Ch. IV Méthode de Monte-Carlo

I Introduction

La méthode se repose sur la loi des grands nombres :

$X_1, \dots X_n, \dots$ est une suite de v.a. iid de même lois

$E(|X|) < \infty$

alors $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} E(X_1)$

On suppose que l'on peut simuler des v.a. $X_1, \dots$ i.i.d

telles que $E(X_1) = x$ ~~$\approx$~~ x

où x est une valeur que l'on cherche à déterminer.

Par ex. on cherche $x = \int_0^1 h(t)\, dt$ avec h une fonction ordinaire, p. ex. $h(t) = e^{t^2}$

NB. On pourrait utiliser la méthode des rectangles ou trapèzes → intégral de Riemann

Mais on peut aussi utiliser la méthode de Monte-Carlo.

On simule n v.a $U_1, \dots U_n$ de loi uniforme sur $[0,1]$ i.i.d

On sait que $f_{U_i}(u) = \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$

On pose $X_i = h(U_i)$. On a $E(X_i) = E(h(U_i))$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(u) f_U(u)\, du$$

$$= \int_0^1 h(u)\, du$$

~~$h(E(\dots))$~~

On en déduit $\bar{X}_n \approx x = \mathbb{E}(X_i) = \int_0^1 h(u)\, du$

Je cherche l'intégrale sur $[0,1]$

On simule → je reçois x_i → je calcule $\bar{X}$ → $\bar{X} \approx$ le nombre recherch

On peut préciser l'erreur commise.

En effet TCL : $\dfrac{\bar{X} - E(X_1)}{\left(\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}\right)} \xrightarrow[n \text{ grand}]{\text{app.}} \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}\left[-1{,}96 \leq \quad \text{—''—} \quad \leq 1{,}96\right] = 0{,}95$$

$$\mathbb{P}\left[\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{E(X_1)} \in \left[\bar{X}_n - \frac{1{,}96\,\sigma(X_1)}{\sqrt{n}} \;,\; + \right]\right] = .95$$

$$IC_{95\%}(x) = \left[\bar{X}_n - \frac{1.96\,\sigma(X_1)}{\sqrt{n}} \;,\; + \right]$$

On approxime $\sigma(X_1)$ par $S_x = \left(\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2\right)^{.5}$

$$IC_{95\%} \approx \left[\bar{X}_n - \frac{1.96\,S_x}{\sqrt{n}} \;;\; \bar{X}_n + \frac{1.96\,S_x}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\approx \quad \bar{x}_n \quad \text{—''—} \quad ; \quad \bar{x}_n$$

II Méthode de réduction de la variance

– variable de contrôle

On cherche $x = E(X_i)$ $X_1, \dots X_n$ iid v.a.

On suppose qu'il existe une v.a. Y_i (que l'on peut simuler)
et telle que X_i et Y_i soient fortement corrélés.
avec $E(Y_i)$ connu

Alors on pose $Z_i = X_i - \lambda\,(Y_i - E(Y_i))$

On vérifie que $E(Z_i) = E(X_1) = x$

En effet $E(Z_i) = E(X_i - \lambda(Y_i - E(Y_i)))$

$$= E(X_i) - \lambda\, E(Y_i - E(Y_i)) = E(X_i)$$

On détermine λ.

$$\mathrm{Var}(Z_i) = \mathrm{Var}(X_i - \lambda(Y_i - E(Y_i)))$$

$$= \mathrm{Var}(X_i) - 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X_i, Y_i - E(Y_i)) + \lambda^2\,\mathrm{Var}(Y_i - E(Y_i))$$

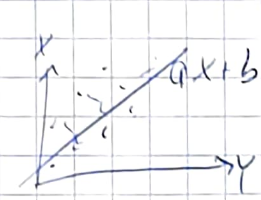
$$= \mathrm{Var}(X_i) - 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) + \lambda^2\,\mathrm{Var}(Y_i)$$

$$= \sigma_X^2 - 2\lambda\,\sigma_X\sigma_Y\,\rho + \lambda^2\sigma_Y^2$$

→ on cherche la valeur de λ qui minimise $\mathrm{Var}(Z_i)$

$$\lambda_{opt} = \frac{2\sigma_X\sigma_Y\rho}{2\sigma_Y^2} = \frac{\mathrm{cov}(X_i, Y_i)}{\mathrm{Var}(Y_i)}$$

$= a$



$$\lambda_{opt} \approx \frac{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i Y_i - \bar{X}_n \bar{Y}_n}{\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} Y_i^2\right) - \bar{Y}_n^2} = \tilde{\lambda}_{opt}$$

Avec λ_{opt} on a

$$Var(Z_i) = \sigma_x^2 - 2\frac{\sigma_x \sigma_Y \rho}{\sigma_Y^2} \sigma_x \sigma_Y \rho + \left(\frac{\sigma_x \sigma_Y \rho}{\sigma_Y^2}\right)^2 \sigma_Y^2$$

$$= \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \rho^2 = \boxed{\sigma_x^2 (1-\rho^2) = \sigma_Z^2}$$

Mise en oeuvre

$$E(Z_i) = E[X_i - \hat{\lambda}(Y_i - E(Y_i))]$$
$$= E(X_i) - E(\hat{\lambda}(Y_i - E(Y_i)))$$

?

$\hat{\lambda}$ n'est pas une constante et en particulier n'est pas indépendante des Y_i

$\hookrightarrow$ On fixe $\hat{\lambda}$ au premier tour et puis le laisse fixé

? pour matlab | On peut utiliser $n_1 < n_2 < n_3$
n_2 pour λ

Pour comparer la méthode de base (X_i) avec la méthode de la variable de contrôle (Z_i) on doit raisonner en ~~t~~ temps de calcul.

On note n le nombre de variables simulées.

En général le temps de calcul $= c \cdot n + b \simeq c \cdot n$

Précision $\approx \frac{c'}{\sqrt{n}}$ précision $\simeq \frac{c''}{\sqrt{t}}$

La meilleure méthode est celle pour laquelle c'' est le plus petit.

Dans les programmes on calcule "c''".

On calcule un ~~coeff~~ coef. d'efficacité $e = \sqrt{t}\, L$

$e_x = \sqrt{t}\, S_x$ L = largeur de l'intervalle de confiance

$e_z = \sqrt{t}\, S_z$ ou demi-largeur

on mesure en matlab le temps
> tic
> t = toc

III Méthode de la réduction de la variance

- variables antithétiques

Un exemple introductif

On avait $x = \int_0^1 h(u)\,du = E(h(U))$ $\quad U \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$

Si on pose $V = 1 - U$ $\quad V \hookrightarrow U_{[0,1]}$

$E(h(V)) = x$

On pose $X_i = h(U_i)$ $\quad Y_i = h(V_i)$

$$Z_i = \frac{X_i + Y_i}{2} \qquad E(Z_i) = \frac{E(X_i) + E(Y_i)}{2} = x$$

$$Var(Z_i) = \frac{1}{4}\left[\underbrace{Var(X_i)}_{\sigma_X^2} + \underbrace{2\,Cov(X_i, Y_i)}_{2\sigma_X\sigma_Y\rho} + \underbrace{Var(Y_i)}_{\sigma_Y^2}\right]$$

$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2(1+\rho)$$

$$\sigma_Z = \sigma_X\sqrt{\frac{1+\rho}{2}}$$

Pour apprécier le gain d'efficacité il faudrait comparer la méthode de la variable Z avec une taille n et la méthode de la variable X avec une taille $2n$

$$\sigma(\overline{X_{2n}}) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{2n}} \qquad \sigma(\overline{Z_n}) = \frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1+\rho}{2}}$$

On gagne si $\sqrt{1+\rho} < 1 \iff \rho < 0$

Remarque

Si $X = h(\mathcal{N})$ où $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
et si on cherche $x = \mathbb{E}(h(\mathcal{N}))$
alors on peut faire la méthode précédente
avec $Y = h(-\mathcal{N})$
car $-\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

11.10.21

IV Application aux processus stochastiques

On suppose que S_t vérifie une équation différentielle stochastique (EDS) de type

$$dS_t = b(t, S_t)\,dt + \sigma(t, S_t)\,dW_t$$

cf. modèle BS en proba risque neutre :

$$dS_t = S_t r\,dt + S_t \sigma\,dW_t$$

- Discrétisation (Méthode d'Euler)

"="

$$S_{t+dt} - S_t = b(t, S_t)\,dt + \sigma(t, S_t)\,dW_t$$

$$S_{t+dt} = S_t + dS_t = S_t + b(t, S_t)\,dt + \sigma(t, S_t)\,dW_t$$

On remplace $\Delta t = \frac{T}{n}$

On détermine les valeurs $\check{S}_{t_k}$ $k = 0 \dots n$, $\check{S}_{t_0} = S_0$, $t_n = T$

$t_k = k\Delta t$

Où $\check{S}_{t_k}$ vérifie

$$\check{S}_{t_{k+1}} = \check{S}_{t_k} + b(t_k, \check{S}_{t_k})\Delta t + \sigma(t_k, \check{S}_{t_k})\Delta W_t$$

Remarque

$$X_t = X_0 e^{rt}$$

$$\frac{dX_t}{X_t} = r\,dt$$

$$dX_t = rX_t\,dt$$

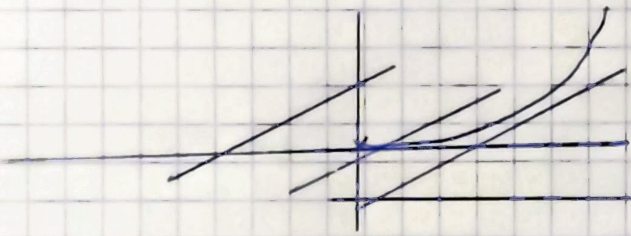
$$\check{X}_{t_{k+1}} = \check{X}_{t_k} + r\check{X}_{t_k}\Delta t$$

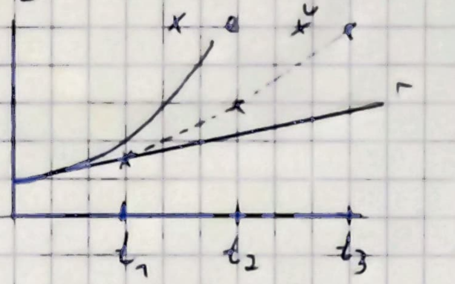
$$\check{X}_{t_{k+1}} = \check{X}_{t_k}(1 + r\Delta t)$$

$$\check{X}_{t_k} = X_0(1 + r\Delta t)^k$$

$$X_{t_k} = X_0 e^{rt_k} = X_0 e^{rk\Delta t} = X_0 (e^{r\Delta t})^k$$

Or $e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t + \frac{r^2}{2}\Delta t^2 + \dots > 1 + r\Delta t$





quant $\Delta t \to 0$ $\check{X}_{t_k} \to X_{t_k}$

en particulier

$$\check{X}_{t_n} = X_0(1 + r\Delta t)^n$$

$$= X_0(1 + r\Delta t)^n = X_0\left(1 + \frac{rT}{n}\right)^n$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} X_0 e^{rT}$$

D'une façon général on obtient que

$$(\hat{S}_{t_k})_{k\in[0,n]} \rightarrow (S_t)_{t\in[0,T]}$$

$$\Big\downarrow \text{ interpolation linéaire, la convergence est en } \frac{1}{n}$$

$$(\hat{S}_t)_{t\in[0,T]}$$

En pratique on remplace (S_t) par le processus noté à nouveau S_t qui vérifie

$$S_{t_{k+1}} = S_{t_k} + b(t, S_{t_k})\Delta t + \sigma(t, S_{t_k})\Delta W_t$$

Comme on travaille avec N trajectoires,

on va initialiser un vecteur $\vec{S}_0 = S_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ - > S_0 ones$(N,1)$ → matlab

Puis on fait une boucle en temps $i = 1$ à n

$$\vec{S} = \vec{S} + b(t, \vec{S})\Delta t + \sigma(t, \vec{S})\underbrace{\Delta W_t}_{\sqrt{\Delta t}\,\text{randn}(N,1)}$$

On peut alors utiliser S_t (en réalité $\hat{S}_{t_k}$ en T)

pour calculer par ex. $\max(S_T - K, 0)$

$$C_T = E_Q\left(e^{-rT}(S_T - K, 0)\right)$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum^{N} e^{-rT}(S_T - K, 0)^+$$

$$= \frac{1}{N} e^{-rT} \sum^{N} (S_T - K, 0)^+ = e^{-rT}\,\text{mean}\left(\max(S_T - K, 0)\right)$$

en sortie de boucle :

$P = \max(S_T - K, 0)$

$C = \text{mean}(P)$

$L = \text{std}(P)$

$C = C e^{-rT}$

$L = C e^{-rT}$

$B1 = C - 1.96L$

$B2 = C + 1.96L$

- Variable antithetique

$S = S_0 \text{ ones}(N,1);$

$SA = S;$

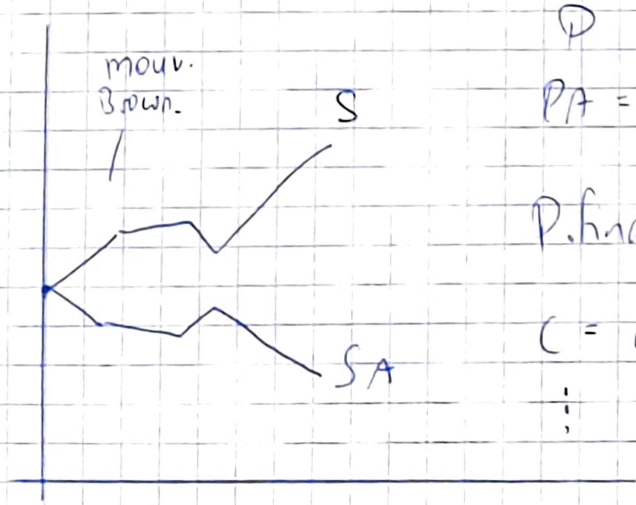
For $i = 1:n$

$dW = \text{randn}(N,1) \cdot \Delta t^{\wedge}.5;$

$S = S + b(\underset{i\Delta t}{t}, S)\Delta t + \sigma(i\Delta t, S)\, dW$

$SA = SA + b(t, SA)\Delta t - \sigma(t, SA)\, dW$

end



$P = \max(S - K, 0)$

$PA = \max(SA - K, 0)$

$P.\text{final} = \frac{P + PA}{2}$

$C = \text{mean}(P.\text{final})$

⋮

- variable de controle

$S = S_0 \, \mathrm{ones}(N,1)$

For $i = 1:N$

$S = S + b(t,S)\Delta t + \sigma(t,S)\Delta W$

$VC = VC +$ -"-