varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的.

记号 1.2.6. 我们用 $C^\infty(M)$ 来表示 M 上全体光滑函数的集合, 在逐点定义的正加与乘法下, 这是一个 \mathbb{R} -代数 (同时是交换环与 \mathbb{R} -向量空间).

在这一节的最后我们引入流形的定向的概念. 我们用 df 来表示一个可微映射 f 的微分, 即最佳近似线性映射.

定义 1.2.7. 设 M 是微分流形, 如果它拥有一组图册满足任意转移函数的 Jacobi 行列式 $\det d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$, 那么就称 M 为**可定向流形**, 这样的一组图册称为给出了 M 的一个**定向**; 否则称 M 为**不可定向流形**.

例 1.2.8. (1) \mathbb{R}^3 的一组基对应了一个坐标卡, 转移函数的行列式就是过渡矩阵的行列式. 我们知道 \mathbb{R}^3 的基有左手系和右手系的区分, 右手系到右手系的过渡矩阵行列式为正, 右手系到左手系的过渡矩阵行列式为负. 因此左手系和右手系分别决定了 \mathbb{R}^3 的一种定向, 这也是定向这一概念的来源.

(2) 如果流形 M 的一个图册中只有两个坐标卡, 那么 M 一定可定向: 设这两个坐标卡是 (U_1, φ_1) 与 (U_2, φ_2) , 如果 $\det d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0$, 那么已经完成证明; 否则我们复合一个 \mathbb{R}^n 上的反射变换 r , 得到新的坐标卡 $\varphi_3 = r \circ \varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, 那么新的图册 $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_3)\}$ 就满足 $\det d(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}) = \det d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \det r^{-1} > 0$, 从而 M 可定向.

(3) 按照上面的判别法, 单位球面 \mathbb{S}^n 拥有两个球极投影构成的图册, 所以是可定向的.

关于流形的定向有一个基础的结论:

命题 1.2.9. 一个连通的可定向流形恰好有两个定向.

证明. 证明这个命题需要一些拓扑论证, 但我们不希望在这份笔记里出现太多的拓扑, 所以我们直接引用 [4, 引理 1.1.2]. \square

事实上确实存在不可定向的流形, 比如大家熟悉的 Möbius 带, 我们在之后再讨论这个例子.

1.3 切空间与微分映射

用“切”的手段来研究流形是微分几何学的基本想法, 我们在这一节建立有关切的几个概念. 首先我们使用内蕴的方法定义切向量, 并定义切空间与切丛. 然后我们讨论切空间之间的微分映射, 以及通过链式法则得到的重要推论, 即维度的微分同胚不变性.

切向量与切空间

在数学分析课程中, 我们会考虑由函数图像给定的曲面, 并使用这个函数的微分映射的像来定义切平面. 但是在一般的微分流形中, 我们没有办法先验地给坐标卡定义微分, 所以我们要寻找其他的办法来定义流形的切向量.

对于曲面 S 上 p 点处的一个切向量 v , 我们可以找到一条曲线 $c: I \rightarrow S$ 使得 $p = c(0)$, $v = c'(0)$ (这里的导数定义为逐分量求导). 为了去掉全空间, 我们考虑一个函数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, 那么由链式法则有

$$(f \circ c)'(0) = \langle \text{grad} f(p), c'(0) \rangle$$

我们熟悉右侧是由切向量决定的方向导数. 由梯度与内积的线性性可知

$$((\lambda f + \mu g) \circ c)'(0) = \lambda (f \circ c)'(0) + \mu (g \circ c)'(0) \quad (1.3.1)$$

又由乘积函数的求导法则, 可以得到

$$((fg) \circ c)'(0) = (f \circ c)(0)(g \circ c)'(0) + (g \circ c)(0)(f \circ c)'(0) \quad (1.3.2)$$

通过以上式子, 我们可以看出方向导数可以被 S 上的曲线决定, 从而并不需要全空间.

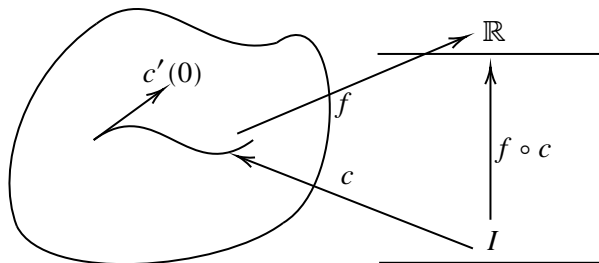


图 1.2: 曲面上的切向量

事实上, (1.3.1) 和 (1.3.2) 两个性质就足够给出方向导数的定义了.

定义 1.3.1. 对 n 维微分流形 M 与 $p \in M$, 点 p 处的一个**切向量** v 是一个 $C^\infty(M)$ 到 \mathbb{R} 的 \mathbb{R} -线性映射, 并且满足 *Leibniz* 法则: 对任意 $f, g \in C^\infty(M)$ 有 $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$. p 处所有的切向量的集合构成 p 处的**切空间** $T_p M$.

通过显然定义的加法与数乘, $T_p M$ 构成一个 \mathbb{R} -向量空间. 我们接下来讨论一下 $T_p M$ 的维度.

首先我们考虑一个包含 p 的坐标卡 (U, φ) , 定义 n 个切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 满足

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} (\varphi(p))$$

等式右侧是 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数对 u^i 分量的偏导数². 为了简洁起见, 之后

²虽然后面我们会看出 $\partial/\partial x^i$ 表现得确实很像偏导数, 但是请仔细区分偏导数与切向量: 偏导数是定义在 \mathbb{R}^n 里的.

在 p 点确定的时候我们会省略这个脚标. 按照我们前面的讨论, 它们确实满足线性性和 Leibniz 法则, 所以是切向量 (用古典微分几何的语言来说, $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 相当于 f 复合一个坐标曲线之后再求导). 我们期望它们刚好就是 $T_p M$ 的一组基. 为此我们建立以下引理:

引理 1.3.2. 切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 线性无关.

证明. 记函数 $x^i = \pi^i \circ \varphi^{-1}$, 其中 π^i 为向第 i 个分量的投影. 设有线性关系

$$\sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \quad (1.3.3)$$

用 (1.3.3) 两端作用在 x^i 上, 可以得到 $c_i = 0$. 由 i 的任意性可知 $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 线性无关. \square

记号 1.3.3. 我们第一次遇到了求和式. 以后如果遇到的是有限求和, 我们会省略求和上下限, 并且此时如果有多个指标, 可以交换求和顺序, 我们会把指标写在一个求和号底下. 不过我们永远不会使用 Einstein 求和约定.

我们接下来说明 $T_p M$ 可以被 $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 生成.

引理 1.3.4. 设 U 是 \mathbb{R}^n 中 0 的一个邻域, $f \in C^\infty(U)$. 那么存在 $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$ 使得

$$f(u) = f(0) + \sum_i u^i f_i(u)$$

且 $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(0)$.

证明. 固定 $u \in U$, 考虑关于 t 的函数 $f(tu)$, 我们有

$$\begin{aligned} f(u) - f(0) &= \int_0^1 \frac{df(tu)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} u^i dt \quad (\text{链式法则}) \end{aligned}$$

$$= \sum_i u^i \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} dt$$

取 $f_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} dt$ 即可 (光滑性容易验证). \square

命题 1.3.5. $T_p M$ 可以被 $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 生成, 这组基称为关于坐标卡 φ 的坐标基.

证明. 设 $v \in T_p M$, 不妨设 $\varphi(p) = 0$. 对任意一个 $f \in C^\infty(M)$, 由引理 1.3.4, 可以将 $(f \circ \varphi^{-1})(u)$ 写成

$$(f \circ \varphi^{-1})(0) + \sum_i u^i (f_i \circ \varphi^{-1})(u) \quad (1.3.4)$$

设 x^i 定义如引理 1.3.2, 那么可以将 (1.3.4) 写成

$$f(p) + \sum_i x^i f_i \quad (1.3.5)$$

注意到对常函数 c 总有

$$v(c) = v(1 \cdot c) = 1 \cdot v(c) + cv(1) = 2v(c)$$

从而 $v(c) = 0$, 那么将 v 作用在 (1.3.5) 有

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_i v(x^i f_i) \\ &= \sum_i (x^i(p) v(f_i) + f_i(p) v(x^i)) \end{aligned}$$

注意到 $x^i(p) = \pi^i \circ \varphi(p) = 0$, 且由引理 1.3.4 可知

$$f_i(p) = (f_i \circ \varphi^{-1})(0) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p$$

所以有

$$v(f) = \sum_i v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

注意到上式对所有 f 均成立, 所以有

$$v = \sum_i v(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad (1.3.6)$$

□

推论 1.3.6. n 维流形上任意一点处的切空间维度为 n .

评注 1.3.7. 在一些文献中坐标卡的逆映射 φ^{-1} 会被称为**局部坐标系**, 而

$$c^i(t) = \varphi^{-1}(0, \dots, \overset{\text{第}i\text{个分量}}{t}, \dots, 0)$$

被称为**坐标曲线**, 尤其是古典微分几何教材喜欢用这个术语. 那么就有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = (f \circ c^i)'(0)$$

(依然假设 $\varphi(p) = 0$). 当局部坐标系成为 \mathbb{R}^n 的恒等映射时, 坐标曲线变成了坐标轴, $(f \circ c^i)'$ 刚好就是对第 i 个分量的偏导数, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 与数学分析中使用的偏导记号便一致了. 因此我们便选择了这样一个记号来表示切空间的基.

我们给出一个很重要的构造.

定义 1.3.8. 定义 $TM := \{(p, v) | p \in M, v \in T_p M\}$, 或者用不交并这个更有代数味道的记号写作 $TM := \coprod_{p \in M} T_p M$, 称为 M 的**切丛**. 切丛的**自然投影映射** $\pi : TM \rightarrow M$ 将每个 (p, v) 映为 p .

命题 1.3.9. n 维流形 M 的切丛 TM 是一个 $2n$ 维流形.

证明. 我们承认 TM 是一个拓扑流形. 设 M 有微分结构 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, 我们按照如下方式赋予 TM 微分结构: 对一个坐标卡 (U, φ) , φ 的坐标基诱导了一个 $T_p M$ 到 \mathbb{R}^n 的向量空间同构 $I_\varphi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$. 取开覆盖 $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \varphi_\alpha \times I_{\varphi_\alpha})\}_{\alpha \in A}$, 我们证明它是相容的, 从而给出了 TM 的一个微分结构. 对 $(U_1 \times \mathbb{R}^n, \varphi_1 \times I_{\varphi_1})$ 与 $(U_2 \times \mathbb{R}^n, \varphi_2 \times I_{\varphi_2})$, 容易验证

$$(\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = \varphi_1^{-1} \times I_{\varphi_1}^{-1}$$

从而转移函数为

$$(\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

这显然是光滑的, 因此 φ_1, φ_2 是相容的. 由 φ_1, φ_2 的任意性可知命题成立.

因此 φ_1, φ_2 是相容的. 由 φ_1, φ_2 的任意性可知命题成立. \square

这应该是我们遇到的第一个与常见的曲线曲面相去甚远的流形.

评注 1.3.10. 命题 1.3.9 中给出的坐标卡 $\varphi \times I_\varphi$ 使得 TM 在局部同胚于 $V \times \mathbb{R}^n$, 这叫做 TM 的**局部平凡化**. 实际上这也是我们对切丛的直观: 每一点处长出了一根由切空间构成的纤维.

关于切丛的一个简单的性质是:

命题 1.3.11. 无论 M 是否可定向, 切丛总是可定向的.

证明. 我们考虑命题 1.3.9 证明中的转移函数的行列式, 有

$$\det d((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = \det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \det d(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

而对 (u^1, u^2, \dots, u^n) , 我们有 $I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \dots, u^n) = \sum_j u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$, 而由 (1.3.6) 可知

$$I_{\varphi_2}^i \circ I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \dots, u^n) = \sum_i u^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_p$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial u^j} (I_{\varphi_2}^i \circ I_{\varphi_1^{-1}}) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

那么 $\det d(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1}) = \det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]_{i,j}$. 又注意到

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^i} = \frac{\partial (\pi^i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)}{\partial u^j}$$

所以 $\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]_{i,j} = d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$, 因此

$$\det d((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = (\det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}))^2 > 0$$

\square

微分映射

我们把光滑性推广到任意两个流形间的映射上.

定义 1.3.12. 设 f 是微分流形 M, N 间的映射 $f : M \rightarrow N$, 如果对 M, N 的微分结构 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ 中任意两个坐标卡 φ, ψ 有 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的, 那么称 f 是光滑的.

显然定义 1.3.12 与定义 1.2.5 是相容的.

对流形间的光滑映射, 我们没有办法像数学分析中那样把微分定义为最佳逼近的线性映射. 不过我们可以像上一小节那样考察一下切向量的行为. 设 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, f 在 x 点处的微分是 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 的一个线性映射, 在各自的标准正交基下可以表示为一个 $m \times n$ 矩阵 L_x . L_x 把一个 $v \in \mathbb{R}^n$ 映到一个 $L_x v \in \mathbb{R}^m$. 考虑一个 \mathbb{R}^m 上的光滑函数 $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, 设它的梯度表示为行向量 N , 那么 g 在 $f(x)$ 点处沿 $L_x v$ 方向的方向导数为

$$\langle \text{grad } g(f(x)), L_x v \rangle = N L_x v$$

由链式法则可知 $N L_x$ 是 $g \circ f$ 在 x 点处的微分, 因此 $L_x v$ 在一个函数上的作用相当于 v 在这个函数复合 f 之后的函数上作用. 把这个过程整理一下, 我们可以类比地给出流形间光滑映射的微分:

定义 1.3.13. 设 $f : M \rightarrow N$ 是光滑映射, 那么 f 在 $p \in M$ 点处的微分 $f_*|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 将 $v \in T_p M$ 映为 $f_*|_p(v)$, $f_*|_p(v)$ 在 $C^\infty(N)$ 上的作用为 $f_*|_p(v)(g) = v(g \circ f)$.

显然微分映射是线性映射.

记号 1.3.14. 微分映射传统的记号是 df_p 或者 $df(p)$, 但现在更多会写成我们定义的这个形式. 具体为什么我们留到后面再讲. 和之前一样, 如果 p 点是明确的, 我们就不会写脚标.

我们接下来证明关于微分映射最重要的结论:

定理 1.3.15 (链式法则). 设流形 M, N, P 间有光滑映射 $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow P$, $h = g \circ f$. 点 $p \in M, q \in N, r \in P$ 满足 $f(p) = q, g(q) = r$, 那么一定有

$$h_*|_p = g_*|_q \circ f_*|_p$$

换言之, 图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & P \end{array}$$

交换蕴含以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{f_*} & T_p N \\ & \searrow h_* & \downarrow g_* \\ & & T_p P \end{array}$$

证明. 对 $v \in T_p M$ 与 $\psi \in C^\infty(P)$, 我们有

$$\begin{aligned} (g_* \circ f_*)(v)(\psi) &= g_*(f_*v)(\psi) \\ &= f_*(v)(\psi \circ g) \\ &= v(\psi \circ g \circ f) \\ &= v(\psi \circ h) \\ &= h_*(v)(\psi) \end{aligned}$$

由 v 与 ψ 的任意性即知 $g_* \circ f_* = h_*$. □

作为链式法则的第一个应用, 我们来证明之前被搁置的一个问题, 那就是微分流形维度的良定义性.

命题 1.3.16. 设开集 $U \subset \mathbb{R}^m$ 与开集 $V \subset \mathbb{R}^n$ 微分同胚, 即存在一个双射 $\varphi: U \rightarrow V$ 使得 φ, φ^{-1} 都是 C^∞ 的, 那么一定有 $m = n$. 特别的, 微分流形的维度是良定义的.

证明. 由于 $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_{\mathbb{R}^m}$, $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$, 在某一点取微分可以得到

$$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$$

从而 φ_* 同时有左右逆, 是向量空间之间的同构, 那么一定有 $m = n$.

对一个微分流形 M 而言, M 的维度定义为与微分结构中的一个开集 U 同胚的 $\varphi(U)$ 所在欧氏空间的维度. 而对两个不同的 $\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)$ 而言, 两个方向的转移函数构成了它们 (的一部分) 之间的微分同胚, 按照上面的论证, 它们所在的欧氏空间维度一定是一样的. 综上所述, 微分流形的维度是良定义的. \square

评注 1.3.17. 实际上命题 1.3.16 的证明用到的只是数学分析课程中证明过的欧氏空间的链式法则, 并没有用到流形上的链式法则. 不过由于想法是一样的, 所以我们仍然在这里陈述它的证明.

评注 1.3.18. 最后我们解释一下 f_* 这个记号. 首先, 我们更倾向使用 $f_*|_p$ 而不是 $df(p)$ 的一个简单的理由是前者更紧凑一些, 在写微分映射作用在切空间上的向量时会节约很多空间. 同时, df 更多特指欧氏空间之间的可微映射, 会有更多分析学上的用途 (比如用来写 Jacobi 矩阵和行列式).

其次, 从范畴论的角度来看, 微分对复合映射的作用 $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ 表现得很像共变函子, 而一类很常见的共变函子 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 作用在 $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ 上得到的态射一般会记为 h_* . 选用这个记号可以一定程度上体现链式法则代表的共变性.

此外, 在微分几何传统中, f_* 也会被称为推前映射, 也许是因为 f_* 的箭头是向前的. 之后我们还会遇到一类与微分对偶的映射, 被称为拉回映射, 记作 f^* , 它的箭头是向后的. 拉回映射传统上就一直使用 f^* 作为记号, 因此用 f_* 表示推前映射也是恰当的.

最后, 我们必须指出, 虽然我们提到了共变性, 推前, 拉回这些词语, 但是他们和范畴论中一样的词语含义并不一样. 它们的相似性只是巧合, 这些巧合让我们采用了相似的记号, 但并不意味着可以把范畴论的观点生搬硬套进来.

1.4 子流形

子结构在数学中随处可见,从最简单的子集(作为一切基础),到代数中的子群,子空间(先是子集,并且在大集合的运算下仍然具有相同的代数结构),大多具有“子集-相同结构”这一模式.因此子流形大约就是大流形中一个自己是流形的子集.但我们还需要更多的一些限制条件,以下我们从浸入,嵌入的概念开始介绍.

定义 1.4.1. 映射 $f: M \rightarrow N$ 被称为 M 到 N 的一个**浸入**,如果对任意 $p \in M$ 都有 $f_*|_p$ 是单射.如果进一步地, f 是 M 与赋予了 N 的子空间拓扑的 $f(M)$ 之间的微分同胚,那么 f 被称为是 M 到 N 的一个**嵌入**.

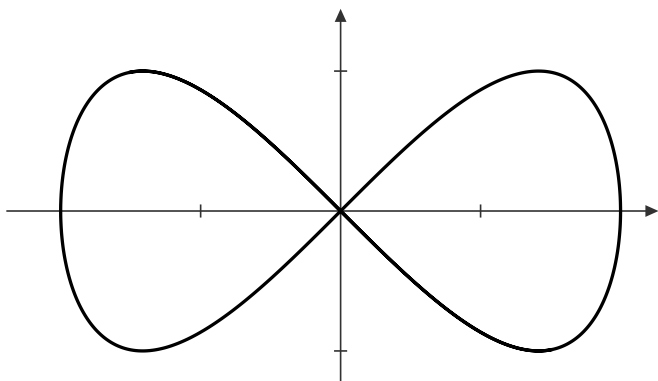
例 1.4.2. (1) 考虑最简单的的流形 \mathbb{R} , 以及映射

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到 $\varphi_*|_t = (-\sin t, \cos t)$, 由于 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, 所以总有 $\varphi_* \neq 0$, 从而 φ_* 是满秩的. 因此 φ 是一个浸入. 注意到 φ 不是双射, 从而不是一个嵌入.

(2) \mathbb{R}^3 中的曲面片. 我们用古典的语言来说这件事. 设 U 是 \mathbb{R}^2 中的开集(从而自然是一个 2 维流形), 映射 $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 在某一点 p 处的两个偏导数 $r_1(p), r_2(p)$ 构成 \mathbb{R}^3 中的两个向量(r_i 表示对第 i 个分量求偏导). 如果对任意 $p \in U$ 都有 $r_1(p) \times r_2(p) \neq 0$, 那么 r 就是一个浸入, 并得到了 \mathbb{R}^3 中的一块曲面片. 如果要解释一下的话, $r_1(p), r_2(p)$ 是 $T_p U \cong \mathbb{R}^2$ 的标准基在 r_* 下的像, 而 $r_1(p) \times r_2(p) \neq 0$ 保证了他们线性无关, 所以 r 是一个浸入.

(3) ∞ 符号: $r(t) = (2 \sin t, \sin(2t))$, $t \in (-\pi, \pi)$. 显然 r_* 总是非零的, 所以 r 是一个浸入. 并且我们也能发现 r 是一个单射. 然而 r 不是一个嵌

图 1.3: “ ∞ ” 或双纽线

入: 作为 \mathbb{R} 的开子集, $(-\pi, \pi)$ 不是一个紧集, 但它在 r 下的像在 \mathbb{R}^2 的子空间拓扑下是一个紧集, 所以 r 不是一个同胚. 有时候这个曲线也被称为双纽线.

按照我们之前的想法, 子流形是大流形的一个子集, 而且自己也是一个流形. 不过我们要求这个子集是要在大流形的拓扑下成为流形, 不然会出现双纽线那样自交等各种情况. 所以我们利用嵌入给出子流形的定义:

定义 1.4.3. 设微分流形 M, N 满足 $M \subset N$, 如果包含映射 $\iota : M \rightarrow N$ 是一个嵌入, 那么就称 M 为 N 的**子流形**. M 在 N 中的**余维度**定义为 $\text{codim } M = \dim N - \dim M$.

对曲线曲面论而言, 最重要的是欧氏空间子流形, 尤其是曲线与超曲面. 我们引用 [3, 8.7 节定义 1] 中引入 k -维曲面所用的定义.

定理 1.4.4. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$, 赋予了 \mathbb{R}^n 的子空间拓扑. 如果对每一点 $x_0 \in S$ 都存在 \mathbb{R}^n 的一个邻域 $U(x_0)$ 以及一个微分同胚 $\varphi : U(x_0) \rightarrow I^n$ 将这个邻域映为 \mathbb{R}^n 中的 n -维单位立方体 $I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1, i = 1, \dots, n\}$, 并且满足集合 $S \cap U(x_0)$ 的像是 \mathbb{R}^n 中由关系 $t^{k+1} = \dots = t^n = 0$ 定义的 k -维平面在 I^n 中的部分, 那么 S 是 \mathbb{R}^n 的一个 k -维子流形.

证明. 这基本上是把流形的定义说了一遍. 由于 S 是 \mathbb{R}^n 的子空间, 所以自动是第二可数的 Hausdorff 空间. 由子空间拓扑可知 $S \cap U(x_0)$ 是 x_0 在 S 中的一个邻域, 按照假设它同胚于

$$I^n \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1, i = 1, \dots, k, t^{k+1} = \dots = t^n = 0\}$$

而这个集合又同胚于 \mathbb{R}^k 中的标准单位立方体 I^k , 从而 x_0 的邻域同胚于 \mathbb{R}^k 中的开集. 因此 S 是一个 k 维拓扑流形. 而又由于假设, 所有同胚都是微分同胚, 所以转移函数都是光滑的. 因此 S 有微分结构, 是一个微分流形. 由于 S 的拓扑即为 \mathbb{R}^n 的子空间拓扑, 所以 S 是 \mathbb{R}^n 的子流形. \square

定义 1.4.5. 欧氏空间中的**曲线**指的是维度为 1 的子流形. 欧氏空间中的**超曲面**指的是余维度为 1 的子流形, 特别地, 3 维欧氏空间中的超曲面会被直接称为**曲面**.

实践中我们更多处理的是例 1.4.2 (2) 中的参数化曲面片. 对一般的浸入来说, 我们没有办法说明它是不是嵌入, 从而也不能说明曲面片是不是流形. 但是以下的定理可以保证在局部上每个浸入都是嵌入, 从而每一个曲面片在局部都是一个 2 维子流形, 或者说曲面.

定理 1.4.6. 设 M, N 是微分流形, $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 那么 f 是一个浸入当且仅当 M 中的每一个点都有一个邻域 U 使得 $f|U: U \rightarrow N$ 是一个嵌入.

证明. [2, 定理 4.25]. \square

1.5 向量场

向量场是我们研究流形的主要工具之一, 本节我们讨论一些简单的有关向量场的性质.

向量场与微分映射

定义 1.5.1. 设 $X : M \rightarrow TM$ 是一个光滑映射, 如果有 $\pi \circ X = 1_M$ 成立, 其中 1_M 是 M 到自身的恒等映射, 那么称 X 是 M 上的一个**向量场**.

评注 1.5.2. 我们讲一下这个定义是怎么回事. 向量场实际上是希望在流形每一点的切空间处光滑地指派一个向量. 为了描述光滑, 我们会直接定义一个光滑的映射 $X : M \rightarrow TM$, 同时为了让点 p 处的向量 X_p 在 $T_p M$ 中, 我们让 $\pi \circ X = 1_M$ 成立. 如果套用传统的定义来说的话, 我们会取定一个坐标卡 (U, φ) , 对任意一点 $p \in U$, 我们指派一个切向量:

$$p \mapsto \left(p, \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (1.5.1)$$

其中 a^i 是 M 上的函数. 那么取 TM 的坐标卡 $(U \times \mathbb{R}^n, \varphi \times \varphi_*)$ 可知

$$\begin{aligned} & (\varphi \times \varphi_*) \circ X \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & u \mapsto (u, (a^1 \circ \varphi^{-1})(u), \dots, (a^n \circ \varphi^{-1})(u)) \end{aligned}$$

所以向量场 X 是光滑的当且仅当每个坐标分量函数是光滑的. 同时, (1.5.1) 也给出了一个向量场在某组坐标卡下的具体表示.

记号 1.5.3. 我们用 $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M 上全体向量场的集合, 它是一个 \mathbb{R} -向量空间. 按照显然定义的运算, 它也是一个 $C^\infty(M)$ -模 (一种在环上的满足类似向量空间运算律的结构, 之后会在定义 2.1.1 正式遇到它).

例 1.5.4. 对给定的坐标卡 (U, φ) , $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 是 $\mathfrak{X}(U)$ 中的 n 个向量场, 它们在每个点 p 处的取值构成了 $T_p U$ 的一组基. 这样的一组向量场被称为一组**局部自然标架**. 如果存在 $\mathfrak{X}(M)$ 中的 n 个向量场满足它们在每个点处的取值都构成切空间的一组基, 那么这组向量场称为 M 的一组**标架**, 同时我们称切丛 TM 是**平凡的**. 容易注意到, 平凡的切丛 TM 总是同胚于 $M \times \mathbb{R}^n$, 所以我们会将其称为是平凡的. 这也再次说明了评注 1.3.10 中将坐标卡称为局部平凡化的理由.

向量场的一个特点是可以像微分一样作用在光滑函数上. 我们知道 p 点处的一个切向量 X_p 将一个光滑函数映成一个数, 那么一个向量场 X 在每一点都将一个光滑函数映成一个数, 因此我们有

命题 1.5.5. 设 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 那么 X 诱导了 $C^\infty(M)$ 到自身的一个映射. 如果把 f 在映射下的像记作 Xf , 那么这个映射定义为

$$Xf(p) = X_p(f)$$

证明. 只需验证 Xf 是光滑的. 而只需注意到在局部设 $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么有

$$Xf = \sum_i a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

从而由 a^i 的光滑性与光滑函数的线性性可知 Xf 是光滑的. \square

反过来, 我们还有一个判别方法:

命题 1.5.6. 如果 Y 是一个 $C^\infty(M)$ 到自身的映射, 那么 Y 是 $\mathfrak{X}(M)$ 中的向量场按命题 1.5.5 诱导出来的当且仅当它满足 *Leibniz* 法则, 即对任意 $f, g \in C^\infty(M)$ 有 $Y(fg) = fYg + gYf$.

证明. 如果 Y 是向量场诱导出来的, 那么它显然满足 *Leibniz* 法则. 如果 Y 满足 *Leibniz* 法则, 考虑等式两侧在 p 点处的取值, 可知此时“ Y 作用 + 赋值 p ”相当于 $T_p M$ 中的一个元素. 收集所有的元素得到一个 (不一定连续的) 向量场 X , X 可以诱导出 Y . 我们还需要说明 X 是光滑的. 设在局部有 $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么有

$$Xx^i = a^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由假设, X 将光滑函数映成光滑函数, 所以 a^i 都是光滑的, 从而 X 是光滑的. \square

Lie 括号

对于两个向量场 X, Y 与光滑函数 f , 我们知道 $XYf = X(Yf)$ 仍然是一个光滑函数. 但 XY 的作用是向量场诱导出来的吗? 我们来验证 XY 是否满足 Leibniz 法则. 注意到

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X(fYg + gYf) \\ &= fXYg + gXYf + XfYg + XgYf \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

从而 XY 是不满足 Leibniz 法则的. 不过我们考虑反过来的 YX :

$$YX(fg) = fYXg + gYXf + XfYg + XgYf \quad (1.5.3)$$

那么只需要让 (1.5.2) 与 (1.5.3) 两式相减, 就可以发现 $XY - YX$ 的作用满足 Leibniz 法则. 因此我们有

命题 1.5.7. 对 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $XY - YX$ 的作用可以由向量场诱导得到, 这个向量场记为 $[X, Y]$, 称作 X, Y 的 **Lie 括号**.

例 1.5.8. (1) 对局部的自然标架 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$, 总有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$$

这实际上是反映了求偏导可以交换顺序.

(2) 对于两个向量场 $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 我们计算它们的 Lie 括号有

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_i \left(\sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) b^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_i \left(\sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} a^j \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) - \sum_{i,j} b^j \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

通过这个表达式也可以证明 $[X, Y]$ 是一个向量场. 实际操作中, 我们会更多用这个表达式来计算 Lie 括号.

命题 1.5.9 (Lie 括号的性质). 对任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ 有

1. (双线性性) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 有

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$$

2. (反对称性)

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3. (Jacobi 恒等式)

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

4. 对 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X$$

证明. 这些都是直接的计算, 也可以参考 [2, 命题 8.28]. □

命题 1.5.9 的前 3 条性质可以用来公理化地定义 Lie 代数, 向量场与 Lie 括号也是我们见到的第一个 Lie 代数. 我们在此就不展开了.

子流形与向量场

除了流形自身上的向量场以外, 我们还要对子流形再定义一种向量场.

定义 1.5.10. 设 M 是 \widetilde{M} 的子流形, \widetilde{M} 中一个**沿 M 的向量场**为一个光滑映射 $X : M \rightarrow T\widetilde{M}$, 满足 $\pi \circ X = 1_M$. \widetilde{M} 中所有沿 M 的向量场的集合记为 $\Gamma(T\widetilde{M}|_M)$ ³.

³这个记号来自于向量丛的截面.

评注 1.5.11. “沿 M 的向量场”和“ M 上的向量场”是有区别的. 对前者而言, 每点 p 处的切向量可以在 $T_p\widetilde{M}$ 中取值, 而后的切向量只能在 T_pM 中取值. 例如对 \mathbb{R}^n 的子流形 S 而言, $\Gamma(T\mathbb{R}^n|S)$ 中的元素可以在 \mathbb{R}^n 中取值, 而 $\mathfrak{X}(S)$ 中的元素 (局部上) 只能在 \mathbb{R}^n 的某个子空间里取值.

我们考虑一下 \mathbb{R}^n 中的超曲面 S . 由于 $\text{codim } S = 1, T_pS \oplus T_pS^\perp = \mathbb{R}^n$, 可知 $\dim T_pS^\perp = 1$. 从而每一点处存在两个单位法向量, 适当地选取其中一个, 我们希望能得到 S 的**单位法向量场**. 但这并不总是能够做到的, 事实上, 这与我们之前提到的流形的定向有关.

定理 1.5.12. \mathbb{R}^n 中的超曲面 S 上存在单位法向量场的充分必要条件是 S 可定向.

证明. 对 \mathbb{R}^n 中的两组基, 如果它们的过渡矩阵行列式为正, 那么称它们定向相同. 否则称为定向相反. 固定 \mathbb{R}^n 的一组规范正交基 \mathcal{O} .

必要性. 假设 N 是单位法向量场. 考虑一组覆盖了 S 的图册 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, 并考察 U 中标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 的定向. 由于每一点处的标架到 \mathcal{O} 的过渡矩阵行列式是连续的, 所以 U 中标架场的过渡矩阵行列式总是恒正或恒负, 从而局部标架场的定向是良定义的. 此时如果 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 与 \mathcal{O} 定向不同, 那么将 φ_α 复合一个对称变换 $(u^1, u^2, \dots, u^n) \mapsto (-u^1, u^2, \dots, u^n)$, 得到的新坐标卡下的标架场 $\left\{-\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 便与 \mathcal{O} 定向相同. 因此, 存在一组图册使得每个坐标卡的局部标架场定向都与 \mathcal{O} 相同. 对坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, 设它们的标架场到 \mathcal{O} 的过渡矩阵分别为 A, B , 考虑这两个标架场之间的过渡矩阵, 注意到 N 是共同的一个向量, 有

$$\begin{aligned} 0 &< \det A \det B^{-1} \\ &= \det \begin{bmatrix} (\varphi_\alpha)_* \circ (\varphi_\beta^{-1})_* & \\ & 1 \end{bmatrix} \\ &= \det(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_* \end{aligned}$$

所以 S 可定向.

充分性. 取定 S 的一个定向与决定这个定向的图册. 对 $p \in S$, 我们选取一个包含 p 的坐标卡 (U, φ) , 并在 $T_p S^\perp$ 中选择一个单位向量 N_p 使得标架 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}} \Big|_p, N_p \right\}$ 与 \mathcal{O} 定向相同. 我们证明 N_p 是良定义的. 如果 (V, ψ) 是另一个坐标卡, 设 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}} \Big|_p, N|_p \right\}$ 到 \mathcal{O} 的过渡矩阵为 A , $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}} \Big|_p, N|_p \right\}$ 到 \mathcal{O} 的过渡矩阵为 B . 那么有

$$\det B = \det \begin{bmatrix} (\psi \circ \varphi^{-1})_* & \\ & 1 \end{bmatrix} \det A > 0$$

因此是同向的, 从而 N_p 有良定义. 我们最后需要说明 N 是光滑的. 设局部标架场 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}} \right\}$ 在 $\mathcal{O} := \{e_1, \dots, e_n\}$ 下的坐标为

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j a_i^j e_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

又设 $N = \sum_i N^i e_i$, 那么由垂直关系知 (N^1, N^2, \dots, N^n) 是线性方程组

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n &= 0 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1}^1 x_1 + a_{n-1}^2 x_2 + \dots + a_{n-1}^n x_n &= 0 \end{cases}$$

的解, 可以被代数函数表示, 所以一定是光滑的. \square

这是我们翻来覆去嚼了很多定义之后遇到的第一个真正的“定理”.

此外, 如果我们发散一定理 1.5.12 的证明思路, 可以直觉出来一个结论: 可定向流形上面一定存在标架场, 从而切丛是平凡的. 但是目前我们还证明不了这件事情, 我们还需要等待单位分解定理的出场.

作为本章的结束, 我们来讨论在第 1.2 节结尾处留下的问题, 即证明 Möbius 带是不可定向的.

例 1.5.13. Möbius 带是把一个纸条扭转一次, 然后粘合两端得到的. 比较自然的方法是使用商拓扑 (也叫“手术”), 但我们在这里直接一些, 把 Möbius 带看成直纹面写参数方程. 我们有

$$r(u, v) = a(u) + vl(u)$$

其中

$$a(u) = a(\cos 2u, \sin 2u, 0)$$

$$l(u) = a(u) \cos u + (0, 0, a \sin u)$$

$$u \in [0, \pi), v \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

假如 Möbius 带可定向, 那么它有单位法向量场 N , 不妨设 $(a, 0, 0)$ 处取值为

$$\begin{aligned} \frac{r_u(0, 0) \times r_v(0, 0)}{|r_u(0, 0) \times r_v(0, 0)|} &= \frac{(0, 2a, 0) \times (a, 0, 0)}{2a^2} \\ &= (0, 0, -1) \end{aligned}$$

(回忆例 1.4.2 (2) 中表示偏导数的记号) 考虑 N 在准线 $a(u)$ 上的限制, 按照连续性, 对任意 $0 \leq t < \pi$ 都有

$$\begin{aligned} N_{a(t)} &= \frac{r_u(t) \times r_v(t)}{|r_u(t) \times r_v(t)|} \\ &= (r_u(t) \times r_v(t))^0 \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi} N_{a(t)} &= \left(\lim_{t \rightarrow \pi} r_u(t) \times \lim_{t \rightarrow \pi} r_v(t) \right)^0 \\ &= ((0, 2a, 0) \times (0, -a, 0))^0 \\ &= (0, 0, 1) \\ &\neq N_{a(0)} \end{aligned}$$

与连续性矛盾. 所以 Möbius 带不可定向.

第2章

张量

本章的内容比较偏向代数, 如果读者只关心代数工具在几何上的应用的话, 不妨跳过一些证明, 尤其是有许多交换图的那些.

本章中所有的环都有单位元.

2.1 模与对偶空间

模的定义与简单性质

定义 2.1.1. 一个环 R 上的**左模**由一个 Abel 群 M 与 R 到 M 的自同态群的一个同态构成. 换言之, 任意一个 $r \in R$ 都诱导了一个 $M \rightarrow M$ 的映射, 对 $m \in M$, m 在 r 诱导的映射下的像记为 rm . 我们要求这些映射满足如下公理:

1. 对 $r \in R, m, n \in M$ 有 $r(m + n) = rm + rn$;
2. 对 $r, s \in R, m \in M$ 有 $(r + s)m = rm + sm$;
3. 对 $r, s \in R, m \in M$ 有 $(rs)m = r(sm)$;
4. 对任意 $m \in M$ 有 $1m = m$.

定义 2.1.2. 一个环 R 上的**右模**由一个 Abel 群 M 与 R 到 M 的自同态群的

一个反同态构成. 即将定义 2.1.1 中的公理 3 变为 $(rs)m = s(rm)$.

评注 2.1.3. 如果 R 是交换的, 那么左模和右模是一样的, 称为**双侧模**或者直接简称为**模**. 此外, 我们也可以把右模的像写成 mr , 那么“数乘的结合公理”¹可以写成很好看的形式 $m(sr) = (ms)r$. 我们接下来基本不会遇到非交换环上的模, 所以我们不再区分左右模. 如果环给定了, 有时我们也不会特别指明环.

类似于向量空间之间的同态, 我们也有模之间的同态:

定义 2.1.4. 设 M, N 是 R 上的模, f 是 $M \rightarrow N$ 的 Abel 群同态, 如果 f 满足对任意 $r \in R$ 与 $m \in M$ 有 $rf(m) = f(rm)$, 那么称 f 是 M 到 N 的一个 **R -同态**. 如果一个 R -同态是一个双射, 那么就将其称为是一个 **R -同构**. 如果两个模 M, N 之间存在一个同构 $f: M \rightarrow N$, 那么就称他们是**同构**的, 并记作 $M \cong N$. 一个模到自身的同构叫做**自同构**.

记号 2.1.5. M 到 N 间的全体 R -同态的集合记为 $\text{Hom}_R(M, N)$, 当 $M = N$ 时 $\text{Hom}_R(M, N) := \text{End}_R M$. M 到自身的全体 R -自同构的集合记为 $\text{Aut}_R M$.

例 2.1.6. 模与向量空间有许多类似的性质. 例如对于任意 $r \in R$ 与 $0 \in M$ 有

$$\begin{aligned} r0 &= r(0+0) \quad (\text{Abel 群公理}) \\ r0 &= r0 + r0 \quad (\text{第 1 条模公理}) \\ \Rightarrow 0 &= r0 \quad (\text{Abel 群消去律}) \end{aligned}$$

也就是说有 $r0 = 0$. 同理也有对任意 $m \in M$ 有 $0m = 0$. 但与向量空间不同的是, 在模上 $ra = 0$ 并不能推出 $a = 0$. 例如所有 Abel 群都是 \mathbb{Z} -模 (作用方式为 $na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n\text{次}}$), 那么对有限 Abel 群 G 来说, Lagrange 定理保证了任意 $g \in G$ 都有 $|G|g = 0$, 而 g 不一定是 0.

¹打引号是因为我们只对向量空间说数乘, 模一般说作用.

对模的同态 $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, 我们也类似线性映射定义

$$\ker f := \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

$$\text{im} f := \{n \in N \mid \exists m \in M : f(m) = n\}$$

与线性映射相同, 我们仍有“ f 是单射当且仅当 $\ker f = 0$ ”与“ f 是满射当且仅当 $\text{im} f = N$ ”这两条命题成立.

子模的定义是自然的:

定义 2.1.7. 设 M 是 R 上的模, 如果 $N \subset M$ 关于加法是 M 的子群, 并且对任意 $r \in R, n \in N$ 有 $rn \in N$, 那么称 N 是 M 的一个**子模**.

对子模而言, 我们会考虑子模上的商结构. N 是 Abel 加群 M 的子群, 所以存在一个商群 M/N . 但 M/N 上有更多的代数结构:

命题 2.1.8. 记号承定义 2.1.7, M/N 有自然的 R -模结构. 即 M/N 是 R -模且有自然 R -同态 $\pi : M \rightarrow M/N$, 自然性体现为 π 满足**泛性质**: 如果模同态 $f : M \rightarrow P$ 满足 $N \subset \ker f$, 那么存在唯一的 $\bar{f} : N \rightarrow P$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & P \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ N & & \end{array}$$

证明. 设 π 是商群的自然同态. 对 $\bar{n} \in M/N$, 如果 $\pi(n) = \bar{n}$, 定义 $r\bar{n} = \pi(rn)$. 我们验证良定义性: 设 $\pi(m) = \pi(n)$, 那么一定有

$$\begin{aligned} r\pi(m) - r\pi(n) &= \pi(rm) - \pi(rn) \\ &= r\pi(m - n) \\ &= r0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

容易验证这样定义的作用满足模的公理, 所以 M/N 是一个模, 并且由作用的定义立刻知道 $\pi: M \rightarrow M/N$ 是 R -同态. 以下验证泛性质: 设 $f: M \rightarrow P$ 满足 $N \subset \ker f$, 定义

$$\bar{f}(\bar{m}) = f(m)$$

如果 $\pi(m) = \pi(n)$, 那么有 $m - n \in \ker f$, 则

$$\begin{aligned}\bar{f}(\pi(m)) - \bar{f}(\pi(n)) &= f(m) - f(n) \\ &= f(m - n) \\ &= 0\end{aligned}$$

所以 \bar{f} 是良定义的. 如果另外存在一个同态 g 满足要求, 那么一定有

$$g(\bar{m}) = f(m) = \bar{f}(\bar{m})$$

对任意 $\bar{m} \in M/N$ 成立. 所以 $g = \bar{f}$, 即 \bar{f} 是唯一的. □

这是我们遇到的第一个泛性质, 之后我们还会遇到很多次.

对偶模与对偶空间

命题 2.1.9. 对 R -模 M , $\text{Hom}_R(M, R)$ 构成一个 R -模, 称作 M 的**对偶模**.

证明. 对 $f, g \in \text{Hom}_R(M, R)$, 定义

$$\begin{aligned}(f + g)(m) &= f(m) + g(m) \\ (-f)(m) &= -f(m)\end{aligned}$$

那么这样定义的加法使得 $\text{Hom}_R(M, R)$ 成为 Abel 群; 对 $r \in R$, 定义

$$(rf)(m) = rf(m)$$

容易验证这样定义的作用满足模公理, 从而使得 $\text{Hom}_R(M, R)$ 成为一个模. □

记号 2.1.10. 当 V 是域 k 上的向量空间时, 习惯上把 $\text{Hom}_k(V, k)$ 记作 V^* , 并称为**对偶空间**.

研究对偶模 (确切地说是反变函子 $\text{Hom}_R(-, R)$) 的性质需要深入的代数讨论, 在微分几何中我们更关心对偶空间的性质. 以下我们主要讨论有限维向量空间的**对偶空间**.

有限维对偶空间的一个基本性质是

命题 2.1.11. $\dim V = \dim V^* < \infty$.

证明. 取 V 的一组基 (e_1, \dots, e_n) , 我们定义 V^* 的**对偶基** $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ 为:

$$\theta^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

首先我们验证 $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ 线性无关. 如果存在 $c_i \in k (i = 1, \dots, n)$ 使得

$$\sum_i c_i \theta^i = 0 \quad (2.1.1)$$

那么将 (2.1.1) 两端作用在 e_j 上, 可以得到 $c_j = 0$. 由 j 的任意性可知 $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ 线性无关. 其次, 对任意 $v^* \in V^*$, 考虑

$$\sum_i v^*(e_i) \theta^i \in V^* \quad (2.1.2)$$

(2.1.2) 与 v^* 对 (e_1, \dots, e_n) 中每个元素的作用都是一样的, 那么它们作为线性映射是相等的, 从而 v^* 可以被 $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ 线性表示. 因此 $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ 是 V^* 的一组基. \square

对偶也可以应用在线性映射上:

定义 2.1.12. 对 $f \in \text{Hom}_k(V, W)$, 定义它的**对偶映射**为

$$\begin{aligned} f^* : W^* &\rightarrow V^* \\ w^* &\mapsto w^* \circ f \end{aligned}$$

注意到对偶映射把箭头反了过来. 对偶映射还有一个有趣的性质:

命题 2.1.13. 设 $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ 在 V, W 各自的一组基下的矩阵为 A , 那么 f^* 在这两组基的对偶基下的矩阵为 A^T .

证明. 对任意一个 $w^* \in W$, 设它在 W 的对偶基下的坐标为列向量 Q . 那么由 (2.1.2) 式可知, 它作为一个线性映射在 W 的基下的矩阵为 Q^T . 因此 w^* 在 f 作用下的像在 V 的基下的矩阵为 $Q^T A$, 那么 $f^*(w^*)$ 在 V 的对偶基下的坐标为 $A^T Q$. 从而 f^* 在对应偶基下的矩阵为 A^T . \square

命题 2.1.11 保证了 V 与 V^* 总是同构的, 但这个同构并不是自然的: “自然”意味着这个同构应当不依赖于基的选取, 或者后面我们也会给它另一个严格的定义. 再次应用命题 2.1.11 可以知道 V 和 V^{**} 也是同构的, 此时它们之间存在自然的同构映射了.

命题 2.1.14. 任意一个有限维向量空间 V 与它对偶空间的对偶空间 V^{**} 自然地同构. 具体而言, 对任意 V , 存在同构 $\iota_V : V \rightarrow V^{**}$, 满足对任意 $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ 有图表

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \iota_V \downarrow & & \downarrow \iota_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array} \quad (2.1.3)$$

交换.

证明. 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_V(v) : V^* &\rightarrow k \\ a^* &\mapsto a^*(v) \end{aligned}$$

我们证明这是一个同构. 设 $v \in \ker \iota_V$, 那么对任意 $a^* \in V^*$ 都有 $a^*(v) = 0$. 如果 $v \neq 0$, 定义

$$b^*(w) = \begin{cases} 1, & w = lv \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

容易验证 $b^* \in V^*$, 从而产生矛盾, 一定有 $v = 0$. 因此 ι_V 是单射, 结合 $\dim V = \dim V^*$ 可知 ι_V 是同构. 我们接下来证明映射族 $\{\iota_V\}_{V \in \text{finVect}_k}$ 的自然性². 对 $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ 与 $v \in V$, 我们有 $\iota_W \circ f(v) : W^* \rightarrow k$

$$\begin{aligned} w^* &\mapsto w^*(f(v)) \\ &= (f^*(w^*))(v) \end{aligned}$$

以及 $f^{**} \circ \iota_V(v) : W^* \rightarrow k$

$$\begin{aligned} w^* &\mapsto (\iota_V(v) \circ f^*)(w^*) \\ &= \iota_V(v)(f^*(w^*)) \\ &= f^*(w^*)(v) \end{aligned}$$

因此图表 (2.1.3) 交换. 综上可知 V 与 V^{**} 自然同构. □

2.2 自由模与张量积

我们在这一节描述我们要用到的最重要的代数工具: 张量积. 第一小节自由模会提供证明张量积存在所需要的工具, 并让我们熟悉泛性质的语言与相应的证明手法. 在第二小节张量积中, 我们会模仿前一小节使用的语言与证明, 通过泛性质给出张量积的定义与基本性质. 我们还会讨论张量积与向量空间有关的性质. 本节中的 R 是一个交换环, k 是一个域.

自由模

定义 2.2.1. 一个集合 X 上的**自由 R -模**是一个 R -模 FX 与嵌入映射 $\iota : X \rightarrow FX$, 满足如下泛性质: 对任意 R -模 M 与映射 $f : X \rightarrow M$, 均存在唯一的 R -同

²自然性来自范畴论, 是针对的一个共变函子与一族自然态射来说的, 所以会用这样一个记号

态 \bar{f} 使得以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} & FX & \\ \uparrow \iota & \searrow \bar{f} & \\ X & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

X 也称为 FX 的**基**.

在证明自由模的存在性之前, 我们先说明自由模的唯一性.

命题 2.2.2. 如果 X 上的自由 R -模存在, 那么它在同构意义下是唯一的.

证明. 假设 $(A, \iota_A), (B, \iota_B)$ 是 X 上的两个自由模, 按照泛性质, 我们可以画出如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{1_A} & & & A \\ & \swarrow \bar{\iota}_B & & \searrow \bar{\iota}_A & \\ & & B & & \\ & \swarrow \iota_A & \uparrow \iota_B & \searrow \iota_A & \\ & & X & & \end{array}$$

由泛性质, 存在 R -同态 $\bar{\iota}_A, \bar{\iota}_B$ 使得左右的两个小三角形交换. 而上方小三角形的交换性结合唯一性可以给出 $\bar{\iota}_A \circ \bar{\iota}_B = 1_A$. 同理 $\bar{\iota}_B \circ \bar{\iota}_A = 1_B$, 那么 $\bar{\iota}_A, \bar{\iota}_B$ 是同构映射, 从而 A 与 B 同构. \square

我们接下来证明自由模存在. 为此, 我们先回忆一下外直和的概念.

定义 2.2.3. 设 $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一族 R -模, 它们的**外直和**定义为

$$\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha := \left\{ m \in \prod_{\alpha \in A} M_\alpha \mid m \text{ 仅有有限个坐标非 } 0 \right\}$$

外直和有一个简单的泛性质:

命题 2.2.4. 设 $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一族 R -模, $\iota_\beta : M_\beta \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ 为自然嵌入映射, 即将 $m \in M_\beta$ 映为 $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ 中 β 分量为 m 的元素. 设 N 是一个 R -模, 那么对任意一族同态 $\{f_\alpha : M_\alpha \rightarrow N\}_{\alpha \in A}$, 均存在唯一一个同态满足

$$f : \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \rightarrow N$$

$$\forall \alpha \in A : f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$$

证明. 对 $m = \sum_{m_i \in M_i} r_i m_i$ (注意到这是一个有限和), 直接定义

$$f(m) = \sum_{m_i \in M_i} r_i f_i(m_i)$$

如果还有另一个同态满足条件, 那么有

$$\begin{aligned} g\left(\sum_{m_i \in M_i} r_i m_i\right) &= \sum_{m_i \in M_i} r_i g(m_i) \\ &= \sum_{m_i \in M_i} r_i (g \circ \iota_i)(m_i) \\ &= \sum_{m_i \in M_i} r_i f_i(m_i) \\ &= f\left(\sum_{m_i \in M_i} r_i m_i\right) \end{aligned}$$

从而 $g = f$, 这个同态是唯一的. □

外直和也可以从这个泛性质出发来定义, 证明唯一性等等.

以下证明任意集合 X 上的自由模存在.

证明. 记号承命题 2.2.4. 我们用 X 为 R 加上指标, 得到一族 R -模 (每一个都是 R 的一份复制), 考虑它们的外直和

$$FX = \bigoplus_{x \in X} R_x$$

并定义嵌入映射 $\iota: x \mapsto \iota_x(1)$. 我们定义每个 R_x 到 M 的同态 $f_x(r) = rf(x)$, 那么由命题 2.2.4 可知存在唯一的 \bar{f} 满足对任意 x 都有 $\bar{f} \circ \iota_x = f_x$. 断言 \bar{f} 就是所求的同态, 那么我们需要验证交换性. 对任意 $x \in X$ 都有

$$\begin{aligned} (\bar{f} \circ \iota)(x) &= (\bar{f} \circ \iota_x)(1) \\ &= f_x(1) \\ &= 1f(x) = f(x) \end{aligned}$$

所以 $\bar{f} \circ \iota = f$, 命题得证. □

例 2.2.5. (1) 设 \mathcal{B} 是向量空间 V 的一组基, 那么 V 就是 \mathcal{B} 上的向量空间. 于是 V 由 \mathcal{B} 的基数决定, 即由维度决定. 从而命题 2.2.2 再次给出了“向量空间同构当且仅当它们维度相等”这个命题的证明.

(2) 考察以下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} & & F(g \circ f) & & \\ & \nearrow Ff & & \searrow Fg & \\ FX & \xrightarrow{\quad} & FY & \xrightarrow{\quad} & FZ \\ \iota_X \uparrow & & \iota_Y \uparrow & & \iota_Z \uparrow \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y & \xrightarrow{\quad g \quad} & Z \\ & \searrow g \circ f & & \nearrow & \end{array}$$

通过对每个矩形应用泛性质, 我们可以知道基 X, Y 之间的映射 f 可以决定自由模之间的同态 $Ff: FX \rightarrow FY$. 同时, 上方的小三角形说明基决定的同态满足 $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$. 这些在线性代数中熟知 (但不一定这样陈述) 的事实有一个高大上的名字叫做自由的函子性.

(3) 按照自由模存在性的证明中同态的构造, 有限维自由模之间的同态也可以使用矩阵来表示, 并通过左乘列向量 (或现在少有人用的右乘行向量) 来进行作用.

张量积

我们也用泛性质来定义张量积. 首先回忆映射 $f : A \times B \rightarrow C$ 满足 R -双线性指的是对任意 $a, u \in A, b, v \in B$ 与 $r \in R$ 有

$$f(a + u, b) = f(a, b) + f(u, b)$$

$$f(a, b + v) = f(a, b) + f(a, v)$$

$$f(ra, b) = rf(a, b) = f(a, rb)$$

定义 2.2.6. R -模 M, N 的**张量积**是一个 R -模 T 与自然 R -双线性映射 $h : M \times N \rightarrow T$, 满足如下泛性质: 对任意 R -模 E 与双线性映射 $f : M \times N \rightarrow E$, 存在唯一的 $\bar{f} \in \text{Hom}_R(T, E)$ 使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \uparrow h & \searrow \bar{f} & \\ M \times N & \xrightarrow{f} & E \end{array}$$

类似命题 2.2.2 也有

命题 2.2.7. 如果 R -模 M, N 的张量积存在, 那么它在同构意义下唯一, 记为 $M \otimes_R N$.

证明. 证明是一模一样的, 如果 M, N 有两个张量积 A, B , 考察以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{1_A} & A \\ & \nearrow \bar{h}_B & & \nwarrow \bar{h}_A & \\ & & B & & \\ \nearrow h_A & & \uparrow h_B & & \nwarrow h_A \\ & & M \times N & & \end{array}$$

可以知道 $\bar{h}_A \circ \bar{h}_B = 1_A$, 同理也有 $\bar{h}_B \circ \bar{h}_A = 1_B$, 因此 A 和 B 是同构的. \square

记号 2.2.8. (1) 大部分时候, 如果环是确定的, 我们不会在 \otimes 下写下标.

(2) 对 $m \in M, n \in N$, 我们记 $h(m, n) := m \otimes n$.

我们接下来着手证明张量积的存在性.

证明. 设 (F, ι) 是 $M \times N$ 上的自由模, 又设 S 是 F 中所有形如

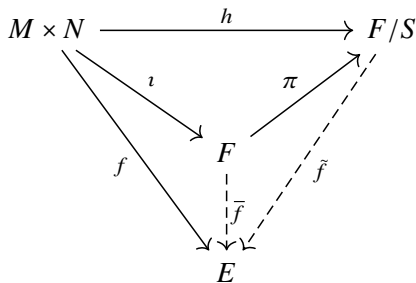
$$(a + c, b) - (a, b) - (c, b)$$

$$(a, b + c) - (a, b) - (a, c)$$

$$(ra, b) - r(a, b)$$

$$(a, rb) - r(a, b)$$

的元素生成的子模. 考虑 F/S , 设自然同态 $\pi : F \rightarrow F/S$. 取自然映射 $h = \pi \circ \iota$, 由 S 的定义立刻可以知道 h 是双线性的. 对于一个模 E 与双线性映射 $f : M \times N \rightarrow E$, 考虑以下交换图:



自由模的泛性质保证了存在唯一的 $\bar{f} : F \rightarrow E$ 使得左边的小三角形交换. 由于 f 是双线性的, 对任意 a, b, c 一定有

$$\begin{aligned} \bar{f}((a + c, b) - (a, b) - (c, b)) &= \bar{f}((a + c, b)) - \bar{f}((a, b)) - \bar{f}((c, b)) \\ &= \bar{f}(\iota(a + c, b)) - \bar{f}(\iota(a, b)) - \bar{f}(\iota(c, b)) \\ &= f(a + c, b) - f(a, b) - f(c, b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理也有

$$\bar{f}((a, b+c) - (a, b) - (a, c)) = 0$$

$$\bar{f}((ra, b) - r(a, b)) = 0$$

$$\bar{f}((a, rb) - r(a, b)) = 0$$

因此一定有 $S \subset \ker \bar{f}$. 那么由商模的泛性质 (命题 2.1.8), 存在唯一的 $\tilde{f} : F/S \rightarrow E$ 使得右边的小三角形交换. 于是我们完成了整个证明. \square

例 2.2.9. 1. 对任意 R -模, 都有 $M \otimes R \cong M$. 这只需要注意到我们可以取一个双线性的 $h(m, r) = rm$, 并且对所有双线性的 $f : M \times R \rightarrow N$, 取一个同态 $\tilde{f}(m) = f(m, 1)$, 这样就有

$$f(m, r) = f(rm, 1) = \tilde{f}(rm) = (\tilde{f} \circ h)(m, r)$$

满足泛性质. 那么由唯一性就有 $M \otimes R \cong M$.

2. 张量积的行为可以十分诡异, 比如对 Abel 群 (\mathbb{Z} -模) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 与 \mathbb{Q} , 考虑它们的自然映射:

$$\begin{aligned} h(a, b) &= h\left(na, \frac{b}{n}\right) \\ &= h\left(0, \frac{b}{n}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

对任意 $(a, b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ 成立, 所以有 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = 0$. 两个非平凡的模的张量积可以是平凡模.

张量积的出现提供了一种模之间的“乘法”, 我们接下来讨论一些张量积简单的类似于乘法的性质.

命题 2.2.10 (交换律). 对模 A, B 有 $A \otimes B \cong B \otimes A$ 成立, 其中同构映射由

$$a \otimes b \mapsto b \otimes a$$

线性延拓给出.

证明. 设双线性映射

$$h : A \times B \rightarrow A \otimes B, (a, b) \mapsto a \otimes b$$

$$k : A \times B \rightarrow B \otimes A, (a, b) \mapsto b \otimes a$$

以及 R -同态

$$f : A \otimes B \rightarrow B \otimes A, a \otimes b \mapsto b \otimes a$$

$$g : B \otimes A \rightarrow A \otimes B, b \otimes a \mapsto a \otimes b$$

由线性延拓给出. 那么考察我们熟悉的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{1_{A \otimes B}} & A \otimes B & & \\
 & \searrow f & & \nearrow g & \\
 & & B \otimes A & & \\
 & \nearrow h & & \searrow h & \\
 A \times B & \xrightarrow{k} & B \otimes A & \xrightarrow{h} & A \otimes B
 \end{array}$$

就可以得到结论. □

命题 2.2.11 (结合律). 对模 A, B, C 有 $A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$, 其中同构映射由

$$a \otimes (b \otimes c) \mapsto (a \otimes b) \otimes c$$

线性延拓给出.

证明. 考虑由泛性质

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B \otimes C & & \\
 \uparrow h & \searrow \tilde{f} & \\
 A \times B \times C & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

决定的模 $A \otimes B \otimes C$, 其中 h 是一个三重线性映射 (定义类似双线性映射), 且对任意三重线性映射 f 均存在一个同态 \tilde{f} 使得上图交换. 类似两个模的张量积存在的证明, 可以证明 $A \otimes B \otimes C$ 存在且在同构意义下唯一. 我们证明 $A \otimes (B \otimes C)$ 也满足如上泛性质. 设以下张量积的自然映射为

$$h_1 : A \times (B \otimes C) \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

$$h_2 : B \times C \rightarrow B \otimes C$$

给定三重线性映射 $f : A \times B \times C \rightarrow M$. 对任意 $a \in A$, 映射

$$\begin{aligned} f_a : B \times C &\rightarrow M \\ (b, c) &\mapsto f(a, b, c) \end{aligned}$$

关于 b, c 是双线性的, 因此由 $B \otimes C$ 的泛性质, 存在唯一的 $\tilde{f}_a : B \otimes C \rightarrow M$ 满足 $f_a = \tilde{f}_a \circ h_2$. 再定义一个双线性映射

$$\begin{aligned} \bar{f} : A \times (B \otimes C) &\rightarrow M \\ (a, p) &\mapsto \tilde{f}_a(p) \end{aligned}$$

我们验证它是双线性的. 由于 \tilde{f}_a 是同态, 所以 \bar{f} 的第二个分量是线性的. 而设 $p = \sum_i r_i b_i \otimes c_i$ (可以这么假设是因为张量积是一个自由模的商), 则有

$$\begin{aligned} \bar{f}(a, p) &= \tilde{f}_a \left(\sum_i r_i b_i \otimes c_i \right) \\ &= \sum_i r_i \tilde{f}_a(b_i \otimes c_i) \\ &= \sum_i r_i f_a(b_i, c_i) \quad (f_a = \tilde{f}_a \circ h_2) \\ &= \sum_i r_i f(a, b_i, c_i) \end{aligned}$$

由于 f 是三重线性的, 那么由上式可知 \bar{f} 对第一个分量也是线性的. 那么由 $A \otimes (B \otimes C)$ 的泛性质, 存在唯一的 \tilde{f} 满足 $\bar{f} = \tilde{f} \circ h_1$. 取 $h = h_1 \circ (1_A \times h_2)$:

$A \times B \times C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$, 那么容易验证 h 是三重线性的, 并且有

$$\begin{aligned}\tilde{f} \circ h &= \tilde{f} \circ h_1 \circ (1_A \times h_2) \\ &= \bar{f} \circ (1_A \times h_2)\end{aligned}$$

同时又有

$$\begin{aligned}\bar{f} \circ (1_A \times h_2)(a, b, c) &= \bar{f}(a, h_2(b, c)) \\ &= \widetilde{f_a} \circ h_2(b, c) \\ &= f_a(b, c) \\ &= f(a, b, c)\end{aligned}$$

所以有 $\tilde{f} \circ h = f$, 因此 $A \otimes (B \otimes C)$ 满足泛性质. 同理可证 $(A \otimes B) \otimes C$ 也满足泛性质, 所以它们一定同构. 容易验证 $a \otimes (b \otimes c) \mapsto (a \otimes b) \otimes c$ 给出了同构映射. \square

命题 2.2.12 (分配律). 对模 A 与一族模 $\{B_i\}_{i \in I}$, 有如下同构成立:

$$A \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} B_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (A \otimes B_i)$$

同构映射由

$$a \otimes (b_i) \mapsto (a \otimes b_i)$$

线性延拓给出.

证明. 设 $\{B_i\}_{i \in I}$ 的嵌入映射为 $\{\iota_i\}_{i \in I}$, $\{A \otimes B_i\}_{i \in I}$ 的嵌入映射为 $\{\iota_i^\otimes\}_{i \in I}$. 对于任意 $i \in I$, 考虑以下图表:

$$\begin{array}{ccc} A \times B_i & \xrightarrow{h_i} & A \otimes B_i \\ \downarrow 1_A \times \iota_i & \searrow f_i & \swarrow \tilde{f}_i \\ & M & \\ \uparrow f & \nwarrow \tilde{f} & \downarrow \iota_i^\otimes \\ A \times \left(\bigoplus_{i \in I} B_i \right) & \xrightarrow{h} & \bigoplus_{i \in I} (A \otimes B_i) \end{array}$$

$f_i = f \circ (1_A \times \iota_i)$ 是一个双线性映射, h_i 是 $A \otimes B_i$ 的自然双线性映射. 那么由 $A \otimes B_i$ 的泛性质, 存在唯一的同态 $\tilde{f}_i : A \otimes B_i \rightarrow M$ 使得上方的三角形交换. 又由外直和的泛性质 (命题 2.2.4), 存在唯一的 $f : \bigoplus_{i \in I} (A \otimes B_i) \rightarrow M$ 使得每张图中右侧的三角形交换. 定义

$$h : A \otimes \bigoplus_{i \in I} B_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (A \otimes B_i)$$

$$\left(a, \sum_{b_i \in B_i} r_i b_i \right) \mapsto \sum_{b_i \in B_i} r_i a \otimes b_i$$

那么 h 自然是双线性的. 以下验证泛性质:

$$\begin{aligned} (\tilde{f} \circ h) \left(a, \sum_{b_i \in B_i} r_i b_i \right) &= \tilde{f} \left(a, \sum_{b_i \in B_i} r_i b_i \right) \\ &= \sum_{b_i \in B_i} r_i (\tilde{f} \circ \iota_i^{\otimes})(a \otimes b_i) \\ &= \sum_{b_i \in B_i} r_i f_i(a \otimes b_i) \\ &= \sum_{b_i \in B_i} r_i f(a, b_i) \\ &= f \left(a, \sum_{b_i \in B_i} r_i b_i \right) \end{aligned}$$

所以有

$$A \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} B_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (A \otimes B_i)$$

容易验证 $a \otimes (b_i) \mapsto (a \otimes b_i)$ 给出了同构映射. □

当我们的目光转向向量空间时, 分配律会给我们一些很强的结论.

命题 2.2.13. 设 V, W 是有限维向量空间, 那么有 $\dim V \otimes W = \dim V \dim W$.

证明. 用自然数为域 k 加上指标, 可以得到一族 k -向量空间, 其中每一个都是 k 自身的一个复制. 设 $\dim V = m, \dim W = n$, 那么有 $V \cong k^m, W \cong k^n$, 则

$V \otimes W \cong k^m \otimes k^n$, 且有

$$\begin{aligned}
 k^m \otimes k^n &= \left(\bigoplus_{i=1}^m k_i \right) \otimes \left(\bigoplus_{j=1}^n k_j \right) \\
 &\cong \bigoplus_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} k_i \otimes k_j \quad (\text{分配律}) \\
 &\cong \bigoplus_{1 \leq i \leq mn} k_i \quad (\text{例 2.2.9}) \\
 &= k^{mn}
 \end{aligned}$$

所以 $V \otimes W \cong k^{mn}$, 因此是 mn 维的. □

这件事情还可以由另一种方式得到:

命题 2.2.14. 设 V, W 是有限维向量空间, 分别以 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 与 $\{g_1, \dots, g_n\}$ 为一组基, 那么 $\mathcal{B} := \{e_i \otimes g_j | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 是 $V \otimes W$ 的一组基. 从而可以推出 V, W 是 mn 维的.

证明. 向量空间就是域上的自由模, 我们尝试通过处理泛性质来证明这个命题. 设 $\iota: \mathcal{B} \rightarrow V \otimes W$ 是嵌入映射. 对任意的 k -向量空间 A , 给定映射 $f: \mathcal{B} \rightarrow A$, 我们定义一个双线性映射

$$\begin{aligned}
 \bar{f}: V \times W &\rightarrow A \\
 (e_i, g_j) &\mapsto f(e_i \otimes g_j)
 \end{aligned}$$

由于双线性映射被其在两组基的 Descartes 积上的取值唯一确定, 所以上述定义是良好的. 我们考察以下图表

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{B} & \xrightarrow{\iota} & V \otimes W & \xleftarrow{h} & V \times W \\
 & \searrow f & \downarrow \tilde{f} & \swarrow \bar{f} & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

由 $V \otimes W$ 的泛性质, 存在唯一的同态 \tilde{f} 使得右侧小三角形交换. 而对左侧小三角形, 我们有

$$\begin{aligned} (\tilde{f} \circ \iota)(e_i \otimes g_j) &= \tilde{f}(e_i \otimes g_j) \\ &= (\tilde{f} \circ h)(e_i, g_j) \\ &= \bar{f}(e_i, g_j) \\ &= f(e_i \otimes g_j) \end{aligned}$$

从而左侧小三角形交换, $(V \otimes W, \iota)$ 满足自由模的泛性质. 所以 \mathcal{B} 是 $V \otimes W$ 的一组基. □

第3章

曲线

稍稍忘记前面我们建立起来的流形理论, 我们回忆一下传统语言中的曲线. 一般来说曲线指的是一个连续或者光滑的映射 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中 I 是一个区间. 我们也会提到正则性, 这是说对 $t \in I$ 总有

$$c'(t) = ((c^1)'(t), \dots, (c^n)'(t)) \neq 0$$

接下来我们假设曲线都是光滑而正则的, 然后开启我们的旅程.

参考文献

- [1] Felix Klein. “*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*”. *Math. Ann.* **1893**, 43(1): 63–100.
- [2] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Second. Springer, New York, **2013**: xvi+708.
- [3] Vladimir A. Zorich. *Mathematical analysis. I*. Second. Springer-Verlag, Berlin, **2015**, Translated from the 6th corrected Russian edition, Part I, 2012 by Roger Cooke, With Appendices A–F and new problems translated by Octavio Paniagua T: xx+616. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1>.
- [4] 梅加强。流形与几何初步。北京：科学出版社，**2013**。
- [5] 欧几里得。几何原本。兰纪正，朱恩宽 译。西安：陕西科学技术出版社，**2003**。