曲面曲线论笔记

魔法少女 Alkali

北京师范大学数学科学学院

2022 年 5 月

前言

还没想好写什么.

目录

第 0 章

准备

0.1 几何学是什么?

现代几何学源于古希腊. 在古希腊语中, “几何学” 一词为 γεωμετρία *(geōmetría)*, 意为测量大地. 这反映了早期几何学主要是对长度, 面积, 体积, 角度的经验性原理的收集, 主要用于满足实用性用途. 直至今日, 初步的几何学教学仍然是从对几何体的大小的直观认识开始的. 因此几何学的一个经典要件就是度量.

Euclid 所著的 *Elements* (汉语中通常称作《几何原本》) 是古希腊几何的代表. 他在 *Elements* 的开篇引入了这样的一条公理:

> **公理** 4. 彼此能重合的物体是全等的.

然后第一个引用了这条公理的命题是

> **命题** 4. 如果两个三角形中, 一个的两边分别等于另一个的两边, 而且这些线段所夹的角相等. 那么它们的底边等于底边, 这样其余的角也等于相应的角, 即那些等边所对应的角.
>
> (译文引自 [4])

在这最原始的直觉中, “重合” 蕴含了运动的概念, 而边角的相等则蕴含了不变量的概念. 因此, 几何学的另一个经典要件就是变换与不变量.

古希腊的几何学主要研究直线与圆锥曲线. 到了微积分发明之后, 数学家可以使用微积分的工具来研究更一般的几何体了. Leibniz 通过密切圆引入了曲线的曲率, Bernoulli 与 Euler 研究了曲面的法曲率与测地线. 对 “曲” 的研究正式进入了几何学之中. 1827 年,

Gauss 在论文 *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (关于曲面的一般研究) 中证明了 "Gauss 绝妙定理" (Theorema Egregium). 从此一种观念开始进入几何学: 我们可以研究抽象的几何体, 而不考虑它在欧式空间中的实现. 进而不久非欧几何便产生了.

回到几何学的两个要件上. 有了以上基础, 1854 年 Riemann 写作了论文 *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (论奠定几何学基础的假设), 正式引入了 Riemann 度量与流形的概念 (之后的笔记中我们会详细解释这两个概念). 同时, 19 世纪正在经历一个射影几何的复兴潮, 当时正在流行使用射影变换的方法研究射影几何. 于是在 1893 年 F. Klein 发表了对整个几何学的 "总结性" 综述 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (关于近代几何学研究的比较考察). 文章中提到几何学的目的在于

> 给定一个流形和其上的变换群, 建立关于这个变换群的不变量理论.
>
> ([1], 自译)

自此, 经典几何学的舞台已经搭好. 但我们还有一个问题:

问题. *微分几何是什么?*

接下来我们开始慢慢搭微分几何的舞台.

0.2 微分流形

由于我们要在一般的几何体上处理问题, 所以我们要先引入*流形*的概念. 在数学分析的课程中, 我们学习过了 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形的概念 (例如在 [2] 的第 8 章). k 维子流形的概念是一个局部长得像 $\mathbb{R}^k$ 的空间. 这启发我们给出一般流形的定义:

定义 0.2.1. 一个 n 维**拓扑流形** M 是一个第二可数, Haussdorf 的拓扑空间, 并且 M 的每一点都有一个邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集.

评注 0.2.2. 拓扑流形定义中的第二可数与 Haussdorf 这两个条件目前看不出来有什么作用, 但这两个条件能够保证*单位分解定理*这个重要的工具成立, 之后遇到了我们会再讨论这一点. 此外, 给出上述定义之后我们需要证明 n 维拓扑流形是良定义的, 即证明 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 在 $m \neq n$ 时不同胚, 但这需要用到代数拓扑的工具. 不过证明微分流形是良定义的会相对比较简单, 之后我们会处理这件事情.

由于我们不太需要关心流形的拓扑, 所以以上定义对微分几何来说其实并不是特别重要[1]. 对流形而言, 重要的是它上面的*微分结构*.

---

[1] 也就是你不懂的话也不必深究的意思.

定义 0.2.3. 设 M 是 n 维拓扑流形. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的一族开覆盖, 满足其中每个开集都同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 每个开集对应的同胚映射 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ 被称为**坐标卡**. 如果两个坐标卡 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ 满足 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在其定义域上是 C^∞ 的, 那么称这两个坐标卡相容. 如果这一族开覆盖的任意两个坐标卡相容, 那么这一族开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 便称为 M 的一个**图册**. 如果 M 的一个图册中无法再加入新的相容的坐标卡, 那么称这个图册是**极大**的. 极大的图册构成 M 的一个**微分结构**. 拥有微分结构的拓扑流形被称为**微分流形**.

有时我们会将 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 称为**转移函数**. 我们有一张图可以用来直观地理解转移函数:

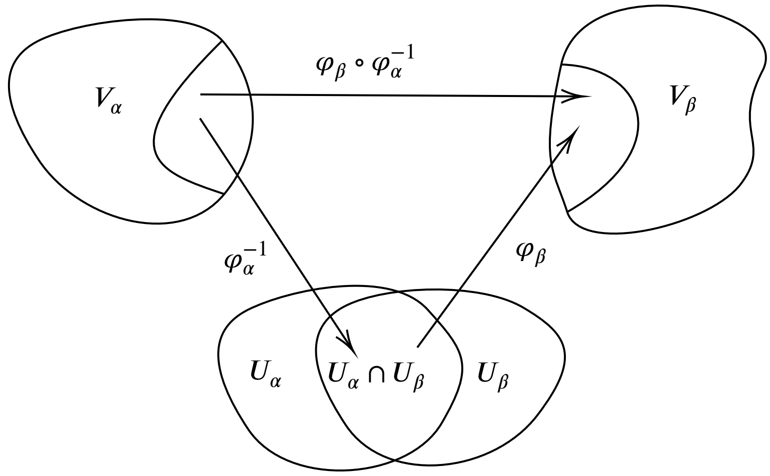

图 1: 转移函数

例 0.2.4. 我们举几个微分流形的例子.

(1) $\mathbb{R}^n$, 以恒等映射 $1_{\mathbb{R}^n}$ 为坐标卡. 我们指出一点, 证明一个流形具有微分结构只需要找出一组图册就可以了, 这组图册对应的微分结构就是所有与图册相容的坐标卡的集合. 一般将恒等映射所在的图册称为 $\mathbb{R}^n$ 的**标准微分结构**.

(2) $\mathbb{R}$, 以 $\varphi : u \mapsto u^3$ 为坐标卡. 注意到 φ 是 $\mathbb{R}$ 到自身的同胚, 所以决定了一个微分结构. 但是 $1_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}$ 在 $u = 0$ 处不可导, 所以这个微分结构与标准微分结构不相容. 这说明了一个微分流形上的微分结构可以有不止一个.

(3) 单位球面 $\mathbb{S}^n$, 南北两极的球极投影. 两个球极投影 p_N, p_S 分别满足

$$p_N(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$p_S(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

在截面上用简单的平面几何可以推出转移函数为 $1_{\mathbb{R}^n}/|1_{\mathbb{R}^n}|^2$, 是光滑函数.

由于我们主要关心曲线曲面论, 所以我们不在这里再举其他奇怪 (但是有趣) 的流形的例子了. 而作为流形的曲线与曲面, 我们将在后面子流形的部分讨论它们.

微分结构的一个很重要的作用是可以定义光滑函数.

定义 0.2.5. 设 M 是微分流形, 函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 被称为是**光滑**的是指对任意 $p \in M$, 都存在一个包含 p 的坐标卡 (U, φ) 使得 $f \circ \varphi$ 是 C^∞ 的.

记号 0.2.6. 我们用 $C^\infty(M)$ 来表示 M 上全体光滑函数的集合, 在逐点定义的加法与乘法下, 这是一个 $\mathbb{R}$-代数 (同时是交换环与 $\mathbb{R}$-向量空间).

在这一节的最后我们引入流形的定向的概念.

定义 0.2.7. 设 M 是微分流形, 如果它拥有一组图册满足任意转移函数的 Jacobi 行列式 $\det \mathrm{d}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$, 那么就称 M 为**可定向流形**, 这样的一组图册称为给出了 M 的一个**定向**; 否则称 M 为**不可定向流形**.

例 0.2.8. (1) $\mathbb{R}^3$ 的一组基对应了一个坐标卡, 转移函数的行列式就是过渡矩阵的行列式. 我们知道 $\mathbb{R}^3$ 的基有左手系和右手系的区分, 右手系到右手系的过渡矩阵行列式为正, 右手系到左手系的过渡矩阵行列式为负. 因此左手系和右手系分别决定了 $\mathbb{R}^3$ 的一种定向, 这也是定向这一概念的来源.

(2) 如果流形 M 的一个图册中只有两个坐标卡, 那么 M 一定可定向: 设这两个坐标卡是 (U_1, φ_1) 与 (U_2, φ_2), 如果 $\det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0$, 那么已经完成证明; 否则我们复合一个 $\mathbb{R}^n$ 上的反射变换 r, 得到新的坐标卡 $\varphi_3 = r \circ \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$, 那么新的图册 $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_3)\}$ 就满足 $\det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}) = \det \mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \det r^{-1} > 0$, 从而 M 可定向.

(3) 按照上面的判别法, 单位球面 $\mathbb{S}^n$ 拥有两个球极投影构成的图册, 所以是可定向的.

关于流形的定向有一个基础的结论:

命题 0.2.9. *一个连通的可定向流形恰好有两个定向.*

证明. 证明这个命题需要一些拓扑论证, 但我们不希望在这份笔记里出现太多的拓扑, 所以我们直接引用 [3, 引理 1.1.2]. □

事实上确实存在不可定向的流形, 比如大家熟悉的 Möbius 带, 我们在之后再来讨论这个例子.

0.3 切空间与微分映射

用 “切” 的手段来研究流形是微分几何学的基本想法, 我们在这一节建立有关切的几个概念. 首先我们使用内蕴的方法定义切向量, 并定义切空间与切丛. 然后我们讨论切空间之间的微分映射, 以及通过链式法则得到的重要推论, 即维度的微分同胚不变性.

切向量与切空间

在数学分析课程中, 我们会考虑由函数图像给定的曲面, 并使用这个函数的微分映射的像来定义切平面. 但是在一般的微分流形中, 我们没有办法先验地给坐标卡定义微分, 所以我们要寻找其他的办法来定义流形的切向量.

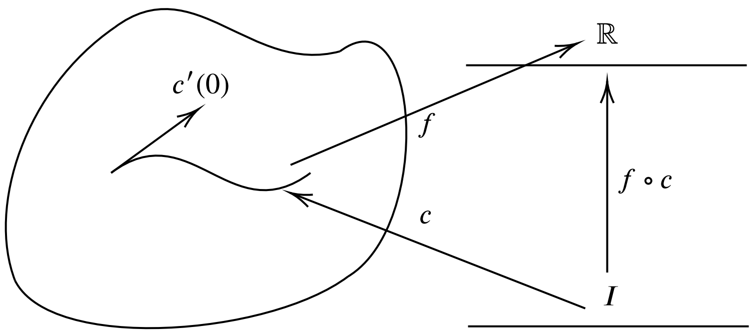

图 2: 曲面上的切向量

对于曲面 S 上 p 点处的一个切向量 v, 我们可以找到一条曲线 $c : I \to S$ 使得 $p = c(0), v = c'(0)$ (这里的导数定义为逐分量求导). 为了去掉全空间, 我们考虑一个函数 $f : S \to \mathbb{R}$, 那么由链式法则有

$$(f \circ c)'(0) = \langle \operatorname{grad} f(p), c'(0)\rangle$$

我们熟悉右侧是由切向量决定的方向导数. 由梯度与内积的线性性可知

$$((\lambda f + \mu g) \circ c)'(0) = \lambda(f \circ c)'(0) + \mu(g \circ c)'(0) \tag{0.3.1}$$

又由乘积函数的求导法则, 可以得到

$$((fg) \circ c)'(0) = (f \circ c)(0)(g \circ c)'(0) + (g \circ c)(0)(f \circ c)'(0) \tag{0.3.2}$$

通过以上式子, 我们可以看出方向导数可以被 S 上的曲线决定, 从而并不需要全空间. 事实上, (0.3.1) 和 (0.3.2) 两个性质就足够给出方向导数的定义了.

定义 0.3.1. 对 n 维微分流形 M 与 $p\in M$, 点 p 处的一个**切向量** v 是一个 $C^\infty(M)$ 到 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{R}$-线性映射, 并且满足 *Leibniz* 法则: 对任意 $f,g\in C^\infty(M)$ 有 $v(fg)=f(p)v(g)+g(p)v(f)$. p 处所有的切向量的集合构成 p 处的**切空间** T_pM.

通过显然定义的加法与数乘, T_pM 构成一个 $\mathbb{R}$-向量空间. 我们接下来讨论一下 T_pM 的维度.

首先我们考虑一个包含 p 的坐标卡 (U,φ), 定义 n 个切向量 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (i=1,2,\cdots,n)$, 满足

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

等式右侧是 $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数对 u^i 分量的偏导数[2]. 为了简洁起见, 之后在 p 点确定的时候我们会省略这个脚标. 按照我们前面的讨论, 它们确实满足线性性和 Leibniz 法则, 所以是切向量 (用古典微分几何的语言来说, $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 相当于 f 复合一个坐标曲线之后再求导). 我们期望它们刚好就是 T_pM 的一组基. 为此我们建立以下引理:

引理 0.3.2. *切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}(i=1,2,\cdots,n)$ 线性无关.*

证明. 记函数 $x^i=\pi^i\circ\varphi^{-1}$, 其中 π^i 为向第 i 个分量的投影. 设有线性关系

$$\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x^i}=0 \tag{0.3.3}$$

用 (0.3.3) 两端作用在 x^i 上, 可以得到 $c_i=0$. 由 i 的任意性可知 $\frac{\partial}{\partial x^i}(i=1,2,\cdots,n)$ 线性无关. □

记号 0.3.3. 我们第一次遇到了求和式. 以后如果遇到的是有限求和, 我们会省略求和上下限, 并且此时如果有多个指标, 可以交换求和顺序, 我们会把指标写在一个求和号底下. 不过我们永远不会使用 Einstein 求和约定.

我们接下来说明 T_pM 可以被 $\frac{\partial}{\partial x^i}(i=1,2,\cdots,n)$ 生成.

引理 0.3.4. *设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中 0 的一个邻域, $f\in C^\infty(U)$. 那么存在 $f_1,\cdots,f_n\in C^\infty(U)$ 使得*

$$f(u)=f(0)+\sum_i u^i f_i(u)$$

且 $f_i(0)=\frac{\partial f}{\partial u^i}(0)$.

---

[2] 虽然后面我们会看出 $\partial/\partial x^i$ 表现得确实很像偏导数, 但是请仔细区分偏导数与切向量: 偏导数是定义在 $\mathbb{R}^n$ 里的.

证明. 固定 $u \in U$, 考虑关于 t 的函数 $f(tu)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(u) - f(0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tu)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i} u^i\,\mathrm{d}t \quad (\text{链式法则}) \\
&= \sum_i u^i \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

取 $f_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial f(tu)}{\partial u^i}\,\mathrm{d}t$ 即可 (光滑性容易验证). □

命题 0.3.5. T_pM 可以被 $\frac{\partial}{\partial x^i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 生成, 这组基称为关于坐标卡 φ 的**坐标基**.

证明. 设 $v \in T_pM$, 不妨设 $\varphi(p) = 0$. 对任意一个 $f \in C^\infty(M)$, 由引理 0.3.4, 可以将 $(f \circ \varphi^{-1})(u)$ 写成

$$
(f \circ \varphi^{-1})(0) + \sum_i u^i (f_i \circ \varphi^{-1})(u) \tag{0.3.4}
$$

设 x^i 定义如引理 0.3.2, 那么可以将 (0.3.4) 写成

$$
f(p) + \sum_i x^i f_i \tag{0.3.5}
$$

注意到对常函数 c 总有

$$
v(c) = v(1 \cdot c) = 1 \cdot v(c) + cv(1) = 2v(c)
$$

从而 $v(c) = 0$, 那么将 v 作用在 (0.3.5) 有

$$
\begin{aligned}
v(f) &= \sum_i v\left(x^i f_i\right) \\
&= \sum_i \left(x^i(p) v(f_i) + f_i(p) v(x^i)\right)
\end{aligned}
$$

注意到 $x^i(p) = \pi^i \circ \varphi(p) = 0$, 且由引理 0.3.4 可知

$$
f_i(p) = (f_i \circ \varphi^{-1})(0) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p
$$

所以有

$$
v(f) = \sum_i v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}
$$

注意到上式对所有 f 均成立, 所以有

$$v = \sum_i v(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \tag{0.3.6}$$

□

推论 0.3.6. *n 维流形上任意一点处的切空间维度为 n.*

评注 0.3.7. 在一些文献中坐标卡的逆映射 φ^{-1} 会被称为**局部坐标系**, 而

$$c^i(t) = \varphi^{-1}(0, \cdots, \overset{\text{第}i\text{个分量}}{t}, \cdots, 0)$$

被称为**坐标曲线**, 尤其是古典微分几何教材喜欢用这个术语. 那么就有

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = (f \circ c^i)'(0)$$

(依然假设 $\varphi(p) = 0$). 当局部坐标系成为 $\mathbb{R}^n$ 的恒等映射时, 坐标曲线变成了坐标轴, $(f \circ c^i)'$ 刚好就是对第 i 个分量的偏导数, $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 与数学分析中使用的偏导记号便一致了. 因此我们便选择了这样一个记号来表示切空间的基.

我们给出一个很重要的构造.

定义 0.3.8. 定义 $TM := \{(p, v) | p \in M, v \in T_pM\}$, 或者用不交并这个更代数的记号写作 $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$, 称为 M 的**切丛**. 切丛的**自然投影映射** $\pi : TM \to M$ 将每个 (p, v) 映为 p.

命题 0.3.9. *n 维流形 M 的切丛 TM 是一个 $2n$ 维流形.*

证明. 我们承认 TM 是一个拓扑流形. 设 M 有微分结构 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, 我们按照如下方式赋予 TM 微分结构: 对一个坐标卡 (U, φ), φ 的坐标基诱导了一个 T_pM 到 $\mathbb{R}^n$ 的向量空间同构 $I_\varphi : T_pM \to \mathbb{R}^n$. 取开覆盖 $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \varphi_\alpha \times I_{\varphi_\alpha})\}_{\alpha \in A}$, 我们证明它是相容的, 从而给出了 TM 的一个微分结构. 对 $(U_1 \times \mathbb{R}^n, \varphi_1 \times I_{\varphi_1})$ 与 $(U_2 \times \mathbb{R}^n, \varphi_2 \times I_{\varphi_2})$, 容易验证

$$(\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = \varphi_1^{-1} \times I_{\varphi_1}^{-1}$$

从而转移函数为

$$(\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

这显然是光滑的, 因此 φ_1, φ_2 是相容的. 由 φ_1, φ_2 的任意性可知命题成立.

因此 φ_1, φ_2 是相容的. 由 φ_1, φ_2 的任意性可知命题成立. □

这应该是我们遇到的第一个与常见的曲线曲面相去甚远的流形.

评注 0.3.10. 命题 0.3.9 中给出的坐标卡 $\varphi \times I_\varphi$ 使得 TM 在局部同胚于 $V \times \mathbb{R}^n$, 这叫做 TM 的**局部平凡化**. 实际上这也是我们对切丛的直观: 每一点处长出了一根由切空间构成的纤维.

关于切丛的一个简单的性质是:

命题 0.3.11. *无论 M 是否可定向, 切丛总是可定向的.*

证明. 我们考虑命题 0.3.9 证明中的转移函数的行列式, 有

$$\det \mathrm{d}((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = \det \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \det \mathrm{d}(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1})$$

而对 $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$, 我们有 $I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \cdots, u^n) = \sum\limits_j u^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$, 而由 (0.3.6) 可知

$$I^i_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1^{-1}}(u^1, u^2, \cdots, u^n) = \sum_i u^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_p$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial u^j} I^i_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1^{-1}} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

那么 $\det \mathrm{d}(I_{\varphi_2} \circ I_{\varphi_1}^{-1}) = \det \left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{i,j}$. 又注意到

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^i} = \frac{\partial(\pi^i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)}{\partial u^j}$$

所以 $\left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{i,j} = \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$, 因此

$$\det \mathrm{d}((\varphi_2 \times I_{\varphi_2}) \circ (\varphi_1 \times I_{\varphi_1})^{-1}) = (\det \mathrm{d}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}))^2 > 0$$

□

微分映射

我们把光滑性推广到任意两个流形间的映射上.

定义 0.3.12. 设 f 是微分流形 M, N 间的映射 $f: M \to N$, 如果对 M, N 的微分结构 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ 中任意两个坐标卡 φ, ψ 有 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的, 那么称 f 是光滑的.

显然定义 0.3.12 与定义 0.2.5 是相容的.

对流形间的光滑映射, 我们没有办法像数学分析中那样把微分定义为最佳逼近的线性映射. 不过我们可以像上一小节那样考察一下切向量的行为. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f 在 x 点处的微分是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个线性映射, 在各自的标准正交基下可以表示为一个 $m \times n$ 矩阵 L_x. L_x 把一个 $v \in \mathbb{R}^n$ 映到一个 $L_x v \in \mathbb{R}^m$. 考虑一个 $\mathbb{R}^m$ 上的光滑函数 $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 设它的梯度表示为行向量 N, 那么 g 在 $f(x)$ 点处沿 $L_x v$ 方向的方向导数为

$$\langle \operatorname{grad} g(f(x)), L_x v \rangle = g L_x v$$

由链式法则可知 $g L_x$ 是 $g \circ f$ 在 x 点处的微分, 因此 $L_x v$ 在一个函数上的作用相当于 v 在这个函数复合 f 之后的函数上作用. 把这个过程整理一下, 我们可以类比地给出流形间光滑映射的微分:

定义 0.3.13. 设 $f : M \to N$ 是光滑映射, 那么 f 在 $p \in M$ 点处的微分 $f_*|_p : T_p M \to T_{f(p)} N$ 将 $v \in T_p M$ 映为 $f_*|_p(v)$, $f_*|_p(v)$ 在 $C^\infty(N)$ 上的作用为 $f_*|_p(v)(g) = v(g \circ f)$.

显然微分映射是线性映射.

记号 0.3.14. 微分映射传统的记号是 df_p 或者 $df(p)$, 但现在更多会写成我们定义的这个形式. 具体为什么我们留到后面再讲. 和之前一样, 如果 p 点是明确的, 我们就不会写脚标.

我们接下来证明关于微分映射最重要的结论:

定理 0.3.15 (链式法则)**.** 设流形 M, N, P 间有光滑映射 $f : M \to N, g : N \to P, h = g \circ f$. 点 $p \in M, q \in N, r \in P$ 满足 $f(p) = q, g(q) = r$, 那么一定有 $h_*|_p = g_*|_q \circ f_*|_p$. 换言之, 图表

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & P \\ & N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

交换蕴含以下图表交换

$$\begin{tikzcd} T_p M \arrow[rr, "h_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & T_r P \\ & T_q N \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

证明. 对 $v \in T_p M$ 与 $\psi \in C^\infty(P)$, 我们有

$$(g_* \circ f_*)(v)(\psi) = g_*(f_* v)(\psi)$$

$$
\begin{aligned}
&= f_*(v)(\psi \circ g) \\
&= v(\psi \circ g \circ f) \\
&= v(\psi \circ h) \\
&= h_*(v)(\psi)
\end{aligned}
$$

由 v 与 ψ 的任意性即知 $g_* \circ f_* = h_*$. □

作为链式法则的第一个应用, 我们来证明之前被搁置的一个问题, 那就是微分流形维度的良定义性.

命题 0.3.16. 设开集 $U \subset \mathbb{R}^m$ 与开集 $V \subset \mathbb{R}^n$ 微分同胚, 即存在一个双射 $\varphi : U \to V$ 使得 φ, φ^{-1} 都是 C^∞ 的, 那么一定有 $m = n$. 特别的, 微分流形的维度是良定义的.

证明. 由于 $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi \circ \varphi^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$, 在某一点取微分可以得到

$$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = 1_{\mathbb{R}^m}, \varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$$

从而 φ_* 同时有左右逆, 是向量空间之间的同构, 那么一定有 $m = n$.
对一个微分流形 M 而言, M 的维度定义为与微分结构中的一个开集 U 同胚的 $\varphi(U)$ 所在欧式空间的维度. 而对两个不同的 $\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)$ 而言, 两个方向的转移函数构成了它们 (的一部分) 之间的微分同胚, 按照上面的论证, 它们所在的欧式空间维度一定是一样的. 所以微分流形的维度是良定义的. □

评注 0.3.17. 最后我们解释一下 f_* 这个记号. 微分对复合映射的作用 $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ 表现得很像范畴论中的*协变函子*, 而一类很常见的协变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, \quad) : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ 作用在 $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$ 上得到的态射一般会记为 h_*. 选用这个记号可以一定程度上体现协变性. 此外, f_* 也会被称为*推前映射*, 也许是因为 f_* 的箭头是向前的. 之后我们还会遇到一类与微分对偶的映射, 被称为*拉回映射*, 记作 f^*, 它的箭头是向后的. 拉回映射传统上就一直使用 f^* 作为记号, 所以用 f_* 表示推前映射也是恰当的. 如果我们剧透一些张量的知识的话, 我们会把一个*函数*的微分看作余切空间 T_pM^* 中的一个元素, 但是流形间的微分映射却是 $T_pM^* \otimes T_pN$ 中的一个元素, 使用相同的记号会造成一定的混淆.

最后, 我们必须指出, 虽然我们提到了协变性, 推前, 拉回这些词语, 但是他们和范畴论中一样的词语含义并不一样. 它们的相似性只是**巧合**, 这些巧合让我们采用了相似的记号, 但并不意味着可以把范畴论的观点生搬硬套进来.

0.4 子流形

子结构在数学中随处可见, 从最简单的子集 (作为一切基础), 到代数中的子群, 子空间 (先是子集, 并且在大集合的运算下仍然具有相同的代数结构), 大多具有 "子集-相同结构" 这一模式. 因此子流形大约就是大流形中一个自己是流形的子集. 但我们还需要更多的一些限制条件, 以下我们从浸入, 嵌入的概念开始介绍.

定义 0.4.1. 映射 $f: M \to N$ 被称为 M 到 N 的一个**浸入**, 如果对任意 $p \in M$ 都有 $f_*|_p$ 是单射. 如果进一步地, f 是 M 与赋予了 N 的子空间拓扑的 $f(M)$ 之间的微分同胚, 那么 f 被称为是 M 到 N 的一个**嵌入**.

参考文献

[1] Felix Klein. “*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*”. *Math. Ann.* **1893**, *43*(1): 63–100. https://doi.org/10.1007/BF01446615.

[2] Vladimir A. Zorich. *Mathematical analysis. I*. Second. Springer-Verlag, Berlin, **2015**, Translated from the 6th corrected Russian edition, Part I, 2012 by Roger Cooke, With Appendices A–F and new problems translated by Octavio Paniagua T: xx+616. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48792-1.

[3] 梅加强。流形与几何初步。北京：科学出版社，**2013**。

[4] 欧几里得。几何原本。兰纪正，朱恩宽 译。西安：陕西科学技术出版社，**2003**。