Diskrete Strukturen und Logik: Relationen

Matthias Springer

20. November 2010

Inhalt

Karthesisches Produkt

Definition

$$R = M_1 \times M_2 = \{(x, y) \mid x \in M_1 \wedge y \in M_2\}$$

- M_1, M_2 beliebige Mengen
- (x, y) heißt *Geordnetes Paar* oder *2-Tupel*.
- $M_1 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in M_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in M_n\}$

Definition der Relation

- Binäre Relation: $R \subseteq M_1 \times M_2$
- n-äre Relation: $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$
- $\overline{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin R\}$
- Schreibweisen
  - $(x, y) \in R$
  - $R(x, y)$
  - xRy
  - x steht in Relation R zu y.
  - $x(\neg R)y \equiv (x, y) \notin R$

Beispiele für Relationen

1. Relation zu Lehrveranstaltungen:
   $Professor = \{G, M, W\}$,
   $Vorlesung = \{DS, MOD1, MOD2, GdS\}$,
   $Veranstaltung \subseteq Professor \times Vorlesung$
   $= \{(G, MOD1), (G, MOD2), (M, DS), (W, GdS)\}$
2. Wurzelfunktion:
   $M_1 = \mathbb{R}^+,\ M_2 = \mathbb{R},\ R \subseteq M_1 \times M_2$,
   $R = \{(x, y) \in M_1 \times M_2 \mid y = \sqrt{x}\}$
3. Nachfolgerrelation auf den natürlichen Zahlen:
   $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$,
   $N = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x + 1\}$

Aussagen auf Relationen

Relationen sind Mengen.

- $R \subseteq S \equiv \forall (x, y) : ((x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in S)$
- $R = S \equiv R \subseteq S \wedge S \subseteq R$

Eigenschaften auf Relationen

- **Reflexivität:** $\forall a \in A : (a, a) \in R$
- **Symmetrie:** $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
- **Antisymmetrie:**
  $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
- **Transitivität:**
  $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
- **Nacheindeutigkeit:**
  $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (a, c) \in R \Rightarrow b = c$
- **Alternativität:** $\forall a, b \in A, a \neq b : (a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \notin R$
- **Assymmetrie:** $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$

Beispiele für Relationen

- $R \subseteq \mathbb{N}^2$, $R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ ist antisymmetrisch und transitiv.
- $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist symmetrisch.

Operationen auf Relationen

- **Mengenoperationen:** $\cup$, $\cap$, $\times$, $\overline{A}$
- **Inverse Relation:** $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$
- **Inneres Produkt:** Sei $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq C \times D$
  $R \otimes S = (A \times C) \times (B \times D) = \{((a, c), (b, d)) \mid aRb \wedge cSd\}$
- **Kringel-Operator:** $R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b : aRb \wedge bRc\}$

Äquivalenzrelationen

Eine Relation R ist Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel: Restklassen modulo m:
$R_m = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid m|(a - b)\}$

- **Reflexivität:** Jede Zahl m teilt 0
- **Symmetrie:** $m|x \Rightarrow m|-x$
- **Transitivität:** $m|(a - b) \wedge m|(b - c)$
  $\Rightarrow \exists k_1 : a - b = k_1 \cdot m \wedge \exists k_2 : b - c = k_2 \cdot m$
  $\Rightarrow \exists k_1 : a - b = k_1 \cdot m \wedge \exists k_2 : b = k_2 \cdot m + c$
  $\Rightarrow \exists k_1, k_2 : a - k_2 \cdot m - c = k_1 \cdot m$
  $\Rightarrow \exists k_1, k_2 : a - c = (k_1 + k_2) \cdot m$
  $\Rightarrow m|(a - c)$

Zerlegung / Partition

$\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ist Zerlegung einer Menge $A \neq \emptyset$ genau dann, wenn

- $A = \bigcup \mathcal{Z}$
- $\emptyset \notin \mathcal{Z}$
- $M_1, M_2 \in \mathcal{Z} : M_1 \neq M_2 \Rightarrow M_1 \cap M_2 = \emptyset$

Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge. Jede Äquivalenzrelation über A definiert eine Zerlegung von A eineindeutig.

Beispiel: Zerlegung in Äquivalenzklassen

- $R_m = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid m|(a-b)\}$
- $Z_i = \{k \cdot m + i \mid k \in \mathbb{Z}\} = [i]_{R_m}$
- $\mathcal{Z} = \{Z_i \mid 0 \leq i < m\}$
- *Beispiel:* $m = 7$, $Z_0 = \{0, -7, 7, 14, -14, \dots\}$
- $[3]_{R_7}$ ist Äquivalenzklasse. $[3]_{R_7} = [10]_{R_7} = \dots$. 3 und 10 sind Repräsentanten der Äquivalenzklasse.

Beispiel: Beweise auf Äquivalenzrelationen (1)

- **Zu zeigen:** Sind R, S Äquivalenzklassen über A, dann auch $R \cap S$.
- **Reflexivität:** $\forall a \in A : (a, a) \in R \wedge (a, a) \in S$
  $\Rightarrow \forall a \in A : (a, a) \in (R \cap S)$
- **Symmetrie:** $(a, b) \in (R \cap S)$
  $\Rightarrow (a, b) \in R \wedge (a, b) \in S$
  $\Rightarrow (b, a) \in R \wedge (b, a) \in S$
  $\Rightarrow (b, a) \in (R \cap S)$

Beispiel: Beweise auf Äquivalenzrelationen (2)

- **Transitivität:** $(a, b) \in (R \cap S) \wedge (b, c) \in (R \cap S)$
  $\Rightarrow (a, b) \in R \wedge (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R \wedge (b, c) \in S$
  $\Rightarrow (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (a, b) \in S \wedge (b, c) \in S$
  $\Rightarrow (a, c) \in R \wedge (a, c) \in S$
  $\Rightarrow (a, c) \in (R \cap S)$

Quellen

- Meinel, C.; Mundhenk, M.: Mathematische Grundlagen in der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. 4. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009