

# **Mini projet 1: Calcul du prix d'une option asiatique**

Valentin DE CRESPIN DE BILLY

Matthias LANG

09.01.2022

N. d'étudiant : 247067 et 313411

Université Catholique de l'Ouest

Mathématiques financières

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Énoncé . . . . .	3
1.2	Présentation . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Calculs préalables</b>	<b>4</b>
2.1	Calcul du prix du sous-jacent . . . . .	4
2.2	Calcul du prix de l'option asiatique . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Simulation de quelques trajectoires</b>	<b>6</b>
3.1	Simulation <i>MATLAB</i> . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Fonctionnement des programmes</b>	<b>7</b>
4.1	Simulation de Monte-Carlo . . . . .	7
4.1.1	Principe de base . . . . .	8
4.1.2	Application . . . . .	8
4.2	Variable antithétique . . . . .	9
4.3	Variables de contrôle . . . . .	10
4.3.1	Variable de contrôle 1 . . . . .	11
4.3.2	Variable de contrôle 2 . . . . .	11
4.3.3	Variable de contrôle 3 . . . . .	13
4.3.4	Variable de contrôle 4 . . . . .	13
4.3.5	Variable de contrôle 5 . . . . .	14
4.4	Recalcul du cours moyen du sous jacent . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Énoncé

Soient  $T, r$  et  $\sigma$  des réels positifs et,  $W_t, t \in [0, T]$ , un mouvement brownien standard. on considère alors la diffusion  $(S_t)$  vérifiant, pour tout  $t$  dans  $[0, T]$  :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t)$$

où  $r$  représente le taux sans risque supposé constant.

On considère maintenant une option d'achat permettant à la date  $T$  d'acheter une unité du sous-jacent au prix du cours moyen observé sur la période  $[0, T]$ . Le *Payoff* d'une telle option s'écrit ;

$$\varphi(S_t, 0 \leq t \leq T) = e^{-rT}(X_T - K)^+$$

où la variable aléatoire  $X_t$  est définie par

$$X_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$$

## 1.2 Présentation

En temps normal, le choix d'un détenteur d'une option par exemple européenne, est directement lié au prix initial du sous-jacent. Ceci ne dépend en aucun cas de la tendance du prix du sous-jacent entre la date initiale et la date finale. De même pour l'option américaine, cela dépendra du moment où l'option est exercée. Or ces options coûtent relativement cher. C'est pourquoi, les options asiatiques ont été créées afin d'essayer de remédier à ce problème.

Une option asiatique permet à son détenteur de prendre comme référence le cours moyen d'un sous-jacent et non son prix final. Bien entendu, le prix d'exercice sera encore fixé à l'avance. Cette moyenne peut être observée sur la durée entière de l'option mais aussi bien sur le dernier mois ou sur la dernière semaine par exemple. De plus, les observations peuvent être journalières, hebdomadaires, etc. C'est aux parties de décider de ces caractéristiques.

Dans la suite de ce projet, nous allons considérer que cette moyenne est calculée sur toute la vie du contrat, c'est à dire de 0 à  $T$ . Elle sera représenté par  $X_t$ .

## 2 Calculs préalables

### 2.1 Calcul du prix du sous-jacent

Nous avons donc un produit dont l'équation de diffusion est la suivante.

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t$$

dans laquelle  $r$  est le taux sans risque et  $\sigma$  la volatilité.

Nous avons essayé d'obtenir une équation qui ne dépend que des variables connues comme la formule de Black-Scholes.  $\left(\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t \Rightarrow S_t = S_0 \exp^{(t(\beta - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma W_t)}\right)$

Ainsi, on pose  $X_t = \ln(S_t)$ . On a donc :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x) \\ f'(x) = \frac{1}{x} \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

D'après la formule d'ITO, on a

$$dX_t = d\ln(S_t) = \frac{dS_t}{S_t} + \frac{1}{2} \frac{-1}{(S_t)^2} d\langle S_t, S_t \rangle$$

Avec :

$$\begin{aligned} d\langle S_t, S_t \rangle &= \left\langle S_t r dt + S_t \sigma \sqrt{S_t} dW_t, S_t \beta dt + S_t \sigma \sqrt{S_t} dW_t \right\rangle \\ &= \left\langle \underbrace{\int_0^t r du}_{VB} + \underbrace{\int_0^t S_u \sigma \sqrt{S_u} dW_u}_{martingale}, \underbrace{\int_0^t S_u r du}_{VB} + \underbrace{\int_0^t S_u \sigma \sqrt{S_u} dW_u}_{martingale} \right\rangle \\ &= \left\langle \int_0^t S_u \sigma \sqrt{S_u} dW_u, \int_0^t S_u \sigma \sqrt{S_u} dW_u \right\rangle \\ &= \left\langle S_t \sigma \sqrt{S_t} dW_t, S_t \sigma \sqrt{S_t} dW_t \right\rangle \\ &= \int_0^t (S_u)^3 \sigma^2 d\langle W_u, W_u \rangle \\ &= S_t^3 \sigma^2 \langle dW_t, dW_t \rangle \end{aligned}$$

Donc

$$d\ln(S_t) = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{1}{(S_t)^2} S_t^3 \sigma^2 \underbrace{\langle dW_t, dW_t \rangle}_{=dt}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t dt \\
&= r dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t - \frac{\sigma^2}{2} S_t dt \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2 S_t}{2}\right) dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t \\
\ln(S_t) - \ln(S_0) &= \int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} S_t\right) dt + \int_0^t \sigma \sqrt{S_t} dW_t \\
\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &= rt - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} S_t dt + \sigma \int_0^t \sqrt{S_t} dW_t \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Nous ne sommes pas parvenu à transformer l'équation de diffusion de l'option asiatique en un équation où  $S_t$  dépend seulement des autres paramètres connus.

## 2.2 Calcul du prix de l'option asiatique

Soit  $C_t$ , le prix de l'option asiatique et  $K$  le prix d'exercice à la maturité de l'option.

On a :

$$C_t = \max(S_t - K, 0) = (X_t - K)^+$$

$$\text{avec } X_t = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$$

Dans la suite de notre projet, nous allons utiliser la méthode des trapèzes pour calculer cette intégrale.

### Méthode de trapèzes :

La méthode des trapèzes est une méthode pour le calcul numérique d'une intégrale s'appuyant sur l'interpolation linéaire par intervalles.

Soit  $n$ , le nombre d'intervalles et  $l$ , la largeur d'un intervalle ( $\Rightarrow l = T/n$ ), on note alors  $\tilde{\mathcal{A}}_{S_T}$ , l'approximation de l'aire  $\mathcal{A}_{S_T}$  sous la courbe  $S_t$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{S_T} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{S_{k \cdot T}}{n} + \frac{S_{(k+1) \cdot T}}{n}}{2} \cdot l \\
&= \left( \frac{1}{2} S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S_{\frac{k \cdot T}{n}} + \frac{1}{2} S_n \right) \cdot l
\end{aligned}$$

Ensuite, une fois que nous avons obtenu l'aire sous la courbe représentant le sous-jacent dans le temps, on divise cet aire par le nombre d'intervalles pour obtenir une valeur du

cours moyen.

Ainsi,

$$\tilde{X}_T = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_{S_T}}{T} = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_{S_T}}{n \cdot l} = \frac{\frac{1}{2}S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S_{\frac{k \cdot n}{T}} + \frac{1}{2}S_n}{n}$$

On peut ensuite approximer le payoff actualisé d'une option asiatique :

$$\tilde{\varphi}(S_t, 0 \leq t \leq T) = e^{-rT}(\tilde{X}_T - K)^+$$

### 3 Simulation de quelques trajectoires

Puisque nous ne sommes pas parvenus à trouver une équation dans laquelle  $S_T$  dépend de  $S_0$  et de  $t$ , nous allons utiliser la méthode d'Euler pour simuler une trajectoire.

Soit  $S_0$ , connu, les valeurs suivantes sont :

$$\begin{aligned} dS_0 &= S_0(rdt + \sigma\sqrt{S_0}dW_0) \\ S_1 &\approx S_0 + dS_0 \\ dS_1 &= S_1(rdt + \sigma\sqrt{S_1}dW_1) \\ S_2 &\approx S_1 + dS_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

#### 3.1 Simulation *MATLAB*

Voici le pseudo de notre programme *MATLAB* qui permet de simuler 15 trajectoires.

---

**Algorithm 1** Simulation de 15 trajectoires

---

**Require:**  $T \geq 0$

▷ Cours du sous-jacent pendant une durée  $T$

$n \geq 0$

▷ Nb de sous-périodes

$dt = T/n$

▷ Durée de la sous période

$S = [15 \times n]$

▷ Matrice de 0 de taille  $[15 \times n]$

$S[1, \cdot] = S_0$

▷ 1<sup>e</sup> colonne =  $S_0$

**Ensure:**

**for**  $i$  de 2 à  $n$  **do**

$dW_t \leftarrow [15, 1] \times \text{aléa}(\mathcal{N}(0, \sqrt{dt}))$

▷ Terme à terme

$dS_i \leftarrow S[(i-1), \cdot] \times (r \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{S[(i-1), \cdot]} \cdot dW_t$

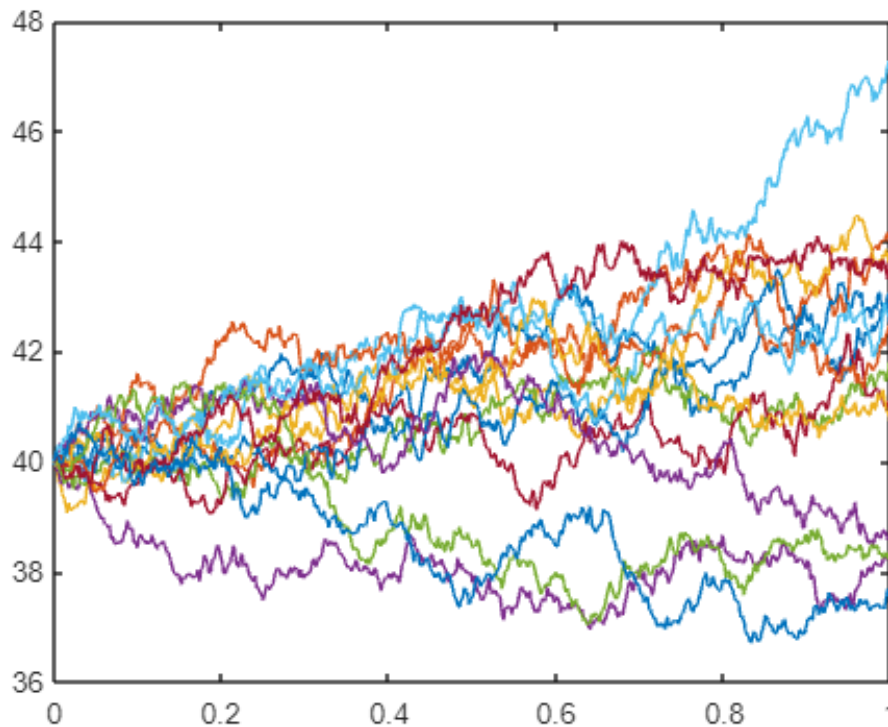
▷ Terme à terme

$S[:, i] \leftarrow S[:, (i-1)] + dS_i$

**end for**

---

L'application de ce code avec  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $s_0 = 40$ ,  $n = 2^9$  et  $T = 1$ an donne le résultat suivant :



## 4 Fonctionnement des programmes

Notre programme s'articule autour de 4 grandes parties : une simulation de Monte-Carlo, une simulation de Monte-carlo en utilisant des variables antithétiques, des simulations de Monte-Carlo avec réduction de la variance et enfin une dernière partie dans laquelle nous calculons le cours moyen du sous-jacent d'une autre manière que celle expliquée précédemment.

### 4.1 Simulation de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode de calcul par simulation qui sert d'alternative au calcul théorique, lorsque cette option est complexe, voire même impossible à mettre en oeuvre. Cette méthode est une application directe de la loi forte des grands nombres ainsi que du théorème central limite.

#### 4.1.1 Principe de base

On souhaite calculer l'espérance d'une variable aléatoire  $S$  simulable. Il s'agit alors de simuler un grand nombre de fois la variable  $X$  puis de calculer la moyenne de nos observations. La loi forte des grands nombres nous indique alors que la moyenne observée converge presque sûrement vers la moyenne théorique, à savoir :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(S)$$

On peut aussi estimer la précision du calcul grâce au théorème central limite. En effet, celui-ci nous indique que, pour un nombre de simulations suffisamment grand, la somme des variables simulées peut être approximée par une loi normale d'espérance  $n\mu$  et de variance  $n\sigma^2$  où  $n$  est le nombre de variables simulées et  $\sigma$  est l'écart-type de  $X$ . Il en découle la relation suivante :

$$\overline{S}_n \xrightarrow{approx} \mathcal{N}\left(x, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\overline{S}_n - x}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{approx} \mathcal{N}(0, 1)$$

On peut utiliser cette relation pour calculer un intervalle de confiance à 95% :

$$IC_{95\%}(s) = \left[ \overline{S}_n - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{S}_n + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

où  $c = 1,96$  est le quantile de la loi normale centrée réduite à 95% et  $\sigma$  est l'écart-type observé.

#### 4.1.2 Application

Durant tout notre programme, afin de simuler le cours du sous-jacent, nous effectuons une boucle en temps. Chaque passage dans la boucle marque l'écoulement d'un pas de temps.

De la même manière que pour la simulation des trajectoires expliquée précédemment, l'initialisation du programme passe la création d'un vecteur de taille  $n$  contenant la valeur  $S_0$ . Un second vecteur est également créé afin de permettre de calculer l'aire sous la courbe représentant le sous-jacent : ce vecteur  $X$  de taille  $n$  contient  $S_0/2$  (cf.méthode des trapèzes).

Ensuite, à chaque itération nous simulons l'accroissement du brownien  $dW_t$  qui suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart type  $\sqrt{T/n}$ , où  $T$  est la date d'échéance de l'option (la date



d'effet de l'option se situe à  $t = 0$ ) et  $n$  le nombre de pas. Ces accroissements sont simulés un très grand nombre  $nt$  de fois, puis stockés dans un vecteur de dimension  $n$ . On construit ensuite le  $S_t$  en lui ajoutant le vecteur  $dS_t$  construit tel que décrit précédemment. On ajoute également au vecteur  $X$  le nouveau vecteur  $S_t$ .

A noter qu'à chaque passage dans la boucle les vecteurs  $dW_t$  et  $S_t$  sont écrasés et remplacés par leurs nouvelles valeurs.

A la fin de la boucle, le vecteur  $S$  représente  $S_T$ , c'est à dire la valeur du sous-jacent. Dans le but de retrouver la formule des trapèzes, la moitié du vecteur  $S$  est retranché à  $X$ .

Pour connaître le cours moyen de chacune des  $nt$  simulations de trajectoire, on divise le vecteur  $X$  par  $n$ . On applique ensuite la formule  $\varphi(S_t, 0 \leq t \leq T) = e^{-rT}(X_T - K)^+$  à chacun des éléments du vecteur  $X$ .

Ce nouveau vecteur contient donc les valeurs  $C_t$  actualisées pour chacune des  $nt$  simulations. D'après le principe de Monte-Carlo (qui s'appuie sur le théorème central limite et la loi des grands nombre), la moyenne empirique converge vers la moyenne théorique, ainsi la moyenne de ce vecteur correspond à l'espérance moyenne de gain actualisée pour un sous-jacent suivant cette équation de diffusion :  $dS_t = S_t(rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t)$

Voici le résultat de cette simulation :

	$C_T$	<b>IC<sub>95%</sub></b>	<b>Largeur IC</b>	<b>Temps</b>	<b>Coeff. d'efficacité</b>
<b>Monte-Carlo</b>	2.875	[2.865; 2.886]	0.021	6.247	0.052

Le coefficient d'efficacité est le produit de la largeur de l'intervalle de confiance par la racine carré du temps. celui-ci va nous permettre de comparer les différentes méthode de simulation.

## 4.2 Variable antithétique

Suite aux résultats de la simulation Monte Carlo, nous voulons approximer le prix avec plus d'exactitude. Nous avons donc utilisé des méthodes de réduction de variance pour réduire l'intervalle de confiance où est situé le prix.

Dans un premier temps, nous avons mis en place une variable antithétique.

la technique de la variable antithétique consiste à choisir un nouvel échantillon identiquement distribué selon la loi du premier, mais la particularité de cet échantillon est qu'il est dépendant du premier, c'est à dire  $Cov(X, X') \neq 0$ .

Dans ntre cas, le sous-jacent est construit à partir de mouvement browniens, il suit donc une

loi normales.

nous allons donc opter pour un second échantillon construit comme ci-dessous :

Soit  $W'_t = -W_t$  où  $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{dt})$

Donc  $dS_t = S_t(rdt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t)$  et  $dS'_t = S'_t(rdt + \sigma\sqrt{S'_t}dW'_t) = S'_t(rdt - \sigma\sqrt{S_t}dW_t)$  avec  $S_0 = S'_0$

Ainsi on a

$$\varphi(S_t, 0 \leq t \leq T) = e^{-rT}(X_T - K)^+ \text{ et } \varphi(S'_t, 0 \leq t \leq T) = e^{-rT}(X'_T - K)^+$$

avec

$$X_T = \int_0^T S_u du \text{ et } X'_T = \frac{1}{T} \int_0^T S'_u du$$

Donc  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X') = x$  puisque les échantillons suivent la même loi.

Nous faisons par la suite la même simulation de Monte-Carlo mais nous faisons en plus la génération de ce nouvel échantillon et à la fin, la moyenne des deux échantillons. Nous obtenons ainsi la valeur actualisée de notre option asiatique en faisant la moyenne de la moyenne des deux échantillons.

Voici le résultat de cette simulation :

	$C_T$	IC <sub>95%</sub>	Largeur IC	Temps	Coeff. d'efficacité
<b>Variable antithétique</b>	2.873	[2.867; 2.879]	0.012	8.355	0.035

### 4.3 Variables de contrôle

La méthode des variables de contrôle consiste à générer une variable  $X$  (celle que nous avons pour la simulation de Monte-Carlo) et une variable de contrôle  $Y$  telle que :

- $X$  et  $Y$  soient corrélées
- $\mathbb{E}(Y)$  est connue (calculable à la main)
- $Y$  est simulable

Puis nous posons  $Z_i = X_i - \lambda(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))$ . Le but est de trouver une valeur de  $\lambda$  telle que  $\lambda$  minimise  $\mathbb{V}(Z)$ . on obtient ainsi :

$$\lambda = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{V}(Y)}$$

Dans le programme, nous sommes obligés de calculer dans deux boucles différentes  $\lambda$  et  $X$  afin de ne pas introduire de biais.

Nous avons donc choisi x variables de contrôle :

1.  $W_t$
2.  $\frac{1}{n} \int_{t=0}^n \left( S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} W_u du \right) dt$
3.  $S_T$  tel que  $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \alpha dW_t$  (modèle de BLACK-SCHOLES) avec  $\alpha = 0.1$
4. le prix terminal d'un option européenne :  $C_T = (S_T - K)^+$
5.  $e^{\frac{W_T}{S_0}}$

#### 4.3.1 Variable de contrôle 1

On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(W_T) &= \mathbb{E}(W_T - W_0) \\
 &= \mathbb{E}(W_1 - W_0 + W_2 - W_1 + \dots + W_T - W_{T-1}) \\
 &= \mathbb{E} \left( \sum_0^{T-1} dW_t \right) \\
 &= \sum_0^{T-1} \mathbb{E}(dW_t) \\
 &= 0, \text{ car par définition } dW_t \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{dt}) \text{ donc } \mathbb{E}(dW_t) = 0
 \end{aligned}$$

	$C_T$	IC <sub>95%</sub>	Largeur IC	Temps	Coeff. d'efficacité
<b>Var. de contrôle 1</b>	2.878	[2.870; 2.885]	0.015	6.561	0.039

#### 4.3.2 Variable de contrôle 2

On a  $\sum_0^{t-1} dW_k = (W_1 - W_0) + (W_2 - W_1) + \dots + (W_t - W_{t-1}) = W_t - W_0$ , or par définition

$W_0 = 0$  donc  $\sum_0^{t-1} dW_k = W_t$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_i] &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \int_0^T S_0 + W_u du \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2}(S_0 + W_0) + \sum_1^{n-1} (S_0 + W_i) + \frac{1}{2}(S_0 + W_n) \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \left( n \times S_0 + \frac{1}{2}(W_0 + W_n) + \sum_1^{n-1} W_i \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_0 + \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2}(W_0 + W_n) + \sum_1^{n-1} (W_i) \right) \right] \\
&= S_0 + \frac{1}{n} \times \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{2}(W_0 + W_n) + \sum_1^{n-1} (W_i) \right) \right] \\
&= S_0 + \frac{1}{n} \times 0 = S_0
\end{aligned}$$

Deux temporaires  $[t, s]$  et  $[v, u]$ , sans chevauche ( $[t, s] \wedge [v, u] = \emptyset$ ) ont valeurs de  $W$  qui sont indépendant. La variance, sachant que  $\mathbb{E}[W_1 * W_2] = \mathbb{E}[W_{t_1}] * \mathbb{E}[W_{t_2}] = 0$  et  $Var(W_{t_1}) = t_1$ , donc  $cov(W_{t_1}, W_{t_2}) = t_1$  :

$$\begin{aligned}
var(X_i) &= var\left(\frac{1}{n}(S_0 + \sum_{i=1}^n W_{t_i})\right) \\
&= \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^n W_{t_i}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n W_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^n W_{t_i}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n cov(W_{t_i}, W_{t_i}) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n cov(W_{t_i}, W_{t_j}) \\
&= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i cov(W_{t_i}, W_{t_j}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n cov(W_{t_i}, W_{t_j}) \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i t_k + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n t_i \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left( T \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{k}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{i}{n} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left( \frac{T}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) \right) \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{T}{n} \left( \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{6} n(n-1)(n+1) \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{T}{6} (2n^2 + 3n + 1)
\end{aligned}$$

	$C_T$	IC <sub>95%</sub>	Largeur IC	Temps	Coeff. d'efficacité
<b>Var. de contrôle 2</b>	2.878	[2.870; 2.885]	0.015	6.561	0.039

### 4.3.3 Variable de contrôle 3

On a

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \alpha dW_t$$

donc

$$S_T = S_0 e^{(T(r-\frac{1}{2}\alpha^2) + \alpha \cdot W_T)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_T) &= \mathbb{E}\left(S_0 e^{(T(r-\frac{1}{2}\alpha^2) + \alpha \cdot W_T)}\right) \\ &= S_0 \cdot e^{T(r-\frac{1}{2}\alpha^2)} \cdot \mathbb{E}\left(e^{\alpha \cdot W_T}\right) \\ &= S_0 \cdot e^{T(r-\frac{1}{2}\alpha^2)} \cdot e^{\mathbb{E}(W_T) + \frac{1}{2}\alpha^2 \mathbb{V}(W_T)} \\ &= S_0 \cdot e^{T(r-\frac{1}{2}\alpha^2)} \cdot e^{\frac{T \cdot \alpha^2}{2}} \\ &= S_0 e^{rT} \end{aligned}$$

En effet, d'après la définition du mouvement brownien,  $dW_{t'} = W_{t'} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t' - t})$  donc  $W_T = W_T - W_0 \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{T - 0})$  et ainsi  $\mathbb{V}(W_T) = T$

Dans le cas de cette variable de controle, on a posé  $\alpha = 0.1$ .

	$C_T$	IC <sub>95%</sub>	Largeur IC	Temps	Coeff. d'efficacité
<b>Var. de contrôle 3</b>	2.878	[2.870; 2.885]	0.015	6.561	0.039

### 4.3.4 Variable de contrôle 4

On a

$$C_T = (S_T - K)^+ \quad S_T = S_0 e^{T(r-\frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma \underbrace{(W_T - W_0)}_{\sqrt{T}Z}}$$

avec  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

On cherche à déterminer  $\mathbb{E}[C_T]$

$$\text{Donc } \mathbb{E}[C_T] = \mathbb{E}\left[\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + r\sqrt{T}Z} - K\right)^+\right]$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_T] &= \mathbb{E} \left[ \left( S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + r\sqrt{T}Z} - K \right)^+ \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + r\sqrt{T}z} - K \right)^+ f_Z(z) dz \\
&= \int_{z_0}^{\infty} \left( x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + r\sqrt{T}z} - K \right) f_Z(z) dz \\
&= x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T} \underbrace{\int_{z_0}^{\infty} e^{r\sqrt{T}z} f_Z(z) dz}_I - K \underbrace{\int_{z_0}^{\infty} f_Z(z) dz}_{= K F_Z(-z_0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{z_0}^{\infty} e^{r\sqrt{T}z} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2r\sqrt{T}z)} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} dz \\
&= \int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T})^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 T} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} dz \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} \int_{z_0}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T})^2} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} dz \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} \int_{z_0 - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} du \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} \int_{z_0 - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} f_Z(u) du \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} F_Z(\sigma\sqrt{T} - z_0)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_t] &= x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} F_Z(\sigma\sqrt{T} - z_0) - K F_Z(-z_0) \\
&= x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \frac{1}{2}\sigma^2 T} F_Z(\sigma\sqrt{T} - z_0) - K F_Z(-z_0) \\
&= S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \frac{1}{2}\sigma^2 T} F_Z(d_1) - K e^{-r\tau} F_Z(d_2)
\end{aligned}$$

avec  $d_1 = \sigma\sqrt{T} - z_0$  et  $d_2 = -z_0$

	$C_T$	IC <sub>95%</sub>	Largeur IC	Temps	Coeff. d'efficacité
Var. de contrôle 4	2.878	[2.870; 2.885]	0.015	6.561	0.039

On pose  $x = S_t$  et d'après le théorème de transfert on a  $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(x) dx$  où  $f_X(x)$  est la fonction de répartition de la loi de  $X$ .

$$\begin{aligned}
\text{Or } x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + r\sqrt{T}z} - K &> 0 \\
\Rightarrow z &> \underbrace{\frac{\ln(\frac{K}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2}T)}{\sigma\sqrt{T}}}_{z_0}
\end{aligned}$$

On pose  $u = z - \sigma\sqrt{T} \Rightarrow du = dz$

#### 4.3.5 Variable de contrôle 5

On a

$$e^{\frac{W_T + S_0}{S_0}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ e^{\frac{S_0 + W_T}{S_0}} \right] &= e^{\mathbb{E} \left[ \frac{W_T}{S_0} \right] + 0.5 \mathbb{V} \left( \frac{W_T}{S_0} \right)} \\
&= e^{0 + \frac{1}{2S_0^2} \mathbb{V}(W_T) + 1} \\
&= e^{\frac{T}{2S_0^2} + 1}
\end{aligned}$$

	$C_T$	IC <sub>95%</sub>	Largeur IC	Temps	Coeff. d'efficacité
<b>Var. de contrôle 5</b>	1.361	[1.359; 1.363]	0.004	13.926	0.010

## 4.4 Recalcul du cours moyen du sous jacent

Dans cette partie, nous recalculons le cours moyen du sous-jacent, mais cette fois nous n'utilisons plus l'intégrale pour connaître la moyenne mais nous ne gardons que certaines valeurs réparties uniformément sur la durée de vie de l'option.

Ainsi de la même manière que pour la méthode de Monte Carlo nous simulons un certain nombre de trajectoires mais au lieu de stocker la valeur de chacun des intervalles, seulement certaines sont mises de côté.

	$C_T$	IC <sub>95%</sub>	Largeur IC	Temps	Coeff. d'efficacité
<b>C</b>	2.878	[2.870; 2.885]	0.015	6.561	0.039

$$\begin{aligned}
C_N(S_0) &\geq C_\infty(S_0) \\
\mathbb{E}(X'_T - K)^+ &\geq \mathbb{E}(X_T - K)^+ \\
\mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} S_{kT} - K \right)^+ &\geq \mathbb{E} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+
\end{aligned}$$

## 5 Conclusion

Voici une synthèse de notre programme matlab.

Nous l'avons fait tourner avec les paramètres suivant :

- $S_0 = 40$ , le prix initial,
- $K = 41$ , le strike,

- $r = 0.05$ , le taux sans risque,
- $\sigma = 0.01$ , la volatilité,
- $t_0 = 0$ , le début de l'option,
- $T = 2$ , la maturité de l'option,
- $n = 1000$ , le nombre d'intervalle,
- $n_{lambda} = 500$ , le nombre de boucle pour claculer le  $\lambda$  pour les variables de contrôles,
- $nb_{trajectoires} = 1000000$ , le nombre de trajectoires simulées,
- et  $nb = 700$ , le nombre de sous-intervalles pour camculer  $C_N$

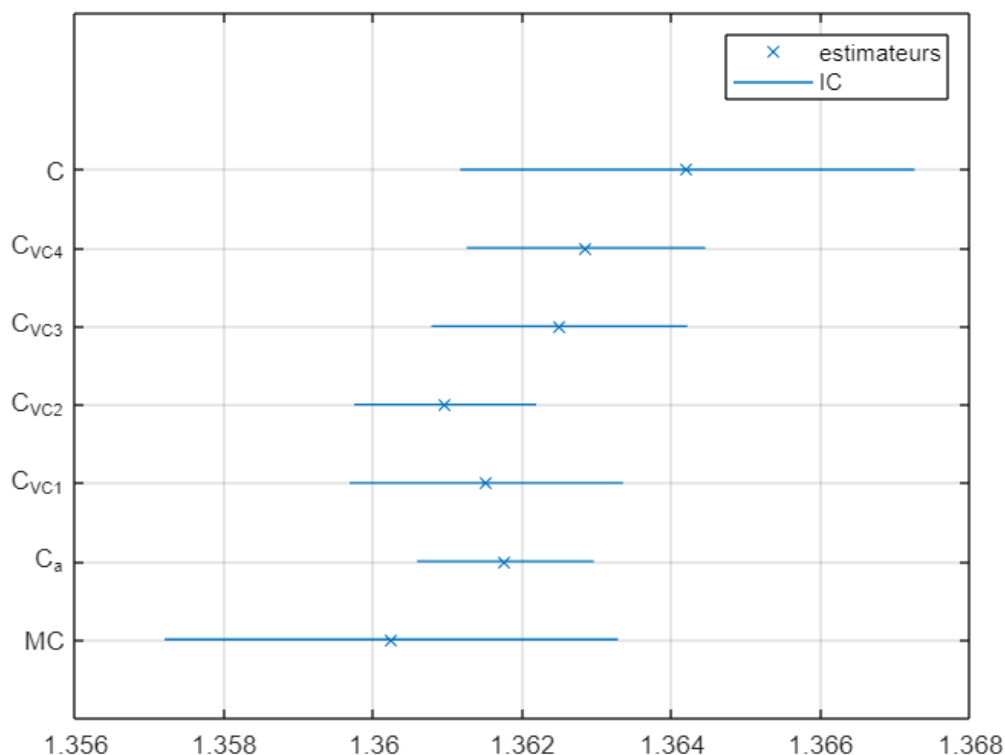
	$C_T$	IC <sub>95%</sub>	Largeur IC	Temps	Coeff. d'efficacité
<b>Monte-Carlo</b>	1.360	[1.357; 1.363]	0.006	12.119	0.021
<b>Var. antithétique</b>	1.362	[1.361; 1.363]	0.002	14.055	0.009
<b>Var. de contrôle 1</b>	1.362	[1.360; 1.363]	0.004	13.586	0.014
<b>Var. de contrôle 2</b>	1.361	[1.360; 1.362]	0.002	13.641	0.009
<b>Var. de contrôle 3</b>	1.362	[1.361; 1.364]	0.003	13.492	0.013
<b>Var. de contrôle 4</b>	1.363	[1.361; 1.364]	0.003	13.245	0.012
<b>Var. de contrôle 5</b>	1.361	[1.359; 1.363]	0.004	13.926	0.012
<b>C</b>	1.364	[1.361; 1.367]	0.006	12.882	0.022

D'après la synthèse ci-dessus, on peut voir que le meilleur estimateur, c'est à dire celui qui a le coefficient d'efficacité le plus bas, est la variable de contrôle n°2 suivi de près par la variable antithétique.

Nous avons pu faire ce constat à chaque fois que nous avons tester ce programme.

On constate que tous nos estimateurs se chevauchent autour de la valeur 1.362. Cependant, les valeurs de l'estimateur  $C$  restent très variables. Celà depend du nombre de valeur que l'on retienr : plus on retient de valeur plus l'intervalle de confiance de cet estimateur chevauche les autres intervalles de confiance.





Nous avons également réalisé un programme VBA sur Excel qui simule la même chose. En revanche, ce programme ne contient pas les variables de contrôles 3, 4 et 5.

Voici une illustration du Dashboard en sortie de ce programme.

