

# **Mini projet 1 : Calcul du prix d'une option asiatique**

Valentin DE CRESPIN DE BILLY

Matthias LANG

30.11.2021

N. d'étudiant : 247067 et 313411

Université Catholique de l'Ouest

Mathématiques financières

# 1 Calculer le prix du sous-jacent

Nous avons essayé d'atteindre une équation qui ne dépend que des variables connues comme la formule de Black-Scholes. Cela n'a pas fonctionné.

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t) \quad (1)$$

$$\iff \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t \quad (2)$$

On prend l'équation 1 :

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t rdt + \sigma S_t^{1.5} dW_t \quad ; \text{ Puis} \\ d\langle S_t, S_t \rangle &= \langle dS_t, dS_t \rangle = \\ &= \langle S_t rdt + \sigma S_t^{1.5} dW_t, S_t rdt + \sigma S_t^{1.5} dW_t \rangle = \\ &= \langle \sigma S_t^{1.5} dW_t, \sigma S_t^{1.5} dW_t \rangle = \\ &= S_t^3 \sigma^2 \langle dW_t, dW_t \rangle = \\ &= S_t^3 \sigma^2 dt \end{aligned}$$

On pose :  $X_t = \ln(S_t)$

$$\text{Formule d'Ito : } d\ln(S_t) = \frac{dS_t}{S_t} + \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} d\langle S_t, S_t \rangle \quad (3)$$

$$(4)$$

Avec les équations 2 et 3 :

$$d\ln(S_t) = rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t - \frac{1}{2}S_t\sigma^2dt = (r - \frac{1}{2}S_t\sigma^2)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &= \ln(S_t) - \ln(S_0) = \int_0^t d\ln(S_u) = \\
&= \int_0^t \left(r - \frac{1}{2}S_t\sigma^2\right)du + \int_0^t \sigma\sqrt{S_t}dW_t \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Donc on ne peut pas facilement dériver une formule pour le prix comme ça, qui dépend que des variables fixées, mais on peut le simuler pas à pas en utilisant (1) :

$$\begin{aligned}
&S_0 \text{ soit connu} \\
dS_0 &= S_0(rdt + \sigma\sqrt{S_0}dW_0) \\
S_1 &\approx S_0 + dS_0 \\
dS_1 &= S_1(rdt + \sigma\sqrt{S_1}dW_1) \\
S_2 &\approx S_1 + dS_1 \\
&\dots
\end{aligned} \tag{6}$$

## 1.1 Réduction de la variance du estimateur

Les estimateurs ont une variance telle que :  $\hat{Var}(C) = \hat{\sigma}_i^2/n_t$ , où  $n_t$  est le nombre des observations et  $\hat{\sigma}_i^2$  est la variance estimée de la population, qui est égal à la variance de l'échantillon.

Supposons que nous ne connaissions ni les paramètres ni la règle à partir desquels les prix sont établis. Nous ne pouvons donc pas augmenter le nombre d'observations pour améliorer l'estimateur. Quelle autre possibilité existe-t-il pour réduire sa variance ?

Avec les techniques de bootstrap on pourrait répliquer les données. Mais on risque de introduire un biais. Si on utilise une variable de contrôle on n'invente pas des nouvelles données, ni risque-t-on de changer l'espérance.

## 2 Réalisation numérique

Les algorithmes sont réalisées avec deux langues de programmation : Matlab et Visual Basic for Applications. Plusieurs graphiques sont y générés, vous les trouverez dans l'annexe ???. En plus, avec le logiciel Excel nous avons crée un dashboard, voir une capture d'figure refX. Vous trouverez les scripts et les images dans l'annexe, et avec la fiche de dashboard également dans le repository.

# Appendices

Toutes les fiches se trouvent dans le repository en ligne :

[https://github.com/matthias-10/UCO\\_actuariat\\_mini-projet](https://github.com/matthias-10/UCO_actuariat_mini-projet)

## A Graphiques

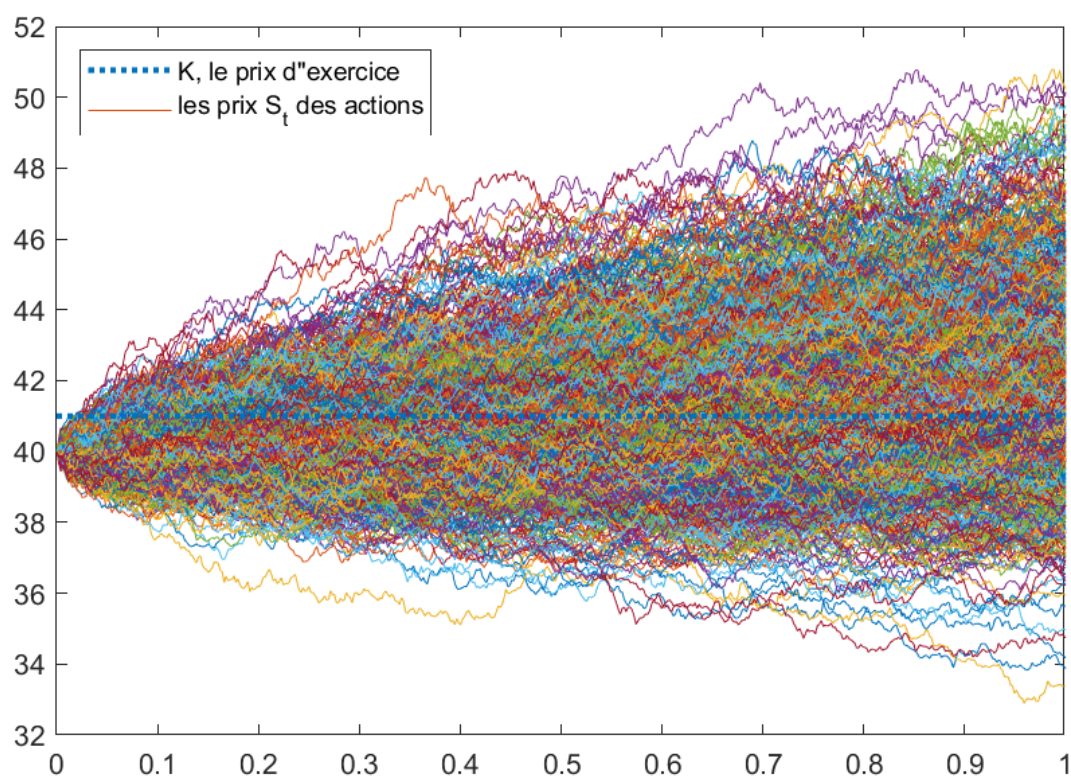


FIGURE 1 – Les graphes de tous trajectoires, plotés avec matlab

## B Code Matlab

```
% ~~~~~  
% Valentin DE CRESPIEN DE BILLY UTF-8  
% Matthias LANG 30.11.2021  
% ~~~~~  
  
% ~~~~~ Mathematiques financieres: Mini-projet 1 ~~~~~
```

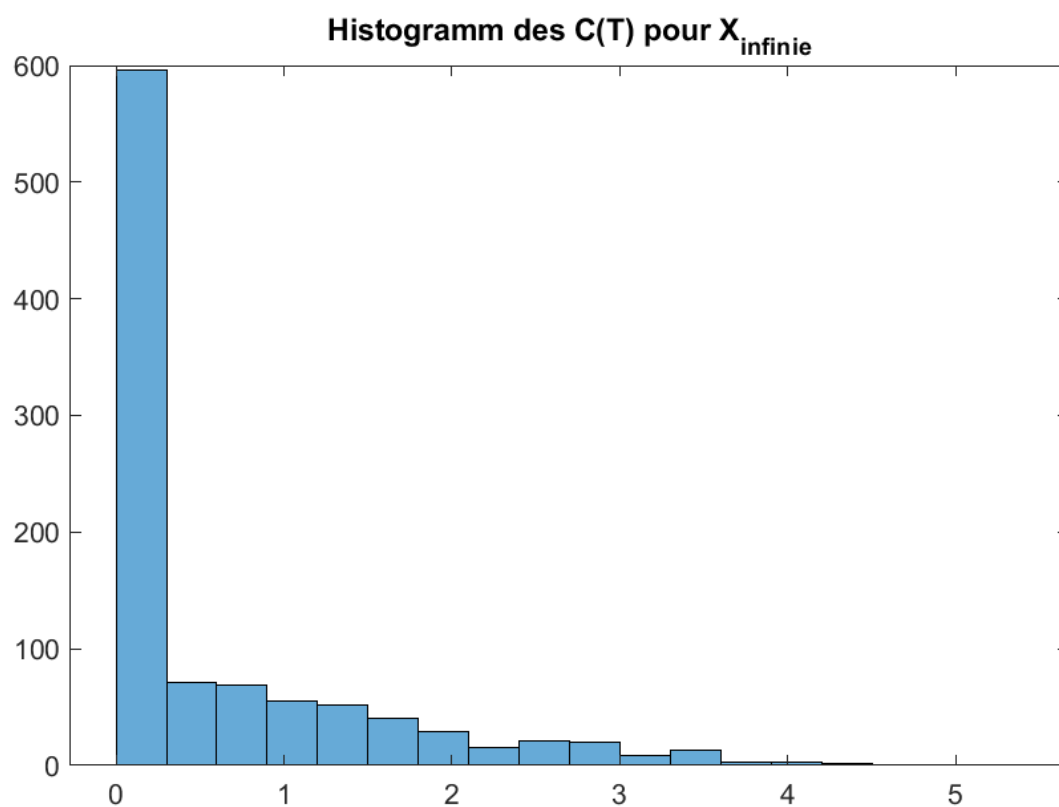


FIGURE 2 – Histogramme des simulations pour  $C_{\infty}$

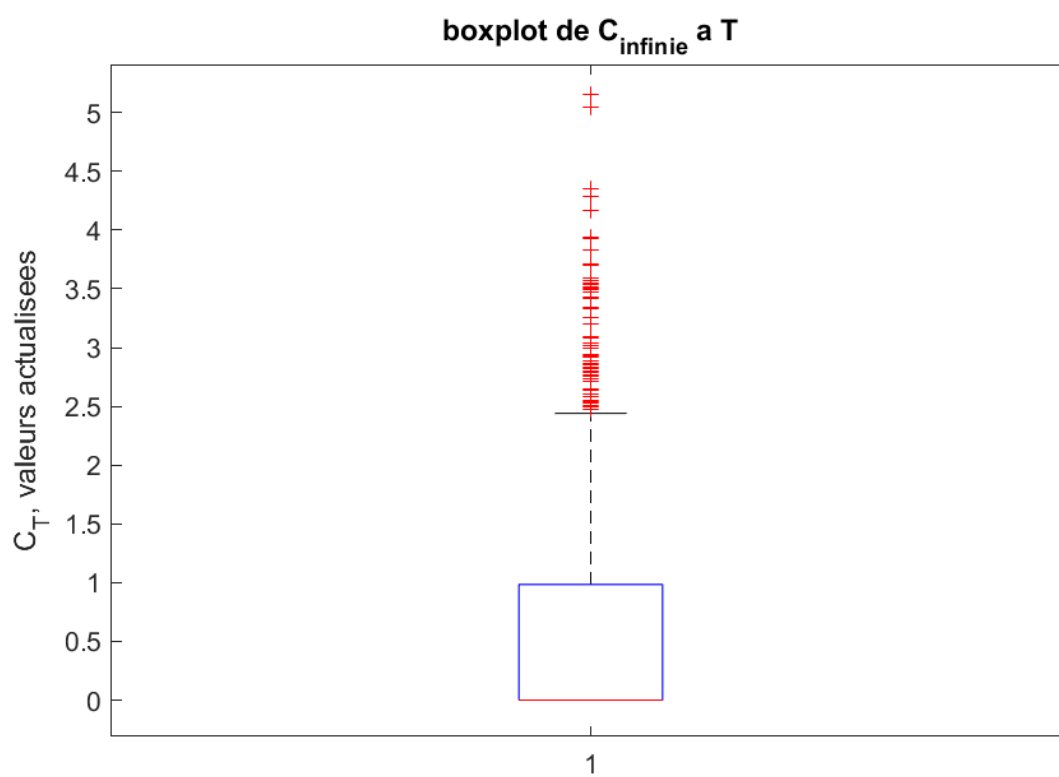


FIGURE 3 – Boxplot des simulations pour  $C_{\infty}$

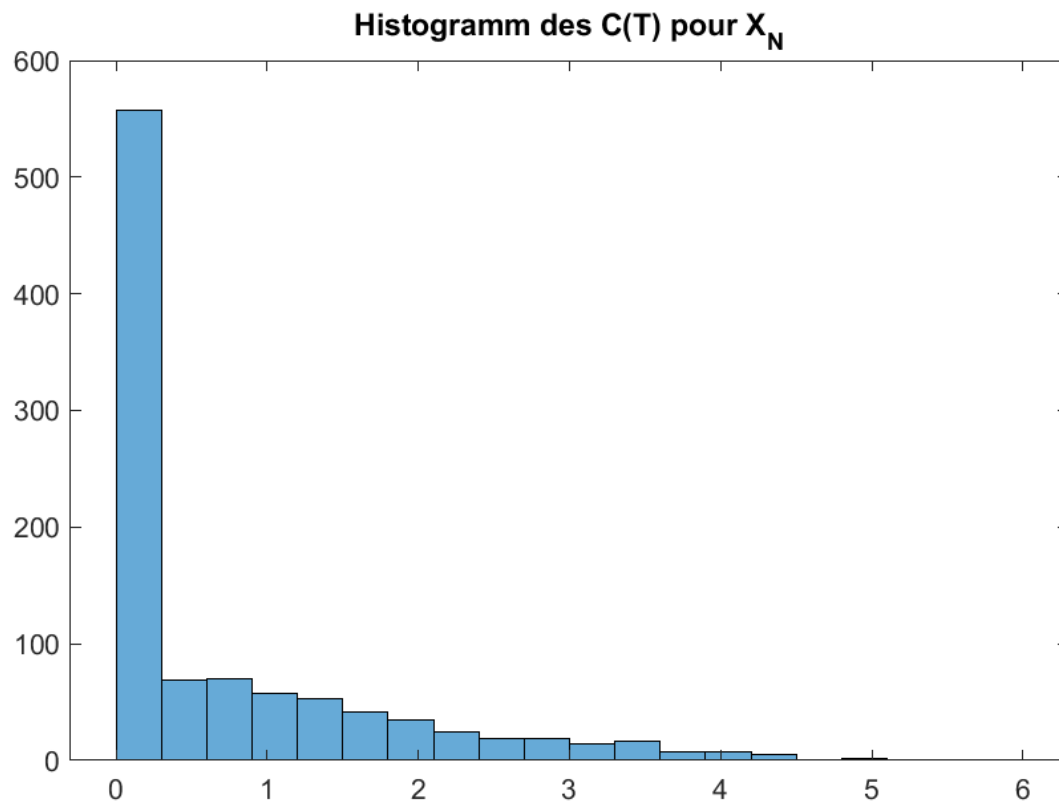


FIGURE 4 – Histogramme des simulations pour  $C_N$

```

%% ~~~~~ Parametres ~~~~~ %%
10 S0 = 40;           % Prix initial du sous jacent
   K = 41;           % Prix d'exercice de l'option

   r = 0.05;         % Taux d'interet sous risque neutre
   sigma = 0.01;     % Variance partie fixe
15 t0 = 0;           % Debut de la periode
   n = 2^9;          % Nombre de intervalles
   T = 1;            % Fin de la periode
   Nd = 8;           % Nombre des sous-intervalles
20 nt = 5000;        % Nombre de trajectoires

%% ~~~~~ %%

```

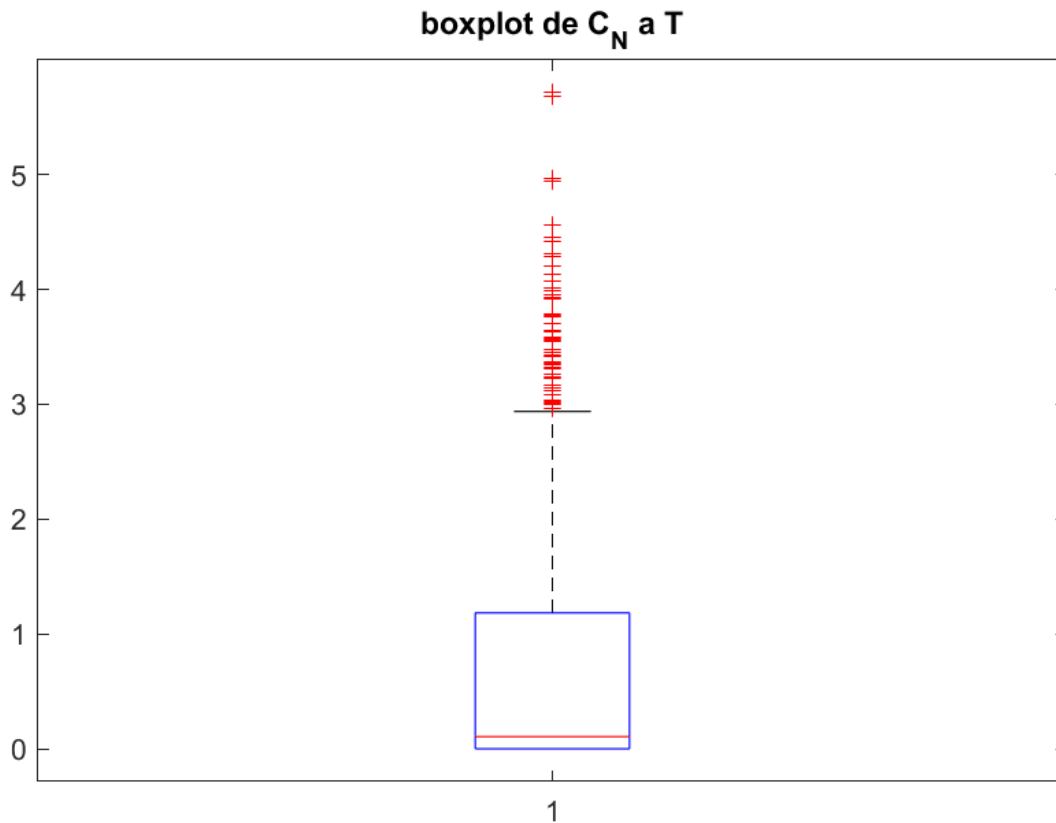


FIGURE 5 – Boxplot des simulations pour  $C_N$

```

25  if Nd > n/2-1
        warning("Le nombre des sous-intervalles est trop petit")
        fprintf('Il fallait Nd << n')
    end
30
    starttime = datetime('now');
    fprintf('\n ~ ~ ~ ~ ~ \n');
    fprintf('La programme a demarre a %s \n', starttime);
    fprintf('%d -> Prix initial du sous jacent \n', S0)
35
    %1% syms func(x) %1% requires Symbolic Math Toolbox.
    %1% obligation(x) = S0*(1+r)^(x-t0);
    %K = int(obligation,t0,T)/(T-t0);
    %1% bonds_T = obligation(T);
40 %1% fprintf('%0.5g -> Prix d''une obligation a T\n',bonds_T)

```



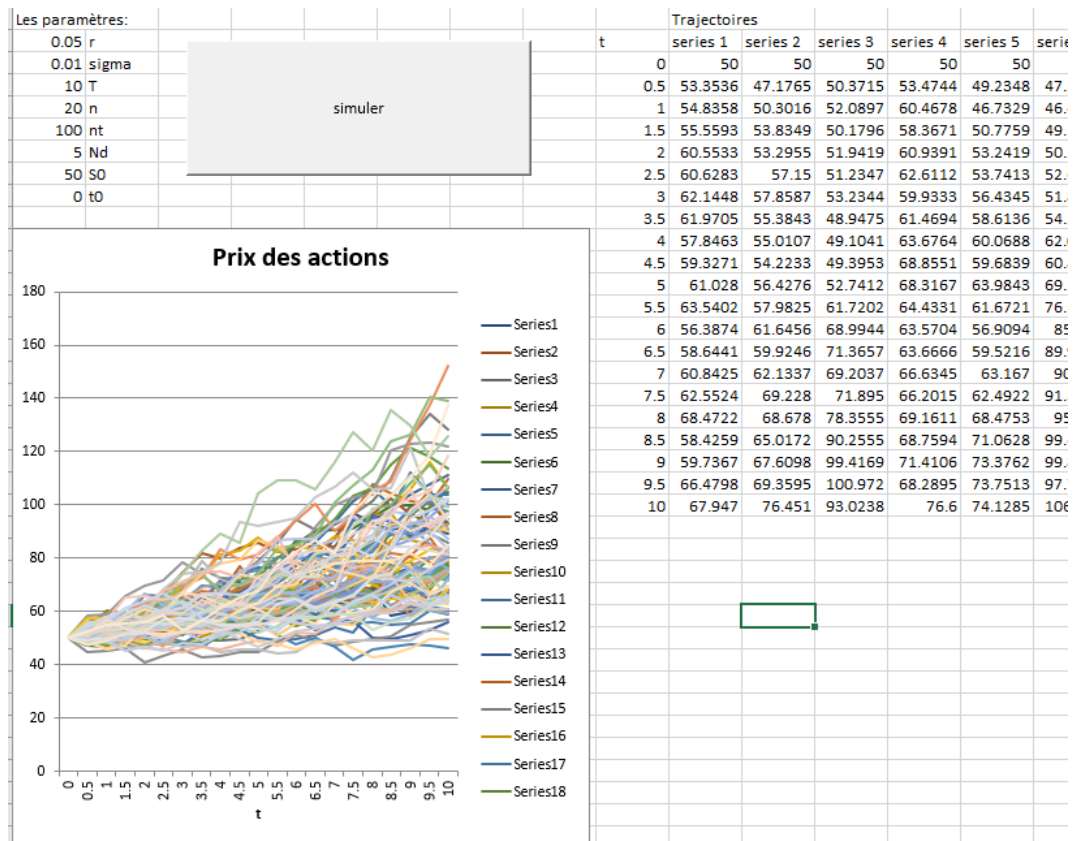


FIGURE 6 – le Excel dashboard

```

fprintf('%0.5g -> Prix d''exercice de l''option \n', K);
fprintf(' . . . \n')
tic

%% ~~~~~ Simulation ~~~~~ %%

dt = (T-t0)/n;
t = t0:dt:T;

% les premieres nt_a valeurs pour l'affichage plus tard
nt_a = 15;
S = zeros(nt_a, n+1);

```

```

%% ~~~~~~ prix de l'option C ~~~~~~ %%

C_inf = zeros(nt,1);
60 C_N = zeros(nt,1);
for j = 1:nt
    S_vec = zeros(1, n);
    S_vec(:, 1) = S0;

65

%% ~~~~~~ simuler pas a pas ~~~~~~ %%

for i = 2:(n+1)
    dW_t = normrnd(0,sqrt(dt));
70 dSi = S_vec(i-1)* ...
        ( r*dt + sigma*sqrt(S_vec(i-1))*dW_t );
    S_vec(i) = S_vec(i-1) + dSi;
end

75 % sauvegarder les premieres nt_a actions
if j <= nt_a
    S(j,:) = S_vec;
end

80

%% ~~~~~~ C_inf: calcul avec X_T ~~~~~~ %%

% integral: l'aire de t0 a T sous S
X_T = 0.5*S0 + sum(S_vec(2:n)) + 0.5*S_vec(n+1);
85 X_T = X_T/n; %ou (n+1)?

C_inf_j = (X_T - K) .* ( X_T - K >= 0 );
C_inf_0 = exp(-r*T)*C_inf_j;

90 % ~ Estimateur ~

```

```

% C_inf * exp(-rT) est une martingale donc
% E[exp(-rT)*C_inf]= C_inf(S_0)

C_inf(j)=C_inf_0;

95

%% ~~~~~ C_N: calcul avec X_T_prim ~~~~~ %%

%1/N * sum_1^N S_{kT/N}
% => kT n'est pas un numero entier, il faut arrondir

100
index = fliplr(1:n);
warn_id = 'MATLAB:colon:nonIntegerIndex';
warning('off', warn_id);
% ^supprime Warning a cause de arrondir:
105
index = index(1:(n/Nd):end);
X_T_prim = sum(S_vec(index))/Nd;

C_N_j = (X_T_prim - K) .* ( X_T_prim - K >= 0 );

110

% C_N * exp(-rT) est une martingale donc
% E[exp(-rT)*C_N]= C_N(S_0)
C_N_0 = exp(-r*T)*C_N_j;

115
C_N(j)=C_N_0;

end

120 %% ~~~~~ affichage des estimateurs ~~~~~ %%

duree= toc;
fprintf('\n')
fprintf('%d trajectoires simules\n', nt);

```

```

125 fprintf('Finis en %0.5g\n', duree);
    fprintf('\n')

    fprintf('Les estimateurs Monte-Carlo:\n')

130 % C_inf
    C_inf_est = mean(C_inf);
    C_inf_est_var = var(C_inf)/nt; %/nt ?

    fprintf('L''estimateur du C_inf a t0 = \n%0.5g\n', ...
135     C_inf_est);
    fprintf('Son ecart type = %0.5g\n', sqrt(C_inf_est_var));

    % C_N
    C_N_est = mean(C_N);
140 C_N_est_var = var(C_N)/nt; %/nt?

    fprintf(['L''estimateur du C_N a t0, avec ' ...
            '%d sous-intervalles = \n%0.5g\n'], ...
            Nd, C_N_est);
145 fprintf('Son ecart type = %0.5g\n', sqrt(C_N_est_var));

    %% ~~~~~ graphes ~~~~~ %%

150 % 1: graphes de S;
    % 2-3: ecdf de C_inf et C_N;
    % 4-5: boxplot des estimateurs

    G = "g";
155 P = input(['\n' ...
            'Pour afficher n''importe quel graphique, tapez ' ...
            'son numero <1-5> ou [Enter]. \n' ...
            'Pour quitter tapez plusieurs fois [Enter]:\n'] );

```

```

160 if isstring(P) || isempty(P)
    P = 1;
else
    if ~ismember(P,1:6)
        P = 1;
165     end
end

while G~="q"
    disp("[Enter] pour continuer")
170     switch P
    case 1
        fprintf('< 1: quelques premiers graphes de S >\n')
        figure(1)
        plot([t0 T],[K K], ':k', 'LineWidth',2)
175         hold on
        plot(t, S)
        plot([t0 T],[K K], ':k', 'LineWidth',2)
        hold off
        % pour comparaison, si j'epargne pour le taux r:
180         %plot([t0 T], [S0 S0*(1+r)^(T-t0)],"--k"); %obl.
        %1% fplot(obligation, [t0 T], "-k");
        legend("K, le prix d'exercice", ...
            "les prix S_t des actions",...
            "Location","northwest");
185         P=P+1; input('\n');

    case 2
        fprintf(['< 2: fonction de distribution ' ...
            'cumulative estime' ...
190         '\n C(T) pour X_{infinie} de C_infinie >\n'])
        figure(1)
        % E_{pi} (e^{-rT} (X_T - K)^+ / F_0) ~ 1/nt \sum{C(T)}

```

```

%histogram( C_inf );
ecdf( C_inf );

195

title("ecdf C(T) pour X_{infinie}");
P=P+1; input('\n');

case 3

200
fprintf(['< 3: fonction de distribution ' ...
        'cumulative estime' ...
        '\n C(T) pour X_{infinie} de C_N >\n'])
figure(1)
ecdf( C_N );

205
title("ecdf C(T) pour X_{N}");
P=P+1; input('\n');

case 4

fprintf(['< 4: boxplot de l''estimateur ' ...
        'C_{infinie} >\n'])

210
figure(1)
boxplot( C_inf );
title('boxplot de C_{infinie} a T')
ylabel('C_T, valeurs actualisees')

215
P=P+1; input('\n');

case 5

fprintf('< 5: boxplot de l''estimateur C_{N} >\n\n')
figure(1)

220
boxplot ( C_N );
title('boxplot de C_{N} a T')
P=P+1;

case 6

225
P=input([' ~ ~ ~ ~ ~\n ' ...
        'Pour afficher n''importe quel graphique, ' ...

```

```

        'tapez son numero <1-5> \n']]);
    if ismember(P, 1:5)
        fprintf("Vous avez choisi: ")
230    else
        G="q";
    end
    otherwise
        G="q";
235    end
end

```

## C Code VBA

```

Sub Macro1()

    ' parametres
    Dim T, n, nt, Nd As Integer
5    Dim r, sigma, S0, t0 As Double

    r = Range("A2").Value
    sigma = Range("A3").Value
    T = Range("A4").Value
10    n = Range("A5").Value
    nt = Range("A6").Value
    Nd = Range("A7").Value
    S0 = Range("A8").Value
    t0 = Range("A9").Value
15

    Dim dt As Double
    dt = ((T - t0) / n)

    ' premier cellule de la table de trajectoires ~ t0
20    Dim Srow, Scol As Integer
    Dim Scol_abc As String

```

```

Srow = 3
Scol_abc = "I"
Scol = 9
25
' worksheets
Dim sh_dash, sh_calc, sh_s As String
Dim sh_dash_o As Worksheet
sh_s = "Dashboard"
30 sh_dash = "Dashboard"
Set sh_dash_o = Worksheets(sh_dash)

' iteratives
Dim i, j As Integer
35
Dim S() As Double
ReDim S(1 To n + 1, 1 To nt)
Dim dW As Double
Dim dS As Double
40 Dim x As Double

'effacer t et S() aines
With Worksheets(sh_s)
    Range(.Cells(Srow - 1, Scol), .Cells(Srow + 10000,
        Scol + 10000)).Delete
45 End With

' afficher t
Dim temps() As Double
ReDim temps(n + 2)
50 temps(0) = t0
For j = 1 To n + 2
    temps(j) = temps(j - 1) + dt
Next

```



```

55 Range(Scol_abc & Srow & ":" & Scol_abc & UBound(temps) +
    1) = _
        WorksheetFunction.Transpose(temps)

'simuler et afficher S pas a pas
Cells(1 + 1, 9 + 0).Value = "t"
60 For j = 1 To nt
    x = S0
    i = 1
    Cells(2 + i, 9 + j).Value = x
    Cells(1 + i, 9 + j).Value = "series " & j
65 For i = 1 To n + 1
    If i > 1 Then
        dW = Sqr(-2 * Log(Rnd())) * Cos(6.283185307 *
            Rnd()) * Sqr(dt)
        'dS = S(i - 1, j) * (r * dt + sigma * Sqr(S(i
            - 1, j)) * dW)
        'aine = Cells(1 + i, 10 + j).Value
70 dS = x * (r * dt + sigma * Sqr(x) * dW)
        'S(i, j) = S(i - 1, j) + dS
        x = x + dS 'S(i - 1, j) + dS
        Cells(2 + i, 9 + j).Value = x
    End If
75 S(i, j) = x
    Next
Next
'Range("J21:O100") = S()
80
' insert Chart
Worksheets(sh_s).Activate
Dim chartrange As Range
Set chartrange = Cells(Srow, Scol + 1) 'sans t
85 Set chartrange = chartrange.Resize(n + 1, nt)

```

```

MsgBox chartrange.Address

Worksheets(sh_dash).Activate
Dim Graphe As Object
90
'effacer graphes aines
For Each Graphe In ActiveSheet.ChartObjects
    Graphe.Delete
Next Graphe
95
Set Graphe = sh_dash_o.ChartObjects.Add( _
    Left:=Range("A11").Left, Width:=380, _
    Top:=Range("A11").Top, Height:=400)
With Graphe.Chart
100
    .SetSourceData chartrange
    .PlotBy = xlColumns 'echanger x et y axes
    .ChartType = xlLine
    .HasTitle = True
    .ChartTitle.Text = "Prix des actions"
105
    .FullSeriesCollection(1).XValues = _
        Range(Scol_abc & Srow & ":" & Scol_abc & UBound(
            temps) + 1)
    .Axes(xlCategory).HasTitle = True
    .Axes(xlCategory).AxisTitle.Text = "t"
End With
110

MsgBox "Simulation finie pour " & nt & " trajectoires."

'Sheets("Dashboard").Activate
115 'Range("Parametres").Select
'Range("A13").Value = T

End Sub

```