

Mini projet 1: Calcul du prix d'une option asiatique

Valentin DE CRESPIN DE BILLY

Matthias LANG

30.11.2021

N. d'étudiant : 247067 et 313411

Université Catholique de l'Ouest

Mathématiques financières

1 Calculer le prix du sous-jacent

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t) \quad (1)$$

$$\iff \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t \quad (2)$$

On prend l'équation 1 :

$$= dS_t = S_t rdt + \sigma S_t^{1.5} dW_t$$

Puis

$$\begin{aligned} d\langle S_t, S_t \rangle &= \langle dS_t, dS_t \rangle = \\ &= \langle S_t rdt + \sigma S_t^{1.5} dW_t, S_t rdt + \sigma S_t^{1.5} dW_t \rangle = \\ &= \langle \sigma S_t^{1.5} dW_t, \sigma S_t^{1.5} dW_t \rangle = \\ &= S_t^3 \sigma^2 \langle dW_t, dW_t \rangle = \\ &= S_t^3 \sigma^2 dt \end{aligned} \quad (3)$$

On pose : $X_t = \ln(S_t)$

$$\text{Formule d'Ito : } d\ln(S_t) = \frac{dS_t}{S_t} + \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} d\langle S_t, S_t \rangle$$

Avec les équations 2 et 3 : (4)

$$\begin{aligned} d\ln(S_t) &= rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t - \frac{1}{2}S_t\sigma^2dt = \\ &= (r - \frac{1}{2}S_t\sigma^2)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &= \ln(S_t) - \ln(S_0) = \int_0^t d\ln(S_u) = \\ &= \int_0^t (r - \frac{1}{2}S_u\sigma^2)du + \int_0^t \sigma\sqrt{S_u}dW_u \end{aligned} \quad (5)$$

...

Donc on ne peut pas facilement dériver une formule pour le prix comme ça, qui dépend que des variables fixées, mais on peut le simuler pas à pas avec (1) :

$$\begin{aligned}
S_0 &\text{ soit connu} \\
dS_0 &= S_0(rdt + \sigma\sqrt{S_0}dW_0) \\
S_1 &\approx S_0 + dS_0 \\
dS_1 &= S_1(rdt + \sigma\sqrt{S_1}dW_1) \\
S_2 &\approx S_1 + dS_1 \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{6}$$

Appendices

A Code Matlab

```

%~~~~~%
% UTF-8 %
% 30.11.2021 %
% Valentin DE CRESPIN DE BILLY %
5 % Matthias LANG %
%~~~~~%

% ~~~~~~ %
% ~~~~~~ Mathematiques financieres: Mini-projet 1 ~~~~~~ %
10 % ~~~~~~ %

%% ~~~~~~ Parametres ~~~~~~ %%

S0 = 40; % Prix initial du sous jacent
15 K = 46; % Prix d'exercice de l'option

r = 0.05; % Taux d'interet sous risque neutre
sigma = 0.04/sqrt(S0); % Variance partie fixe

20 N = 5; % Nombre des sous-intervalles
% verifier que N << n => a faire: ecrire un test

```

```

t0 = 0;                                % Debut de la periode
n = 2^9;                              % Nombre de intervalles
T = 3;                                % Fin de la periode
25 nt = 1000;                          % Nombre de trajectoires

starttime = datetime('now');
fprintf('La programme a demarre a %s \n', starttime);
30 fprintf('%d -> Nombre de trajectoires \n', nt);
fprintf('%d -> Prix initial du sous jacent \n', S0)
syms func(x)
obligation(x) = S0*(1+r)^(x-t0);
%K = int(obligation,t0,T)/(T-t0);
35 bonds_T = obligation(T);
fprintf('%0.5g -> Prix d''une obligation a T\n', bonds_T)
fprintf('%0.5g -> Prix d''exercice de l''option \n', K);
fprintf(' . . . \n\n')
tic
40

%% ~~~~~ Simulation ~~~~~ %%

dt = (T-t0)/n;
45 t = t0:dt:T;

S = zeros(n+1,nt);
S(1,:) = S0;

50 % Simulation pas a pas
for i = 2:(n+1)
    dW_t = normrnd(zeros(1,nt),sqrt(dt));
    dSi = S(i-1,:).*( r*dt + sigma*sqrt(S(i-1,:)).*dW_t );
    S(i,:) = S(i-1,:) + dSi;
55 end

```

```

C_inf = zeros(1,nt);
C_val = zeros(1,nt);
60 C_mat = zeros(1,nt);
for j = 1:nt
    S_vec = S(:,j);
    %% ~~~~~ calcul avec X_t ~~~~~ %%

65 X_T = 0.5*S0 + sum(S_vec(2:n,:),1) + 0.5*S_vec(n+1,:);
X_T = X_T/n;

C_inf = X_T - K .* ( X_T - K >= 0 );
C_inf_0 = exp(-r*T)*C_inf;

70 % ~ Estimateur ~
% C_inf * exp(-rT) est une martingale donc
% E[exp(-rT)*C_inf] = C_inf(S_0)

75 C_inf(j)=C_inf_0;

%% ~~~~~ calcul avec X_t_prim (Valentin) ~~~~~ %%

80 X_t_prim = sum(S_vec,1)/(n+1);
%X_t_prim = mean(vecX_t_prim);
C_N = X_t_prim - K .* ( X_t_prim - K >= 0 );

% C_N * exp(-rT) est une martingale donc
85 % E[exp(-rT)*C_N] = C_N(S_0)
C_N_0 = exp(-r*T)*C_N;

C_val(j)=C_N_0;

```

```

90      %% ~~~~~ calcul avec X_t_prim (Matthias) ~~~~~ %%

      %1/N * sum_1^N S_{kT/N}
      % => kT n'est pas un numero entier, il faut arrondir

95      index = fliplr(1:n);
      index = index(1:(n/N):end); % supprimer Warning a cause de arrondir !?
      X_t_matthias = sum(S_vec(index,:),1)/N;

      C_N = X_t_matthias - K .* ( X_t_matthias - K >= 0 );

      % C_N * exp(-rT) est une martingale donc
      % E[exp(-rT)*C_N]= C_N(S_0)
      C_N_0 = exp(-r*T)*C_N;

105      C_mat(j)=C_N_0;

      end

110      %%%%%%%%%%
      % C_inf
      C_inf_est = mean(C_inf);
      C_inf_est_var = var(C_inf);

115      fprintf('L''estimateur du C_inf a t0 = %0.5g\n', ...
              C_inf_est);
      fprintf('Son ecart type = %0.5g\n', sqrt(C_inf_est_var));

      fprintf('\n methodes differentes pour C_N, \n premier Valentin, puis Matthias

120      % Valentin C_inf
      C_N_est_val = mean(C_val);
      C_N_est_var_val = var(C_val);

```

```

fprintf('L''estimateur du C_N a t0 = %0.5g\n', ...
125   C_N_est_val);
fprintf('Son ecart type = %0.5g\n', sqrt(C_N_est_var_val));

% Matthias C_inf
C_N_est_mat = mean(C_mat);
130 C_N_est_var_mat = var(C_mat);

fprintf('L''estimateur du C_N a t0 = %0.5g\n', ...
   C_N_est_mat);
fprintf('Son ecart type = %0.5g\n', sqrt(C_N_est_var_mat));
135

duree= toc;
fprintf('\n')
fprintf('%d trajectoires simules\n', nt);
140 fprintf('Avec S0 = %d, K = %0.5g \n', S0, K);
fprintf('L''integrale par (t_0 - T) de X_t, ');
    fprintf('le prix estime C(T) = %0.5g \n', C_inf_0);
fprintf('La moyenne des X_t: C(T) = %0.5g \n', C_N_0);
fprintf('Fin en %0.5g\n', duree);
145

%% ~~~~~ graphes ~~~~~ %%

% 1:   graphe de S;
150 % 2-3: histogrammes de C_inf et C_N;
% 4:   boxplot des estimateurs

fprintf('\n 1: graphe de S \n')
input('Tapez [Enter] pour afficher le graphe\n')
155
axis([0 T 0.8*min(min(S)) 1.5*max(max(S))]) %x-axis limits

```

```

plot(t, S)

160 % pour comparaison, si j'epargne pour le taux r:
%plot([t0 T], [S0 S0*(1+r)^(T-t0)], "--k"); % obligation
fplot(obligation, [t0 T], "-k");

legend("les prix S_t des actions", "sans risque");

165

fprintf('\n 2: histogramme de C_inf \n')
input('Tapez [Enter] pour afficher le graphe\n')

170 %  $E_{\pi}(e^{-rT}(X_T - K)^+ / F_0) \sim 1/nt \sum \{C(T)\}$ 
histogram( C_inf );
title("Histogramm des C(T) pour X_{infinie}");

175 fprintf('\n 3: histogramme de C_N \n')
input('Tapez [Enter] pour afficher le graphe\n')

histogram( C_mat );
title("Histogramm des C(T) pour X_{N}");

180

fprintf('\n 4: boxplot des estimateurs \n')
input('Tapez [Enter] pour afficher le graphe\n')

185 tiledlayout(1,2)
nexttile
hold on

boxplot( C_inf );

190 title('boxplot de C_{infinie} a T')
ylabel(C_T, valeurs actualisees)

```



```

hold off
nexttile
195 hold on

boxplot ( C_mat );
title('boxplot de C_{N} a T')

200 hold off

```

B Code VBA

```

Rem Attribute VBA_ModuleType=VBAModule
Option VBASupport 1
5 Sub Macro1()

Dim T, n, nt, Nd As Integer
Dim r, sigma, S0, t0 As Double

10 Dim i, j As Integer

r = Range("A2").Value
sigma = Range("A3").Value
15 T = Range("A4").Value
n = Range("A5").Value
nt = Range("A6").Value
Nd = Range("A7").Value
S0 = Range("A8").Value
20 t0 = Range("A9").Value

Dim dt As Double

```

```

dt = ((T - t0) / n)

25 Dim temps() As Double
   ReDim temps(n + 1)
   temps(0) = t0
   For j = 1 To n + 1
       temps(j) = temps(j - 1) + dt
30 Next

Range("I2:I" & UBound(temps) + 1) = WorksheetFunction.
    Transpose(temps)

35 Dim S() As Double
   ReDim S(1 To n + 1, 1 To nt)
   Dim W As Double
   Dim x As Double

40 For j = 0 To nt - 1
   For i = 0 To n

       If i = 0 Then
           W = 0
45       Else
           W = W + Sqr(-2 * Log(Rnd())) * Cos(6.283185307 * Rnd()
               ) * Sqr(dt)
       End If

       x = S0 * Exp((r - (sigma ^ 2) / 2) * (temps(i) - t0) +
           sigma * W)
50 Cells(2 + i, 10 + j).Value = x ' copier s dans la
       worksheet
       'S(i, j) = x

```

```

Next
Next

55
'Cells(i, 3).Value =

60
'S = zeros(length(t),nt);
'for i = 1:nt
'    S(:,i) = brownmo(S0, r, sigma ,t0, T, n); %brownmo
    est definie en bas
'End

65
'function S = brownmo(X0, mu, sigma, t0, T, n) %x0

'    delta = (T-t0)/n;
'    W = zeros(1,n+1);
70 '    tseq = t0:(T-t0)/n:T;
'    for i = 2:(n+1)
'        W(i) = W(i-1)+normrnd(0,1)*sqrt(delta);
'    End
'    S = X0 * exp( (mu-(sigma^2)/2) * (tseq-t0) + sigma*W );

75
MsgBox "Simule pour " & nt & " trajectoires."

'Sheets("Dashboard").Activate
'Range("Parametres").Select
80 'Range("A13").Value = T

End Sub

```