Finance
Mathématiques Financières
Actuariat

2021/2022

Table des matières

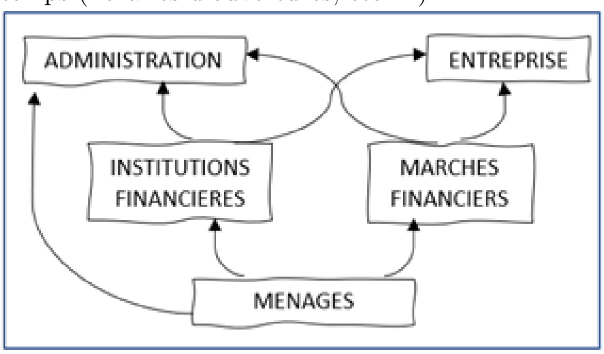
Chapitre 1

FINANCE

1 MARCHES FINANCIERS

1.1 principes et utilités des marchés financiers

Un marché financier est un lieu de rencontres et d'échanges de produits financiers. Celui -ci est organisé dans le temps (horaires d'ouvertures, etc...)



Institutions financières :
- Banque de France
- Caisse des dépôts
- Banques
- OPCDM (organisme de placement de capital en valeur mobilière)
  - SICAV (Société d'Investissement à Capital Variable)
  - FCP (Fond Commun de Placement)

Les produits financiers peuvent permettre d'échanger deux choses :
- Transfert de capital
- Transfert de risques

1.2 Produits financiers

1.2.1 Taux d'actualisation et taux d'intérêt

Le taux d'intérêt représente la valeur/coût qui permet d'obtenir un capital maintenant. Si on considère un produit F_1 à la fin de la période (année), sa valeur à l'instant T_0 , appelée F_0, s'appelle la valeur actualisée de F_1 . On a donc $F_0 = \dfrac{F_1}{1+R}$ avec R, le taux d'intérêt sur la période.

1.2.2 Les produits traditionnels

Obligations (Bond) : l'émetteur est emprunteur / l'acheteur est prêteur. Une obligation est un titre de créance (prêt). Elle est caractérisée par trois choses :
- Capital (Emission / Nominal / Rachat)
- Taux d'intérêt (intérêt payé en fin de période/ intérêt payé en fin d'année
- Durée

Il existe plusieurs risques relatifs à ce produit :
- Le risque de défaut (l'émetteur est susceptible de ne pas payer)
- Le risque de taux : « *Quand les taux montent, les prix baissent* »

Actions (Stock) : titre de participation dans une société L'action donne des droits de votes et des droits aux dividendes. Il existe les actions ordinaires et les actions de préférence. Elle est qualifié par deux choses : la valeur et les dividendes.

Devises :

Matières premières / produits agricoles :

1.2.3 Les produits dérivés

Les produits dérivés inconditionnels (contrats à termes =¿ c'est à dire relatif à ce qui va se passer à une date)

- Forwards (moins réglementé)
- Futurs (plus règlementé)
- Swaps

Un **forward** et un **futur** sont des produits qui donnent le droit et l'obligation d'acheter (resp. vendre) un produit sous-jacent à une date donné, et à un prix fixé au départ.

Les **futurs** sont réglementés notamment pas les appels de marge.

Les produits sous-jacents peuvent être un des produits traditionnels ou pas.

Le **Swap** est un contrat d'échange : on convient qu'à un moment donné, on échangera 2 produits.

Les produits dérivés conditionnels (contrats optionnels)

- Options,
- Warrants,
- Bon de souscription

Il y a plusieurs types d'**option** ; par exemple l'option d'achat (resp. de vente) européenne (call, resp. put) : produit qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter (resp.de vendre) un sous-jacent à un prix fixé au début du contrat (prix d'exercice/Strike) et à une date donné (échéance/horizon).

NB : l y a trois prix : le prix de marché du sous-jacent, le prix d'exercice et le prix de l'option

REMARQUE : le prix de marché du sous-jacent est noté S_t à l'instant T. Le prix d'exercice est noté K, et le prix de l'option est noté C_T.

$$C_t = \begin{cases} S_t - K & \text{si } S_t > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \max(S_t - K, 0) = (S_t - K)^+$$

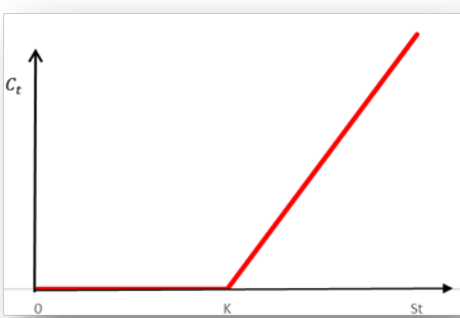


FIGURE 1.1 – Prix d'une option d'achat (à T) en fonction du prix du sous-jacent à T

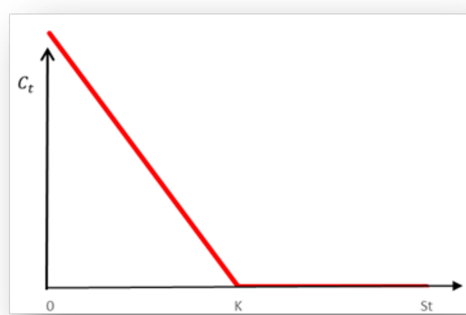


FIGURE 1.2 – Prix d'une option de vente (à T) en fonction du prix du sous-jacent à T

"BENEFICE MAX"

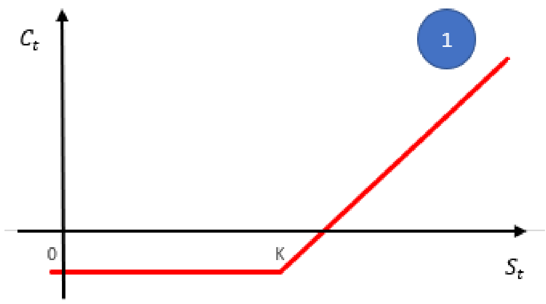


FIGURE 1.3 – Achat d'une option d'achat

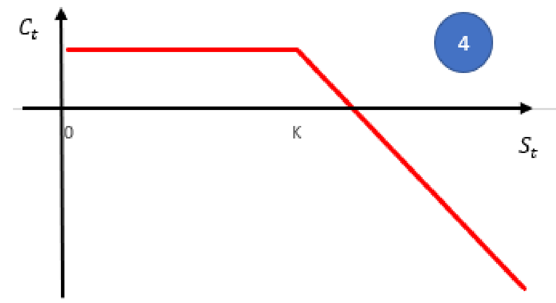


FIGURE 1.4 – Vente d'une option de vente

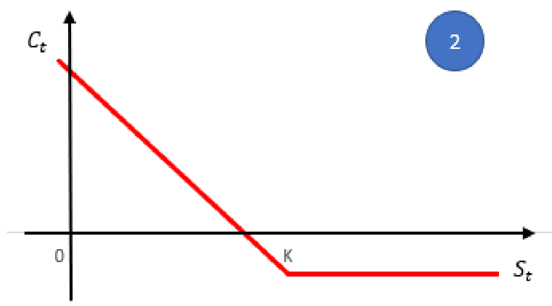


FIGURE 1.5 – Achat d'une option de vente

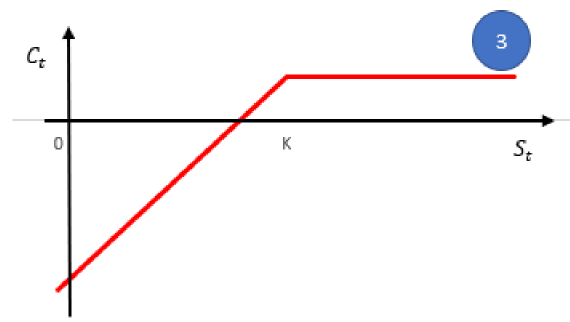
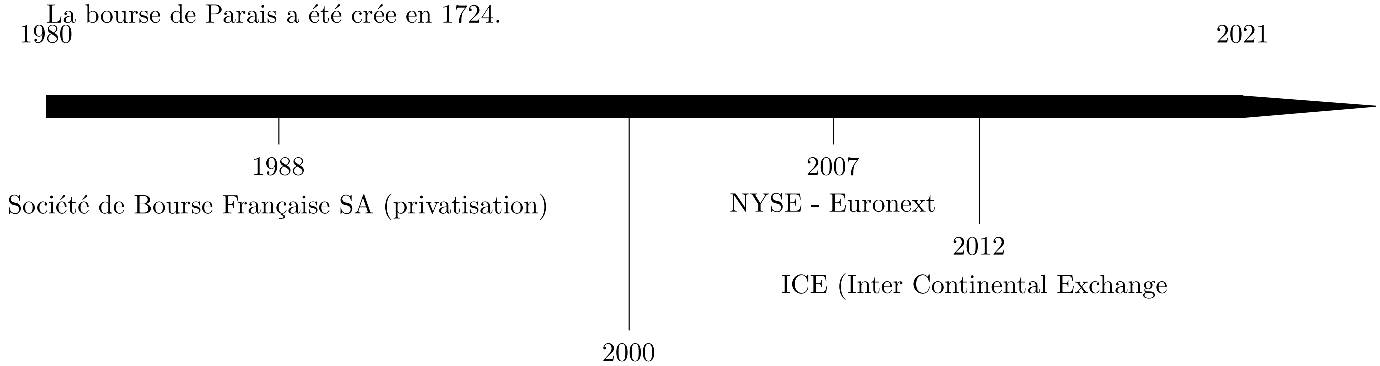


FIGURE 1.6 – Vente d'une option de vente

NB : les ronds bleus indiquent les options de le moins risquée à la plus risquée

1.3 Organisation des marchés financiers

La bourse de Parais a été crée en 1724.



Euronext : aggrégation de différentes bourses européennes : $\begin{cases} \text{Paris} \\ \text{Amsterdam} \\ \text{Bruxelles} \\ \text{Lisbonne} \\ \text{LIFFE = Londres (2002} \end{cases}$

Il existe plusieurs marché :

1. **Marché Primaires** : le marché primaire est celui où les sociétés en quête de fonds et les investisseurs se rencontrent pour la première fois. Il s'assimile à une sorte de marché à la criée

   Attention, ce marché est différent du premier marché

   $$\neq$$

   Marchés Secondaires : On distingue le marché primaire du marché secondaire. Le marché secondaire est celui où s'échangent des titres financiers (ou des objets) d'occasion. Le marché secondaire peut être régulé où mettre directement vendeurs et acheteurs en contact. Il totalise la quasi-totalité des échanges et assure ainsi la liquidité des investissements.

   De la même manière, il est différent du second marché

2. **Marchés règlementés/ organisés/ gré à gré :**

   premier marché / second marché / nouveau marché

   $$\Longrightarrow$$

   de plus en plus risqué

1.4 Fonctionnement du marché boursier

Le marché boursier est le lieu de rencontre entre l'offre et la demande.

CAC 40 : indice qui est fait sur unr un portefeuille constituée des 40 actions françaises les plus puissantes. (Cotation assisté en continue)

Il y a 2 types de cotations :
- en continue (toutes heures du jour mais pas de nuit - 9h 17h en France -)
- au fixing (valorisation quotidienne ou biquotidienne)

La cours de l'action est le montant de la dernière transaction
il y a un carnet d'ordres :

CARNET D'ORDRES

ORDRES	QTÉ	ACHAT	VENTE	QTÉ	ORDRES
3	**364**	**22.820**	**22.860**	**271**	**4**
6	605	22.800	22.880	877	7
3	506	22.780	22.900	1 748	6
9	2 719	22.760	22.940	1 900	6
6	1 484	22.780	22.960	2 379	8
11	2 024	22.760	22.960	2 229	6
9	1 133	22.700	22.980	428	2
2	460	22.680	23.000	1 284	4
9	1 133	22.700	23.020	3 556	4
4	962	22.640	23.040	1 187	5
0	**11 390**	**TOTAL**	**TOTAL**	**15 859**	

FIGURE 1.7 – Carnet d'ordre de Lagardère

1.5 Analyse d'un obligation à taux fixe

1.5.1 Rappel sur les taux d'interêt

On emprunte un capital C au taux R sur une periode (*e.g.* 1 an).
On rembourse à la fin de la période $C + C \times R = C(1 + R)$
Sur n périodes :

— **Taux proportionnel :**

$$C(1 + R)^n$$

Les interêts ne sont pas capitalisés

— **Taux d'interêt composé :**

Les interêts sont capitalisés : ils sont ajoutés au capital, et produisent à leurs tours des interêts

On peut déterminer un taux d'interêt pour une sous période :

On suppose qu'il y a k sous période dans 1 période (*e.g.* $k = 12$, sous période = 1 mois)
On note R_k le taux de sous période
On peut avoir un **taux proportionnel** ou un **taux actuariel/taux équivalent :**

— **Taux proportionnel :**

$$R_k = \frac{R}{k}$$

— **Taux actuariel/équivalent :**

On cherche R_k tq. $(1 + R_k)^k = 1 + R$

(cela suppose que les intérêts sont capitalisés en fin de sous période)

REMARQUE 1 : Si t correspond à un nombre entier de sous période (18 mois, 1.5 an = 1.5 sous période)

$$t = p \text{ sous période} = \frac{p}{k} \text{ période}$$
$$C \to C(1 + R_k)^p = C(1 + R_k)^{tk} = C(1 + R)^t$$

Ainsi la formule $C \to C(1 + R)^n$ vue pour n périodes reste valable pour un nombre non entier de périodes (par ex. 1.5) mais de la forme $t = \frac{n}{k}$ or k est ici arbitraire donc on peut prendre k très grand de sorte que la fromule est valable pour $k \in \mathbb{Q}$ et par continuité pour $t \in \mathbb{R}$

REMARQUE 2 : on peut écrire $(1 + R)^t$ sous la forme $\mathrm{e}^{t\ln(1+R)}$
Si on pose $r = \ln(1 + R)$, on a $(1 + R)^t = \mathrm{e}^{rt} \Longrightarrow \mathrm{e}^r = 1 + R$

Avec ces notations $\boxed{C \to_t C\mathrm{e}^{rt}}$

REMARQUE 3 : Ne pas confondre la remarque 2 avec celle-ci :
Si on considère un taux de période R, et que l'on calcule le taux d'une sous période auto-proportionnel $R_k = \frac{R}{k}$ $\boxed{\text{ET}}$ que l'on capitalise le sintérêts en fin de sous période, alors à la fin de la période

$$C \to_t C(1 + \tfrac{R}{k})^k$$

Si de plus, $_{\to}\infty$

$$\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{R}{k})^k = \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{k\ln(1 + \frac{R}{k})}$$
$$\text{or } \ln((1 + \frac{R}{k}) = \frac{R}{k}(1 + \varepsilon_k) \text{ avec } \varepsilon_K \to 0$$
$$k\ln(1 + \frac{R}{k}) = R(1 + \varepsilon_k) \to_{k\to\infty} R \text{ [a]}$$

De plus, ...

a. $\ln(1 + x) = x + x \times \varepsilon_x$

1.5.2 Taux d'actualisation

Un flux à un instant t n'a pas la même valeur que ce même flux à l'instant 0.
La valeur à $t = 0$ du flux F_t est $\dfrac{F_t}{(1+R)^t}$
$\tilde{F}_t = \dfrac{F_t}{(1+R)^t}$ est le taux actualisé du flux F_t
R est le taux supposé constant sur la période $[0;t]$
On peut généraliser le concept : par exemple si $t = n \in \mathbb{N}$ et si $R_1, R_2, ..., R_n$ sont les taux annuels pour les périodes $[0;1]$,$[1;2]$
Plus généralement encore, si on considère 1 ensemble de flux $F_{t1}...F_{tn}$ aux temps $t_1...t_n$ la valeur actualisé de cet ensemble est la somme algébrique $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ti}}{(1+R)^{t_i}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-rt_i} F_{ti}$ avec $r = \ln(1+R)$

1.5.3 Dynamique d'une obligation zero coupon

Si on note P_t, la valeur de l'obligation à l'instant t
On voit que $P_t = P_0\ \mathrm{e}^{rt} = P_0(1+R)^t$
On a alors $\dfrac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}t} = P_0\ \mathrm{e}^{rt} = rP_t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = r\mathrm{d}t$ [1]

REMARQUE : si P_t verifie $\dfrac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = r\mathrm{d}t$
Alors comme $\dfrac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \mathrm{d}(\ln(P_t))$

$$\text{On a } \mathrm{d}(\ln(P_t)) = r\mathrm{d}t$$
$$\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}(\ln(P_t))}_{\ln(P_t) - ln(P_0) = \ln\left(\frac{P_t}{P_0}\right)} = \int_0^t r\mathrm{d}t = r \times t$$
$$\Rightarrow P_t = P_0\mathrm{e}^{rt}$$

1.6 Analyse d'une action

1.6.1 Etude de la dynamique

On note P_t, le prix de l'action à l'instant t.

$$\frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} = \text{evolution} \approx \beta\Delta t = \text{ rendement moyen}$$

On suppose que $\dfrac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} \approx \beta_{\Delta t} + Z_{t,t+\Delta t}$ avec $Z_{t,t+\Delta t} \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$
On suppose que le prix est à "accroissements indépendants"
Soit trois temps t, t' et t'' : $P_{t''} - P_{t'} \perp\!\!\!\perp P_{t'} - P_t \Rightarrow \dfrac{P_{t''} - P_{t'}}{P_{t'}} \perp\!\!\!\perp \dfrac{P_{t'} - P_t}{P_t}$, car on neglige la variation entre t et t'.
On a $Z_{t,t'} \perp\!\!\!\perp Z_{t',t''}$ et $Z_{t,t''} \approx Z_{t,t'} + Z_{t',t''} \Rightarrow \mathbb{V}(Z_{t,t''}) = \mathbb{V}(Z_{t,t'}) + \mathbb{V}(Z_{t',t''})$
On suppose que le modèle est stationnaire *i.e.* $\mathbb{V}(Z_{t,t'}) = h(t'-t)$
On doit avoir

$$\begin{aligned} h(t''-t) &= h(t''-t'+t'-t) \\ &= h(t''-t') + h(t'-t) \end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$\begin{aligned} h(u+v) &= h(u) + h(v) \Rightarrow h(u) = u\ h(1) \\ \mathbb{V}(Z_{t,t'}) &= (t'-t)\ \underbrace{h(1)}_{\text{cst}} = (t'-t)\ c \end{aligned}$$

1. $y = f(x) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

$$Z_{t,t'} \sim \mathcal{N}(0, \sigma\sqrt{t'-t}) \text{ avec } \sigma = \sqrt{c}$$

Il existe un processus noté $(W_t)_t$ qui verifie

$$\boxed{\text{MOUVEMENT BROWNIEN}} \begin{cases} -W_0 = 0 \text{ et } W_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \\ -t \to W_t \text{est continu pour presque tout } \omega \in \Omega \\ -W_{t'} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t'_t})) \\ -W_{t'} - W_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t\,^2 \end{cases}$$

Ainsi, $Z_{t,t'} = \sigma(W_{t'} - W_t)\,^3$, et donc $\dfrac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} = \beta_{\Delta t} + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)$

Et quand les accroissements sont infiniments petits

$$\begin{aligned} \frac{P_{t+\mathrm{d}t} - P_t}{P_t} &= \beta \mathrm{d}t + \sigma \underbrace{(W_{t+\mathrm{d}t} - W_t)}_{\mathrm{d}W_t} \\ &= \underbrace{\beta \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\,^4}_{\text{MODELE DE BLACK-SHOLES}} \end{aligned}$$

1.7 Portefeuille Autofinancé

On considère un portefeuille constitué de $n+1$ actifs de prix $p_0^t \dots p_t^n$.

— p^0 = actif "sans risque" $\Rightarrow$ obligation

— $p_t^1 \to p_t^n$ = des biens risqués" $\Rightarrow$ actions

Les actifs sont détenus dans les quantités $Q_t^0 \dots Q_t^n$. Les quantités evoluent à certains instants $t_0 \dots t_n$.

on note V_t la valeur du portefeuille : $V_t = \sum_0^n Q_t^i P_t^i$

$$\begin{aligned} V_{t_{i+1}} - V_{t_i} &= \sum_0^n Q_{t_{i+1}}^k P_{t_{i+1}}^k \\ V_{t_{i+1}} - V_{t_{i+1}^-} + V_{t_{i+1}^-} - V_{t_i} &= \sum_0^n P_{t_{i+1}}^k \left(Q_{t_{i+1}}^k - Q^k k_{t_{i+1}^-} \right) + \sum_0^n Q_{t_i}^k \left(P_{t_{i+1}}^k - P_{t_i}^k \right) \end{aligned}$$

On pose $\Delta X_{t_i} = X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \Rightarrow \Delta V_{t_i} = \sum_0^n P_{t_{i+1}}^k \Delta Q_{t_i}^k + \sum_0^n Q_{t_i}^k \Delta P_{t_i}^k$

Le portefeuille est **autofinancé** si $\sum_0^n P_{t_{i+1}}^k \Delta Q_{t_i}^k = 0$, autrement dit si $V_{t_{i+1}} - V_{t_{i+1}^-} = 0, \forall i$

Donc dans le cas d'un portefeuille autofinancé, il reste

$$\Delta V_{t_i} = \sum_0^n Q_{t_i}^k \Delta P_{t_i}^k$$

Si $\sup(t_{i+1} \to 0 \Rightarrow \Delta V_{t_i} \to \mathrm{d}V_{t_i}$

$$\mathrm{d}V_{t_i} = \sum_0^n Q_{t_i}^k \mathrm{d}P_{t_i}^k$$

2. $\mathcal{F}_t$: tout ce qui est connu jusqu'à t
3. $X \sim \mathbb{N}(0, \sigma)$
$X = \sigma N \Rightarrow N \sim \mathbb{N}(0, 1)$
4. EDS : Equation differentielle stochastique

2 Limie de la valorisation en espérance - AOA

2.1 Valorisation d'un jeu de pile ou face

On considère plusieurs contrats : si c'est pile je gagne X €, sinon je gagne 0 €.
Par exemple, à quel prix j'acheterais un ticket si j'ai 1/2 *de gagner 200 €*
Plus les sommes sont élévées, plus les pertes possibles sont élevées.

2.2 Paradoxe de Saint Petersbourg

On gagne 2 €si on tombe sur pile pour la première fois au n^{ieme} coup.

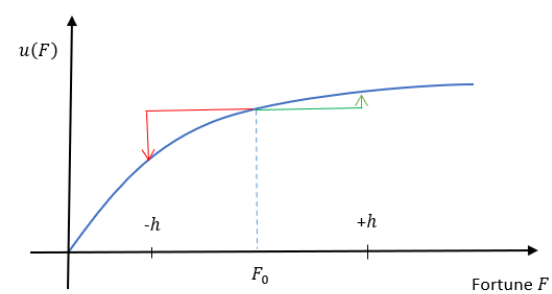
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) &= 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + \dots + 2^k \times \frac{1}{2^k} + \dots \\
&= \mathbb{E}(2^X) \text{ avec } X \text{ : instant aléatoire où l'on gagne} \\
&= \sum_k 2^k \mathbb{P}(X = k) = +\infty
\end{aligned}$$

L'éspérence de gain est infini mais ca n'aurait pas de sens de valoriser ce contrat à l'infini.
On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq n_0) &= \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^{n_0}} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) \\
&= \frac{1}{2^{n_0}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2^{n_0 - 1}}
\end{aligned}$$

Par exemple, si on mise 8 €on a 7 chance sur 8 de perdre.

2.3 Fonction d'utilité



La courbe d'utilité est une fonction concave [5]et croissante.
Ce shéma correspond à la situation où la valeur du contrat coïncide avec l'espérance des gains
"Le jeu n'en vaut pas la chandelle" ; en effet on voit que $|u(F_0) - u(F_0 - h)| > |u(F_0) - u(F_0 + h)|$ avec $\mathbb{P}(F_0 + h) = 1/2$ et $\mathbb{P}(F_0 - h) = 1/2$

Pour équilibrer le risque, on peut mettre un prime de risque. Par exemple, en termes d'utilité, perdre 400 €pourrait revenir à gagner 600 €.

Le calcul de l'espérance n'est pas une bonne valorisation.
Il y a deux cas ou la valorisation pas l'espérance est pertinent :
- quand la loi des grands nombre s'applique
- quand la fonction d'utilité est linéaire

Dans le cas ou la fonction est concave, l'acteur est averse aux risques
Dans le cas où la fonction est convexe, l'acteur a le goût du risques.

5. sous sa tante est $f'' < 0 \Leftarrow u(a+h) - u(a) > u(b+h) - u(b)$ pour $a < b$

2.4 Valorisation d'un contrat Forward (contrat à terme)

Opportunité d'arbitrage : Il y a une opprotunité d'arbitrage chaque fois qu'une transaction assure un profit certain sans dépense initale. Autrement sit, il existe une situation d'arbitrage lorsqu'il est possible de réaliser un profit sans risque et sans apport de fonds par combinaison de deux ou plusieurs transactions.

exemple :
Une action est cotée dans deux bourses différentes. Il suffit d'acheter au prix le plus bas et vendre simultanément au prix le plus haut.
Le profit est immédiat et sans risque.
Cette situation ne peut pas durer dans un marché efficient.
L'afflut des ordres d'achat va faire monter le prix et l'afflux des ordres de ventes va le faire baisser, jusqu'à légalité des prix (équilibre du marché). D'où la disparition de l'opportunité d'arbitrage.

Soit un contrat à terme sur une action de prix $(S_t)_t$, avec un prix d'exercice K. On suppose que le taux d'intérêt instantané du marché est r. La valeur du froward à $t = 0$ est nulle.
On peut emprunter au taux r une somme $C \to C\mathrm{e}^{rT}$ à l'instant T.

$$C\mathrm{e}^{rT} = C(1+R)^T \text{ avec } r = \ln(1+R)^T$$

Valoriser le contrat revient à déterminer K.
A terme l'acheteur du forward encaisse $S_t - K$ si $S_t - K$ est positif, et paye $K - S_t$ sinon.

Quelle est la valeur correcte de K ?
S_0, r et T sont connus
On pourrait être tenter d'utiliser comme prix d'exercice a terme, l'espérance du prix S_t. Mais il existe une autre stratégie qui impose une valeur au prix d'exercice : c'est le principe d'**absence d'opportunité d'arbitrage**.
Dans le cas présent on va montrer que

$$K = S_0\mathrm{e}^{rT}$$

Démo :

— Supposons $K > S_0\mathrm{e}^{rT}$
On peut "vendre" [6] le forward et on achète le sous-jacent S_0 à $t = 0$ en empruntant au taux r.
A terme, on rembourse $S_o\mathrm{e}^{rT}$ en vendant comme convenu le sous-jacent au prix d'exercice K. On conserve ainsi $K - S_o\mathrm{e}^{rT} > 0$.
On peut bénéficier de la somme $\mathrm{e}^{-rT}(K - S_o\mathrm{e}^{rT})$ dès l'instant 0 en empruntant cette somme que l'on remboursera à $T \to \mathrm{e}^{rT}(\mathrm{e}^{-rT}(K - S_o\mathrm{e}^{rT})) = K - S_o\mathrm{e}^{rT}$
Cette situation ne peut pas exister durablement.

— Supposons maintenant que $K < S_0\mathrm{e}^{rT}$
Les détenteurs de l'action peuvent bénéficier d'une opportunité d'arbitrage.
Ils vendent l'action au prix S_0, ils placent le montant au taux r, et ils "achètent" [7] le forward.
A terme, ils achètent l'action au prix K et ils touchent le montant du placement avec les interêts $S_0\mathrm{e}^{rT}$.
Au bilan, il ont gagné $S_0\mathrm{e}^{rT} - k$ et ils ont de nouveau l'action.

Dans un marché à l'équilibre, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

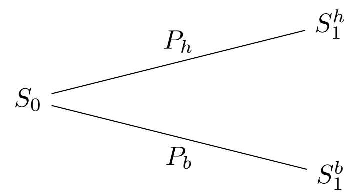
3 Valorisation d'une option

3.1 Modèle Binomiale à 1 période

On considère une action au prix S_t avec $t = \{0, 1\}$ et une option (achat ou vente) de prix C_t et de prix d'exercice K.
On suppose que l'on peut acheter ou vendre des obligations au taux r.

6. il n'y a pas de transfert d'argent à ce moment là
7. il n'y a pas de transfert d'argent

On suppose que l'on a 2 possibilité à $t = 1$: $(S_1^b < S_1^h)$



On cherche C_0, on commence donc par observer C_1 qui prend soit la valeur C_1^h soit C_1^b. Par exemple, si on a une option d'achat $C_1(S_1) = (S_1 - K)^+$
Pour trouver C_0, on constitue un portefeuille constitué d'actions et d'obligations de façon à dupliquer le prix de l'option à $t = 1$.
On veut avoir $V_1 \equiv C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} {}^h_1 = C_1^h \\ V_1^b = C_1^b \end{cases}$ Le portefeuille contient x actions et y obligations de prox B_t de sorte que $V_t = xS_t + yB_t$
On doit avoir $\begin{cases} S_1^h + yB_1 = C_1^h \\ xS_1^b + yB_1 = C_1^b \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{C_1^h - C_1^b}{S_1^h - S_1^b} \\ y = \dfrac{C1^h S_1^b - C_1^b S_1^h}{B_1(S_1^b - S_1^h)} \end{cases}$ Ce portefeuille duplique le prix de l'option à l'instant terminal c'est un portefeuille de couverture.

L'absence d'opportunité d'arbitrage implique

$$\begin{aligned} C_0 &= V_0 \\ &= xS_0 + yB_0 \\ &= \frac{C_1^h - C_1^b}{S_1^h - S_1^b} S_0 + \frac{C_1^h S_1^b - C_1^b S_1^h}{B_1(S_1^b - S_1^h)} B_0 \\ &= \frac{C_1^h - C_1^b}{\mu^h - \mu^b} + \frac{1}{1+R} \frac{C_1^h(1+\mu^b) - C_1^b(1+\mu^h)}{\mu^h - \mu^b} \\ &= C_1^h \frac{1 + R - (1+\mu^b)}{(\mu^h - \mu^b)(1+R)} + C_1^b \frac{(1+\mu^h) - (1+R)}{(\mu^h - \mu^b)(1+R)} \\ &= \frac{1}{1+R} \left[C_1^h \frac{R - \mu^b}{\mu^h - \mu^b} + C_1^b \frac{\mu^h - R}{\mu^h - \mu^b} \right] \end{aligned}$$

On pose $\dfrac{S_1^h}{S_0} = 1 + \mu^h$ et $\dfrac{S_1^b}{S_0} = 1 + \mu^b$ avec μ = rendement   et $\dfrac{B_1}{B_0} = 1 + R$

On pose $\Pi^h = \dfrac{R - \mu^b}{\mu^h - \mu^b}$ et $\Pi^b = \dfrac{\mu^h - R}{\mu^h - \mu^b}$
On a $Pi^b > 0$ et $\Pi^h > 0$ et $\Pi^b + \Pi^h = 1$
donc

$$C_0 = \frac{1}{1+R} \left[C_1^h \Pi^h + C_1^b \Pi^b \right]$$

Si on note Π [8] la proba (Π^h, Π^b) sur l'univers $\{b, h\}$, alors

$$C_0 = \frac{1}{1+R} \mathbb{E}_\Pi(C_1)$$

On a $\tilde{C}_1$ [9] $= \dfrac{C_1}{1+R}$ Ainsi

$$\boxed{=\mathrm{C}_0 = \mathbb{E}_\Pi(\tilde{C}_1)}$$

NB : on peut utiliser l'espérance car c'est un risque neutre (fonction d'utilité linéaire)

Probabilité risque neutre : c'est la probabilité vrtuelle pour laquelle tous les processus actualisés sont des martingales.

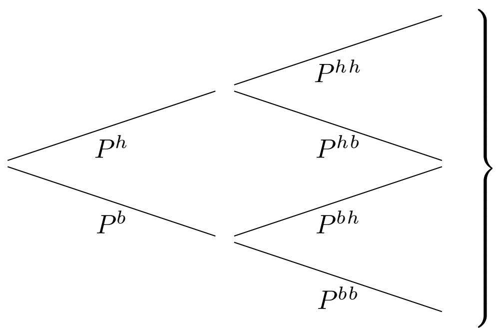
8. probabilité risque neutre
9. Valeur actualisée à $t = 0$ de C_1

On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\Pi(\tilde{S}_1) &= \mathbb{E}_\Pi(\frac{S_1}{R+1}) \\
&= \frac{1}{1+R}\left[S_1^h \frac{R-\mu^b}{\mu^h-\mu^b} + S_1^b \frac{R-\mu^h}{\mu^h-\mu^b}\right] \\
&= \frac{S_0}{1+R}\left[(1+\mu^h)\frac{R-\mu^b}{\mu^h-\mu^b} + (1+\mu^b)\frac{R-\mu^h}{\mu^h-\mu^b}\right] \\
&= S_0
\end{aligned}$$

3.2 Modèle binomiale à n périodes

On considère une action sur n périodes et on suppose qye les possibilités constituent un arbre binomial recombinant



... $(n+1)$ possibilités au rang n

Le prix terminal C_n est connu de façon récursive.
On peut calculer le prix partout.Pour cela, on fait apparaitre une proba Π sur l'univers $\{h,b\} = \{(x_1,\ldots,x_n), x_i \in \{h,b\}$

$$C_n = \mathbb{E}_\Pi\left[\frac{C_{n+1}}{(1+R)^n}/\mathcal{F}_n\right]$$
$$\tfrac{C_n}{(1+R)^n} = \mathbb{E}_\Pi\left[\frac{C_{n+1}}{(1+R)^{n-1}}/\mathcal{F}_n\right]$$
$$\underbrace{\tilde{C}_n = \mathbb{E}_\Pi\left[\tilde{C}_{n+1}/\mathcal{F}_n\right]}_{\text{Martingale}}$$

Ainsi, $\tilde{C}_n$ et un martingale sur Π.
On observe que la proba risque neutre ne dépend que des rendements μ^b, μ^h ete R pourchaque "gnomon".

$$\Pi^h = \frac{R-\mu^b}{\mu^h-\mu^b} \qquad \Pi^b = \frac{\mu^h-R}{\mu^h-\mu^b}$$

Le prix terminla de l'option n'intervient pas. Seuls interviennent les valeurs du sous-jacent.
Par conséquent, la proba Π est la même quelque soit l'option valorisée.

3.3 Formule de valorisation en temps continu

On se place dans le modèle de BLACK-SCHOLES, et on considère une action de prix S_t et une obligation de prix B_t ($t \in [0,T]$). On a $\frac{\mathbf{d}S_t}{S_t} = \underbrace{\beta \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t}_{\text{On fluctue autour du rendement moyen}}$ et $\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = r\mathrm{d}t$
et on considère une option sur le sous-jacent S_t, de prix d'exercice K au terme T et de prix C_t.
Onn considère un portefeuille constitué d'actions et d'obligations de valeur V_t. On note ψ_T et φ_T les quantités d'actions et d'obligations :

$$V_t = \psi_t S_t + \varphi_t B_t$$

On suppose que le portefeuille est autofinancé donc

$$\mathrm{d}V_t = \psi_t \mathrm{d}S_t + \varphi_t \mathrm{d}B_t$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t &= \mathrm{e}^{-rt} V_t \\
\mathrm{d}\tilde{V}_t &= -r\mathrm{e}^{-rt}[\psi_t S_t + \varphi_t B_t \mathrm{d}t] + \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}V_t \\
&= -r\mathrm{e}^{-rt} V_t \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}[\psi_t \mathrm{d}S_t + \varphi_t \mathrm{d}B_t] \\
&= \psi_t \underbrace{\left[-r\mathrm{e}^{-rt} S_t \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}S_t\right]}_{\mathrm{d}\underbrace{(\mathrm{e}^{-rt}S_t)}_{\tilde{S}_t}} + \varphi_t \underbrace{\left[-r\mathrm{e}^{-rt} B_t \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}B_t\right]}_{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-rt}B_t)^{10} = \mathrm{d}B_0 = 0} \\
\mathrm{d}\tilde{V}_t &= \psi \mathrm{d}\tilde{S}_t
\end{aligned}$$

> **Théorème de Girsanov :** *"Modifier les probas des trajectoires possibles pour obtenir un brownien"*
> On considère une mouvement brownien $(W_t)_t$.
> On pose $W't = W_t + \frac{\beta - r}{\sigma} t$
> W' n'est pas un mouvement brownien pour la proba P (proba réelle). Mais il existe une probabilité Π sur l'ensemble des trajectoires pour laquelle $(W'_t)_t$ est un mouvement brownien.
>
> **NB :** Pour la proba Π, W_t n'ets pas un mouvement brownien

3.4 APPLICATION

On a $\frac{\mathbf{d}S_t}{S_t} = \beta \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_t = \mathrm{e}^{-rt} S_t \mathrm{d}\tilde{S}_t &= -\mathrm{e}^{-rt} S_t \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}S_t \\
&= -r\tilde{S}_t \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\left[S_t \beta \mathrm{d}t + S_t \sigma \mathrm{d}W_t\right] \\
&= -r\tilde{S}_t \mathrm{d}t + \tilde{S}_t \beta \mathrm{d}t + \tilde{S}_t \sigma \mathrm{d}W_t \\
&= \tilde{S}_t\left[-r\mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right] \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{S}t}{\tilde{S}_t} &= (\beta - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t
\end{aligned}$$

on a alors, avec W'_t, un mouvement broxnien pour la proba risque neutre Π :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{S}t}{\tilde{S}_t} &= (\beta - r)\mathrm{d}t + \sigma\left[\mathrm{d}W'_t - \frac{\beta - r}{\sigma}\mathrm{d}t\right] \\
&= \sigma \mathrm{d}W'_t \\
\mathrm{d}\tilde{S}_t &= \tilde{S}_t \sigma \mathrm{d}W'_t
\end{aligned}$$

Or on sait que $\mathrm{d}\tilde{V}_t = \psi \mathrm{d}\tilde{S}_t = \psi \tilde{S}_t \sigma \mathrm{d}W't$

$$\boxed{\mathrm{d}_t = \psi \tilde{S}_t \sigma \mathrm{d}W't}$$

Par hypothèses, par construction on a $C_t = V_t \tilde{C}_t = \tilde{v}_t$. Donc $\mathrm{d}\tilde{C}_t = \mathrm{d}\tilde{v}_t = \mathrm{d}\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma \mathrm{d}W'_t$
Comme W'_t est une martingale pour Π, on en déduit que $\tilde{C}_t$ est aussi une martingale (*cf.* propriété 6).
On en déduit que

$$\forall s, t \; \mathbb{E}_\Pi\left[\tilde{C}_t / \mathcal{F}_s\right] = \tilde{C}_s \text{ avec } s \leq t$$

En particulier, $\tilde{C}_0 = C_0 = \mathbb{E}_\Pi[\tilde{C}_T/\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\tilde{C}_T]$

10. $\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = r\mathrm{d}t B_t = B_0 \mathrm{e}^{rt}\mathrm{e}^{-rt} B_t = B_0$

3.5 Formule de BLACK-SCHOLES

Attention, la formule est différente du modèle !
On considère une option d'achat sur le sous-jacent (*cf.*3.3)
Dans ce cas, $C_T = (S_T - K)^+$
On veut calculer C_t.

On a :
$$\begin{aligned} C_t &= \mathrm{e}^{rt}\tilde{C}_t = \mathrm{e}^{rt}\mathbb{E}_\Pi[\tilde{C}_T/\mathcal{F}_t] \\ &= \mathrm{e}^{rt}\mathbb{E}_\Pi[\mathrm{e}^{-rT}(S_T-K)^+/\mathcal{F}_t] \\ &= \mathrm{e}^{-r\tau}\mathbb{E}_\Pi[(S_T-K)^+/\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$
On pose $\tau = T - t$

Or on sait que $S_T = S_0\mathrm{e}^{\beta - \frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T}$ et $\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \sigma \mathrm{d}W'_t$
On a donc aussi en transposant la relation avec $\beta \to r$ et $W_t \to W'_t$

$$S_T = S_0\mathrm{e}^{r - \frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W'_t} \qquad S_t = S_0\mathrm{e}^{r - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W'_t}$$

$$\begin{aligned} S_t &= S_t\mathrm{e}^{r - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(W'_T - W'_t)} \\ &= S_t\mathrm{e}^{r - \frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma\sqrt{\tau}Z} \quad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

Donc $C_t = \mathrm{e}^{-rt}\mathbb{E}_\Pi\left[(S_t\mathrm{e}^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + r\sqrt{\tau}Z} - K)^+/\mathcal{F}_t\right]$

On sait que $W'_T - W'_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t$ donc $Z = \frac{W'_T - W'_t}{\sqrt{\tau}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$
Donc

$$\begin{aligned} C_t &= \mathrm{e}^{-r\tau}\mathbb{E}_\Pi\left[(S_t\mathrm{e}^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + r\sqrt{\tau}Z} - K)^+\right] \\ &= \mathrm{e}^{-r\tau}\int_\infty^\infty x\mathrm{e}^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + r\sqrt{\tau}z} - Kf_Z(z)\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{e}^{-r\tau}\int_{z_0}^\infty x\mathrm{e}^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + r\sqrt{\tau}z} - Kf_Z(z)\mathrm{d}z \\ &= x\mathrm{e}^{-r\tau}\mathrm{e}^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}\underbrace{\int_{z_0}^\infty \mathrm{e}^{r\sqrt{\tau}z}f_Z(z)\mathrm{d}z}_{I} - \mathrm{e}^{-r\tau}K\underbrace{\int_{z_0}^\infty f_Z(z)\mathrm{d}z}_{= \mathrm{e}^{-r\tau}KF_Z(-z_0)} \end{aligned}$$

On pose $x = S_t$ qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable donc qui peut être considéré comme une constante.

Or $x\mathrm{e}^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + r\sqrt{\tau}z} - K > 0$
$\Rightarrow z > \underbrace{\frac{\ln(\frac{k}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2}\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}}_{z_0}$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{z_0}^{\infty} \mathrm{e}^{r\sqrt{\tau}z}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\mathrm{e}^{-\dfrac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{z_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z^2-2r\sqrt{\tau}z)}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\mathrm{d}z \\
&= \int_{z_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{\tau})^2+\frac{1}{2}\sigma^2\tau}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau}\int_{z_0}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{\tau})^2}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\mathrm{d}z \qquad \text{On pose } u = z-\sigma\sqrt{\tau} \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}z \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau}\int_{z_0-\sigma\sqrt{\tau}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau}\int_{z_0-\sigma\sqrt{\tau}}^{\infty} f_Z(u)\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau}F_Z(\sigma\sqrt{\tau}-z_0)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
C_t &= x\mathrm{e}^{-r\tau}\mathrm{e}^{(r-\dfrac{\sigma^2}{2})\tau}\mathrm{e}^{\dfrac{1}{2}\sigma^2\tau}F_Z(\sigma\sqrt{\tau}-z_0) - K\mathrm{e}^{-r\tau}F_Z(-z_0) \\
&= xF_Z(\sigma\sqrt{\tau}-z_0) - K\mathrm{e}^{-r\tau}F_Z(-z_0) \\
&= xF_Z(d_1) - K\mathrm{e}^{-r\tau}F_Z(d_2)
\end{aligned}$$

On pose $d_1 = \sigma\sqrt{\tau} - z_0 = \sigma\sqrt{\tau} - \dfrac{\ln(\frac{k}{x}) - (r-\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \dfrac{\ln(\frac{k}{x}) + (r+\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$

et $d_2 = -z_0 = \dfrac{\ln(\frac{k}{x}) + (r-\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$

Finalement

$$\underbrace{\boxed{\mathrm{C}_t = S_tF_Z(d_1) - K\mathrm{e}^{-r\tau}F_Z(d_2)}}_{\text{FORMULE DE BLACK-SCHOLES}}$$

Il s'agit de l'expression du prix de l'option en fonction du prix du sous-jacent et du prix d'exercice.

$F_N(d_2) = \Pi(S_t \geq K/\mathcal{F}_t)$
$S_tF_N(d_1) = \mathbb{E}_\Pi[\mathrm{e}^{-r\tau}S_T/S_T \geq K, \mathcal{F}_t]\Pi(S_t \geq K)$

NB : on se place en proba Π mais en supposant que le rendement moyen de S est $r \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}S_t}{S} = r\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W'_t$

3.6 Formule de parité Put/Call

On considère un put et un callsur le même sous-jacent (de pris S_t) et pour le même prix d'exercice K.
On sait que $C_T = (S_T - K)^+$ ete $P_T = (K - S_T)^+$
Ainsi, $C_T - P_T = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$
Et donc

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_T - \tilde{P}_T &= \tilde{S}_T - \mathrm{e}^{-rt}K \text{ [11]} \\
&= \mathbb{E}_\Pi[\tilde{C}_T - \tilde{P}_T/\mathcal{F}_T] \\
&= \mathbb{E}_\Pi[\tilde{S}_T - \mathrm{e}^{-rt}K/\mathcal{F}_T] \\
&= \tilde{S}_T - \mathrm{e}^{-rT}K \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

11. $\tilde{C}_T$,$\tilde{P}_T$ et $\tilde{S}_T$ sont des martingales

On a donc
$$\underbrace{C_t - P_t = \mathrm{e}^{rt}(\tilde{S}_t - \mathrm{e}^{-rT}K) = S_t - K\mathrm{e}^{-r\tau}}_{\text{FORMULE DE PARITE PUT/CALL}}$$
Cette formule montre que tous les prix ont un lien, sinon il y a une opportuité d'arbitrage.

3.7 Rappel formule d'intégrations par parties

$f(x, y) = xy$
$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}\langle x, x\rangle + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}\langle x, y\rangle + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}\langle y, y\rangle\right]$
$\mathrm{d}(X_t, Y_t) = Y_t \mathrm{d}X_t +_t \mathrm{d}Y_t + \mathrm{d}\langle X_t, Y_t\rangle$

Conséquences :
$$\begin{array}{c} X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s\mathrm{d}Y_s + Y_s\mathrm{d}X_s + \langle X_t, Y_t\rangle \\ \int_0^t Y_s\mathrm{d}X_s = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t X_s\mathrm{d}Y_s - \langle X_t, Y_t\rangle \end{array}$$

3.8 EXERCICES

$(X_t)_t$ vérifie le modèle de Black-Scoles en proba risque neutre, donc $\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = r\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t$

Déterminer l'équation différentielle vérifié pas $Z_t = X_t^2$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}Z_t &=& 2X_t\mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X_t, X_t\rangle \\ &=& 2X_t(X_tr\mathrm{d}t + X_t\sigma\mathrm{d}W_t) + \langle\underbrace{X_tr\mathrm{d}t}_{\text{VB}} + \underbrace{X_t\sigma\mathrm{d}W_t}_{\text{martingale}}, \underbrace{X_tr\mathrm{d}t}_{\text{VB}} + \underbrace{X_t\sigma\mathrm{d}W_t}_{\text{martingale}}\rangle \\ &=& 2X_t(X_tr\mathrm{d}t + X_t\sigma\mathrm{d}W_t) + \langle X_tr\mathrm{d}t, X_tr\mathrm{d}t\rangle \\ &=& 2X_t(X_tr\mathrm{d}t + X_t\sigma\mathrm{d}W_t) + X_t^2\sigma^2\mathrm{d}\langle W_t, W_t\rangle \\ &=& 2Z_t(r\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t) + X_t^2\sigma^2\mathrm{d}t \\ &\Rightarrow& \frac{\mathrm{d}Z_t}{Z_t} = (2r + \sigma^2)\mathrm{d}t + 2\sigma\mathrm{d}W_t \end{array}$$

On peut déduire de l'expression de Z_t
$$Z_t = z_0\ \mathrm{e}^{[2r+\sigma^2-\frac{1}{2}(2\sigma)^2]t+2\sigma W_t}$$

3.9 Sensibilité du prix d'une option - "Grecques"

On note $C(t, S_t)$, le prix de l'option. On considère une option d'achat.

— Sensibilité du prix du sous-jacent :

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial S_t} = F_N(d_1) > 0 \text{ et } \Delta < 1$$

Le delta d'une option mesure la sensibilité de son prix à une variation donnée du cours du sous-jacent.

— Sensibilité du Δ au prix prix du sous-jacent :

$$\gamma = \frac{\partial'' C}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{t}} f_N(d_1) \geq 0$$

Le gamma représente la convexité ou la termaxité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance à évoluer plus ou moins vite que le prix du sous-jacent.

— Sensibilité par rapport à la volatilité du sous-jacent

$$Vega = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = S f_N(d_1)\sqrt{t} > 0$$

Le véga mesure de la sensibilité à la volatilité implicite. Plus la volatilité est élevé, plus $C(t, s_t)$ est élevé.

— Sensibilité par rapport à la maturité :

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial \tau} = -\frac{\partial C}{\partial t} \text{ si } \tau > t$$

Il y a un graphique d'explication supplémentaire dans le cours

NB : C(t,S$_t$) $= S_t F_N(d_1) - K\mathrm{e}^{r\tau} F_N(d_2) \approx S_t - K\mathrm{e}^{r\tau}$ quand S_t est grand, en effet $S_t \to \infty \Rightarrow \begin{cases} F_N(d_1) \to 1 \\ F_N(d_2) \to 1 \end{cases}$

3.10 Stratégies avec des options

On a vu les shémas des bénéfices des options.
On peut pour le même sous-jacent S_t :

— acheter C_K, une option d'achat de prix K
— acheter $P_{K'}$ une option de vente de prix K'

Chapitre 2

MATHEMATIQUES

1 A RATTRAPER

1.1 A RATTRAPER

1.
2.
3. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X/\mathcal{F}\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$
4. Si $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}\left[X/\mathcal{F}\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$
5. si X est $\mathcal{F}$-mesurable et $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$
   alors $\mathbb{E}\left[f(X,Y)/X = x\right] = \mathbb{E}\left[f(x,Y)/X = x\right] = \mathbb{E}\left[f(x,Y)\right]$

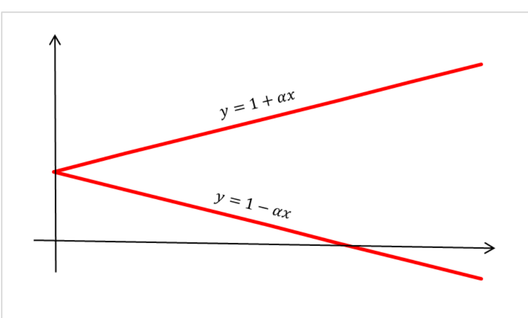
1.2 Martingale et Filtration

Une **filtration** est une famille croissante de tribus

$$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}} \text{ ou } (\mathcal{F}_t)_{t>0} \Rightarrow \forall t, \mathcal{F}_t \text{ représente l'information disponible à } t.$$

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{I}}$ [1]
On dit que le processus [2] $(X_t)_t$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ ($\mathcal{F}_t$-martingale) si :
- $\forall t \in \mathbb{I}, (X_t)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable
- $\forall s \leq t \in \mathbb{I}, \mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_t\right] = X_s$

REMARQUE 1 :



10.7

On considère un processus avec 2 trajectoires disponibles
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\})$

CECI N'EST PAS UNE MARTINGALE ! !

1. $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^*$
2. processus : suite de V.A.

REMARQUE 2 : Si X est une $\mathcal{F}_t$-martingale, alors $\forall t, \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) = \text{cst}$

Démonstration : On sait que $\forall s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_t\right] &= X_s \\
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}\right]\right] &= \mathbb{E}\left[X_s\right] \\
\mathbb{E}\left[X_t\right] &= \mathbb{E}\left[X_s\right]
\end{aligned}$$

1.3 Un exemple de martingale

Préliminaires : Dans le cas particulier d'une martingale à temps discret $t \in \mathbb{N}$, on à la propriété suivante :

$$\boxed{(X_t)_{t\in\mathbb{N}} \text{ est une martingale ssi :} \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] = X_n}$$

Démonstration :

Martingale $\Rightarrow \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_t\right] = X_n$, par définition.

$\mathbb{E}\left[X_p/\mathcal{F}_t\right] = X_n \Rightarrow$ on doit montrer que $\forall p \leq n$

$\rightarrow$par exemple pour $p = n+2$, on a $\mathbb{E}\left[X_{n+2}/\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}\left[X_{n+2}/\mathcal{F}_{n+1}\right]}_{X_{n+1}}/\mathcal{F}_n\right] = X_n$

Plus généralement : $\mathbb{E}\left[X_p/\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_p/\mathcal{F}_{p-1}\right]/\mathcal{F}_{p-2}\right]\ldots\mathcal{F}_n\right] = X_n$

On considère une source d'aléa sous la forme d'une suite de V.A. $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, Z_n \sim \mathcal{B}(p)$ [3]
On suppose que les (Z_n) sont des V.A. indépendantes.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2Z_n - 1$ *i.e.* $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(U_n = -1) = 1 - p$
et les U_n sont idépendants
La tribu $\mathcal{F}_n = \tau(Z_1 \ldots Z_n)$ [4] réprésente l'information contenu das les résultats de $(Z_1 \ldots Z_n)$.
Soit $S_n = \sum_1^n U_k$

<u>A quelle condition le processus (S_n) est-il une martingale ?</u>

On doit verifier que :

- $\forall n, S_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable
  $\hookrightarrow$En effet, S_n est une fonction de $Z_1 \ldots Z_n$, docn S_n est connu quand F_n est connu.
- $\mathbb{E}\left[S_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] = S_n$
  $\hookrightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\underbrace{U_{n+1}}_{U_{n+1}\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_n} + \underbrace{\sum_1^n U_k}_{\mathcal{F}_n\text{-mesurable}} /\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_{n+1}\right] + S_n \\
&= (+1)\times p + (-1)\times(1-p) + S_n \\
&= 2p - 1 + S_n \\
&= S_n \text{ si } p = 1/2
\end{aligned}$$

3. *i.e.* $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p$
4. τ est la tribu engendré par ...

Donc (S_n) est une martingale ssi $p = 1/2$.

On suppose maintenant que l'on peut miser une somme différentes M_n à chaque rand n.
On suppose que le processus $(M_n)_n$ est prévisible [5].
G_n est le gain en n tentatives. On a $G_n = \sum_1^n M_k U_k$

G_n est il toujours une martingale $(p = 1/2)$?

On doit verifier que :
- $\forall n, M_k$ et U_k sont $\mathcal{F}_n$-mesurable
  $\hookrightarrow$En effet, $\begin{cases} U_k \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\ M_k \text{ est } \mathcal{F}_{k+1}\text{-mesurable donc } \mathcal{F}_n\text{-mesurable puisque } k-1 \leq n \end{cases}$
  - $\Longrightarrow G_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable
- $\mathbb{E}\left[G_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] = G_n$
  $\hookrightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[G_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[M_{n+1}U_{n+1} + G_n/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\underbrace{M_{n+1}U_{n+1}}_{M_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}} /\mathcal{F}_n\right] + G_n \\
&= M_{n+1}\mathbb{E}\left[U_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] + G_n \\
&= G_n
\end{aligned}$$

- $\Longrightarrow \mathbb{E}(G_n) = \mathbb{E}(G_0) = G_0 = 0$

Cas de la martingale à la roulette : $\mathbb{E}(G_T) = 1$ où $T = 1^{er}$instant où l'on gagne
T est V.A., il s'agit ici d'un temps d'arrêt.

temps d'arrêt : $\forall n, \{Tn\} \in \mathcal{F}$
Si T est un temps d'arrêt, on peut définir F_T, la tribu des évenements antérieurs à T.
En général, si S et T sont temps d'arrêts et (X_s), une martingale, alors $\mathbb{E}(X_T/\mathcal{F}_S) \neq X_S$ pour $S \leq T$

$\Longrightarrow \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \neq X_s$ est vrai quand t et s sont fixes, et non pas des V.A.

ATTENTION, si S et T sont bornés, on a encore $\mathbb{E}(X_T/\mathcal{F}_S) = X_S$

1.4 Transformée de martingale

Il s'agit de la version discrète de l'intégrale.
Soit $(M_n)_n$, une $\mathcal{F}_n$-martingale et $(H_n)_n$ un processus "quelconque [6]"

$$S_n = \sum_1^{n-1} H_k \Delta M_k \text{ avec } \Delta M_k = M_{k+1} - M_k$$

S_n est une $\mathcal{F}_n$-martingale

démo :
- $\forall k \leq n-1, H_k$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, ΔM_k est aussi $\mathcal{F}_n$-mesurable donc S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable
- Dans le cas discret, il suffit de verifier que $\mathbb{E}\left[S_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] = S_n$

5. càd que $\in \mathbb{N}^*, M_n$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable
6. au moins $\mathcal{F}_n$-mesurable

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[S_{n+1}-S_n+S_n/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_{n+1}-S_n\right]+\underbrace{\mathbb{E}\left[S_n/\mathcal{F}_n\right]}_{=S_n \text{ car } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}} \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left[H_n\Delta M_n\right]}_{H_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}} +S_n \\
\mathbb{E}\left[S_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] &= H_n\mathbb{E}\left[\Delta M_n\right]+S_n \\
&= \underbrace{H_n\mathbb{E}\left[M_{n+1}\right]-H_n\mathbb{E}\left[M_n\right]}_{M_n \text{ est une } \mathcal{F}_n\text{-martingale}} +S_n \\
&= H_nM_n-H_nM_n+S_n \\
\mathbb{E}\left[S_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] &= S_n
\end{aligned}$$

— $\Longrightarrow S_n$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale

1.5 Crochets de martingales discretes

Si $(X_n)_n$ est un processus "quelconque", on définit le crochet de X avec lui même noté $\langle X, X\rangle_n$ ou $\langle X_n, X_n\rangle$, défini par la relation :

$$\langle X_n, X_n\rangle = \sum_0^{n-1}(\Delta X_k)^2$$

Plus généralement, pour deux processus $(X_n)_n, (Y_n)_n$, on définit $\langle X_n, Y_n\rangle = \displaystyle\sum_0^{n-1}(\Delta X_k)(\Delta Y_k)$

Propriété 1. —
- — *le crochet $\langle X_n, X_n\rangle$ est un processus croissant*
- — *$(X_n, Y_n) \to \langle X_n, Y_n\rangle$ est une application bilinéaire symétrique*

Propriété 2. — *Si $(M_n)_n$ est une martingale alors $M_n^2-\langle M_n, M_n\rangle$ est une martingale.*

Démo :

1. *$M_n^2-\langle M_n, M_n\rangle$ est mesurable*
2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2-\langle M_{n+1}, M_{n+1}\rangle/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2-(M_{n+1}M_n)^2-M_n^2+\underbrace{M_n^2-\sum_0^{n-1}(M_{k+1}M_k)}_{\mathcal{F}_n\text{-mesurable}}/\mathcal{F}_n\right]^{7} \\
&= \mathbb{E}\left[2M_n(M_{n+1}-M_n)/\mathcal{F}_n\right]+M_n^2-\langle M_n, M_n\rangle \\
&= 2M_n\mathbb{E}\left[(M_{n+1}-M_n)/\mathcal{F}_n\right]+M_n^2-\langle M_n, M_n\rangle \\
&= 2M_n\mathbb{E}\left[M_{n+1}/\mathcal{F}_n\right]-2M_n\mathbb{E}\left[M_n)/\mathcal{F}_n\right]+M_n^2-\langle M_n, M_n\rangle \\
&= 2M_n\times M_n-2M_n\times M_n+M_n^2-\langle M_n, M_n\rangle \\
&= M_n^2-\langle M_n, M_n\rangle
\end{aligned}$$

7. $\langle M_{n+1}, M_{n+1}\rangle = \langle M_n, M_n\rangle+(M_{n+1}-M_n)^2$

Propriété 3. — *Soit $(X_n)_n, (Y_n)_n, (M_n)_n et (N_n)_n$ 4 processus.*
On a

$$\left\langle \sum_1^{n-1} X_k \Delta M_k, \sum_1^{n-1} X_k \Delta N_k \right\rangle = \sum_1^{n-1} X_k Y_k \Delta \langle M_k, N_k \rangle$$

En effet, $\Delta M_k \times \Delta N_k = \Delta \langle M_k, N_k \rangle$

NB : *En particulier,* $\left\langle \sum_1^{n-1} H_k \Delta M_k, \sum_1^{n-1} H_k \Delta M_k \right\rangle = \sum_1^{n-1} H_k^2 \Delta \langle M_k, M_k \rangle$

2 Intégrales Stochastiques

2.1 Intégrales

2.1.1 Intégrales de Riemann

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\sup(t_{i+1}-t_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Remarque : On a donc

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx \sum_0^{n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \frac{b-a}{n} \sum_0^{n-1} f(t_i)$$

On a aussi pour $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{n}$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d} \approx \underbrace{\left[\frac{1}{2n} f(t_0) + \frac{1}{n} \sum_1^{n-2} f(t_i) + \frac{1}{2n} f(t_n) \right] (b-a)}_{\text{FORMULES DES TRAPEZES}}$$

2.1.2 Intégrales de Stieljes

On considère une fonction $M(t)$ croissante et une fonction $f(t)$ "quelconque".
On a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}M_t = \lim_{\sup(\Delta t_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \underbrace{[M(t_{i+1}) - M(t_i)]}_{\geq 0}$$

On considère une fonction $A(t)$ à **variations bornées** (V.B.)

Variations bornées :
une fonction $A(t)$ est à varations bornées sur$[a, b]$ ssi :

$$\lim_{\sup(\Delta t_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) |A(t_{i+1}) - A(t_i)| < \infty$$

ATTENTION, un mouvement brownien n'est pas un processus à variations bornées.

Propriété 4. —
$A(t)$ est à variations bornées si il existe 2 fonctions croissante $A_1(t)$ et $A_2(t)$ tel que

$$A(t) = A_1(t) - A_2(t)$$

On suppose que $A(t)^e st\grave{a}variationborn\acute{e}essur[0,\infty[$ et que par conséquent, il existe $A_1(t)$ et $A_2(t)$ tel que $A(t) = A_1(t) - A_2(t)$, alors on peut définir (pour $f(t)$ "quelconque") :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}A(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}A_1(t) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}A_2(t)$$

2.1.3 Intégrale par rapport à un processus à variations bornées

Soit H_t une prcessus "quelconque" et $A(t)$, un processu à variations bornées [8].
On définit :

$$\int_a^b H_t\mathrm{d}A_t = \lim_{\sup(\Delta t_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})$$ [9]

2.1.4 Intégrale par rapport à une martingale

Soit H_t une prcessus "quelconque" et (M_t), une martingale.
On définit :

$$\int_a^b H_t\mathrm{d}M_t = \lim_{\sup(\Delta t_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$ [10]

2.2 Propriétés des intégrales stochastiques/ Semi martingales

Propriété 5. —
Si H_t est un processus "quelconque", et A_t un processus à variation bornées (VB). Alors le processus $t \mapsto \int_0^t H_s\mathrm{d}A_s$ est encore un prcessus à VB

Démo :
Soit $H_s = H_s^+ - H_s^-$ [11] partie positive et partie négative de la courbe de H_s et $A_s = A_s^1 - A_s^2$ avec A_s^1 et A_s^2 , croissantes :

$$\begin{aligned}
\int_0^t H_s\mathrm{d}A_s &= \int_0^t H_s^+\mathrm{d}A_s - \int_0^t H_s^-\mathrm{d}A_s \\
&= \int_0^t H_s^+\mathrm{d}A_s^1 - \int_0^t H_s^+\mathrm{d}A_s^2 - \left(\int_0^t H_s^-\mathrm{d}A_s^1 - \int_0^t H_s^-\mathrm{d}A_s^2\right) \\
&= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\int_0^t H_s^+\mathrm{d}A_s^1}_{\nearrow} + \underbrace{\int_0^t H_s^-\mathrm{d}A_s^2}_{\nearrow}}_{\nearrow} - \underbrace{\left(\underbrace{\int_0^t H_s^+\mathrm{d}A_s^2}_{\nearrow} + \underbrace{\int_0^t H_s^-\mathrm{d}A_s^1}_{\nearrow}\right)}_{\nearrow}}_{\nearrow - \nearrow \Rightarrow \text{ VB (par définition)}}
\end{aligned}$$

8. *i.e.* pour presque $\forall\omega \in \Omega, t \mapsto A(\omega)$ est une fonction à variation bornée
9. ici, il s'agit de la convergence presque sûre
10. ici, il s'agit de la convergence en probabilité (plus faible)
11. partie positive et partie négative de la courbe de H_s

Propriété 6. —
Si H_t est un processus "quelconque", et M_t une martingale. Alors le processus $t \mapsto \int_0^t H_s \mathrm{d}M_s$ est encore une martingale.

Définition :
On dit que le processus (X_t) est une semi martingales'il existe une martingale $'(M_t)$ et un processus (A_t) à VB tel que :

$$X_t = M_t + A_t$$

Remarque : si on impose $M_0 = 0$ alors la décomposition est unique. Dans ce cas, si $M_t + A_t = M'_t + A'_t$ avec $M'_0 = M_0 = 0$

$$\Rightarrow \forall t, \begin{cases} M'_t = M_t \\ A'_t = A_t \end{cases}$$

NB : si une martingale est VB, alors elle est constante

2.3 Crochet d'un processus à temps continu/ d'une martingale

Si X_t est un processus "quelconque", en particulier une martingale, alors on peut définir

$$\underbrace{\langle X_t, X_t \rangle}_{\text{Variation quadratique}} = \lim_{\sup(\Delta t_i) \to 0} \sum_0^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

— Si X_t est une martingale, la limite exste et est $< \infty$
— Si X_t et Y_t sont 2 martingales,

$$\langle X_t, Y_t \rangle = \lim_{\sup(\Delta t_i) \to 0} \sum_0^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

Propriété 7. —
— *$t \mapsto \langle X_t, X_t \rangle$ est un processus positif et croissant*
— *$t \mapsto \langle X_t, Y_t \rangle$ est un processus à VB*
En effet,

$$\langle X_t, Y_t \rangle = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\langle X_t + Y_t, Y_t + X_t \rangle}_{\nearrow} - \underbrace{(\langle X_t, X_t \rangle + \langle Y_t, Y_t \rangle)}_{\nearrow} \right)$$

Propriété 8. —
— *Si M_t est une martingale, alors la variation de $M_t = +\infty$*
Sauf si M_t est constante. en effet, si M_t n'est pas a variation bornée, alors sa variation est infinie[12].
En revanche, sa variation quadratique (i.e. le crochet) est finie[13].
— *Si A_t est un processus à VB, alors*

$$\forall t, \langle A_t, A_t \rangle = 0$$

— *si A_t est un processus à VB et X_t une semi-martingale, alors*

$$\forall t, \langle A_t, X_t \rangle = 0$$

13. une martingale oscille beaucoup
13. *cf.* définition du crochet d'une semi martingale

En résumé, si $X_t = M_t + A_t$ et $Y_t = B_t + N_t$ sont 2 semies-martingales.
Alors

$$\begin{aligned}
\langle Y_t, X_t \rangle &= \langle M_t + A_t, N_t + B_t \rangle \\
&= \langle M_t, N_t \rangle + \underbrace{\langle M_t, B_t \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle A_t, N_t \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle A_t, B_t \rangle}_{=0} \\
&= \langle M_t, N_t \rangle
\end{aligned}$$

2.4 Lien entre crochet et intégrale stochastique

Propriété 9. —
Soient H_t et H'_t 2 processus "quelconque", et X_t et Y_t semies-martingales

$$\left\langle \int_0^t H_s \mathrm{d}X_s, \int_0^t H'_s \mathrm{d}Y_s \right\rangle = \int_0^t H_s H'_s \mathrm{d}\langle X_s Y_s \rangle$$

En particulier, $\left\langle \int_0^t H_s \mathrm{d}X_s, \int_0^t H_s \mathrm{d}X_s \right\rangle = \int_0^t (H_s)^2 \mathrm{d}\langle X_s Y_s \rangle$

3 Formule d'Itô

3.1 Rappel calcul différentiel

En calcul différentiel ordinaire, on a pour une fonction f dérivable $y = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$
Si $y = f(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3$

FORMULE DE TAYLOR :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)(\Delta x)^2 + o(()\,\Delta x)^2$$ [14]

$$\Delta y = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)(\Delta x)^2 + o(()\,\Delta x)^2$$

3.2 Formule d'Itô en dimension 1

On suppose que f est une fcontion de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ et (W_t) une semie-martingale.
On pose $Y_t = f(X_t)$

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{d}Y_t = f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\mathrm{d}\langle X_t, X_t \rangle}_{\text{FORMULE D'ITO}}}$$

Remarque :
Si $X_t = A_t + M_t$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\mathrm{d}\langle X_t, X_t \rangle \\
&= f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\mathrm{d}\langle M_t, M_t \rangle
\end{aligned}$$

Si X_t est à VB, alors $M_t = 0$, et il reste la forme ordinaire $\mathrm{d}Y_t = f'(X_t)\mathrm{d}X_t$

14. $o(()\,\Delta x)^2$ signifie que ça tend vers 0 plus vite que $(\Delta x)^2$

3.3 Formule d'Itô en dimension 2

Soit $Z_t = f(X_t, Y_t)$,

$$\mathrm{d}Z_t = \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, Y_t)\mathrm{d}X_t + \frac{\partial f}{\partial y}(X_t, Y_t)\mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, Y_t)\langle X_t, X_t\rangle + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t)\langle X_t, Y_t\rangle + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t, Y_t)\langle Y_t, Y_t\rangle\right]$$

3.4 Formule d'Itô en dimension n

Soit $Z_t = f(X_t^1 \dots Y_t^n)$,

$$\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t^1 \dots Y_t^n)\mathrm{d}_t = \frac{1}{2}\sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t^1 \dots Y_t^n)\mathrm{d}\langle X_t^i, X_t^j\rangle$$

3.5 Propriétés du mouvement brownien

Propriété 10. —
Si $(W_t)_t$ est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien, alors $(W_t)_t$ est une $\mathcal{F}_t$ martingale.

Démo : *par définition, $(W_t)_t$ est une $\mathcal{F}_t$-mesurable*
Soit $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_t/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s/\mathcal{F}_s) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}W_t - W_s/\mathcal{F}_s)}_{W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s)} + \mathbb{E}(W_s/\mathcal{F}_s) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}(W_t - W_s)}_{W_t - W_s \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{(t-s)}\right)} + W_s \\
&= 0 + W_s
\end{aligned}$$

Propriété 11. —
De plus,

$$\langle W_t, W_t\rangle = t$$

Démo :

$$\langle W_t, W_t\rangle = \lim_{\sup \Delta t_i \to 0} \sum_0^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_0^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] &= \sum_0^{n-1} \left(\mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right]\right) \\
&= \sum_0^{n-1} \underbrace{\mathbb{V}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}_{= t_{i+1} - t_i} \\
&= t_n - t_0 \\
&= t
\end{aligned}$$

3.6 APPLICATION :

On sait que si P_t est le prix d'une action, alors dans le modèle de BLACK-SCHOLES on a :

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \beta \mathrm{D}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$ [15]

Remarque : $\dfrac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \beta \mathrm{D}t + \sigma \mathrm{d}W_t \Leftrightarrow P_t - P_0 = \int_0^t \mathrm{d}P_u = \int_0^t \beta P_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma P_u \mathrm{d}W_u$

On pose $X_t = \ln(P_t)$

On a donc : $\begin{cases} f(x) = \ln(x) \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} \end{cases}$

Ainsi, d'apres la formule d'ITO, on a

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}\ln(P_t) = \frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} + \frac{1}{2}\frac{-1}{(P_t)^2}\mathrm{d}\langle P_t, P_t\rangle$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\langle P_t, P_t\rangle &= \left\langle P_t\beta\mathrm{d}t + P_t\sigma\mathrm{d}W_t, P_t\beta\mathrm{d}t + P_t\sigma\mathrm{d}W_t \right\rangle \\
&= \left\langle \underbrace{\int_0^t P_u\beta\mathrm{d}u}_{VB} + \underbrace{\int_0^t P_u\sigma\mathrm{d}W_u}_{martingale}, \underbrace{\int_0^t P_u\beta\mathrm{d}u}_{VB} + \underbrace{\int_0^t P_u\sigma\mathrm{d}W_u}_{martingale} \right\rangle \\
&= \left\langle \int_0^t P_u\sigma\mathrm{d}W_u, \int_0^t P_u\sigma\mathrm{d}W_u \right\rangle \\
&= \left\langle P_t\sigma\mathrm{d}W_t, P_t\sigma\mathrm{d}W_t \right\rangle \\
&= \int_0^t (P_u)^2\sigma^2\mathrm{d}\langle W_u, W_u\rangle \\
&= P_t^2\sigma^2\langle \mathrm{d}W_t, \mathrm{d}W_t\rangle
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ln(P_t) &= \frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} - \frac{1}{2}\frac{1}{(P_t)^2}P_t^2\sigma^2\underbrace{\langle \mathrm{d}W_t, \mathrm{d}W_t\rangle}_{=\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} - \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{d}t \\
&= \beta\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t - \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{d}t \\
&= (\beta - \frac{\sigma^2}{2})\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t \\
\ln(P_t) - \ln(P_0) &= \int_0^t (\beta - \frac{\sigma^2}{2})\mathrm{d}t + \int_0^t \sigma\mathrm{d}W_t \\
&= t(\beta - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma(W_t - \underbrace{W_0}_{=0}) \\
&= t(\beta - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma W_t \\
\ln(\frac{P_t}{P_0}) &= t(\beta - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma W_t \\
&\Rightarrow \quad P_t = P_0 \exp^{(t(\beta - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma W_t)}
\end{aligned}$$

15. β la tendance (trend) et σ la volatilité, β et σ sont des constantes

On peut faire le mécanisme inverse pour retrouver la formule de BLACK-SCHOLES :

Si on pose $f(x) = P_0 \exp^x$, $X_t = t(\beta - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma W_t$ et $P_t = f(X_t)$
On a donc

$$\mathrm{d}P_t = \mathrm{d}f\left(X_t\right) = P_0 \exp^{t\left(\beta - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t} \mathrm{d}\left(t\left(\beta - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t\right) + \frac{1}{2} P_0 \exp^{t\left(\beta - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t} \mathrm{d}\langle X_t, X_t\rangle$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\langle X_t, X_t\rangle &= \mathrm{d}\left\langle \underbrace{(\beta - \frac{\sigma^2}{2})t}_{\nearrow \text{ donc VB}} + \underbrace{\sigma W_t}_{martingale}, \underbrace{(\beta - \frac{\sigma^2}{2})t}_{\nearrow \text{ donc VB}} + \underbrace{\sigma W_t}_{martingale} \right\rangle \\
&= \mathrm{d}\langle \sigma W_t, \sigma W_t\rangle \\
&= \sigma^2 \mathrm{d}\langle W_t, W_t\rangle \\
&= \sigma^2 \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme par hypohèse $P_t = P_0 \exp^{t\left(\beta - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t}$, il reste :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}P_t &= P_t \left[\left(\beta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right] + \frac{1}{2} P_t \sigma^2 \mathrm{d}t \\
\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} &= \left[\left(\beta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right] + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{d}t \\
&= \boxed{\beta \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t}
\end{aligned}$$

4 Méthode de Monte Carlo

4.1 Introduction

Le principe fondamental de la méthode repose sur la loi des grands nombres à l'envers [16].
Si $X_1 \ldots X_n$ est une suite de va iid tq $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_i)$$

On suppose que l'on peut simuler des va $X_{1 \ldots n}$ iid tq $\mathbb{E}(X1) = x$où x est une valeur que l'on cherche à determiner.
Par exemple on cherche $x = \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ avec h une fonction ordinaire par exemple $h(t) = \mathrm{e}^{t^2}$
NB : on pourrait utiliser la méthode des rectangles ou des trapèzes.

On peut aussi utiliser la méthode de Monte Carlo :
On simule n va U_{1n} de loi uniforme sur $[0, 1]$
On sait que $f_{U_1}(u) = \mathbb{1}_{[0,1]}$
Pn pose $X_i = h(U_i)$. On a $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(h(U_i) = \int_{\mathbb{R}} h(u)f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$
On en deduit que $\overline{X_n} \approx x = \mathbb{E}(X_i) = \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$
On cherche $\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$. Pour cela, on simule le u_i. On calcule le X_i puis on calcule le $\overline{X_n}$. Et le résultat est une approximation du nombre recherché.

16. On connait l'esperance grâce à la moyenne empirique

On peut préciser l'erreur commise : en effet d'après le TCL $\left(\frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1}{\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \right)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[-1.96 \leq \frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1}{\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}} \leq 1.96 \right] &= 0.95 \\
\mathbb{P}\left[\mathbb{E}(X_1) \in \left[\overline{X_n} - \frac{1.96\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{1.96\sigma(X_1)}{\sqrt{n}} \right] \right] &= 0.95 \\
\mathrm{IC}_{95\%}(x) &= \left[\overline{X_n} - \frac{1.96\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{1.96\sigma(X_1)}{\sqrt{n}} \right]
\end{aligned}
$$

On approxime $\sigma(X_1)$ par la moyenne empirique $s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \overline{x_n})^2}$ avec $x_1 \dots x_n$ les réalisations de $X_1 \dots X_n$

$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \overline{X_n})^2}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IC}_{95\%}(x) &\approx \left[\overline{X_n} - \frac{1.96 S_x}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{1.96 S_x}{\sqrt{n}} \right] \\
&\approx \left[\overline{s_n} - \frac{1.96 s_x}{\sqrt{n}}, \overline{s_n} + \frac{1.96 s_x}{\sqrt{n}} \right]
\end{aligned}
$$

4.2 Méthode de réduction de la variance

4.2.1 Variable de contrôle

On cherche $x = \mathbb{E}(X_i)$ avec $X_1 \dots X_n$ iid
On suppose qu'il existe Y_i (que l'on peut simuler) et telle que X_i et Y_i soient (fortement) corrélés avec $\mathbb{E}(Y_i)$ connu.
Alors on pose $Z_i = X_i - \lambda(Y_i - \mathbb{E}(Y_i)$ avec λ fixé.
On vérifie que $\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(X_i) = x$

En effet

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_i) &= \mathbb{E}(X_i - \lambda(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))) \\
&= \mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(\lambda(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))) \\
&= \mathbb{E}(X_i) - \lambda \underbrace{\mathbb{E}((Y_i - \mathbb{E}(Y_i))}_{=0} \\
&= \mathbb{E}(X_i)
\end{aligned}
$$

On determine λ :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_i) &= \mathbb{V}\left[X_i - \lambda(Y_i - \mathbb{E}(Y_i)\right] \\
&= \mathbb{V}(X_i) - 2\lambda \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, Y_i - \mathbb{E}(Y_i))}_{\mathrm{Cov}(X_i,Y_i)} + \lambda^2 \underbrace{\mathbb{V}(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))}_{\mathbb{V}(Y_i} \qquad \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\
&= \sigma_X^2 - 2\lambda\sigma_X\sigma_Y\rho + \lambda^2\sigma_Y^2
\end{aligned}
$$

On cherche la valeur de λ qui minimise $\mathbb{V}(Z_i)$:

C'est un polynome du second degré en λ et le coefficient de λ^2 est positif donc le minimum est atteint en

$$\begin{aligned} \lambda_{opt} &= \frac{\sigma_X \sigma \rho}{2\sigma_Y^2} \\ &= displaystyle \frac{\mathrm{Cov}(X_i, Y_i)}{\mathbb{V}(Y_i)} \\ &\approx \frac{\frac{1}{n}\sum_1^n X_i Y_i - \overline{X_n Y_n}}{\left(\frac{1}{n}\sum_1^n Y_i^2\right) - \overline{Y_n}^2} \\ &\approx \widehat{\lambda_{opt}} \end{aligned}$$

Avec λ_{opt}, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z_i) &= \sigma_x^2 - \frac{2\sigma_x\sigma_y\rho}{\sigma_y^2}\sigma_s\sigma_y\rho + \left(\frac{2\sigma_x\sigma_y\rho}{\sigma_y^2}\right)^2 \sigma_y^2 \\ &= \sigma_x^2 - 2\sigma_x^2\rho^2 + \sigma_x^2\rho^2 \\ &= \sigma_x^2(1-\rho^2) \end{aligned}$$

Mise en oeuvre :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_i) &= \mathbb{E}\left[X_i - \widehat{\lambda}(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))\right] \\ &= \mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}\left[\widehat{\lambda}(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))\right] \end{aligned}$$

Attention, $\widehat{\lambda}$ n'est pas une constante et en particulier n'est pas indépendante de Y_i.
On doit faire tourner le programme 2 fois, une première fois pour calculer le λ

Pour comparer la méthode de base (X_i) avec la méthode de la variable de contrôle, on doit raisonner en temps de calcul.
On note n le nombre de variables simulés.
En général, le temps de calcul $t = cn + B \approx cn$ et la precision est égale à $\dfrac{c'}{\sqrt{n}} = \dfrac{c''}{\sqrt{t}}$.
La meilleure méthode est cellepour laquelle c'' est le plus petit.
Dans les programmes, on calcule"c", un coefficient d'éfficacité. $c = \sqrt{t}L$ où L est la largeur de l'intervalle de confiance (ou demi-largeur).
$e_x = \sqrt{t}s_x$ et $e_z = \sqrt{t}s_z$.

4.2.2 Les variables antithétiques

Un exemple introductif :

On avait $x = \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u = \mathbb{E}(h(U))$ avec $U \sim \mathcal{U}([0,1])$
Si on pose $V = 1 - U$ $(V \sim \mathcal{U}([0,1]))$. On a $\mathbb{E}(V) = x$.
On pose $X_i = h(U_i)$ et $Y_i = h(V_i)$, avec $U_i \dots U_n$ iid.
On pose $Z_i = \dfrac{X_i + Y_i}{2} \Rightarrow \mathbb{E}(Z_i) = \dfrac{\mathrm{e}(X_i) + \mathbb{E}(Y_i)}{2} = x$
$\mathbb{V}(Z_i) = \dfrac{1}{4}\left[\mathbb{V}(X_i) + c\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) + \mathbb{V}(Y_i)\right] = \dfrac{1}{4}\left[\sigma_X^2 + 2\sigma_X\sigma_Y\rho + \sigma_Y^2\right]$ or $\sigma_X = \sigma_Y$
donc

$$\mathbb{V}(Z_i) = \frac{1}{2}\sigma_X^2(1+\rho) \Rightarrow \sigma_Z = \sigma_X\sqrt{\frac{1+\rho}{2}}$$

Pour apprecier le gain, il faudrait comparer la méthode de la variable Z avec une taille n et la méthode de la variable X avec une taille $2n$.
'

$\sigma(\overline{X_{2n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2n}}\ \sigma(Z_n) = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1+\rho}{2}}$

On gagne si $\sqrt{1+\rho} < 1 \Leftrightarrow \rho < 0$

REMARQUE : si $X = H(N)$ où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ et si on cherche $x = \mathbb{E}(h(N))$ alors on peut faire la méthodeprécédente avec $Y = h(-N)$ car $-N \sim \mathcal{N}(0,1)$

4.3 Application aux processus stochastiques

On suppose que S_t vérifie une équation différentielle stochastique du type $\mathrm{d}S_t = b(t,S_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,S_t)\mathrm{d}W_t$
NB : dans le cas particulier de l'équation de Black-Scholes, en proba risque neutre on a $\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$

DISCRETISATION : (Méthode d'Euler)

$$\begin{aligned} \underbrace{S_{t+\mathrm{d}t} - S_t}_{\mathrm{d}S_t} &= b(t,S_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,S_t)\mathrm{d}W_t \\ S_{t+\mathrm{d}t} &= S_t + b(t,S_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,S_t)\mathrm{d}W_t \end{aligned}$$

On remplace dt par $\Delta t = \frac{T}{n}$ avec T qui correspond à l'horizon et on determine les valeurs $\check{S}_{t_k}$ avec $k \in [0,n]$, $t_k = k \times \Delta t$ et $t_n = T$, et où $\check{S_{t_k}}$ vérifie

$$\check{S}_{t_{k+1}} = \check{S}_{t_k} + b(t,\check{S}_{t_k})\Delta t + \sigma(t,\check{S}_{t_k})\Delta W_t$$

REMARQUE : méthode d'Euler

$X_t = X_0\mathrm{e}^{rt}$ $\qquad \frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = r\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t = rX_t\mathrm{d}t \Leftrightarrow \check{X}_{t_{k+1}} &= \check{X}_{t_k} + \check{X}_{t_k}\Delta t \\ \check{X}_{t_{k+1}} &= \check{X}_{t_k}(1 + t\Delta t) \\ \check{X}_{t_k} &= X_0(1+r\Delta t)^k \\ \check{X}_{t_k} &= X_0\mathrm{e}^{r\Delta tk} = X_0\mathrm{e}^{rt_k} = X_0\mathrm{e}^{r\Delta tk} \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^{r\Delta} = 0 + r\Delta t + \frac{r^2}{2}\Delta t^2 > 1 + r\Delta t$
Evidemment, quand $\Delta t \to 0$, on a $\check{X}_{t_k} \to X_{t_k}$
En particulier, on a $\check{X}_{t_k} = X_0(1+r\Delta t)^n = X_0\left(1 + \frac{rT}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_0\mathrm{e}^{rT}$
D'une façon générale, on admet que $(\check{S}_t)_{t\in[0;T]} \to (S_t)_{t\in[0;T]}$ où les valeurs de $\check{S}_t$ sont déterminés par interpolation linéaire entre t_k et t_{k+1}.

La convergence est en $\frac{1}{n}$

En pratique, on remplace (S_t) par le processus discrétisé noté S_t qui vérifie $S_{t_{k+1}} = S_{t_k} + b(t,S_{tt_n})\Delta t + \sigma(t,S_{t_n})\Delta W_t$

Comme on travaille avec N trajectoires, on va initialiser un vecteur $\overrightarrow{S} = S_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = S_0$ *ones(N,1)* puis on fait une boucle en temps $i = 1$ à n : $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S} + b(t,\overrightarrow{S})\Delta t + \sigma(t,\overrightarrow{S})\underbrace{\Delta W_t}_{\sqrt{\Delta t}\cdot \textit{randn(N,1)}}$. A la fin de la boucle on a $S = S_T$

On peut alors utiliser S_T (en réalité $\check{S_T}$) pour calculer par exemple $(S_T - K)^+$:

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}_\Pi\left(e^{-rT}(S_T - K)^+\right) \\ &= \frac{1}{N}e^{-rT}\sum_1^N \max(S_T - K; 0) \\ &= e^{-rT}\text{mean}\max(S_T - K; 0) \end{aligned}$$

SORTIE DE BOUCLE :

$P = (S_T - K)^+$
$C = \text{mean}(P)$
$L = \text{std}(P)$

$C = Ce^{-rT}$
$L = Le^{-rT}$
$B_1 = C - 1.96L$

$B_2 = C + 1.96L$

• Qu'est ce qu'on entend pas la variable antithétique et variable de contrôle dans ce contexte ?

Algorithm 1 Variable Antithétique

$S \leftarrow S_0\, ones(N, 1)$
$SA \leftarrow S$
for i = 1 : N **do**
  $dW \leftarrow randn(N, 1)\sqrt{\Delta t}$
  $S \leftarrow S + b(t, S)\Delta t + \sigma(t, S)dW$
  $SA \leftarrow SA + b(t, SA)\Delta t - \sigma(t, SA)dW$
end for
$P \leftarrow \max(S - K; 0)$
$PA \leftarrow \max(SA - K; 0)$
$P_{final} = \frac{P+PA}{2}$
$C \leftarrow mean(P_{final})$

Algorithm 2 Variable de contrôle

$S \leftarrow S_0\, ones(N, 1)$
for i = 1 : N **do**
  $dW \leftarrow randn(N, 1)\sqrt{\Delta t}$
  $S \leftarrow S + b(t, S)\Delta t + \sigma(t, S)dW$
  $VC \leftarrow VC + \dots$
end for
à élucider...

Chapitre 3

ASSURANCE

1 Principes fondamentaux

1.1 La prime pure

La prime pure est le prix théorique d'une assurance qui permet de satisfaire l'égalité entre les engagements réciproques des deux signataires.

$$\text{ENGAGEMENT ASSUREUR} = \text{ENGAGEMENT ASSURÉ}$$

Dans l'assurance vie, seuls interviennent les engagements viagers (les tables de mortalité) et financiers (taux technique).

REMARQUE : En général, la prime commerciale = prime pure + chargement technique + chargement commerciaux
Les chargements commerciaux comprennent notamment le financement de l'entreprise, les bénéfices, la recherche de contrats... Le chargement technique permet d'équilibrer les fluctuations par rapport au coût théorique.
Dans les assurances vie, il n'y a pas de chargement technique. A la place, il y a des règles prudentielles (taux technique, usage de tables de mortalité plus favorable à l'assureur)

REMARQUE 2 : La prime pure ou commerciale peut être payé en une fois, la prime pure unique (PPU), on la note alors Π. Ou bien, elle peut être payé périodiquement (PPP ou $P^{(k)}$, avec $k \in \{1, 2, 4, , 12\}$ -annuelle, semestriel, trimestriel, mensuel).

1.2 Le taux technique

Principe de l'actualisation : 1€dans 1 an n'a pas la même valeur que 1€maintenant.

La formule fondamentale :

$$\underbrace{ENGAGEMENT ASSUREUR}_{\text{valeur actuelle probable des flux futurs}} = \underbrace{ENGAGEMENT ASSURÉ}_{\text{valeur actuelle probable des flux futurs}}$$

La valeur actuelle du flux F_t est $\dfrac{F_t}{(1+i)^t}$ avec i = taux d'actualisation = taux d'interêt.

La valeur probable est $\mathbb{E}(F_t)$ et la valeur actuelle probable est $\mathbb{E}\left(\dfrac{F_t}{(1+i)^t}\right)$. Si il y a plusieurs flux : $\mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{t_k}}{(i+1)^{t_k}}\right)$

Le taux "i" utilisé par l'assureur s'appelle le taux technique.

NB :
- plus le taux i est élevé, plus la prime pure peut être faible
  $\Rightarrow$ dans ce cas, on est plus concurrentiel donc cela incite à utilisé un taux technique élevé pour gagner des parts de marché
  Attention, il existe un risque de surestimer le rendement des placements et donc de faire faillite. Pour cela, il existe une réglementation pour majorer le taux technique
- plus le taux technique (utilisé pour les calculs, est inférieur au taux de placements réelle, plus on a fait de marges (bénéfices).

Le **taux technique** est le taux de rendement financier minimal sur lequel s'engage l'assureur pour un contrat et qui est anticipé par le calcul des cotisations et des provisions pr l'actualisation des flux futurs.
CODE DES ASSURANCES (*A 132-1*) :
- si l'engagement est inferieur à 8 ans, le taux technique $\leq 75\%$ du TME semestriel
- si l'engagement est supérieur à 8 ans, ou bien s'il s'agit d'un contrats à primes périodiques, ou encore un contrat à capital variable (UC), taux technique $< \min(60\%\text{TME semestriel}, 3.5\%)$

Définition :

TME (Taux mensuel des emprunts d'Etat) : moyenne des THE du mois

THE (Taux moyen Hebdomadaires des emprunts d'Etat) : moyenne des rendemenents hebdomadaires sur le marché secondaire des emprunts d'Etat à plus de 7ans. En pratique TEC 10 ans + 0.05%

TEC 10 (Taux à échéance croissante à 10 ans) : taux de rendement actuarielle d'une valeur du trésor fictive dont la durée serait à chaque instant égale à10 ans. Il est obtenu pas interpolation linéaire entre les taux de rendements de duex valeurs du trésor qui encadrent au mieux l'échéance 10 ans.

Rappel :
Le taux de rendement actuarielle est le taux "i" pour lequel $\sum_{k=0}^{N} \frac{F_{t_k}}{(1+i)^{t_k}} = 0$ avec F_{t_k} est le taux algébrique.

Le Taux technique est ka valeur la plus proche de $\max(60\%$ du TME; $3.5\%)$ ou 0.75% du TME, sur une échelle de pas de 0.25%.
Ce taux est modifié si il y a une hausse tu taux de référence supérieur à 0.35%, ou une baisse de 0.1% par rapport au dernier taux technique en vigueur

exemple : le taux technique max est de 4%, si le taux de référence descends à 3.87%, alors le taux technique passe à 3.75%

1.3 Valeur actuelle aléatoire, valeur actuelle probable

Si on considère des flux futurs $(F_{t_k})_{k=0,1,\dots,n}$ aléatoires, alors

$$VAA = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}(\frac{(F_{t_k})}{(1+i)^{t_k}}$$

$$VAP = \mathbb{E}(VAA)$$

En général, les flux sont de types "tout ou rien" : $F_{t_k} = C_{t_k}\mathbb{1}_{A_k}$ avec A_k un évènement aléatoire donc

$$VAP = \sum_{=}^{n}\sum_{0}^{n} = \frac{C_{t_k}\mathbb{E}(\mathbb{1})}{(1+i)^{t_k}} = \frac{C_{t_k}\P = matbbP(\mathbb{1})}{(1+i)^{t_k}}$$

2 Fonction probabiliste de l'assurance vie

2.1 Durée de vie résiduelle

On considère un individu d'âge x. On le note (x) [1]
On note T_x la durée de vie résiduelle de (x).

1. l'âge est le "nom" de l'individu, on le désigne par (x)

NB : Espérance de vie à la naissance $= T_0 = x + T_x$
(x) est en vie à l'âge x si $T_x > 0$

On pose $F_x(t)$, la fonction de répartition de T_x

$$\begin{aligned}
F_x(t) &= \mathbb{P}(T_x \leq t/T_x > 0) \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_x \leq t \text{ et } T_x \geq 0}{\mathbb{P}(T_x \geq 0} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_0 x \leq t \text{ et } T_0 - x > 0)}{\mathbb{P}(P_0 - x > 0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_0 > x \text{ et } T_0 \leq t - x)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \\
&= \frac{F_0(t+x) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \\
f_x(t) &= \frac{f_0(t+x)}{1 - F_0(x)}
\end{aligned}$$

On pose ${}_tp_x = \mathbb{P}(T_x > t/T_x > 0)$. A noter que ${}_1p_x = p_x$.
On définit aussi ${}_{h|t}q_x = \mathbb{P}(h < T_x \leq h + t/T_x > 0)$. De la même manière ${}_{0|t}q_x =_t q_x$

$$\boxed{{}_tp_x +_t q_x = 1}$$

NB : ${}_1q_x = q_x$ est la probabilité de décéder dans l'année sachant qu'on est vivant au début de l'année.

Montrons que ${}_tp_y = \frac{{}_{t+y-x}p_x}{{}_{y-x}p_x}$. On suppose $y > x$

$$\begin{aligned}
{}_tp_y &= (T_y > t(T_y \geq t/T_y > 0) = \frac{\mathbb{P}(T_y > t \text{ et } T_y > 0)}{\mathbb{P}(T_y > 0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_y > t)}{\mathbb{P}(T_y > 0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_x + x - y > t)}{\mathbb{P}(T_x + x - y > 0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_x > t + y - x)}{\mathbb{P}(T_x > y - x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_x > t + y - x/T_x > 0)\mathbb{P}(T_x > 0)}{\mathbb{P}(T_x > y - x/T_x > 0)\mathbb{P}(T_x > 0)} \\
&= \frac{{}_{t+y-x}p_x}{{}_{y-x}p_x} \qquad \underline{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_0 &= x + T_x \\
T_0 &= y + T_y \\
T_y &= T_x + x - y
\end{aligned}$$

On définit une variable X_t par $X_t = \begin{cases} 1 \text{ si x est en vie à t} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Alors $X_t \sim \mathcal{B}({}_tp_x)$

On pose $L_{x+t} = \sum_{i=1}^{i=L_x} X_t(i)$. L_x est le nombre d'individus vivants d'âge xOn part d'une cohorte de 100.000 individus à la naissance$=L_0 = f_{x_t}$
On note $l_x = \mathbb{E}(L_x)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_{x+t}) &= \mathbb{E}\left[\sum_1^{L_x} X_t(i)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_i^{L_x} X_t(i)/L_x\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_1^{L_x} X_t(i)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_i^{L_x} \underbrace{\mathbb{E}\left[X_t(i)/L_x\right]}_{({}_tp_x \times l_x) = {}_tp_x\mathbb{E}[L_x]}\right] \\
&= {}_tp_x\mathbb{E}[L_x] \\
l_{x+t} &= {}_tp_x l_x \Rightarrow_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}
\end{aligned}$$

2.2 Tables de mortalités [2]

H	F
TD 73-77 PM 60-64 TD 88-90 TPG [3]93 TH 00-02 TG 05 ⋮ …	TV 73-77 PF 60-64 TV88-90 TF 00-02 TG 05 ⋮ …

Les assureurs utilisent les tables qui sont les plus intéréssantes pour eux.

Exemple :

- TD 88-90 $\Rightarrow q_{50} = 1 - \frac{l_{51}}{l_{50}} = \frac{l_{50} - l51}{l_{51}} = \frac{d50}{l_{51}} = \frac{607}{90778} = 0.6\%$
  Autrement dit, il y a 0.6% de chance de mourrir dans l'année qui suit nos 50 ans.
- TH 00-02 $\Rightarrow q_{50} = \frac{540}{92736} = 0.5\%$

2.3 Taux instantané de mortalité

On pose

$$\begin{aligned} \mu_x &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(0 < T_x < h / T_x > 0) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{F_x(h) - F_x(0)}{h} = F_x(0) \end{aligned}$$

Or $F_x(t) = \frac{F_0(x+t) - F_0(X)}{1 - F_0(x)} \Rightarrow F'_x(t) = \frac{F'_0(x+t) - 0}{1 - F_0(x)} = \frac{f_0(x)}{1 - F_0(x)}$ Ainsi

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{1 - F_0(x)} = F'_0(x)$$

De même, on pose ${}_t\mu_x = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(t < t_x t + h / t_x > 0)$

NB : ${}_t\mu_x = \mu_{x+t}$

3 Annuités certaines et viagères

3.1 Les bases : capital différé et annuité

3.1.1 Le capital différé

Cas particulier : en cas de vie on reçoit un rendement.
Capital de 1 unité payable à t si l'individu à l'âge (x) à l'instant 0 est en vie à l'instant t.
on note X_t l'indicateur de survie de (x).
La VAA du capital differé est ${}_tW_x = \frac{X_t}{(1+i)^t} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\delta} X_t & \text{en temps continu} \\ \nu^n X_n & \text{en temps discret} \end{cases}$
ν est le facteur d'actualisation ou facteur d'escompte financier. $\nu = \frac{1}{(1+i)} = \mathrm{e}^{-\delta}$

2. Carpentier, *Construction des tables*
3. Table prospective de génération

On en déduit que $VAP = \mathrm{e}({}_tW_x) = \mathbb{E}(\nu^n X_n) = \nu^n_n p_x =_n E_x$
Ainsi, ${}_nE_n$ est la VAP du capital différé.
${}_tW_x = \dfrac{X_t}{(1+i)^t} = \begin{cases} \mathrm{e}_{-\delta}X_t & \text{en temps continu} \\ \nu^n X_n & \text{en temps discret} \end{cases}$

Exemple :
Un individu (femme) de 45 ans souhaite recevoir un capital de 50.000€à 65 ans.
Quelle est la VAP de ce contrat ? On utilise $i = 2\%$ et la table TF 00-02.
$\nu^n = \left(\dfrac{1}{1.02}\right)^2 0 = 0.673$
${}_tp_x =_{20} p_{45} = \dfrac{L_{65}}{L_{45}} = \dfrac{90747}{97563} = 0.931$
$VAP = \nu^n_t p_x 50000 =_{20} E_{45} 50000 = 31315$

Tout ceci est égal à **l'engagement de l'assureur**.

NB : On peut calculer $\mathbb{V}({}_nW_x)$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}({}_nW_x) &= \mathbb{V}(\nu^n X_n) \\ &= \nu^{2n}_n p_x(1 -_n p_x) \\ \sigma({}_nW_x) &= \nu^n \sqrt{{}_np_x(1 -_n p_x)} \\ &= 0.673\,(0.931(1-0.931))^{0.5} \\ &= 0.17 \end{aligned}$$

Propriété 12. —

$$\begin{aligned} {}_{m+n}E_x &= =_m E_x \cdot_n E_{x+m} \\ &= \nu_{m+n m+n}p_x \\ &= \nu^m \nu^n \frac{L_{x+m} \cdot L_{x+m+n}}{L_x \cdot L_{x+m}} \end{aligned}$$

3.1.2 Commutations vie

Propriété 13. —

$$\begin{aligned} D_x &= \nu^x L_x \\ N_x &= \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} \\ S_x &= \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k} \end{aligned}$$

Ainsi

$${}_nE_x = \nu^n_n p_x = \nu^n \frac{L_{x+n}}{L_x} = \frac{\nu^{n+x} L_{x+n}}{\nu^x L_x}$$

$$\boxed{{}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

3.1.3 Notation de Halo

Une **annuité** est une échéance periodique.
Elle peut être :
- certaine / viagère,
- vie entière / temporaire
- différé / immédiate
- terme échu / terme à échoir
- payable annuellement / payable par sous période (semestre, trimestre...)
- constante / progressive (arithmétique, géométrique)

Voici un exemple de notation d'annuité :

$$_{a|n}\ddot{a}_x^{(k)}$$

Cette annuité est différé de d, temporaire de n. Elle est fractionné en k sous périodes. x est l'âge de (x) à la signature du contrat. Les deux point au dessus du a signifie que le terme est à échoir.
On note également $_n\ddot{a}_x = \ddot{a}_{a:\overline{n}|}$

3.1.4 Annuité certaine

On note $a_{\overline{n}|}$; la valeur actuelle du versement en fin d'année de 1€par an pendant n années.

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n} \nu^k \\ &= \nu \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k \\ &= \nu \frac{1-\nu^n}{1-\nu} \\ &= \frac{1-\nu^n}{i} \end{aligned}$$

De la même manière, on note $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, le versement au début de chaque année d'1€.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k = \frac{1-\nu^n}{1-\nu}$$

Application : On emprunt un capital C au taux R, et on rembourse en n années avec un montant annuel m constant. Calculer m
Payé en fin d'année

$$\begin{aligned} m &= \frac{C(1+R)^n}{\sum_{k=0}^{n-1}(1+R)^k} \\ &= C\frac{(1+R)^n \cdot R}{(1+R)^n - 1} \\ &= \frac{C \cdot R}{1-(1+R)^n} \\ &= \frac{C \cdot R}{1-\nu^n} \\ &= C \cdot \frac{1-\nu}{\nu(1-\nu^n)} \end{aligned}$$

ANNEE	Capital restant de ce que l'on doit
1	$C \cdot (1+R) - m$
2	$(C(1+R)-m)(1+R) - m = C(1+R)^2 - m(1+R) - m$
3	$\left[C(1+R)^2 - m(1+R) - m\right] \cdot (1+R) - m$
$\vdots$	$\dots$
n	$C(1+R)^n - m\sum_{k=0}^{n-1}(1+R)^k$

Autre méthode :

$$\begin{aligned} \text{ENGAGEMENT CLIENT} &= \text{ENGAGEMENT BANQUE} \\ m \cdot a_{\overline{n}|} &= C \end{aligned}$$

$C = m \cdot a_{\overline{n}|} \Rightarrow m = \dfrac{C}{a_{\overline{n}|}} = C \cdot \dfrac{1-\nu}{\nu(1-\nu^n)}$

3.2 Annuités viagères constantes terme à échoir

3.2.1 Vie entière

On a la VAA $\ddot{W}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k X_k$

On note également la VAP

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \mathbb{E}(\ddot{W}_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\nu^k_k p_x}_{_kE_x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} \\ \ddot{a}_x &= \boxed{\frac{N_x}{D_x}} \end{aligned}$$

3.2.2 Vie entière differé de m

On a la VAA $_{m|}\ddot{W}_x = \sum_{k=m}^{\infty} \nu^k X_k$

On note également la VAP

$$\begin{aligned} {}_{m|}\ddot{a}_x &= \mathbb{E}({}_{m|}\ddot{W}_x) = \sum_{k=m}^{\infty} \underbrace{\nu^k_k p_x}_{_kE_x} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{k=m}^{\infty} D_{x+k} \\ {}_{m|}\ddot{a}_x &= \boxed{\frac{N_{x+m}}{D_x}} \end{aligned}$$

3.2.3 Temporaire de n

On a la VAA ${}_n\ddot{W}_x = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k X_k$
On note également la VAP

$$
\begin{aligned}
{}_n\ddot{a}_x &= \mathbb{E}({}_n\ddot{W}_x) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\nu^k_k p_x}_{{}_kE_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k} \\
{}_n\ddot{a}_x &= \boxed{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}
\end{aligned}
$$

3.2.4 Temporaire de n, différé de m

On a la VAA ${}_{m|n}\ddot{W}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \nu^k X_k$
On note également la VAP

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}\ddot{a}_x &= \mathbb{E}({}_{m|n}\ddot{W}_x) = \sum_{k=m}^{m+n-1} \underbrace{\nu^k_k p_x}_{{}_kE_x} = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=m}^{m+n-1} D_{x+k} \\
{}_{m|n}\ddot{a}_x &= \boxed{\frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}}
\end{aligned}
$$

3.3 Annuités viagères à termes échus

3.3.1 Vie entière

On a la VAA $W_x = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k X_k$
On note également la VAP

$$
\begin{aligned}
a_x &= \mathbb{E}(W_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\nu^k_k p_x}_{{}_kE_x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=1}^{\infty} D_{x+k} \\
a_x &= \boxed{\frac{N_{x+1}}{D_x}}
\end{aligned}
$$

3.3.2 Vie entière differé de m

On a la VAA ${}_{m|}W_x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \nu^k X_k$
On note également la VAP

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}a_x &= \mathbb{E}({}_{m|}W_x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \underbrace{\nu^k_k p_x}_{{}_kE_x} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=m+1}^{\infty} D_{x+k} \\
{}_{m|}a_x &= \boxed{\frac{N_{x+m+1}}{D_x}}
\end{aligned}
$$

3.3.3 Temporaire de n

On a la VAA ${}_nW_x = \sum_{k=1}^{n} \nu^k X_k$
On note également la VAP

$$\begin{aligned}
{}_na_x &= \mathbb{E}({}_nW_x) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\nu^k_k p_x}_{{}_kE_x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{k=1}^{n} D_{x+k} \\
{}_na_x &= \boxed{\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}}
\end{aligned}$$

3.3.4 Temporaire de n, différé de m

On a la VAA ${}_{m|n}W_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} \nu^k X_k$
On note également la VAP

$$\begin{aligned}
{}_{m|n}a_x &= \mathbb{E}({}_{m|n}W_x) = \sum_{k=m+1}^{m+n} \underbrace{\nu^k_k p_x}_{{}_kE_x} = \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{k=m+1}^{m+n} D_{x+k} \\
{}_{m|n}a_x &= \boxed{\frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}}
\end{aligned}$$

3.4 Annuités viagères variables

3.4.1 Progression arithmétique

$$(Iw)_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \nu^k X_k$$

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot_k E_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot D_{x+k} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} N_{x+k}}{D_x} = \boxed{\frac{S_{x+1}}{D_x}}$$

$$(I\ddot{w})_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \nu^k X_k$$

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} = \boxed{\frac{S_x}{D_x}}$$

$$\begin{aligned}
{}_n(Ia)_x = \sum_{k=1}^{n} k \cdot_k E_x &= \frac{1}{D_x}\sum_{k=1}^{n} k \cdot D_{x+k} \\
&= \frac{1}{D_x}\left[(N_{x+1} - n_{x+n+1}) + (N_{x+2} - n_{x+n+1}) + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{D_x}\left[S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n+1}\right] \\
{}_n(Ia)_x &= \boxed{\frac{S_{x+1} - s_{x+n+1} - nN_{x+n+1}}{D_x}}
\end{aligned}$$

$${}_n(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)_k E_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)D_{x+k}}{D_x} = \boxed{\frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}}$$

3.4.2 Progression géométrique

$W_x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta\alpha^k\nu^k X_k$

$VAP : \mathbb{E}(W_x) = \beta\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\nu)^k \ {}_kp_x = \beta a_x$

3.5 Annuités fractionnés

3.5.1 Le taux d'escompte

On ,ote i le taux d'intérêt annuel, et m le nombre de sous période[4]. $i^{(m)}$ est le taux d'intérêt équivalent capitalisable m fois au taux proportionnel.
On veut que $\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1+i = \mathrm{e}^{\delta}$ où $\delta = \ln(1+i)$
On peut montrer que $i = i^{(1)} > i^{(2)} > \cdots > \delta$
On définit aussi le taux d'escompte (idée d'intérêt précompté) : on emprunte un capital C au taux i, mais on paie les intérêts au début. Ainsi on livre $C - C * d$ et om rembourse C à la fin de la période.

$$\begin{aligned}(C - C*d)(1+i) &= C\\ C(1-d)(1+i) &= C\\ d &= 1-\frac{1}{1+i}\\ d &= \frac{i}{1+i}\end{aligned}$$

On peut voir cette formule comme une actualisation des intérêts i payé à T. Ainsi $\frac{i}{1+i}$ est la valeur ctuelles du taux d'intérêt.
On peut définir $d^{(m)}$ comme le taux d'escompte équivalent pour un taux proportionnel lorsque les intérêts sont capitalisables.
On veut que $\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m = 1-d$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m &= \frac{1}{1+i}\\ \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m &= 1\end{aligned}$$

Or $i^{(m)} = m(\nu^{\frac{-1}{m}} - 1)$ donc, $i = d^{(m)} = m(1-\nu^{\frac{1}{m}})$
De la même manière on peut montrer que $d = d^{(1)} > d^{(2)} > \cdots > \delta$

$$\begin{aligned}i^{(m)} &\xrightarrow[m\to\infty]{} \delta\\ d^{(m)} &\xrightarrow[m\to\infty]{} \delta\end{aligned}$$

3.5.2 Calcul de $a_x^{(k)}$

On a la VAA $W_x^{(m)} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty}\nu^k X_{\frac{j}{k}}$

On cherche maintenant la VAP $a_x = \mathbb{E}(W_x) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty}\nu^{\frac{1}{k}} \ {}_{\frac{1}{k}}p_x = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty} {}_{\frac{1}{k}}E_x$

Pout terminer le calcul, il y a 3 méthodes possibles :

4. voir intérêts équivalents

— Modèle pour ${}_tp_x$ (Gompertz-Makeham)

— Interpolation linéaire de ${}_{\frac{1}{k}}p_x$ entre ${}_np_x$ et ${}_{n+1}p_x$

— Interpolation linéaire de ${}_{\frac{1}{k}}E_x$ entre ${}_nE_x$ et ${}_{n+1}E_x$

Remarque : la méthode 2 correspond à l'idée qu'il y a une répartition uniforme de décès dans une année.
Le troisième méthode est purement *ad hoc*.

Méthode 3 :

$$
\begin{aligned}
a_x^{(m)} &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty} {}_{\frac{1}{k}}E_x \\
&= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} {}_{n+\frac{1}{k}}E_x \\
&= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} {}_nE_x + \frac{j}{k}\left({}_{n+1}E_x -_n E_x\right) \\
&= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{j=1}^{k} {}_nE_x}_{k_nE_x} + \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}\left({}_{n+1}E_x -_n E_x\right) \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} {}_nE_x}_{\ddot{a}_x} + \left(\frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k} j\right)\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left({}_{n+1}E_x -_n E_x\right)\right)}_{=_x - _0E_x} \\
&= \ddot{a}_x - \frac{k(k+1)}{2k^2} \\
&= \ddot{a}_x - \frac{k+1}{2k} = a_x + 1 - \frac{k+1}{2k}
\end{aligned}
$$

Remarque : pour rappel, ${}_0E_x$ correspond au paiement de 1€*à l'instant 0 si on est vivant.

$$
\begin{aligned}
a_x &=_1 E_x +_2 E_x + \cdots \\
\ddot{a}_x &=_0 E_x +_1 E_x +_2 E_x + \cdots
\end{aligned}
$$

Index