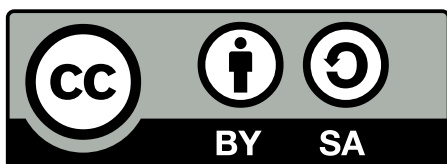


# 曲面曲线论笔记

魔法少女 Alkali

北京师范大学数学科学学院

2022 年 5 月



本作品采用知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际 (CC BY-SA 4.0) 协议进行共享. 您可以访问<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>查看该协议.

# 前言

还没想好写什么.



# 目录

前言	i
第零章 准备	1
0.1 几何学是什么? . . . . .	1
参考文献	3



# 第 0 章

## 准备

### 0.1 几何学是什么？

现代几何学源于古希腊. 在古希腊语中, “几何学” 一词为  $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$  (*geōmetría*), 意为测量大地. 这反映了早期几何学主要是对长度, 面积, 体积, 角度的经验性原理的收集, 主要用于满足实用性用途. 直至今日, 初步的几何学教学仍然是从对几何体的大小的直观认识开始的. 因此几何学的一个经典要件就是度量.

Euclid 所著的 *Elements* (汉语中通常称作《几何原本》) 是古希腊几何的代表. 他在 *Elements* 的开篇引入了这样的一条公理:

**公理 4.** 彼此能重合的物体是全等的.

然后第一个引用了这条公理的命题是

**命题 4.** 如果两个三角形中, 一个的两边分别等于另一个的两边, 而且这些线段所夹的角相等. 那么它们的底边等于底边, 这样其余的角也等于相应的角, 即那些等边所对应的角.

(译文引自 [2])

在这最原始的直觉中, “重合” 蕴含了运动的概念, 而边角的相等则蕴含了不变量的概念. 因此, 几何学的另一个经典要件就是变换与不变量.

古希腊的几何学主要研究直线与圆锥曲线. 到了微积分发明之后, 数学家可以使用微积分的工具来研究更一般的几何体了. Leibniz 通过密切圆引入了曲线的曲率, Bernoulli 与 Euler 研究了曲面的法曲率与测地线. 对 “曲” 的研究正式进入了几何学之中. 1827 年,

Gauss 在论文 *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (关于曲面的一般研究) 中证明了“Gauss 绝妙定理” (Theorema Egregium). 从此一种观念开始进入几何学: 我们可以研究抽象的几何体, 而不考虑它在欧式空间中的实现. 进而不久非欧几何便产生了.

回到几何学的两个要件上. 有了以上基础, 1854 年 Riemann 写作了论文 *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (论奠定几何学基础的假设), 正式引入了 Riemann 度量与流形的概念 (之后的笔记中我们会详细解释这两个概念). 同时, 19 世纪正在经历一个射影几何的复兴潮, 当时正在流行使用射影变换的方法研究射影几何. 于是在 1893 年 F. Klein 发表了对整个几何学的“总结性”综述 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (关于近代几何学研究的比较考察). 文章中提到几何学的目的在于

给定一个流形和其上的变换群, 建立关于这个变换群的不变量理论.

([1], 自译)

自此, 经典几何学的舞台已经搭好. 但我们还有一个问题:

问题. 微分几何是什么?

接下来我们开始慢慢搭微分几何的舞台.



## 参考文献

- [1] Felix Klein. “*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*”. *Math. Ann.* **1893**, 43(1): 63–100. <https://doi.org/10.1007/BF01446615>.
- [2] 欧几里得。几何原本。兰纪正，朱恩宽 译。西安：陕西科学技术出版社，**2003**。