曲面曲线论笔记:

一份现代的初等微分几何介绍

魔法少女 Alkali

北京师范大学数学科学学院

最后编译时间: 2022 年 6 月 13 日

前言

还没想好写什么.

本页特意留空.

目录

本页特意留空.

第 1 章 流形

我们从几何学的源头开始, 找寻一些经典几何学的关键要素, 然后在这些要素之上来搭建我们的舞台: 微分流形.

1.1 几何学是什么?

现代几何学源于古希腊. 在古希腊语中, "几何学" 一词为 γεωμετρία *(geōmetría)*, 意为测量大地. 这反映了早期几何学主要是对长度, 面积, 体积, 角度的经验性原理的收集, 主要用于满足实用性用途. 直至今日, 初步的几何学教学仍然是从对几何体的大小的直观认识开始的. 因此几何学的一个经典要件就是*度量*.

Euclid 所著的 *Elements* (汉语中通常称作《几何原本》) 是古希腊几何的代表. 他在 *Elements* 的开篇引入了这样的一条公理:

> **公理** 4. 彼此能重合的物体是全等的.

然后第一个引用了这条公理的命题是

> **命题** 4. 如果两个三角形中, 一个的两边分别等于另一个的两边, 而且这些线段所夹的角相等. 那么它们的底边等于底边, 这样其余的角也等于相应的角, 即那些等边所对应的角.
>
> (译文引自 [10])

在这最原始的直觉中, "重合" 蕴含了运动的概念, 而边角的相等则蕴含了不变量的概念. 因此, 几何学的另一个经典要件就是*变换与不变量*.

古希腊的几何学主要研究直线与圆锥曲线. 到了微积分发明之后, 数学家可以使用微积分的工具来研究更一般的几何体了. Leibniz 通过密切圆引入了曲线的曲率, Bernoulli 与 Euler 研究了曲面的法曲率与测地线. 对 “曲” 的研究正式进入了几何学之中. 1827 年, Gauss 在论文 *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (关于曲面的一般研究) 中证明了 “Gauss 绝妙定理” (Theorema Egregium). 从此一种观念开始进入几何学: 我们可以研究抽象的几何体, 而不考虑它在欧氏空间中的实现. 进而不久非欧几何便产生了.

回到几何学的两个要件上. 有了以上基础, 1854 年 Riemann 写作了论文 *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (论奠定几何学基础的假设), 正式引入了 Riemann 度量与流形的概念 (之后的笔记中我们会详细解释这两个概念). 同时, 19 世纪正在经历一个射影几何的复兴潮, 当时正在流行使用射影变换的方法研究射影几何. 于是在 1893 年 F. Klein 发表了对整个几何学的 “总结性” 综述 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (关于近代几何学研究的比较考察). 文章中提到几何学的目的在于

> 给定一个流形和其上的变换群, 发展关于这个群的不变量理论.
>
> ([2], 自译)

自此, 经典几何学的舞台已经搭好. 但我们还有一个问题:

问题. *微分几何是什么?*

接下来我们开始慢慢搭微分几何的舞台.

1.2 微分流形

由于我们要在一般的几何体上处理问题, 所以我们要先引入流形的概念. 在数学分析的课程中, 我们学习过了 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形的概念 (例如在 [8] 的第 8 章). k 维子流形的概念是一个局部长得像 $\mathbb{R}^k$ 的空间. 这启发我们给出一般流形的定义:

定义 1.2.1. 一个 n 维**拓扑流形** M 是一个第二可数, Haussdorf 的拓扑空间, 并且 M 的每一点都有一个邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集.

评注 1.2.2. 拓扑流形定义中的第二可数与 Haussdorf 这两个条件目前看不出来有什么作用, 但这两个条件能够保证*单位分解定理*这个重要的工具成立, 之后遇到了我们会再讨论这一点. 此外, 给出上述定义之后我们需要证明 n 维拓扑流形是良定义的, 即证明 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 在 $m \neq n$ 时不同胚, 但这需要用到代数拓扑的工具 (参考 [4，定理 17.26], 那里用的是 de Rham 理论). 不过证明微分流形是良定义的会相对比较简单, 之后我们会处理这件事情.

由于我们不太需要关心流形的拓扑, 所以以上定义对微分几何来说其实并不是特别重要[1]. 对流形而言, 重要的是它上面的微分结构.

定义 1.2.3. 设 M 是 n 维拓扑流形. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的一族开覆盖, 满足其中每个开集都同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 每个开集对应的同胚映射 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ 被称为**坐标卡**. 如果两个坐标卡 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ 满足 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在其定义域上是 C^∞ 的, 那么称这两个坐标卡相容. 如果这一族开覆盖的任意两个坐标卡相容, 那么这一族开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 便称为 M 的一个**图册**. 如果 M 的一个图册中无法再加入新的相容的坐标卡, 那么称这个图册是**极大**的. 极大的图册构成 M 的一个**微分结构**. 拥有微分结构的拓扑流形被称为**微分流形**.

有时我们会将 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 称为**转移函数**. 我们有一张图可以用来直观地理解转移函数:

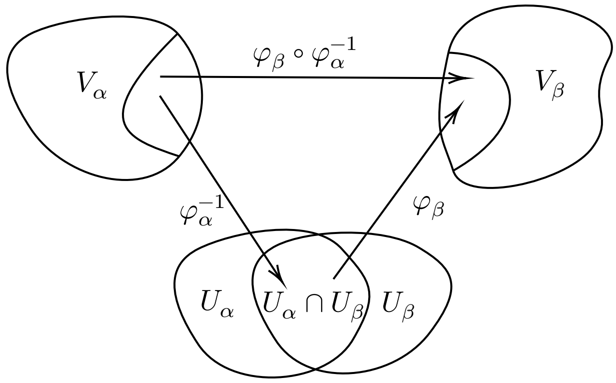

图 1.1: 转移函数

例 1.2.4. 我们举几个微分流形的例子.

(1) $\mathbb{R}^n$, 以恒等映射 $1_{\mathbb{R}^n}$ 为坐标卡. 我们指出一点, 证明一个流形具有微分结构只需要找出一组图册就可以了, 这组图册对应的微分结构就是所有与图册相容的坐标卡的集合. 一般将恒等映射所在的图册称为 $\mathbb{R}^n$ 的**标准微分结构**.

(2) $\mathbb{R}$, 以 $\varphi : u \mapsto u^3$ 为坐标卡. 注意到 φ 是 $\mathbb{R}$ 到自身的同胚, 从而决定了一个微分结构. 但是 $1_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}$ 在 $u = 0$ 处不可导, 因此这个微分结构与标准微分结构不相容. 这说明了一个微分流形上的微分结构可以有不止一个.

[1]也就是你不懂的话也不必深究的意思.

(3) 单位球面 $\mathbb{S}^n$, 南北两极的球极投影. 两个球极投影 p_N, p_S 分别满足

$$p_N(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$p_S(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

在截面上用简单的平面几何可以推出转移函数为 $1_{\mathbb{R}^n}/|1_{\mathbb{R}^n}|^2$, 是光滑函数.

由于我们主要关心曲线曲面论, 所以我们不在这里再举其他奇怪 (但是有趣) 的流形的例子了. 而作为流形的曲线与曲面, 我们将在后面子流形的部分讨论它们.

微分结构的一个很重要的作用是可以定义光滑函数.

定义 1.2.5. 设 M 是微分流形, 函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 被称为是**光滑**的是指对任意 $p \in M$, 都存在一个包含 p 的坐标卡 (U, φ) 使得 $f \circ \varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的.

记号 1.2.6. 我们用 $C^\infty(M)$ 来表示 M 上全体光滑函数的集合, 在逐点定义的加法与乘法下, 这是一个 $\mathbb{R}$-代数 (同时是交换环与 $\mathbb{R}$-向量空间).

接下来我们用微分结构引入流形的定向的概念. 我们用 $\mathrm{d}f$ 来表示一个可微映射 f 的微分, 即最佳近似线性映射.

定义 1.2.7. 设 M 是微分流形, 如果它拥有一组图册满足任意转移函数的 Jacobi 行列式 $\det \mathrm{d}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$, 那么就称 M 为**可定向流形**, 这样的一组图册称为给出了 M 的一个**定向**; 否则称 M 为**不可定向流形**.

例 1.2.8. (1) $\mathbb{R}^3$ 的一组基对应了一个坐标卡, 转移函数的行列式就是过渡矩阵的行列式. 我们知道 $\mathbb{R}^3$ 的基有左手系和右手系的区分, 右手系到右手系的过渡矩阵行列式为正, 右手系到左手系的过渡矩阵行列式为负. 因此左手系和右手系分别决定了 $\mathbb{R}^3$ 的一种定向, 这也是定向这一概念的来源.

(2) 如果流形 M 的一个图册中只有两个坐标卡, 那么 M 一定可定向: 设这两个坐标卡是 (U_1, φ_1) 与 (U_2, φ_2), 如果 $\det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0$, 那么已经完成证明; 否则我们复合一个 $\mathbb{R}^n$ 上的反射变换 r, 得到新的坐标卡 $\varphi_3 = r \circ \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$, 那么新的图册 $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_3)\}$ 就满足 $\det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}) = \det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \det r^{-1} > 0$, 从而 M 可定向.

(3) 按照上面的判别法, 单位球面 $\mathbb{S}^n$ 拥有两个球极投影构成的图册, 所以是可定向的.

关于流形的定向有一个基础的结论:

命题 1.2.9. *一个连通的可定向流形恰好有两个定向.*

证明. 参阅 [9，引理 1.1.2]. 引文使用了许多的拓扑论述, 但我们不希望在这份笔记中出现太多拓扑, 所以我们不再深入讨论这个命题的证明. □

事实上确实存在不可定向的流形, 比如大家熟悉的 Möbius 带, 我们在之后再来讨论这个例子.

单位分解定理

我们在这一小节简单介绍微分几何中的一个常用工具: 单位分解定理. 我们首先需要引入一些定义.

定义 1.2.10. (1) 流形 M 上的集合族 $\mathcal{A}$ 被称为**局部有限**的, 如果对任意 $p \in M$ 都存在 p 的一个邻域 U, 使得 U 仅与 $\mathcal{A}$ 中有限个集合的交非空.

(2) 一个光滑函数 $f \in C^\infty(M)$ 的**支集**是 f 所有非零点的集合的闭包, 记为 $\operatorname{supp} f := \overline{\{p \in M|\ f(p) \neq 0\}}$.

(3) 流形 M 的一个**单位分解**是指满足以下条件的一族光滑函数 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:
   - (a) 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $0 \le f_k \le 1$;
   - (b) $\{\operatorname{supp} f_k|\ k \in \mathbb{N}\}$ 是 M 的开覆盖且局部有限;
   - (c) 对任意 $p \in M$ 有 $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(p) = 1$ (由上一条, 这是一个有限和, 所以总是收敛的);

关于单位分解, 我们的结论是

定理 1.2.11 (单位分解定理)**.** *设 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是流形 M 的一个开覆盖, 那么存在一个**从属于 $\mathcal{U}$ 的单位分解**$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$, 即对任意 $k \in A$ 都存在一个 $\alpha \in A$ 使得 $\operatorname{supp} f_k \subset U_\alpha$.*

我们先约定一些记号, 然后依次建立一些引理.

记号 1.2.12. 记 $\operatorname{int} A$ 为 A 的内部, ∂A 为 A 的边界; $B_r(p)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 p 点为球心, 半径为 r 的开球; C_l 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开立方体 $(-l, l)^n$.

引理 1.2.13 (流形的仿紧性)**.** *设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的一族开覆盖, 那么存在一族局部有限的图册满足 $\{V_k, \varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$*

(1) *$\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的加细, 即对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都存在 $\alpha \in A$ 使得 $V_k \subset U_\alpha$;*

(2) *对任意 $k \in \mathbb{N}$ 有 $\varphi_k(V_k) = B_3(0)$;*

(3) *集合族 $\{\varphi_k^{-1}(B_1(0))\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 M 的一族开覆盖.*

证明. 由于流形是第二可数的, 所以 M 存在一组可数基 $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ [3，定理 2.50]. 而流形是 Hausdorff 且局部紧的, 所以我们可以假设这组基满足 $\overline{Z_i}$ 都是紧的 [3，命题 4.63].
我们归纳构造 M 的一个穷竭: 这是一列集合 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 满足 A_i 是紧的, $A_i \subset \operatorname{int} A_{i+1}$ 且 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = M$. 取 $A_1 = Z_1$. 假设 A_i 取定, 由于 A_i 是紧的, 取最小的指标 j 使得 $A_i \subset Z_1 \cup \cdots \cup Z_j$, 并取 $A_{i+1} = \overline{Z_1 \cup \cdots \cup Z_j}$ 即可. 并且注意到额外地有

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \backslash \operatorname{int} A_{i-1}) = M \tag{1.2.1}$$

我们约定 $i < 1$ 时 $A_i = \emptyset$.
我们通过穷竭来构造要求的图册. (见图 1.2) 对任意一个 $p \in M$, 设 $p \in \operatorname{int} A_{i+2} \backslash A_{i-1}$. 在微分结构中取一个包含 p 的坐标卡 (U, ψ), 然后选取 $U \cap (\operatorname{int} A_{i+2} \backslash A_{i-1})$ 的某个开子集 V_p 使得它同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的开球 (这可以通过先选好 $\psi(U \cap (\operatorname{int} A_{i+2} \backslash A_{i-1}))$ 中的一个开球实现). 接下来将 ψ 复合一个 $\mathbb{R}^n$ 到自身的同胚, 使得新同胚 φ_p 满足 $\varphi_p(V_p) = B_3(0)$. 于是我们得到了一组图册 $\{(V_p, \varphi_p)\}_{p\in M}$. 设 $W_p := \varphi_p^{-1}(B_1(0))$, 注意到 $\{W_p\}_{p\in(\operatorname{int} A_{i+2})\backslash A_{i-1}}$ 是 $A_{i+1} \backslash \operatorname{int} A_i$ 的一族开覆盖, 且 $A_{i+1} \backslash \operatorname{int} A_i$ 是紧的, 那么一定可以选出有限个 $W_{i1}, W_{i2}, \cdots, W_{ik}$ 覆盖 $A_{i+1} \backslash \operatorname{int} A_i$. 让 i 取遍 $\mathbb{N}$, 结合 (1.2.1) 式可知可数个开集 $\{W_{ij}\}$ 覆盖了 M, 重新编号并取对应的坐标卡, 我们便得到了一组图册 $\{(V_k, \varphi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, 且这组图册是覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的加细.
最后我们需要证明这组图册是局部有限的. 对于任一 $p \in M$, 取 p 的邻域 $\operatorname{int} A_{i+2} \backslash A_{i-1}$. 对于一个 V_k, 设 $V_k \subset A_j \backslash \operatorname{int} A_{j-1}$, 那么 $V_k \cap \operatorname{int} A_{i+2} \backslash A_{i-1}$ 非空当且仅当 $j = i$ 或 $j = i + 1$, 从而至多有有限个 V_k 与 $\operatorname{int} A_{i+2} \backslash A_{i-1}$ 相交. 因此 $\{(V_k, \varphi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是局部有限的. □

引理 1.2.14 ($\mathbb{R}^n$ 的 Urysohn 引理). *存在一个光滑函数 $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足*

$$\eta(x) \begin{cases} = 1, & x \in \overline{C_1} \\ \in (0,1), & x \in C_2 \backslash \overline{C_1} \\ = 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash C_2 \end{cases}$$

证明. 首先取

$$\gamma(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

通过直接 (而复杂) 的计算可以知道 γ 是光滑的. 然后取

$$\vartheta(x) = \frac{\gamma(2+x)\gamma(2-x)}{\gamma(2+x)\gamma(2-x) + \gamma(x-1) + \gamma(-x-1)}$$

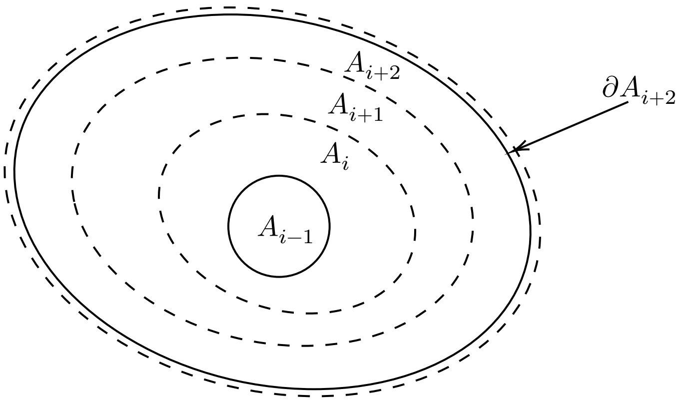

图 1.2: 穷竭的示意图
(每个标签表示其所在位置的集合, 特别地最外层虚线与实线之间为 A_{i+2} 的边界. $A_{i+2}\backslash A_{i-1}$ 即为两个虚线之间的部分.)

由于 $2+x<0$ 时 $-x-1>0$, $2-x<0$ 时 $x-1>0$, 所以分母总是正的. 容易计算 ϑ 满足

$$\vartheta\begin{cases}=1, & -1<x<1\\ \in(0,1), & -2<x\leq -1 \text{ 或 } 1\leq x<2\\ =0, & x\leq -2 \text{ 或 } x\geq 2\end{cases}$$

那么取

$$\eta(x^1,x^2,\cdots,x^n)=\prod_{i=1}^n\vartheta(x^i)$$

即满足条件. $\square$

单位分解定理的证明. 设 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是微分流形 M 的一个开覆盖, 按照引理 1.2.13, 可以取 $\mathcal{U}$ 的一组局部有限加细坐标卡 $\{V_k,\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. 对任意一个 $k\in\mathbb{N}$, 取

$$\begin{aligned}\theta_k: M&\to\mathbb{R}\\ p&\mapsto\begin{cases}\eta\circ\varphi_k(p), & p\in V_k\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{supp}\theta_k\subset\varphi_k^{-1}(C_2)\subset\operatorname{int}V_k$, 所以 θ_k 是光滑的. 又由于 $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是局部有限的, 则 $\{\operatorname{supp}\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 也是局部有限的, 所以对任意 $p\in M$ 都有 $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\theta_i(p)$ 收敛, 且对某个使得

$\varphi_l^{-1}(B_1(0))$ 包含 p 的坐标卡 (V_l, φ_l) 有 $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \theta_i(p) \geq \theta_l(p) > 0$. 因此可以取

$$f_k(p) = \frac{\theta_k(p)}{\sum_{i\in\mathbb{N}} \theta_i(p)}$$

那么 $\operatorname{supp} f_k = \operatorname{supp} \theta_k$, 从而是局部有限的, 并且是 $\mathcal{U}$ 的加细. 按定义立刻知道有 $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k = 1$. 因此 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 即为所求的从属于 $\mathcal{U}$ 的单位分解. □

我们讨论一下单位分解定理的简单应用. 第一个是引理 1.2.14 中构造的函数的推广.

定义 1.2.15. 设 M 是微分流形, $A \subset M$ 是一个开集, 且它的闭包包含在开集 U 中. 开集 A 的一个**支集在 U 中的冲击函数** ψ 是一个满足 ψ 在 A 上恒为 1 且 $\operatorname{supp}\psi \subset U$ 的光滑函数.[2]

命题 1.2.16. *设 A, U 是流形 M 上开集且 $\overline{A} \subset I$, 那么存在 A 的一个支集在 U 中的冲击函数.*

证明. 注意到 $U, M\backslash\overline{A}$ 构成 M 的一个开覆盖, 那么取从属于这组覆盖的一族单位分解 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 设 $\mathscr{F} := \{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是其中支集在 U 中的. 那么定义 $\psi = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_{i_k}$, 由局部有限性, ψ 在 A 的每一点上收敛, 且 $\operatorname{supp}\psi \subset U$. 断言 ψ 在 A 上恒为 1. 如果不是这样的话, 存在一个 $p \in A$ 与一些不在 $\mathscr{F}$ 中的 $\{f_{j_l}\}_{1\leq l\leq m}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} f_{i_k}(p) + \sum_{l=1}^{m} f_{j_l}(p) = 1$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{i_k}(p) < 1$, 存在一个 $f_{j_l}(p) > 0$, 那么 $\operatorname{supp} f_{j_l} \cap A \neq 0$. 但 $\operatorname{supp} f_{j_l} \subset M\backslash\overline{A}$, 矛盾. 所以 ψ 在 A 上恒为 1. □

我们再用冲击函数证明一个简单的命题.

命题 1.2.17 (光滑函数扩张引理)**.** *设 $p \in M$, U 是 p 的一个邻域, $f \in C^\infty(U)$. 那么存在一个 p 在 U 内的邻域 V 及 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, 使得 $\operatorname{supp}\tilde{f} \subset U$ 且 $\tilde{f}|_V = f|_V$.*

证明. 由 Hausdorff 性质, 可以找到一个开集 $V \subset U$ 包含 p. 那么按命题 1.2.16 选择冲击函数 ψ, 使得 $\operatorname{supp}\psi \subset U$ 且 ψ 在 V 上取 1. 取

$$\tilde{f}(q) = \begin{cases} \psi(q)f(q), & p \in U \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

由于 $\operatorname{supp}\psi \subset U$, 可知 $\operatorname{supp}(\psi f) \subset U$, 从而 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$. 按构造显然有 $\tilde{f}|_V = f|_V$. □

[2] [9] 上称为鼓包函数.

1.3 切空间与微分映射

用 “切” 的手段来研究流形是微分几何学的基本想法, 我们在这一节建立有关切的几个概念. 首先我们使用内蕴的方法定义切向量, 并定义切空间与切丛. 然后我们讨论切空间之间的微分映射, 以及通过链式法则得到的重要推论, 即维度的微分同胚不变性.

切向量与切空间

在数学分析课程中, 我们会考虑由函数图像给定的曲面, 并使用这个函数的微分映射的像来定义切平面. 但是在一般的微分流形中, 我们没有办法先验地给坐标卡定义微分, 所以我们要寻找其他的办法来定义流形的切向量.

对于曲面 S 上 p 点处的一个切向量 v, 我们可以找到一条曲线 $c : I \to S$ 使得 $p = c(0), v = c'(0)$ (这里的导数定义为逐分量求导). 为了去掉全空间, 我们考虑一个函数 $f : S \to \mathbb{R}$, 那么由链式法则有

$$(f \circ c)'(0) = \langle \operatorname{grad} f(p), c'(0) \rangle$$

我们熟悉右侧是由切向量决定的方向导数. 由梯度与内积的线性性可知

$$((\lambda f + \mu g) \circ c)'(0) = \lambda (f \circ c)'(0) + \mu (g \circ c)'(0) \tag{1.3.1}$$

又由乘积函数的求导法则, 可以得到

$$((fg) \circ c)'(0) = (f \circ c)(0)(g \circ c)'(0) + (g \circ c)(0)(f \circ c)'(0) \tag{1.3.2}$$

通过以上式子, 我们可以看出方向导数可以被 S 上的曲线决定, 从而并不需要全空间.

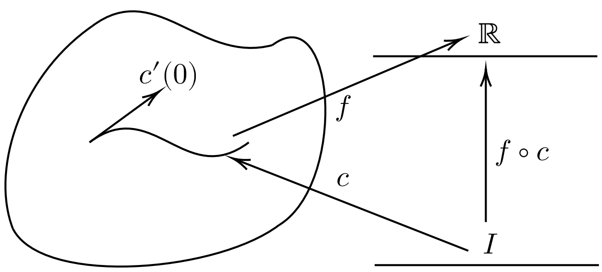

图 1.3: 曲面上的切向量

事实上, (1.3.1) 和 (1.3.2) 两个性质就足够给出方向导数的定义了.

定义 1.3.1. 对 n 维微分流形 M 与 $p \in M$, 点 p 处的一个**切向量** v 是一个 $C^\infty(M)$ 到 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{R}$-线性映射, 并且满足 *Leibniz* 法则: 对任意 $f, g \in C^\infty(M)$ 有 $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$. p 处所有的切向量的集合构成 p 处的**切空间** T_pM.

通过显然定义的加法与数乘, T_pM 构成一个 $\mathbb{R}$-向量空间. 我们接下来讨论一下 T_pM 的维度.

首先我们考虑一个包含 p 的坐标卡 (U, φ), 定义 n 个切向量 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (i = 1, 2, \cdots, n)$, 满足

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

等式右侧是 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数对 u^i 分量的偏导数[3]. 为了简洁起见, 之后在 p 点确定的时候我们会省略这个脚标. 按照我们前面的讨论, 它们确实满足线性性和 Leibniz 法则, 所以是切向量 (用古典微分几何的语言来说, $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 相当于 f 复合一个坐标曲线之后再求导). 我们期望它们刚好就是 T_pM 的一组基. 为此我们建立以下引理:

引理 1.3.2. *切向量* $\frac{\partial}{\partial x^i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ *线性无关.*

证明. 记函数 $x^i = \pi^i \circ \varphi$, 其中 π^i 为向第 i 个分量的投影. 设有线性关系

$$\sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \tag{1.3.3}$$

用 (1.3.3) 两端作用在 x^i 上, 可以得到 $c_i = 0$. 由 i 的任意性可知 $\frac{\partial}{\partial x^i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 线性无关. □

记号 1.3.3. 我们第一次遇到了求和式. 以后如果遇到的是有限求和, 我们会省略求和上下限, 并且此时如果有多个指标, 可以交换求和顺序, 我们会把指标写在一个求和号底下. 我们会使用 Einstein 求和约定以使得求和更加明确, 但是我们不会省略求和号.

我们接下来说明 T_pM 可以被 $\frac{\partial}{\partial x^i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 生成.

引理 1.3.4. *设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中 0 的一个邻域, $f \in C^\infty(U)$. 那么存在 $f_1, \cdots, f_n \in C^\infty(U)$ 使得*

$$f(u) = f(0) + \sum_i u^i f_i(u)$$

且 $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(0)$.

[3]虽然后面我们会看出 $\partial/\partial x^i$ 表现得确实很像偏导数, 但是请仔细区分偏导数与切向量: 偏导数是定义在 $\mathbb{R}^n$ 里的.

证明. 固定 $u \in U$, 考虑关于 t 的函数 $f(tu)$, 我们有

$$\begin{aligned} f(u)-f(0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(tu)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i}u^i\,\mathrm{d}t \quad \text{(链式法则)} \\ &= \sum_i u^i \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

取 $f_i(u) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i}\,\mathrm{d}t$ 即可 (光滑性容易验证). □

命题 1.3.5. T_pM 可以被 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(i=1,2,\cdots,n)$ 生成, 这组基称为关于坐标卡 φ 的**坐标基**.

证明. 设 $v \in T_pM$, 不妨设 $\varphi(p)=0$. 对任意一个 $f \in C^\infty(M)$, 由引理 1.3.4, 可以将 $(f\circ\varphi^{-1})(u)$ 写成

$$(f\circ\varphi^{-1})(0) + \sum_i u^i(f_i\circ\varphi^{-1})(u) \tag{1.3.4}$$

设 x^i 定义如引理 1.3.2, 那么可以将 (1.3.4) 写成

$$f(p) + \sum_i x^i f_i \tag{1.3.5}$$

注意到对常函数 c 总有

$$v(c) = v(1\cdot c) = 1\cdot v(c) + cv(1) = 2v(c)$$

从而 $v(c)=0$, 那么将 v 作用在 (1.3.5) 有

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_i v\left(x^i f_i\right) \\ &= \sum_i \left(x^i(p)v(f_i) + f_i(p)v(x^i)\right) \end{aligned}$$

注意到 $x^i(p) = \pi^i\circ\varphi(p) = 0$, 且由引理 1.3.4 可知

$$f_i(p) = (f_i\circ\varphi^{-1})(0) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$$

所以有

$$v(f) = \sum_i v(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

注意到上式对所有 f 均成立, 所以有

$$v = \sum_i v(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \tag{1.3.6}$$

□

推论 1.3.6. n 维流形上任意一点处的切空间维度为 n.

评注 1.3.7. 在一些文献中坐标卡的逆映射 φ^{-1} 会被称为**局部坐标系**, 而

$$c^i(t) = \varphi^{-1}(0, \cdots, \overset{\text{第}i\text{个分量}}{t}, \cdots, 0)$$

被称为**坐标曲线**, 尤其是古典微分几何教材喜欢用这个术语. 那么就有

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = (f \circ c^i)'(0)$$

(依然假设 $\varphi(p) = 0$). 当局部坐标系成为 $\mathbb{R}^n$ 的恒等映射时, 坐标曲线变成了坐标轴, $(f \circ c^i)'$ 刚好就是对第 i 个分量的偏导数, $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 与数学分析中使用的偏导记号便一致了. 因此我们便选择了这样一个记号来表示切空间的基.

我们给出一个很重要的构造.

定义 1.3.8. 定义 $TM := \{(p, v) |\ p \in M, v \in T_pM\}$, 或者用不交并这个更有代数味道的记号写作 $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$, 称为 M 的**切丛**. 切丛的**自然投影映射** $\pi : TM \to M$ 将每个 (p, v) 映为 p.

命题 1.3.9. n 维流形 M 的切丛 TM 是一个 $2n$ 维流形.

证明. 我们承认 TM 是一个拓扑流形. 设 M 有微分结构 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, 我们按照如下方式赋予 TM 微分结构: 对一个坐标卡 (U, φ), φ 的坐标基诱导了一个 T_pM 到 $\mathbb{R}^n$ 的向量空间同构 $I_\varphi : T_pM \to \mathbb{R}^n$. 取开覆盖 $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \varphi_\alpha \times I_{\varphi_\alpha})\}_{\alpha \in A}$, 我们证明它是相容的, 从而给出了 TM 的一个微分结构. 对 $(U_1 \times \mathbb{R}^n, \varphi_1 \times I_{\varphi_1})$ 与 $(U_2 \times \mathbb{R}^n, \varphi_2 \times I_{\varphi_2})$, 容易验证

$$(\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = \varphi_1^{-1} \times I_{\varphi_1}^{-1}$$

从而转移函数为

$$(\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

这显然是光滑的, 因此 φ_1, φ_2 是相容的. 由 φ_1, φ_2 的任意性可知命题成立.

因此 φ_1, φ_2 是相容的. 由 φ_1, φ_2 的任意性可知命题成立. □

这应该是我们遇到的第一个与常见的曲线曲面相去甚远的流形.

评注 1.3.10. 命题 1.3.9 中给出的坐标卡 $\varphi \times I_\varphi$ 使得 TM 在局部同胚于 $V \times \mathbb{R}^n$, 这叫做 TM 的**局部平凡化**. 实际上这也是我们对切丛的直观: 每一点处长出了一根由切空间构成的纤维.

关于切丛的一个简单的性质是:

命题 1.3.11. *无论 M 是否可定向, 切丛总是可定向的.*

证明. 我们考虑命题 1.3.9 证明中的转移函数的行列式, 有

$$\det \mathrm{d}((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = \det \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \det \mathrm{d}(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

而对 $(u^1, \cdots, u^n)$, 我们有 $I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, \cdots, u^n) = \sum_j u^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p$, 而由 (1.3.6) 可知

$$I^i_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, \cdots, u^n) = \sum_i u^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_p$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(I^i_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1^{-1}}) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

那么 $\det \mathrm{d}(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1}) = \det \left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{i,j}$. 又注意到

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^i} = \frac{\partial(\pi^i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)}{\partial u^j}$$

所以 $\left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{i,j} = \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$, 因此

$$\det \mathrm{d}((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = (\det \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}))^2 > 0$$

□

微分映射

我们把光滑性推广到任意两个流形间的映射上.

定义 1.3.12. 设 f 是微分流形 M, N 间的映射 $f : M \to N$, 如果对 M, N 的微分结构 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ 中任意两个坐标卡 φ, ψ 有 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的, 那么称 f 是光滑的.

显然定义 1.3.12 与定义 1.2.5 是相容的.

对流形间的光滑映射, 我们没有办法像数学分析中那样把微分定义为最佳逼近的线性映射. 不过我们可以像上一小节那样考察一下切向量的行为. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, f 在 x 点处的微分是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个线性映射, 在各自的标准正交基下可以表示为一个 $m\times n$ 矩阵 L_x. L_x 把一个 $v\in\mathbb{R}^n$ 映到一个 $L_xv\in\mathbb{R}^m$. 考虑一个 $\mathbb{R}^m$ 上的光滑函数 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, 设它的梯度表示为行向量 N, 那么 g 在 $f(x)$ 点处沿 L_xv 方向的方向导数为

$$\langle \operatorname{grad} g(f(x)), L_xv\rangle = NL_xv$$

由链式法则可知 NL_x 是 $g\circ f$ 在 x 点处的微分, 因此 L_xv 在一个函数上的作用相当于 v 在这个函数复合 f 之后的函数上作用. 把这个过程整理一下, 我们可以类比地给出流形间光滑映射的微分:

定义 1.3.13. 设 $f:M\to N$ 是光滑映射, 那么 f 在 $p\in M$ 点处的微分 $f_*|_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ 将 $v\in T_pM$ 映为 $f_*|_p(v)$, $f_*|_p(v)$ 在 $C^\infty(N)$ 上的作用为 $f_*|_p(v)(g)=v(g\circ f)$.

显然微分映射是线性映射.

记号 1.3.14. 微分映射传统的记号是 $\mathrm{d}f_p$ 或者 $\mathrm{d}f(p)$, 但现在更多会写成我们定义的这个形式. 具体为什么我们留到后面再讲. 和之前一样, 如果 p 点是明确的, 我们就不会写脚标.

我们接下来证明关于微分映射最重要的结论:

定理 1.3.15 (链式法则). *设流形 M,N,P 间有光滑映射 $f:M\to N, g:N\to P$, $h=g\circ f$. 点 $p\in M, q\in N, r\in P$ 满足 $f(p)=q, g(q)=r$, 那么一定有*

$$h_*|_p = g_*|_q\circ f_*|_p$$

换言之, 图表

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & P \end{tikzcd}$$

交换蕴含以下图表交换

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "h_*"'] & T_pN \arrow[d, "g_*"] \\ & T_pP \end{tikzcd}$$

证明. 对 $v \in T_pM$ 与 $\psi \in C^\infty(P)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
(g_* \circ f_*)(v)(\psi) &= g_*(f_*v)(\psi) \\
&= f_*(v)(\psi \circ g) \\
&= v(\psi \circ g \circ f) \\
&= v(\psi \circ h) \\
&= h_*(v)(\psi)
\end{aligned}
$$

由 v 与 ψ 的任意性即知 $g_* \circ f_* = h_*$. □

作为链式法则的第一个应用, 我们来证明之前被搁置的一个问题, 那就是微分流形维度的良定义性.

命题 1.3.16. *设开集 $U \subset \mathbb{R}^m$ 与开集 $V \subset \mathbb{R}^n$ 微分同胚, 即存在一个双射 $\varphi : U \to V$ 使得 φ, φ^{-1} 都是 C^∞ 的, 那么一定有 $m = n$. 特别的, 微分流形的维度是良定义的.*

证明. 由于 $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi \circ \varphi^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$, 在某一点取微分可以得到

$$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$$

从而 φ_* 同时有左右逆, 是向量空间之间的同构, 那么一定有 $m = n$.
对一个微分流形 M 而言, M 的维度定义为与微分结构中的一个开集 U 同胚的 $\varphi(U)$ 所在欧氏空间的维度. 而对两个不同的 $\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)$ 而言, 两个方向的转移函数构成了它们 (的一部分) 之间的微分同胚, 按照上面的论证, 它们所在的欧氏空间维度一定是一样的. 综上所述, 微分流形的维度是良定义的. □

评注 1.3.17. 实际上命题 1.3.16 的证明用到的只是数学分析课程中证明过的欧氏空间的链式法则, 并没有用到流形上的链式法则. 不过由于想法是一样的, 所以我们仍然在这里陈述它的证明.

评注 1.3.18. 最后我们解释一下 f_* 这个记号. 首先, 我们更倾向使用 $f_*|_p$ 而不是 $\mathrm{d}f(p)$ 的一个简单的理由是前者更紧凑一些, 在写微分映射作用在切空间上的向量时会节约很多空间. 同时, d 更多表示外微分映射, 尽管在外微分意义下确实有 $\mathrm{d}f = f|_*$, 但是 d 的用途更广一些.

其次, 从范畴论的角度来看, 微分对复合映射的作用 $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ 表现得很像*共变函子*, 而一类很常见的共变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \quad) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 作用在 $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ 上得到的态射一般会记为 h_*. 选用这个记号可以一定程度上体现链式法则代表的*共变性*.

此外, 在微分几何传统中, f_* 也会被称为*推前映射*, 也许是因为 f_* 的箭头是向前的. 之后我们还会遇到一类与微分对偶的映射, 被称为*拉回映射*, 记作 f^*, 它的箭头是向后的. 拉回映射传统上就一直使用 f^* 作为记号, 因此用 f_* 表示推前映射也是恰当的.

最后, 我们必须指出, 虽然我们提到了共变性, 推前, 拉回这些词语, 但是他们和范畴论中一样的词语含义并不一样. 它们的相似性只是**巧合**, 这些巧合让我们采用了相似的记号, 但并不意味着可以把范畴论的观点生搬硬套进来.

1.4 子流形

子结构在数学中随处可见, 从最简单的子集 (作为一切基础), 到代数中的子群, 子空间 (先是子集, 并且在大集合的运算下仍然具有相同的代数结构), 大多具有 "子集-相同结构" 这一模式. 因此子流形大约就是大流形中一个自己是流形的子集. 但我们还需要更多的一些限制条件, 以下我们从*浸入*, *嵌入*的概念开始介绍.

定义 1.4.1. 映射 $f: M \to N$ 被称为 M 到 N 的一个**浸入**, 如果对任意 $p \in M$ 都有 $f_*|_p$ 是单射. 如果进一步地, f 是 M 与赋予了 N 的子空间拓扑的 $f(M)$ 之间的微分同胚, 那么 f 被称为是 M 到 N 的一个**嵌入**.

例 1.4.2. (1) 考虑最简单的的流形 $\mathbb{R}$, 以及映射

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到 $\varphi_*|_t = (-\sin t, \cos t)$, 由于 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, 所以总有 $\varphi_* \neq 0$, 从而 φ_* 是满秩的. 因此 φ 是一个浸入. 注意到 φ 不是双射, 从而不是一个嵌入.

(2) $\mathbb{R}^3$ 中的曲面片. 我们用古典的语言来说这件事. 设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集 (从而自然是一个 2 维流形), 映射 $r: U \mapsto \mathbb{R}^3$ 在某一点 p 处的两个偏导数 $r_1(p), r_2(p)$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量 (r_i 表示对第 i 个分量求偏导). 如果对任意 $p \in U$ 都有 $r_1(p) \times r_2(p) \neq 0$, 那么 r 就是一个浸入, 并得到了 $\mathbb{R}^3$ 中的一块曲面片. 如果要解释一下的话, $r_1(p), r_2(p)$ 是 $T_pU \cong \mathbb{R}^2$ 的标准基在 r_* 下的像, 而 $r_1(p) \times r_2(p) \neq 0$ 保证了他们线性无关, 所以 r 是一个浸入.

(3) ∞ 符号: $r(t) = (2\sin t, \sin(2t))$, $t \in (-\pi, \pi)$. 显然 r_* 总是非零的, 所以 r 是一个浸入. 并且我们也能发现 r 是一个单射. 然而 r 不是一个嵌入: 作为 $\mathbb{R}$ 的开子集, $(-\pi, \pi)$ 不是一个紧集, 但它在 r 下的像在 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑下是一个紧集, 所以 r 不是一个同胚. 有时候这个曲线也被称为*双纽线*.

figures/lemniscate.pdf

图 1.4: “∞” 或双纽线

按照我们之前的想法, 子流形是大流形的一个子集, 而且自己也是一个流形. 不过我们要求这个子集是要在大流形的拓扑下成为流形, 不然会出现双纽线那样自交等各种情况. 所以我们利用嵌入给出子流形的定义:

定义 1.4.3. 设微分流形 M, N 满足 $M \subset N$, 如果包含映射 $\iota : M \to N$ 是一个嵌入, 那么就称 M 为 N 的**子流形**. M 在 N 中的**余维度**定义为 $\operatorname{codim} M = \dim N - \dim M$.

对曲线曲面论而言, 最重要的是欧氏空间子流形, 尤其是曲线与超曲面. 我们引用 [8, 8.7 节定义 1] 中引入 k-维曲面所用的定义.

定理 1.4.4. *设 $S \subset \mathbb{R}^n$, 赋予了 $\mathbb{R}^n$ 的子空间拓扑. 如果对每一点 $x_0 \in S$ 都存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个邻域 $U(x_0)$ 以及一个微分同胚 $\varphi : U(x_0) \to I^n$ 将这个邻域映为 $\mathbb{R}^n$ 中的 n-维单位立方体 $I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1, i = 1, \cdots, n\}$, 并且满足集合 $S \cap U(x_0)$ 的像是 $\mathbb{R}^n$ 中由关系 $t^{k+1} = \cdots = t^n = 0$ 定义的 k-维平面在 I^n 中的部分, 那么 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k-维子流形.*

证明. 这基本上是把流形的定义说了一遍. 由于 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 所以自动是第二可数的 Haussdorff 空间. 由子空间拓扑可知 $S \cap U(x_0)$ 是 x_0 在 S 中的一个邻域, 按照假设它同胚于

$$I^n \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1, i = 1, \cdots, k, t^{k+1} = \cdots = t^n = 0\}$$

而这个集合又同胚于 $\mathbb{R}^k$ 中的标准单位立方体 I^k, 从而 x_0 的邻域同胚于 $\mathbb{R}^k$ 中的开集. 因此 S 是一个 k 维拓扑流形. 而又由于假设, 所有同胚都是微分同胚, 所以转移函数都

是光滑的. 因此 S 有微分结构, 是一个微分流形. 由于 S 的拓扑即为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间拓扑, 所以 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子流形. □

定义 1.4.5. 欧氏空间中的**曲线**指的是维度为 1 的子流形. 欧氏空间中的**超曲面**指的是余维度为 1 的子流形, 特别地, 3 维欧氏空间中的超曲面会被直接称为**曲面**.

实践中我们更多处理的是例 1.4.2 (2) 中的参数化曲面片. 对一般的浸入来说, 我们没有办法说明它是不是嵌入, 从而也不能说明曲面片是不是流形. 但是以下的定理可以保证在局部上每个浸入都是嵌入, 从而每一个曲面片在局部都是一个 2 维子流形, 或者说曲面.

定理 1.4.6. *设 M, N 是微分流形, $f : M \to N$ 是光滑映射. 那么 f 是一个浸入当且仅当 M 中的每一个点都有一个邻域 U 使得 $f|U : U \to N$ 是一个嵌入.*

证明. [4, 定理 4.25]. □

1.5 向量场

向量场是我们研究流形的主要工具之一, 本节我们讨论一些简单的有关向量场的性质.

向量场与微分映射

定义 1.5.1. 设 $X : M \to TM$ 是一个光滑映射, 如果有 $\pi \circ X = 1_M$ 成立, 其中 1_M 是 M 到自身的恒等映射, 那么称 X 是 M 上的一个**向量场**.

评注 1.5.2. 我们讲一下这个定义是怎么回事. 向量场实际上是希望在流形每一点的切空间处光滑地指派一个向量. 为了描述光滑, 我们会直接定义一个光滑的映射 $X : M \to TM$, 同时为了让点 p 处的向量 X_p 在 T_pM 中, 我们让 $\pi \circ X = 1_M$ 成立. 如果套用传统的定义来说的话, 我们会取定一个坐标卡 (U, φ), 对任意一点 $p \in U$, 我们指派一个切向量:

$$p \mapsto \left(p, \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{1.5.1}$$

其中 a^i 是 M 上的函数. 那么取 TM 的坐标卡 $(U \times \mathbb{R}^n, \varphi \times \varphi_*)$ 可知

$$\begin{aligned}
&(\varphi \times \varphi_*) \circ X \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\
&u \mapsto (u, (a^1 \circ \varphi^{-1})(u), \cdots, (a^n \circ \varphi^{-1})(u))
\end{aligned}$$

所以向量场[4] X 是光滑的当且仅当每个坐标分量函数是光滑的. 同时, (1.5.1)
也给出了一个向量场在某组坐标卡下的具体表示.

记号 1.5.3. 我们用 $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M 上全体向量场的集合, 它是一个 $\mathbb{R}$-向量空间. 按照显然定义的运算, 它也是一个 $C^\infty(M)$-模 (一种在环上的满足类似向量空间运算律的结构, 之后会在定义 2.1.1 正式遇到它).

例 1.5.4. 对给定的坐标卡 (U,φ), $\dfrac{\partial}{\partial x^1},\dfrac{\partial}{\partial x^2},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}$ 是 $\mathfrak{X}(U)$ 中的 n 个向量场, 它们在每点 p 处的取值构成了 T_pU 的一组基. 这样的一组向量场被称为一组**局部自然标架**. 如果存在 $\mathfrak{X}(M)$ 中的 n 个向量场满足它们在每点处的取值都构成切空间的一组基, 那么这组向量场称为 M 的一组**标架**, 同时我们称切丛 TM 是**平凡的**. 容易注意到, 平凡的切丛 TM 总是同胚于 $M\times\mathbb{R}^n$, 所以我们会将其称为是平凡的. 这也再次说明了评注 1.3.10 中将坐标卡称为局部平凡化的理由.

类似光滑函数, 我们也可以扩大一个局部的向量场.

命题 1.5.5 (向量场扩充引理)**.** *设 $p\in M$, 光滑向量场 X 定义在 p 的一个邻域 U 上, 那么存在 p 的一个邻域 $V\subset U$ 与 $\widetilde{X}\in\mathfrak{X}(M)$ 使得 $\widetilde{X}|_V=X|_V$.*

证明. 证明与命题 1.2.17 基本相同. 取 p 的邻域 $V\subset U$, 与合适的冲击函数 ψ, 定义

$$\widetilde{X}_q=\begin{cases}\psi(q)X_q, & q\in U\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

即可. □

向量场的一个特点是可以像微分一样作用在光滑函数上. 我们知道 p 点处的一个切向量 X_p 将一个光滑函数映成一个数, 那么一个向量场 X 在每一点都将一个光滑函数映成一个数, 因此我们有

命题 1.5.6. *设 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 那么 X 诱导了 $C^\infty(M)$ 到自身的一个映射. 如果把 f 在映射下的像记作 Xf, 那么这个映射定义为*

$$Xf(p)=X_p(f)$$

[4]按照我们给 "向量场" 一词的定义, 这个映射必须是光滑的. 但考虑到很多时候我们会先指派切向量再考虑光滑性, 所以有时候 "向量场" 一词也会指不具有光滑性 (甚至是连续性) 的截面映射 $X:M\to TM$.

证明. 只需验证 Xf 是光滑的. 而只需注意到在局部设 $X=\sum_i a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么有

$$Xf=\sum_i a^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

从而由 a^i 的光滑性与光滑函数的线性性可知 Xf 是光滑的. □

反过来, 我们还有一个判别方法:

命题 1.5.7. *如果 Y 是一个 $C^\infty(M)$ 到自身的映射, 那么 Y 是 $\mathfrak{X}(M)$ 中的向量场按命题 1.5.6 诱导出来的当且仅当它满足 Leibniz 法则, 即对任意 $f,g\in C^\infty(M)$ 有 $Y(fg)=fYg+gYf$.*

证明. 如果 Y 是向量场诱导出来的, 那么它显然满足 Leibniz 法则. 如果 Y 满足 Leibniz 法则, 考虑等式两侧在 p 点处的取值, 可知此时 "Y 作用 + 赋值 p" 相当于 T_pM 中的一个元素. 收集所有的元素得到一个 (不一定连续的) 向量场 X, X 可以诱导出 Y. 我们还需要说明 X 是光滑的. 设在局部有 $X=\sum_i a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么有

$$Xx^i=a^i,\ i=1,2\cdots,n$$

由假设, X 将光滑函数映成光滑函数, 所以 a^i 都是光滑的, 从而 X 是光滑的. □

Lie 括号

对于两个向量场 X,Y 与光滑函数 f, 我们知道 $XYf=X(Yf)$ 仍然是一个光滑函数. 但 XY 的作用是向量场诱导出来的吗? 我们来验证 XY 是否满足 Leibniz 法则. 注意到

$$\begin{aligned}XY(fg)&=X(fYg+gYf)\\&=fXYg+gXYf+XfYg+XgYf\end{aligned}\tag{1.5.2}$$

从而 XY 是不满足 Leibniz 法则的. 不过我们考虑反过来的 YX:

$$YX(fg)=fYXg+gYXf+XfYg+XgYf\tag{1.5.3}$$

那么只需要让 (1.5.2) 与 (1.5.3) 两式相减, 就可以发现 $XY-YX$ 的作用满足 Leibniz 法则. 因此我们有

命题 1.5.8. *对 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $XY-YX$ 的作用可以由向量场诱导得到, 这个向量场记为 $[X,Y]$, 称作 X,Y 的* ***Lie 括号***.

例 1.5.9. (1) 对局部的自然标架 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$, 总有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

这实际上是反映了求偏导可以交换顺序.

(2) 对于两个向量场 $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 我们计算它们的 Lie 括号有

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \sum_i \left(\sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) b^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_i \left(\sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i,j} a^j \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right) - \sum_{i,j} b^j \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + a^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j} \left(a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

通过这个表达式也可以证明 $[X,Y]$ 是一个向量场. 实际操作中, 我们会更多用这个表达式来计算 Lie 括号.

命题 1.5.10 (Lie 括号的性质). *对任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ 有*

1. *(双线性性) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 有*

$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y]$$

2. *(反对称性)*

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

3. *(Jacobi 恒等式)*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

4. *对 $f, g \in C^\infty(M)$ 有*

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + (fXg)Y - (gYf)X$$

证明. 这些都是直接的计算, 也可以参考 [4，命题 8.28]. □

命题 1.5.10 的前 3 条性质可以用来公理化地定义 *Lie* 代数, 向量场与 Lie 括号也是我们见到的第一个 Lie 代数. 我们在此就不展开了.

子流形与向量场

除了流形自身上的向量场以外, 我们还要对子流形再定义一种向量场.

定义 1.5.11. 设 M 是 $\widetilde{M}$ 的子流形, $\widetilde{M}$ 中一个**沿** M **的向量场**为一个光滑映射 $X: M \to T\widetilde{M}$, 满足 $\pi \circ X = 1_M$. $\widetilde{M}$ 中所有沿 M 的向量场的集合记为 $\Gamma(T\widetilde{M}|_M)$[5].

评注 1.5.12. "沿 M 的向量场" 和 "M 上的向量场" 是有区别的. 对前者而言, 每点 p 处的切向量可以在 $T_p\widetilde{M}$ 中取值, 而后者的切向量只能在 T_pM 中取值. 例如对 $\mathbb{R}^n$ 的子流形 S 而言, $\Gamma(T\mathbb{R}^n|S)$ 中的元素可以在 $\mathbb{R}^n$ 中取值, 而 $\mathfrak{X}(S)$ 中的元素 (局部上) 只能在 $\mathbb{R}^n$ 的某个子空间里取值.

我们考虑一下 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面 S. 由于 $\operatorname{codim} S = 1, T_pS \oplus T_pS^{\perp} = \mathbb{R}^n$, 可知 $\dim T_pS^{\perp} = 1$. 从而每一点处存在两个单位法向量, 适当地选取其中一个, 我们希望可以得到 S 的**单位法向量场**. 但这并不总是能够做到的, 事实上, 这与我们之前提到的流形的定向有关.

定理 1.5.13. *$\mathbb{R}^n$ 中的超曲面 S 上存在单位法向量场的充分必要条件是 S 可定向.*

证明. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的两组基, 如果它们的过渡矩阵行列式为正, 那么称它们定向相同. 否则称为定向相反. 固定 $\mathbb{R}^n$ 的一组规范正交基 $\mathcal{O}$.
必要性. 假设 N 是单位法向量场. 考虑一组覆盖了 S 的图册 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, 并考察 U 中标架场 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 的定向. 由于每一点处的标架到 $\mathcal{O}$ 的过渡矩阵行列式是连续的, 所以 U 中标架场的过渡矩阵行列式总是恒正或恒负, 从而局部标架场的定向是良定义的. 此时如果 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 与 $\mathcal{O}$ 定向不同, 那么将 φ_α 复合一个对称变换 $(u^1, u^2, \cdots, u^n) \mapsto (-u^1, u^2, \cdots, u^n)$, 得到的新坐标卡下的标架场 $\left\{-\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}, N\right\}$ 便与 $\mathcal{O}$ 定向相同. 因此, 存在一组图册使得每个坐标卡的局部标架场定向都与 $\mathcal{O}$ 相同. 对坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, 设它们的标架场到 $\mathcal{O}$ 的过渡矩阵分别为 A, B, 考虑这两个标架场之间的过渡矩阵, 注意到 N 是共同的一个向量, 有

$$
\begin{aligned}
0 &< \det A \det B^{-1} \\
&= \det \begin{bmatrix} (\varphi_\alpha)_* \circ (\varphi_\beta^{-1})_* & \\ & 1 \end{bmatrix} \\
&= \det(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_*
\end{aligned}
$$

[5]这个记号来自于向量丛的截面.

所以 S 可定向.

充分性. 取定 S 的一个定向与决定这个定向的图册. 对 $p \in S$, 我们选取一个包含 p 的坐标卡 (U,φ), 并在 $T_pS^{\perp}$ 中选择一个单位向量 N_p 使得标架 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p, N_p\right\}$ 与 $\mathcal{O}$ 定向相同. 我们证明 N_p 是良定义的. 如果 (V,ψ) 是另一个坐标卡, 设 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p, N|_p\right\}$ 到 $\mathcal{O}$ 的过渡矩阵为 A, $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}\right|_p, N|_p\right\}$ 到 $\mathcal{O}$ 的过渡矩阵为 B. 那么有

$$\begin{aligned}\det B &= \det \begin{bmatrix} (\psi \circ \varphi^{-1})_* & \\ & 1 \end{bmatrix} \det A \\ &> 0\end{aligned}$$

因此是同向的, 从而 N_p 有良定义. 我们最后需要说明 N 是光滑的. 设局部标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right\}$ 在 $\mathcal{O} := \{e_1, \cdots, e_n\}$ 下的坐标为

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j a_i^j e_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

又设 $N = \sum\limits_i N^i e_i$, 那么由垂直关系知 $(N^1, N^2, \cdots, N^n)$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n & = & 0 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n & = & 0 \\ \cdots\cdots & & \\ a_{n-1}^1 x_1 + a_{n-1}^2 x_2 + \cdots + a_{n-1}^n x_n & = & 0 \end{cases}$$

的解, 可以被代数函数表示, 所以一定是光滑的. □

这是我们翻来覆去嚼了很多定义之后遇到的第一个真正的 "定理".

作为本章的结束, 我们来讨论在第 1.2 节中间的问题, 即证明 Möbius 带是不可定向的.

例 1.5.14. Möbius 带是把一个纸条扭转一次, 然后粘合两端得到的. 比较自然的方法是使用商拓扑 (也叫 "手术"), 但我们在这里直接一些, 把 Möbius 带看成直纹面写参数方程. 我们有

$$r(u,v) = a(u) + vl(u)$$

其中

$$a(u) = a(\cos 2u, \sin 2u, 0)$$

$$l(u) = a(u)\cos u + (0, 0, a\sin u)$$
$$u \in [0, \pi), v \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

假如 Möbius 带可定向, 那么它有单位法向量场 N, 不妨设 $(a, 0, 0)$ 处取值为

$$\begin{aligned}\frac{r_u(0,0) \times r_v(0,0)}{|r_u(0,0) \times r_v(0,0)|} &= \frac{(0, 2a, 0) \times (a, 0, 0)}{2a^2} \\ &= (0, 0, -1)\end{aligned}$$

(回忆例 1.4.2 (2) 中表示偏导数的记号) 考虑 N 在准线 $a(u)$ 上的限制, 按照连续性, 对任意 $0 \leq t < \pi$ 都有

$$\begin{aligned}N_{a(t)} &= \frac{r_u(t) \times r_v(t)}{|r_u(t) \times r_v(t)|} \\ &= (r_u(t) \times r_v(t))^0\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pi} N_{a(t)} &= \left(\lim_{t\to\pi} r_u(t) \times \lim_{t\to\pi} r_v(t)\right)^0 \\ &= ((0, 2a, 0) \times (0, -a, 0))^0 \\ &= (0, 0, 1) \\ &\neq N_{a(0)}\end{aligned}$$

与连续性矛盾. 所以 Möbius 带不可定向.

第 2 章 多重线性代数

本章介绍之后的笔记中需要用到的代数内容. 我们的讨论比较偏向代数本身, 如果读者只关心代数工具在几何上的应用的话, 不妨跳过一些证明, 尤其是有许多交换图的那些.

本章中所有的环都有单位元.

2.1 模与对偶空间

模的定义与简单性质

定义 2.1.1. 一个环 R 上的**左模**由一个 Abel 群 M 与 R 到 M 的自同态群的一个同态构成. 换言之, 任意一个 $r \in R$ 都诱导了一个 $M \to M$ 的映射, 对 $m \in M$, m 在 r 诱导的映射下的像记为 rm. 我们要求这些映射满足如下公理:

1. 对 $r \in R$, $m, n \in M$ 有 $r(m+n) = rm + rn$;
2. 对 $r, s \in R$, $m \in M$ 有 $(r+s)m = rm + sm$;
3. 对 $r, s \in R$, $m \in M$ 有 $(rs)m = r(sm)$;
4. 对任意 $m \in M$ 有 $1m = m$.

定义 2.1.2. 一个环 R 上的**右模**由一个 Abel 群 M 与 R 到 M 的自同态群的一个反同态构成. 即将定义 2.1.1 中的公理 3 变为 $(rs)m = s(rm)$.

评注 2.1.3. 如果 R 是交换的, 那么左模和右模是一样的, 称为**双侧模**或者直接简称为**模**. 此外, 我们也可以把右模的像写成 mr, 那么 "数乘的结合公理"[1]可以写成很好看的形式

[1]打引号是因为我们只对向量空间说数乘, 模一般说作用.

$m(sr) = (ms)r$. 我们接下来基本不会遇到非交换环上的模, 所以我们不再区分左右模. 如果环给定了, 有时我们也不会特别指明环.

类似于向量空间之间的同态, 我们也有模之间的同态:

定义 2.1.4. 设 M, N 是 R 上的模, f 是 $M \to N$ 的 Abel 群同态, 如果 f 满足对任意 $r \in R$ 与 $m \in M$ 有 $rf(m) = f(rm)$, 那么称 f 是 M 到 N 的一个 **R-同态**. 如果一个 R-同态是一个双射, 那么就将其称为是一个 **R-同构**. 如果两个模 M, N 之间存在一个同构 $f : M \to N$, 那么就称他们是**同构**的, 并记作 $M \cong N$. 一个模到自身的同构叫做**自同构**.

记号 2.1.5. M 到 N 间的全体 R-同态的集合记为 $\operatorname{Hom}_R(M, N)$, 当 $M = N$ 时 $\operatorname{Hom}_R(M, N) := \operatorname{End}_R M$. M 到自身的全体 R-自同构的集合记为 $\operatorname{Aut}_R M$.

例 2.1.6. 模与向量空间有许多类似的性质. 例如对于任意 $r \in R$ 与 $0 \in M$ 有

$$\begin{aligned} r0 &= r(0+0) \quad \text{(Abel 群公理)} \\ r0 &= r0 + r0 \quad \text{(第 1 条模公理)} \\ \implies 0 &= r0 \quad \text{(Abel 群消去律)} \end{aligned}$$

也就是说有 $r0 = 0$. 同理也有对任意 $m \in M$ 有 $0m = 0$. 但与向量空间不同的是, 在模上 $ra = 0$ 并不能推出 $a = 0$. 例如所有 Abel 群都是 $\mathbb{Z}$-模 (作用方式为 $na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n\text{次}}$), 那么对有限 Abel 群 G 来说, Lagrange 定理保证了对任意 $g \in G$ 都有 $|G|g = 0$, 而 g 不一定是 0.

对模的同态 $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$, 我们也类似线性映射定义

$$\begin{aligned} \ker f &:= \{m \in M |\ f(m) = 0\} \\ \operatorname{im} f &:= \{n \in N |\ \exists m \in M : f(m) = n\} \end{aligned}$$

与线性映射相同, 我们仍有 "f 是单射当且仅当 $\ker f = 0$" 与 "f 是满射当且仅当 $\operatorname{im} f = N$" 这两条命题成立.

子模的定义是自然的:

定义 2.1.7. 设 M 是 R 上的模, 如果 $N \subset M$ 关于加法是 M 的子群, 并且对任意 $r \in R, n \in N$ 有 $rn \in N$, 那么称 N 是 M 的一个**子模**.

对子模而言, 我们会考虑子模上的商结构. N 是 Abel 加群 M 的子群, 所以存在一个商群 M/N. 但 M/N 上有更多的代数结构:

命题 2.1.8. 记号承定义 *2.1.7*, M/N 有自然的 R-模结构. 即 M/N 是 R-模且有自然 R-同态 $\pi : M \to M/N$, 自然性体现为 π 满足**泛性质**: 如果模同态 $f : M \to P$ 满足 $N \subset \ker f$, 那么存在唯一的 $\overline{f} : N \to P$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & P \\ N \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

证明. 设 π 是商群的自然同态. 对 $\overline{n} \in M/N$, 如果 $\pi(n) = \overline{n}$, 定义 $r\overline{n} = \pi(rn)$. 我们验证良定义性: 设 $\pi(m) = \pi(n)$, 那么一定有

$$\begin{aligned} r\pi(m) - r\pi(n) &= \pi(rm) - \pi(rn) \\ &= r\pi(m-n) \\ &= r0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

容易验证这样定义的作用满足模的公理, 所以 M/N 是一个模, 并且由作用的定义立刻知道 $\pi : M \to M/N$ 是 R-同态. 以下验证泛性质: 设 $f : M \to P$ 满足 $N \subset \ker f$, 定义

$$\overline{f}(\overline{m}) = f(m)$$

如果 $\pi(m) = \pi(n)$, 那么有 $m - n \in \ker f$, 则

$$\begin{aligned} \overline{f}(\pi(m)) - \overline{f}(\pi(n)) &= f(m) - f(n) \\ &= f(m-n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以 $\overline{f}$ 是良定义的. 如果另外存在一个同态 g 满足要求, 那么一定有

$$g(\overline{m}) = f(m) = \overline{f}(\overline{m})$$

对任意 $\overline{m} \in M/N$ 成立. 所以 $g = \overline{f}$, 即 $\overline{f}$ 是唯一的. $\square$

这是我们遇到的第一个泛性质, 之后我们还会遇到很多次.

对偶模与对偶空间

命题 2.1.9. 对 R-模 M, $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ 构成一个 R-模, 称作 M 的**对偶模**.

证明. 对 $f,g\in \mathrm{Hom}_R(M,R)$, 定义

$$(f+g)(m)=f(m)+g(m)$$
$$(-f)(m)=-f(m)$$

那么这样定义的加法使得 $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ 成为 Abel 群; 对 $r\in R$, 定义

$$(rf)(m)=rf(m)$$

容易验证这样定义的作用满足模公理, 从而使得 $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ 成为一个模. □

记号 2.1.10. 当 V 是域 k 上的向量空间时, 习惯上把 $\mathrm{Hom}_k(V,k)$ 记作 V^*, 并称为**对偶空间**.

研究对偶模 (确切地说是反变函子 $\mathrm{Hom}_R(\quad,R)$) 的性质需要深入的代数讨论, 在微分几何中我们更关心对偶空间的性质. 以下我们主要讨论有限维向量空间的对偶空间.

有限维对偶空间的一个基本性质是

命题 2.1.11. $\dim V=\dim V^*<\infty$.

证明. 取 V 的一组基 $(e_1,\cdots,e_n)$, 我们定义 V^* 的**对偶基** $(\theta^1,\cdots,\theta^n)$ 为:

$$\theta^i(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

首先我们验证 $\{\theta^1,\cdots,\theta^n\}$ 线性无关. 如果存在 $c_i\in k(i=1,\cdots,n)$ 使得

$$\sum_i c_i\theta^i=0 \tag{2.1.1}$$

那么将 (2.1.1) 两端作用在 e_j 上, 可以得到 $c_j=0$. 由 j 的任意性可知 $\{\theta^1,\cdots,\theta^n\}$ 线性无关. 其次, 对任意 $v^*\in V^*$, 考虑

$$\sum_i v^*(e_i)\theta^i\in V^* \tag{2.1.2}$$

(2.1.2) 与 v^* 对 $(e_1,\cdots,e_n)$ 中每个元素的作用都是一样的, 那么它们作为线性映射是相等的, 从而 v^* 可以被 $(\theta^1,\cdots,\theta^n)$ 线性表示. 因此 $(\theta^1,\cdots,\theta^n)$ 是 V^* 的一组基. □

对偶也可以应用在线性映射上:

定义 2.1.12. 对 $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, 定义它的**对偶映射**为

$$\begin{aligned} f^*: W^* &\to V^* \\ w^* &\mapsto w^* \circ f \end{aligned}$$

注意到对偶映射把箭头反了过来. 对偶映射还有一个有趣的性质:

命题 2.1.13. 设 $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ 在 V, W 各自的一组基下的矩阵为 A, 那么 f^* 在这两组基的对偶基下的矩阵为 $A^\top$.

证明. 对任意一个 $w^* \in W$, 设它在 W 的对偶基下的坐标为列向量 Q. 那么由 (2.1.2) 式可知, 它作为一个线性映射在 W 的基下的矩阵为 $Q^\top$. 因此 w^* 在 f 作用下的像在 V 的基下的矩阵为 $Q^\top A$, 那么 $f^*(w^*)$ 在 V 的对偶基下的坐标为 $A^\top Q$. 从而 f^* 在对应对偶基下的矩阵为 $A^\top$. □

命题 2.1.11 保证了 V 与 V^* 总是同构的, 但这个同构并不是自然的: "自然" 意味着这个同构应当不依赖于基的选取, 或者后面我们也会给它另一个严格的定义. 再次应用命题 2.1.11 可以知道 V 和 V^{**} 也是同构的, 此时它们之间存在自然的同构映射了.

命题 2.1.14. 任意一个有限维向量空间 V 与它对偶空间的对偶空间 V^{**} **自然地**同构. 具体而言, 对任意 V, 存在同构 $\iota_V: V \to V^{**}$, 满足对任意 $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ 有图表

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_V"'] & W \arrow[d, "\iota_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd} \tag{2.1.3}$$

交换.

证明. 我们定义

$$\begin{aligned} \iota_V(v): V^* &\to k \\ a^* &\mapsto a^*(v) \end{aligned}$$

我们证明这是一个同构. 设 $v \in \ker \iota_V$, 那么对任意 $a^* \in V^*$ 都有 $a^*(v) = 0$. 如果 $v \neq 0$, 定义

$$b^*(w) = \begin{cases} l, & w = lv \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

容易验证 $b^* \in V^*$, 从而产生矛盾, 一定有 $v = 0$. 因此 ι_V 是单射, 结合 $\dim V = \dim V^*$ 可知 ι_V 是同构. 我们接下来证明映射族 $\{\iota_V\}_{V \in \mathsf{finVect}_k}$ 的自然性[2]. 对 $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ 与 $v \in V$, 我们有 $\iota_W \circ f(v) : W^* \to k$

$$\begin{aligned} w^* &\mapsto w^*(f(v)) \\ &= (f^*(w^*))(v) \end{aligned}$$

以及 $f^{**} \circ \iota_V(v) : W^* \to k$

$$\begin{aligned} w^* &\mapsto (\iota_V(v) \circ f^*)(w^*) \\ &= \iota_V(v)(f^*(w^*)) \\ &= f^*(w^*)(v) \end{aligned}$$

因此图表 (2.1.3) 交换. 综上可知 V 与 V^{**} 自然同构. $\square$

2.2 自由模与张量积

我们在这一节描述我们要用到的最重要的代数工具: 张量积. 第一小节自由模会提供证明张量积存在所需要的工具, 并让我们熟悉泛性质的语言与相应的证明手法. 在第二小节张量积中, 我们会模仿前一小节使用的语言与证明, 通过泛性质给出张量积的定义与基本性质. 我们还会讨论张量积与向量空间有关的性质. 本节中的 R 是一个交换环, k 是一个域.

自由模

定义 2.2.1. 一个集合 X 上的**自由 R-模**是一个 R-模 FX 与嵌入映射 $\iota : X \to FX$, 满足如下泛性质: 对任意 R-模 M 与映射 $f : X \to M$, 均存在唯一的 R-同态 $\overline{f}$ 使得以下图表交换:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[dr, dashed, "\overline{f}"] & \\ X \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

X 也称为 FX 的**基**.

在证明自由模的存在性之前, 我们先说明自由模的唯一性.

[2]自然性来自范畴论, 是针对的一个共变函子与一族自然态射来说的, 所以会用这样的一个记号

命题 2.2.2. 如果 X 上的自由 R-模存在, 那么它在同构意义下是唯一的.

证明. 假设 $(A,\iota_A),(B,\iota_B)$ 是 X 上的两个自由模, 按照泛性质, 我们可以画出如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, dashed, "\overline{\iota_B}"] & & A \\
& B \arrow[ur, dashed, "\overline{\iota_A}"] & \\
& X \arrow[uul, "\iota_A"] \arrow[u, "\iota_B"] \arrow[uur, "\iota_A"'] &
\end{tikzcd}$$

由泛性质, 存在 R-同态 $\overline{\iota_A},\overline{\iota_B}$ 使得左右的两个小三角形交换. 而上方小三角形的交换性结合唯一性可以给出 $\overline{\iota_A}\circ\overline{\iota_B}=1_A$. 同理 $\overline{\iota_B}\circ\overline{\iota_A}=1_B$, 那么 $\overline{\iota_A},\overline{\iota_B}$ 是同构映射, 从而 A 与 B 同构. □

我们接下来证明自由模存在. 为此, 我们先回忆一下外直和的概念.

定义 2.2.3. 设 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族 R-模, 它们的**外直和**定义为

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha := \left\{ m \in \prod_{\alpha\in A} M_\alpha \,\middle|\, m\text{仅有有限个坐标非}0 \right\}$$

外直和有一个简单的泛性质:

命题 2.2.4. 设 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族 R-模, $\iota_\beta : M_\beta \to \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ 为自然嵌入映射, 即将 $m\in M_\beta$ 映为 $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ 中 β 分量为 m 的元素. 设 N 是一个 R-模, 那么对任意一族同态 $\{f_\alpha : M_\alpha \to N\}_{\alpha\in A}$, 均存在唯一一个同态满足

$$f : \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \to N$$

$$\forall \alpha\in A:\ f\circ\iota_\alpha = f_\alpha$$

证明. 对 $m=\sum_{m_i\in M_i} r_i m_i$ (注意到这是一个有限和), 直接定义

$$f(m)=\sum_{m_i\in M_i} r_i f_i(m_i)$$

容易验证 f 满足要求. 如果还有另一个同态 g 满足条件, 那么有

$$g\left(\sum_{m_i\in M_i} r_i m_i\right)=\sum_{m_i\in M_i} r_i g(m_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m_i \in M_i} r_i (g \circ \iota_i)(m_i) \\
&= \sum_{m_i \in M_i} r_i f_i(m_i) \\
&= f\left(\sum_{m_i \in M_i} r_i m_i\right)
\end{aligned}
$$

从而 $g = f$, 这个同态是唯一的. □

外直和也可以从这个泛性质出发来定义, 证明唯一性等等.

以下证明任意集合 X 上的自由模存在.

证明. 记号承命题 2.2.4. 我们用 X 为 R 加上指标, 得到一族 R-模 (每一个都是 R 的一份复制), 考虑它们的外直和

$$FX = \bigoplus_{x \in X} R_x$$

并定义嵌入映射 $\iota : x \mapsto \iota_x(1)$. 我们定义每个 R_x 到 M 的同态 $f_x(r) = rf(x)$, 那么由命题 2.2.4 可知存在唯一的 $\overline{f}$ 满足对任意 x 都有 $\overline{f} \circ \iota_x = f_x$. 断言 $\overline{f}$ 就是所求的同态, 那么我们需要验证交换性. 对任意 $x \in X$ 都有

$$
\begin{aligned}
(\overline{f} \circ \iota)(x) &= (\overline{f} \circ \iota_x)(1) \\
&= f_x(1) \\
&= 1f(x) = f(x)
\end{aligned}
$$

所以 $\overline{f} \circ \iota = f$, 命题得证. □

例 2.2.5. (1) 设 $\mathcal{B}$ 是向量空间 V 的一组基, 那么 V 就是 $\mathcal{B}$ 上的自由 k-模. 于是 V 由 $\mathcal{B}$ 的基数决定, 即由维度决定. 从而命题 2.2.2 再次给出了 "向量空间同构当且仅当他们维度相等" 这个命题的证明.

(2) 考察以下交换图:

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend left, "F(g\circ f)"] & FY \arrow[r, "Fg"] & FZ \\
X \arrow[u, "\iota_X"] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[r, "g"] & Z \arrow[u, "\iota_Z"]
\end{tikzcd}
$$

通过对每个矩形应用泛性质, 我们可以知道基 X, Y 之间的映射 f 可以决定自由模之间的同态 $Ff : FX \to FY$. 同时, 上方的小三角形说明基决定的同态满足

$F(g\circ f)=Fg\circ Ff$. 这些在线性代数中熟知 (但不一定这样陈述) 的事实有一个高大上的名字叫做自由的函子性.

(3) 按照自由模存在性的证明中同态的构造, 有限维自由模之间的同态也可以使用矩阵来表示, 并通过左乘列向量 (或现在少有人用的右乘行向量) 来进行作用.

张量积

我们也用泛性质来定义张量积. 首先回忆映射 $f:A\times B\to C$ 满足R-双线性指的是对任意 $a,u\in A$, $b,v\in B$ 与 $r\in R$ 有

$$\begin{aligned}
f(a+u,b)&=f(a,b)+f(u,b)\\
f(a,b+v)&=f(a,b)+f(a,v)\\
f(ra,b)&=rf(a,b)=f(a,rb)
\end{aligned}$$

定义 2.2.6. R-模 M,N 的**张量积**是一个 R-模 T 与自然 R-双线性映射 $h:M\times N\to T$, 满足如下泛性质: 对任意 R-模 E 与双线性映射 $f:M\times N\to E$, 存在唯一的 $\overline{f}\in \mathrm{Hom}_R(T,E)$ 使得以下图表交换

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\
M\times N \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"'] & E
\end{tikzcd}$$

类似命题 2.2.2 也有

命题 2.2.7. 如果 R-模 M,N 的张量积存在, 那么它在同构意义下唯一, 记为 $M\otimes_R N$.

证明. 证明是一模一样的, 如果 M,N 有两个张量积 A,B, 考察以下交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, dashed, "\overline{h_B}"] & & A \\
& B \arrow[ur, dashed, "\overline{h_A}"'] & \\
& M\times N \arrow[u, "h_B"] \arrow[uul, "h_A"] \arrow[uur, "h_A"'] &
\end{tikzcd}$$

可以知道 $\overline{h_A}\circ\overline{h_B}=1_A$, 同理也有 $\overline{h_B}\circ\overline{h_A}=1_B$, 因此 A 和 B 是同构的. □

记号 2.2.8. (1) 大部分时候, 如果环是确定的, 我们不会在 $\otimes$ 下写下标.

(2) 对 $m \in M, n \in N$, 我们记 $h(m,n) := m \otimes n$.

我们接下来着手证明张量积的存在性.

证明. 设 (F, ι) 是 $M \times N$ 上的自由模, 又设 S 是 F 中所有形如

$$\begin{gathered}
(a+c,b)-(a,b)-(c,b) \\
(a,b+c)-(a,b)-(a,c) \\
(ra,b)-r(a,b) \\
(a,rb)-r(a,b)
\end{gathered}$$

的元素生成的子模. 考虑 F/S, 设自然同态 $\pi : F \to F/S$. 取自然映射 $h = \pi \circ \iota$, 由 S 的定义立刻可以知道 h 是双线性的. 对于一个模 E 与双线性映射 $f : M \times N \to E$, 考虑以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, "f"'] & & F/S \arrow[ddl, dashed, "\tilde{f}"] \\
& F \arrow[ur, "\pi"'] \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] & \\
& E &
\end{tikzcd}$$

自由模的泛性质保证了存在唯一的 $\overline{f} : F \to E$ 使得左边的小三角形交换. 由于 f 是双线性的, 对任意 a, b, c 一定有

$$\begin{aligned}
\overline{f}((a+c,b)-(a,b)-(c,b)) &= \overline{f}((a+c,b)) - \overline{f}((a,b)) - \overline{f}((c,b)) \\
&= \overline{f}(\iota(a+c,b)) - \overline{f}(\iota(a,b)) - \overline{f}(\iota(c,b)) \\
&= f(a+c,b) - f(a,b) - f(c,b) \\
&= 0
\end{aligned}$$

同理也有

$$\begin{gathered}
\overline{f}((a,b+c)-(a,b)-(a,c)) = 0 \\
\overline{f}((ra,b)-r(a,b)) = 0 \\
\overline{f}((a,rb)-r(a,b)) = 0
\end{gathered}$$

因此一定有 $S \subset \ker \overline{f}$. 那么由商模的泛性质 (命题 2.1.8), 存在唯一的 $\tilde{f} : F/S \to E$ 使得右边的小三角形交换. 于是我们完成了整个证明. $\square$

例 2.2.9. 1. 对任意 R-模, 都有 $M \otimes R \cong M$. 这只需要注意到我们可以取一个双线性的 $h(m,r) = rm$, 并且对所有双线性的 $f : M \times R \to N$, 取一个同态 $\tilde{f}(m) = f(m,1)$, 这样就有

$$f(m,r) = f(rm,1) = \tilde{f}(rm) = (\tilde{f} \circ h)(m,r)$$

满足泛性质. 那么由唯一性就有 $M \otimes R \cong M$.

2. 张量积的行为可以十分诡异, 比如对 Abel 群 ($\mathbb{Z}$-模) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Q}$, 考虑它们的自然映射:

$$\begin{aligned} h(a,b) &= h\left(na, \frac{b}{n}\right) \\ &= h\left(0, \frac{b}{n}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

对任意 $(a,b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ 成立, 所以有 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = 0$. 两个非平凡的模的张量积可以是平凡模.

除了对模本身做张量积, 模的同态之间也可以做张量积.

引理 2.2.10. *对模 M, N, A, B 与同态 $f : M \to A, g : N \to B$, 存在唯一的同态 $f \otimes g$ 使得以下图表交换*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "h_1"] & A \times B \arrow[d, "h_2"] \\ M \otimes N \arrow[r, "f \otimes g"] & A \otimes B \end{tikzcd}$$

并且 $f \otimes g$ 由

$$a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$$

线性延拓给出.

证明. 由于 $h_2 \circ (f \times g)$ 是双线性的, 泛性质保证了 $f \otimes g$ 的存在. $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$ 容易由交换性验证. □

张量积的出现提供了一种模之间的 "乘法", 我们接下来讨论一些张量积简单的类似于乘法的性质.

命题 2.2.11 (交换律)**.** *对模 A, B 有 $A \otimes B \cong B \otimes A$ 成立, 其中同构映射由*

$$a \otimes b \mapsto b \otimes a$$

线性延拓给出.

证明. 设双线性映射

$$h : A \times B \to A \otimes B,\ (a, b) \mapsto a \otimes b$$
$$k : A \times B \to B \otimes A,\ (a, b) \mapsto b \otimes a$$

以及 R-同态

$$f : A \otimes B \to B \otimes A,\ a \otimes b \mapsto b \otimes a$$
$$g : B \otimes A \to A \otimes B,\ b \otimes a \mapsto a \otimes b$$

由线性延拓给出. 那么考察我们熟悉的交换图

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[rr, "1_{A\otimes B}"] \arrow[dr, "f"] & & A \otimes B \\
& B \otimes A \arrow[ur, "g"] & \\
& A \times B \arrow[uul, "h"] \arrow[u, "k"] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

就可以得到结论. □

命题 2.2.12 (结合律)**.** 对模 A, B, C 有 $A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$, 其中同构映射由

$$a \otimes (b \otimes c) \mapsto (a \otimes b) \otimes c$$

线性延拓给出.

证明. 考虑由泛性质

$$\begin{tikzcd}
U[A, B, C] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\
A \times B \times C \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

决定的模 $U[A, B, C]$, 其中 h 是一个三重线性映射 (定义类似双线性映射), 且对任意三重线性映射 f 均存在一个同态 $\tilde{f}$ 使得上图交换. 类似两个模的张量积存在的证明, 可以证明 $U[A, B, C]$ 存在且在同构意义下唯一. 我们证明 $A \otimes (B \otimes C)$ 也满足如上泛性质. 设以下张量积的自然映射为

$$h_1 : A \times (B \otimes C) \to A \otimes (B \otimes C)$$

$$h_2 : B \times C \to B \otimes C$$

给定三重线性映射 $f : A \times B \times C \to M$. 对任意 $a \in A$, 映射

$$\begin{aligned} f_a : B \times C &\to M \\ (b, c) &\mapsto f(a, b, c) \end{aligned}$$

关于 b, c 是双线性的, 因此由 $B \otimes C$ 的泛性质, 存在唯一的 $\widetilde{f_a} : B \otimes C \to M$ 满足 $f_a = \widetilde{f_a} \circ h_2$. 再定义一个双线性映射

$$\begin{aligned} \overline{f} : A \times (B \otimes C) &\to M \\ (a, p) &\mapsto \widetilde{f_a}(p) \end{aligned}$$

我们验证它是双线性的. 由于 $\widetilde{f_a}$ 是同态, 所以 $\overline{f}$ 的第二个分量是线性的. 而设 $p = \sum_i r_i b_i \otimes c_i$ (可以这么假设是因为张量积是一个自由模的商), 则有

$$\begin{aligned} \overline{f}(a, p) &= \widetilde{f_a}\left(\sum_i r_i b_i \otimes c_i\right) \\ &= \sum_i r_i \widetilde{f_a}(b_i \otimes c_i) \\ &= \sum_i r_i f_a(b_i, c_i) \quad (f_a = \widetilde{f_a} \circ h_2) \\ &= \sum_i r_i f(a, b_i, c_i) \end{aligned}$$

由于 f 是三重线性的, 那么由上式可知 $\overline{f}$ 对第一个分量也是线性的. 那么由 $A \otimes (B \otimes C)$ 的泛性质, 存在唯一的 $\tilde{f}$ 满足 $\overline{f} = \tilde{f} \circ h_1$. 取 $h = h_1 \circ (1_A \times h_2) : A \times B \times C \to A \otimes (B \otimes C)$, 那么容易验证 h 是三重线性的, 并且有

$$\begin{aligned} \tilde{f} \circ h &= \tilde{f} \circ h_1 \circ (1_A \times h_2) \\ &= \overline{f} \circ (1_A \times h_2) \end{aligned}$$

同时又有

$$\begin{aligned} \overline{f} \circ (1_A \times h_2)(a, b, c) &= \overline{f}(a, h_2(b, c)) \\ &= \widetilde{f_a} \circ h_2(b, c) \\ &= f_a(b, c) \\ &= f(a, b, c) \end{aligned}$$

所以有 $\tilde{f}\circ h = f$, 因此 $A\otimes(B\otimes C)$ 满足泛性质. 同理可证 $(A\otimes B)\otimes C$ 也满足泛性质, 所以它们一定同构. 容易验证 $a\otimes(b\otimes c)\mapsto(a\otimes b)\otimes c$ 给出了同构映射. □

命题 2.2.13 (分配律)**.** *对模 A 与一族模 $\{B_i\}_{i\in I}$, 有如下同构成立:*

$$A\otimes\left(\bigoplus_{i\in I}B_i\right)\cong\bigoplus_{i\in I}(A\otimes B_i)$$

同构映射由

$$a\otimes(b_i)\mapsto(a\otimes b_i)$$

线性延拓给出.

证明. 设 $\{B_i\}_{i\in I}$ 的嵌入映射为 $\{\iota_i\}_{i\in I}$, $\{A\otimes B_i\}_{i\in I}$ 的嵌入映射为 $\{\iota_i^{\otimes}\}_{i\in I}$. 对于任意 $i\in I$, 考虑以下图表:

$$\begin{tikzcd}
A\times B_i \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[dd, "1_A\times\iota_i"'] & & A\otimes B_i \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f_i}"'] \arrow[dd, "\iota_i^{\otimes}"] \\
& M & \\
A\times\left(\bigoplus_{i\in I}B_i\right) \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "h"] & & \bigoplus_{i\in I}(A\otimes B_i) \arrow[ul, dashed, "\tilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

$f_i = f\circ(1_A\times\iota_i)$ 是一个双线性映射, h_i 是 $A\otimes B_i$ 的自然双线性映射. 那么由 $A\otimes B_i$ 的泛性质, 存在唯一的同态 $\widetilde{f_i}: A\otimes B_i\to M$ 使得上方的三角形交换. 又由外直和的泛性质 (命题 2.2.4), 存在唯一的 $f:\bigoplus\limits_{i\in I}(A\otimes B_i)\to M$ 使得每张图中右侧的三角形交换. 定义

$$\begin{aligned}
h: A\otimes\left(\bigoplus_{i\in I}B_i\right) &\to \bigoplus_{i\in I}(A\otimes B_i)\\
\left(a,\sum_{b_i\in B_i}r_ib_i\right) &\mapsto \sum_{b_i\in B_i}r_ia\otimes b_i
\end{aligned}$$

那么 h 自然是双线性的. 以下验证泛性质:

$$\begin{aligned}
(\tilde{f}\circ h)\left(a,\sum_{b_i\in B_i}r_ib_i\right) &= \tilde{f}\left(a,\sum_{b_i\in B_i}r_ib_i\right)\\
&= \sum_{b_i\in B_i}r_i(\tilde{f}\circ\iota_i^{\otimes})(a\otimes b_i)\\
&= \sum_{b_i\in B_i}r_if_i(a\otimes b_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{b_i \in B_i} r_i f(a, b_i) \\
&= f\left(a, \sum_{b_i \in B_i} r_i b_i\right)
\end{aligned}
$$

所以有

$$
A \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} B_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} (A \otimes B_i)
$$

容易验证 $a \otimes (b_i) \mapsto (a \otimes b_i)$ 给出了同构映射. □

当我们的目光转向有限维向量空间时, 分配律会给我们一些很强的结论.

命题 2.2.14. 设 V, W 是向量空间, 那么有 $\dim V \otimes W = \dim V \dim W$.

证明. 用自然数为域 k 加上指标, 可以得到一族 k-向量空间, 其中每一个都是 k 自身的一个复制. 设 $\dim V = m, \dim W = n$, 那么有 $V \cong k^m, W \cong k^n$, 则 $V \otimes W \cong k^m \otimes k^n$, 且有

$$
\begin{aligned}
k^m \otimes k^n &= \left(\bigoplus_{i=1}^{m} k_i\right) \otimes \left(\bigoplus_{j=1}^{n} k_j\right) \\
&\cong \bigoplus_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} k_i \otimes k_j \quad (\text{分配律}) \\
&\cong \bigoplus_{1 \leq i \leq mn} k_i \quad (\text{例 } 2.2.9) \\
&= k^{mn}
\end{aligned}
$$

所以 $V \otimes W \cong k^{mn}$, 因此是 mn 维的. □

这件事情还可以由另一种方式得到:

命题 2.2.15. 设 V, W 是向量空间, 分别以 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 与 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 为一组基, 那么 $\mathcal{B} := \{e_i \otimes g_j | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 是 $V \otimes W$ 的一组基. 从而可以推出 $V \otimes W$ 是 mn 维的.

证明. 向量空间就是域上的自由模, 我们尝试通过处理泛性质来证明这个命题. 设 $\iota : \mathcal{B} \to V \otimes W$ 是嵌入映射. 对任意的 k-向量空间 A, 给定映射 $f : \mathcal{B} \to A$, 我们定义一个双线性映射

$$
\overline{f} : V \times W \to A
$$

$$(e_i, g_j) \mapsto f(e_i \otimes g_j)$$

由于双线性映射被其在两组基的 Descartes 积上的取值唯一确定, 所以上述定义是良好的. 我们考察以下图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] & V \times W \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

由 $V \otimes W$ 的泛性质, 存在唯一的同态 $\tilde{f}$ 使得右侧小三角形交换. 而对左侧小三角形, 我们有

$$\begin{aligned}
(\tilde{f} \circ \iota)(e_i \otimes g_j) &= \tilde{f}(e_i \otimes g_j) \\
&= (\tilde{f} \circ h)(e_i, g_j) \\
&= \overline{f}(e_i, g_j) \\
&= f(e_i \otimes g_j)
\end{aligned}$$

从而左侧小三角形交换, $(V \otimes W, \iota)$ 满足自由模的泛性质. 所以 $\mathcal{B}$ 是 $V \otimes W$ 的一组基. □

接下来我们让对偶空间加入讨论. 以下我们默认 $V = V^{**}$, 即将有限维向量空间的双重对偶视为与自身是等同的. 同时, 我们还假设所有向量空间都是有限维的. 一个小小的引理是对偶关于张量积 "分配".

引理 2.2.16. 设 V, W 是向量空间, 那么 $(V \otimes W)^*$ 与 $V^* \otimes W^*$ 自然同构, 即同构映射不依赖于基的选取.

证明. 设 V, W 分别有基 $\{v_i\}_{1 \le i \le m}$ 与 $\{w_i\}_{1 \le i \le n}$, 这两组基给出它们到各自对偶空间的同构 $d_1^V : V \to V^*$, $d_1^W : W \to W^*$ 与 $d_1 : V \otimes W \to (V \otimes W)^*$. 设它们各自的另一组基为 $\{e_i\}_{1 \le i \le m}$, $\{g_i\}_{1 \le i \le n}$, 及同构 $d_2^V : V \to V^*$, $d_2^W : W \to W^*$ 与 $d_2 : V \otimes W \to (V \otimes W)^*$. 考虑图表

$$\begin{tikzcd}
V^* \times W^* \arrow[rr, "d_1^V \times d_1^W"] \arrow[dr, "h_1"] \arrow[dd, "d_2^V \times d_2^W"'] & & V \times W \arrow[dd, "d_1 \circ h_2"] \\
& V^* \otimes W^* \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
V \times W \arrow[rr, "d_2 \circ h_2"] & & (V \otimes W)^*
\end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

我们想要证明大矩形是交换的. 为此, 设 $p_1 = d_1 \circ h_2 \circ (d_1^V \times d_1^W)$, $p_2 = d_2 \circ h_2 \circ (d_2^V \times d_2^W)$. 任取 V, W 中的两个元素, 利用双线性性计算有

$$p_1 \left(\sum_{i=1}^{m} a^i v_i, \sum_{j=1}^{n} b^j w_j \right) = \sum_{i,j} a^i b^j (v_i \otimes w_j)^*$$

设基变换

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{k=1}^{m} x_i^k e_k \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ w_i &= \sum_{l=1}^{n} y_i^l g_l \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

那么有

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a^i v_i, \sum_{j=1}^{n} b^j w_j \right) = \left(\sum_{i,k} a^i x_i^k e_k, \sum_{j,l} b^j y_j^l g_l \right) \tag{2.2.2}$$

且有

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a^i b^j (v_i \otimes w_j)^* &= \sum_{i,j} a^i b^j \left(\sum_k x_i^k e_k \otimes \sum_l y_j^l g_l \right)^* \\ &= \sum_{i,j,k,l} a^i b^j x_i^k y_j^l (e_k \otimes g_l)^* \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} p_2 \left(\sum_{i=1}^{m} a^i v_i, \sum_{j=1}^{n} b^j w_j \right) &= \left(\sum_{i,k} a^i x_i^k e_k \otimes \sum_{j,l} b^j y_j^l g_l \right)^* \quad (\text{由式 } (2.2.2)) \\ &= \sum_{i,j,k,l} a^i b^j x_i^k y_j^l (e_k \otimes g_l)^* \end{aligned}$$

所以大矩形是交换的. 那么由张量积的泛性质, 存在唯一的线性映射 $f : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ 使得整个图交换, 并且注意到 f 不依赖某个特定的基的选取. 考虑由 $v_i^* \otimes w_j^* \mapsto (v_i \otimes w_j)^*$ 线性延拓得到的映射 f', f' 将 $V^* \otimes W^*$ 的一组基映为 $(V \otimes W)^*$ 的一组基, 从而是一个同构. 又注意到 f' 显然可以作为虚线处的映射使得图 (2.2.1) 交换, 所以有 $f = f'$. 因此 f 是同构, 并且我们前面证明了它不依赖于基的选取. 所以 $V^* \otimes W^*$ 与 $(V \otimes W)^*$ 自然同构. □

这是我们第一次用张量的分量进行计算.

关于对偶空间有两个基础的性质:

命题 2.2.17. 对向量空间 V, W, 有自然同构 $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$.

证明. 设 $h : V^* \times W \to V^* \otimes W$ 是自然映射. 定义一个双线性映射

$$\begin{aligned} f &: V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W) \\ f(v^*, w) &: a \mapsto v^*(a)w \end{aligned}$$

由泛性质, 存在一个线性映射 $\tilde{f} : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ 使得 $f = \tilde{f} \circ h$. 我们给出 $\tilde{f}$ 的逆映射 g. 任取 V, W 的基 $\{v_i\}_{1 \le i \le m}$ 与 $\{w_i\}_{1 \le i \le n}$, 如果 $\sigma \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 满足

$$\sigma(v_i) = \sum_j = a_{ji} w_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

那么定义 $g(\sigma) = \sum_{i,j} a_{ji} v_i \otimes w_j$. 注意到

$$\begin{aligned} (\tilde{f} \circ g)(\sigma) &= \tilde{f}\left(\sum_{i,j} a_{ji} v_i \otimes w_j\right) \\ &= \sum_{i,j} a_{ji} \tilde{f}(v_i \otimes w_j) \\ &= \sum_{i,j} a_{ji} f(v_i^*, w_j) \\ &= \sum_{i,j} a_{ji} v_i^*(\quad) w_j \end{aligned}$$

注意到 $\sum_{i,j} a_{ji} v_i^*(\quad) w_j$ 在基 $\{v_i\}_{1 \le i \le m}$ 上取值与 σ 相同, 所以它与 σ 相等. 因此 $\tilde{f} \circ g = 1_{\mathrm{Hom}(V,W)}$, 所以 $\tilde{f}$ 是同构[3]. 由于基是任取的, 所以同构一定是自然的. □

命题 2.2.18. 设 $B(U, V; W)$ 是全体 $U \times V \to W$ 双线性映射的向量空间, 那么有自然同构 $B(U, V; W) \cong U^* \otimes V^* \otimes W$.

证明. 由 $U \otimes V$ 的泛性质, $B(U, V; W)$ 中的双线性映射与 $\mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$ 中的线性映射一一对应, 结合命题 2.2.17 有

$$\begin{aligned} B(U, V; W) &\cong \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \\ &\cong (U \otimes V)^* \otimes W \\ &\cong U^* \otimes V^* \otimes W \end{aligned}$$

□

[3]想想为什么不需要验证 $g \circ \tilde{f} = 1_{V^* \otimes W}$?

记号 2.2.19. 对于一个 R-模, 我们记

$$\begin{aligned}\bigotimes^0 M &:= R\\ \bigotimes^1 M &:= M\\ \bigotimes^n M &:= \underbrace{M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M}_{n\text{次}}, \quad n \geq 2\end{aligned}$$

而对于一个 k-向量空间 V, 按照交换律与结合律, V 与它的对偶空间 V^* 的任意有限次张量积总会同构于

$$\left(\bigotimes^r V\right) \otimes \left(\bigotimes^s V^*\right)$$

我们记

$$\mathrm{Tsr}^{(r,s)}(V) := \left(\bigotimes^r V\right) \otimes \left(\bigotimes^s V^*\right)$$

并把 r, s 分别称为**反变指数**与**共变指数**.

实际上, 前面的内容中我们只用到了向量空间的*自由性质*, 所以前面关于有限维向量空间的命题都可以换成关于有限生成自由模的命题.

评注 2.2.20. 对任意 n 个模及以它们为定义域的 n 重线性同态, 考虑由泛性质

$$\begin{tikzcd} U[M_1, M_2, \cdots, M_n] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\ M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

决定的模 $U[M_1, M_2, \cdots, M_n]$. 可以证明 $U[M_1, M_2, \cdots, M_n]$ 存在且自然同构于 $M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n$ ([5，命题 B-5.17, B-5.18]). 那么类似于命题 2.2.18, 容易证明所有 $r+s$ 重线性映射 $(V^*)^r \times V^s \to k$ 构成的空间等同于 $\mathrm{Tsr}^{(r,s)}(V)$.

古典意义下的一个**张量**指的是一个 $(V^*)^r \times V^s \to k$ 的多重线性映射, 也即 $\mathrm{Tsr}^{(r,s)}(V)$ 中的一个元素 $v_1 \otimes \cdots v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*$. 其中 $v_1 \otimes \cdots v_r$ 称为**反变部分**, $v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*$ 称为**共变部分**. $r = 0$ 时的张量称为**共变张量**, $s = 0$ 时的张量称为**反变张量**.

古典的张量是直接使用多重线性映射定义的, 但这样的定义只适用于有限维向量空间. 因此我们把古典张量理论中的一些名词列举了出来, 方便读者阅读其他资料, 但之后的笔记中我们会为了保持 “*代数的纯洁性*” 而不怎么使用这些名词.

2.3 张量代数与外代数

本节为微分形式这一微分几何中的重要工具铺路. 不是很希望了解具体代数构造的读者可以直接阅读第二小节外代数的性质.

张量代数与外代数的构造

代数一词在这里指的是一种建立在模上的代数结构, 虽然容易引起混淆, 但是在学界广泛使用已久, 我们也依例沿用. 代数的等价定义有许多种, 我们这里选取 [5] 上的定义.

定义 2.3.1. 设 k 是一个交换环, 如果环 R 是一个 k-模并且对任意 $a \in k$, $r, s \in R$ 都有

$$a(rs) = (ar)s = r(as) \tag{2.3.1}$$

那么称 R 是一个 **k-代数**.

我们需要用到的一类特殊的代数叫做分次代数.

定义 2.3.2. 设 A 是一个环 k-代数, 如果存在 Abel 群 $A^i, i \in \mathbb{N}$ 满足

1. $A = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} A^i$;
2. 对任意 $i, j \in \mathbb{N}$ 及 $a_i \in A^i$ 与 $a_j \in A^j$, 有 $a_i a_j \in A^{i+j}$, 即

$$A^i A^j \subset A^{i+j}$$

那么称 A 是一个**分次环**, 并将每个 Abel 群 G^i 中的元素称为**齐次元**. 如果进一步地, A 是一个 k-代数, 那么称 A 是一个**分次 k-代数**.

例 2.3.3. 为了不让这一节过于枯燥, 我们举一个最简单的分次代数的例子. 考虑 k 上的多项式环 $k[x]$ 与多元多项式环 $k[x, y, z, \cdots]$, 它们有自然的次数与齐次多项式. 比如 $xy + yz + xz$ 是齐次的, 但 $x + yz$ 不是.

定义 2.3.4. 设 I 是分次代数 A 的一个双边理想, 如果 I 满足

$$I = \bigoplus_{i\in N} I^i$$

其中 $I^i = A^i \cap I, i \in \mathbb{N}$, 那么称 I 为 A 的一个**分次理想**.

我们只需要两个小引理:

引理 2.3.5. *设 A 是分次代数, I 是它的一个分次理想, 那么 A/I 也是一个分次代数.*

证明. 由于 I 是 A 的理想, 所以 A/I 具有环结构. 而对于任意的 $a \in k$ 与 $r + I, s + I \in A/I$, 有

$$(a(r + I))(s + I) = (ar + I)(s + I)$$

$$\begin{aligned}
&= (ar)s + I \\
a((r+I)(s+I)) &= a(rs+I) \\
&= a(rs) + I \\
(r+I)(a(s+I)) &= (r+I)(as+I) \\
&= r(as) + I
\end{aligned}$$

与式 (2.3.1) 比较可知 A/I 构成 k-代数. 定义 Abel 群同态

$$f : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A^i \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} (A^i/I^i)$$
$$(a_i) \mapsto (a_i + I_i)$$

那么显然 f 是满射, 且 $\ker f = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} I$. 因此由第一同构定理可知

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \frac{A^i}{I^i} \cong \frac{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A}{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} I} = \frac{A}{I}$$

综上可知 A/I 是分次 k-代数. □

引理 2.3.6. *设 I 是 A 中的齐次元生成的双边理想, 那么 I 是齐次理想.*

证明. 设 $I = \langle X\rangle$, X 中的元素均为齐次元. 我们只需要说明 $I \subset \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} (I \cap A^i)$ (另一边包含是自动成立的), 则命题得证. 对于 I 中任意一个元素, 我们一定可以将它写成

$$\sum_{x\in X} a\,x\,b \quad (a\,,b\,\in A)$$

我们只需要证明每一个 $a\,x\,b$ 是 A 中齐次元的和即可. 去掉下标, 注意到 a 与 b 可以写成齐次元的和, 一定有

$$axb = \sum_{i,j} a_i x b_j$$

那么每个 $a_i x b_j$ 都是 A 的齐次元, 并且在 I 中. 因此 I 中的元素都可以写成 $I \cap A^i$, $i \in \mathbb{N}$ 中元素的和, 从而有 $I \subset \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} (I \cap A^i)$ 成立. □

有了这两个引理, 我们正式开始张量代数与外代数的构造. 设 M 是一个 R-模, 我们记

$$\bigotimes M := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \bigotimes^i M$$

通过定义乘法 $\otimes : (a,b) \mapsto a \otimes b$, 容易验证 $(\bigotimes M, +, \otimes)$ 构成一个环 (利用张量积的分配律与交换律即可). 同时我们注意到乘法满足

$$\left(\bigotimes^r M\right) \otimes \left(\bigotimes^s M\right) \subset \bigotimes^{r+s} M$$

所以 $\bigotimes M$ 是一个分次环.

我们还希望 $\bigotimes M$ 构成一个模, 为此我们定义 $r \in R$ 的作用为

$$r(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n) = (rm_1) \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n$$

由多重线性性, 我们可以得到以下一些式子:

$$\begin{aligned} r(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n) &= (rm_1) \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n \\ &= m_1 \otimes (rm_2) \otimes \cdots \otimes m_n \\ &= \cdots \\ &= m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes (rm_n) \end{aligned}$$

于是进一步地, 对任意 $x_1 \otimes \cdots x_i$ 与 $y_1 \otimes \cdots \otimes y_j$ 有

$$\begin{aligned} (r(x_1 \otimes \cdots x_i)) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_j) &= (rx_1) \otimes \cdots \otimes x_i \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_j \\ &= x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes ((ry_1) \otimes \cdots \otimes y_j) \end{aligned}$$

这可以推出 (2.3.1) 式. 因此有

命题 2.3.7. *$\bigotimes M$ 构成一个分次 R-代数, 称为模 M 上的**张量代数**.*

取 $J = \langle m \otimes m |\ m \in M \rangle$ 为 $\bigotimes M$ 中所有形如 $m \otimes m$ $(m \in M)$ 的元素生成的双边理想, 那么由引理 2.3.6 可知 J 是齐次理想. 于是由引理 2.3.5 可知 A/J 是一个分次 R-代数. 我们记

$$A^i/J := \bigwedge^i M, \quad i \in \mathbb{N}$$
$$\bigwedge M := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \bigwedge^i M$$

从而定义

定义 2.3.8. 对 R-模 M, 称 $\bigwedge M$ 为 M 上的**外代数**.

记号 2.3.9. $\bigwedge M$ 继承了 $\bigotimes M$ 的乘法 $\otimes : \bigotimes M \times \bigotimes M \to \bigotimes M$, 我们把这个乘法记作 $\wedge$, 称为**楔积**. 那么按照这个记号, 我们也把陪集 $m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n + J$ 记为 $m_1 \wedge m_2 \wedge \cdots \wedge m_n$.

外代数的性质

外代数是一个代数, 自然满足结合律, 分配律等简单性质. 除此之外外代数还满足

命题 2.3.10 (交错性)**.** (1) 对任意 $m \in M$ 有 $m \wedge m = 0$;

(2) 对任意 $m, m' \in M$ 有 $m \wedge m' = -m' \wedge m$.

证明. 1. $m \otimes m \in \ker \pi$.

2. 由上一条, 我们知道

$$\begin{aligned} 0 &= (m + m') \wedge (m + m') \\ &= m \wedge m + m' \wedge m + m \wedge m' + m' \wedge m' \\ &= m' \wedge m + m \wedge m' \end{aligned}$$

所以 $m \wedge m' = -m' \wedge m$

□

这个命题的推广是

命题 2.3.11 (反交换律)**.** 设 $x \in \bigwedge^p M, y \in \bigwedge^q M$, 那么有 $x \wedge y = (-1)^{pq} y \wedge x$.

证明. 这是一个反复交换的过程. 设 $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p, y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_q$, 则

$$\begin{aligned} x \wedge y &= -x_1 \wedge \cdots \wedge y_1 \wedge x_p \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_q \quad (\text{命题 } (2.3.10)) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^q x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p-1} \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q \wedge x_p \quad (\text{交换 } q \text{ 次}) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{2q} x_1 \wedge \cdots \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q \wedge x_{p-1} \wedge x_p \quad (\text{交换 } 2q \text{ 次}) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{pq} y_1 \wedge \cdots \wedge y_q \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \quad (\text{交换 } pq \text{ 次}) \end{aligned}$$

□

推论 2.3.12. 如果 $m_1 \wedge \cdots m_i \wedge m_j \wedge m_n$ 中 $m_i = m_j$, 那么有 $m_1 \wedge \cdots m_i \wedge m_j \wedge m_n = 0$.

证明. 由反交换律, $m_1 \wedge \cdots m_i \wedge m_j \wedge m_n$ 和 $m_i \wedge m_j \wedge m_1 \wedge \cdots \wedge m_n$ 最多只差一个符号, 而 $m_i \wedge m_j = 0$, 所以 $m_1 \wedge \cdots m_i \wedge m_j \wedge m_n = 0$. □

我们接下来讨论外代数使用泛性质的刻画.

定义 2.3.13. 设 R-同态 $f: M_1 \times \cdots \times M_n \to N$ 是 n-重线性的, 如果存在指标 $i \neq j$ 使得 $m_i = m_j$ 可以推出

$$f(\cdots, m_i, \cdots, m_j, \cdots) = 0$$

那么称 f 是**交错的**. 如果对任意 $i \neq j$ 有

$$f(\cdots, m_i, \cdots, m_j, \cdots) = -f(\cdots, m_j, \cdots, m_i, \cdots)$$

那么称 f 是**反对称**的.

一个有益的练习是, 证明如果在 R 中 $2 = 1 + 1$ 是单位的话, 交错与反对称是一回事.

命题 2.3.14. 设 $M_1, M_2 \cdots, M_n, N$ 是 R-模, n-重线性映射 h 满足

$$\begin{aligned} h: M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n &\to M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_n \\ (m_1, m_2, \cdots, m_n) &\mapsto m_1 \wedge m_2 \wedge \cdots \wedge m_n \end{aligned}$$

那么对任意 n-重线性同态 $f: M_1 \times \cdots \times M_n \to N$, 存在唯一的 $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_n, N)$ 使得以下图表交换

$$\begin{tikzcd} M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_n \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

证明. 考虑以下交换图

$$\begin{tikzcd} M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_n \arrow[ddr, dashed, bend left, "\tilde{f}"] & \\ M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n \arrow[u, "\pi"] \arrow[dr, dashed, "\overline{f}"] & \\ M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

由张量积的泛性质, 存在唯一的 $\overline{f} \in \mathrm{Hom}(M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n, N)$ 使得下方的小三角形交换. 考虑 $\ker \pi$, 即 $M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n$ 中所有形如 $m \otimes m$ $(m \in M)$ 的元素生成的双边理想. 取 $\ker \pi$ 中任意的 $x = \sum\limits_{m_i \in M} a_i \otimes m_i \otimes m_i \otimes b_i$, 由交错映射的定义, 一定有

$$\overline{f}(x) = \sum_{m_i \in M} \overline{f}(a_i \otimes m_i \otimes m_i \otimes b_i)$$

$$= \sum_{m_i \in M} f(a_i, m_i, m_i, b_i)$$
$$= 0$$

这里我们轻微地滥用记号, 不区分 a_i, b_i 在 h' 作用下的像和原像. 因此有 $\overline{f}(\ker \pi) = 0$, 那么由商模的泛性质可知, 存在唯一的 $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_n, N)$ 使得上方的小三角形交换. 注意到 $h = \pi \circ h'$, 所以大三角形与交换图 (2.3.2) 等价, 因此命题得证. □

评注 2.3.15. 在古典的张量理论中, 人们会用交错化的方法构造交错函数, 即对多重线性函数 f, 定义

$$(\mathrm{Alt}\, f)(v_1, \cdots, v_n) := \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\, \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)})$$

并通过定义两个函数的张量积

$$(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}, \cdots, v_m) = f(v_1, \cdots, v_n) g(v_{n+1}, \cdots, v_m)$$

与交错函数的楔积

$$f \wedge g = \frac{(m+n)!}{m!n!} \mathrm{Alt}(f \otimes g)$$

来构造张量代数与外代数. 具体的细节参阅 [6] 的第 4 章或 [4] 的第 12, 14 章.

我们刚刚证明了外代数也具有泛性质, 因此我们也可以仿照命题 2.2.2 来证明某个模上的外代数的唯一性. 因此按照命题 2.2.18 的精神, 我们可以认为有限维向量空间 V 上所有 n 元交错函数的空间等同于 $\bigwedge^n V^*$. 因此按照古典方法构造的外代数和我们定义的外代数是等同的. 在下一章中, 我们会经常用到这一点的.

行列式

我们在这一节通过外代数给行列式一种更加自然的诠释.

记域 k 上的全体 n 阶方阵的空间为 $\mathrm{Mat}_n(k)$. 首先我们给出公理化的行列式定义:

定义 2.3.16. 将域 k 上的 $n \times n$ 矩阵视为 n 个列向量构成的序列, 那么**行列式** $\det : \mathrm{Mat}_n(k) \to k$ 是一个使得 $\det I = 1$ 的交错多重线性映射.

类似命题 2.2.15, 我们也可以证明

命题 2.3.17. 设向量空间 V 有一组基 $(e_1, \cdots, e_n)$, 则

$$\mathcal{B} = (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$$

是 $\bigwedge^k V$ 的一组基, 从而 $\bigwedge^k V$ 是 $\binom{n}{k}$ 维的.

证明. 简记 V 的 k 重 Descartes 积 $V\times V\times\cdots\times V$ 为 V^k. 设 $\iota:\mathcal{B}\to\bigwedge^k V$ 是嵌入映射, 我们证明 $\mathcal{B}$ 满足自由模的泛性质. 为此, 给定一个向量空间 A 与映射 $f:\mathcal{B}\to A$. 考虑一个任意的交错映射 $h:V^k\to A$, 对 V 中任意 k 个元素 $v_j=\sum\limits_i a_j^i e_i,\ j=1,\cdots,k$, 有

$$\begin{aligned}
h(v_1,\cdots,v_k)&=h\left(\sum_{i_1}a_1^{i_1}e_{i_1},\cdots,\sum_{i_k}a_k^{i_k}e_{i_k}\right)\\
&=\sum_{i_1}a_1^{i_1}h\left(e_{i_1},\cdots,\sum_{i_k}a_k^{i_k}e_{i_k}\right)\\
&=\sum_{i_1,i_2}a_1^{i_1}a_2^{i_2}h\left(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,\sum_{i_k}a_k^{i_k}e_{i_k}\right)\\
&=\cdots\\
&=\sum_{i_1,\cdots,i_k}a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}h(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})
\end{aligned}$$

由交错性, 当存在 $i_j=i_l$ 时, $h(\cdots,e_{i_j},\cdots,e_{i_l},\cdots)=0$; 而对 $e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}$ 的任意排列, $h(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k})$ 仅有符号不同, 且由排列的符号决定. 因此任意交错映射均由 $(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k})_{1\le i_1<\cdots<i_k\le}$ 这 $\binom{n}{k}$ 处的取值决定. 那么我们定义交错映射

$$\begin{aligned}
\overline{f}:V^k&\to A\\
(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})&\mapsto f(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k})\\
&{\scriptstyle(1\le i_1<\cdots<i_k\le n)}
\end{aligned}$$

由之前的讨论, $\overline{f}$ 的定义是良好的. 考虑以下图表:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \bigwedge^k V \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] & V^k \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

由命题 2.3.14 可知存在 $\tilde{f}$ 使得右侧小三角形交换. 我们验证左侧小三角形交换, 对任一 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ 有

$$\begin{aligned}
(\tilde{f}\circ\iota)(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k})&=(\tilde{f}\circ h)(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\\
&=\overline{f}(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\\
&=f(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})
\end{aligned}$$

所以左侧小三角形交换. 因此 $\mathcal{B}$ 满足泛性质, 是 $\bigwedge^k V$ 的一组基. $\square$

命题 2.3.18. 行列式存在且唯一.

证明. 由命题 2.3.17 可知, 对 n 维向量空间 V 来说 $\bigwedge^k V$ 是 1 维的. 给定 V 的一组基 $(e_1,\cdots,e_n)$, 对 $f\in\operatorname{End}V$, 定义 $\det f\in k$ 为满足

$$(\det f)e_1\wedge\cdots\wedge e_n=f(e_1)\wedge\cdots\wedge f(e_n)$$

的唯一数. 特别地, 取 $V=k^n$, 单位矩阵 I 给出 V 的一组基 $e_i=(\cdots,0,\overset{\text{第}i\text{位}}{1},0,\cdots)^\top$. 对矩阵 A, 取一个 $f:k^n\to k$ 满足 $f(v)=Av$, 那么定义 $\det A=\det f$. 我们证明 $\det$ 是一个行列式. 将 A 写成列向量分块的形式

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdots & A_n\end{array}\right]$$

那么 $Ae_i=A_i$, 从而 $\det A=A_1\wedge\cdots\wedge A_n$, 是交错多重线性的. 同时由定义, 可以知道 I 的分块即为 $\left[\begin{array}{c|c|c} e_1 & \cdots & e_n\end{array}\right]$, 从而有 $\det I=1$.
我们证明行列式是唯一的. 由命题 2.3.14 可知, $k^n\times k^n\cdots\times k^n\to k$ 的交错多重线性映射与 $\operatorname{Hom}_k\left(\bigwedge^n k^n,k\right)$ 中的元素一一对应. 而 $\bigwedge^n k^n$ 是 1 维的, 与 k 同构, 所以 $\operatorname{Hom}_k\left(\bigwedge^n k^n,k\right)\cong k$, 且其中的元素相当于数乘作用:

$$\begin{aligned} a:\bigwedge^n k^n &\to k\\ x&\mapsto ax\end{aligned}$$

而设 δ 是行列式函数, 对应 $d\in\operatorname{Hom}_k\left(\bigwedge^n k^n,k\right)$, 那么一定有

$$\begin{aligned}1&=\delta(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)\\ &=de_1\wedge\cdots\wedge e_n\end{aligned}$$

从而 d 的值由 $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ 决定, 即由 $h(I)$ 决定 (h 是外代数的自然投影映射), 所以 d 的值是唯一的. 因此行列式也是唯一的. □

我们最后证明我们构造的行列式和熟知的行列式是一致的. 为此, 我们证明 $\det$ 可以按第一行展开.

命题 2.3.19. 设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, A_{ij} 是 A 划去第 i 行与第 j 列后得到的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵, 那么有

$$\det A=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}a_{1i}\det A_{1i}$$

读者应当能熟练证明这一性质与常见的由全展开给出的定义的等价性.

证明. 将 A 按列分块, 并记

$$\begin{aligned} A_i &= (a_{1i}, 0, \cdots, 0)^\top + (0, a_{2i}, \cdots, a_{ni}) \\ &:= T_i + R_i \end{aligned}$$

那么 $\det A(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = (T_1 + R_1) \wedge \cdots \wedge (T_n + R_n)$. 由交错性, 形如 $\cdots \wedge T_i \wedge \cdots \wedge T_j \wedge \cdots$ 项均为 0, 那么有

$$\begin{aligned} \det A(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= (T_1 + R_1) \wedge \cdots \wedge (T_n + R_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} R_1 \wedge \cdots \wedge T_i \wedge \cdots \wedge R_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} T_i \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{R_i} \wedge \cdots \wedge R_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} e_1 \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{R_i} \wedge \cdots \wedge R_n \end{aligned}$$

记 R_i' 为 R_i 去掉第一个分量, e_i' $(2 \leq i \leq n)$ 为 e_i 去掉第一个分量, 那么有

$$\det A_{1i} e_2' \wedge \cdots \wedge e_n' = R_1' \wedge \cdots \wedge \widehat{R_i'} \wedge \cdots \wedge R_n'$$

又由于 R_i 的坐标中不含 e_i, 所以展开结果与上式相同, 一定有

$$R_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{R_i} \wedge \cdots \wedge R_n = \det A_{1i} e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$$

综上有

$$\begin{aligned} \det A(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} e_1 \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{R_i} \wedge \cdots \wedge R_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} e_1 \wedge (\det A_{1i} e_2 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det A_{1i} (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \end{aligned}$$

□

第 3 章 流形上的张量

我们回到几何学, 这一章我们讨论上一章的代数工具在微分几何中的具体应用. 我们首先会定义流形 M 上的张量场, 并讨论张量场与向量场的张量积之间的关系. 其次我们会讨论交错映射构成的张量场, 也就是微分形式, 我们会略微谈及它的应用. 最后我们会讨论流形上的 Riemann 度量, 从而向 Riemann 几何迈出微小的一步.

3.1 张量场

定义 3.1.1. 微分流形 M 上一点 p 的**余切空间**是这一点处切空间的对偶空间, 记为 $T_p^*M := (T_pM)^*$. T_p^*M 中的元素称为**余向量**.

命题 2.1.9 说明了 T_p^*M 具有向量空间的结构, 且维数与 M 相同. 那么类似命题 1.3.9 可以证明对 $p \in M$, T_p^*M 的不交并是一个微分流形. 我们于是有定义

定义 3.1.2. 设 M 是微分流形, $T^*M := \coprod_{p\in M} T_p^*M$ 是一个 $2n$ 维微分流形, 定义为 M 的**余切丛**.

由于任意向量空间的张量积都是向量空间, 所以 $\mathrm{Tsr}^{(r,s)}(V)$ 也是向量空间, 于是进一步地可以定义

定义 3.1.3. 设 M 是微分流形, 定义 $T^{(r,s)}TM := \coprod_{p\in M} \mathrm{Tsr}^{(r,s)}(T_pM)$ 为 M 的 (r,s)-张量丛.

仿照向量场的定义, 我们如下定义张量场:

定义 3.1.4. 流形 M 上的一个 (r,s)-张量场 A 是一个满足 $\pi \circ A = 1_M$ 的光滑映射 $A : M \to T^{(r,s)}TM$, 其中 $\pi : T^{(r,s)}TM \to M$ 是自然投影映射.

在有了全局的张量场的定义之后, 我们考虑张量场在局部, 也就是某个坐标卡下的表现. 首先我们考虑余切空间.

引理 3.1.5. *设 n 维流形 M 上的函数 $x^1, \cdots, x^n$ 定义如引理 1.3.2 所述, 那么 $x^1_*|_p, \cdots, x^n_*|_p$ 是 $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ 的对偶基. 我们在这里将 $T_{x^i(p)}\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 视为等同的.*

证明. 对任意 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 有

$$\begin{aligned} x^i_*|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)(f) &= \left.\frac{\partial f \circ x^i}{\partial x^j}\right|_p \\ &= \frac{\partial f \circ x^i \circ \varphi^{-1}}{\partial u^j} \\ &= \frac{\partial f \circ \pi^i}{\partial u^j} \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\delta(i,j) \end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x \in T_{x^i(p)}\mathbb{R}$ 等同于 $1 \in \mathbb{R}$, 所以上式说明了 $x^1_*|_p, \cdots, x^n_*|_p$ 是 $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ 的对偶基. □

命题 3.1.6. *设 A 是一个 (r,s)-张量场 (不一定是光滑的), 那么 A 是光滑张量场当且仅当对任意坐标卡 (U,φ), A 都具有*

$$\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ j_1,\cdots,j_l}} A^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes x^{j_1}_* \otimes \cdots \otimes x^{j_l}_* \tag{3.1.1}$$

的形式, 其中 $A^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} \in C^\infty(M)$.

证明. 验证定义 1.3.12 即可. 对于张量来说, 写出坐标卡的具体表达式太过于复杂, 我们把这个工作留给读者. □

考虑一个共变张量丛 $T^{(0,s)}TM$, 我们猜测它可以由 s 个余向量场 (即 1 阶共变张量场) 在 $C^\infty(M)$ 上做张量得到. 同时我们也很希望余向量场是向量场的对偶, 即 $T^{(0,1)}TM = \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(TM, \mathbb{R})$. 依照这种想法, 我们有如下的结论:

命题 3.1.7. *流形 M 上的任一 s 阶共变张量场 A 均对应了一个逐点定义的 k 重 $C^\infty(M)$ 线性映射 $a : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \mathfrak{X}(M)}_{k\text{个}} \to C^\infty(M)$: 对任意 $p \in M$, 取一个含 p 的坐标卡 (U,φ) 使得 A 具有 (3.1.1) 的形式, 定义*

$$a|_U = \sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1\cdots i_k} x^{i_1}_* \otimes \cdots \otimes x^{i_k}_*$$

$$(X_1|_p,\cdots,X_k|_p)\mapsto\sum_{i_1,\cdots,i_k}A_{i_1\cdots i_k}(p)x_*^{i_1}(X_1|_p)\cdots x_*^{i_k}(X_k|_p)$$

进一步地, 这个对应是一一的.

比较命题 3.1.7 与开始的想法可以发现, 我们仅仅使用了最传统的多重线性映射的语言. 这是因为第二章中的张量与多重线性映射之间的一系列命题只在向量空间上成立, 而我们现在在处理环上的模, 因此我们就只能用多重线性映射来说这件事.

我们需要以下一些引理.

引理 3.1.8. *设 $f:\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的, 那么如果向量场 X 在某个开集 U 上恒为 0, 则 $f(X)$ 在 U 上也恒取 0.*

证明. 设 $p\in U$, 取 p 在 U 中的一个邻域 V 及一个冲击函数 h, 使得 h 在 V 上恒取 1, $\operatorname{supp}h\subset U$. 那么在 M 上 $hX=0$, 从而有 $f(hX)=0$. 而由 f 的 $C^\infty(M)$-线性性, 有 $hf(X)=0$, 在 V 上就有 $f(X)=0$. 因此 $f(X)(p)=0$, 由 p 的任意性可知 $f(X)$ 在 U 上恒为 0. □

引理 3.1.9. *设 $f:\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的, 则向量场 X 在某点 p 处为 0 时也有 $f(X)(p)=0$.*

证明. 取一个包含 p 的坐标卡 (U,φ), 我们定义 f 在 U 上的限制. 对一个向量场 $Y\in\mathfrak{X}(U)$, 按命题 1.5.5 取一个向量场 $\widetilde{Y}\in\mathfrak{X}(M)$ 使得 $\widetilde{Y}|_U=Y$, [1] 定义 $f|_U(Y)=f(\widetilde{Y})$. $f|_U$ 是良定义的, 因为引理 3.1.8 保证了如果 $Y_1|_U=Y_2|_U$, 那么一定有 $f|_U(Y_1|_U)=f|_U(Y_2|_U)$. 由于 U 上存在局部自然标架场, 所以 $\mathfrak{X}(U)$ 是自由 $C^\infty(M)$-模 (请回忆相关定义), 因此 $f|_U$ 的作用可以被矩阵表示. 设 $f|_U$ 的矩阵为 A, 对任意一个 $X|_U$, 设其坐标为 $\alpha=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)^\top$. 那么有

$$\begin{aligned}f(X)(p)&=f|_U(X|_U)(p)\\&=A(\alpha^1(p),\cdots,\alpha^n(p))\\&=A(0,\cdots,0)\\&=0\end{aligned}$$

□

推论 3.1.10. *显然引理 3.1.8 与引理 3.1.9 均对多线性映射成立.*

我们着手证明命题 3.1.7.

[1]严格来说, 1.5.5 无法保证 Y 与 $\widetilde{Y}$ 在整个 U 上相等, 我们需要利用流形的正规性 ([3, 定理 4.81]) 来取一个更大的开集 V 包含 U, 然后构造冲击函数完成证明.

命题 3.1.7 的证明. 显然这个对应是单射, 我们只需要证明它是满射. 设 $a:\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\mathfrak{X}(M)}_{k\text{个}}\to$ $C^\infty(M)$ 是 k 重线性映射. 在每一点 p 处我们定义一个 k 重线性映射 $B(p):\underbrace{T_pM\times\cdots T_pM}_{k\text{个}}\to$ $\mathbb{R}$ 如下: 对 $v_1,v_2,\cdots,v_k\in T_pM$, 取向量场 $X_1,\cdots,X_k$ 使得 $X_i|_p=v_i,\ i=1,2,\cdots,k$ (存在性由向量场扩张引理保证), 则定义 $B(p)(v_1,\cdots,v_k)=a(X_1|_p,\cdots,X_k|_p)$. 如果另有向量场 $Y_1,\cdots,Y_k$ 满足 $Y_i|_p=v_i,\ i=1,2,\cdots,k$, 那么考虑

$$\begin{aligned}a(X_1,\cdots,X_k)-a(Y_1,\cdots,Y_k)&=\sum_{i=1}^{k}\big(a(X_1,\cdots,X_i,Y_{i+1},\cdots,Y_k)\\&\qquad-a(X_1,\cdots,Y_i,Y_{i+1},\cdots,Y_k)\big)\\&=\sum_{i=1}^{k}a(X_1,\cdots,X_i-Y_i,Y_{i+1},\cdots,Y_k)\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

注意到 (3.1.2) 式的第 i 个分量在 p 处取 0, 所以由引理 3.1.9 知上式在 p 处取 0, 即

$$a(X_1|_p,\cdots,X_k|_p)=a(Y_1|_p,\cdots,Y_k|_p)$$

从而 $B(p)$ 是一个良定义的多重线性映射, 那么 $B:M\to T^{(0,k)}TM$ 是一个 k 阶共变张量场. □

3.2 微分形式

定义 3.2.1. 流形 M 上的一个**微分 k-形式**是指 M 上的一个交错的 k-阶共变张量场, 即一个光滑映射

$$\alpha:M\to\coprod_{p\in M}\left(\bigwedge^k T_pM\right)$$

且满足 $\pi\circ\alpha=1_M$. 微分 k-形式也简称 **k-形式**.

记号 3.2.2. 我们把 M 上所有微分 k-形式的集合记为 $\Omega^k(M)$. 按照逐点定义的加法与数乘, $\Omega^k(M)$ 构成一个 $C^\infty(M)$ 模, 这是我们在向量场处就熟知的. 与向量场不同的是, 微分形式之间还可以逐点定义楔积 $\Omega^k(M)\times\Omega^l(m)\to\Omega^{k+1}(M)$, 这使得 $C^\infty(M)\oplus\left(\bigoplus_{k\geq 1}\Omega^k(M)\right)$ 成为一个分次代数.

我们在定义 2.1.12 处定义了对偶空间之间的对偶映射, 而微分形式生活在余切空间 (的楔积) 之中, 所以我们想要将对偶映射推广到微分形式上.

定义 3.2.3. 设 $f: M \to N$ 是流形间的光滑映射, 那么定义 $f^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ 将 ω 映为 $f^*\omega$, 且 $f^*\omega$ 满足

$$(f^*\omega)(v_1, \cdots, v_k) = \omega(f_*(v_1), \cdots, f_*(v_k))$$

f^* 称为由 f 诱导的 N 到 M 的**拉回映射**. 此外, 为简便起见, 所有由 f 诱导的 $\Omega^n(N) \to \Omega^n(M)$, $n \in \mathbb{N}$ 的拉回映射都会使用同一个记号 f^*.

把向量空间看成最简单的流形, 那么定义 2.1.12 可以看作是拉回映射的特例.

命题 3.2.4 (拉回映射的性质)**.** *设 M, N, P 是微分流形, 光滑映射 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$, 那么有以下命题成立:*

1. *($\mathbb{R}$-线性性) $f^*: \Omega^n(N) \to \Omega^n(M)$, $n \in \mathbb{N}$ 都是 $\mathbb{R}$-线性的;*
2. *(函子性) 对 $\omega \in \Omega^k(P)$, 有*

$$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$$

3. *设 $h \in C^\infty(N)$, 那么有*

$$f^*(h\omega) = (h \circ f)f^*\omega$$

4. *对形式 ω, η, 有*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$$

证明. 简单计算. □

例 3.2.5. 设 M, N 都是 n 维流形, $f: M \to N$ 是光滑映射. 对一个 $\omega \in \Omega^n(N)$, 设 ω 在 N 的某个坐标卡 (V, ψ) 具有形式 $hy^1_* \wedge \cdots \wedge y^n_*$, 其中 $h \in C^\infty(N)$ (回忆命题 2.3.17). 我们考虑 ω 的拉回. 在 M 对应的坐标卡 (U, φ) 下计算有

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*(hy^1_* \wedge \cdots \wedge y^n_*) \\ &= (h \circ f)(y^1 \circ f)_* \wedge \cdots \wedge (y^n \circ f)_* \end{aligned}$$

设 $(y^i \circ f)_* := \sum_j a^i_j x^j_*$, 那么矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{bmatrix}$$

即为 f 在基 x_*^i 与 y_*^i 下的 Jacobi 矩阵, 从而有

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (h\circ f)(y^1\circ f)_*\wedge\cdots\wedge(y^n\circ f)_* \\ &= (h\circ f)\left(\sum_j a_j^1 x_*^j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_j a_j^n x_*^j\right) \\ &= (h\circ f)\det A x_*^1\wedge\cdots\wedge x_*^n \quad (\text{回忆命题 } 2.3.18) \\ &= (h\circ f)\det(\mathrm{d}f) x_*^1\wedge\cdots\wedge x_*^n \end{aligned}$$

微分形式最重要的一个运算是外微分运算.

定义 3.2.6. 如果一族 $\mathbb{R}$-线性映射 $\mathrm{d}:\Omega^{k+1}(M)\to\Omega^k(M)$ (对每个 $k\in\mathbb{N}$ 都用相同记号) 满足

1. $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$;
2. 对 $\omega\in\Omega^k(M),\eta\in\Omega^l(M)$ 有 $\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta$;
3. 对任意 $f\in C^\infty(M)$, $\mathrm{d}f$ 是 f 的微分 (张量场), 满足 $\mathrm{d}f(X)=Xf$,

那么称 d 为 M 上的一个**外微分**.

记号 3.2.7. 由于 $x_*^i=\mathrm{d}x^i$, 我们从现在开始弃用 x_*^i $(i=1,2,\cdots,n)$ 表示余标架场的记号, 全部使用 $\mathrm{d}x^i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

请时刻记住 d 是一族映射.

如同行列式, 我们也证明外微分是存在且唯一的.

命题 3.2.8. *每个流形 M 上存在唯一的一族外微分映射.*

证明. 对 $h\in C^\infty(M)$, 定义 $\mathrm{d}h=h_*$. 设 $\omega\in\Omega^k(M)$ $(k\geq 1)$, 取 M 的任一坐标卡 (U,φ), 设

$$\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_k}A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

定义

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}A_{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

我们证明这个定义是相容的. 假设另一个坐标卡 (V,ψ) 与 U 交非空, 且在 (V,ψ) 上

$$\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_k}B_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_k}$$

简记 $\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}:=\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k},\mathrm{d}y^{i_1,\cdots,i_k}:=\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_k}$. 那么由相等可知

$$\varphi^*\left(\sum_{i_1,\cdots,i_k}A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\right)=\psi^*\left(\sum_{i_1,\cdots,i_k}B_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}y^{i_1,\cdots,i_k}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\\
\Longrightarrow\quad =\ &\sum_{i_1,\cdots,i_k} (\varphi^{-1}\circ\psi)^* B_{i_1,\cdots,i_k} (\varphi^{-1}\circ\psi)^*(\mathrm{d}y^{i_1,\cdots,i_k})\\
&\sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\\
\Longrightarrow\quad =\ &\sum_{i_1,\cdots,i_k} \det\mathrm{d}(\varphi^{-1}\circ\psi)(B_{i_1,\cdots,i_k}\circ\psi\circ\varphi^{-1})\,\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}
\end{aligned}$$

最后一行是例 3.2.5 的结果. 那么计算两个坐标卡上的外微分有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}A_{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\\
=\ &\sum_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}\Big(\det\mathrm{d}(\varphi^{-1}\circ\psi)B_{i_1,\cdots,i_k}\circ\psi\circ\varphi^{-1}\Big)\wedge\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\\
=\ &\sum_{i_1,\cdots,i_k} \det\mathrm{d}(\varphi^{-1}\circ\psi)\,\mathrm{d}B_{i_1,\cdots,i_k}\circ\psi_*\circ\varphi_*^{-1}\wedge\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\\
=\ &\sum_{i_1,\cdots,i_k} (\varphi^{-1}\circ\psi)^*(\mathrm{d}B_{i_1,\cdots,i_k})\wedge(\varphi^{-1}\circ\psi)^*(\mathrm{d}y^{i_1,\cdots,i_k})\\
\Longrightarrow\quad &(\varphi)^*\left(\sum_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}A_{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\right)\\
=\ &(\psi)^*\left(\sum_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}B_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}y^{i_1,\cdots,i_k}\right)
\end{aligned}$$

从而外微分是相容的.

我们证明这个 d 满足外微分的公理, 按我们的构造, 这只需要在一个坐标卡上考虑. 显然 d 是 $\mathbb{R}$-线性的. 我们验证 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$. 容易注意到对 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$\mathrm{d}f=\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$$

对一个 $\omega=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)&=\mathrm{d}\left(\sum_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}A_{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\\
&=\mathrm{d}\left(\sum_{r,i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial A_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x^r}\,\mathrm{d}x^r\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\\
&=\sum_{r,s,i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial^2 A_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x^r\,\partial x^s}\wedge\mathrm{d}x^s\wedge\mathrm{d}x^r\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}
\end{aligned}$$

而注意到系数 $\dfrac{\partial^2 A_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x^r\,\partial x^s}$ 同时对应了 $\mathrm{d}x^s\wedge\mathrm{d}x^r\wedge\cdots$ 与 $\mathrm{d}x^r\wedge\mathrm{d}x^s\wedge\cdots$ 两个形式, 所以互相抵消, 有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$. 其次对

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\\ \eta &= \sum_{j_1,\cdots,j_l} B_{j_1,\cdots,j_l}\,\mathrm{d}x^{j_1,\cdots,j_l}\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) &= \mathrm{d}\left(\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_l}} A_{i_1,\cdots,i_k}B_{j_1,\cdots,j_l}\,\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1,\cdots,j_l}\right)\\
&= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_l}} (B_{j_1,\cdots,j_l}\,\mathrm{d}A_{i_1,\cdots,i_k}+A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}B_{j_1,\cdots,j_l})\wedge\\
&\qquad \wedge\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1,\cdots,j_l}\\
&= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_l}} B_{j_1,\cdots,j_l}\,\mathrm{d}A_{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1,\cdots,j_l}\\
&\qquad +(-1)^k\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_l}} A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1,\cdots,i_k}\wedge\mathrm{d}B_{j_1,\cdots,j_l}\wedge\mathrm{d}x^{j_1,\cdots,j_l}\\
&= \mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

其中第 2 个等号是 Leibniz 法则, 第 3 个等号是反交换律. 所以 d 满足 $\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta$. 按定义 d 一定满足 $\mathrm{d}f(X)=Xf$.

以下我们证明外微分的唯一性. 只需要在一个坐标卡上证明任意外微分 δ 都满足 d 的定义, 我们对 k 使用归纳法. $k=1$ 时, 由外微分的定义一定有 $\delta: C^\infty\to\Omega^1(M)$ 与 $\mathrm{d}: C^\infty\to\Omega^1(M)$ 相等. 那么 $\delta x^i=\mathrm{d}x^i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 余切向量场. 由 $\mathbb{R}$-线性性, 只需考虑单项式即可, 那么考虑 $f\,\mathrm{d}x^i$, 有

$$\begin{aligned}\delta(f\,\mathrm{d}x^i) &= \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^i - f\delta(\delta x^i)\\ &= \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^i\end{aligned}$$

所以 $\delta:\Omega^1(M)\to\Omega^2(M)$ 与 $\mathrm{d}:\Omega^1(M)\to\Omega^2(M)$ 相等. 假设命题在 k 处成立, 即 $\delta:\Omega^{k-1}(M)\to\Omega^k(M)$ 与 $\mathrm{d}:\Omega^{k-1}(M)\to\Omega^k(M)$ 相等. 考虑 $\omega=f\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{k+1}}$, 记 I 为取值为 1 的常值函数, 则

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}((f\,\mathrm{d}x^{i_1})\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{k+1}})$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x^{i_1}) \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{k+1}} + f\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}(I\,\mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{k+1}}) \\
&= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{k+1}} \quad (\mathrm{d}I = 0)
\end{aligned}
$$

因此 $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 与 $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 相等. 从而由归纳法可知 $\delta = \mathrm{d}$, 即外微分一定是唯一的. □

命题 3.2.8 同时给出了计算外微分的方法. 此外, 在计算外微分时我们也会用到如下命题:

命题 3.2.9 (外微分的自然性)**.** *对任意光滑映射 $f : M \to N$ 与 $\omega \in \Omega^k(N)$, 都有 $f^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(f^*\omega)$.*

证明. 仍然只需要考虑任意的一个坐标卡. 设 $\omega = \sum\limits_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}$, 那么有

$$
\begin{aligned}
f^* \mathrm{d}\omega &= f^* \left(\sum_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}A_{i_1,\cdots,i_k} \wedge \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k} \right) \\
&= \sum_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}(A_{i_1,\cdots,i_k} \circ f) \wedge \mathrm{d}(y^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ f) \\
&= \mathrm{d}\left(\sum_{i_1,\cdots,i_k} (A_{i_1,\cdots,i_k} \circ f)\,\mathrm{d}(y^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ f) \right) \\
&= \mathrm{d}\left(f^* \left(\sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1,\cdots,i_k}\,\mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k} \right) \right) \\
&= \mathrm{d}(f^*\omega)
\end{aligned}
$$

□

最后我们讨论微分形式的一个简单应用: 我们可以使用微分形式判断流形是否可定向.

命题 3.2.10. *n 维微分流形 M 可定向的充分必要条件是 M 上存在处处非零的 n-形式.*

引理 3.2.11. *设 M 是连通的微分流形, $f \in C^\infty(M)$ 处处非零, 那么 f 一定恒正或恒负.*

证明. 由于连续映射将连通集映为连通集 [3, 定理 4.7], 所以 $f(M) \subset \mathbb{R}$ 一定是连通的. 如果 $f(M)$ 中同时出现了正数与负数, 那么按连通性, 一定有 $0 \in f(M)$, 与假设矛盾. □

命题 3.2.10 的证明. *必要性.* 我们取一组定向相同的图册 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, 并取一列从属于此图册的单位分解 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. 设 $\operatorname{supp} f_k \subset U_{\alpha_k}$, U_{α_k} 上的余向量场为 $\mathrm{d}x_k^i$, 那么取

$$
\omega_k\big|_p = \begin{cases} f_k(p)\,\mathrm{d}x_k^1|_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k^n|_p, & p \in U_{\alpha_k} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}
$$

并取

$$\omega=\sum_{k\in\mathbb{N}}\omega_k$$

由局部有限性知上式收敛. 对任意的一点 $p\in M$, 设包含 p 的支集 (经过重排后) 为 $\operatorname{supp}f_1,\cdots,\operatorname{supp}f_r$. 那么在包含 $\operatorname{supp}f_1$ 的坐标卡 $(U_{\alpha_1},\varphi_{\alpha_1})$ 上有

$$\begin{aligned}\omega|_p&=\sum_{i=1}^{r}(\varphi_{\alpha_i}^{-1}\circ\varphi_{\alpha_1})^*(f_i\,\mathrm{d}x_i^1|_p\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_i^n|_p)\\&=\sum_{i=1}^{r}\det\mathrm{d}(\varphi_{\alpha_1}^{-1}\circ\varphi_{\alpha_i})(f_i\circ\varphi_{\alpha_1}^{-1}\circ\varphi_{\alpha_i})\,\mathrm{d}x_1^1|_p\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_1^n|_p\end{aligned}$$

由于每个 $\det\mathrm{d}(\varphi_{\alpha_1}^{-1}\circ\varphi_{\alpha_i})$ 与 $f_i\circ\varphi_{\alpha_1}^{-1}\circ\varphi_{\alpha_i}$ 都是恒正的, 所以 $\omega|_p\neq 0$. 又由于 p 的任意性, 可知 ω 在 M 上恒非零.

充分性. 设 ω 是一个在 M 上恒非零的 n-形式, 我们按如下方式构造一个图册 $\mathcal{U}$: 对任意 $p\in M$, 取一个包含 p 的坐标卡 (U_p,φ_p), 必要时将 U_p 缩小为 p 所在的连通分支, 那么在 U_p 上 ω 可以表示为

$$\omega=A_p\,\mathrm{d}x_p^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p^n$$

由引理 3.2.11 可知, A_p 恒正或恒负. 如果恒负的话, 将 φ_p 复合一个对称变换可以使得 A_p 恒正. 取 $\mathcal{U}=\{(U_p,\varphi_p)|\ p\in M\}$, 那么 $\mathcal{U}$ 是一个图册. 我们证明 $\mathcal{U}$ 中的坐标卡可以决定一个定向. 对任意交非空的 $(U_p,\varphi_p),(U_q,\varphi_q)\in\mathcal{U}$, 设在 $U_p\cap U_q$ 上 ω 分别表示为 $A_p\,\mathrm{d}x_p^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p^n$ 与 $A_q\,\mathrm{d}x_q^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_q^n$, 那么一定有

$$A_p\,\mathrm{d}x_p^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p^n=\det\mathrm{d}(\varphi_q^{-1}\circ\varphi_p)(A_q\circ\varphi_q^{-1}\circ\varphi_p)\,\mathrm{d}x_p^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_p^n$$

从而

$$A_p=\det\mathrm{d}(\varphi_q^{-1}\circ\varphi_p)(A_q\circ\varphi_q^{-1}\circ\varphi_p)$$

但 A_p,A_q 都是恒正的, 所以一定有 $\det\mathrm{d}(\varphi_q^{-1}\circ\varphi_p)>0$, 从而 M 是可定向的. □

3.3 Riemann 流形

第一章与第 3.1, 3.2 节的内容属于流形的*微分拓扑*, 而我们在这一节将会引入我们在第 1.1 节提到的属于*微分几何*的一个结构: *Riemann 度量*.

Riemann 度量是欧氏空间中内积的推广, Riemann 度量让我们能够在流形上定义长度, 角度, 面积等等一系列几何量, 并给出较之前几章多得多的几何信息. 同时, Riemann 度量也使得*等距变换群*有了意义, 从而我们进入了 Erlangen 纲领的轨道上, 正式开始了 "几何学" 的讨论.

定义 3.3.1. 流形 M 上的一个 **Riemann 度量张量** (也简称为度量张量或度量) 是 M 上的一个对称, 正定的 2 阶共变张量场, 通常记为 $\langle\ ,\ \rangle$. 一个流形与其上的一个度量 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ 被称为一个 **Riemann 流形**.

评注 3.3.2. 在许多采用经典 Riemann 几何语言的教材上 (如 [1, 7] 等), Riemann 流形有一个等价的定义: Riemann 流形 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ 是一个流形 M 与在其每一点的切空间 T_pM 上光滑地指派的一个内积 $\langle\ ,\ \rangle_p$, 光滑意为对任意 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 都有 $\langle X, Y\rangle \in C^\infty(M)$.

本页特意留空.

第 4 章

$\mathbb{R}^3$ 中的曲线

本章是前后那些 “抽象而恐怖” 的章节之间的一个休息, 我们来讨论一下古典曲线论的内容. 一般来说 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线指的是一个连续或者光滑的映射 $c: I \to \mathbb{R}^3$, 其中 I 是一个区间. 我们也会提到正则性, 这是说对 $t \in I$ 总有

$$c'(t) = ((c^1)'(t), (c^2)'(t), (c^3)'(t)) \neq 0$$

接下来我们假设曲线都是光滑而正则的, 然后开启我们的旅程.

本页特意留空.

参考文献

[1] Manfredo P. do Carmo. *Differential forms and applications*. Springer-Verlag, Berlin, **1994**: x+118. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57951-6.

[2] Felix Klein. "*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*". *Math. Ann.* **1893**, *43*(1): 63–100. https://doi.org/10.1007/BF01446615.

[3] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Second. Springer, New York, **2011**: xviii+433. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7940-7.

[4] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Second. Springer, New York, **2013**: xvi+708. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5.

[5] Joseph J. Rotman. *Advanced modern algebra. Part 1*. Third. American Mathematical Society, Providence, RI, **2015**: xiv+706. https://doi.org/10.1090/gsm/165.

[6] Michael Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, **1965**: xii+144.

[7] Loring W. Tu. *Differential geometry*. Springer, Cham, **2017**, Connections, curvature, and characteristic classes: xvi+346. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55084-8.

[8] Vladimir A. Zorich. *Mathematical analysis. I*. Second. Springer-Verlag, Berlin, **2015**: xx+616. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1.

[9] 梅加强。*流形与几何初步*。北京：科学出版社，**2013**。

[10] 欧几里得。*几何原本*。兰纪正，朱恩宽 译。西安：陕西科学技术出版社，**2003**。